بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی مالی

فضاهای مدل برای اندازه‌های ریسک و کاربردهای آن‌ها در دارایی‌های مالی

نگارنده: پویا صداقت نیا

استادان راهنما

دکتر علیرضا خدّامی
دکتر محمد میر باقری جم

۳۰ دی ۱۳۹۸

تقدیم به

مقدس ترین واژه ها در لغت نامه دلم،

پدر و مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر

و عطوفت آن ها می دانم.

و همچنین خواهر عزیزم که وجودش شادی

بخش و صفایش مایه آرامش من

است.

اکنون که به ياري خداوند این دوره از تحصیل را به پایان رسانده‌ام، بر خود واجب مي‌دانم از استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر علیرضا خدّامی که وجودشان همیشه قوتی برای انجام کارهایم بوده است و بدون شک انجام این پایان نامه بدون کمک و راهنمایی‌های ارزنده ایشان امکان پذیر نبوده است، سپاسگزاري نمایم.
همچنین از دوستان عزیزم آقایان محمد امیدی و محمد صباحی که همراهان همیشگی من بوده‌اند و اوقات خوشی را در کنار هم سپری کرده‌ایم، تقدیر و تشکر دارم.

پویا صداقت نیا
۳۰ دی ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **پویا صداقت نیا** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **فضاهای مدل برای اندازه‌های ریسک و کاربردهای آن‌ها در دارایی‌های مالی** ، تحت راهنمایی **علیرضا خدّامی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود’’ یا “ Shahrood University of Technology ” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

پویا صداقت نیا
۳۰ دی ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

اندازه‌گیری ریسک سبد دارایی‌ها یکی از موضوعات مهم انتخاب سبد بهینه دارایی‌ها است. ریسک سبد دارایی‌ها بر مبنای سود و زیان آن‌ها اندازه گیری می‌شود. در این پایان‌نامه با در نظر گرفتن این شرط که ریسک سبد دارایی‌ها باید برحسب زیان آن‌ها اندازه‌گیری شود و نه سود آن‌ها، مفهوم اندازه ریسک بر اساس زیان تعریف شده است و خواص این دسته از اندازه های ریسک را بررسی می‌کند. در واقع یک چارچوب یا روند کلی برای اندازه‌های ریسک زیان بیان می‌شود . لذا با در نظر گرفتن فضاهای برداری توپولوژیک مرتب و زیر مجموعه‌های خاص و سره‌ای از آن‌ها که تحت عنوان مجموعه‌های پذیرش نام گذاری می‌شوند و همچنین در نظر گرفتن زیر فضاهای متناهی‌البعد خاصی که به آن‌ها فضاهای اطمینان اطلاق می‌شود به همراه یک تابعک قیمت‌گذاری ، یک سه‌تایی به عنوان روش اندازه‌گیری ریسک تعریف می‌گردد. به هر روش اندازه‌گیری ریسک، یک اندازه ریسک متناظر می‌گردد که دارای ویژگی‌های خاصی از جمله محدب بودن، یکنوا بودن و جمع پذیر بودن تحت محدودیت‌های جزئی می‌باشد. همچنین مزدوج دوگان اندازه ریسک متناطر شده به یک روش اندازه‌گیری ریسک تعریف می‌گردد و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار می گیرد. در حالت‌هایی خاص فضاهای مدل L^∞ و $L^\infty_{\mathbb{P}}$ برای اندازه‌های ریسک مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در پایان کاربرد اندازه ریسک زیان برای یک سبد دارایی منتخب مطالعه می‌شود.

کلمات کلیدی :

اندازه ریسک زیان، اندازه ریسک منسجم، اندازه ریسک محدب، مجموعه پذیرش، فضای اطمینان.

فهرست مطالب

نمایه ۷۳

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

کلیات و مفاهیم

به منظور فهم بهتر مطالبی که در این پایان‌نامه ارائه می‌شود، لازم است که ابتدا مفاهیم مقدماتی مورد نیاز مطرح شود. بدین منظور مجموعه‌ای از تعاریف در دو بخش مجزا مفاهیم مالی و مفاهیم ریاضی ارائه می‌شود.

۱.۱ مفاهیم مالی

۱.۱.۱ مقدمه

یک اصل کلی در فرهنگ سرمایه گذاري مبني بر اینکه سرمایه گذار از ریسک و خطر گریزان است و به بازده و سود تمایل دارد وجود دارد. به همین خاطر است که سرمایه گذاران ریسک گریز از ورود سرمایه خود به جایي که خطر و ریسک دارد یا افق نامشخصي در برابر سود و اصل سرمایه شان است، امتناع مي کنند. اما سوال مهم این است که آیا می‌توان جایی یافت که سرمایه‌گذاری در آن ریسک نداشته باشد؟ ریسک و خطر از دست دادن اصل و فرع سرمایه در همه جا است، بعضی سرمایه گذاری‌ها پرخطرهستند و برخی کم خطر . سرمایه گذار با توجه به میزان خطر و ریسک سرمایه‌گذاری، انتظار سود و بازده متناسب را دارد. معمولا سرمایه گذاران به وسیله تجزیه و تحلیل‌های مالی خود به دنبال بازده متناسب با ریسک مربوط می‌باشند. در یک بازار متعارف که در آن عوامل بازار واجد اطلاعات می‌باشند، بازده بالا همواره ریسک بالاتری را به دنبال خواهد داشت. این موضوع موجب می‌شود که همواره تصمیم‌گیری

جهت سرمایه‌گذاری براساس روابط میان ریسک و بازده صورت گیرد و یک سرمایه‌گذار همواره دو عامل ریسک و بازده را در تجزیه و تحلیل و مدیریت سبد سرمایه‌گذاری‌های خود مدنظر قرار دهد. به عبارت دیگر، سرمایه‌گذاری به عنوان یک تصمیم مالی همواره دارای دو مؤلفه ریسک و بازده بوده که مبادله این دو ترکیب‌های گوناگون سرمایه‌گذاری را عرضه می‌کند. از یک طرف، سرمایه‌گذاران به دنبال بیشینه کردن عایدی خود از سرمایه‌گذاری هستند و از طرف دیگر، با شرایط عدم اطمینان حاکم بر بازارهای مالی مواجه هستند که عامل اخیر دستیابی به عواید سرمایه‌گذاری را باعدم اطمینان مواجه می‌کند. عموماً در اقتصاد و به خصوص در سرمایه گذاری ها فرض بر این است که سرمایه‌گذاران منطقی عمل خواهند کرد. سرمایه‌گذاران منطقی، اطمینان را به عدم اطمینان ترجیح می‌دهند و طبیعی است که در این حالت می‌توان گفت سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک علاقه‌ای ندارند، یا به عبارتی سرمایه‌گذاران ریسک گریز هستند. یک سرمایه گذار ریسک گریز [1] ، کسی است که در ازای قبول ریسک، انتظار دریافت بازده خوبی دارد. باید توجه کرد که در این حالت پذیرفتن ریسک یک کار غیر منطقی نیست، اگرچه میزان ریسک خیلی زیاد باشد، چون دراین حالت انتظار بازده بالایی نیز وجود دارد. در واقع، سرمایه گذاران به طور منطقی نمی‌توانند انتظار داشته باشند که بدون قبول ریسک بالا، بازده بالایی کسب کنند. حال باتوجه به اهمیت ریسک و بازده در تصمیمات سرمایه گذاری، در این پایان‌نامه عوامل مؤثر بر ریسک و بازده سرمایه‌گذاری در محصولات مالی در قالب سه دسته عوامل کلان اقتصادی، عوامل خرد اقتصادی و عوامل غیر اقتصادی مورد بررسی قرار می‌گیرد. باتوجه به مرجع [۲] این موارد برقرار است.

۲.۱.۱ سرمایه گذاری

از دیدگاه کلی، سرمایه گذاری به معنای مصرف پول‌های در دسترس برای دستیابی به پول‌های بیشتر در آینده است. به عبارت دیگر سرمایه‌گذاری یعنی به تعویق انداختن مصرف فعلی به منظور دستیابی به امکان مصرف بیشتر درآینده. در سرمایه گذاری دو ویژگی مهم وجود دارد که عبارت است از زمان و ریسک. اهمیت دو موضوع بیان شده به این علت است که در سرمایه‌گذاری صرف پول در زمان حال صورت می‌گیرد و مقدار آن معین است، درحالی که پاداش حاصل از آن در آینده به دست می‌آید و معمولا با عدم اطمینان همراه است. در بعضی مواقع ویژگی زمان غالب می‌شود (مانند اوراق قرضه دولتی) و در بعضی مواقع ریسک از نظر اهمیت مقدم است (مانند برگه اختیار خرید سهام عادی) و در مواقع دیگر هر دو دارای اهمیت هستند (مانند سهام عادی). تمام این موارد از مرجع [۲۲] گرفته شده است.

[1] Risk averse investor

۳.۱.۱ انواع سرمایه‌گذاری

سرمایه‌گذاری‌ها به دو شکل کلی واقعی و مالی تقسیم می‌شوند. سرمایه‌گذاری‌های واقعی، نوعی سرمایه‌گذاری است که فرد با فدا کردن ارزشی در زمان حال، نوعی دارایی واقعی به دست می‌آورد. خرید ملک یا آپارتمان نمونه‌ای از این سرمایه‌گذاری ها است. در سرمایه‌گذاری مالی، فرد در ازای فدا کردن ارزش حاضر، نوعی دارایی مالی که نتیجه آن معمولاً جریانی از وجوه نقد است به دست می‌آورد. دراقتصاد های سنتی اکثر سرمایه‌گذاری ها از نوع واقعی هستند، اما در اقتصاد پیشرفته عمده ی سرمایه‌گذاری‌ها روی دارایی‌های متمرکز صورت می‌گیرد و توسعه مؤسسات سرمایه‌گذاری مالی راه را برای سرمایه‌گذاری واقعی امکان پذیر تر می‌کند. در واقع این دو شکل سرمایه‌گذاری نه تنها در مقابل یک دیگر نیستند، بلکه مکمل هم نیز هستند. موارد بیان شده از مرجع [۸] و [۱۶] اتخاذ شده است.

۴.۱.۱ محیط سرمایه‌گذاری

محیط سرمایه گذاری [1] از یک طرف در برگیرنده انواع اوراق بهادار قابل معامله می‌باشد و از طرف دیگر، وقتی صحبت از محیط سرمایه گذاری می‌شود، باید مکان و چگونگی خرید و فروش اوراق بهادار را نیز مدنظر قرار دهیم. به طور کلی، می‌توان اجزای محیط سرمایه گذاری را به سه دسته تقسیم کرد:

۱. اوراق بهادار یا دارایی های مالی

۲. بازارهای اوراق بهادار یا بازارهای مالی

۳. واسطه‌ها یا مؤسسات مالی

۵.۱.۱ فرآیند سرمایه‌گذاری

در فرآیند سرمایه‌گذاری به چگونگی تصمیم گیری سرمایه‌گذار در اوراق بهادار قابل معامله و میزان سرمایه‌گذاری در هر یک از انواع اوراق بهادار و زمان انجام سرمایه گذاری پرداخته می‌شود. رویه‌ای شامل مراحل زیر برای تصمیم گیری در این باره به عنوان اساس فرآیند سرمایه‌گذاری مطرح است که به صورت خلاصه به آن ها می‌پردازیم:

- خط مشی سرمایه‌گذاری
- تجزیه و تحلیل اوراق بهادار
- تهیه سبد سرمایه گذاری

[1] Investment environment

۶.۱.۱ بازده

معمولاً افراد مصرف فعلی را به مصرف درآینده ترجیح می‌دهند. بنابراین برای تشویق افراد در به تعویق انداختن مصرف فعلی بایستی انتظار کسب پاداش از سرمایه‌گذاری را برای آنان ایجاد کرد. در واقع انتظار کسب بازده [1] یا پاداش سرمایه‌گذاری موجب می‌شود تا سرمایه‌گذاران مصرف در آینده را به مصرف فعلی ترجیح دهند. اغلب از بازده در جهت معرفی بازده سرمایه‌گذاری یک دارایی در طول یک دوره زمانی که به آن بازده دوره نگهداری می گویند استفاده می‌شود و آن عبارت است از تغییرات قیمت و جریانات نقدی حاصل از آن دارایی طی دوره سرمایه‌گذاری. این میزان تغییرات را برحسب درصد بیان می کنند که نشان دهنده درصدی از مبلغ سرمایه‌گذاری است و به آن نرخ بازده سرمایه‌گذاری می‌گویند. نرخ بازده عامل بسیار مهمی در تصمیم گیری‌های مالی به منظور سرمایه گذاری به شمار می‌رود. این موارد از مرجع [۳] بیان شده است.

اجزای بازده

موارد فوق از مرجع [۹] گرفته شده است.

معمولاً بازده از دو بخش اصلی تشکیل می‌شود

- **سود دریافتی** [2]:

مهمترین جزء بازده سودی است که به صورت جریانات نقدی دوره‌ای سرمایه‌گذاری بوده و می‌تواند به شکل بهره یا سود تقسیمی باشد. ویژگی متمایز این دریافتی‌ها این است که منتشر کننده، پرداختی‌هایی را به صورت نقدی به دارنده دارایی پرداخت می‌کند. این جریانات نقدی با قیمت اوراق بهادار نیز مرتبط است.

- **سود (زیان) سرمایه** [3]:

دومین جزء مهم بازده، سود (زیان) سرمایه است که مخصوص سهام عادی است ولی در مورد اوراق قرضه بلند مدت و سایر اوراق بهادار با درآمد ثابت نیز مصداق دارد. به این جزء که ناشی از افزایش (کاهش) قیمت دارایی است، سود (زیان) سرمایه می‌گویند. این سود (زیان) سرمایه ناشی از اختلاف قیمت خرید و قیمت زمانی است که دارنده اوراق قرضه قصد فروش آن ها را دارد. این اختلاف می‌تواند سود یا زیان نیز باشد. مجموع این دو جزء، بازده کل اوراق بهادار را تشکیل می‌دهد و نرخ بازده اوراق بهادار که معیاری جهت تصمیم گیری سرمایه گذاران برای سرمایه‌گذاری است به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$r_{it} = \frac{(P_{it} - P_{it-۱}) + D_{it}}{P_{it-۱}}$$

که در آن:

[1] Return
[2] Yield
[3] Capital gain

r_{it}= نرخ بازده یک قلم دارایی
P_{it}= قیمت سهام در انتهای دوره
P_{it-1}= قیمت سهام در ابتدای دوره
D_{it}= سود تقسیمی در طی دوره.

۷.۱.۱ ریسک

برای واژه‌ی ریسک در منابع مختلف، تعاریف گوناگون ارائه شده است که البته همگی در بردارنده مفهومی واحد هستند. در زیر به برخی ازاین تعاریف اشاره می‌شود:

- ریسک عبارت است از انحراف در پیشامدهایی که می توانند در طول یک دوره ی مشخص، در یک موقعیت معین رخ دهد. این تعریف به این معنا است که چنانچه تنها یک پیشامد ممکن باشد، انحراف و ریسک صفراست و به عبارت دیگر در این صورت احتمالی وجود ندارد و آینده کاملا قابل پیش بینی است.
- ریسک عبارت است از هر چیزی که مانع رسیدن شرکت و در حالت کلی هر سیستمی به اهدافش باشد و یا توان سیستم را در این راه بکاهد که ممکن است به یکی از صورت های زیر باشد:
  - رخداد یک فاجعه یااتفاق بد
  - عدم وقوع مسائل آن طور که مورد انتظار است
  - عدم وقوع اتفاقات و مسائل خوب
- ریسک در معنای عام عبارت است از تاثیرات منفی ناشی از یک آسیب پذیری با در نظر گرفتن احتمال وقوع آن.

و در نهایت تعبیر کلی از ریسک این گونه عنوان شده است:
امکان وقوع یک خسارت و یا زیان اعم از مالی و غیرمالی حاصل از انجام یک کار.
تمام این موارد باتوجه به مرجع [۴] بیان شده است.

۸.۱.۱ مدیریت ریسک

هدف مدیریت ریسک [1] کنترل پیامدهای نامطلوب ناشی از تحمل ریسک و همچنین اطمینان یافتن از دست‌یابی به فواید پذیرش ریسک است. این امر مستلزم آن است که ریسک راشناسایی وبرای مدیریت آن تصمیمات هوشیارانه ای اتخاذ شود. سهل انگاری در مدیریت ریسک ، عواقب نامطلوب و مهمی به لحاظ مالی و اعتباری برجای می‌گذارد. حتی اگر تاثیر پیامدهای

[1] Risk management

عدم مدیریت ریسک جدی هم نباشد، بی توجهی به آن می‌تواند باعث انحراف از مسیر اصلی امور شود و موجب شود تا به جای صرف وقت در مسائل اصلی تجارت، بخش عمده انرژی و امکانات خود را صرف مقابله با تبعات عدم مدیریت ریسک نماییم. توجه ویژه به مدیریت ریسک، نیازمند داشتن چارچوبی مطمئن برای آن است. این چارچوب نه تنها شامل فرآیند شناسایی، اندازه گیری و مدیریت ریسک می‌شود، بلکه سازوکاری فراهم می‌آورد که به ما این امکان را می‌دهد که در رابطه با تغییرات ریسک در طول زمان،از روند های مدیریت بحران و طرح های محدودکننده‌ی عوامل مسبب ریسک که قبلاً پیش بینی نشده است، بازخورد دریافت نماییم.

به بیانی دیگر می‌توان گفت مدیریت ریسک فرآیندی است که در آن مدیران به شناسایی، اندازه‌گیری و تصمیم گیری در مورد ریسک ها و نظارت بر انواع ریسک های مطرح برای بنگاه می‌پردازند. مثلاً، برای این که وضعیت مؤسسه درمحدوده‌ای نگه داشته شود که پاسخگوی معیارهای نقدینگی موردنظر مشتریان، اعتباردهندگان [۱] و مقام ناظر [۲] باشد، مدیران ناچار هستند تخمین هایی از مقدار ضرر بالقوه ارائه کنند. در مرحله بعدی، باید سازوکارهایی برای کنترل مقدار ریسک ارائه کنند و همچنین مشوق هایی برای ریسک پذیری عاقلانه‌ی سرمایه گذاران عرضه نمایند.

مدیریت ریسک فرآیندی است برای رفع نیازهای بیان شده از طریق :

- تعیین ریسک های عمده‌ای که مؤسسه در معرض آن ها قرار دارد.
- به دست آوردن معیارهای منسجم، قابل فهم و عملی برای تخمین ریسک ها.
- تصمیم گیری در مورد این که کدام یک از ریسک‌ها قابل تحمل هستند، کدام یک باید کاهش یابند، از کدام یک باید اجتناب شود و هم چنین تعیین ابزارهای مالی مورد نیاز.
- برقرای رویه های لازم جهت تعیین جایگاهی که مؤسسه از لحاظ ریسک [۳] باید به آن دست یابد.

به طور طبیعی با افزایش ریسک مؤسسات مالی، مدیریت ریسک مالی نیز اهمیت بیشتری می‌یابد. عدم ثبات سیاسی و اقتصادی در جهان فعلی و به دنبال آن ایجاد تغییرات سریع در محیط فعالیت شرکت ها، ریسک مؤسسات مالی را دو چندان کرده است. به علاوه، تجربه های تلخ بعضی از کشورها مانند کشورهای آسیای جنوب شرقی دردهه‌ی قبل و به ویژه بروز بحران سال ۲۰۰۸ که نتیجه‌ی مستقیم عدم مدیریت ریسک بوده، موجب توجه بیشتر مدیران و قانون گذاران نسبت به مقوله‌ی ریسک شده است. در حقیقت، بحران مالی سال ۲۰۰۸ و در پی آن بروز مشکلات گسترده‌ی اقتصادی، اجتماعی، ورشکستگی‌های پی در پی و ناتوانی مؤسسات مالی در ایفای تعهدات خود باعث شده است که اکنون اندازه گیری و کنترل ریسک،

[1] Creditors
[2] Regulator
[3] Risk position

در مرکز توجه مؤسسات مالی قرار گیرد. این وقایع بر اهمیت روز افزون مدیریت ریسک دلالت دارد که از نتایج آن، افزایش توجه مدیران به مطالعه در حوزه‌ی ریسک می‌باشد. بدیهی است که انجام شایسته‌ی هریک از وظایف مدیریت ریسک، نیازمند استفاده ازابزار قدرتمند و مبتنی بر مبانی علمی است.

یکی ازمهمترین اجزای مدیریت ریسک، اندازه‌گیری ریسک [۱] است. ریسک مفهومی کیفی است که به عدم اطمینان نسبت به انتظارات اشاره دارد. این عدم اطمینان، نگرانی‌هایی را نسبت به آینده برای سرمایه‌گذاران ایجاد می‌نماید. تا زمانی که این عدم اطمینان کمی نشود، قیمت گذاری دارایی های مالی ریسکی، به صورت یک معما باقی می‌ماند، چراکه ریسک موجود در دارایی های مالی از عوامل تعیین کننده‌ی نرخ بازده‌ی مورد نظر سرمایه گذاران است و این نرخ در عین حال تعیین کننده‌ی قیمت دارایی‌های مالی است. اندازه گیری و کمی کردن ریسک از دیر باز ذهن ریاضیدانان، مدیران و سیاست گذاران را به خود مشغول کرده است. سیاست گذاران برای وضع سیاست‌های منصفانه و کاملاً شفاف درباره‌ی ریسک و همچنین جهت نظارت برحسن اجرای آن ها، به مقادیر کمی ریسک نیازمند هستند. مدیران به دنبال ایجاد توازن بین ریسک و بازده‌ی سرمایه‌گذاری هستند. ریاضیدانان هم درصدد هستند این نیازها را با تدوین ابزارهای قوی و در عین حال ساده‌ی ریاضی پاسخ دهند.

به منظور نیل به هدف اندازه‌گیری ریسک، ابزار مختلفی در حیطه‌ی ریاضیات و مهندسی مالی به ویژه درسال‌های اخیر تدوین شده است. اهمیت توسعه‌ی چنین ابزارهایی تابه آنجاست که برخی روش های اندازه‌گیری ریسک، از ساده ترین مدل های آماری گرفته تا پیچیده ترین معادلات، جایزه‌ی نوبل را نصیب مبدعان خود کرده است.

افزایش پیچیدگی ابزار و بازارهای مالی در طی زمان، ایجاد اندازه های بیشتر را به دنبال داشته است. جدول ۱.۱ شامل فهرست مهمترین ابزار تدوین شده درطی ۷۰ سال گذشته برای اندازه‌گیری ریسک است.

موارد فوق از مرجع [۴] گرفته شده است.

۹.۱.۱ انواع ریسک

تمامی بنگاه ها در معرض دو گروه کلی از ریسک، یعنی ریسک‌های تجاری [۲] و غیر تجاری [۳] هستند. ریسک‌های تجاری، ریسک‌هایی هستند که از بطن کسب و کار شرکت و فعالیت های آن ناشی می‌شوند. این ریسک ها به بازار محصولات و خدماتی بستگی دارند که بنگاه درآن فعالیت می کند و شامل نوآوری ها در فن آوری، طراحی خدمات و محصولات و بازاریابی آن ها می‌شود. فعالیت های تجاری هر بنگاه در معرض ریسک های کلان اقتصادی نیز قرار دارد. این ریسک ها از چرخه های اقتصادی و یا حتی از تغییر سیاست های پولی و مالی دولت ناشی

[1] Risk measurement
[2] Business risk
[3] Nonbusiness risk

جدول ۱.۱: سیر تحول ابزارهاي تحليلي مديريت ريسک

ابزارهای مدیریت ریسک	**سال تولید**
دیرش اوراق قرضه	۱۹۳۸
مدل میانگین– واریانس مارکویتز	۱۹۵۲
مدل قیمت گذاری دارایی های سرمایه ای	۱۹۶۳
مدل های چند عاملی	۱۹۶۶
مدل قیمت گذاری اختیارمعاملهی بلک– شولز	۱۹۷۳
دارایی های ریسک موزون برای بانک ها	۱۹۸۸
آزمون استرس	۱۹۹۲
ارزش در معرض ریسک	۱۹۹۳
ریسک متریکس	۱۹۹۴
کردیت متریکس	۱۹۹۷
مدیریت جامع ریسک بنگاه های اقتصادی	۲۰۰۰

میشود.

ریسکهای غیر تجاری شامل تمامی ریسک ها غیراز ریسکهای تجاری است. ریسک استراتژیک از این جمله میباشد که حاصل جابجاییهای اساسی و کلی در محیطهای اقتصادی یاسیاسی است. سلب مالکیت و ملی شدن بنگاهها از نمونههای این ریسک است.

ریسک های مالی [1] در حیطهی ریسکهای غیر تجاری قرار میگیرند. این ریسکها ناشی از تقبل زیانهای احتمالی دربازارهای مالی است. میتوان به منظور تمرکز بنگاها بر اموری که در آنها تسلط دارند، ریسکهای مالی رابهینه کرد. برخلاف بنگاههای صنعتی، وظیفهی اصلی مؤسسات مالی، مدیریت فعال ریسکهای مالی است. مدیریت ریسکهای مالی به طراحی و اجرای رویههایی اشاره دارد که به کنترل ریسکهای مالی منجر میشود. ازآنجا که تمرکز این پایاننامه بر ریسکهای مالی و نوع خاص آن یعنی ریسک بازار است، به جای شرح بیشتر ریسک های دیگر، به بررسی ریسک مالی میپردازیم.

لذا مواردی که بیان شد از مرجع [۴] است.

ریسک های اساسی مؤسسات مالی

یکی از مهمترین اهداف مؤسسات مالی افزایش بازدهی میباشد، اما این مسئله غالباً به قیمت افزایش ریسک (به معنی عدم اطمینان دردستیابی به بازدهی مورد انتظار) برای مؤسسه تمام میشود. بنابراین، مدیران ریسک، در مؤسسات مالی به دنبال آن هستند که بین ریسک و بازده توازن ایجاد کنند؛ توازنی که در نهایت به بیشینه سازی ثروت سهامداران برسد. بدیهی است این هدف بدون شناخت انواع ریسکهای حاکم بر فعالیتهای مؤسسات مالی ممکن نیست. درادامه فهرستی از ریسک هایی راملاحظه خواهید کرد که اغلب مؤسسات مالی درخلال فعالیتهای خود با آن ها دست و پنجه نرم میکنند.

