بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری هندسه توپولوژی

# مطالعه هندسی معادلات انتقال حرارت غیرخطی و کسری

نگارنده: الهه صابری محمدیه

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

دی ۱۳۹۸

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

**باسمه تعالی**

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

**فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)**

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ وما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود سرکارخانم **الهه صابری محمدیه** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی** به شماره دانشجویی **۹۳۰۰۸۴۵** ورودی **مهر ۹۳** در تاریخ **۹۸/۱۰/۲۴** از رساله **نظری■ / عملی□** خود با عنوان : **مطالعه هندسی معادلات انتقال حرارت غیرخطی و کسری** و با اخذ نمره ......۲۰...... به درجه : ......عالی...... نائل گردید.

| | |
|---|---|
| الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑ | ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷□ |
| ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹– ۱۵□ | د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد□ |
| ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد□ | |

| ردیف | هیئت داوران | نام و نام خانوادگی | مرتبهٔ علمی | امضاء |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | استاد راهنما | دکتر سید رضا حجازی | دانشیار | |
| ۲ | استاد داور داخلی | دکتر احمد معتمدنژاد | دانشیار | |
| ۳ | استاد داور داخلی | دکتر علیرضا ناظمی | دانشیار | |
| ۴ | استاد داور خارجی | دکتر سید امین اصفهانی | دانشیار | |
| ۵ | نماینده تحصیلات تکمیلی | دکتر مهدی قوتمند | استادیار | |

**مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:**

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی سرکارخانم **الهه صابری‌محمدیه** بعمل آید.

**نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده : دکتر مهدی قوتمند**

**تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:**

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده ریاضی

۹۸/۱۰/۲۴

**تقدیم به**

**پدر و مادر عزیزم**

که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم برایم بوده‌اند. که هرچه آموختم در مکتب عشقشان آموخته‌ام و هر چه بکوشم قطره‌ای از دریای بی‌کران مهربانیشان را سپاس نتوانم بگویم.

آنانکه فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه‌های جاودانگی زندگی من است. گران سنگ‌تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایشان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم‌گونه غبار خستگیشان را بزداید...

بوسه بر دستان پر مهرشان...

# سپاس‌گزاری...

سرآغاز سخن سپاس خالق هستی است، به اندازه توان قلم. ناتوانم در شکر نعمت‌های آفریدگار، هر آنچه حمد گویم ناقص است و محدود به واژه‌ها. خداوندا تو را شکر می‌گویم به آنچه از علم و ادب به من عطا نمودی و شاکرم که در این مسیر کسانی را سر راهم قرار داد که بتوانم همه جانبه از ایشان درس اخلاق و زندگی بیاموزم.

عمیق‌ترین قدردانی خود را حضور استاد عالی‌قدر جناب آقای دکتر سید رضا حجازی تقدیم می‌کنم که فراتر از یک استاد راهنما در نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده و با مساعدت همه‌جانبه و راهنمایی‌های آگاهانه و عالمانه خود بنده را یاری نمودند. توفیقات روزافزون ایشان را توأم با صحت و سعادت خواستارم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر احمد معتمدنژاد، جناب آقای دکتر علی‌رضا ناظمی و جناب آقای دکتر سید امین اصفهانی که زحمت داوری این اثر را تقبل فرمودند و با پیشنهادهای ارزشمند خود بر غنای آن افزودند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

در پایان بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و در آخر سپاسگذارم از خواهرانم و برادر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند و تشکر فراوان دارم از تمامی عزیزانی که مرا در این مسیر یاری‌گر بوده‌اند.

**الهه صابری محمدیه**
**دی ۱۳۹۸**

## تعهد نامه

اینجانب **الهه صابری محمدیه** دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض گرایش هندسه دیفرانسیل دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مطالعه هندسی معادلات انتقال حرارت غیرخطی و کسری** ، تحت راهنمایی جناب آقای دکتر **سید رضا حجازی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

**الهه صابری محمدیه**
**دی ۱۳۹۸**

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

# چکیده

هدف اصلی این رساله بررسی همه جانبه و فراگیر نظریه هندسی گروه‌های لی در مطالعه جواب‌ها و قوانین پایستگی معادله انتقال حرارت تعمیم‌یافته (معادله نفوذ) به همراه تعمیم آن به حالت کسری معادله می‌باشد که در هفت فصل مرتبط با هم ارائه شده است.

در فصل نخست پیش‌درآمدی از مفهوم تقارن‌های لی برای معادلات دیفرانسیل بیان شده که در طی آن به معرفی فضای جت و امتداد میدان برداری، طریقه محاسبه تقارن، تبدیلات هم‌ارز یک معادله پرداخته‌ایم.  در ادامه مطالب مقدماتی محاسبات کسری شامل تعاریف انتگرال و مشتق‌های کسری، خواص آن‌ها بیان شده است.

فصل دوم به مطالعه قوانین پایستگی، روش‌های متفاوت محاسبه آن‌ها و تقارن‌های پتانسیل اختصاص یافته است.  موضوع محوری فصل سوم در ارتباط با تبدیلات هم‌ارز، تقارن‌ها و قوانین پایستگی یک خانواده از معادلات موج غیرخطی است.  تعمیم آنالیز گروه لی به معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری و محاسبه قوانین پایستگی نظیر آن‌ها در فصل‌های چهارم و پنجم این نوشتار گنجانده شده است.

در فصل ششم، به آنالیز لی صورت کلی از معادله انتقال حرارت غیرخطی ناهمسانگرد پرداخته‌شده که هدف اصلی این رساله بوده و در برگیرنده پیاده‌سازی محاسبات فصل‌های قبل است .  طبقه بندی از تقارن‌ها و جواب‌های ناوردا گردآوری و قوانین پایستگی در حالت همگن آن محاسبه شده است.  در آخرین فصل از رساله، تبدیلات هم‌ارز معادله انتقال حرارت غیرخطی مرتبه کسری را ارائه نموده‌ایم در ادامه طبقه‌بندی از تقارن‌ها و قوانین پایستگی برای حالت یک بعدی و سه بعدی آن ارائه کرده‌ایم.

کلمات کلیدی:  معادلات انتقال حرارت غیرخطی مرتبه کسری، تقارن‌های لی، جواب‌های ناوردا، قانون پایستگی.

# لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Lashkarian E., Saberi E. and Hejazi S. R. (2016), "Symmetry reductions and exact solutions for a class of nonlinear PDEs". *Asian-European Journal of Mathematics*, 9(3), pp. 1650061.

   **Abstract**: This paper uses Lie symmetry group method to study a special kind of PDE. By using the Lie symmetry analysis, all of the geometric vector fields of the equation are obtained; the symmetry reductions are also presented. Some new nonlinear wave solutions, involving differentiable arbitrary functions are obtained.

2. Saberi E. and Hejazi S. R. (2018), "Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the time-fractional generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 492, pp. 296–307.

   **Abstract**: In the present paper, Lie point symmetries of the time-fractional generalized Hirota-Satsuma coupled KdV (HS-cKdV) system based on the Riemann-Liouville derivative are obtained. Using the derived Lie point symmetries, we obtain similarity reductions and conservation laws of the considered system. Finally, some analytic solutions are furnished by means of the invariant subspace method in the Caputo sense.

3. Saberi E., Hejazi S. R. and Dastranj E. (2018), "A new method for option pricing via time-fractional PDE". *Asian-European Journal of Mathematics*, 11(5), pp. 1850074.

   **Abstract**: In this paper, power options pricing is driven via time-fractional PDE when the dynamic of underlying asset price follows a regime switching model in which the risky underlying asset depends on a continuous-time hidden Markov chain process. An exact solution for power options pricing is driven under our considered model.

4. Saberi, E. and Hejazi S. R. (2019), "A comparison of conservation laws of the Boussinesq system". *Kragujevac Journal of Mathematics*, 43(2), pp. 173–200.

**Abstract**: In this work we study the Boussinesq system, which is a natural model for the propagation of long waves on the surface of water with a small amplitude and is used to compute a complete set of local conservation laws of the model through the direct method. In this method, some local multipliers are found to construct the fluxes of the conservation law. These multipliers are used to find new conservation laws via another method such as Noether's theorem, Boyer's formulation, Homotopy operator method and Ibragimov's theorem. It is noteworthy that this paper reviews these methods to compare all obtained fluxes and local conservation laws.

5. Hejazi S. R., Saberi E. and Lashkarian E. (2019), "Symmetry group, Hamiltonian equations and conservation laws of general three-dimensional anisotropic non-linear sourceless heat transfer equation". *Computational Methods for Differential Equations*, 7(1), pp. 54-68.

    **Abstract**: In this paper Lie point symmetries, Hamiltonian equations and conservation laws of general three-dimensional anisotropic non-linear sourceless heat transfer equation are investigated. First of all Lie symmetries are obtained by using the general method based on invariance condition of a system of differential equations under a prolonged vector field. Then the structure of symmetry operators as a Lie algebra are clarified and the classification of subalgebras under adjoint transformation is given. Hamiltonian equations including Hamiltonian symmetry are obtained. Finally a modified virsion of Noether's method including the direct method are applied in order to find local conservation laws of the equation.

6. Hejazi S. R. and Saberi E. (2019), "Classification of the anisotropic non-linear time-fractional diffusion equations with a source term via Lie point symmetries" *Submitted to Communications in nonlinear science and numerical simulation.*

**Conference articles**:

1. Hejazi S. R., Saberi E. and Lashkarian E. (2015), "Integration of ordinary differential equations", 12th Seminar on Differential Equations and Dynamical system,Tabriz, Iran.

**Abstract**: An application of differential geometry in ordinary differential equations (DE) is considered. One of the most appealing applications of Lie group theory is to the problem of integrating ordinary DE. In this paper, We introduce a method for finding the general solutions of ODEs by using the symmetry Lie group of a given system of ODEs.

2. Hejazi S. R., Lashkarian E. and Saberi E. (2016), ”Classification of n-th order ODEs under a given symmetry group”, the 13th International Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, Isfahan.

   **Abstract**: Classification of n-th order ordinary differential equations (ODE) under a given symmetry group is considered. This classification is based on the group of transformations called symmetry group, those are invariant under these transformations.

3. Saberi E. and Hejazi S. R. (2017), ”Invariant subspace method and some exact solutions of the time-fractional generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system”, the 9th Seminar on Geometry & Topology, Maragheh, Iran.

   **Abstract** In this paper, an analytic solution of the time-fractional generalized Hirota-Satsuma coupled KdV (HS-cKdV) system based on the Caputo derivative is furnished by means of the invariant subspace method.

4. Saberi E. and Hejazi S. R. (2017), ” Classification of the nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2 up to dimension 5 including their Lie subalgebras”, the 9th Seminar on Geometry & Topology, Maragheh, Iran.

   **Abstract**: In this paper classiffication of nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not two up to dimension five including their Lie algebras are given. The process of Lie subalgebras classiffication is by constructing an inner automorphism on the associated Lie algebra to find those Lie subalgebras which are equivalent under the defining Lie bracket.

# فهرست مطالب

# فهرست تصاویر

# فهرست جداول

# پیشگفتار

مطالعه‌ي معادلات ديفرانسيل جزيي در قرن هجدهم با كار اويلر، [۱] دی آلمبرت، [۲] لاگرانژ [۳] و لاپلاس [۴] با بررسی تحليلي روي مدل‌هاي فيزيكي آغاز شد. مدل‌هايي كه منشأ به وجود آمدن طيف گسترده‌اي از معادلات ديفرانسيل جزيي شدند. تجزيه و تحليل مدل‌هاي فيزيكي تاكنون به عنوان عامل اصلي پيشرفت معادلات ديفرانسيل شناخته شده‌اند. مفاهيم فيزيكي مانند حركت رشته مرتعش، نيروي جاذبه، الكترواستاتيك، جريان سيالات، هدايت گرمايي، الكتريسيته و مغناطيس، همگي منجر به پيدايش معادلات ديفرانسيل جزيي متفاوتي گرديده‌اند، معادلاتي كه رفتارهاي فيزيكي را در قالب نمادهاي رياضي به خوبي بيان مي‌كنند. طبيعي است كه جواب‌هاي اين معادلات به خوبي پاسخگوي اثرات اين پديده‌هاي فيزيكي خواهد بود.

یکی از ابزارهای بسیار مهم و قدرتمند برای بدست آوردن جواب‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل، آنالیز گروه لی است که در اواخر قرن نوزدهم توسط سوفوس لی [۵] ارائه شده و موسوم به روش تقارن‌ها یا روش بی‌نهایت کوچک لی می‌باشد. اگر خواسته باشیم به طور اجمالی در مورد گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل صحبت کنیم، می‌توان گفت که این گروه‌ها شامل تبدیلاتی هستند که روی فضای شامل متغیرهای مستقل و وابسته دستگاه عمل می‌کنند همراه با این خاصیت که جواب‌ها را به جواب‌های دیگر دستگاه تبدیل می‌کنند. لی دانست که یک راه بهتر برای شناخت گروه‌های لی، بدست آوردن میدان‌های برداری متناظر می‌باشد و موفق به یافتن رابطه‌ای بین گروه‌های لی و جبرهای لی آن شد.

یک نوع مهم از تقارن‌ها، تقارن‌های موضعی هستند که شامل تقارن‌های نقطه‌ای، برخوردی و مراتب بالاتر می‌باشند. تقارن‌های پیوسته فقط محدود به تقارن‌های موضعی که روی متغیرهای مستقل و وابسته دستگاه مفروض عمل می‌کنند نمی‌شوند. یک تقارن که موضعی نباشد غیرموضعی است. یک نوع خاص این تقارن‌ها، تقارنی است که مولد بی‌نهایت کوچک آن شامل انتگرال متغیرهای وابسته می‌باشد. یافتن چنین تقارن‌هایی با به کارگیری مستقیم الگوریتم لی کاری دشوار است. با این وجود با اعمال محاسبات یک تبدیل تقارن غیرموضعی، تبدیل موضعی است که روی فضای متغیرهای یک دستگاه کمکی هم‌ارز دستگاه مفروض عمل می‌کند. در نتیجه با به کارگیری الگوریتم لی با دستگاه‌های کمکی مرتبط، تقارن‌های

[1] Leonard Euler
[2] JBLR d'Alembert
[3] Joseph L. Lagrange
[4] Pierre S. Laplace
[5] Sophus Lie

غیرموضعی دستگاه مفروض حاصل می‌شوند.

اگر یک معادله ی دیفرانسیل جزیی به فرم قانون پایستگی باشد، با اضافه کردن متغیرهای جدید وابسته که متغیر پتانسیل خواهیم نامید، یک دستگاه جدید ساخته می‌شود که آن را دستگاه غیرموضعی مرتبط به آن معادله می‌نامیم. گروه لی تبدیلات دستگاه پتانسیل، یک گروه تقارن برای معادله‌ی دیفرانسیل اصلی تولید می‌کند که این تقارن ها نه تقارن لی هستند و نه تقارن لی بکلاند. این تقارن های جدید را تقارن پتانسیل می‌نامند. هر تقارن دستگاه پتانسیل، هر جواب این دستگاه را به جواب دیگری از همان دستگاه تصویر می‌کند، در نتیجه هر جواب معادله را به جواب دیگری از همان معادله تصویر می‌کند. از این‌رو گروه تقارن‌های دستگاه پتانسیل، یک گروه تقارن برای معادله‌ی دیفرانسیل اصلی است. یک تقارن دستگاه پتانسیل یک تقارن جدید برای معادله‌ی دیفرانسیل است که مولدهای بسیار کوچک آن به همه‌ی متغیرهای $(x, u)$ و متغیر پتانسیل $v$ وابسته هستند. تقارن‌های جدید، برای معادله‌ی دیفرانسیل اولیه‌ی تقارن های غیرموضعی هستند؛ در حالی که این تقارن ها در فضای $(x, u, v)$ برای دستگاه پتانسیل موضعی عمل می‌کنند. اگر این روند را برای دستگاه پتانسیل ادامه دهیم و دستگاه‌ها و زیردستگاه‌های غیرموضعی مرتبط به این دستگاه پتانسیل را بسازیم، یک درخت از دستگاه‌ها و زیردستگاه‌های غیرموضعی مرتبط به معادله‌ی دیفرانسیل اولیه خواهیم داشت.

داشتن گروه‌های تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مزیت‌های بسیاری دارد که از آن جمله می‌توان به طبقه‌بندی جواب‌های معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. این طبقه‌بندی این‌گونه است که هر دو جوابی را که در یک دسته در نظر بگیریم به وسیله برخی از مولدهای گروه تقارن قابل تبدیل به هم باشند. گروه تقارن لی این امکان را فراهم می‌کند که با کاهش مرتبه معادله به یک با یک بار انتگرال‌گیری جواب دستگاه مورد مطالعه را بدست آوریم.

از دیگر استفاده‌هایی که از این گروه‌ها می‌شود آن است که معادلات دیفرانسیل را می‌توان بر اساس پارامترها یا تابعی دلخواه طبقه‌بندی کرد. بدین منظور در نظر گرفتن تبدیلات هم‌ارز از دستگاه در آنالیز تقارن‌ها و قوانین پایستگی که نسبت به این عناصر طبقه‌بندی شده‌اند مفید و کارآمد خواهد بود. همچنین با حذف یا کاهش برخی پارامترها می‌توان به فرم‌های ساده‌تری از معادله دست یافت. تبدیلات هم‌ارز یعنی تبدیلاتی که ساختار دیفرانسیلی معادلات دستگاه مفروض را حفظ می‌کنند علی‌رغم اینکه می‌تواند فرم عناصر دلخواه (پارامتر و یا تابع تشکیل‌دهنده) تغییر نماید. کار روی تبدیلات هم‌ارز نخستین بار توسط اوزیاناکوف [۱] [۹۸]در سال ۱۹۸۲ انجام شد. بعدها کاربرد چندگانه و توسعه مفهوم تبدیلات هم‌ارز در کارهای آخاتوف، [۲] گزیزوف [۳] و ابراگیموف [۴](۱۹۸۷و ۱۹۹۱)، لیزل [۵] (۱۹۹۲) و پوپوویچ، [۶] اوانوا [۷](۲۰۰۵) دیده شد [۷، ۴۸، ۷۳، ۱۰۴].

از دیگر کاربردهای گروه تقارن، قوانین پایستگی در فیزیک است. قانون پایستگی یک معادله ریاضی است که چگونگی تاثیر یک کمیت توسط شار را بیان می‌کند. نوتر در سال ۱۹۱۸

---

[1] Lev V. Ovsiannikov
[2] Iskander S. Akhatov
[3] Rafail K. Gazizov
[4] Nail H. Ibragimov
[5] Ian Lisle
[6] Roman O. Popovych
[7] Nina M. Ivanova

دو قضیه مهم را ارائه داد که ارتباط بین گروه‌های تقارن یک انتگرال تغییرات با ویژگی‌های معادلات اویلر_لاگرانژ را نشان می‌داد. او در قضیه اول نشان داد که چگونه گروه‌های تقارن تغییرات یک_پارامتری منجر به تولید قوانین پایستگی برای معادلات اویلر_لاگرانژ می‌شود. مثلا قوانین پایستگی انرژی یک مسئله ناوردایی تحت تقارن انتقال نسبت به زمان است در حالی که پایستگی اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای یک مسئله ناوردایی تحت تبدیلات انتقال و دوران است [۹۲، ۹۷]. در مطالعه معادلات دیفرانسیل قوانین پایستگی دارای فواید زیادی می‌باشند. آن‌ها کمیت‌های فیزیکی از قبیل، جرم، انرژی، تکانه، تکانه زاویه‌ای، همچنین بار الکتریکی و ثابت‌های حرکت را توضیح می‌دهند. آن‌ها برای تحقیق انتگرال‌پذیری نگاشت‌های خطی و برای اثبات وجود و یکتایی جواب‌ها مهم هستند، همچنین برای آنالیز پایداری و رفتار عمومی جواب‌ها استفاده می‌شوند.

روش‌های مختلفی برای یافتن قوانین پایستگی وجود دارد از قبیل قضیه نوتر، روش ضرایب تابعی، روش مستقیم، فرمول های هموتوپی و ... که علاقه‌مندان می‌توانند به مراجع [۱۱، ۱۹، ۴۴، ۵۵، ۹۲، ۹۶] رجوع کنند.