[1] Financial risks

جدول ۲.۱: فهرست ریسک های مطرح برای مؤسسات مالی

نام	توصیف
ریسک اعتباری	ریسک عدم وصول تسهیلات اعطایی و عدم ایفای تعهدات ا زجانب طرف قرارداد
ریسک نقدینگی	ریسک نقدشوندگی مطالبات مشتریان به صورت آنی و نیاز بانک به تبدیا فوری دارایی ها به پول نقد
ریسک نرخ بهره	ریسک کاهش ارزش دارایی ها به علت نوسان نرخ بهره
ریسک بازار	ریسک کاهش ارزش دارایی ها و پرداخت ها به علت تغییر نرخ ها و قیمت های بازار
ریسک خارج ترازنامه	ریسک مؤسسه ناشی از نتایج فعالیت های مربوط به دارایی ها یا پرداخت های اقتضایی
ریسک نرخ ارز	ریسک ناشی از تغییر ارزش دارایی ها یا بدهی های ارزی به علت تغییر نرخ ارز
ریسک حاکمیت	ریسک عدم باز پرداخت مشتریان خارجی به علت دخالت دولت های خارجی
ریسک ناتوانی در پرداخت	ریسک ناشی از عدم وجود سرمایه‌ی مکفی برای جبران کاهش ارزش دارایی ها

در جدول بالا، فهرست نسبتاً بلندی ازانواع ریسک‌های مالی ارائه شده است. دشواری کار با چنین فهرست بلندبالایی ازریسک مارا وادار می‌کند که با ترکیبی از آن ها کار کنیم. برای مثال، ریسک نرخ ارز را می‌توان در ریسک بازار خلاصه نمود. به علاوه، چون به راحتی نمی‌توانیم مرز میان تمامی این ریسک ها را مشخص کنیم، استفاده ازهمه‌ی آن ها امری غامض است. به همین دلیل، درادامه به تعدادی ازریسک ها اشاره می‌کنیم که مهمترین عوامل توجیه کننده‌ی تلاطم [۱] یا نوسان بازده درمؤسسات مالی هستند. این ریسک‌ها شامل ریسک بازار، اعتباری، نقدینگی، و عملیاتی هستند. مؤسسات مالی با این ریسک‌ها آشناتر هستند و برای آن‌ها سیستم‌های کنترل و مدیریت بیشتری تدارک دیده‌اند.

برای توضیح بیشتر رجوع شود به مرجع [۴].

ریسک بازار

تمام موارد فوق برگرفته شده از مرجع [۴] است.

ریسک بازار، ریسک زیان ناشی از حرکات [۲] یا نوسان‌های غیره منتظره‌ی قیمت‌ها است. با این تعریف می‌توان آن را از سایر ریسک‌ها مانند ریسک اعتباری و عملیاتی جدا کرد. در عین حال، ریسک بازار را نمي توان به طور کامل از چنین ریسک هایي تفکیک نمود، چرا که گاهي اوقات آن ریسک‌ها منشأ ریسک بازارهستند. به عنوان مثال، رویداد های اعتباری [۳] ممکن است به تغییر قیمت اوراق قرضه منجرشده و به این ترتیب محرک زیان هاي ناشي از ریسک بازار شود. رویدادهاي عملیاتي [۴] نیز ممکن است به زیان هاي بازار ختم شود. اقدامات سفته بازانه‌ی معامله گري در بانک بارینگز [۵] که به صفر شدن ارزش سهم آن بانک

[1] Volatility
[2] Movements
[3] Credit events
[4] Operational events
[5] Barings bank

منجر شد، مثال خوبي در این زمینه می‌باشد.
لایه های مختلف ریسک بازار عبارت اند از:

- ریسک سهام: لایه ای از ریسک است که به موقعیت های بازار سهام مربوط می‌شود.
- ریسک اوراق بهادار بادرآمد ثابت: ریسک هایی است که به موقعیت ابزار با درآمد ثابت، مانند اوراق قرضه و ابزار حساس به نرخ بهره [۱] مانند تاخت نرخ بهره [۲] مربوط می‌شود.
- ریسک نرخ ارز: ریسک های مربوز به موقعیت های خارجی و نرخ های متقابل ارزاست.
- ریسک کالا [۳] : ریسک هایی است که به موقعیت های مؤسسه درارتباط با کالاهایی چون فراورده های کشاورزی، انرژی، فلزات و مشابه این ها مربوط می‌گردد.

ریسک بازار به لحاظ کمی به دوصورت بیان می‌شود. ریسک مطلق [۴] که باواحد پولی سنجیده می‌شود و ریسک نسبی [۵] که نسبت به شاخصی معین اندازه گیری می‌شود. صورت اول برتلاطم بازده‌ی کل تمرکزمی‌کند. صورت دوم، ریسک را براساس خطای ردگیری [۶] یا انحراف ازیک شاخص اندازه می‌گیرد. ارزش درمعرض ریسک مثالی برای ریسک مطلق و ضریب بتا نمونه ای از ریسک نسبی است.

ریسک اعتباری

ریسک اعتباری از این واقعیت ریشه می‌گیرد که طرف قرار داد [۷] نتواند یا نخواهد تعهداتش را انجام دهد. تاثیر این ریسک با هزینه‌ی ریالی ناشی ازنکول [۸] طرف قرار داد سنجیده می‌شود. زیان های ناشی از ریسک اعتباری ممکن است قبل از وقوع واقعی نکول از جانب طرف قرارداد، ایجادشود. بنابراین، ریسک اعتباری رامی‌توان به عنوان زیانی محتمل تعریف کرد که دراثر یک رویداد اعتباری اتفاق می‌افتد. رویداد اعتباری زمانی واقع می‌شود که توانایی طرف قرارداد درانجام تعهداتش تغییر کند. بااین تعریف، تغییر ارزش بازاربدهی به خاطر تغییر رتبه بندی اعتباری(یا تغییر آگاهی بازار از توانایی طرف قرارداد نسبت به انجام تعهداتش)رانیز می‌توان به عنوان ریسک اعتباری درنظر گرفت. این مورد، تاحدی بین ریسک اعتباری و ریسک بازار همپوشانی ایجاد می‌کند.

اوراق قرضه، وام و اوراق مشتقه همگی ریسک اعتباری دارند. برای اوراق مشتقه مانند قراردادهای تاخت [۹] ، ریسک اعتباری بسیار کمتراست، زیرا عموماً قرارداد به گونه ای تنظیم

[1] Interest-sensitive instrument
[2] Interest rate swap
[3] Commodity risk
[4] Absolute risk
[5] Relative risk
[6] Tracking error
[7] Counterparty
[8] default
[9] Swap contracts

می‌شود که ارزش اولیه‌ی آن صفرباشد. اما، این قراردادها زمانی باریسک اعتباری همراه می‌شود که قرارداد به نفع یک طرف ارزشمند شود و طرف مقابل ازانجام تعهداتش درسررسید قصورنماید. بنابراین، اندازه‌گیری ریسک اعتباری در قراردادهای تاخت شامل تحلیل رابطه‌ی ریسک بازار و ریسک اعتباری است. ریسک اعتباری شامل ریسک حاکمیت هم می‌شود. این ریسک به عنوان مثال زمانی آشکار می‌شود که کشورها روی نرخ تبدیل ارز اعمال کنترل کنندو طرفین قرارداد نتوانند به تعهدات خود وفادار بمانند. درحالی که ریسک نکول معمولاً مختص شرکت ها و اشخاص است، ریسک حاکمیت به کشورها مربوط می‌شود.

یک حالت خاص ریسک اعتباری، ریسک تسویه [1] است. این ریسک زمانی تحقق می‌یابد که مقرر باشد دو پرداهت دریک روز جابجاشود، اما بعدازاین که یک طرف قرار داد پرداخت خود را انجام داد، طرف مقابل مرتکب نکول شود. درروز تسویه، مبلغ درمعرض نکول طرف قرارداد به میزان کل پرداخت است، درحالی که درروزهای قبل، این مقدار فقط به اندازه ی خالص ارزش دو پرداخت می‌باشد.

ریسک تسویه درمعاملات ارز محسوس تر است، چرا که شامل مبادله‌ی ارزهای مختلف در ساعت های مختلف روز می‌شود. در این مورد، تاخیر در پرداخت، حتی در طول یک روز نیز نکول تلقی می‌شود. وقتی بانک هرشتات [2] در ۱۹۷۴ درکشور آلمان ورشکسته شد، تعدادی از پرداخت ها را از یک طرف دریافت کرده بود.، اما قبل از این که پرداخت های متقابل را انجام دهد، مرتکب نکول شده بود. این واقعه نشان گر بی ثباتی معاملات در سیستم بانکی جهانی بود. این بی ثباتی‌ها درتاسیس کمیته‌ی بال [3] برای نظارت بربانک ها درسطح جهانی بسیار مؤثر بود. کمیته ی بال، ۱۵ سال بعد از این واقعه، شرط کفایت سرمایه را برای سیستم بانکی تصویب کرد .

کمیته بال:

تمام موارد فوق برگرفته از مرجع [۵] است.

کمیته بال یا کمیته بازل از نمایندگان ارشد بانک‌های تعدادی از کشورهای گروه ده تشکیل شده است که معمولاً هر سه ماه یک بار توسط بانک تسویه‌های بین المللی به عنوان دبیر خانه‌ی دائمی آن در شهر بازل سوئیس تشکیل می‌گردد و به همین دلیل به کمیته بازل معروف شده است. این کمیته دارای قدرت قانونی نیست اما اکثر کشورهای عضو آن به طور ضمنی موظف به اجرای توصیه‌های آن هستند. از مهمترین اقدامات این کمیته تهیه و انتشار اصول پایه در نظارت بانکی کارآمد و مؤثر و همچنین مربوط به مقررات کفایت سرمایه است.

کفایت سرمایه:

نسبت کفایت سرمایه، حاصل تقسیم سرمایه پایه به مجموع دارایی‌های موزون شده به ضرایب ریسک بر حسب درصد است. این نسبت اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط کمیته بال

[1] Settlement risk
[2] Herstat bank
[3] Basel committee

به بانک‌های دنیا معرفی گردید. کمیته بال در آن سال مجموعه‌ای از شروط حداقل سرمایه را به بانک‌ها پیشنهاد کرد که بعدها به ''پیمان بال'' معروف شد. نسبت کفایت سرمایه یکی از نسبت‌های سنجش سلامت عملکرد و ثبات مالی مؤسسه مالی و بانک‌ها است. بانک‌ها باید سرمایه کافی برای پوشش دادن ریسک ناشی از فعالیت‌های خود را داشته و مراقب باشند که آسیب‌های وارده به سپرده‌گذاران منتقل نشود. بدین لحاظ باید از حداقل میزان سرمایه مطلوب برای پوشش ریسک‌های عملیاتی خود برخوردار باشند که تقریبا ۱۲ درصد دارایی های موزون شده به ریسک (ریسک هر دارایی با توجه به ماهیت آن دارایی و میزان ریسک مرتبط با آن) می‌باشد. برای مثال ریسک حساب صندوق(وجه نقد) و مانده حساب‌های بانک نزد بانک‌های مرکزی هر کشور برابر صفر است ولی ریسک تسهیلات اعطایی به اشخاص حقیقی و حقوقی خصوصی معادل ۱۰۰ درصد می‌باشد. براساس قوانین بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران، حداقل نسبت کفایت سرمایه مطلوب برای بانک‌های ایرانی معادل ۱۲ درصد است، و بانک مرکزی می‌تواند در مواردی که استاداردهای بین المللی یا ضرورت حفظ سلامت بانک‌ها و مؤسسات اعتباری اقتضا کند حدود بالاتری را برای تمام یا برخی از بانک‌ها و مؤسسات اعتباری تعیین کند.

نکول:

درمالی، اگر طرف قرار داد در قبال قرار دادی که بسته است به تمام یا بخشی از تعهداتش، خواسته یا نا خواسته، عمل نکند، گویند که ''نکول'' انجام داده‌است. در صورت عدم پرداخت بدهی چه به دلیل عدم تمایل بدهکار و چه به دلیل عدم توانایی وی باشد، نکول رخ اده است. از بابت نکول، معمولاً ریسکی به وجود می‌آید که به ریسک اعتباری معروف است.

ریسک نقدینگی

ریسک نقدینگی به دو صورت است : ریسک نقدشوندگی دارایی‌ها [1] و ریسک نقدینگی تامین وجوه [2]. ریسک نقدشوندگی دارایی‌ها که بانام ریسک نقدینگی بازار_ محصول [3] هم شناخته می‌شود، زمانی بروزمی‌کند که معامله باقیمت رایج بازارقابل اجرانباشد وعلت آن ممکن است حجم یا اندازه‌ی موقعیت خرید یافروش نسبت به معاملات عادی باشد. این ریسک درمیان طبقات مختلف دارایی ها و نیزدرزمان های مختلف، بسته به شرایط بازار تغییر می کند. بعضی دارایی ها مانند ارزهای اصلی یااوراق قرضه‌ی خزانه، بازارپرعمق دارندوموقعیت ها اغلب به راحتی، باتلاطم کوچکی درقیمت نقد می‌شود. درسایرموارد، مانند قراردادهای مشتقه دربازارهای فرابورس یا اوراق بهادار بازارهای نوظهور، هرمعامله ممکن است به سرعت قیمت ها را متاثرکندوصف خرید یافروش پیداشودو البته، این موضوع به حجم موقعیت هم بستگی دارد.

[1] Assets liquidity risk
[2] Funding liquidity risk
[3] Market-product liquidity risk

ریسک نقدینگی تامین وجوه یاریسک جریان نقدی [1] به عدم توانایی درتامین وجوه برای پرداخت تعهدات برمی‌گردد. این وضعیت ممکن است مؤسسه رامجبورکند دارایی های خودرافوراًبه وجه نقد تبدیل کند و بدین ترتیب ضرر روی کاغذ به ضرر واقعی تبدیل می‌شود. این موضوع به ویژه د رمورد سبد دارایی هایی [2] که با وام تامین مالی شده است، به هنگام مواجهه با اخطار افزایش ودیعه [3] ازجانب طلبکاران، به معضل بدل می‌شود. ریسک جریان نقدی زمانی به ریسک نقدینگی بازار ـ محصول مرتبط می‌شودکه سبدمؤسسه شامل دارایی هایی بانقد شوندگی پایین باشد ومؤسسه ناچار باشد برای تامین تعهدات خود این دارایی هارا به قیمتی پایین تر ازقیمت عادلانه‌ی بازار به فروش رساند. بنابراین، اگر ذخیره‌ی وجه نقدکافی نباشد، ممکن است درشرایطی که ارزش بازاردارایی ها سقوط کرده است، الزام به پرداخت وجوه نقد و ایفای تعهدات، مؤسسه رابه نقد کردن اجباری سبددارایی درقیمت های پایین آمده وادارنماید. این چرخه‌ی قبول ضرر که بادریافت اخطار افزایش ودیعه شدیدترمی‌شود، گاهی به مارپیچ مرگ تعبیرمی‌شود.

ریسک عملیاتی

کمیته‌ی بال، به عنوان مرجع بین المللی درزمینه‌ی تعریف مفاهیم رایج در صنعت بانکداری، ریسک عملیاتی رابه صورت زیرتعریف کرده است:

ریسک زیان ناشی از فرآیندهای داخلی، افراد و سیستم های غیر دقیق (ناکافی) یا معیوب یا ریسک زیان ناشی از حوادث خارجی را گویند. [4]

ریسک عملیاتی ممکن است به ریسک های اعتباری و بازار منجر شود. به عنوان مثال، یک اشتباه عملیاتی درمعامله مانند عدم انجام تسویه می‌تواند به طور همزمان ریسک ریسک اعتباری و بازار ایجاد کند، چراکه همانند نکول اعتباری، قیمت های بازار را متاثر می‌سازد. قیمت گذاری مشتقه‌های پیچیده هم مشکلات عملیاتی بالقوه ای ایجاد می کند.

ریسک مدل [5] از خطر اشتباه در مدل قیمت گذاری موقعیت ها ناشی می‌شود. مثلاً، معامله گری که از مدل عمومی قیمت گذاری قرارداد اختیارمعامله استفاده می کند، اگر در پیاده سازی مدل یا تخمین پارامترها اشتباه کند، درمعرض ریسک مدل است. متاسفانه، ریسک مدل بسیار بی سروصداست وبه همین دلیل شناسایی و ارزیابی آن چندان ساده نیست. ارزیابی این ریسک به اطلاع دقیق ازرویه‌ی مدل سازی نیازدارد. برای مقابله با ریسک مدل، باید مدل‌هارا با استفاده ازقیمت های بازار یا قیمت های شبیه سازی شده، مورد ارزیابی مستقل قرارداد. بهترین راه مقابله با ریسک عملیاتی حصول اطمینان ازاعتبار سیستم ها و مدل ها، تفکیک شفاف مسئولیت ها، اعمال کنترل های داخلی قوی و پیاده سازی برنامه های اقتضایی

[1] Cash flow risk
[2] Portfolios
[3] Margin call
[4] Basel II, (June 2004).
[5] Model risk

دوره‌ای است. اندازه گیری ریسک عملیاتی برای متخصصان کمی سازی ریسک چالش بزرگی محسوب می‌شود. درسال های اخیر تلاش های زیادی درجهت توسعه‌ی مدل های ریسک عملیاتی صورت گرفته است و درآینده شاهد مدل های دقیق تر و درعین حال پیچیده تری خواهیم بود.

رجوع شود به مرجع [۴].

ریسک سیستماتیک و غیرسیستماتیک

تقسیم بندی دیگری از ریسک‌های مالی قابل ارائه است که به فراگیر یا اختصاصی بودن عوامل ایجاد تلاطم برمی‌گردد. درتحلیل مدرن سرمایه گذاری [۱] ، منابع ریسک، به عنوان عوامل موجد تلاطم در بازده‌ی دارایی‌ها به دو گروه کلی تقسیم بندی می‌شود: دسته‌ی اول، عواملی است که کلیه‌ی اوراق بهادار راتحت تاثیر قرار می‌دهد. نرخ بهره، تورم و نرخ ارز جزو این دسته عوامل است. به ریسکی که به واسطه‌ی این عوامل به وجود می‌آید، ریسک سیستماتیک [۲] یا تنوع ناپذیر [۳] می‌گویند. دسته‌ی دوم، عواملی است که تنهابر یک یا چند ورقه‌ی بهادار خاص اثرمی‌گذارد. اعتصاب کارکنان شرکت، آتش سوزی دریکی ازواحد ها و فوت یکی ازافراد کلیدی سازمان مثال هایی ازاین عوامل است. ریسکی که به واسطه ی این عوامل به وجودمی‌آید، به ریسک غیر سیستماتیک [۴] یا تنوع پذیر [۵] معروف است. ریسک غیر سیستماتیک رامی‌توان بااستفاده ازفنون تنوع بخشی [۶] کاهش داد. بدین ترتیب، ریسک کل یک دارایی رامی‌توان به صورت حاصل جمع ریسک قابل اجتناب و غیرقابل اجتناب درنظر گرفت:

ریسک کل=ریسک قابل اجتناب(غیرسیستماتیک)+ریسک غیرقابل اجتناب(سیستماتیک)

ازآنجاکه عوامل سیستماتیک ازشرایط کلی بازار و عوامل غیر سیستماتیک ازشرایط خاص یک شرکت ناشی می‌شود، می‌توان ریسک کل دارایی را به صورت زیر بیان کرد:

ریسک کل=ریسک مختص شرکت+ریسک بازار

۱۰.۱.۱ عوامل مؤثر بر ریسک و بازده سرمایه‌گذاری دردارایی های مالی

عوامل زیادی بر ریسک و بازده سرمایه‌گذاری در هر دارایی های مالی دخالت دارند. دراین پژوهش، عوامل مؤثر بر ریسک و بازده سرمایه‌گذاری در دارایی‌های مالی در سه دسته کلی

[1] Modern investment analysis
[2] Systematic risk
[3] Nondiversifiable risk
[4] Nonsystematic risk
[5] Diversifiable risk
[6] Diversification techniques

عوامل کلان اقتصادی، عوامل خرد اقتصادی و عوامل غیر اقتصادی طبقه بندی شده و به طور خلاصه به آن می‌پردازیم.
با توجه به مرجع [۲] خواهیم داشت.

عوامل کلان اقتصادی

این عوامل بر ریسک بازار تاثیر داشته که در مدل **CAPM** [1] نتیجه و میزان تاثیر این عوامل بر ریسک بازار، تحت عنوان ریسک سیستماتیک، با استفاده از بررسی وابستگی تغییرات قیمت هر دارایی به تغییرات قیمت‌های محل بازار اندازه‌گیری می‌شود، و شامل موارد زیر است.

- سیاست ها و خط مشی‌های دولت
- عوامل فرهنگی و اجتماعی
- وضعیت صنعت
- شرایط اقتصادی و دوران‌های تجاری و مالی

عوامل خرد اقتصادی

این عوامل موجبات تغیر در ریسکی خواهند شد که مربوط به وضعیت عمومی بازار نبوده و مختص وضعیت هر شرکت است(ریسک غیر سیستماتیک) که به طور خلاصه عبارت اند از:

- میزان تقاضا و کشش کالای تولیدی شرکت
- سیاست‌ها و خط مشی‌های مدیریت
- وضعیت مالی و حساب‌های شرکت

عوامل غیر اقتصادی

این عوامل بر فرآیند تصمیم گیری پیرامون سرمایه‌گذاری در دارایی‌های مالی تاثیر می‌گذارد و شامل تمایل به ریسک، ادراک ریسک، نرخ بازده مورد انتظار، تجربه و دانش سرمایه‌گذاری سرمایه‌گذاران، بازده تاریخی و اطلاعات عملکرد گذشته است. برای توضیح بیشتر به مرجع [؟] رجوع شود.

[1] Capital Asset Pricing Model(CAPM)

۱۱.۱.۱ بازارهای مالی

بازارهای مالی بازارهایی هستند که در آن ها دارایی‌های مالی مبادله می‌شوند. دارایی‌های مالی دارایی‌هایی مثل سهام و اوراق قرضه هستند که ارزش آن‌ها به ارزش تولیدات و خدمات ارائه شده توسط شرکت‌های منتشر کننده آن‌ها وابسته است.

۱۲.۱.۱ طبقه بندی بازارهای مالی

بازارهای مالی بر پایه معیارهای متفاوتی قابل طبقه‌بندی هستند ازجمله:

- طبقه‌بندی بر اساس نوع دارایی
- طبقه‌بندی بر اساس مرحله عرضه اوراق بهادار
- طبقه‌بندی بر اساس سررسید تعهدات مالی

طبقه‌بندی بر اساس نوع دارایی

بر اساس نوع دارایی، می‌توان بازار اوراق بهادار را به دسته‌های زیر تقسیم بندی کرد:

الف.بازار سهام:

دراین بازار، سهام شرکت‌ها که نشان‌گر مالکیت دارنده آن در شرکت است، داد و ستد می‌شود.

ب.بازار اوراق بدهی:

بازاری است که در آن ابزارهای با در آمد ثابت (اوراق قرضه) داد و ستد می‌شوند.

ج.بازار ابزارهای مشتق:

بازاری است برای معاملات ابزارهایی مبتنی بر دارایی‌های مالی یا فیزیکی که از جمله آن می‌توان به اختیار معامله یا قرارداد آتی اشاره کرد.

طبقه‌بندی بر اساس مرحله عرضه اوراق بهادار

۱.بازار دست اول(اولیه):

شرکت‌ها، مؤسسات و بنگاه‌های اقتصادی برای تامین منابع مالی مورد نیاز خود به مبالغ هنگفتی نیاز دارند که اغلب این منابع را در مقابل واگذاری اوراق بهادار خود، به دست می‌آورند. واگذاری اوراق بهادار و تامین اعتبار برای اولین بار در بازار دست اول انجام می‌شود. به عبارت دیگر در بازار دسته اول ، اوراق بهادار برای نخستین بار منتشر می‌شوند. بر این اساس فروشنده اوراق بهادار در واقع همان ناشر اوراق بهادار است.

۲.بازار دست دوم(ثانویه):

پس از عرضه اوراق بهادار در بازار اولیه و به منظور آن که این اوراق بتوانند مورد داد و ستد قرار گیرند، به بازار دیگری نیاز است که به آن بازار ثانویه اوراق بهادار گفته می‌شود. در این بازار، اوراق قابلیت داد و ستد پیدا می‌کنند. وجود بازار دست دوم، صرفا به این دلیل است که قابلیت نقدشوندگی اوراق بهادار منتشر شده در بازار دست اول را افزایش دهد، ضمن این که شرایطی فراهم می‌آورد که قرض دهندگان و قرض گیرندگان در صورت لزوم به آسانی بتوانند تصمیمات سرمایه‌گذاری خود را تغییر داده، به فروش اوراق بهادار خریداری شده یا خرید اوراق بهادار دیگر اقدام نمایند. داد و ستد در بازار دست دوم به دفعات نامحدود انجام می‌شود و بنابراین با جابجا شدن مالکیت ابزارهای مالی قابل داد و ستد در آن بازار، قدرت نقد شوندگی زیادی ایجاد می‌شود. دراین حالت، از نقد شدن پیش از سر رسید بدهی واحدهای متقاضی سرمایه یا ناشران اوراق بهادار جلوگیری می‌شود و در نتیجه ضربه‌های کمبود نقدینگی تاثیر محدودتری بر واحدهای سرمایه‌گذار خواهد داشت.

طبقه‌بندی بر اساس سر رسید تعهدات مالی

الف.بازار پول:

بنا به تعریف، بازار پول بازاری برای داد و ستد پول و دیگر دارایی‌های مالی جانشین نزدیک پول است که سر رسید کمتر از یک سال دارند. همچنین می‌توان از بازار پول به عنوان بازار ابزارهای مالی کوتاه مدت با ویژگی اندک بودن ریسک عدم پرداخت، نقد شوندگی و ارزش اسمی زیاد نام برد. تمرکز فعالیت این بازار در استفاده از ابزارهایی است که به اشخاص و بنگاه های تجاری این امکان را می‌دهند که به سرعت نقدینگی خود را به میزان مطلوب در آورند.

ب.بازار سرمایه:

برپایه طبقه بندي بازار مالی با نگرش به سررسید دارایی ها، بازار سرمایه به بازار دادوستد ابزارهاي مالی با سررسید بیشتر از یک سال و داراییهاي بدون سررسید اطلاق می‌شود. این بخش از بازار مالی نقش مهم‌تري در گردآوري منابع پس‌اندازي و تأمین نیازهاي سرمایه‌گذاري واحدهاي تولیدي دارد. بازار سرمایه نسبت به بازار پول بسیار گسترده‌تر است و از تنوع ابزاري بیشتري برخوردار است. مهمترین کارکرد بازارهاي مالی شامل بازارهاي پول، سرمایه و بیمه در اقتصاد ملی، تجهیز منابع پس‌اندازي و هدایت آن به سوي فعالیت‌هاي مولد اقتصادي است، ضمن آن‌که تعیین قیمت وجوه و سرمایه، انتشار و تحلیل اطلاعات و توزیع ریسک اقتصادي نیز اغلب در شمار کارکردهاي این بازارها است. تمام این موارد با توجه به مرجع [۹] است.

۱۳.۱.۱ اندازه ریسک

هریک از محققان، از واژه‌ی ریسک تعریف خاص مورد نظر خود را با اقامه‌ی دلایل و مباحث گسترده مطرح کرده‌اند. به طورکلی ریسک مالی درابتدا به عنوان یک عامل باز دارنده‌ی بازدهی مورد انتظار، در نظرگرفته می شد و بازدهی‌های تعدیل شده براساس ریسک، طبق اصولی

نامتعارف تعریف می‌شدند. تنها مزیت این تعریف ها امکان اولویت بندی فوری سرمایه‌گذاری‌ها براساس آن‌ها بود.