در طی سالهای اخیر، نظریه معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری نقش اساسی در زمینه‌های مختلف علوم بازی می کند و در مدل سازی ریاضی بیشتر سیستم‌ها در فیزیک، شیمی و زیست شیمی، کنترل، پزشکی و علوم دیگر اهمیت اساسی دارد. معادلات دیفرانسیل کسری یک ابزار ارزشمند برای توصیف حافظه و خواص ارثی از فرآیندهای فیزیکی تهیه می‌کند، چون این معادلات تاریخچه‌ای از فرآیندها را ضبط و مدل دقیق‌تری از سیستم‌ها را فراهم می‌کند. برای مثال، چنین معادلاتی برای مدل‌سازی حرارت و انتشار موج در محیط با حفظ رفتار غیر موضعی یا ارثی و تاثیرات مختلف آن‌ها در پخش و فرآیند پخش استفاده شده است. بنابراین دست یافتن به جواب‌هاي این نوع معادلات همواره از اهمیت ویژه‌اي نزد ریاضي دانان و فیزیك دانان برخوردار بوده است. برخی از روش‌های عددی و تحلیلی موجود عبارتند از تجزیه آدومیان، تبدیل دیفرانسیل کسری، هم‌مکانی، آنالیز هموتوپی، روش‌های ماتریسی، تکرار تغییراتی، زیر فضا ناوردا و... می‌باشد. در این راستا می‌توان به مقالات [۱۲، ۳۰، ۳۹، ۴۰، ۶۵، ۹۳، ۱۰۲، ۱۱۹] اشاره کرد.

یک روش موثر برای بررسی و ساختن جواب برای معادلات دیفرانسیل کسری، روش آنالیز گروهی است. به دلیل طبیعت غیرموضعی از عملگرهای دیفرانسیلی کسری، تعمیم روش آنالیز تقارن لی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح به معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری آسان نیست. بدین منظور می‌بایست فرمول امتداد برای عملگرهای کسری موجود در معادلات دیفرانسیل بدست آید. در سال ۲۰۰۹، گزیزوف و همکارانش فرمول امتداد برای عملگر مشتق کسری ریمن_لیوول و کاپوتو ارائه کردند [۳۷، ۳۸].

یکی از مهمترین انواع معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل انتشار (انتقال حرارت) است. این نوع معادلات نه تنها موضوع پژوهش ریاضیدانان بوده، بلکه در علوم دیگر مانند مهندسی، فیزیک، شیمی، علوم زیستی و هیدرولوژی نیز مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته

است. این نوع معادلات به عنوان یک مدل کاملا مناسب برای بیشتر مسایلی که در زمینه‌های مختلف ظاهر می‌شوند مانند شار مغناطیسی در سیستم همانند توصیف تابع احتمال برای موقعیت ذرات در یک زنجیره متخلخل، دینامیک آب، تکامل جمعیت، مدل سازی رسوبات معلق به کار برده می‌شوند.

همچنین معادلات انتشاری که با جایگذاری کردن مشتقات و انتگرال‌های مرتبه صحیح با مشتقات و انتگرال‌های مرتبه کسری بدست می‌آید برای توصیف پدیده‌های فیزیکی مهم در سیستم‌های تصادفی و نامنظم فضایی همانند محیط‌های شیشه‌ای و متخلخل، محیط‌های فراکتال، پلاسما و مایعات آشفته، محیط‌های بیولوژیکی، پلیمر، فرآیندهای ژئوفیزیکی و زمین شناسی و تراکم ماکرو مولکولی مورد استفاده قرار گرفته است [۶۰، ۶۱، ۷۷، ۷۶، ۸۴، ۸۵، ۱۱۵]. معادلات انتشار کسری توسط روش‌های عددی و تحلیلی متنوعی مطالعه شده است [۸۲، ۶۲، ۶۳، ۱۱۳]؛ با این حال برای بدست آوردن جواب تحلیلی از این معادلات کارهای کمی انجام شده است.

مطالب رساله به این صورت سازماندهی شده است:

در فصل اول مفهوم فضای جت و دستگاه معادلات دیفرانسیل بیان شده و همچنین نحوه‌ی چگونگی یافتن تقارن‌ها و جواب های متشابه به همراه مثال آورده شده است. علاوه براین مفاهیم مقدماتی و پایه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری ارائه می‌شود. فصل دوم به بررسی جامع قوانین پایستگی و روش‌های محاسبه آن اختصاص یافته است. همچنین یک سری پیشنیازها و تعاریف و مفاهیم مقدماتی لازم ارائه می‌شوند. چندین روش مختلف برای یافتن قوانین پایستگی معرفی خواهد شد: روش مستقیم برای ساختن قوانین پایستگی، قضیه نوتر، فرمول‌بندی نوتر از قضیه نوتر، فرمول‌بندی بویر از قضیه نوتر، اگوریتم هرمان–پل، روش مستقیم بهینه شده و قضیه ابراگیموف. توانایی و کارایی این روش‌ها را با ذکر مثالی بررسی می‌کنیم [۱۱۰]. در پایان به عنوان کاربردی از قوانین پایستگی، تقارن‌های پتانسیل و دستگاه‌های به طور غیرموضعی مرتبط را معرفی می‌کنیم.

فصل سوم به طور مفصل به تحلیل تقارنی معادله انتشار موج برشی بر روی بستر هایپرالاستیک در مختصات استوانه‌ای که توسط شویاکوف معرفی شد اختصاص یافته است. نخست طبقه‌بندی از مدل بر حسب پارامترهای مادی آن ارائه می‌دهیم سپس با محاسبه تبدیلات هم‌ارز فرم‌های ساده‌تر از معادله را با کاهش تعداد پارامترها بیان می‌کنیم. برای هر یک از فرم‌های کاهش یافته تقارن، قوانین پایستگی و دستگاه‌های پتانسیل محاسبه و مقایسه شده است.

یکی از موضوعات محوری رساله حاضر، مطالعه و بررسی جامع تقارن‌ها و قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری می‌باشد که فصل‌های چهارم و و پنجم به آن‌ها پرداخته شده است. بدین منظور فرمول امتداد برای عملگر مشتق کسری ریمن–لیوویل را با به کار بردن بسط کسری تیلور بیان و سپس با به کار بردن آنالیز تقارن لی کلاسیک برای معادله آلن–کان مکان–زمان کسری، مولدهای بی‌نهایت کوچک از این معادلات را می‌یابیم و توسط این مولدهای بی‌نهایت کوچک نسبت به کاهش مرتبه معادله و یا کاهش تعداد متغیرهای

مستقل معادله با عملگر اردلی-کوبر اقدام می‌کنیم. همچنین محاسبه مولدهای بی‌نهایت کوچک از دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری را با دستگاه هیروتا [1]-ساتسوما [2] زمان کسری در [۱۰۷] توضیح داده‌ایم.

فصل ششم، به تجزیه و تحلیل جامع و فراگیر تقارن‌ها و قوانین پایستگی معادلات انتقال حرارت غیرخطی ناهمسانگرد با وجود یک منبع گرما اختصاص یافته است که شامل تبدیلات هم‌ارز، طبقه بندی کامل از تقارن‌ها و معادلات کاهش یافته طبق مقاله درودنیستین، [3] خودالحاقی غیرخطی و قوانین پایستگی فرم همگن معادله با روش مستقیم می‌باشد [۴۲].

فصل هفتم آنالیز تقارن‌ها و قوانین پایستگی معادله انتقال حرارت غیرخطی ناهمسانگرد زمان کسری است که ابتدا فرم کلی معادله را ارائه و سپس تبدیلات هم‌ارز مدل مذکور را محاسبه کرده‌ایم. در ادامه طبقه‌بندی از تقارن‌ها را در حالت یک بعدی و سه بعدی آورده‌ایم و برخی فرم‌های کاهش یافته آن را محاسبه نموده‌ایم در نهایت قوانین پایستگی نظیر مدل همگن آن ارائه شده است. نتایج این فصل در مقاله [۴۳] به ثبت رسیده است.

[1] Ryogo Hirota [2] Junkichi Satsuma [3] Anatolii Dorodnitsyn

# فصل ۱

# پیشنیازها

در این فصل، تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌شوند. این فصل از دو بخش مجزا تقارن‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل و حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری تشکیل شده است.

## ۱.۱ تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

در این بخش نگاهی کوتاه به گروه‌های لی و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل خواهیم کرد. بدین‌منظور تبدیلات گروه لی یک پارامتری و آنالیز تقارن لی را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل بیان می‌کنیم و جواب‌های ناوردا از این دستگاه‌ها را محاسبه کرده و با معرفی تبدیلات هم‌ارز این بخش را به پایان می‌رسانیم.
مطالعهٔ این رساله مستلزم اشراف کامل به هندسهٔ منیفلدهاست ازآنجاکه بنای بر مختصرنویسی داریم لذا برای آشنایی بیشتر با تعاریف پایه چون منیفلدها، میدان‌های برداری، فضای مماس و ... خواننده را به کتاب‌های هندسه پایه همچون [۶۹، ۹۶، ۹۷] ارجاع می‌دهیم.

### ۱.۱.۱ تبدیلات گروه لی

اگر بخواهیم به طور مختصر در مورد گروه‌های تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل صحبت کنیم، این گروه ها شامل تبدیلاتی هستند که جواب‌های دستگاه را به هم تبدیل می‌کنند. این

کار مستلزم ارائه تعاریفی از فضاهای جت و امتدادهی است. در نهایت به تعریف و نحوه‌ی محاسبه تقارن‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل اشاره می‌کنیم. تعاریف و تحقیق صورت گرفته برمبنای مراجع [۱۴، ۱۵، ۵۱، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۱۰۰، ۱۰۱] است.

**تعریف ۱.۱.۱.** اگر منیفلد هموار $r$ـ بعدی $G$ دارای ساختاری جبری گروه باشد، $G$ یک گروه لی $r$ـ پارامتری نام دارد هرگاه هر دو نگاشت زیر

$$\begin{aligned} &m : G \times G \longrightarrow G, \quad m(g,h) = g \cdot h, \quad \forall g,h \in G,\\ &i : G \longrightarrow G, \qquad\quad i(g) = g^{-1}, \qquad\quad \forall g \in G, \end{aligned}$$

هموار باشند.

فرض کنید $u = (u^1, \ldots, u^q)$ تابعی برداری از متغیرهای وابسته $u^\nu \; (\nu = 1, \ldots, q)$ باشد که به‌صورت توابعی از متغیرهای مستقل $x = (x^1, \ldots, x^p)$ هستند. یک مجموعه‌ی $G$ از تبدیلات وارون‌پذیر $T_\varepsilon$ را در نظر بگیرید که به‌صورت زیر روی نقاط $(x, u)$ عمل می‌کنند:

$$T_\varepsilon : \begin{array}{lll} \bar{x}^j = \phi^j\left(x, u; \varepsilon\right), & \phi^j|_{\varepsilon=0} = x^j, & j = 1, \ldots, p; \\ \bar{u}^\nu = \psi^\nu\left(x, u; \varepsilon\right), & \psi^\nu|_{\varepsilon=0} = u^\nu, & \nu = 1, \ldots, q, \end{array} \tag{۱.۱}$$

که در آن پارامتر $\varepsilon$ متعلق به یک همسایگی باز $V$ حول $\varepsilon = 0$ است یعنی: $\varepsilon \in V \subset \mathbb{R}$.

**تعریف ۲.۱.۱.** تبدیلات (۱.۱)، گروه لی موضعی یک‌ـ پارامتری $G$ تشکیل می‌دهند هرگاه به ازای هر $\varepsilon, \delta, \varepsilon + \delta \in G$ شرایط زیر برقرار باشد:

$$T_0 = I \in G, \quad T_\varepsilon T_\delta = T_{\varepsilon+\delta} \in G, \quad T_\varepsilon^{-1} = T_{-\varepsilon} \in G,$$

که در آن $I$ عنصر همانی تبدیلات است.

اگر $V = \mathbb{R}$، آنگاه گروه یک‌ـ پارامتری سرتاسری (شار سرتاسری) نامیم.

**تعریف ۳.۱.۱.** با نوشتن سری تیلور توابع $\phi^j\left(x, u; \varepsilon\right)$ و $\psi^\nu\left(x, u; \varepsilon\right)$ برحسب $\varepsilon$ در همسایگی از $\varepsilon = 0$ می‌توان تبدیلات بی‌نهایت کوچک گروه $G$ را به دست آورد:

$$\begin{aligned} \bar{x}^j &= x^j + \varepsilon \xi^j\left(x, u\right) + O\left(\varepsilon\right), \quad j = 1, \ldots, p;\\ \bar{u}^\nu &= u^\nu + \varepsilon \eta^\nu\left(x, u\right) + O\left(\varepsilon\right), \quad \nu = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

که در آن

$$\xi^j\left(x, u\right) = \frac{\partial \phi^j\left(x, u, \varepsilon\right)}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}, \qquad \eta^\nu\left(x, u\right) = \frac{\partial \psi^\nu\left(x, u, \varepsilon\right)}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}, \tag{۲.۱}$$

مؤلفه‌های بردار مماس بر نقطه‌ي $(x, u)$ هستند و میدان بردای مماس نظیر گروه $G$ می‌خوانیم.

همچنین میدان برداری مماس (۲.۱) را گاهی به‌صورت عملگر دیفرانسیل مرتبه اول

$$X = \xi^j\left(x,u\right)\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^\nu\left(x,u\right)\frac{\partial}{\partial u^\nu}, \qquad (۳.۱)$$

نشان می‌دهیم و آن را مولد بی‌نهایت کوچک (عملگر بی‌نهایت کوچک) گروه لی یک‌ــ پارامتری می‌نامیم. این مولدهای بی‌نهایت کوچک تشکیل یک فضای برداری با بعد نامتناهی می‌دهند که از آن به جبرلی یا مجموعه مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه لی تعبیر می‌شود.

**قضیه ۱.۱.۱.** [۶۹] هرگاه $G$ یک گروه لی باشد در این صورت $\mathfrak{g} \simeq T_eG$. یعنی با یافتن فضای مماس هر گروه لی در عضو همانی گروه می‌توان جبر لی آن را یافت.

## ۲.۱.۱ جبرلی

برای گروه لی از تبدیلات با مولدهای بی‌نهایت کوچک $X,Y$، عملگر کروشه لی (جابجاگر) از $X$ و $Y$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[X,Y] = XY - YX.$$

**تعریف ۴.۱.۱.** جبر لی، فضای برداری $\mathfrak{g}$ روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ با عملگر دو خطی $[,] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ است که در خواص زیر صدق می‌کند.

دوخطی :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \qquad [aX+bY,Z] = a\left[X,Z\right] + b\left[Y,Z\right].$$

پادمتقارن:

$$[X,Y] = -\left[Y,X\right].$$

اتحاد ژاکوبی:

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0.$$

کروشه لی دو میدان برداری، یک میدان برداری است علاوه براین $X$ و $Y$ دو مولد بی‌نهایت کوچک نظیر یک گروه تبدیل باشند، آن‌گاه کروشه لی $X$ و $Y$ مولد بی‌نهایت کوچک از گروه تبدیلات است. در نتیجه مجموعه تمام مولدهای بی‌نهایت کوچک تحت عمل کروشه لی بسته هستند بنابراین فضای مولدهای بی‌نهایت کوچک با یک ساختار جبری اضافی، جبرلی نامیده می‌شود. از این‌رو با محاسبه کروشه لی می‌توان مولدهای بی‌نهایت کوچک جدید دست یافت. یک روش متداول محاسبه جدول جابجاگر است.

**ملاحظه ۱.۱.۱.** در (۳.۱) و در تمام متن رساله جمع روی اندیس تکراری به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\xi^j\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^{p}\xi^j\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad \eta^\nu\frac{\partial}{\partial u^\nu} = \sum_{\nu=1}^{q}\eta^\nu\frac{\partial}{\partial u^\nu}.$$

مولد بی‌نهایت کوچک کانونی (۳.۱) به صورت زیر است:

$$X = W^{\nu}\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}, \quad W^{\nu} = \eta^{\nu} - \xi^{j}\frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{j}}.$$

در آنالیز گروه لی کلاسیک اثبات شده که گروه‌های لی یک‌ـ پارامتری با تبدیلات بی‌نهایت کوچک تعیین می‌شوند.

**قضیه ۲.۱.۱.** [۶۹] گروه تبدیلات (۱.۱) نظیر مولد مفروض (۳.۱) با حل معادلات لی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial \varepsilon} &= \xi^{j}\left(\bar{x},\bar{u}\right), \quad \bar{x}^{j}|_{\varepsilon=0} = x^{j}, \quad j=1,\ldots,p; \\ \frac{\partial \bar{u}^{\nu}}{\partial \varepsilon} &= \eta^{\nu}\left(\bar{x},\bar{u}\right), \quad \bar{u}^{\nu}|_{\varepsilon=0} = u^{\nu}, \quad \nu=1,\ldots,q. \end{aligned}$$

همچنین می‌توان جواب معادلات لی را به‌وسیله سری‌های توانی نامتناهی نمایش داد. در این صورت گروه تبدیل برای یک مولد با نگاشت نمایی

$$\bar{x} = \exp\left(\varepsilon X\right)\left(x\right), \quad \bar{u} = \exp\left(\varepsilon X\right)\left(u\right),$$

نمایش داده می‌شود به‌طوری که در آن

$$\exp\left(\varepsilon X\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{1!}X + \frac{\varepsilon^{2}}{2!}X^{2} + \cdots + \frac{\varepsilon^{s}}{s!}X^{s} + \cdots.$$

## ۳.۱.۱ نگاشت نمایی

**تعریف ۵.۱.۱.** گروه لی $G$ با جبر لی $\mathfrak{g}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت نگاشت $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ را نگاشت نمایی گوییم. اگر $V$ یک همسایگی $0 \in \mathfrak{g}$، $U$ یک همسایگی $e \in G$ باشند، آن‌گاه $\exp$ یک دیفئومورفیسم بین $U$ ، $V$ برقرار می‌کند.

**قضیه ۳.۱.۱.** [۹۷] فرض کنید $G$ یک گروه لی همبند با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. در این صورت برای هر $X_1,\ldots,X_k \in \mathfrak{g}$ هر عضو $G$ مانند $g$ قابل بیان به‌صورت ترکیب نگاشت‌های نمایی است، بدین معنا که:

$$g = \exp(X_1)\circ\cdots\circ\exp(X_k).$$

تعبیر قضیه فوق آن است که با داشتن اعضای یک جبر لی می‌توان با محاسبه نگاشت‌های نمایی متناظر با هر عضو و ضرب آن‌ها در هم ضابطه تبدیل گروه را به‌دست آورد.

## ۴.۱.۱ فضای جت

یک تابع هموار حقیقی مقدار $p$ـ متغیره $f(x^1,\cdots,x^p)$، دارای تعداد

$$p_k = \binom{p+k-1}{k}$$

مشتق جزئی متمایز از مرتبه $k$ـ‌ام نسبت به متغیرهایش است. این مشتقات به‌صورت

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \cdots \partial x^{j_k}},$$

خواهند بود که با اندیس‌های چندگانه متقارن $J = (j_1, \cdots, j_k)$ با شرایط $1 \leqslant j_k \leqslant p$ و $0 \leqslant k \leqslant p$ از مرتبه $\# J \equiv k$ نماد گذاری شده‌اند. بنابراین اگر $q$ متغیر وابسته $(u^1, \cdots, u^q)$ را داشته باشیم به تعداد $q_k = qp_k$ متغیر متمایز $u_J^\nu$، $(1 \leqslant \nu \leqslant q)$ برای نشان دادن تمامی مشتقات مرتبه $k$ـ‌ام متمایز $u_J^\nu = \partial_J f^\nu (x)$ از یک تابع $u = f(x)$ نیاز داریم.