تلاش برای طراحی ابزارهای اندازه‌گیری ریسک، از نیمه اول قرن بیستم آغاز شد.

مکالی [۱] در سال ۱۹۸۳، دیرش را به عنوان اندازه ریسک معرفی کرد که ابزاری ساده و در عین حال کارآمد برای سنجش ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت است. در سال ۱۹۵۲ مارکویتز [۲] باارائه‌ی مدلی کمی جهت انتخاب سبددارایی‌ها، برای اولین بار مقوله ریسک را درکنار بازدهی، مدنظرقرارداد. وی انحراف معیاررا به عنوان اندازه ریسک درنظر گرفت. نوآوری اصلی در روش مارکویتز، اندازه‌گیری ریسک سبد سرمایه، به وسیله‌ی توزیع(چند متغییره)توام بازدهی‌های دارایی‌هابود. وی چارچوب روش خود را ابتدا به وسیله‌ی دو گشتاور توزیع های تک متغیره وبعدها توسط ضریب همبستگی(پیرسن)خطی، بین هرجفت از بازدهی های تصادفی، شرح داد. همبستگی خطی درعین سادگی بسیارجذاب و شهودی است. کلاسی از متغییر های تصادفی که برای آن همبستگی خطی می‌تواند به عنوان یک اندازه وابستگی استفاده شود، کلاس توزیع های بیضی گون است. بنابراین مدل مارکویتز فقط درحالت توزیع های بیضی گون، مانند توزیع های t یاتوزیع های نرمال باواریانس متناهی مناسب است. ضمنا بهتراست یادآوری شود که توزیع های متقارن لزوماً بیضی گون نیستند. ضریب همبستگی خطی اگردرحالت توزیع های غیربیضی گون استفاده شود، ممکن است منجر به نتایج نادرست شود. متاسفانه مدل مارکویتز که به طوردقیق فرمول بندی شده است، به اشتباه برای بسیاری ازحالت‌ها که درموردآن‌ها ریسک نمی‌تواند توسط واریانس توصیف شود و وابستگی نمی‌تواند توسط ضریب همبستگی خطی اندازه‌گیری شود، به کارگرفته شده است.

دردهه‌ی ۱۹۶۰ شاگرد مارکویتز، ویلیام شارپ [۳] ، شاخص بتا را برای اندازه‌گیری تغیرات نسبی ارزش هرسهم درقبال تغییرات نسبی ارزش بازار با معرفی خط مشخصه ارائه کرد. معرفی این شاخص دلایل محاسباتی داشت. انگیزه‌ی اول برای معرفی روش‌های سبد سرمایه‌مبتنی بر بتا، پیچیدگی بالای روش میانگین–واریانس بود که این مشکل بعد ازگذشت تقریباً ۴۰سال با پیشرفت‌های عظیم درکامپیوترها دیگر به چشم نمی‌آید. انگیزه‌ی دیگر برای توسعه‌ی روش بتا، کافی نبودن داده برای محاسبه‌ی ماتریس واریانس–کوواریانس بود(تعداد داده ها حداقل باید دوبرابر تعداد دارایی ها باشد)که باتکنیک‌های بوت استرپ [۴] این مشکل نیز برطرف شد و بتاهاتقریباًدرمدیریت سبد سرمایه تسلیم روش های واریانس–کوواریانس کاملترشدند. بعدازدهه‌ی ۱۹۷۰و افزایش روزافزون ریسک درجنبه‌های مختلف تصمیمات مالی، توجه مدیران بیش ازپیش به اندازه گیری و مدیریت ریسک جلب شد. دراین دوران کنترل ریسک به عنوان عاملی برای ایجاد ارزش بیشتر مورد توجه قرار گرفت و نرخ های بازدهی تعدیل شده براساس ریسک، ملاک ارزیابی قرار گرفت. برخی نظریه های قدیمی که به علت زمان بر بودن و

[1] Macaulay
[2] Markowitz
[3] William sharpe
[4] Bootstrap

پیچیدگی‌های محاسباتی کنارگذاشته شده بودند، همزمان با پیدایش ابررایانه‌ها مجدداً مطرح شدند. ریسک نامطلوب ازجمله‌های آن‌هابود که قبلاً توسط پیشگامان علم مالی مطرح شده بود ودرسال ۱۹۹۶ جانی دوباره یافت و تحقیقات مفصلی درآن مورد انجام گرفت که چالش‌های آن هنوز هم ادامه دارد.

درسال ۱۹۹۳مؤسسه جی.پی.مورگان [1] مدل ارزش درمعرض ریسک (VAR) رامعرفی کرد. این معیار که تمامی انواع ریسک رادریک عددخلاصه می‌کرد، برای استفاده کنندگان بسیارجذاب به نظر آمد و هرروز به کاربردهای آن افزوده شد. به دنبال آن، روش های محاسباتی پیچیده‌ای برای افزایش دقت مدل‌های این اندازه توسعه یافت. پژوهش ها روی اندازه‌های ریسک جدید احتمالاً به دلیل روندهای جدید درتنظیم مؤسسات مالی که نیاز به استفاده ازمدل‌های کنترل ریسک درسطح بالادارند و یابه دلیل واکنش جامعه‌ی علمی به کوشش مقامات ناظر برای تحمیل اندازه‌های ریسک نادرست، افزایش یافته است. باتوجه به تاریخچه‌ی تحقیقات و تلاش های به عمل آمده درجهت اندازه‌گیری ریسک و پیشرفت هایی که در هردوره به وقوع پیوسته است. می‌توان یک گروه‌بندی از اندازه‌های ریسک ارائه داد که برنحوه‌ی اندازه‌گیری ریسک استوار است:

- اندازه‌های تلاطم: این اندازه‌ها، پراکندگی یک متغیر را در اطراف میانگین و یا پارامترهای تصادفی دیگر اندازه‌گیری می‌کنند. واریانس و انحراف معیار دونمونه از این اندازه‌ها هستند.

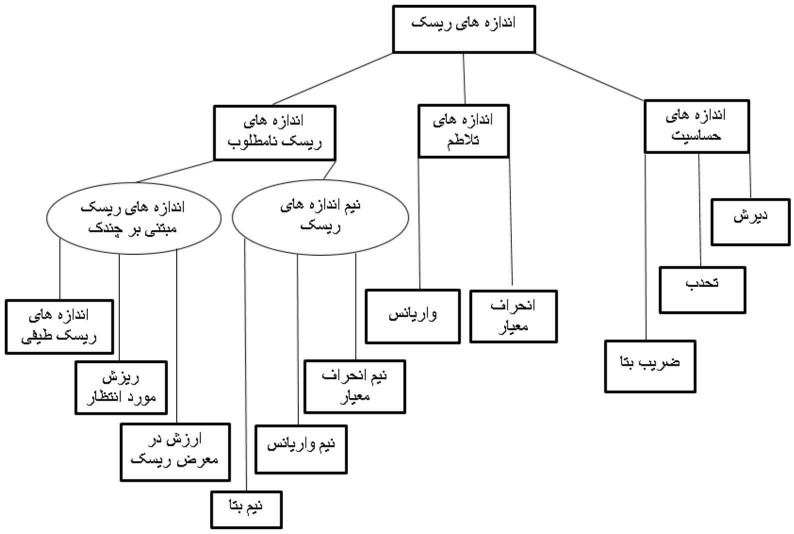
- اندازه‌های حساسیت: اساس کار این اندازه‌ها، تغییرات متغیر وابسته براثر تغییرات متغیر مستقل است. دیرش و ضریب بتا ازنمونه های این اندازه هستند.

- اندازه‌های ریسک نامطلوب: این اندازه‌ها برعکس اندازه‌های تلاطم، تنهابر بخش مخرب ریسک تمرکز دارند و تلاطم های زیرسطح میانگین و یامتغیر هدف رامحاسبه می‌کنند. نیم واریانس، نیم بتا و ارزش درمعرض ریسک ازاین نوع اندازه‌ها هستند.

اندازه‌های ریسک نامطلوب به دوزیرگروه تقسیم بندی می‌شوند، نیم اندازه‌های ریسک و اندازه‌های ریسک مبتنی برچندک. دراین جا تنها به معرفی برخی ازمعروف ترین و پرکاربردترین اندازه‌های ریسک درقالب گروه بندی ارائه شده پرداخته می‌شود. برای توضیح بیشتر مراجع [۶] و [۴] را ملاحظه نمائید.

لذا نمودار ۱.۱ گروه بندی اندازه‌های ریسک را نشان می‌دهد.

[1] J.P.Morgan



شکل ۱.۱: گروه‌بندی اندازه‌های ریسک

اندازه های تلاطم

همان طور که گفته شد، این اندازه‌ها تلاطم‌های متغیر تصادفی را اندازه گیری می‌کنند. اغلب نقطه ای دلخواه مانند میانگین به عنوان مبنای محاسبه‌ی تلاطم درنظرگرفته‌می‌شود. دامنه‌ی تغییرات، متوسط قدرمطلق انحرافات واریانس و انحراف معیار نمونه هایی ازاین اندازه‌ها هستند. طبق تعریف، تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار ازمتغیر مورد مطالعه رادامنه یاطول فاصله‌ی تغییرات می‌نامند. اندازه‌ی مزبور مشخصه‌ی پراکندگی رابه خوبی نمایان نمی‌کند، چراکه ازمجموعه‌ی مشاهدات، تنها به بزرگترین و کوچکترین مشاهده اکتفا می‌کند وعملاً مجموعه‌ای از اطلاعات را نادیده می‌گیرد. این اندازه برای محاسبه‌ی تلاطم نرخ بازدهی دارایی‌های مالی نیز معیار مناسبی نیست، زیرا بازارهای مالی گاهی بارکود و گاهی بارونق مواجه اند و درصورت انتخاب یکی از دوره‌های رکود یا رونق، عدد محاسبه شده قابل اتکا نخواهد بود و عملا سایر نرخ های بازدهی رادرمحاسبه‌ی ریسک منظور نمی‌کند.

دامنه‌ی تغییرات، تعریفی بسیار تقریبی ازپراکندگی به دست می‌دهد، چراکه تنها به دوعضو ازمجموعه‌ی مشاهدات توجه دارد. بنابراین، اندازه‌ی دیگری لازم است که علاوه بر احتساب پراکندگی، کلیه مشاهدات راشامل شود. یکی ازاین اندازه‌ها می‌تواند میانگین قدرمطلق انحرافات باشد:

$$\overline{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \overline{X}|}{n-1}.$$

این شاخص علامت مشاهدات را منظور نمی‌کند و بااستفاده از تابع قدرمطلق، تمامی مشاهدات رابه عدد مثبت تبدیل می‌کند. بنابراین، نرخ‌های بازدهی منفی به مثبت تبدیل شده و عملاً این شاخص میزان پراکندگی راکمتر ازمقدارواقعی نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، تابع قدرمطلق تنها بربرخی ازمشاهدات اثر می‌گذارد و نسبت به اعداد مثبت بی اثر است. روش دیگر برای

نادیده گرفتن علامت مشاهدات، استفاده ازمجذور آن‌هاست. اندازه‌ی حاصل ازاین روش، واریانس

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

است که درمباحث آماری خواص مفیدی از آن ذکرشده است. درمحاسبه‌ی واریانس برای جلوگیری از صفرشدن حاصل جمع انحراف مشاهدات ازمیانگین، ازمجذورانحرافات استفاده می‌شود، اما برای مقایسه‌ی مشاهدات باید همگی دارای یک واحد اندازه‌گیری باشند. براین اساس ازواریانس جذرگرفته می‌شود. این شاخص همان انحراف معیاراست. بنابراین معیارمناسب تر برای محاسبه‌ی رسک براساس تعاریف آماری، انحراف معیاراست. ذکراین نکته ضروری است که پیش فرض استفاده ازواریانس و انحراف معیار، به عنوان معیاری برای اندازه‌گیری ریسک، وجود توزیع نرمال برای متغیراست. چراکه دراین توزیع، انحراف معیار به عنوان شاخص پراکندگی تعریف می‌شود. لذا اگر متغیر تصادفی ازتوزیع نرمال و یا دست کم توزیع متقارن برخوردارنباشد، انحراف معیار شاخص مناسب پراکندگی نخواهد بود. انحراف معیارمحاسبه شده به این روش همان انحراف معیارتایخی است. انحراف معیارتاریخی برای ارزیابی وضعیت گذشته‌ی تلاطم های بازدهی مفید است، اما نمی‌توان ازآن به عنوان برآورد مناسبی از ریسک کل ورقه‌ی اوراق بهادار یا مجموعه‌ای از اوراق برای دوره‌های زمانی آتی استفاده نمود. چنانچه توزیع بازدهی اوراق نرمال باشد انحراف معیار اطلاعات مفیدی درمورد تلاطم بازدهی فراهم می‌آورد که این موارد از مراجع [۱] و [۴] گرفته شده است.

اندازه‌های حساسیت

این نوع از اندازه‌ها، حساسیت متغیر تصادفی مورد نظر را درقبال تغییرات متغیر تصادفی دیگری اندازه‌گیری می کند. یعنی متغیر مورد نظر به عنوان تابعی از متغیر های مستقل مورد ارزیابی قرارگیرد. دیرش [1] ، تحدب، ضریب بتا نمونه‌هایی از اندازه‌های حساسیت هستند.

زمانبندی دریافت جریان‌های نقدی دراوراق بهادار بادرآمد ثابت، برریسک و درنتیجه بربازدهی این اوراق تاثیر گذاراست. مفهوم دیرش نیز به زمانبندی جریان‌های نقدی اشاره دارد. این اندازه باارائه‌ی شاخصی برای دوره‌ی دریافت جریان‌های نقدی، ریسک تغیر قیمت اوراق قرضه را درقبال نوسان نرخ بهره اندازه‌گیری می کند.

تحدب نیز مانند دیرش، اندازه‌ی حساسیت قیمت اوراق بهادار با درآمد ثابت در مقابل نرخ بهره است. دیرش به تغییرات قیمت در قبال تغییرات نرخ بهره بافرض خطی بودن این ارتباط اشاره دارد اما تغییرات نرخ بهره و تغییرات قیمت رابطه‌ی غیرخطی دارند. تحدب در واقع به اندازه‌گیری انحنای این رابطه‌ی غیرخطی می‌پردازد.

ضریب بتا حساسیت بازدهی سهم را نسبت به بازدهی یک شاخص، مثلاً شاخص سهام، اندازه می گیرد وبراساس، نحوه‌ی شکل گیری بازدهی قیمت‌ها را براساس تلاطم‌های شاخص

[1] Duration

توجیه می‌کند. ضریب بتا فرآیند محاسبات مدل ریسک و بازدهی مارکویتز راتسهیل می‌کند، زیرا محاسبات این فرآیند به علت پیچیدگی و زمان‌بر بودن، تا قبل از رواج ابر رایانه‌ها، مقرون به صرفه نبوده است.

اندازه‌های ریسک نامطلوب

ریسک نامطلوب، احتمال تلاطم‌های منفی بازدهی درآینده است. مفهوم ریسک ازهنگامی که درمتون مالی وارد شد، باریسک نامطلوب هم‌زاد بود. هنگامی که مارکویتز درسال ۱۹۵۲ مقاله‌ی خود رادرمورد ریسک و بازدهی به عنوان معیارهای انتخاب سبد بهینه‌ی دارایی منتشرکرد، ری [1] نیز مقاله‌ای درهمین زمینه منتشر کرد، مقاله‌ی وی نیز درخصوص به دست اوردن روشی عملی برای انتخاب بهترین ترکیب ریسک و بازدهی بود. ری معتقد بود سرمایه‌گذاران ابتدا به دنبال امنیت اصل سرمایه‌ی خود و سپس به دنبال کسب حداقل بازدهی قابل قبول خواهند بود. به عقیده‌ی وی، سرمایه‌گذاران بیش ازآن که به حداکثر سود بیندیشند، درفکر حداقل کردن ریسک اند. وی حداقل بازدهی قابل قبول راسطح بحرانی نامید و روش خود را براساس حفظ سطح بحرانی بازدهی برای سرمایه‌گذار طراحی کرد. ری بیان داشت که سرمایه‌گذاران به دنبال نوعی سرمایه‌گذاری خواهند بود که احتمال وقوع بازدهی کمتر از سطح بحرانی را حداقل سازد. دراین شرایط، سرمایه‌گذار باید نسبت بازدهی به تلاطم را به حداکثر برساند. یعنی

$$\max(\frac{E(r)-d}{S}).$$

که در آن، dسطح بحرانی یا حداقل بازدهی فرضی سرمایه‌گذاراست، $E(r)$ بازدهی مورد انتظار و S انحراف معیار می‌باشد. ری مقاله خود را سه ماه بعد از مارکویتز منتشر کرد و به همین علت مارکویتز به عنوان طراح نظریه‌ی سبدسرمایه ماندگارشد. مارکویتز درسال ۱۹۸۷ بیان داشت اگر هدف ری طراحی مدلی برای انتخاب سبد بهینه‌ی سرمایه‌گذاری با استفاده از موازنه‌ی ریسک_ بازدهی بوده، نظریه‌ی سبد دارایی را باید به نام وی خواند، چراکه مارکویتز درسال ۱۹۵۶ به تکمیل و ارائه‌ی مدل اصلی خود براساس ریسک نامطلوب پرداخت. درواقع، کارهای ری مقدمه‌ای برای توسعه‌ی مدل‌های محاسبه‌ی ریسک نامطلوب بود.

درسال ۱۹۵۹، مارکویتز به مزایای استفاده از روش ریسک نامطلوب اشاره کرد. وی به این نتیجه رسید که سرمایه گذاران به دو علت به دنبال کمینه کردن ریسک نامطلوب هستند : اول این که سرمایه‌گذاران ابتدا به امنیت اصل سرمایه می‌اندیشند و سپس این که اگر توزیع متغیر تصادفی از نوع نرمال نباشد، استفاده از مدل ریسک نامطلوب، مناسب خواهد بود. او بعدها در سال ۱۹۹۱ نیز هنگام دریافت جایزه‌ی نوبل برای ارائه‌ی نظریه‌ی سبد دارایی و مدل میانگین_ واریانس، به این مسأله اشاره کرد.

براین اساس، هنگامی که توزیع متغیر تصادفی نرمال باشد، واریانس و ریسک نامطلوب

[1] Roy

هردو جوابی صحیح به‌دست می دهد، درغیراین صورت استفاده ازواریانس برای محاسبه‌ی ریسک روشی صحیح نیست. این درحالی است که تحقیقات زیادی فرض نرمال بودن نرخ بازدهی را رد کرده‌است. تحقیقات اولیه‌ای که توسط فاما [1] (۱۹۶۳)ومندلبروت [2] (۱۹۶۳)به انجام رسید، حاکی ازوجود چولگی درتوزیع بازدهی می‌باشد. همان‌طور که گفته شد، اندازه‌های ریسک نامطلوب را می‌توان به دو گروه کلی نیم اندازه‌های ریسک و اندازه‌های ریسک مبتنی برچندک تقسیم بندی نمود. اکنون به معرفی هریک ازآن‌ها می‌پردازیم.

الف. نیم اندازه‌های ریسک

مارکویتز دوروش برای محاسبه‌ی ریسک نامطلوب پیشنهاد کرد. روش اول، نیم واریانسی است که ازمیانگین مجموع مجذورانحرافات پایین‌تر ازمیانگین نرخ بازدهی به دست می‌آید و به آن نیم واریانس بازدهی میانگین یا نیم واریانس زیر میانگین نیز می‌گویند. روش دوم، استفاده ازنیم واریانسی است که ازمیانگین مجموع مجذور انحرافات پایین تر ازنرخ بازدهی هدف حاصل می‌شود وبه آن نیم واریانس بازدهی هدف یا نیم واریانس زیر هدف می‌گویند. روابط محاسباتی این دو اندازه به صورت زیر است:

$$SV_M = \frac{۱}{k}\sum_{t=\circ}^{k}(\max[\circ, (E(r) - r_t)])^{۲}$$

$$SV_T = \frac{۱}{k}\sum_{t=\circ}^{k}(\max[\circ, (T - r_t)])^{۲}$$

که SV_M نیم واریانس زیرمیانگین و SV_T نیم واریانس زیرهدف می‌باشد. k تعداد مشاهدات، $E(r)$ بازدهی مورد انتظار و Tنرخ بازدهی هدف است.

برای هدف گذاری بازدهی می‌توان ازمعیارهای مختلفی ازجمله نرخ بازدهی بدون ریسک، الگو برداری ازبازدهی سایر دارایی‌ها مانند سبدبازار و یا هرمعیار هدف گذاری دیگری استفاده کرد.

مارکویتز درسال ۱۹۵۹ مدل واریانس رابرای سهولت درانجام محاسبات معرفی کرد، چراکه درمدل نیم واریانس باید ماتریس نیم کوواریانس نیز محاسبه شود و درمجموع حجم اطلاعات مورد نیاز آن دوبرابر مدل واریانس می‌باشد. بررسی تحقیقات انجام گرفته نشان می‌دهد که ازدیدگاه محققان علم مالی، این اندازه‌ها دارای برتری نسبی هستند. کویرک و مائو [3] نشان دادند که سرمایه‌گذاران با لحاظ رفتاری و تمایلات فردی، بیشتربر ریسک نامطلوب تمرکز دارند تاریسکی که کلیه‌ی تلاطم‌ها رادرتعریف داشته باشد. درخصوص توانایی نیم واریانس برای تبیین چگونگی توزیع متغیر تصادفی(بازدهی دارایی)، ابهاماتی وجود دارد. اگرتوزیع بازدهی دارایی ازنوع نرمال باشد، اندازه نیم واریانس عددی را به دست می‌دهد که دقیقا نصف واریانس است. درغیر این صورت، یعنی اگر حاصل تقسیم نیم واریانس برواریانس عددی غیر

[1] Fama
[2] Mandelbrot
[3] Quirk and Mao

از۰/۵شود، درتوزیع متغیر تصادفی، چولگی وجوددارد. اگر چولگی توزیع، عددی منفی باشد، احتمال رخداد بازدهی کوچک‌تر نسبت به بازدهی بزرگ‌تربیشتراست. برعکس، اگرچولگی توزیع، عددی مثبت باشد، بازدهی های بزرگ‌تر با احتمال بیشتری حادث خواهند شد. لذا برای توضیح بیشتر به مراجع [۶] و [۴] رجوع نمائید.

ب. اندازه‌های ریسک مبتنی برچندک

می‌توان با اطمینان گفت معروف‌ترین اندازه‌ی موجود دراین گروه، ارزش درمعرض ریسک است. دیگر اندازه های موجود دراین گروه، ریزش مورد انتظار و اندازه‌های ریسک طیفی است.

ارزش درمعرض ریسک پیش ازآن که ابزار اندازه گیری ریسک باشد، یک مفهوم است و دقیقاً به همین دلیل، رویکردها و روش‌های متعددی برای محاسبه و اندازه‌گیری آن ارائه شده و توسعه یافته است. درهرکدام ازاین رویکردها سعی براین است تابه نوعی این مفهوم برآورده شود. اعتقاد عمومی درادبیات مالی براین است که ارزش درمعرض ریسک رویکردی جدید برای اداره و کنترل ریسک است و درنتیجه بسیار مورد توجه فعالان بازار قرار گرفته است. درادامه نحوه‌ی شکل گیری این مفهوم درطی زمان، تعریف و اهمیت آن به اندازه‌ای که مجال است، بیا خواهد شد.

عبارت''ارزش درمعرض ریسک ''تا اوایل دهه‌ی ۱۹۹۰وارد ادبیات مالی نشده بود، اما نقطه‌ی آغازین توجه به آن به سال ها پیش بازمی‌گردد، یعنی به حدود سال ۱۹۲۲ که در آن سال بورس اوراق بهادار نیویورک برای اولین بار به طور غیر رسمی سرمایه‌ی شرکت‌های عضو را موضوع آزمون قرارداد. البته مفهوم ارزش درمعرض ریسک اول بار توسط بامول [۱] درسال ۱۹۶۳ یعنی سه دهه قبل ازکاربرد وسیع آن، به هنگام بررسی مدلی به عنوان ''معیارحداطمینان عایدی موردانتظار''پیشنهاد شد. درعین حال، درنگاه کلی‌تر می‌توان گفت که ''مدل‌های ایمنی'' [۲] استادان مالی ازجمله ری درسال ۱۹۵۲ و تلسر [۳] درسال ۱۹۵۵ مقدمه‌ی شکل گیری مدل‌های ارزش درمعرض ریسک بوده است.

گولدیمان [۴] (۲۰۰۰) را می‌توان مبدع ارزش درمعرض ریسک به حساب آورد. دراواخر دهه‌ی ۸۰، اومدیربخش تحقیقات بانک جی.پی.مورگان بود. گروه مدیریت ریسک باید درمورد این مسئله تصمیم می‌گرفت که آیا سرمایه‌گذاری بدون ریسک در قرضه‌ی بلند مدت و تولید درآمد پایداررا انتخاب کند یا با سرمایه‌گذاری در ارز و سهام، ارزش بازار سهام خود را ثابت نگه دارد. بانک به این نتیجه رسید که ریسک ارزش ازریسک درآمد مهم تراست. این امر موجب شد که بانک یک گروه تحقیقاتی رابرای پژوهش درزمینه ریسک بسیج کند. درآن زمان به مدیریت صحیح ریسک مشتقات مالی توجه زیادی می‌شد. گروه سی [۵] که نماینده‌ی جی.پی.مورگان هم هم درآن حضورداشت، سلسله مباحث بهترین روش مدیریت ریسک راآغازکرد. عبارت

[1] Bamoul
[2] Safety models
[3] Telser
[4] Guldimann
[5] Group of thirty

''ارزش درمعرض ریسک''درژوئیه‌ی ۱۹۹۳ راه خود را درگزارش گروه سی پیدا کرد. این اولین باربود که عبارت ارزش درمعرض ریسک به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گرفت. اسامی دیگر ارزش درمعرض ریسک، سرمایه درمعرض رسک و دلارهای درمعرض ریسک بود که برای مدتی کاربرد داشت و زودتر از عبارت ارزش درمعرض ریسک درادبیات ظاهرشدند.

ارزش درمعرض ریسک [1] (VaR)، حداکثر زیانی است که کاهش ارزش سبد دارایی برای دوره‌ی معینی درآینده، باضریب اطمینان مشخصی، ازآن بیشتر نمی‌شود. به عبارت دیگر، (VaR) بدترین زیان مورد انتظار راتحت شرایط عادی بازار و طی یک دوره‌ی زمانی مشخص و در سطح اطمینان معین اندازه می‌گیرد. (VaR) به این سوال پاسخ می‌دهد که با x درصد احتمال و طی افق زمانی تعیین شده، حداکثر چه میزان از ارزش دارایی یا سبد دارایی‌ها درمعرض ریسک قرار دارد. برای مثال، ارزش در معرض ریسک در سطح اطمینان ۹۹ درصد برای بازه‌ی زمانی ۱۰روزه، گویای این است که حداکثر زیان مورد انتظار طی ۱۰ روز بعدی تنها یک بار درهر صد نمونه از مقدار ارزش در معرض ریسک فراتر می رود. به بیانی دیگر می‌توان گفت که (VaR) کاهش در ارزش بازار دارایی یا سبد دارایی است که می‌توان انتظار داشت طی فاصله‌ی زمانی معین و با یک احتمال خاص، از عدد معینی فراتر نمی‌رود.