برای فضای کامل $E = \mathcal{X} \times \mathcal{U} \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$، فضای جت مرتبه $n$ـ‌ام

$$J^{(n)} = J^{(n)} E = \mathcal{X} \times \mathcal{U}^{(n)},$$

یک فضای اقلیدسی از بعد

$$p + p^{(n)} \equiv p + q \binom{p+n}{n},$$

است که مختصات آن شامل $p$ متغیر مستقل $x^j$، $q$ متغیر وابسته $u^\nu$ و مختصات مشتق $u_J^\nu$ از مرتبه $1 \leqslant J \leqslant n$ است. نقاط در فضای عمودی (تار) $U^{(n)}$ با $u^{(n)}$ نمایش داده می‌شوند و شامل همه متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها تا مرتبه $n$ هستند. به فضای جت مرتبه $n$ـ‌ام یک تابع منهای متغیرهای مستقلش امتداد تابع تا مرتبه $n$ـ‌ام می‌گوییم. بنابراین مختصات نقطه معمولی $z \in J^{(n)}$ با $(x, u^{(n)})$ نمایش داده می‌شوند.

**تعریف ۶.۱.۱.** یک تابع هموار حقیقی مقدار $F : J^{(n)} \to \mathbb{R}$ که روی یک زیر مجموعه باز از فضای جت مرتبه $n$ـ‌ام تعریف شده است، یک تابع دیفرانسیلی مرتبه $n$ـ‌ام نامیده می‌شود.

هر معادله دیفرانسیلی مرتبه $n$ از صفر قراردادن یک تابع دیفرانسیلی مرتبه $n$ـ‌ام حاصل می‌شود.

### ۵.۱.۱ امتداد دهی عمل گروه

فرض کنیم $G$ یک گروه تبدیلات باشد که روی یک زیر مجموعهٔ باز $\mathcal{O} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ از فضای متغیرهای مستقل و وابسته عمل می‌کند. یک عمل القا شده از گروه $G$ روی فضای جت مرتبه $n$ـ‌ام $\mathcal{O}^{(n)}$ وجود دارد که امتداد مرتبه $n$ـ‌ام از عمل گروه $G$ روی $\mathcal{O}$ نامیده می‌شود و آن را با $\mathrm{pr}^{(n)} G$ یا $G^{(n)}$ نمایش می‌دهیم. این امتداددهی چنان تعریف شده است که مشتقات تابع $u = f(x)$ را به مشتقات تابع تبدیل یافته $\bar{u} = \bar{f}(x)$ متناظر می‌کند. به بیان دیگر منظور از امتداد عمل یک گروه، تعمیم عمل آن به روی مشتقات جزئی تا مرتبه $n$ـ‌ام تابع $u = f(x)$ است. پس اگر $g$ یک عنصر از گروه تبدیلات $G$ باشد که در همسایگی همانی است تابع تبدیل

آن $g.f$ نیز در همسایگی نقطهٔ متناظر $(\bar{x}_0, \bar{u}_0) = g.(x_0, u_0)$ تعریف می‌شود. آنگاه با درنظر گرفتن $g$ به عنوان یک تابع به‌صورت $g : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$، امتداد آن روی $\mathcal{O}$ به‌صورت:

$$g^{(n)} : \mathcal{O}^{(n)} \to \mathcal{O}^{(n)},$$

با ضابطه $g^{(n)}.(x_0, u_0^{(n)}) = (\bar{x}_0, \bar{u}_0^{(n)})$ به ازای هر نقطهٔ دلخواه $(x_0, u_0^{(n)}) \in \mathcal{O}^{(n)}$ تعریف می‌شود.

### ۶.۱.۱ امتداد میدان‌های برداری و تقارن‌ها

در این بخش، نشان می‌دهیم که میدان‌های برداری را نیز می‌توان امتداد داد که از آن‌ها به‌عنوان مولدهای بی‌نهایت کوچک یاد می‌شود. قابل ذکر است که این فرآیند نخستین گام در راستای یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل محسوب می‌شود.

**تعریف ۷.۱.۱.** فرض کنید که $\mathcal{O} \subset E$ مجموعه‌ای باز بوده و $F(x, u^{(n)})$ تابعی هموار روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ باشد. منظور از مشتق کامل $F$ نسبت به $x^j$ که آن را با $D_j F(x, u^{(n+1)})$ نمایش می‌دهیم، تابعی هموار است که روی $J^{(n+1)}(\mathcal{O})$ تعریف شده و دارای این ویژگی مهم است که هرگاه $u = f(x)$ تابعی هموار باشد، آن‌گاه:

$$D_j F(x, f^{(n+1)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^j}[F(x, u^{(n)})],$$

شایان ذکر است که لم زیر که به‌طور متوسط از قاعده مشتق زنجیری حاصل می‌گردد، فرمول صریحی به منظور محاسبه مشتق کامل در قالب یک عملگر مشتق ارائه می‌نماید [۹۷].

**لم ۱.۱.۱.** تابع $F(x, u^{(n)})$ را روی فضای جت $J^{(n)}(\mathcal{O})$ در نظر بگیرید. هرگاه $J = (j_1, \ldots, j_k)$ یک اندیس چندگانه بوده و $u^\nu_{J,j} = \frac{\partial u^\nu_J}{\partial x^j}$ باشد. آن‌گاه:

$$D_j F = \frac{\partial F}{\partial x^j} + \sum_{\nu=1}^{q} \sum_{J} u^\nu_{J,j} \frac{\partial F}{\partial u^\nu_J},$$

به همین ترتیب، مشتق کامل مراتب بالاتر را می‌توان نسبت به اندیس چندگانه $J = (j_1, \ldots, j_k)$ به‌صورت

$$D_J = D_{j_1} \cdot D_{j_2} \cdots D_{j_k},$$

بیان نمود.

اکنون شرایط مهیا است تا به ارائه قضیه‌ای بپردازیم که نحوه‌ی محاسبه امتداد میدان‌های برداری را ارائه می‌کند.

**تعریف ۸.۱.۱.** اگر $\mathcal{O}$ یک زیرمجموعه باز از $E = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ و $X$ یک میدان برداری روی $\mathcal{O}$ با گروه یک‌ـ‌پارامتری $\exp(\varepsilon X)$ باشد. امتداد مرتبه $n$ـ‌ام $X$ را که با $X^{(n)}$ نشان می‌دهیم، یک میدان

برداری روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ بوده که به آن مولد بی‌نهایت کوچک گروه یک‌ـ‌پارامتری $\left[\exp(\varepsilon X)\right]^{(n)}$ می‌گویند. بدین معنا که:

$$X^{(n)}\Big|_{(x,u^{(n)})} = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\left[\exp(\varepsilon X)\right]^{(n)}(x,u^{(n)}), \qquad (x,u^{(n)}) \in J^{(n)}(\mathcal{O}),$$

**قضیه ۴.۱.۱.** [۹۷] فرض می‌کنیم

$$X = \sum_{j=1}^{p} \xi^j(x,u)\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{\nu=1}^{q} \eta^\nu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\nu},$$

یک میدان برداری روی زیرمجموعه باز $\mathcal{O} \subset E$ باشد. امتدادمرتبه $n$ـ‌ام میدان برداری $X$ یک میدان برداری به شکل

$$X^{(n)} = X + \sum_{\nu=1}^{q}\sum_{J} \eta_J^\nu(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\nu} \tag{۴.۱}$$

روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ است که ضرایب $\eta_J^\nu$ در (۴.۱) با فرمول

$$\eta_J^\nu(x,u^{(n)}) = D_J\big(\eta^\nu - \sum_{j=1}^{p}\xi^j u_j^\nu\big) + \sum_{j=1}^{p}\xi^j u_{J,j}^\nu; \tag{۵.۱}$$

ساخته می‌شوند. شایان ذکر است عبارت

$$Q^\nu = \eta^\nu - \sum_{j=1}^{p}\xi^j u_j^\nu,$$

در (۵.۱) را مشخصه میدان برداری $X$ می‌نامیم.

**قضیه ۵.۱.۱.** [۹۷] فرض کنیم $X$ و $Y$ دو میدان برداری روی $\mathcal{O} \subset E$ باشند. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ ویژگی‌های زیر برقرارند:

$$1) (aX+bY)^{(n)} = aX^{(n)} + bY^{(n)}, \qquad a,b \in \mathbb{R},$$
$$2)\ [X,Y]^{(n)} = \left[X^{(n)}, Y^{(n)}\right].$$

## ۷.۱.۱ روش‌های بی‌نهایت کوچک برای تقارن‌ها

فرمول صریح جهت یافتن گروه تقارن برای یک دستگاه PDE با محک بی‌نهایت کوچک ناوردایی پایه‌گذاری شده است بنابرین امتداد مولد بی‌نهایت کوچک به فضای مشتقات متغیر وابسته از دستگاه حائز اهمیت است. لی نشان داد که برای یک دستگاه PDE مفروض می‌توان شرایط غیرخطی پیچیده ناوردایی را با شرایط خطی و هم‌ارز ناوردایی بی‌نهایت کوچک تحت مولدهای بی‌نهایت کوچک جایگزین نمود که به دستگاه معادلات مشخصه (تعیین کننده) گروه تقارن تعبیر می‌شوند.

## ناورداهای بی‌نهایت کوچک

**تعریف ۹.۱.۱.** تابع $F(x,u)$ را یک ناوردای گروه $G$ از تبدیلات (۱.۱) گوییم اگر برای هر متغیر $x,u$ و پارامتر $\varepsilon$ داشته باشیم $F(\bar{x},\bar{u})=F(x,u)$ یعنی:

$$F(\phi(x,u;\varepsilon),\psi(x,u;\varepsilon))=F(x,u).$$

**قضیه ۶.۱.۱.** [۹۷] تابع $F(x,u)$ یک ناوردای گروه $G$ است اگر و تنها اگر در معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه اول

$$XF\equiv\xi^{j}(x,u)\frac{\partial F}{\partial x^{j}}+\eta^{\nu}(x,u)\frac{\partial F}{\partial u^{\nu}}=0,$$

صدق کند.

بنا به قضیه فوق برای آن‌که $I=I(x,u)$ یک ناوردا تحت $G$ باشد باید

$$\sum_{j=1}^{p}\xi^{j}(x,u)\frac{\partial I}{\partial x^{j}}+\sum_{\nu=1}^{q}\eta^{\nu}(x,u)\frac{\partial I}{\partial u^{\nu}}=0.$$

لذا برای یافتن $I$ دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{dx^{1}}{\xi^{1}(x,u)}=\cdots=\frac{dx^{p}}{\xi^{p}(x,u)}=\frac{du^{1}}{\eta^{1}(x,u)}=\cdots=\frac{du^{q}}{\eta^{q}(x,u)}. \qquad (۶.۱)$$

## دستگاه معادلات دیفرانسیل

فرض کنید

$$R(x,u):=\Delta^{\sigma}\left(x,u,u^{(n)}\right),\qquad \sigma=1,\ldots,N, \qquad (۷.۱)$$

دستگاهی شامل $N$ معادله دیفرانسیل با $p$ - متغیر مستقل $x=(x^{1},\ldots,x^{p})$ و $q$ - متغیر وابسته $u=(u^{1},\ldots,u^{q})$ باشد. فضای اقلیدسی $E=\mathcal{X}\times\mathcal{U}\simeq\mathbb{R}^{p+q}$ متشکل از متغیرهای مستقل $x$ و وابسته‌ی $u$ فضای کامل برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta=0$ می‌نامند. جواب چنین دستگاهی تابعی به صورت $u=f(x)$ است که در آن

$$u^{\nu}=f^{\nu}(x^{1},\ldots,x^{p}),\qquad \nu=1,\ldots,q,$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x=(x^{1},\ldots,x^{p})$ است.

مشتقات جزئی تابع $u$ از مرتبه $r$ را با نماد زیر نمایش می دهند :

$$\begin{aligned}\partial^{r}u &= \{u^{\nu}_{j_1,\ldots,j_r}|\nu=1,\ldots,q;\ j_1,\ldots,j_r=1,\ldots,p\}\\ &= \left\{\frac{\partial^{r}u^{\nu}(x)}{\partial x^{j_1},\ldots,\partial x^{j_r}}|\nu=1,\ldots,q;\ j_1,\ldots,j_r=1,\ldots,p\right\}.\end{aligned}$$

یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta=0$، گروهی موضعی از تبدیلات مانند $G$ است که روی یک زیرمجموعه باز از $E$ مانند $O$ عمل کرده به‌طوری که هر جواب از دستگاه $\Delta=0$ را به جواب دیگری تبدیل می‌کند.

**تعریف ۱.۱.۱۰.** دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta : J^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ از رتبه‌ی ماکسیمال است هرگاه ماتریس ژاکوبین آن یعنی

$$\mathbb{J}_\Delta(x,u^{(n)}) = \Big(\frac{\partial \Delta^\sigma}{\partial x^j}, \frac{\partial \Delta^\sigma}{\partial u^\nu_J}\Big)_{N\times(p+qp^{(n)})},$$

از رتبه $N$ باشد.

**قضیه ۱.۱.۷.** [۹۷] فرض کنید که $\mathcal{O}$ یک زیرمجموعه باز $\mathcal{X}\times\mathcal{U}$ باشد و $\Delta(x,u^{(n)})$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از رتبه $N$ روی $\mathcal{O}$ به‌طوری که $\varphi(\Delta)\subset\mathcal{O}^{(n)}$ است. در این صورت $G$، یک گروه موضعی از تبدیلات روی $\mathcal{O}$ است که امتداد میدان برداری آن روی $\varphi(\Delta)$ ناوردا است. به این معنی که به ازای هر $(x,u^{(n)})\in\varphi(\Delta)$ و تمام $g\in G$ ، $g^{(n)}(x,u^{(n)})\in\varphi(\Delta)$ باشد، آن‌گاه $G$ یک گروه تقارن دستگاه معادلات فوق است.

قضیه زیر نحوهٔ ارتباط بین گروه‌های تقارن و ناوردایی یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل تحت مولدهای بی‌نهایت کوچک را بیان می‌کند.

**قضیه ۱.۱.۸.** [۹۷] فرض کنیم $\Delta=0$ یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل از رتبه‌ی ماکسیمال تعریف‌شده در یک زیرمجموعه باز از $E$ مانند $\mathcal{O}$ باشد، اگر $G$ گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی $\mathcal{O}$ عمل کرده و $X$ یک مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد، آن‌گاه $\Delta=0$، $G$ را به‌عنوان گروه تقارن می‌پذیرد اگر

$$X^{(n)}(\Delta)=0, \qquad \text{هرگاه} \qquad \Delta=0.$$

قضیه فوق، روشی جهت یافتن تقارن‌های نقطه‌ای از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با رتبه ماکسیمال ارائه می‌دهد. با این وجود تضمینی برای یافتن تمام تقارن‌های نقطه‌ای نیست و مستلزم شرایط دیگر است.

**تعریف ۱.۱.۱۱.** دستگاه معادلات $\Delta$ (۱.۷) در نقطه $\left(x_0,u_0^{(n)}\right)$ به‌طور موضعی حل‌پذیر نام دارد؛ هرگاه $\Delta=0$ داراي جوابی مانند $u=f\,(x)$ باشد که در نقطه $x_0$ تعریف شده و در شرط $u_0^{(n)}=f^{(n)}\,(x_0)$ صدق کند. همچنین، اگر دستگاه $\Delta=0$ در هر نقطه به طور موضعی حل‌پذیر باشد $\Delta=0$ را حل‌پذیر می‌نامیم.

**تعریف ۱.۱.۱۲.** دستگاه معادلات (۱.۷) در نقطه $\left(x_0,u_0^{(n)}\right)$ به‌طور موضعی ناتباهیده نام دارد هرگاه از رتبه ماکسیمال بوده و به طور موضعی حل‌پذیر باشد. همچنین دستگاه معادلات $\Delta=0$ ناتباهیده سراسری نامیم هرگاه دستگاه و تمام نتایج دیفرانسیلی آن ناتباهیده باشد.

در تمام رساله تمام دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل را ناتباهیده در نظر می گیرم.
مطابق خواص میدان‌های برداری امتدادیافته، مجموعه تمام تقارن‌های بی‌نهایت کوچک یک دستگاه معادلات ناتباهیده تشکیل یک جبرلی می‌دهند.

**قضیه ۹.۱.۱.** [۱۵] فرض کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ناتباهیده تعریف‌شده در یک زیرمجموعه باز از $E$ مانند $\mathcal{O}$ باشد، اگر $G$ گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی $\mathcal{O}$ عمل کرده آن‌گاه $\Delta = 0$، $G$ را به‌عنوان گروه تقارن می‌پذیرد اگر و تنها اگر

$$X^{(n)}(\Delta) = 0, \qquad \text{هرگاه} \qquad \Delta = 0,$$

که $X$ یک مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد.

**الگوریتم ۱.۱.۱ (الگوریتم لی برای یافتن تقارن‌های نقطه‌ای).** دستگاه معادلات دیفرانسیل ناتباهیده (۷.۱) را در نظر بگیرید.

۱. مولد بی‌نهایت کوچک از دستگاه معادلات (۷.۱) را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$X = \sum_{j=1}^{p} \xi^{j}(x,u)\frac{\partial}{\partial x^{j}} + \sum_{\nu=1}^{q} \eta^{\nu}(x,u)\frac{\partial}{\partial u^{\nu}},$$

که در آن ضرایب بی‌نهایت کوچک $\xi^{j}(x,u)$ و $\eta^{\nu}(x,u)$ توابعی نامشخص وابسته به $x$ و $u$ هستند.

۲. اثر امتداد مرتبه $n$ـام $X^{(n)}$ داده شده طبق قضیه ۴.۱.۱ روی هر یک از معادلات دستگاه $\Delta = 0$ منجر به محک ناوردایی بی‌نهایت کوچک زیر می‌شود

$$X^{(n)}\Delta^{\sigma}\left(x,u,u^{(1)},\ldots,u^{(n)}\right)|_{\Delta^{\mu}=0} = 0, \qquad \sigma,\mu = 1,2,\ldots,N.$$

۳. ضرایب باقی مانده $u_J^{\nu}$ را متحد با صفر قرار می‌دهیم و به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مشتقات جزئی برای توابع نامعلوم $\xi^{j}(x,u)$ و $\eta^{\nu}(x,u)$ می‌رسیم که به دستگاه معادلات مشخصه (تعیین‌کننده) موسوم است.

۴. با حل دستگاه معادلات مشخصه به جواب‌های عمومی $\xi^{j}(x,u)$ و $\eta^{\nu}(x,u)$ دست می‌یابیم.

۵. درنهایت، گروه تبدیلات سرتاسری نظیر این تقارن‌ها را با استفاده از قضیه ۳.۱.۱ محاسبه می‌کنیم.

۶. با ساخت معادلات لی نظیر (۶.۱) متغیر $u$ را برحسب $p-1$ متغیر مستقل جدید به‌دست می‌آوریم.

۷. دستگاه معادلات (۷.۱) در مختصات جدید بازنویسی نموده تا به صورت کاهش‌یافته دستگاه دست یابیم.

تقارن‌هایی که با این روش محاسبه می‌شوند به تقارن‌های نقطه‌ای، هندسی یا لی مشهورند که دسته وسیعی از تقارن‌ها را شامل می‌شود و بسیار کاربردی هستند.

**مثال ۱.۱.۱.** معادله انتشار

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \tag{۸.۱}$$

معادله‌ای غیرخطی است که روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ تعریف شده و به معادله پتانسیل برگر معروف است. چون معادله مرتبه دو است، بنابراین لازم است که میدان برداری

$$X = \xi^1(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

را که روی $E$ تعریف می‌شود تا مرحله دو امتداد داده و با استفاده از قضیه ۴.۱.۱ تقارن‌ها را بیابیم.