با استفاده از نمادها می‌توان ارزش در معرض ریسک را به صورت زیر نشان داد:

$$P\{P_0 - P_1 \geq \text{VaR}\} \leq \alpha,$$

که P_0 ارزش سبد دارایی در زمان صفر و P_1 ارزش سبد درزمان ۱ می‌باشد. α نیز خطای آماری است. رابطه‌ی بالا بیان گر این است که احتمال این که کاهش ارزش سبد در دوره‌آتی، بیش ازارزش درمعرض ریسک باشد، حداکثر برابر α است. روش‌های رایج برای محاسبه ی این معیار شبیه‌سازی تاریخی، شبیه سازی مونته کارلو [2] و روش واریانس_کوواریانس است. با توجه به مرجع [۱] این موارد برقرار است.

۱۴.۱.۱ اندازه‌های ریسک منسجم

به رغم درک شهودی از ریسک‌های مالی، ارائه‌ی تخمین کمی از ریسک مشکل می‌نماید مگر اینکه دقیقاً منظور واقعی خود را از ریسک مشخص کنیم. در حقیقت، بیان تصورمان از ریسک بدون داشتن درک روشنی از مفهومی که از یک اندازه ریسک در نظر داریم، دشوار می‌نماید. بنابراین، لازم است جهت طراحی و توسعه‌ی اندازه‌های ریسک، ویژگی‌های آن‌ها را مشخص کنیم. درسال ۱۹۹۷ مقاله‌ای توسط آرتزنر و همکارانش منتشر شد که مفهوم اندازه ریسک منسجم را در آن معرفی کردند. در آن مقاله چندین اصل برای اندازه ریسک قرار داده شد که به اصول انسجام مشهورند و استدلال هایی برای اینکه یک اندازه ریسک معقول باید در این اصول صدق کند آورده شد. این کار به عنوان اولین کوشش جدی برای تعریف دقیق ریسک

[1] Value at Risk
[2] Monte Carlo Simulation

مالی، توسط بسیاری مورد استقبال قرار گرفت. و لذا به صورت مختصر به قواعد انسجام و مفاهیم آن می‌پردازیم و بررسی دقیق‌تر را که اساس کار ما بر پایه‌ی اندازه‌های ریسک منسجم [۱] است در فصل بعد انجام خواهیم داد. برای توضیحات بیشتر مرجع [۵] را ملاحظه نمائید.

قواعد انسجام و مفاهیم آن

$(\Omega, F, \mathbb{P})$ را فضای احتمالی بگیرید که پیشامدهای بازار را نشان دهد و L° را فضای تمام متغیرهای تصادفی بگیرید. سود_زیان یک سبد سرمایه روی یک افق زمانی معین می‌تواند به صورت یک متغیر تصادفی $X \in L \subset L^{\circ}$ نشان داده شود جایی که مقادیر منفی برای X متناظر با زیان‌ها است. مجموعه‌ی L از چنین جبرانی‌هایی یک مخروط محدب در نظر گرفته می‌شود.

دراین صورت اندازه ریسک $\rho : L \longrightarrow \mathbb{R}$ منسجم است هرگاه اصول زیر برقرار باشند:

۱. اصل یکنوایی: اگر برای هر $X, Y \in L$، $X \le Y$ آنگاه $\rho(X) \le \rho(Y)$.

۲. اصل انتقال تغییر ناپذیر: برای هر $c \in \mathbb{R}$، $\rho(X+c) = \rho(X) + c$.

۳. اصل جمع پذیری: برای هر $X, Y \in L$، $\rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$.

یعنی با تنوع سبد دارائی‌های ریسکی اندازه ریسک سبد کمتر خواهد شد. هنگامی که وابستگی بین ریسک‌ها مثبت و کامل باشد، حالت تساوی برقرار است.

۴. همگن مثبت: برای هر $\lambda > \circ$، $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

۱۵.۱.۱ متداول ترین اندازه‌های ریسک

حال به بیان متداول ترین اندازه‌های ریسک می‌پردازیم که عبارت اند از: ارزش در معرض ریسک (VaR)، ارزش در معرض ریسک مشروط [۲] (CVaR)، ارزش در معرض ریسک دنباله‌ای [۳] (TVaR)، میانگین ارزش در معرض ریسک [۴] (AVaR) و ریزش مورد انتظار [۵] (ES).

ارزش در معرض ریسک (VaR)

فرض کنید X متغیر تصادفی که کاهش ارزش دارایی را در دوره آتی مشخص می‌کند. دراین صورت ارزش در معرض ریسک X به صورت زیر است.

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) = \inf\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\mathrm{X} \le \mathrm{x}) \ge 1 - \alpha\}.$$

[1] Coherent risk measures
[2] Conditional value at risk
[3] Tail value at risk
[4] Average value at risk
[5] Expected shortfall

که در آن $\alpha \in (\circ, ۱)$ سطح اطمینان بوده و معمولاً برابر ۹۵ یا ۹۹ درصد در نظر گرفته می‌شود. مفهوم رابطه بالا این است که احتمال اینکه کاهش ارزش دارایی در دوره آتی،بیش از مقدار ارزش در معرض ریسک باشد، برابر $۱ - \alpha$ است.

ارزش در معرض ریسک مشروط (CVaR)

ارزش در معرض ریسک برخلاف محبوبیت در بین مؤسسات مالی مورد انتقاد زیادی قرار گرفته است زیرا به اندازه کافی ضررهای فاجعه آمیز دم توزیع را نشان نمی‌دهد. ولذا به همین خاطر ارزش در معرض ریسک مشروط تا حدودی این کار را انجام می‌دهد و به صورت زیر تعریف می‌شود. $\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X} \mid \mathrm{X} > \mathrm{VaR}(\mathrm{X}))$ به شرطی که $\mathbb{P}\{X > \mathrm{VaR}_\alpha(\mathrm{X})\} > 0$.

ارزش در معرض ریسک دنباله‌ای (TVaR)

ارزش دنباله در معرض خطر برابر است با میانگین زیانی که شرکت در مواردی که زیان از سطح احتمال مورد نظر تجاوز کند، متحمل می‌شود. با این تعریف ارزش دنباله در معرض ریسک همیشه بزرگتر و یا مساوی ارزش در معرض ریسک است. که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(\mathrm{X}) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_\mathrm{r}(\mathrm{X})\mathrm{dr}.$$

که در آن $\mathbb{E}(\mid X \mid) < \infty$ و سطح اطمینان $۱ - \alpha$، که در آن $\alpha \in (\circ, ۱)$.

میانگین ارزش در معرض ریسک (AVaR)

میانگین در معرض ریسک AVaR یک اندازه ریسک است که جایگزین مناسبی برای VaR است. AVaR یک مورد خاص از اندازه‌های ریسک طیفی است. یک نقطه ضعف VaR این است که هیچ گونه اطلاعاتی در مورد شدت خسارت فراتر از سطح VaR نمی‌دهد.

AVaR در احتمال α به عنوان میانگین VaR هایی که احتمالاً از دم بزرگتر هستند از VaR تعریف شده است.

AVaR روی ضررهای موجود در دم متمرکز است که از سطح VaR مربوطه بزرگتراست، و به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathrm{AVaR}_\alpha(\mathrm{X}) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_\mathrm{r}(\mathrm{X})\mathrm{dr}.$$

ازطرفی AVaR فقط برای متغیرهای تصادفی با میانگین متناهی تعریف شده است، به طوریکه: اگر $\mathrm{AVaR}_\alpha(\mathrm{X}) < \infty$ آنگاه $\mathbb{E}(\mid X \mid) < \infty$.

ریزش مورد انتظار (ES)

ریزش مورد انتظار که ارزش در معرض ریسک مشروط و میانگین ارزش در معرض ریسک نیز نامیده می‌شود. معمولاً برای ارزیابی ریسک بازار و ریسک اعتبار یک سبد سهام مورد استفاده

قرار می‌گیرد. این معیار در واقع جایگزینی برای ارزش در معرض ریسک به شمار می‌رود ولی نسبت به شکل دنباله توزیع خسارت بسیار حساس است. این معیار زیان مورد انتظار یک سبد سهام را در سطح احتمال معین و یا پایین تر از آن نشان می‌دهد. اگر تابع توزیع متغیر تصادفی X که با F_X نشان می‌دهیم پیوسته باشد داریم

$$\mathrm{ES}_\alpha = \mathbb{E}(\mathrm{X} \mid \mathrm{X} \geq \mathrm{VaR}_\alpha).$$

به عبارت دیگر در اینجا اگر X متغیر تصادفی تابع زیان فرض شود آنگاه اندازه ES، اندازه زیان مورد انتظار در دم بالایی توزیع زیان را نشان می‌دهد.

حال اندازه ریزش مورد انتظار برای یک متغیر تصادفی با توزیع نا پیوسته به صورت زیر است.

$$\mathrm{ES}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\mathrm{r}(\mathrm{X})\mathrm{dr}.$$

فصل ۲

فضاهای مدل و اندازه‌های ریسک وابسته به آن‌ها

۱.۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

دراین فصل به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی که در پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد می‌پردازیم.

نمادگذاری و اصطلاحات : مجموعه‌ی ناتهی M و تابع $f : M \to [-\infty, \infty]$ را در نظر می‌گیریم و دامنه‌ی f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{dom}(f) = \{m \in M \mid f(m) < \infty\}.$$

تابع f را سره گوییم هرگاه $-\infty$ را اختیار نکند و $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$.

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. یک توپولوژی روی X عبارت است از مجموعه ای از زیر مجموعه های X مانند τ که دارای شرایط زیر باشد.

۱. $\phi, X \in \tau$

۲. اجتماع هرتعداد دلخواه از عناصر τ در τ باشد.

۳. اشتراک هر تعداد متناهی از عناصر τ در τ باشد.

فضای X را که توپولوژی τ روی آن تعریف شده است را فضای توپولوژیک گوییم.
برای یک زیرمجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک $(\mathcal{X},\tau)$، بستار A را با $\mathrm{cl}_\tau(A)$ و درون A را با $\mathrm{int}_\tau(A)$ نسبت به توپولوژی τ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۲. مجموعه ناتهی J را یک مجموعه جهت دار می‌نامیم هرگاه یک رابطه ترتیبی جزئی مانند $\preceq$ روی J باشد به طوری که برای هر دوعضو $\alpha,\beta\in J$، عضو $\gamma\in J$ چنان موجود باشد که $\alpha\preceq\gamma$ و $\beta\preceq\gamma$.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و J یک مجموعه جهت دار باشد. دراین صورت یک تور در X نگاشتی چون $x:J\longrightarrow X$ باضابطه $\alpha\longrightarrow x(\alpha)$ است که آن را به اختصار به صورت $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت تور $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ را همگرا به $x\in X$ می‌نامیم هرگاه برای هر همسایگی U از x، $\alpha\in J$ چنان موجود باشد که برای هر $\beta\in J$ با شرط $\beta\succeq\alpha$ رابطه $x_\beta\in U$ برقرار باشد.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید X یک فضای برداری و (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد.به طوریکه شرایط زیر برقرار باشند.

الف. برای هر $x\in X$ ، $\{x\}$ بسته باشد.

ب. توابع

$$\begin{aligned} X\times X &\longrightarrow X \\ (x,y) &\longrightarrow x+y \end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} \mathbb{C}\times X &\longrightarrow X \\ (\alpha,x) &\longrightarrow \alpha x \end{aligned}$$

پیوسته باشند.

در این صورت τ را یک توپولوژی برداری روی X و X را یک فضای برداری توپولوژیک می‌نامند.

اگر $(\mathcal{X},\tau)$ یک فضای برداری توپولوژیک و توپولوژی τ توسط یک نرم مانند $\|\cdot\|$ روی $\mathcal{X}$ تولید شود آنگاه بجای $\mathrm{cl}_\tau(A)$ و $\mathrm{int}_\tau(A)$ به ترتیب $\mathrm{cl}_{\|\cdot\|}(A)$ و $\mathrm{int}_{\|\cdot\|}(A)$ را قرار می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۲. یک فضای برداری مرتب جزئی عبارت است از فضای برداری حقیقی مانند X مجهز به رابطه ترتیبی $\preceq$ که با ساختارجبری به معنی زیر سازگار باشد.

۱. اگر $x\succeq y$ ، آنگاه برای هر $z\in X$ ، $x+z\succeq y+z$

۲. اگر $x\succeq y$، آنگاه برای هر $\alpha\geq 0$ ، $\alpha x\succeq\alpha y$

تعریف ۶.۱.۲. سه تایی $(\mathcal{X}, \tau, \preceq)$ یک فضای برداری توپولوژیک مرتب نامیده می‌شود هرگاه $(\mathcal{X}, \tau)$ یک فضای برداری توپولوژیک و $\preceq$ یک ترتیب فضای برداری جزئی سازگار با توپولوژی τ باشد. بدین معنا که مخروط مثبت $\mathcal{X}$ یعنی

$$\mathcal{X}_+ = \{X \in \mathcal{X} \mid X \succeq \circ\},$$

نسبت به توپولوژی τ بسته باشد.

به طور مشابه $\mathcal{X}_{++}$ ، $\mathcal{X}_-$ و $\mathcal{X}_{--}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{++} &= \mathcal{X}_+ \setminus \{\circ\} \quad ، \\ \mathcal{X}_- &= \{X \in \mathcal{X} \mid X \preceq \circ\} \\ \text{و} \quad \mathcal{X}_{--} &= \mathcal{X}_- \setminus \{\circ\}. \end{aligned}$$

تعریف ۷.۱.۲. فضای برداری مرتب جزئی $(\mathcal{X}, \preceq)$ را یک شبکه برداری یا فضای ریس [1] می‌نامیم هرگاه برای هر دو بردار $X, Y \in \mathcal{X}$ ، $\sup\{X, Y\}$ و $\inf\{X, Y\}$ هر دو موجود باشند.

درفضای ریس $(\mathcal{X}, \preceq)$ به ازای هر $X, Y \in \mathcal{X}$ بردارهای $X \vee Y$ ، $X \wedge Y$ ، X^+ ، X^- و $\mid X \mid$ رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X \vee Y = \sup\{X, Y\} \qquad X \wedge Y = \inf\{X, Y\}$$

$$X^+ = X \vee \circ \qquad X^- = (-X) \vee \circ$$

$$\mid X \mid = X^+ + X^-.$$

در ادامه به تعریف روش های اندازه گیری ریسک و اندازه های ریسک می پردازیم و همچنین بعضی از ویژگی هایی که یک اندازه ریسک می تواند داشته باشد را مورد بحث قرار می‌دهیم و درنهایت ساختارکلی نظریه دوگان بودن را معرفی می‌نماییم.

تعریف ۸.۱.۲. فرض کنید $(\mathcal{X}, \tau, \preceq)$ یک فضای برداری توپولوژیک مرتب باشد . در این صورت زیر مجموعه $\mathcal{A}$ از $\mathcal{X}$ را یک مجموعه پذیرش می‌نامیم هرگاه $\mathcal{A}$ ناتهی ،سره، محدب و همچنین یکنوا به معنی زیر باشد

$$\mathcal{A} - \mathcal{X}_+ \subseteq \mathcal{A}.$$

[1] Riesz

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ و τ، $\preceq$ به ترتیب توپولوژی و رابطه ترتیبی استاندارد روی $\mathbb{R}$ باشند. در این صورت اگر $\mathcal{A} = (-\infty, 0)$ آنگاه به وضوح $\mathcal{A}$ ناتهی، سره، محدب ویکنواست. لذا $\mathcal{A}$ یک مجموعه پذیرش است.

تعریف ۲.۱.۹. فرض کنید $(\mathcal{X}, \tau, \preceq)$ یک فضای برداری توپولوژیک مرتب باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{X}$ یک زیرفضای برداری متناهی‌البعد از $\mathcal{X}$ درنظر گرفته شود که شامل عضو $U \in \mathcal{S} \cap \mathcal{X}_{++}$ باشد. دراین صورت $\mathcal{S}$ رایک فضای اطمینان می‌نامیم.

به هرعضو $Z \in \mathcal{S}$ یک سبد اطمینان یا به طور ساده اطمینان می‌گوییم.

تعریف ۲.۱.۱۰. فرض کنید $\mathcal{S}$ یک فضای اطمینان و $\mathfrak{p} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ یک تابعک خطی مثبت باشد به طوری که برای هر $Z \in \mathcal{S} \cap \mathcal{X}_{++}$، $\mathfrak{p}(Z) > 0$ دراین صورت $\mathfrak{p}$ رایک تابعک قیمت گذاری می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک مجموعه‌ی پذیرش، $\mathcal{S}$ یک فضای اطمینان و $\mathfrak{p}$ یک تابعک قیمت گذاری روی $\mathcal{S}$ باشد به طوری که برای هر $X \in \mathcal{X}$ ،

$$\sup\{\mathfrak{p}(Z) \mid Z \in \mathcal{S}, X + Z \in \mathcal{A}\} < \infty. \tag{۲.۱}$$

دراین صورت سه تایی $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ را یک روش اندازه‌گیری ریسک می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱۲. فرض کنید $\mathcal{R}$ یک روش اندازه گیری ریسک باشد. تابعک $\rho_{\mathcal{R}}$ که به صورت

$$\rho_{\mathcal{R}} : \mathcal{X} \to (-\infty, \infty] \quad , \quad X \to \inf\{\mathfrak{p}(Z) \mid Z \in \mathcal{S}, X - Z \in \mathcal{A}\} \tag{۲.۲}$$

تعریف می‌شود را اندازه ریسک وابسته به روش اندازه گیری ریسک $\mathcal{R}$ می‌نامیم.

تعاریف اندازه های ریسک الهام گرفته از مراجع [۱۴، ۱۹] می‌باشد.

ملاحظه ۲.۱.۱. ۱. عناصر $X \in \mathcal{X}$ زیان های مدل هستند نه سود ها. بنابراین برای هر $X \in \mathcal{X}$ ، $\rho_{\mathcal{R}}(X)$ برابر مینیمم مقداری است که باید برای بعضی از اعضای $Z \in \mathcal{S}$ (سبدهای اطمینان) با عایدی Z امروز به منظور کاهش دادن زیان آینده X ، در یک سطح قابل پذیرش سرمایه گذاری شود.

۲. محدب بودن مجموعه پذیرش $\mathcal{A}$ بدین معنی مقرر می‌شود که تغییرپذیری و تنوع پذیری امکان پذیر است ومورد جریمه واقع نمی‌شود. لذا اگر X و Y دو مجموعه قابل پذیرش باشند آنگاه برای هر $\lambda \in (0, 1)$ ، $\lambda X + (1 - \lambda)Y$ به عنوان یک تغییر در X و Y مورد پذیرش می‌باشد.

۳. مفهوم روش اندازه‌گیری ریسک باتوجه به رابطه (۲.۱) به ارتباط بین $\mathcal{A}$ ، $\mathcal{S}$ و $\mathfrak{p}$ وابسته است. همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که $\rho_{\mathcal{R}}$ یک تابع سره است. بدین معنی که مقدار $-\infty$ را نمی‌پذیرد. درواقع اگر $\rho_{\mathcal{R}}(X) = -\infty$ آنگاه دنباله ای از اعضای

$\mathcal{S}$ مانند $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ موجود است به طوریکه $X - Z_n \in \mathcal{A}$ و $\rho_{\mathcal{R}}(Z_n) \longrightarrow -\infty$. حال باتوجه به تعریف فضای اطمینان، عضو $U \in \mathcal{S} \cap \mathcal{X}_{++}$ را انتخاب می‌کنیم. چون $\mathcal{A}$ مجموعه پذیرش است داریم، $(X - Z_n) - U \in \mathcal{A}$. بنابراین $X + (-Z_n - U) \in \mathcal{A}$. چون $-Z_n - U \in \mathcal{S}$ پس $\mathfrak{p}(-Z_n - U) \leq \sup\{\mathfrak{p}(Z) \,|\, Z \in \mathcal{S}, X + Z \in \mathcal{A}\} = M < \infty$. این نشان می‌دهد که $-\mathfrak{p}(Z_n) - \mathfrak{p}(U) \leq M$. حال اگر $n \longrightarrow \infty$ آنگاه $M \geq \infty$ که یک تناقض است. پس $\rho_{\mathcal{R}}(X) \neq -\infty$.

گزاره‌های ۱و۲ از مرجع [۱۴] محکی برای این که $(\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه گیری ریسک باشد را بیان می‌کنند.

تعریف ۱۳.۱.۲. فرض کنید $(\mathcal{X}, \preceq)$ یک فضای ریس باشد. در این صورت عضو $1 \in \mathcal{X}$ را یک یکه ضعیف [1] یا یکه ترتیبی ضعیف می‌نامیم هرگاه

۱. $0 \preceq 1$

۲. برای هر $f \in \mathcal{X}$، اگر $f \wedge 1 = 0$ آنگاه $f = 0$.

مثال ۲.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ و $\preceq$ همان ترتیب استاندارد روی $\mathcal{X}$ باشد. دراین صورت هرعضو $\mathcal{X}_{++} = (0, \infty)$ یک یکه ضعیف می‌باشد.

ملاحظه ۲.۱.۲. ۱. اگر $U \in \mathcal{X}_{++}$ و $\mathcal{S} = \mathbb{R} \cdot U$ وبرای هر $m \in \mathbb{R}$، $\mathfrak{p}(mU) = m$ آنگاه نتایج موجود در مراجع [۱۲، ۱۳] که درمورد یک دارایی واجد شرایط جاری است ازتعریف (۸.۱.۲) بدست می‌آیند.

۲. اگر $\mathcal{X}$ فضای ریس، $1 \in \mathcal{X}$ یک یکه ضعیف، $\mathcal{S} = \mathbb{R} \cdot 1$ و برای هر $m \in \mathbb{R}$، $\mathfrak{p}(m1) = m$ آنگاه تعریف (۸.۱.۲) اندازه‌های ریسک پولی محدب راکه به طور گسترده درمرجع [۱۵] موردمطالعه قرار گرفته است تحت پوشش قرارمی‌دهد.

لم ۱.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک روی فضای برداری توپولوژیک مرتب $\mathcal{X}$ باشد. دراین صورت

۱. $\rho_{\mathcal{R}}$ محدب است.

۲. $\rho_{\mathcal{R}}$ یکنواست یعنی به ازای هر $X, Y \in \mathcal{X}$، اگر $X \preceq Y$ آنگاه $\rho_{\mathcal{R}}(X) \leq \rho_{\mathcal{R}}(Y)$.

۳. $\rho_{\mathcal{R}}$، $\mathcal{S}-$ جمع پذیر است بدین معنی که به ازای هر $X \in \mathcal{X}$ وهر $Z \in \mathcal{S}$،

$$\rho_{\mathcal{R}}(X + Z) = \rho_{\mathcal{R}}(X) + \mathfrak{p}(Z).$$

[1] Weak unit

برهان. قسمت ۱ و ۳ را اثبات می‌کنیم. قسمت ۲ به طور مشابه قابل اثبات است.

اگر $\rho_{\mathcal{R}}(X)=\infty$ یا $\rho_{\mathcal{R}}(Y)=\infty$ آنگاه به وضوح نامساوی $\rho_{\mathcal{R}}(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leq\lambda\rho_{\mathcal{R}}(X)+(1-\lambda)\rho_{\mathcal{R}}(Y)$ به ازای هر $\lambda\in(0,1)$ وهر $X,Y\in\mathcal{X}$ برقراراست.

حال فرض کنید $\rho_{\mathcal{R}}(X)<\infty$ و $\rho_{\mathcal{R}}(Y)<\infty$. دراین صورت برای هر $\varepsilon>0$ اعضای $Z_1,Z_2\in\mathcal{S}$ چنان موجود هستند که

$\rho_{\mathcal{R}}(X)+\varepsilon>\mathfrak{p}(Z_1)$ و $X-Z_1\in\mathcal{A}$ و $\rho_{\mathcal{R}}(Y)+\varepsilon>\mathfrak{p}(Z_2)$ و $Y-Z_2\in\mathcal{A}$.

بنابراین $\lambda\rho_{\mathcal{R}}(X)+\lambda\varepsilon>\lambda\mathfrak{p}(Z_1)$ و $(1-\lambda)\rho_{\mathcal{R}}(Y)+(1-\lambda)\varepsilon>(1-\lambda)\mathfrak{p}(Z_2)$.

این نشان می‌دهد که $\lambda\rho_{\mathcal{R}}(X)+(1-\lambda)\rho_{\mathcal{R}}(Y)+\varepsilon>\mathfrak{p}(\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2)$

وهمچنین $\lambda X+(1-\lambda)Y-(\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2)\in\mathcal{A}$. حال باتوجه به تعریف $\rho_{\mathcal{R}}$ داریم، $\lambda\rho_{\mathcal{R}}(X)+(1-\lambda)\rho_{\mathcal{R}}(Y)+\varepsilon\geq\rho_{\mathcal{R}}(\lambda X+(1-\lambda)Y)$.

بافرض $\varepsilon\longrightarrow 0$ نتیجه می‌شود که $\rho_{\mathcal{R}}(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leq\lambda\rho_{\mathcal{R}}(X)+(1-\lambda)\rho_{\mathcal{R}}(Y)$. لذا $\rho_{\mathcal{R}}$ محدب است.

قسمت ۳.اگر $\rho_{\mathcal{R}}(X)=\infty$ آنگاه به ازای هر $Z\in\mathcal{S}$، $X-Z\notin\mathcal{A}$. پس به ازای هر $T\in\mathcal{S}$ ، $(X+Z)-T=X+(Z-T)\notin\mathcal{A}$. این نشان می‌دهد که مجموعه $\{\mathfrak{p}(T)|T\in\mathcal{S},(X+Z)-T\in\mathcal{A}\}$ تهی است. بنابراین $\rho_{\mathcal{R}}(X+Z)=\infty$. حال اگر $\rho_{\mathcal{R}}(X)<\infty$ آنگاه برای هر $\varepsilon>0$ عضوی چون $T\in\mathcal{S}$ باشرط $X-T\in\mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که $\rho_{\mathcal{R}}(X)+\varepsilon>\mathfrak{p}(T)$. حال به ازای $Z\in\mathcal{S}$ ، $\rho_{\mathcal{R}}(X)+\mathfrak{p}(Z)+\varepsilon>\mathfrak{p}(T)+\mathfrak{p}(Z)$. بنابراین $\rho_{\mathcal{R}}(X)+\mathfrak{p}(Z)+\varepsilon>\mathfrak{p}(T+Z)$.