امتداد مرتبه دوم $X$ برابر است با:

$$X^{(2)} = X + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

و با استفاده از فرمول (۵.۱) و این‌که مشخصه میدان برداری $X$ ، $Q = \phi - \xi_1 u_x - \xi_2 u_t$ است، ضرایب $X^2$ یعنی $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}, \phi^{xt}, \phi^{tt}$ را در زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
\phi^x &= D_xQ + \xi^1 u_{xx} = \phi_x + (\phi_u - \xi^1_x)u_x - \xi^2_x u_t - \xi^1_u u_x^2 - \xi^2_u u - xu_t,\\
\phi^t &= D_tQ + \xi^1 u_{xt} + \xi^2 u_{tt} = \phi_t - \xi^1_t u_x + (\phi_u - \xi^2_t)u_t - \xi^1_u u_x u_t - \xi^2_u u_t^2,\\
\phi^{xx} &= D_x^2Q + \xi^1 u_{xxx} + \xi^2 u_{xxt} = \phi_{xx} + (2\phi_{xu}\xi^1_{xx})u_x - \xi^2_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi^1_{xu})u_x^2\\
&\quad - 2\xi^2_{xu}u_x u_t - \xi^1_{uu}u_x^3 - \xi^2_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi^1_x)u_{xx} - 2\xi^2_x u_{xt} - 3\xi^1_u u_x u_{xx} - 2\xi^2_u u_x u_{xt},\\
\phi^{xt} &= D_xD_tQ + \xi^1 u_{xxt} + \xi^2 u_{xtt} = \phi_{xt} + (\phi_{ut} - \xi^1_{xt})u_x + (\phi_{xu} - \xi^2_{xt})u_t\\
&\quad - \xi^1_{ut}u_x^2 - \xi^2_{xu}u_t^2 + (\phi_{uu} - \xi^1_{xu} - \xi^1_{ut})u_x u_t - \xi^1_{uu}u_x^2 u_t - \xi^2_{uu}u_x u_t^2 - \xi^1_t u_{xx}\\
&\quad + (\phi_u - \xi^1_x - \xi^2_t)u_{xt} - \xi^1_u u_{xx}u_t - 2\xi^1_u u_x u_{xt} - 2\xi^2_u u_t u_{xt} - \xi^2_x u_{tt} - \xi^2_u u_x u_{tt},\\
\phi^{tt} &= D_t^2Q + \xi^1 u_{ttt} + \xi^2 u_{xtt} = \phi_{tt} + (2\phi_{ut} - \xi^1_{tt})u_t - \xi^1_{tt}u_x + (\phi_{uu} - 2\xi^2_{ut}) - 2\xi^1_{ut}u_x u_t\\
&\quad - \xi^2_{uu}u_t^3 - \xi^1_{uu}u_x u_t^2 + (\phi_u - 2\xi^2_t)u_{tt} - 2\xi^1_t u_{xt} - 3\xi^2_u u_t u_{tt} - \xi^1_u u_x u_{tt} - 2\xi^1_u u_t u_x.
\end{aligned}$$

حال بر اثر $X^{(2)}$ بر معادله برگر داریم:

$$\phi^t = \phi^{xx} + 2u_x\phi^x,$$

با جایگذاری ضرایب امتداد در (۸.۱) به دستگاه PDE خطی زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned}
\phi_t - \xi^1_t u_x + (\phi_u - \xi^2_t)u_t - \xi^1_u u_x u_t - \xi^2_u u_t^2 \quad &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi^1_{xx})u_x - \xi^2_{xx}u_t\\
&\quad + (\phi_{uu} - 2\xi^1_{xu})u_x^2 - 2\xi^2_{xu}u_x u_t\\
&\quad - \xi^1_{uu}u_x^3 - \xi^2_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2_x)u_{xx}\\
&\quad - 2\xi^2_x u_{xt} - 3\xi^1_u u_x u_{xx} - \xi^2_u u_t u_{xx}\\
&\quad - 2\xi^2_u u_x u_{xt} + 2\phi_x u_x + 2(\phi_u - \xi^1_x)u_x^2\\
&\quad - 2\xi^2_x u_t u_x - 2\xi^1_u u_x^3 - 2\xi^2_u u_x^2 u_t,
\end{aligned}$$

با جایگذاری $u_t = u_x^2 + u_{xx}$ در دستگاه فوق داریم:

$$\begin{aligned}
\phi_t - \xi^1_t u_x + (\phi_u - \xi^2_t)u_t - \xi^1_u u_x u_t - \xi^2_u u_t^2 \;&= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi^1_{xx})u_x - \xi^2_{xx}u_t \\
&+(\phi_{uu} - 2\xi^1_{xu})u_t - (\phi_{uu} - 2\xi^1_{xu})u_{xx} \\
&-2\xi^2_{xu}u_x u_t - \xi^1_{uu}u_x^3 - \xi^2_{uu}u_t^2 + \xi^2_{uu}u_t u_{xx} \\
&+(\phi_u - 2\xi^1_x)u_{xx} - 2\xi^2_x u_{xt} - 3\xi^1_u u_x u_{xx} \\
&-\xi^2_u u_t u_{xx} - 2\xi^2_u u_x u_{xt} + 2\phi_x u_x \\
&+2(\phi_u - \xi^1_x)u_t - 2(\phi_u - \xi^1_x)u_{xx} \\
&-2\xi^2_x u_t u_x - 2\xi^1_u u_x^3 - 2\xi^2_u u_t^2 + 2\xi^2_u u_t u_{xx},
\end{aligned}$$

حال با مساوی قرار دادن ضرایب مشتقات تابع $u$ در دو طرف تساوی بالا به جدول زیر می‌رسیم:

| | ضرایب | | تک جمله‌ای‌ها |
|---|---|---|---|
| (۱) | $\phi_{xx}$ | $= \phi_t$ | ۱ |
| (۲) | $2\phi_{xu} - \xi^1_{xx} + 2\phi_x$ | $= -\xi^1_t$ | $u_x$ |
| (۳) | $\xi^2_{xx} + \phi_{uu} - 2\xi^1_{xu} + 2\phi_u - 2\xi^1_x$ | $= \phi_u - \xi^2_t$ | $u_t$ |
| (۴) | $-2\xi^2_{xu} - 2\xi^2_x$ | $= \xi^1_u$ | $u_x u_t$ |
| (۵) | $-\xi^2_{uu} - 2\xi^2_u$ | $= \xi^2_u$ | $u_t^2$ |
| (۶) | $2\xi^1_{xu} - \phi_{uu} + \phi_u - 2\xi^1_x - 2\phi_u + 2\xi^1_x$ | $= 0$ | $u_{xx}$ |
| (۷) | $\xi^1_{uu} - 2\xi^1_u$ | $= 0$ | $u_x^3$ |
| (۸) | $\xi^2_{uu} - \xi^2_u - 2\xi^2_u$ | $= 0$ | $u_t u_{xx}$ |
| (۹) | $-2\xi^2_x$ | $= 0$ | $u_{xt}$ |
| (۱۰) | $-3\xi^1_u$ | $= 0$ | $u_x u_{xx}$ |
| (۱۱) | $-2\xi^2_u$ | $= 0$ | $u_x u_{xt}$ |

از معادله‌ی (۹) و (۱۱) مشخص می‌شود که $\xi^2$ نسبت به $x$ و $u$ مستقل است. هم‌چنین از معادله‌ی (۱۰) مشخص می‌شود که $\xi^1$ نسبت به $u$ مستقل است. از معادله‌ی (۶) نتیجه می‌شود $\phi_u = -\phi_{uu}$ بنابراین $\phi = \alpha(x,t)e^{-u} + \beta(x,t)$. سپس از معادله‌ی (۳) نتیجه می‌شود که $\xi^2_t = 2\xi^1_x$ لذا $\xi^1$ نسبت به $x$ از درجه اول است یعنی $\xi^1_{xx} = 0$. از این‌رو با توجه به معادله‌ی (۲) نتیجه می‌شود $\xi^1_t = -2\phi_{xu} - 2\phi_x$ و در این صورت:

$$\xi^1_t = -2\phi_{xu} - 2\phi_x = -2\beta_x \Rightarrow \beta = -\tfrac{1}{8}\xi^2_{tt}x^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_t x + \rho\,(t)\,,$$

و $\phi_t = \phi_{xx}$. بنابرایت داریم:

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= c_1 + c_4 x + 2c_5 + 4c_6 xt, \\
\xi^2 &= c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2, \\
\phi &= \alpha(x,t)e^{-u} + c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2,
\end{aligned}$$

که $c_1, \dots, c_6$ ثابت‌هایی دلخواه هستند و $\alpha(x,t)$ جواب دلخواهی از معادله حرارت $\alpha_t = \alpha_{xx}$ است. بنابراین فضای جبر لی تقارن‌ها توسط بردارهای زیر تولید می‌شود:

$$\begin{aligned} &X_1 = \partial_x, && X_2 = \partial_t, \\ &X_3 = \partial_u, && X_4 = x\partial_x + 2t\partial_t, \\ &X_5 = 2t\partial_x - x\partial_u, && X_6 = 4tx\partial_x + 4t^2 - (x^2+2t)\partial_u, \\ &X_\alpha = \alpha(x,t)e^{-u}\partial_u. \end{aligned}$$

در نهایت با محاسبه تابع نمایی نظیر این میدان‌های برداری داریم:

$$\begin{aligned} g_1 &:= \exp(\varepsilon X_1)(x,t,u) = (x+\varepsilon, t, u), \\ g_2 &:= \exp(\varepsilon X_2)(x,t,u) = (x, t+\varepsilon, u), \\ g_3 &:= \exp(\varepsilon X_3)(x,t,u) = (x, t, u+\varepsilon), \\ g_4 &:= \exp(\varepsilon X_4)(x,t,u) = (e^{\varepsilon}x, e^{2\varepsilon}t, u), \\ g_5 &:= \exp(\varepsilon X_5)(x,t,u) = (x+2\varepsilon t, t, -y\varepsilon^2 - x\varepsilon + u), \\ g_6 &:= \exp(\varepsilon X_6)(x,t,u) = \left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}, u\sqrt{1+4\varepsilon t}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\}\right), \\ g_\alpha &:= \exp(\varepsilon X_\alpha)(x,t,u) = (x, t, u+\varepsilon\alpha(x,t)). \end{aligned}$$

اگر $u = f(x,t)$ یک جواب برای معادله‌ی مذکور باشد و تقارن‌ها را روی آن اثر دهیم، در این صورت یک جواب جدید برای معادله به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u^1 &= f(x-\varepsilon, t), \\ u^2 &= f(x, t-\varepsilon), \\ u^3 &= f(x, t-\varepsilon), \\ u^4 &= f(e^{-\varepsilon}x, e^{-2\varepsilon}t), \\ u^5 &= f(x-2\varepsilon t, t) + \varepsilon x - \varepsilon^2 t, \\ u^6 &= \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\} f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right), \\ u^\alpha &= f(x,t) + +\varepsilon\alpha(x,t). \end{aligned}$$

به‌عنوان مثال بدیهی است که $u = c$ یک جواب از معادله (۸.۱) است. لذا با توجه به $u^6$ یک جواب جدید به شکل $u = \frac{c}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\}$ به‌دست می‌آید.