چون $T+Z\in\mathcal{S}$ و $(X+Z)-(T+Z)\in\mathcal{A}$ بنابراین باتوجه به تعریف $\rho_{\mathcal{R}}$ داریم، $\mathfrak{p}(T+Z)\geq\rho_{\mathcal{R}}(X+Z)$. این نشان می‌دهدکه $\rho_{\mathcal{R}}(X)+\mathfrak{p}(Z)+\varepsilon\geq\rho_{\mathcal{R}}(X+Z)$. اگر $\varepsilon\longrightarrow 0$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که

$$\rho_{\mathcal{R}}(X)+\mathfrak{p}(Z)\geq\rho_{\mathcal{R}}(X+Z). \tag{۳.۲}$$

همچنین

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{R}}(X)=\rho_{\mathcal{R}}((X+Z)+(-Z))&\leq\rho_{\mathcal{R}}(X+Z)+\mathfrak{p}(-Z)\\&=\rho_{\mathcal{R}}(X+Z)-\mathfrak{p}(Z).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\rho_{\mathcal{R}}(X)+\mathfrak{p}(Z)\leq\rho_{\mathcal{R}}(X+Z). \tag{۴.۲}$$

حال باتوجه به نامساوی های (۳.۲) و (۴.۲) داریم $\rho_{\mathcal{R}}(X+Z)=\rho_{\mathcal{R}}(X)+\mathfrak{p}(Z)$.

□

حال تعریف زیر را که بیانگر ویژگی های بیشتری از یک اندازه ریسک است ارائه می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۲. اگر $\mathcal{R}=(\mathcal{A},\mathcal{S},\mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک روی فضای برداری توپولوژیک مرتب $(\mathcal{X},\tau,\preceq)$ باشد و $\rho_{\mathcal{R}}$ اندازه ریسک وابسته به $\mathcal{R}$ درنظرگرفته شود آنگاه

۱. $\rho_{\mathcal{R}}$ را متناهی گوییم هرگاه مقادیرمتناهی را اختیارکند. به طور معادل هرگاه $\mathcal{A}+\mathcal{S}=\mathcal{X}$.

۲. $\rho_{\mathcal{R}}$ را نرمال شده
گوییم هرگاه $\rho_{\mathcal{R}}(\circ)=\circ$ یا به طور معادل $\sup_{Z\in\mathcal{A}\cap\mathcal{S}}\mathfrak{p}(Z)=\circ$.

۳. $\rho_{\mathcal{R}}$ را منسجم گوییم هرگاه برای هر $X\in\mathcal{X}$ و برای هر $t>\circ$، $\rho_{\mathcal{R}}(tX)=t\rho_{\mathcal{R}}(X)$.

۴. $\rho_{\mathcal{R}}$ را حساس گوییم هرگاه برای هر $X\in\mathcal{X}_{++}$ ، $\rho_{\mathcal{R}}(X)>\rho_{\mathcal{R}}(\circ)$.

۵. $\rho_{\mathcal{R}}$ را نیم‌پیوسته از پایین $(l.s.c)$ گوییم هرگاه هر مجموعه‌ی سطح پایین $\{X\in\mathcal{X}\,|\,\rho_{\mathcal{R}}(X)\leq c\}$ که درآن $c\in\mathbb{R}$ ، نسبت به توپولوژی τ بسته باشد.

۶. $\rho_{\mathcal{R}}$ را پیوسته از بالا گوییم هرگاه متناهی بوده و برای هر دنباله مانند $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{X}$ باشرط $X_n\downarrow X$ ، داشته باشیم $\lim\limits_{n}\rho_{\mathcal{R}}(X_n)=\rho_{\mathcal{R}}(X)$.

گزاره ۱.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{R}=(\mathcal{A},\mathcal{S},\mathfrak{p})$ یک روش اندازه گیری ریسک باشدو $\rho_{\mathcal{R}}$ اندازه ریسک وابسته به $\mathcal{R}$ درنظرگرفته شود. دراین صورت هرگاه $\rho_{\mathcal{R}}(\circ)\in\mathbb{R}$ آنگاه $\rho_{\mathcal{R}}$ رامی‌توان به یک اندازه ریسک نرمال شده تبدیل نمود.

برهان. فرض کنید $U\in\mathcal{S}\cap\mathcal{X}_{++}$ و $r=\dfrac{\rho_{\mathcal{R}}(\circ)}{\mathfrak{p}(U)}$. همچنین فرض کنید $\check{\mathcal{A}}=\{X+rU\,|\,X\in\mathcal{A}\}$ یک انتقال ازمجموعه پذیرش $\mathcal{A}$ باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که $\check{\mathcal{R}}=(\check{\mathcal{A}},\mathcal{S},\mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک می‌باشد. علاوه براین

$$\begin{aligned}-\rho_{\check{\mathcal{R}}}(\circ)&=\sup\{\mathfrak{p}(Z)\,|\,Z\in\mathcal{S},Z-rU\in\mathcal{A}\}=\sup\{\mathfrak{p}(W)+\mathfrak{p}(rU)\,|\,W\in\mathcal{S}\cap\mathcal{A}\}\\&=\sup\{\mathfrak{p}(W)\,|\,W\in\mathcal{S}\cap\mathcal{A}\}+\mathfrak{p}(rU)\\&=-\rho_{\mathcal{R}}(\circ)+r\mathfrak{p}(U)\\&=-\rho_{\mathcal{R}}(\circ)+\rho_{\mathcal{R}}(\circ)=\circ.\end{aligned}$$

لذا $\rho_{\check{\mathcal{R}}}$ یک اندازه ریسک نرمال شده می‌باشد.

□

گزاره ۲.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{R}=(\mathcal{A},\mathcal{S},\mathfrak{p})$ یک روش اندازه گیری ریسک باشد و $\rho_{\mathcal{R}}$ اندازه ریسک وابسته به $\mathcal{R}$ درنظرگرفته شود. دراین صورت اگر $\rho_{\mathcal{R}}$ نیم پیوسته ازپایین باشد آنگاه

$$\{X\in\mathcal{X}\,|\,\rho_{\mathcal{R}}(X)\leq\circ\}=\mathrm{cl}_{\tau}(A+\ker(\mathfrak{p})).$$

برهان. باتوجه به تعریف نیم پیوستگی از پایین اثبات واضح است. □

ملاحظه ۳.۱.۲. ۱. نرمال سازی ایجاب می‌کند که مخروط منفی $\mathcal{X}_-$ (متغییرهای تصادفی بدون زیان) قابل قبول خواهند بود، که ازنظر اقتصادی درست است.

۲. یادآوری می‌کنیم که برخلاف سهم بزرگی ازتحقیقات که بروری اندازه های ریسک انجام پذیرفته است، متغییر های تصادفی زیان‌های مدل هستند نه سودها. بنابراین مفهوم پیوستگی ازبالا بیان شده درتعریف (۱۴.۱.۲) قسمت ۶ به همان معنی پیویستگی از بالا که توسط شید [1] و فولمر [2] در مرجع ([۱۵]، لم ۲۱.۴]) بیان شد نمی باشد.

۳. یادآوری می‌کنیم که درحالتی که اگر $\mathcal{X}$ یک شبکه باناخ با نرم $\|.\|$ باشد آنگاه هراندازه ریسک متناهی تحت نرم پیوسته و لذا از پایین پیوسته است.

گزاره ۳.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک شبکه باناخ و $f : \mathcal{X} \longrightarrow (-\infty, \infty]$ یک تابع یکنوا ومحدب سره باشد آنگاه f روی $\mathrm{int(dom(f))}$ پیوسته است.

برهان. رجوع شود به گزاره ۱ از مرجع [۲۰] .

□

ازگزاره ۳.۱.۲ به طورمتوالی دراین پایان نامه استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۵.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه گیری ریسک روی فضای برداری توپولوژیک مرتب $(\mathcal{X}, \tau, \preceq)$ باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{X}^*$ دوگان توپولوژیک $\mathcal{X}$ لحاظ شود. دراین صورت تابع تکیه گاه(محمل) مجموعه پذیرش $\mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma_{\mathcal{A}} : \mathcal{X}^* \longrightarrow (-\infty, \infty], \ell \longmapsto \sup_{Y \in \mathcal{A}} \ell(Y) \tag{۵.۲}$$

وهمچنین $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathrm{dom}(\sigma_{\mathcal{A}})$.

تعریف ۱۶.۱.۲. فرض کنید $\mathfrak{p} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ یک تابعک قیمت گذاری روی $\mathcal{S}$ باشد. در این صورت تابعک خطی و مثبت $\ell : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک توسیع از $\mathfrak{p}$ می‌نامیم هرگاه $\ell \mid_{\mathcal{S}} = \mathfrak{p}$. مجموعه تمام توسیع های $\mathfrak{p}$ را با $\varepsilon_{\mathfrak{p}}$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر $\varepsilon_{\mathfrak{p}} = \{\ell \in \mathcal{X}_+^* \mid \ell \mid_{\mathcal{S}} = \mathfrak{p}\}$.

تعریف ۱۷.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای نرم‌دار و $\mathcal{X}^*$ دوگان $\mathcal{X}$ باشد. در این صورت توپولوژی تولید شده توسط $\mathcal{X}^*$ روی $\mathcal{X}$، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی روی $\mathcal{X}$ به قسمی که هر $\ell \in \mathcal{X}^*$ نسبت به آن توپولوژی پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی $\mathcal{X}$ می‌نامند و آن را با $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ نمایش می‌دهند.

هرگاه $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{X}$ باشد که در توپولوژی ضعیف به X همگرا باشد، می‌نویسیم $X_n \xrightarrow{\omega} X$.

[1] scheid
[2] Fölmer

قضیه ۲.۱.۱. اگر $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای در فضای نرم‌دار $\mathcal{X}$ باشد آنگاه شرط لازم و کافی برای آن که $X_n \xrightarrow{w} X$ آن است که به ازای هر $\ell \in \mathcal{X}^*$، $\ell(X_n) \longrightarrow \ell(X)$.

برهان. رجوع شود به قضیه ۶.۶ از مرجع [۷]. □

تعریف ۲.۱.۱۸. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای نرم دار و $\mathcal{X}^{**}$ دوگان دوم آن باشد. نگاشت $\phi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^{**}$ رابه ازای هر $X \in \mathcal{X}$ و $\ell \in \mathcal{X}^*$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\phi(X)(\ell) = \ell(X).$$

تعریف ۲.۱.۱۹. هرگاه $\mathcal{X}$ یک فضای نرم دار و $\mathcal{X}^*$ دوگان آن باشد آنگاه کوچکترین توپولوژی روی $\mathcal{X}^*$ که نسبت به آن برای هر $X \in \mathcal{X}$ ، $\phi(X)$ پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف-ستاره روی $\mathcal{X}^*$ می‌نامیم و آن را با نماد $\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۲۰. هرگاه $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{X}^*$ باشد آنگاه گوییم ℓ_n درتوپولوژی ضعیف-ستاره به $\ell \in \mathcal{X}^*$ میل می‌کند ومی‌نویسیم $\ell_n \xrightarrow{w^*} \ell$، هرگاه به ازای هر $X \in \mathcal{X}$، $\ell_n(X) \longrightarrow \ell(X)$.

قضیه ۲.۱.۲ (باناخ آلاغلو[1]). هرگاه $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار باشد و $\mathcal{X}^*$ دوگان $\mathcal{X}$ درنظرگرفته شود آنگاه گوی یکه بسته $\overline{\mathcal{B}_1^{(\circ)}} = \{\ell \in \mathcal{X}^* \mid \|\ell\| \leq 1\}$ درتوپولوژی ضعیف-ستاره روی $\mathcal{X}^*$ فشرده است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۷.۳ از مرجع [۷]. □

۲.۲ فضاهای مدل متغیرهای تصادفی کراندار و مدل‌های احتمال مرجع قوی و ضعیف

۲.۲.۱ فضای مدل $\mathcal{L}^{\infty}$ و اندازه‌های احتمال مرجع ضعیف

دراین بخش فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه پذیر و همچنین $\mathcal{L}^{\infty} = \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F})$ مجموعه‌ی توابع حقیقی مقدار اندازه پذیر و کراندار باشد. هرگاه به ازای هر $X \in \mathcal{L}^{\infty}$ ، $|X|_{\infty} = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$ آنگاه باترتیب نقطه وار $\leq$ ، $\mathcal{L}^{\infty}$ تبدیل به یک شبکه باناخ و همچنین یک فضای برداری توپولوژیک مرتب می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $(\mathcal{X}, \preceq)$ یک فضای ریس باشد. $e \in \mathcal{X}_+$ را یکه ترتیبی می‌نامیم هرگاه

$$\{X \in \mathcal{X} \mid \exists \lambda > 0 : |X| \preceq \lambda e\} = \mathcal{X}.$$

[1] Banach-Anaoglu

مثال ۱.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{X}=\mathbb{R}$ و $\preceq$ همان رابطه ترتیبی استاندارد روی $\mathcal{X}$ باشد. دراین صورت هرعضو $e\in\mathcal{X}_{++}=(0,\infty)$ یک یکه ترتیبی است. درواقع به ازای هر $X\in\mathcal{X}$ داریم $\mid X\mid\preceq\frac{|X|}{e}$. لذا $\mathcal{X}=\{X\in\mathcal{X}|\exists\lambda>0:\mid X\mid\preceq\lambda e\}$.

مثال ۲.۲.۲. تابع ثابت $\mathcal{X}(\omega)=1$ یک یکه ترتیبی برای فضای ریس $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ است.

گزاره ۱.۲.۲. هرگاه $\mathcal{L}^\infty=\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ آنگاه دوگان فضای $\mathcal{L}^\infty$ که آن را با $\mathbf{ba}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر می‌باشد.

$$(\mathcal{L}^\infty)^*=\mathbf{ba}=\{\mu:\mathcal{F}\to\mathbb{R}\mid \mu\text{متناهی جمع پذیراست}\}.$$

برهان. رجوع شود به گزاره ۴.۷.۳۹ از مرجع [۱۱]. □

نمادگذاری : هرگاه $\mathcal{L}^\infty=\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ آنگاه قرار می‌دهیم $\mathbf{ca}=\{\mu\in\mathbf{ba}\mid \mu\text{شماراجمع پذیراست}\}$ و $\mathbf{ca}_+=\{\mu\in\mathbf{ba}\mid \mu\text{اندازه است}\}$ و $\mathbf{ba}_+=\{\mu\in\mathbf{ba}\mid \mu\text{اندازه ی متناهی جمع پذیر است}\}$.

هرگاه به ازای هر $m\in\mathbb{R}$ تابع ثابت $\Omega\ni\omega\to m$ رامتناظر کنیم آنگاه $\mathbb{R}\subseteq\mathcal{L}^\infty$. بنابراین هرعضو از $\mathbb{R}$ یک عضو از فضای $\mathcal{L}^\infty$ است.

قضیه ۱.۲.۲. اگر $c\in\mathbb{R}$ آنگاه E_c، $\sigma(\mathbf{ca},\mathbf{ca}^*)$ــ فشرده است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۴.۷.۲۵ از مرجع [۱۱]. □

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ باشد. در این صورت $E\subseteq\mathcal{X}$ را فشرده دنباله‌ای ضعیف می‌نامیم هرگاه هردنباله مانند $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ در $\mathcal{X}$ دارای زیر دنباله‌ای مانند $\{X_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ باشد که به عضوی چون $X\in\mathcal{X}$ به طور ضعیف همگرا باشد.

قضیه ۲.۲.۲ (Eberltin-Smulian). فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ باشد. در این صورت زیر مجموعه E از $\mathcal{X}$ به طور ضعیف فشرده است اگر و فقط اگر فشرده دنباله‌ای ضعیف باشد.

برهان. رجوع شود به قضیه A.۳.۲۹ قسمت ۵ از مرجع [۱۷]. □

دراین بخش اندازه های ریسک راروی فضای $\mathcal{L}^\infty$ مورد مطالعه قرارمی‌دهیم.

گزاره ۲.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{X}=\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ دراین صورت $\mathcal{B}(\mathcal{A})\subset\mathbf{ba}_+$.

برهان. فرض کنید $\mu\in\mathbf{ba}=\mathrm{dom}(\sigma_{\mathcal{A}})$. در این صورت $\sigma_{\mathcal{A}}(\mu)<\infty$.

چون $\sigma_{\mathcal{A}}(\mu)=\sup_Y\in\mathcal{A}\int Y\mathrm{d}\mu$ بنابراین به ازای هر $B\in\mathcal{F}$ و هر $Y\in\mathcal{A}$، یکنوایی $\mathcal{A}$ ایجاب می‌کند که $Y-\frac{1}{B}\in\mathcal{A}$. لذا $\int Y\mathrm{d}\mu-\mu(\mathrm{B})=\int(\mathrm{Y}-\frac{1}{\mathrm{B}})\mathrm{d}\mu\leq\sigma_{\mathcal{A}}(\mu)$. بنابراین $\int Y\mathrm{d}\mu\leq\mu(\mathrm{B})+\sigma_{\mathcal{A}}(\mu)$. این نشان می‌دهد که $\sup_Y\in\mathcal{A}\int Y\mathrm{d}\mu\leq\mu(\mathrm{B})+\sigma_{\mathcal{A}}(\mu)$ و در نتیجه $\sigma_{\mathcal{A}}(\mu)\leq\mu(B)+\sigma_{\mathcal{A}}(\mu)$. بنابراین $\mu(B)\geq0$. پس $\mu\in\mathbf{ba}_+$.

□

گزاره ۳.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F})$. دراین صورت

$$\mathrm{cl}_{|\cdot|_\infty}(\mathcal{A}) = \left\{ X \in \mathcal{L}^\infty \,|\, \forall \mu \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) : \int X \mathrm{d}\mu \leq \sigma_{\mathcal{A}}(\mu) \right\}. \tag{۱.۲}$$

برهان. با به کاربردن قضیه جداسازی هان باناخ [1] می‌توان حکم را اثبات نمود. □

غالباً فرض متناهی بودن $\rho_{\mathcal{R}}$ را درنظر می‌گیریم که درحالت $\mathcal{X} = \mathcal{L}^\infty$ به عنوان دامنه $\rho_{\mathcal{R}}$، این فرض سازگار است.

اعضای $\mathcal{L}^\infty$ زیان های کرانداری هستند که نوعاً قابلیت جلوگیری از زیان را در هزینه‌های خیلی زیاد ولی متناهی دارند.

تعریف ۳.۲.۲. $U \in \mathcal{L}^\infty_{++}$ را به طور یکنواخت دور از $0 \in \mathcal{L}^\infty$ می‌نامیم هرگاه $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که $U \geq \delta$.

هرگاه $\mathcal{S}$ فضای اطمینان و $U \in \mathcal{S}$ به طور یکنواخت دور از صفر باشد، آنگاه درمراجع [۱۲، ۱۳] ، U به عنوان یک اطمینان نکول ناپذیر [2] معرفی می‌شود.

گزاره ۴.۲.۲. فرض کنید $U \in \mathcal{L}^\infty_{++}$ به طور یکنواخت دور از صفر باشد و همچنین فرض کنید فضای اطمینان $\mathcal{S}$ شامل U باشد. دراین صورت $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی است.

برهان. رجوع شود به مرجع [۱۸]. □

نشان خواهیم داد که اگر مجموعه پذیرش $\mathcal{A}$ به اندازه کافی مناسب اختیار شود آنگاه هراندازه ریسک متناهی تولید شده توسط آن، دریک چارچوب مدل آزاد مانند $\mathcal{L}^\infty$ یک مدل احتمالاتی تولید می‌کند که اصطلاحاً مدل مرجع ضعیف نامیده می‌شود. به عنوان اولین گام دراین جهت نشان می‌دهیم که پیوستگی از بالا صرفا به هندسه مجموعه پذیرش $\mathcal{A}$ وابسته است.

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{X} = \mathcal{L}^\infty$ و $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک باشدو $\rho_{\mathcal{R}}$ اندازه ریسک وابسته به $\mathcal{R}$ درنظرگرفته شود. دراین صورت مزدوج دوگان $\rho_{\mathcal{R}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho^*_{\mathcal{R}} : \mathbf{ba} \to (-\infty, \infty], \mu \to \sup_{X \in \mathcal{L}^\infty} \int X \mathrm{d}\mu - \rho_{\mathcal{R}}(X). \tag{۲.۲}$$

گزاره ۵.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک باشد به‌طوری که $\rho_{\mathcal{R}}(0) \in \mathbb{R}$. دراین صورت موارد زیر برقرار می‌باشند.

[1] Hahn-Banach
[2] Non-defaultable

۱. اگر $\rho_{\mathcal{R}}$، نیم پیوسته از پایین باشد آنگاه $\mathcal{B}(\mathcal{A})\cap\varepsilon_{\mathfrak{p}}\neq\emptyset$ و برای هر $\mu\in\mathbf{ba}$ داریم

$$\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)=\begin{cases}\sigma_{\mathcal{A}}(\mu) & \mu\in\mathcal{B}(\mathcal{A})\cap\varepsilon_{\mathfrak{p}}\\ \infty & \text{درغیر این صورت}\end{cases}. \tag{۳.۲}$$

همچنین برای هر $X\in\mathcal{L}^\infty$ داریم

$$\rho_{\mathcal{R}}(X)=\sup_{\mu\in\mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})}\int X\mathrm{d}\mu-\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu). \tag{۴.۲}$$

به ویژه اگر $\rho_{\mathcal{R}}$ منسجم باشد آنگاه

$$\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)=\begin{cases}\circ & \mu\in\mathcal{B}(\mathcal{A})\cap\varepsilon_{\mathfrak{p}}\\ \infty & \text{درغیر این صورت}\end{cases} \tag{۵.۲}$$

وبرای هر $X\in\mathcal{L}^\infty$ ،

$$\rho_{\mathcal{R}}(X)=\sup_{\mu\in\mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})}\int X\mathrm{d}\mu. \tag{۶.۲}$$

۲. فرض کنید $\mathcal{R}=(\mathcal{A},\mathcal{S},\mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک باشد به‌طوری که $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی باشد.دراین صورت برای هر $c\in\mathbb{R}$، مجموعه سطح پایین $E_c=\{\mu\in\mathbf{ba}\,|\,\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)\leq c\}$، $\sigma(\mathbf{ba},\mathcal{L}^\infty)$ـ فشرده است. به عبارت دیگر E_c نسبت به توپولوژی ضعیف‌ـ‌ستاره روی $\mathbf{ba}$ فشرده است.

۳. فرض کنید $\mathcal{R}=(\mathcal{A},\mathcal{S},\mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک و $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی باشد. دراین صورت $\rho_{\mathcal{R}}$ از بالا پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $c\in\mathbb{R}$، مجموعه سطح پایین E_c از $\rho^*_{\mathcal{R}}$، $\sigma(\mathbf{ca},\mathcal{L}^\infty)$ـ فشرده باشد. بنابراین اگر $\mathcal{B}(\mathcal{A})\subseteq\mathbf{ca}$ آن‌گاه $\rho_{\mathcal{R}}$ از بالا پیوسته است.

۴. در حالت ۳، اگر $\mathcal{S}$ یک زیر فضای یک بعدی فرض شود، آن‌گاه $\rho_{\mathcal{R}}$ از بالا پیوسته است اگر و تنها اگر $\mathcal{B}(\mathcal{A})\subseteq\mathbf{ca}$.

برهان. قسمت ۱: فرض کنید $\rho_{\mathcal{R}}(\circ)$ یک عدد حقیقی باشد وهمچنین فرض کنید $X=Y+N$ که درآن $Y\in\mathcal{A}$ و $N\in\ker(\mathfrak{p})$. دراین صورت باتوجه به خاصیت $\mathcal{S}$ـ جمع پذیری $\rho_{\mathcal{R}}$ می‌توان نوشت $\rho_{\mathcal{R}}(X)=\rho_{\mathcal{R}}(Y+N)=\rho_{\mathcal{R}}(Y)+\mathfrak{p}(N)=\rho_{\mathcal{R}}(Y)\leq\circ$. چون $\rho_{\mathcal{R}}$ نیم پیوسته ازپایین است پس بنا به گزاره ۲.۱.۲ داریم $\{X\in\mathcal{X}\mid\rho_{\mathcal{R}}(X)\leq\circ\}=\mathrm{cl}_{|\cdot|_\infty}(\mathcal{A}+\ker(\mathfrak{p}))$. بنابراین به ازای هر $X\in\mathrm{cl}_{|\cdot|_\infty}(\mathcal{A}+\ker(\mathfrak{p}))$ داریم $\rho_{\mathcal{R}}(X)\leq\circ$.
باستفاده مجدد از $\mathcal{S}$ـ جمع پذیری $\rho_{\mathcal{R}}$ می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر $Z\in\mathrm{cl}_{|\cdot|_\infty}(\mathcal{A}+\ker(\mathfrak{p}))\cap\mathcal{S}$، $\mathfrak{p}(Z)=\rho_{\mathcal{R}}(Z)-\rho_{\mathcal{R}}(\circ)\leq-\rho_{\mathcal{R}}(\circ)$. این نشان می‌دهدکه $\mathfrak{p}$ روی مجموعه $\mathrm{cl}_{|\cdot|_\infty}(\mathcal{A}+\ker(\mathfrak{p}))\cap\mathcal{S}$ ازبالا کران دار است. حال باتوجه به قضایای ۲و۳ازمرجع [۱۴] داریم $\mathcal{B}(\mathcal{A})\cap\varepsilon_{\mathfrak{p}}\neq\emptyset$ وبرای هر $X\in\mathcal{L}^\infty$، $\rho_{\mathcal{R}}(X)=\sup_{\mu\in\mathcal{B}(\mathcal{A})\cap\varepsilon_{\mathfrak{p}}}\int Xd\mu-\sigma_{\mathcal{A}}(\mu)$.

بنابراین معادلات (۳.۲) و (۴.۲) برقرارمی‌باشند.

حال اگر $\rho_{\mathcal{R}}$ منسجم باشد، آنگاه همگنی مثبت آن ایجاب می‌کند که به ازای هر $t > 0$، $\rho_{\mathcal{R}}(tX) = t\rho_{\mathcal{R}}(X)$. بنابراین باتوجه به رابطه (۴.۲) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} t \sup_{\mu \in \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \int X \mathrm{d}\mu - t\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) = t\rho_{\mathcal{R}}(X) = \rho_{\mathcal{R}}(tX) &= \sup_{\mu \in \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \int tX \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) \\ &= t \sup_{\mu \in \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \int X \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu). \end{aligned}$$

پس به ازای هر $t > 0$، $t\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) = \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$. این نشان می‌دهد که به ازای هر $\mu \in \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$، $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) = 0$. لذا باتوجه به معادلات (۳.۲) و (۴.۲) ، معادلات (۵.۲) و (۶.۲) برقرارمی‌باشند.

قسمت ۲ : باتوجه به تعریف $\rho^*_{\mathcal{R}}$ می توان نشان داد که $\rho^*_{\mathcal{R}}$ یک تابع نیم پیوسته ازپایین نسبت به توپولوژی $\sigma(\mathbf{ba}, \mathcal{L}^\infty)$ است. زیرا اگر تور $\{\mu_\alpha\}_\alpha \subseteq \mathbf{ba}$ به $\mu \in \mathbf{ba}$ در توپولوژی ضعیف‌ــ‌ستاره میل کند آنگاه به ازای هر $X \in \mathcal{L}^\infty$، $\int X \mathrm{d}\mu_\alpha \longrightarrow \int X \mathrm{d}\mu$ ولذا

$\int X \mathrm{d}\mu_\alpha - \rho_{\mathcal{R}}(X) \longrightarrow \int X \mathrm{d}\mu - \rho_{\mathcal{R}}(X)$. این نشان می‌دهد که $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_\alpha) \longrightarrow \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$. حال به ازای هر $c \in \mathbb{R}$، چون $E_c = (\rho^*_{\mathcal{R}})^{-1}(-\infty, c]$ پس E_c درتوپولوژی ضعیف‌ــ‌ستاره بسته است.

فرض کنید $c \in \mathbb{R}$ و $\mu \in E_c$. دراین صورت باتوجه تعریف E_c وباتوجه به رابطه (۴.۲) داریم.

$$\rho_{\mathcal{R}}(1) = \sup_{\mu \in \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \int 1 \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$$

ولذا

$$\rho_{\mathcal{R}}(1) = \sup_{\mu \in \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \mu(\Omega) - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$$

درنتیجه

$$\mu(\Omega) \leq \sup_{\mu \in \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \mu(\Omega) = \rho_{\mathcal{R}}(1) + \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) \leq \rho_{\mathcal{R}}(1) + c < \infty.$$

بنابراین به ازای عددثابت و مثبت r، $E_c \subseteq \overline{\mathcal{B}_r^{(0)}}$ که درآن $\overline{\mathcal{B}_r^{(0)}}$ گوی واحد و بسته در $\mathbf{ba}$ است.

حال باتوجه به قضیه باناخ آلاغلو، E_c ضعیف‌ــ‌ستاره فشرده است.

قسمت ۳: فرض کنید اندازه ریسک $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی و ازبالا پیوسته باشد. باتوجه به گزاره ۳.۱.۲ چون $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی و محدب است و $int\ dom(\rho_{\mathcal{R}}) = \mathcal{X}$ بنابراین $\rho_{\mathcal{R}}$ نرم پیوسته است و لذا ازپایین نیم پیوسته است.

حال اگر $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ یک دنباله نزولی از پیشامدها باشد که به $\emptyset$ همگراست آنگاه باتوجه به ویژگی پیوستگی ازبالای $\rho_{\mathcal{R}}$، برای هر $k > 0$ داریم $\rho_{\mathcal{R}}(k\mathbf{1}_{A_n}) \downarrow \rho_{\mathcal{R}}(0)$.

حال باتوجه به رابطه (۴.۲) درقسمت ۱ برای $X = k\mathbf{1}_{A_n}$ داریم:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{R}}(k\mathbf{1}_{A_n}) &= \sup_{\mu \in dom(\rho^*_{\mathcal{R}})} \left(\int k\mathbf{1}_{A_n} \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)\right) \\ &= \sup_{\mu \in dom(\rho^*_{\mathcal{R}})} (k\mu(A_n) - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)) \geq k\mu(A_n) - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) \end{aligned}$$

بنابراین $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) \geq k\mu(A_n) - \rho_{\mathcal{R}}(k\mathbf{1}_{A_n})$.
این نشان می‌دهد که $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) \geq \lim_{n\to\infty}(k\mu(A_n) - \rho_{\mathcal{R}}(k\mathbf{1}_{A_n}))$. همچنین $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) \geq \sup_{k>0}\lim_{n\to\infty}(k\mu(A_n) - \rho_{\mathcal{R}}(k\mathbf{1}_{A_n}))$. لذا اگر $\mu \in \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$ آنگاه

$$
\begin{aligned}
-\rho_{\mathcal{R}}(0) &\leq \sup_{k>0} k \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \rho_{\mathcal{R}}(0)\\
&= \sup_{k>0} k \lim_{n\to\infty} (k\mu(A_n) - \rho_{\mathcal{R}}(k\mathbf{1}_{A_n}))\\
&\leq \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) < \infty.
\end{aligned}
$$

نامساوی فوق زمانی می‌تواند برقرار باشد که $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = 0$. لذا $\mu \in \mathbf{ca}_+$.
بنابراین $\mathbf{ca} \subseteq \mathbf{ca}_+ \subseteq \mathbf{ba}$. این نشان می‌دهد که $\mathbf{ba} = \mathbf{ca}$. پس باتوجه به قسمت ۲، E_c $\sigma(\mathbf{ca}, \mathcal{L}^\infty)$ــ فشرده است.
برعکس : فرض کنید $\mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}}) \subseteq \mathbf{ca}_+$ و همچنین فرض کنید $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در $\mathcal{L}^\infty$ باشد به طوری که به ازای $X \in \mathcal{L}^\infty$، $X_n \downarrow X$. فرض کنید $Y \in \{X, X_1, X_2, \dots\}$ و همچنین فرض کنید $0 < \varepsilon < 1$ داده شده باشد. چون بنابه رابطه (۴.۲) از قسمت ۱، $\rho_{\mathcal{R}}(Y) = \sup_{\mu\in\mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \int Y \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$ پس عضوی چون $\mu_\varepsilon \in \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$ موجود است به طوری که: $\rho_{\mathcal{R}}(Y) - \varepsilon < \int Y \mathrm{d}\mu_\varepsilon - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_\varepsilon)$.
بنابراین $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_\varepsilon) < \int Y \mathrm{d}\mu_\varepsilon - \rho_{\mathcal{R}}(\mathrm{Y}) + \varepsilon$. حال با توجه به یکنوایی $\rho_{\mathcal{R}}$ و این که μ_ε یک اندازه مثبت است می‌توان نتیجه گرفت که :

$$
\begin{aligned}
\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_\varepsilon) &< \int Y \mathrm{d}\mu_\varepsilon - \rho_{\mathcal{R}}(\mathrm{Y}) + \varepsilon\\
&\leq \int X_1 \mathrm{d}\mu_\varepsilon - \rho_{\mathcal{R}}(\mathrm{X}) + \varepsilon\\
&\leq \frac{1}{2}\rho_{\mathcal{R}}(2X_1) + \frac{1}{2}\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) - \rho_{\mathcal{R}}(X) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_\varepsilon) &\leq \rho_{\mathcal{R}}(2X_1) - 2\rho_{\mathcal{R}}(X) + 2\varepsilon\\
&\leq \rho_{\mathcal{R}}(2X_1) - 2\rho_{\mathcal{R}}(X) + 2.
\end{aligned}
$$

با انتخاب $c = \rho_{\mathcal{R}}(2X_1) - 2\rho_{\mathcal{R}}(X) + 2$ واضح است که $\mu_\varepsilon \in E_c$. بنابراین $\rho_{\mathcal{R}}(Y) - \varepsilon \leq \int Y \mathrm{d}\mu_\varepsilon - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_\varepsilon) \leq \sup_{\mu\in\mathrm{E_c}} \int \mathrm{Y} \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$.
از طرفی با توجه به رابطه (۴.۲) از قسمت ۱، چون $E_c \subseteq \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$ پس $\rho_{\mathcal{R}}(Y) \geq \sup_{\mu\in E_c} \int Y \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$. لذا $\rho_{\mathcal{R}}(Y) - \varepsilon \leq \sup_{\mu\in E_c} \int Y \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) \leq \rho_{\mathcal{R}}(\mathrm{Y})$.
حال با فرض $\varepsilon \longrightarrow 0$ به ازای هر $Y \in \{X, X_1, X_2, \dots\}$ داریم $\rho_{\mathcal{R}}(Y) = \sup_{\mu\in E_c} \int Y \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$. حال از فشردگی E_c و $\sigma(\mathbf{ca}, \mathcal{L}^\infty)$ــ پیوستگی نگاشت $\mu \longrightarrow \int Y \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$ نتیجه می‌شود که $\rho_{\mathcal{R}}(Y) = \max_{\mu\in E_c} \int Y \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$.

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mu_n \in E_c$ وجود دارد به طوری که $\rho_{\mathcal{R}}(X_n) = \int X_n \mathrm{d}\mu_{\mathrm{n}} - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_{\mathrm{n}})$.
حال باتوجه به قضیه ۱.۲.۲، E_c نسبت به توپولوژی $\sigma(\mathbf{ca}, \mathbf{ca}^*)$ فشرده است.
از طرفی با توجه به قضیه ۲.۲.۲، E_c فشرده دنباله‌ای ضعیف است. لذا $\bar{\mu} \in E_c$ و زیر دنباله $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E_c$ موجود است به طوری که $\mu_{n_k} \xrightarrow{\omega} \bar{\mu}$.
حال اندازه

$$\nu = \bar{\mu} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{۱}{۲^k} \mu_{n_k}$$

را در نظر می‌گیریم. به وضوح برای هر $\mu \in \mathcal{K} = \{\bar{\mu}, \mu_{n_۱}, \mu_{n_۲}, \dots\}$، $\mu \ll \nu$. زیرا اگر $\nu(E) = ۰$ آنگاه

$$\bar{\mu}(E) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{۱}{۲^k} \mu_{n_k}(E) = ۰.$$

حال از مثبت بودن اندازه‌های $\bar{\mu}$ و μ_{n_k} نتیجه می‌شود که به ازای هر $\mu \in \mathcal{K}$، $\mu(E) = ۰$. فرض کنید $A \in \mathcal{F}$ و $\nu(A) \le \varepsilon$. در این صورت

$$\bar{\mu}(A) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{۱}{۲^k} \mu_{n_k}(A) \le \varepsilon.$$

این نشان می دهد که $\bar{\mu}(A) \le \varepsilon$. بنابراین $\mu(A) \le \varepsilon$.
مجموعه $\{\frac{d\mu}{d\nu} | \mu \in \mathcal{K}\}$ که عناصر آن مشتقات رادون نیکودیم اعضای $\mathcal{K}$ نسبت به ν هستند در $L^۱(\nu)$ نسبت به نرم $\|\cdot\|_{L^۱_\nu}$ کراندار هستند.
بنابراین باتوجه به گزاره ۵.۴.۳از مرجع [۱۱] مجموعه $\{\frac{d\mu}{d\nu} | \mu \in \mathcal{K}\}$ یک خانواده‌ی به طور یکنواخت انتگرال پذیر نسبت به ν می‌باشند.
اگر به ازای هر $۱ \le k \le n$، $Z_k = \frac{\mathrm{d}\mu_{\mathrm{n_k}}}{\mathrm{d}\nu}$ آنگاه برای هر مقدار ثابت $L > ۰$ با توجه به قضیه همگرایی یکنوا و νـ انتگرال پذیری یکنواخت Z_k و این که $| X_۱ - X |$ کراندار است می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \left| \int X \mathrm{d}\bar{\mu} - \int X_{n_k} \mathrm{d}\mu_{n_k} \right| &\le \limsup_{k\to\infty} \left| \int X \mathrm{d}\bar{\mu} - \int X d\mu_{n_k} \right| + \left| \int (X - X_{n_k}) \mathrm{d}\mu_{n_k} \right| \\
&\le \limsup_{k\to\infty} \int_{\{Z_k \ge L\}} \left| X_۱ - X \right| Z_k \mathrm{d}\nu + \int_{\{Z_k < L\}} \left| X_{n_k} - X \right| L \mathrm{d}\nu \\
&= \limsup_{k\to\infty} \int_{\{Z_k \ge L\}} \left| X_۱ - X \right| Z_k \mathrm{d}\nu = ۰.
\end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{k\to\infty} \int X_{n_k} \mathrm{d}\mu_{n_k} = \int X \mathrm{d}\bar{\mu}$.
باتوجه به نیم پیوستگی از پایین $\rho^*_{\mathcal{R}}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\lim_{k\longrightarrow\infty}\rho_{\mathcal{R}}(X_{n_k}) &= \lim_{k\to\infty}\int X_{n_k}\mathrm{d}\mu_{n_k} - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_{n_k})\\ &= \limsup_{k\longrightarrow\infty}\int X_{n_k}\mathrm{d}\mu_{n_k} - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_{n_k})\\ &\leq \int X\mathrm{d}\bar{\mu} - \rho^*_{\mathcal{R}}(\bar{\mu})\\ &\leq \rho_{\mathcal{R}}(X).\end{aligned}$$

از طرفی چون $X \leq X_n$ پس $\rho_{\mathcal{R}}(X) \leq \rho_{\mathcal{R}}(X_n)$ و لذا

$$\rho_{\mathcal{R}}(X) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\rho_{\mathcal{R}}(X_n) = \lim_{k\to\infty}\rho_{\mathcal{R}}(X_{n_k}).$$

بنابراین $\rho_{\mathcal{R}}(X) = \lim_{k\to\infty}\rho_{\mathcal{R}}(X_{n_k})$.

حال چون $\rho_{\mathcal{R}}(X_n)$ یک دنباله نزولی است و دارای یک زیر دنباله همگراست پس $\lim_{n\to\infty}\rho_{\mathcal{R}}(X_n) = \rho_{\mathcal{R}}(X)$. این نشان می‌دهد که $\rho_{\mathcal{R}}$ پیوستگی از بالا دارد. فرض کنید $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{ca}_+$. در این صورت با توجه به رابطه (۳.۲) و همچنین با توجه به قسمت ۲ گزاره ۵.۲.۲ چون هر مجموعه سطح پایین $\rho^*_{\mathcal{R}}$، $\sigma(\mathbf{ca}, \mathcal{L}^\infty)$ـ فشرده است، با برهانی مشابه می‌توان پیوستگی از بالای $\rho_{\mathcal{R}}$ را نتیجه گرفت.

قسمت ۴: فرض کنید در روش اندازه‌گیری ریسک $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$، $\mathcal{S} = \mathbb{R}.U$ که در آن $U \in \mathcal{L}^\infty_{++}$. همچنین فرض کنید $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی باشد. فرض کنید $\circ \neq \mu \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ و $\int U\mathrm{d}\mu = 0$.
K را چنان انتخاب می‌کنیم که $k > \frac{\sigma_{\mathcal{A}}(\mu)}{\mu(\Omega)}$. چون μ مثبت است بنابراین برای هر $r \in \mathbb{R}$، $\int(K - rU)\mathrm{d}\mu = \mathrm{K}\mu(\Omega) > \sigma_{\mathcal{A}}(\mu)$. حال با توجه به تعریف $\sigma_{\mathcal{A}}$ این نشان می‌دهد که برای هر $r \in \mathbb{R}$، $K - rU \notin \mathcal{A}$. بنابراین با توجه به تعریف $\rho_{\mathcal{R}}$، $\rho_{\mathcal{R}}(K) = \infty$ که تناقض با متناهی بودن $\rho_{\mathcal{R}}$ است. لذا برای هر $\circ \neq \mu \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$، $\int U\mathrm{d}\mu > 0$. حال با توجه به رابطه (۳.۲)،

$$\mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}}) = \varepsilon_{\mathfrak{p}} \cap \mathcal{B}(\mathcal{A}) = \left\{\frac{\mathfrak{p}(\mathrm{U})}{\int \mathrm{U}\mathrm{d}\mu}\mu \,\middle|\, 0 \neq \mu \in \mathcal{B}(\mathcal{A})\right\}$$

و با توجه به رابطه (۴.۲)، رابطه

$$\rho_{\mathcal{R}}(X) = \sup_{\mu\neq\circ}\frac{\mathfrak{p}(U)}{\int U\mathrm{d}\mu}\left(\int X\mathrm{d}\mu - \sigma_{\mathcal{A}}(\mu)\right)$$

برای هر $X \in \mathcal{L}^\infty$ برقرار است. لذا با توجه به نمایش جدید $\rho_{\mathcal{R}}$ و همچنین با توجه به قسمت ۳ گزاره ۵.۲.۲، $\rho_{\mathcal{R}}$ از بالا پیوسته است اگر و فقط اگر $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{ca}$. □

نتیجه ۱.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک باشدبه‌طوری که $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی است. در این صورت $\rho_{\mathcal{R}}$ از بالا پیوسته است اگر و تنها اگر $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathfrak{p})^\perp \subseteq \mathbf{ca}$.
$\ker(\mathfrak{p})^\perp$ پوچساز $\ker(\mathfrak{p})$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\ker(\mathfrak{p})^\perp = \left\{\mu \in \mathbf{ba} \,|\, \forall Z \in \ker(\mathfrak{p}) : \int Z\mathrm{d}\mu = \circ\right\}.$$

برهان. چون $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی است بنابراین نیم پیوستگی از پایین دارد و در نتیجه

$$\{X \in \mathcal{X} | \rho_{\mathcal{R}}(X) \leq \circ\} = \mathrm{cl}_{\tau}(\mathcal{A} + \ker(\mathfrak{p})).$$

لذا به ازای هر $X \in \mathcal{A} + \ker(\mathfrak{p})$، $\rho_{\mathcal{R}}(X) \leq \circ$. چون $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی و $\mathcal{S}$ـ جمع پذیر است بنا به ملاحظه ۱۶ از مرجع [۱۴]، $\mathcal{A} + \ker(\mathfrak{p})$ سره و لذا یک مجموعه پذیرش است. فرض کنید $U \in \mathcal{S} \cap \mathcal{L}^{\infty}_{++}$ ثابت در نظر گرفته شود. در این صورت با توجه به لم ۳ از مرجع [۱۴] تساوی زیر برای هر $X \in \mathcal{L}^{\infty}$ برقرار است.

$$\rho_{\mathcal{R}}(X) = \inf\{\mathfrak{p}(rU) | r \in \mathbb{R}, X - rU \in \mathcal{A} + \ker(\mathfrak{p})\}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $\mathcal{R}' = (\mathcal{A}+\ker(\mathfrak{p}), \mathbb{R}\cdot U, \mathfrak{p}|_{\mathbb{R}\cdot U})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک است و همچنین $\rho'_{\mathcal{R}}$ از بالا پیوسته است اگر و فقط اگر $\rho_{\mathcal{R}}$ از بالا پیوسته باشد. حال نشان می‌دهیم که تساوی $\mathcal{B}(\mathcal{A} + \ker(\mathfrak{p})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathfrak{p})^{\perp}$ برقرار است. فرض کنید $\mu \in \mathcal{B}(\mathcal{A} + \ker(\mathfrak{p}))$. در این صورت

$$\sup_{Y+Z \in \mathcal{A}+\ker(\mathfrak{p})} \int (Y+Z)\mathrm{d}\mu < \infty.$$

این نشان می‌دهد که $\sup_{Y \in \mathcal{A}} \int Y\mathrm{d}\mu < \infty$ و همچنین $\sup_{Z \in \ker(\mathfrak{p})} \int Z\mathrm{d}\mu < \infty$. لذا $\mu \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$.
همچنین اگر $Z_\circ \in \ker(\mathfrak{p})$ و $\int Z_\circ \mathrm{d}\mu \neq 0$ آنگاه برای هر $r \in (\circ, ۱)$ چون $rZ_\circ \in \ker(\mathfrak{p})$ داریم، $r = \int \frac{rZ_\circ}{\int Z_\circ \mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu < \infty$ که یک تناقض است. بنابراین به ازای هر $Z \in \ker(\mathfrak{p})$، $\int Z\mathrm{d}\mu = 0$ و لذا $\mu \in \ker(\mathfrak{p})^{\perp}$. در نتیجه $\mu \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathfrak{p})^{\perp}$.
برعکس: فرض کنید $\mu \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathfrak{p})^{\perp}$. در این صورت $\mu \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ و $\mu \in \ker(\mathfrak{p})^{\perp}$. بنابراین به ازای هر $Y + Z \in \mathcal{A} + \ker(\mathfrak{p})$،

$$\int (Y+Z)\mathrm{d}\mu = \int \mathrm{Y}\mathrm{d}\mu + \int \mathrm{Z}\mathrm{d}\mu = \int \mathrm{Y}\mathrm{d}\mu \leq \sup_{\mathrm{Y}\in\mathcal{A}} \int \mathrm{Y}\mathrm{d}\mu = \sigma_{\mathcal{A}}(\mu) < \infty.$$

این نشان می‌دهد که $\sup_{Y+Z \in \mathcal{A}+\ker(\mathfrak{p})} \int (Y+Z)\mathrm{d}\mu < \infty$ و لذا $\mu \in \mathcal{B}(\mathcal{A} + \ker(\mathfrak{p}))$.
بنابراین با توجه به قسمت ۴ گزاره ۵.۲.۲، $\rho'_{\mathcal{R}}$ پیوستگی از بالا دارد اگر و فقط اگر

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathfrak{p})^{\perp} = \mathcal{B}(\mathcal{A} + \ker(\mathfrak{p})) \subseteq \mathbf{ca}.$$

□

تعریف ۵.۲.۲. مجموعه پذیرش $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}^{\infty}$ منظم نامیده می‌شود هرگاه $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{ca}$.
هرگاه $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \setminus \mathbf{ca} \neq \emptyset$ در این صورت $\mathcal{A}$ نامنظم می‌باشد.

تعریف ۶.۲.۲. فرض کنید $M, M' \subseteq \mathbf{ba}$. در این صورت $M \ll M'$، اگر وفقط اگر برای هر $A \in \mathcal{F}$، اگر $\nu(A) = \circ$ برای هر $\nu \in M'$ آنگاه $\mu(A) = \circ$ به ازای هر $\mu \in M$.

تعریف ۷.۲.۲. فرض کنید $M, M' \subseteq \mathbf{ba}$. آنگاه $M \approx M'$، اگر و فقط اگر $M \ll M'$ و $M' \ll M$.

هرگاه $\mu,\nu \in \mathbf{ba}$ آنگاه به جای $\{\mu\} \ll \{\nu\}$ و $\{\mu\} \approx \{\nu\}$ نماد های $\mu \ll \nu$ و $\mu \approx \nu$ را به کار می‌بریم.

نمادگذاری: هرگاه $\nu \in \mathbf{ba}$ آنگاه $\mathbf{ba}_\nu$ و $\mathbf{ca}_\nu$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$\mathbf{ba}_\nu = \{\mu \in \mathbf{ba} | \mu \ll \nu\}$ و $\mathbf{ca}_\nu = \{\mu \in \mathbf{ca} | \mu \ll \nu\}$.

تعریف ۸.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه گیری ریسک باشد. در این صورت اندازه احتمال $\mathbb{P}$ تعریف شده روی $(\Omega, \mathcal{F})$ را یک اندازه احتمال مرجع ضعیف [1] می‌نامند هرگاه برای یک مقدار مناسب $c > ۰$، $\rho^*_{\mathcal{R}}(c\mathbb{P}) < \infty$ و $\mathbb{P} \approx \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک باشد به طوری که $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی و از بالا پیوسته باشد. در این صورت

۱. یک اندازه احتمال مرجع ضعیف مانند $\mathbb{P}$ وجود دارد .

۲. اگر $\mathbb{P}$ یک اندازه احتمال مرجع ضعیف در قسمت ۱ باشد آنگاه $\mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}}) \subseteq (\mathbf{ca}_{\mathbb{P}})_+$.

۳. اگر $\rho_{\mathcal{R}}$ نرمال باشد آنگاه

$$E_\circ = \{\mu \in \mathbf{ca} \,|\, \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) = \circ\} \neq \emptyset.$$

برهان. قسمت ۱ : باتوجه به گزاره ۵.۲.۲ چون $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی و ازبالا پیوسته است بنابراین به ازای هر $c \in \mathbb{R}$ مجموعه سطح پایین $E_c = \{\mu \in \mathbf{ca}_+ \,|\, \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) \leq c\}$، $\sigma(\mathbf{ca}, \mathcal{L}^\infty)$ـ فشرده است. چون $\rho_{\mathcal{R}}$ محدب است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $\rho_{\mathcal{R}}$ محدب شمارش پذیر است. زیرا فرض کنید $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [\circ, ۱]$ باشرط $\sum_{k=۱}^\infty \lambda_k = ۱$ داده باشد و همچنین فرض کنید $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E_c$. در این صورت چون $\sum_{k=۱}^n \lambda_k\mu_k \xrightarrow{\|\cdot\|} \sum_{k=۱}^\infty \lambda_k\mu_k$. بنابراین $\sum_{k=۱}^n \lambda_k\mu_k \xrightarrow{\omega^*} \sum_{k=۱}^\infty \lambda_k\mu_k$. فرض کنید $۱ \leq k \leq n$ و $X \in \mathcal{L}^\infty$. در این صورت $\int X \mathrm{d}(\lambda_k\mu_k) - \lambda_k\rho_{\mathcal{R}}(X) \leq \lambda_k\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_k)$.

بنابراین $\sum_{k=۱}^n \int X\mathrm{d}(\lambda_k\mu_k) - \sum_{k=۱}^n \lambda_k\rho_{\mathcal{R}}(X) \leq \sum_{k=۱}^n \lambda_k\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu_k)$. این نشان می‌دهد که $\int X\mathrm{d}(\sum_{k=۱}^n \lambda_k\mu_k) - \sum_{k=۱}^n \lambda_k\rho_{\mathcal{R}}(X) \leq \sum_{k=۱}^n \lambda_k c$.

حال اگر $n \longrightarrow \infty$ آنگاه $\int X\mathrm{d}(\sum_{k=۱}^\infty \lambda_k\mu_k) - \rho_{\mathcal{R}}(X) \leq c$. و لذا $\sup_{X\in\mathcal{L}^\infty}(\int X\mathrm{d}(\sum_{k=۱}^\infty \lambda_k\mu_k) - \rho_{\mathcal{R}}(X)) \leq c$. بنابراین $\rho^*_{\mathcal{R}}(\sum_{k=۱}^\infty \lambda_k\mu_k) \leq c$.

اگر $n \in \mathbb{N}$ آنگاه باتوجه به قضیه ۴.۷.۲۵ قسمت ($۱ \Rightarrow ۴$) از مرجع [۱۱]، بستار ضعیف E_n در $\sigma(\mathbf{ca}, \mathbf{ca}^*)$ فشرده است. اما باتوجه به قسمت ۳ گزاره ۵.۲.۲، E_n در توپولوژی ضعیف‌تر $\sigma(\mathbf{ca}, \mathcal{L}^\infty)$ بسته است. لذا E_n به طور ضعیف فشرده است. حال قضیه ۴.۷.۲۵ قسمت ($۲ \Rightarrow ۱$) از مرجع [۱۱] نشان می‌دهد که یک دنباله مانند $(\mu^n_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subseteq E_n$ چنان موجود است که $E_n \approx \{\mu^n_\ell \,|\, \ell \in \mathbb{N}\}$. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، ν_n به صورت $\nu_n = \sum_{\ell=۱}^\infty ۲^{-\ell}\mu^n_\ell$ تعریف شود

[1] Weak reference probability measure

آنگاه چون E_n محدب شمارش پذیر است پس $\nu_n \in E_n$. همچنین $\nu_n \approx E_n$. با توجه به رابطه (۴.۲) از گزاره ۵.۲.۲ می‌توان نتیجه گرفت که، $\nu_n(\Omega) \leq \nu_n(\Omega) - \rho^*_{\mathcal{R}}(\nu_n) + n \leq \rho_{\mathcal{R}}(1) + n$.

اگر $\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\nu_n$ و $c_N = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}$ و $\varsigma_N = c_N^{-1}\sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\nu_n$ آنگاه چون،

$\nu(\Omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\nu_n(\Omega) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}(\rho_{\mathcal{R}}(1) + n) = \rho_{\mathcal{R}}(1) + 2$. ν متناهی است و لذا $\nu \in \mathbf{ca}_+$.

چون $\nu_n \approx E_n$ بنابراین هر مضرب اسکالر ν در شرط $\nu \approx \operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$ صدق می‌کند. و همچنین در توپولوژی $\sigma(\mathbf{ca}, \mathcal{L}^\infty)$ داریم $\nu = \lim_N \varsigma_N$.

حال چون $\rho^*_{\mathcal{R}}$ محدب و نیم پیوسته از پایین است و همچنین رابطه $\rho^*_{\mathcal{R}}(\nu_n) \leq n$ برقرار می‌باشد. می‌توان نتیجه گرفت که

$$\rho^*_{\mathcal{R}}(\nu) \leq \liminf_{N\longrightarrow\infty} \rho^*_{\mathcal{R}}(\varsigma_N) \leq \lim_{N\to\infty} c_N^{-1}\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} n = 2.$$

با انتخاب $c = \nu(\Omega)$ اندازه احتمال $\mathbb{P} = \frac{\nu}{c}$ یک مدل احتمال مرجع ضعیف می‌باشد.

قسمت ۲ : با توجه به قسمت ۱ اندازه احتمال $\mathbb{P}$ در شرط $\mathbb{P} \approx \operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$ صدق می‌کند. بنابراین $\operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}}) \subseteq \mathbf{ca}_{\mathbb{P}}$. حال با توجه به اثبات قسمت ۳ از گزاره ۵.۲.۲، $\operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}}) \subseteq \mathbf{ca}_+$. بنابراین $\operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}}) \subseteq (\mathbf{ca}_{\mathbb{P}})_+$.

قسمت ۳ : چون $\rho_{\mathcal{R}}$ نرمال شده است بنابراین

$$0 = \rho_{\mathcal{R}}(0) = \sup_{\mu\in\operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \int 0\,\mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) = \sup_{\mu\in\operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} (-\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)) = -\inf_{\mu\in\operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu).$$

این نشان می‌دهد که به ازای هر $\mu \in \operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$، $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) \geq 0$. خانواده $(E_k)_{k\in(0,1]}$ از زیر مجموعه‌های، مجموعه فشرده E_1 دارای خاصیت اشتراک متناهی است.

بنابراین $E_0 = \bigcap_{k\in(0,1]} E_k \neq \emptyset$. □

ملاحظه ۱.۲.۲. برای وجود مدل‌های احتمال مرجع ضعیف، شرط پیوستگی از بالا برای $\rho_{\mathcal{R}}$ کافی است ولی لازم نمی‌باشد. بنابراین بدون شرط پیوستگی از بالا هر دو حالت می‌تواند اتفاق افتد.

مثال ۳.۲.۲. اگر $(\Omega, \mathcal{F})$ بازه باز $(0,1)$ همراه با مجموعه‌های بورل $\mathbb{B}((0,1))$ در نظر گرفته شود و $\mathbb{P}$ همان اندازه لبگ روی $(0,1)$ باشد.

آنگاه با فرض $\operatorname{ess\,sup}(X) = \sup\{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X \leq m) = 1\}$ و تعریف مجموعه‌های پذیرش $\mathcal{A}_1 = \{X \in \mathcal{L}^\infty | \operatorname{ess\,sup}(X) \leq 0\}$ و $\mathcal{A}_2 = \{X \in \mathcal{L}^\infty | \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega) \leq 0\}$ به راحتی می‌توان نشان داد که برای $i = 1,2$، $\mathcal{R}_i = (\mathcal{A}_i, \mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ روش‌های اندازه‌گیری ریسک می‌باشند که $\operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}_1}) = (\mathbf{ba}_{\mathbb{P}})_+$ و $\operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}_2}) = \mathbf{ba}_+$. بنابراین با توجه به قضیه ۳.۲.۲ قسمت ۲، هیچ کدام از $\rho_{\mathcal{R}_1}$ و $\rho_{\mathcal{R}_2}$ از بالا پیوسته نمی‌باشند.

در صورتی که $\mathbb{P}$ یک اندازه احتمال مرجع ضعیف برای $\rho_{\mathcal{R}_1}$ است. اما اگر $\mathbb{P}'$ یک اندازه احتمال مرجع ضعیف برای $\rho_{\mathcal{R}_2}$ باشد آنگاه $\mathbb{P}' \approx \operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}_2})$ بنابراین $\mathbb{P}' \approx \mathbf{ba}_+$. لذا $\mathbf{ba}_+ \ll \mathbb{P}'$.

هرگاه $A \in \mathcal{F}$ و $\mathbb{P}'(A) = 0$ آنگاه به ازای هر $\mu \in \mathbf{ba}_+$، $\mu(A) = 0$. چون به ازای هر $b \in (0,1)$ اندازه دیراک δ_b به $\mathbf{ba}_+$ تعلق دارد بنابراین $\delta_b(A) = 0$. این نشان می‌دهد که $A = \emptyset$ و لذا $\mathbb{P}'(A) = 0$ اگر و فقط اگر $A = \emptyset$. بنابراین به ازای هر $a \in (0,1)$، $\mathbb{P}'(\{a\}) > 0$. هرگاه $B \subseteq (0,1)$ متناهی باشد آنگاه $\mathbb{P}'(\Omega) \geq \sum_{b\in B} \mathbb{P}'(\{b\})$. پس

$$\mathbb{P}'(\Omega) \geq \sup\left\{ \sum_{b\in B} \mathbb{P}'(\{b\}) \middle| B \subseteq \Omega \text{ و } B \text{ متناهی است} \right\} = \sum_{b\in(0,1)} \mathbb{P}'(\{b\}) = \infty.$$

بنابراین $\mathbb{P}'(\Omega) = \infty$ که یک تناقض است. لذا اندازه احتمال مرجع ضعیف برای $\rho_{\mathcal{R}_2}$ موجود نمی‌باشد.

گزاره ۶.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک باشد به طوریکه برای اندازه احتمال $\mathbb{P}$ رابطه $\mathbb{P} \approx \operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$ برقرار باشد. در این صورت هرگاه $X, Y \in \mathcal{L}^\infty$ و $X = Y(\mathbb{P}.a.s.)$ آنگاه $\rho_{\mathcal{R}}(X) = \rho_{\mathcal{R}}(Y)$.

برهان. چون $X = Y(\mathbb{P}.a.s.)$ بنابراین $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0$. پس رابطه $\mathbb{P} \approx \operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$ نشان می‌دهد که به ازای هر $\mu \in \operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$، $\mu(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0$. لذا رابطه $\int X d\mu = \int Y d\mu$ برای هر $\mu \in \operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})$ برقرار است. بنابراین

$$\rho_{\mathcal{R}}(X) = \sup_{\mu\in\operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \int X d\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) = \sup_{\mu\in\operatorname{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \int Y d\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) = \rho_{\mathcal{R}}(Y).$$

□

هرگاه $L^\infty_{\mathbb{P}} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ فضای تمام کلاس‌های هم ارزی نسبت به رابطه هم ارزی $(\mathbb{P}.a.s.)$ در نظر گرفته شود و همچنین به ازای هر $X \in L^\infty_{\mathbb{P}}$، $\|\cdot\|_\infty$ به صورت،
$\|X\|_\infty = \inf\{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(| X | \leq m) = 1\}$ تعریف گردد آنگاه $\|\cdot\|_\infty$ یک نرم روی $L^\infty_{\mathbb{P}}$ است که آن را به یک شبکه باناخ همراه با ترتیب $\leq_{(\mathbb{P}.a.s.)}$ تبدیل می‌نماید. حال با توجه به گزاره ۶.۲.۲، $\rho_{\mathcal{R}}$ می‌تواند به عنوان یک تابع روی $L^\infty_{\mathbb{P}}$ در نظر گرفته شود.

همچنین کلاس هم‌ارزی مربوط به تابع $\Omega \ni \omega \to 1$ یک یکه قوی [1] (یکه ترتیبی) از $L^\infty_{\mathbb{P}}$ و دوگان $L^\infty_{\mathbb{P}}$ با $\mathbf{ba}_{\mathbb{P}}$ یکسان گرفته می‌شود. هرگاه توسط تابع $\iota : \mathcal{L}^\infty \longrightarrow L^\infty_{\mathbb{P}}$ هر عضو به کلاس هم ارزی آن نظیر شود آنگاه ι را جادهی متعارف می‌نامیم. حال باتوجه به نماد گذاری‌های قبل به بیان نتیجه زیر می‌پردازیم.

نتیجه ۲.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک باشد به طوری که $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی و پیوسته از بالا است. در این صورت اگر $\rho : L^\infty_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\rho(\tilde{X}) = \rho_{\mathcal{R}}(X)$ که در آن $\iota(X) = \tilde{X}$ است تعریف شود آنگاه ρ خوش تعریف است و با اندازه ریسک $\rho_{(\iota(\mathcal{A}, \iota(\mathcal{S}), \bar{\mathfrak{p}})}$ تعریف شده روی $L^\infty_{\mathbb{P}}$ برابر است.

[1]Strong unit

$\bar{\mathfrak{p}} : \iota(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\bar{\mathfrak{p}}(\tilde{Z}) = \mathfrak{p}(Z)$ تعریف می‌شود که در آن $\tilde{Z} = \iota(Z)$. ρ تحت نرم پیوسته و از بالا پیوسته است. همچنین به ازای هر $\mu \in \mathbf{ba}_{\mathbb{P}}$ تابع دوگان ρ^* که با ضابطه $\rho^*(\mu) = \sup_{\tilde{X}\in L^\infty_{\mathbb{P}}} \int X \mathrm{d}\mu - \rho(\tilde{X})$ تعریف می‌شود با $\rho^*_{\mathcal{R}}|_{\mathbf{ba}_{\mathbb{P}}}$ برابر است. به ویژه به ازای هر $\tilde{X} \in L^\infty_{\mathbb{P}}$ بنا به تعریف، $\rho(\tilde{X}) = \sup_{\mu\in \mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}})} \int X \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$.

۲.۲.۲ فضای مدل $L^\infty_{\mathbb{P}}$ و اندازه‌های احتمال مرجع قوی

در این بخش با توجه به نتایج حاصل شده درقضیه ۳.۲.۲ و نتیجه ۲.۲.۲، از حالا به بعد هرگاه $\mathbb{P}$ یک مدل احتمال مرجع ضعیف برای اندازه ریسک متناهی $\rho_{\mathcal{R}}$ باشد آنگاه فضای مدل $L^\infty_{\mathbb{P}}$، مجموعه‌های پذیرش $\mathcal{A} \subseteq L^\infty_{\mathbb{P}}$، فضاهای اطمینان $\mathcal{S} \subseteq L^\infty_{\mathbb{P}}$ و تابعک‌های قیمت‌گذاری $\mathfrak{p} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. همچنین اعضای $L^\infty_{\mathbb{P}}$ را با نماینده کلاس هم ارزی آن یکسان در نظر می‌گیریم تا همچون معمول از بکار گیری نمادهای اضافه پرهیز نماییم.

لم ۱.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک روی $L^\infty_{\mathbb{P}}$ و $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی و نرمال شده باشد. اگر به ازای هر $\mu \in \mathbf{ba}_{\mathbb{P}}$، $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) = \sup_{X\in L^\infty_{\mathbb{P}}} \int X \mathrm{d}\mu - \rho_{\mathcal{R}}(X)$ آنگاه $\rho_{\mathcal{R}}$ از بالا پیوسته است اگر و فقط اگر همه مجموعه‌های سطح پایین $E_c = \{\mu \in \mathbf{ba}_{\mathbb{P}} \,|\, \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) \le c\}$ به ازای هر $c \in \mathbb{R}$، $\sigma(\mathbf{ca}_{\mathbb{P}}, L^\infty_{\mathbb{P}})$ـ فشرده باشد. به ویژه

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \left\{\mu \in \mathbf{ba}_{\mathbb{P}} \,|\, \sup_{Y\in\mathcal{A}} \int Y \mathrm{d}\mu < \infty\right\} \subseteq \mathbf{ca}_{\mathbb{P}}$$

و به ازای هر $X \in L^\infty_{\mathbb{P}}$، $\rho_{\mathcal{R}}(X) = \sup_{\mu\in(\mathbf{ca}_{\mathbb{P}})_+} \int X \mathrm{d}\mu - \rho^*_{\mathcal{R}}(\mu)$. به ویژه، $\mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap \{\nu \in (\mathbf{ca}_{\mathbb{P}})_+ \,|\, \forall Z \in \mathcal{S} : \int Z \mathrm{d}\nu = \mathfrak{p}(Z)\}$ و $E_\circ \neq \varnothing$. اگر $\rho_{\mathcal{R}}$ به طور مثبت همگن باشد آنگاه روابط (۵.۲) و (۶.۲) از گزاره ۵.۲.۲ بر قرار هستند.

برهان. با استدلالی مشابه همچون اثبات گزاره ۵.۲.۲ و قضیه ۳.۲.۲ تمامی نتایج حاصل می‌شود. □

تعریف ۹.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک روی $L^\infty_{\mathbb{P}}$ باشد به طوریکه $\rho_{\mathcal{R}}$ متناهی است. هرگاه $\mu \in E_\circ$ با شرط $\mu \approx \mathbb{P}$ موجود باشد آنگاه μ را یک مدل مرجع قوی برای $\rho_{\mathcal{R}}$ می‌نامیم. بنابراین مدل مرجع قوی برای $\rho_{\mathcal{R}}$ موجود است هرگاه مجموعه $\mathcal{P} = \{\mu \in E_\circ \,|\, \mu \approx \mathbb{P}\}$ ناتهی باشد.

مفهوم مدل مرجع قوی در حالت اندازه‌های ریسک پولی قانون پایا [1] بیان شده است که در ذیل به بیان بعضی از تعاریف مربوطه می‌پردازیم.

تعریف ۱۰.۲.۲. یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ بدون اتم [2] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $A \in \mathcal{F}$ با شرط $\mathbb{P}(A) > ۰$ عضوی چون $B \in \mathcal{F}$ با شرایط $B \subseteq A$ و $۰ < \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$ موجود باشد.

[1] Law-invariant
[2] Atomless

تعریف ۱۱.۲.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال و $X, Y \in L^{\infty}_{\mathbb{P}}$. در این صورت رابطه $\sim$ روی $L^{\infty}_{\mathbb{P}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$X \sim Y \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}_X(x) = \mathcal{F}_Y(x)$$

که در آن $\mathcal{F}_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ تابع توزیع متغیر X است.

تعریف ۱۲.۲.۲. اندازه ریسک $r : L^{\infty}_{\mathbb{P}} \longrightarrow (-\infty, \infty]$ را $\mathbb{P}$ــ قانون پایا می‌نامیم هرگاه به ازای هر $X, Y \in L^{\infty}_{\mathbb{P}}$، $X \sim Y \Rightarrow r(X) = r(Y)$.

تعریف ۱۳.۲.۲. نگاشت $\rho : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک اندازه ریسک پولی [۱] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $X, Y \in \mathcal{X}$ شرایط زیر برقرار باشد.

۱. اگر $X \leq Y$ آنگاه $\rho(X) \geq \rho(Y)$. (یکنوایی)

۲. اگر $m \in \mathbb{R}$ آنگاه $\rho(X + m) = \rho(X) - m$. (انتقال پایا)

به ویژه اندازه ریسک پولی ρ را نرمال شده می‌نامیم هرگاه $\rho(\circ) = \circ$.

گزاره ۷.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک روی $L^{\infty}_{\mathbb{P}}$ باشد به طوریکه $\rho_{\mathcal{R}}$ نرمال شده است و همچنین در شرایط زیر صدق نماید.

۱. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ بدون اتم است.

۲. $\mathcal{A} = \{X \in L^{\infty}_{\mathbb{P}} \,|\, r(X) \leq \circ\}$ که در آن r یک اندازه ریسک پولی $\mathbb{P}$ــ قانون پایا و نرمال شده است که از بالا پیوسته است.

۳. $\mathcal{P} = c\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\cdot]$ که در آن c یک ثابت مثبت و مناسب است آنگاه $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$.

برهان. با توجه به گزاره ۱.۱ از مرجع [۲۱] و نتیجه ۴.۶۵ از مرجع [۱۵] برای هر زیر σــ جبر $\mathcal{G}$ از $\mathcal{F}$ و برای هر $X \in L^{\infty}_{\mathbb{P}}$ رابطه $r(\mathbb{E}[X|\mathcal{S}]) \leq r(X)$ برقرار است. بنابراین برای هر $X \in L^{\infty}_{\mathbb{P}}$، $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = r(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|\{\emptyset, \Omega\}]) \leq r(X)$. لذا با توجه به رابطه (۳.۲) از گزاره ۵.۲.۲ چون $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mathbb{P}) = \sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{P})$ بنابراین $\sigma_{\mathcal{A}}(\mathbb{P}) = \sup_{X \in L^{\infty}_{\mathbb{P}}, r(Y) \leq \circ} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y] = \circ$ پس $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mathbb{P}) = \circ$ و در نتیجه $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$. $\square$

نمادگذاری : هرگاه $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد آنگاه قرار می‌دهیم

$$\mathcal{F}_+ = \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(A) > \circ\}.$$

لم ۲.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{R} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathfrak{p})$ یک روش اندازه‌گیری ریسک باشد به طوری که متناهی، از بالا پیوسته و منسجم باشد. در این صورت $\mathcal{P} \neq \emptyset$ اگر و فقط اگر $\rho_{\mathcal{R}}$ حساس باشد.

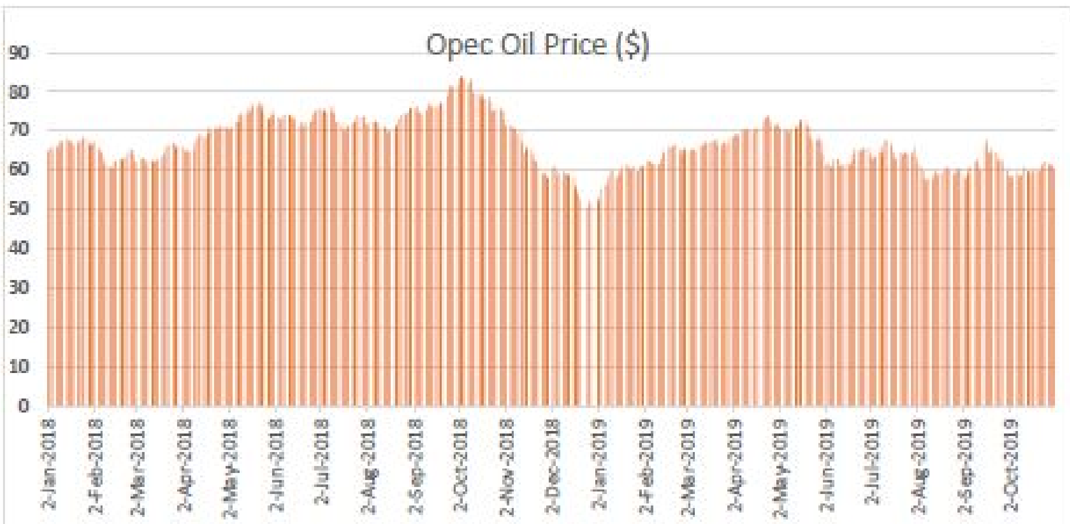
[1] Monetary Risk Measure

برهان. فرض کنید $\rho_{\mathcal{R}}$ حساس باشد. چون $\rho_{\mathcal{R}}$ منسجم است آنگاه با توجه به رابطه (۵.۲)، $\mathrm{dom}(\rho^*_{\mathcal{R}}) = E_\circ$. به ویژه پیوستگی از بالا ایجاب می‌کند که $E_\circ \subseteq (\mathbf{ca}_{\mathbb{P}})_+$. به دلیل حساس بودن $\rho_{\mathcal{R}}$ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $A \in \mathcal{F}_+$، $\sup_{\mu \in E_\circ} \mu(A) = \rho_{\mathcal{R}}(\frac{1}{A}) > \circ$. بنابراین برای هر $A \in \mathcal{F}_+$ عضوی چون $\mu_A \in E_\circ$ موجود است به طوری که $\mu_A(A) > \circ$. به عبارت دیگر $E_\circ \approx \mathbb{P}$. حال با توجه به قضیه ۱.۶۱ از مرجع [۱۵] می‌توان نتیجه گرفت که دنباله ای مانند $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E_\circ$ چنان موجود است که $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\} \approx \mathbb{P}$. چون $E_\circ$ شمارا_محدب است بنابراین $r = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\mu \in E_\circ$. لذا $\mathcal{P} \neq \emptyset$. برعکس : اگر $\mathcal{P} \neq \emptyset$ آنگاه عضوی چون $\mu \in E_\circ$ موجود است به طوریکه $\mu \approx \mathbb{P}$. بنابراین $\rho^*_{\mathcal{R}}(\mu) = \circ$ و $\mu \ll \mathbb{P}$ و $\mathbb{P} \ll \mu$. این نشان می‌دهد که به ازای هر $X \in \mathcal{X}_{++}$، $\rho_{\mathcal{R}}(X) > \rho_{\mathcal{R}}(\circ)$. بنابراین $\rho_{\mathcal{R}}$ حساس است. □

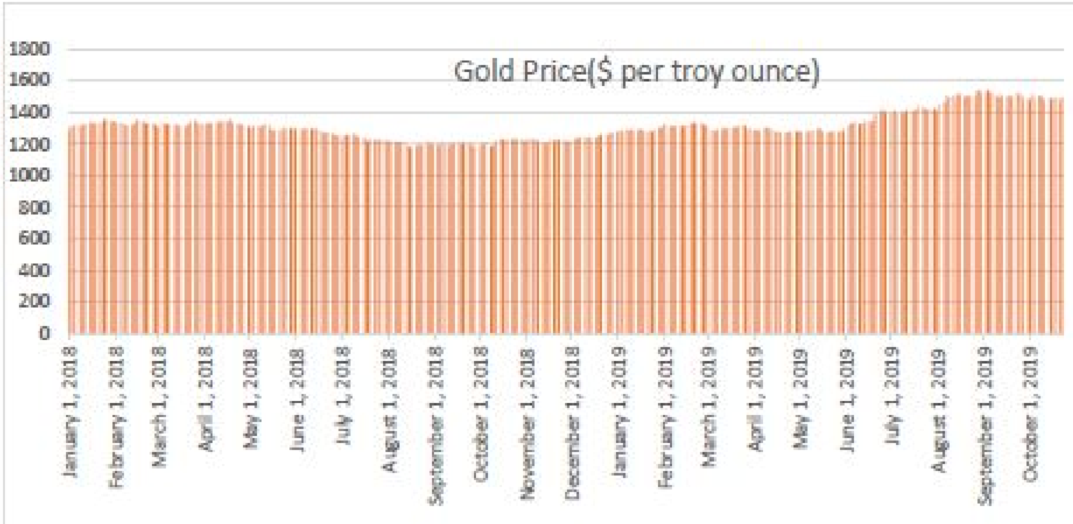
فصل ۳

اعتبار سنجی

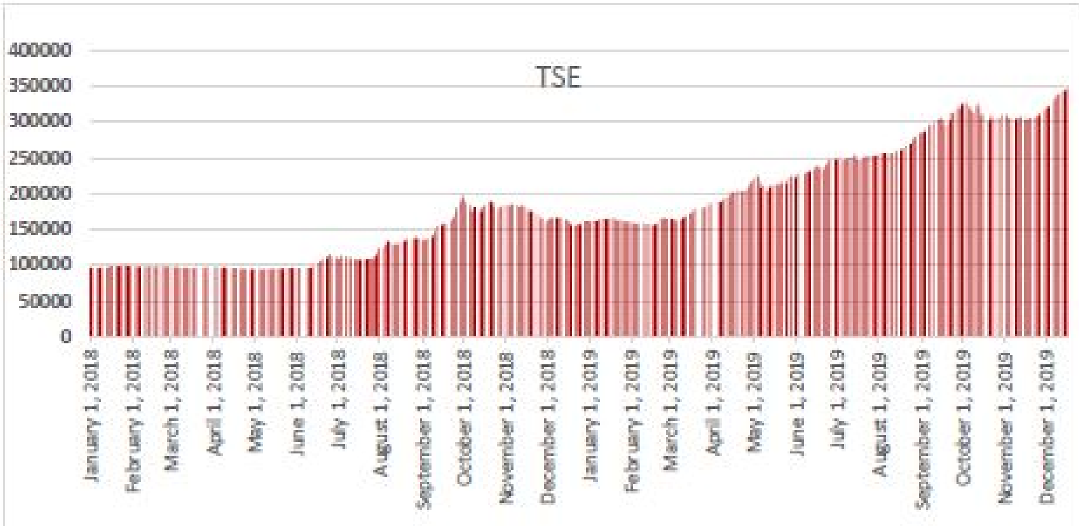
در این فصل به دنبال آن هستیم نتایجی را که به صورت نظری در فصل قبل بدست آمد، را روی داده‌های واقعی مورد ارزیابی قرار دهیم. برای این منظور سبدی متشکل از قیمت روزانه نفت اوپک برای هربشکه برحسب دلار، شاخص کل بورس تهران و قیمت روزانه هراونس طلا برحسب دلار را از تاریخ 1-Jan-2018 تا تاریخ 1-Nov-2019 در نظر می‌گیریم. قیمت روزانه‌ی هرکدام از این دارایی ها ارزش سبد سرمایه ما را نشان می‌دهد که نمودار این دارایی‌ها به صورت زیر است.



شکل ۱.۳: قیمت روزانه هر بشکه نفت اوپک

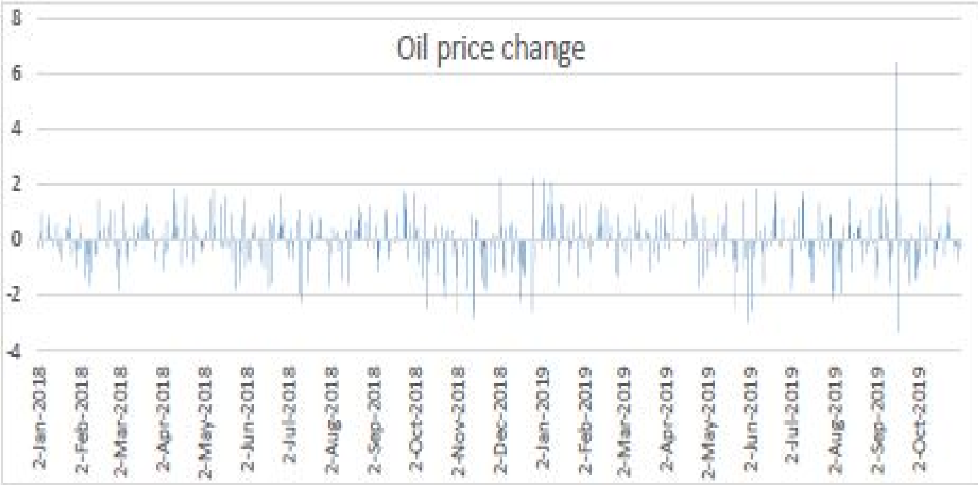


شکل ۲.۳: قیمت روزانه هر اونس طلا

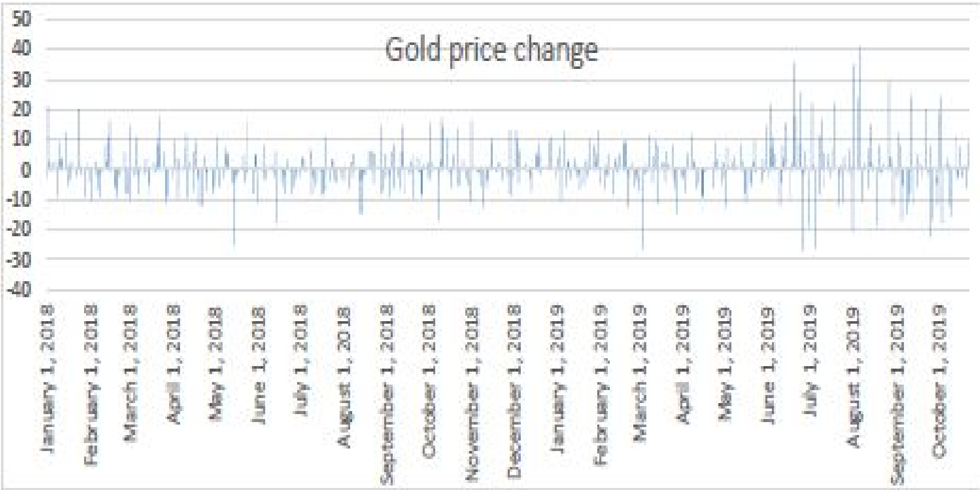


شکل ۳.۳: شاخص کل بورس اوراق بهادار در هر روز

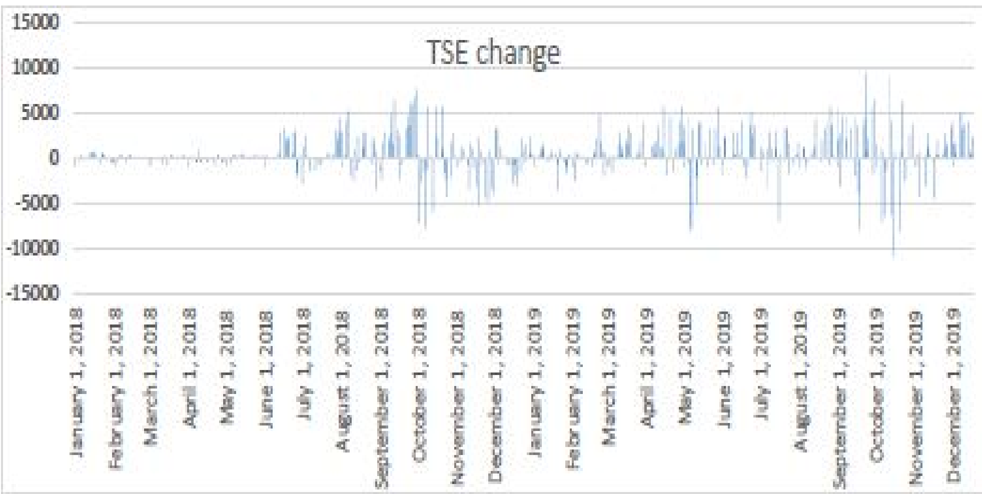
حال اختلاف قیمت هر روز از روز قبل این سه دارایی را به دست آورده که نمودار این اختلاف قیمت به صورت زیر می‌باشد.



شکل ۴.۳: اختلاف قیمت هر روز از روز قبل هر بشکه نفت اوپک

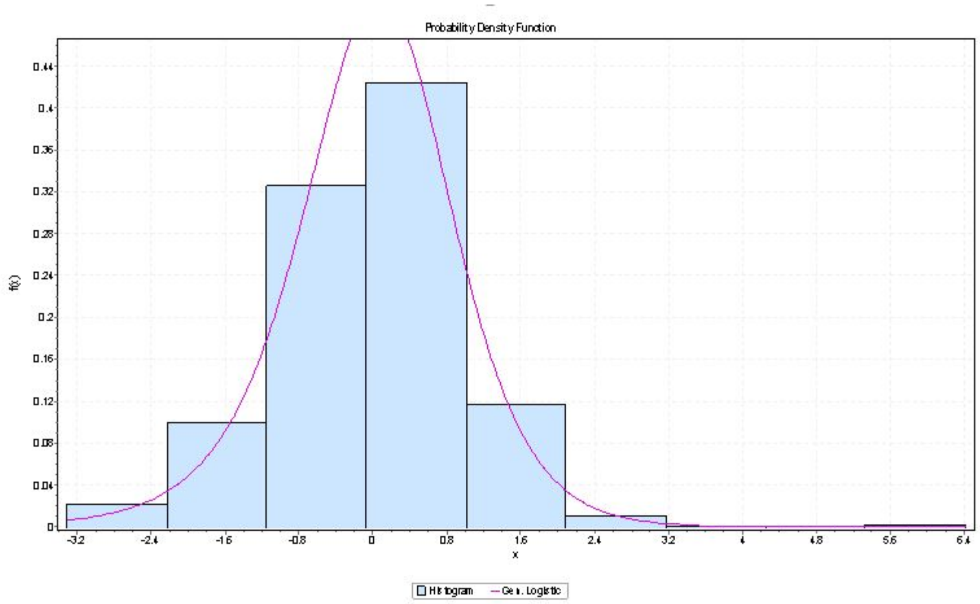


شکل ۵.۳: اختلاف قیمت هر روز از روز قبل هر اونس طلا

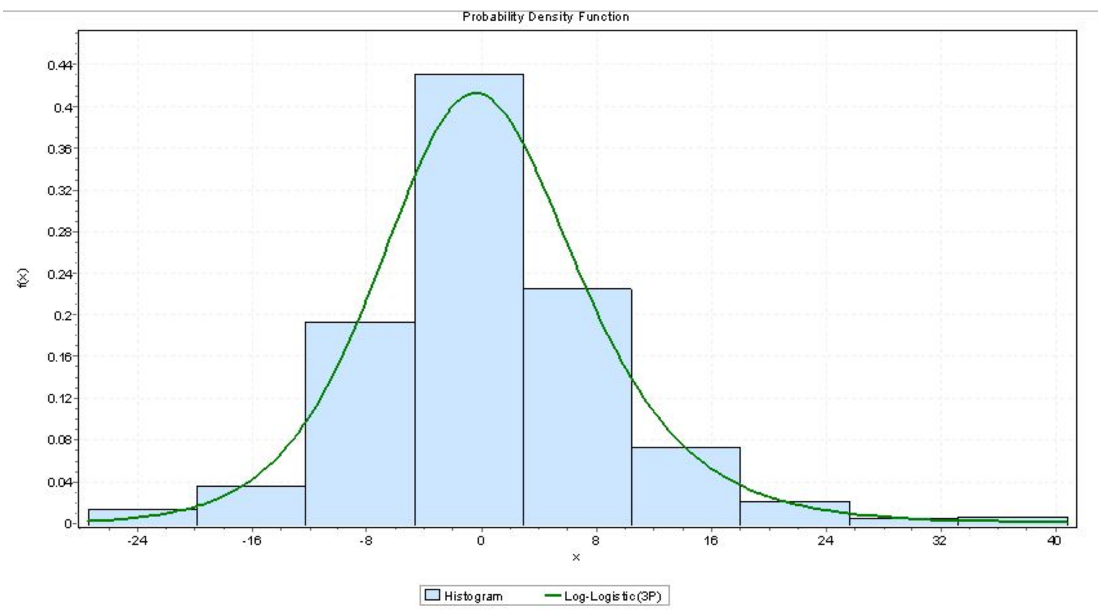


شکل ۶.۳: اختلاف شاخص کل بورس اوراق بهادار در هر روز از روز قبل

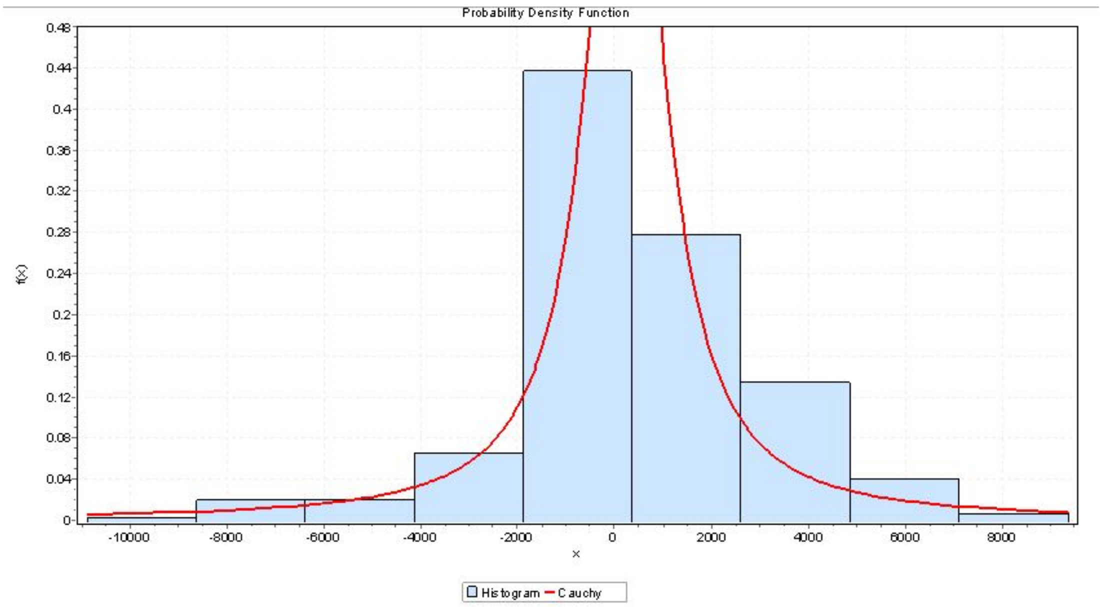
همچنین با استفاده از نرم افزار easyfit نمودار توزیع آماری این اختلاف قیمت را شبیه سازی می‌کنیم که به صورت زیر می‌باشد.



شکل ۷.۳: توزیع آماری اختلاف قیمت هر بشکه نفت اوپک



شکل ۸.۳: توزیع آماری اختلاف قیمت هر اونس طلا



شکل ۹.۳: توزیع آماری اختلاف شاخص کل بورس اوراق بهادار در هر روز

دراین مرحله برای تکمیل شدن کار ، بازده هر یک از دارایی‌ها رو بدست آوردیم. بنابراین آمار توصیفی این دارایی‌ها به صورت می‌شود.

	Oil Price	*r_OIL*	*Oil price change*	*Gold Price*	*r_Gold*	*Gold price change*	*TSE*	*r_TSE*	*TSE change*
Mean	67.0782	-0.0044	-0.0099	1315.4300	0.0331	0.4310	181995.1645	0.2799	531.0653
Standard Error	0.2936	0.0696	0.0453	4.1135	0.0298	0.4021	3413.2126	0.0576	115.0260
Median	66.4000	0.0551	0.0350	1303.5000	0.0000	0.0000	165701.7000	0.1519	211.8000
Mode	62.7400	0.0000	0.5000	1258.1500	0.0000	0.0000	108800.1000	0.0000	0.0000
Standard Deviation	6.3857	1.5122	0.9835	89.4626	0.6465	8.7359	74232.4704	1.2511	2499.0046
Sample Variance	40.7773	2.2867	0.9673	8003.5576	0.4179	76.3165	5510459667.6879	1.5652	6245024.0468
Kurtosis	-0.4581	5.2623	3.7107	0.1671	1.7838	2.3626	-0.8573	1.5651	2.7513
Skewness	0.2295	0.4763	0.2168	0.8919	0.4737	0.5289	0.5445	0.0245	-0.3793
Range	33.9800	15.5560	9.7200	367.7000	4.8082	68.2500	254020.8000	8.5280	20260.5000
Minimum	50.1100	-4.8763	-3.3100	1178.4000	-2.0237	-27.4500	92849.9000	-4.1643	-10892.6000
Maximum	84.0900	10.6798	6.4100	1546.1000	2.7845	40.8000	346870.7000	4.3637	9367.9000
Sum	31728.0000	-2.0770	-4.6500	622198.4000	15.6184	203.4500	86083712.8000	132.0946	250662.8000
Count	473	472	472	473	472	472	473	472	472
Quantile 95%	77.14	2.15	1.45	1546.10	1.21	15.35	318380.00	2.57	4769.20

شکل ۱۰.۳: آمار توصیفی مربوط به دارایی‌ها

برای اینکه اندازه ریسک متناظر با روش اندازه ریسک را بسازیم شرایط زیر را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\mathcal{X}$ مجموعه تمام متغیرهای تصادفی باشد. لذا داریم $\mathcal{X} = \{X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid X$ تابع است$\}$ و مجموعه اطمینان و مجموعه پذیرش هرکدام به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{S} = \{X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid X \text{ متغیر تصادفی اختلاف قیمت هر روز با روز قبل}\}$$

و $\mathcal{A} = \{X \mid X < 0\}$. حال تابع قیمت گذاری را به صورت زیر در نظر می‌گیریم $\mathfrak{p} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ که در آن به ازای هر $Z \in \mathcal{S}$ داریم $\mathfrak{p}(Z)$ که برابر است با مجموع ارزش دلاری دارایی‌ها. نکته

قابل توجه این است که شرایطی که در بالا در نظر گرفتیم در روش اندازه ریسکی که برای هر اندازه ریسک بیان شده صدق می‌کند و به راحتی قابل اثبات است.

از طرفی چون هدف ما ارائه یک اندازه ریسک زیان متناظر با روش اندازه ریسکی است که در فصل قبل بیان شده است. اندازه‌های ریسکی همچون VaR و ES برای توزیع زیان مناسب می‌باشند. دو دارایی نفت و طلا را به عنوان سبد در نظر بگیرید. علت انتخاب ما این است که هر دو برحسب دلار هستند و جمع پذیر می‌باشند و با هم تطابق دارند. لذا با توجه به جمع پذیر بودن دارایی‌ها، ارزش سبد دارایی و تغیر ارزش سبد دارایی را بدست آورده که نمودار آن به صورت زیر می‌باشد.

شکل ۱۱.۳: ارزش سبد دارایی‌ها

شکل ۱۲.۳: تغیر ارزش روزانه سبد دارایی‌ها

بنابراین اندازه ریسک $\rho_{\mathcal{R}}$، VaR و ES را باتوجه به شرایط بالا ابتدا برای هر دارایی و سپس برای سبد دارایی به دست می‌آوریم. لذا با انجام محاسبات داریم.

	Opec Oil Price ($)	Gold Price($ per troy ounce)	TSE	سبد دارایی (طلا و نفت)
VaR95%	1.45	15.35	4769.20	15.39
ES 95%	1.98	23.53	6078.25	22.42
اندازه ریسک مورد نظر	-3.31	-27.45	-10892.60	-27.01
قیمت دارایی	64.57	1403.95	308978.90	1350.26
تاریخ متناظر	18-Sep-2019	26-Jun-2019	15-Oct-2019	4-Mar-2019

	وزن دارایی ها در تاریخ 2 ژانویه 2018	قیمت دارایی
نفت	0.0471	64.84
طلا	0.9529	1312.05
جمع	1	1376.89

شکل ۱۳.۳: محاسبه اندازه‌های ریسک متناظر با دارایی‌ها

نکته حائز اهمیت این است که اندازه ریسک مورد نظر ما که به نوعی این پایان‌نامه بر محوریت آن است در بیمه کار برد دارد. که بیان می‌کند حداکثر زیان در صورت انتخاب این دارایی یا این سبد چقدر می‌باشد. تمامی مراحل محاسبه این مقادیر در فایل اکسل قابل مشاهده است.

مراجع

[۱] استفان، راس، ''مدیریت مالی نوین''، ترجمه علی جهانخانی و مجتبی شوری، تهران : انتشارات سمت (۱۳۹۳).

[۲] پیر صالحي، مجتبي، '' بررسي رابطه ریسك و بازده سرمایه گذاري در بورس اوراق بهادار تهران '' ، پایان نامه کارشناسي ارشد مدیریت بازرگاني، دانشگاه اصفهان، ۱۳۷۲.

[۳] جهانخاني، علي و پارسائیان، علي،'' بورس اوراق بهادار''، چاپ دوم، تهران، دانشگاه تهران، (۱۳۷۵).

[۴] رادپور، میثم و عبده تبریزی، حسین،'' اندازه‌گیری و مدیریت ریسک بازار ''، تهران : انتشارات آگاه (۱۳۸۸).

[۵] رنجبری، فهیمه، '' تحلیل حساسیت و نیرومندی روندهای اندازه‌گیری ریسک''، پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی مالی دانشکده ریاضی، دانشگاه شیخ بهایی، (۱۳۹۲) .

[۶] سیاحوشی، فرحناز، ''اندازه ریسک مبتنی بر زیان'' ، پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی مالی دانشکده ریاضی، دانشگاه شیخ بهایی، (۱۳۹۴).

[۷] صدیقی، کریم، ریاضی، عبدالحمید، ''آنالیز تابعی'' ، دانشگاه هرمزگان، (۱۳۷۸).

[۸] عبداله زاده، فرهاد، ''مدیریت سرمایه گذاري و بورس اوراق بهادار'' ، انتشارات نشر پردازشگران، چاپ اول، ۱۵۲ـ۱۳۸۱، ۱۴۸

[۹] هال، جان، ۱۹۴۶ ـم، ''مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک'' ، مترجمان سجادسیاح، علی صالح آبادی، تهران : گروه رایانه تدبیرپرداز، (۱۳۸۴) .

[10] Aliprantis, C., Border, K., 1999. Infinite Dimensional Analysis–A Hitchhiker'S Guide, second ed.. Springer.

[11] Bogachev, V.I., 2007. Measure Theory, Volume I. Springer.

[12] Farkas, E.W., Koch Medina, P., Munari, C.-A., 2013. Beyond cash-additive risk measures: When changing the numeraire fails. Finance Stoch. 18 (1), 145–173.

[13] Farkas, E.W., Koch Medina, P., Munari, C.-A., 2014. Capital requirements with defaultable securities. Insurance Math. Econom. 55, 58–67.

[14] Farkas, E.W., Koch Medina, P., Munari, C.-A., 2015. Measuring risk with multiple eligible assets. Math. Financ. Econ. 9 (1), 3–27.

[15] Follmer, H., Schied, A., 2011. Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time, third ed.. De Gruyter.

[16] Haugen, R.A. (1990).Modern Investment theory. (2 nd Ed). New Jersey : Printic Hall Inc.

[17] H.G. Dales, Banach Algebras and Automatic Continvity, Oxford University press Inco, New york, (2000).

[18] Jouini, E., Schachermayer, W., Touzi, N., 2008. Optimal risk sharing for law invariant monetary utility functions. Math. Finance 18 (2), 269–292.

[19] Munari, C.-A., 2015. Measuring risk beyond the cash-additive paradigm. ETH Zurich, (Ph.D. thesis).

[20] Ruszczynski, A., Shapiro, A., 2006. Optimization of convex risk functions. Math. Oper. Res. 31 (3), 433–452.

[21] Svindland, G., 2010b. Subgradients of law-invariant convex risk measures on L^1. Statist. Decisions 27 (2), 169–199.

[22] Sharp, .w.f., and Aleander, .G.J., and Bailey, .J.V. (1995). Investment. New Jersey: printic – Hall Inc.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احتمالی	Probabilistic
احتمال	Probability
اخطار افزایش ودیعه	Margin call
ارزش درمعرض ریسک	Value at risk
ارزیابی	Valuation
اعتبار دهندگان	Creditors
اکید	Strict
اندازه	Measure
انتگرال پذیری	Integrability
قانون پایا	Law-invariant
بستار	Closure
بازده	Return
بدون اتم	Atom less
پایدار	Stable
پولی	Monetary
پوچساز	Annihilator
ترتیب فضای برداری	Vector space order
توپولوژی ضعیف	Weak topology
توپولوژی ضعیف ستاره	Weak* topology
تور	Net
تابعک قیمت گذاری	Pricing functional
تعریف	Define
تابعک خطی	Linear functional
تقریبا مطمئن	Almost surely
تلاطم	Volatility

تناقض	Contradiction
توسیع	Extension
جمع پذیر	Additive
جبر	Algebra
جاری	Liquide
چگال	Dense
حساس	Sensitive
دامنه‌توانی	Powerdomain
دارایی واجد شرایط جاری منحصر به فرد	Single liquide eligible
دوگان	Double
دارایی	Asset
درون	Interior
دامنه معنادار	Semantic domain
زیرگروه	Subgroup
زیرنویس	Subscript
ریسک سیستماتیک	Systematic risk
ریسک غیرسیستماتیک	Nonsystematic risk
ریسک تجاری	Business risk
ریسک غیرتجاری	Nonbusiness risk
سپرده مالی	Financial deposit
سبدسهام	Portfolio
سود	Gains
سود دریافتی	Yield
سود یا زیان سرمایه	Capital gain
شمارش ناپذیر	Uncountable
شمارش پذیر	Countable
شبکه	Lattice
طرف قرارداد	Counterparty
عملگرخطی	Linear operator
فضای تابعی	Function Space
فضای توپولوژیک	Topological space
فضای برداری	Vector space

فضای اطمینان .... Security space
فضای باناخ .... Banach space
فشرده .... Compact
قراردادهای تاخت .... Swap contracts
قضیه باناخ آلاغلو .... Banach-Alaoglu theorem
کراندار .... Bounded
کلاس هم ارزی .... Equivalence class
کمیته بال .... Basel committee
گسسته .... Discrete
مرتب .... Ordered
مجموعه پذیرش .... Acceptance set
محدب .... Convex
مخروط .... Cone
متناهی .... Finite
منسجم .... Coherent
مجموعه بورل .... Borel set
مدیریت ریسک .... Risk management
مجموعه جهت دار .... Directed Set
جزئاً مرتب کامل جهت دار .... Directed complete partial order (DCPO)
مستقل .... Independent
مخروط بسته .... Closed cone
مقام ناظر .... Regulator
نرخ بهره .... Interest-sensitive instrument
نیم پیوسته .... Semicontinuous
ناتهی .... Non-empty
نرمال سازی .... Normalise
ناپیوسته .... Discontinuous
نکول .... Default
نکول ناپذیر .... Non-defaultable
واحد_یکه .... Unit
واجد شرایط .... eligible
واحد ضعیف .... Weak unit

واحد ترتیبی ضعیف .... Weak order unit
همگرایی .... Convergence
هندسه .... Geometry
یکنواخت .... Monotone
یکه قوی .... Strong unit

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

مجموعه پذیرش	Acceptance set
جمع پذیر	Additive
تقریبا مطمئن	Almost surely
جبر	Algebra
پوچساز	Annihilator
دارایی	Asset
بدون اتم	Atomless
کمیته بال	Basel committee
کراندار	Bounded
قضیه باناخ آلاغلو	Banach-Alaoglu theorem
فضای باناخ	Banach space
ریسک تجاری	Business risk
مجموعه بورل	Borel set
سود یا زیان سرمایه	Capital gain
محدب	Convex
مخروط بسته	Closed cone
همگرایی	Convergence
تناقض	Contradiction
مخروط	Cone
منسجم	Coherent
بستار	Closure
فشرده	Compact
شمارش پذیر	Countable
طرف قرارداد	Counterparty
اعتباردهندگان	Creditors

Directed complete partial order (DCPO)	جزئاً مرتب کامل جهت‌دار
Double	دوگان
Dense	چگال
Define	تعریف
Default	نکول
Directed Set	مجموعه جهت دار
Discrete	گسسته
Discontinuous	ناپیوسته
Equivalence class	کلاس هم ارزی
Extension	توسیع
Eligible	واجد شرایط
Function space	فضای تابع
Finite	متناهی
Financial deposit	سپرده مالی
Geometry	هندسه
Interior	درون
Interest-sensitive instrument	نرخ بهره
Independent	مستقل
Integrability	انتگرال پذیری
Law-invariant	قانون پایا
Linear functional	تابعک خطی
Lattice	شبکه
Linear operator	عملگرخطی
Liquide	جاری
Margin call	اخطار افزایش ودیعه
Measure	اندازه
Monotone	یکنواخت
Monetary	پولی
Net	تور
Normalise	نرمال سازی
Non-empty	ناتهی
Non-defaultable	نکول ناپذیر

ریسک غیر تجاری .... Non business risk
مرتب .... Ordered
دامنه‌توانی .... Powerdomain
احتمالی .... Probabilistic
سبد سهام .... Portfolio
تابعک قیمت گذاری .... Pricing functional
احتمال .... Probability
بازده .... Return
مدیریت ریسک .... Risk management
مقام ناظر .... Regulator
دامنه معنایی .... Semantic domain
پایدار .... Stable
یکه قوی .... Strong unit
فضای اطمینان .... Security space
اکید .... strict
نیم پیوسته .... Semicontinuous
زیرنویس–اندیس .... Subscript
حساس .... Sensitive
زیرگروه .... Subgroup
قراردادهای تاخت .... Swap contracts
دارایی واجد شرایط جاری منحصربه فرد .... Single liquide eligible asset
فضای توپولوژیک .... Topological space
واحد–یکه .... Unit
شمارش ناپذیر .... Uncountable
ارزیابی .... Valuation
فضای برداری .... Vector space
ترتیب فضای برداری .... Vector space order
ارزش درمعرض ریسک .... Value at risk
تلاطم .... Volatility
توپولوژی ضعیف .... Weak topology
توپولوژی ضعیف ستاره .... Weak* topology
واحد ضعیف .... Weak unit

واحدترتیبی ضعیف .... Weak order unit
سود دریافتی .... Yield

نمایه

Aabstract

Asset portfolio risk measurement is one of the most important issues in choosing the optimal portfolio of assets. The portfolio risk is measured on the basis of its profit and loss. In this thesis, considering the requirement that portfolio risk should be measured in terms of its losses and not its profits, the concept of risk measure is defined on the basis of losses and examines the properties of these types of risk measures. In fact, a general framework or process for measures of risk is expressed. Therefore, taking into account the ordered topological vector spaces and specific subsets of them, which are called acceptance sets, as well as the specific finite dimensional subspaces referred to as sequrity spaces with a pricing function, a triple is defined as risk measurement regime .To each risk measurement regime corresponds a risk measure that has certain characteristics such as convexity, monotonicity, and additivity under minor constraints. The dual conjugate of the corresponding risk measure is also defined and its characteristics are examined. In specific model spaces such as, L^∞ And $L^\infty_{\mathbb{P}}$ risk measures are studied. Finally, the application of the risk measure of loss for a portfolio of selected assets is studied.

keywords : Risk measure based on losses, Coherent risk measure, Convex risk measure, Risk measure regime, Acceptance set, Sequrity space, Weak reference risk measure, Strong reference risk measure.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Financial Math

Model spaces for risk measures and their applications in the financial assets

By: Pouya Sedaghatnia

Supervisors:

Dr. Ali Reza Khoddami
Dr. Mohammad Mirbagheri Jam

20 January 2020