**مثال ۲.۱.۱.** معادله پخش_واکنش که کاربرد گسترده‌ای در مسائل انتقال آلودگی، مهندسی شیمی و انتقال حرارت دارد به‌صورت زیر معرفی شده است:

$$u_t - u_{xx} = u^3. \tag{۹.۱}$$

این معادله، معادله‌ای غیرخطی و ناتباهیده است که روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ تعریف شده و چون معادله مرتبه دوم است، بنابراین لازم است میدان برداری

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

را که روی $E$ تعریف می‌شود تا مرحله دوم امتداد داده و با استفاده از الگوریتم (۷.۱.۱) تقارن‌ها را بیابیم.

امتداد مرتبه دوم $X$ برابر است با:

$$X^{(2)} = X + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \eta^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

و با استفاده از فرمول (۵.۱) و این‌که مشخصه میدان برداری $X$ ، $Q = \eta - \xi u_x - \tau u_t$ است، ضرایب $X^2$ یعنی $\eta^x, \eta^t, \eta^{xx}, \eta^{xt}, \eta^{tt}$ را در زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
\eta^x &= D_x Q + \xi u_{xx} = \eta_x + (\eta_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \xi_u^2 u - x u_t,\\
\eta^t &= D_t Q + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = \eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2,\\
\eta^{xx} &= D_x^2 Q + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} = \eta_{xx} + (2\eta_{xu} \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2\\
&\quad - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu} u_x^2 u_t + (\eta_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt},\\
\eta^{xt} &= D_x D_t Q + \xi u_{xxt} + \tau u_{xtt} = \eta_{xt} + (\eta_{ut} - \xi_{xt}) u_x + (\eta_{xu} - \tau_{xt}) u_t\\
&\quad - \xi_{ut} u_x^2 - \tau_{xu} u_t^2 + (\eta_{uu} - \xi_{xu} - \xi_{ut}) u_x u_t - \xi_{uu} u_x^2 u_t - \tau_{uu} u_x u_t^2 - \xi_t u_{xx}\\
&\quad + (\eta_u - \xi_x - \tau_t) u_{xt} - \xi_u u_{xx} u_t - 2\xi_u u_x u_{xt} - 2\tau_u u_t u_{xt} - \tau_x u_{tt} - \tau_u u_x u_{tt},\\
\eta^{tt} &= D_t^2 Q + \xi u_{ttt} + \tau u_{xtt} = \eta_{tt} + (2\eta_{ut} - \xi_{tt}) u_t - \xi_{tt} u_x + (\eta_{uu} - 2\tau_{ut}) - 2\xi_{ut} u_x u_t - \tau_{uu} u_t^3\\
&\quad - \xi_{uu} u_x u_t^2 + (\eta_u - 2\tau_t) u_{tt} - 2\xi_t u_{xt} - 3\tau_u u_t u_{tt} - \xi_u u_x u_{tt} - 2\xi_u u_t u_x.
\end{aligned}$$

حال بر اثر $X^{(2)}$ بر معادله پخش‐واکنش داریم:

$$\eta^t - \eta^{xx} = 3u^2 \eta,$$

و با جایگذاری ضرایب امتداد و $u_t - u_{xx} = u^3$ در محک ناوردایی فوق، دستگاه معادلات مشخصه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&u^3 \tau_{uu} - \eta_{uu} + \xi_{xu} = 0,\\
&2\xi_x - u^3 \tau_u + \tau_{xx} - \tau_t = 0,\\
&2u^3 \tau_{xu} - \xi_t - u^3 \xi_u + \xi_{xx} - 2\eta_{xu} = 0,\\
&\eta_t - \eta_{xx} - 3u^2 \eta_u + u^3 \eta_u - u^3 \tau_t - u^6 \tau u + u^3 \tau_{xx} = 0,\\
&\xi_{uu} = 0, \quad \xi_u + \tau_{xu} = 0, \quad \tau_x = 0, \quad \tau_u = 0, \quad \tau_{uu} = 0,
\end{aligned}$$

با حل دستگاه مشخصه ، جبر لی سه بعدی از تقارن‌ها با مولدهای زیر برای معادله پخش‐واکنش (۹.۱) به‌دست می‌آید:

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_t, \qquad X_3 = x\partial_x + 2t\partial_t - u\partial_u.$$

علاوه‌براین، با محاسبه تابع نمایی نظیر این میدان‌های برداری داریم:

$$
\begin{aligned}
g_1 &:= \exp\left(\varepsilon X_1\right)(x,t,u) = \left(x+\varepsilon, t, u\right),\\
g_2 &:= \exp\left(\varepsilon X_2\right)(x,t,u) = \left(x, t+\varepsilon, u\right),\\
g_3 &:= \exp\left(\varepsilon X_3\right)(x,t,u) = \left(e^{\varepsilon}x, e^{2\varepsilon}t, e^{-\varepsilon}u\right).
\end{aligned}
$$

اگر $u = f(x,t)$ یک جواب برای معادله‌ی مذکور باشد و تقارن‌ها را روی آن اثر دهیم، در این صورت یک جواب جدید برای معادله به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
u^1 &= f\left(x-\varepsilon, t\right),\\
u^2 &= f\left(x, t-\varepsilon\right),\\
u^3 &= f\left(e^{-\varepsilon}x, e^{-2\varepsilon}t, e^{\varepsilon}u\right).
\end{aligned}
$$

### ۸.۱.۱ تقارن‌های برخوردی و تقارن‌های مرتبه بالاتر

در ادامه نوعی دیگر از تقارن‌ها معرفی می‌شوند که تعمیمی از تقارن‌های نقطه‌ای هستند. همانطور که می‌دانیم، ضرایب بی‌نهایت کوچک از تقارن‌های نقطه‌ای توابعی فقط از متغیرهای $x$ و $u$ هستند. یک تعمیم طبیعی از مفهوم تقارن نقطه‌ای با وابستگی ضرایب بی‌نهایت کوچک به مشتقات $u$ حاصل می‌شود. در اینجا، مفهوم $P[u]$ نمایانگر $P$ به‌صورت تابعی هموار از $x, u$ و مشتقات $u$ است.

**تعریف ۱۳.۱.۱.** یک میدان برداری تعمیم‌یافته به‌صورت

$$
X = \sum_{j=1}^{p} \xi^j[u]\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{\nu=1}^{q} \eta^{\nu}[u]\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}, \tag{۱۰.۱}
$$

بیان می‌شود به قسمی که توابع $\xi^j$ و $\eta^{\nu}$ توابع هموار هستند.

همانند امتداد یک میدان برداری هموار، امتداد مرتبه $n$ـام یک میدان برداری تعمیم‌یافته $X$ به شکل

$$
X^{(n)} = X + \sum_{\nu=1}^{q}\sum_{1\le|J|\le n} \eta^{\nu}_J[u]\frac{\partial}{\partial u^{\nu}_J},
$$

است به‌طوری‌که ضرایب آن با فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

$$
\eta^{\nu}_J = D_J\left(\eta^{\nu} - \sum_{j=1}^{p}\xi^j u^{\nu}_j\right) + \sum_{j=1}^{p}\xi^j u^{\nu}_{J,j}. \tag{۱۱.۱}
$$

به‌ویژه، امتداد مرتبه بی‌نهایت یک میدان برداری تعمیم‌یافته به‌صورت مجموع بی‌نهایت زیر است

$$
\mathbf{v}^{(\infty)} = \sum_{i=1}^{p}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\nu=0}^{q}\sum_{|J|\ge 1}\eta^{\nu}_J\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_J},
$$

که $\eta^{\alpha}_J$ با فرمول (۱۱.۱) بیان می‌شود.

**قضیه ۱۰.۱.۱.** [۱۵] هرگاه فقط یک متغیر وابسته داشته باشیم، یعنی $q=1$ یک میدان برداری تعمیم‌یافته $X$ مولد بی‌نهایت کوچکی از گروه یک‌ـ پارامتری تبدیلات برخوردی (مرتبه اول) است اگر و تنها اگر توابع $\xi^j[u]=\xi^j(x,u,\partial u)$ و $\eta[u]=\eta(x,u,\partial u)$ در روابط زیر صدق کنند:

$$\frac{\partial \eta[u]}{\partial u^l}-\sum_{j=1}^{p} u_j \frac{\partial \xi^j[u]}{\partial u_l}, \qquad l=1,\dots,p.$$

**تعریف ۱۴.۱.۱.** میدان برداری تعمیم‌یافته $X$ یک تقارن بی‌نهایت کوچک مرتبه بالاتر برای دستگاه معادلات

$$\Delta_\sigma[u]=0, \quad \sigma=1,\dots,N,$$

است، اگر و تنها اگر رابطه

$$X^{(\infty)}(\Delta_\sigma)[u]=0, \quad \sigma=1,\dots,N,$$

روی فضای جواب دستگاه معادلات $\Delta_\sigma[u]=0$ برقرار باشد. به‌ویژه، برای $q=1$، هرگاه $X$ مولد بی‌نهایت کوچک یک گروه یک‌ـ پارامتری از تبدیلات برخوردی باشد، $X$ را تقارن بی‌نهایت کوچک برخوردی نامند.

یک تقارن موضعی، یک تقارن نقطه‌ای، برخوردی یا مرتبه بالاتر است. حال به معرفی میدان برداری تعمیم‌یافته با $\xi^j[u]=0$ می‌پردازیم.

**تعریف ۱۵.۱.۱.** میدان برداری تعمیم‌یافته

$$X_Q=\sum_{\nu=1}^{q} Q^\nu[u]\frac{\partial}{\partial u^\nu}, \tag{۱۲.۱}$$

را یک میدان برداری تعمیم یافته تکاملی و توابع هموار دیفرانسیل‌پذیر $Q[u]=(Q_1[u],\cdots,Q_q[u])$ را مشخصهٔ آن می‌نامند.

هر میدان برداری تعمیم‌یافته $X$ (۱۰.۱) یک نمایش تکاملی به‌صورت $X_Q$ دارد که مشخصه $Q$ به‌صورت

$$Q[u]=\left(Q^1[u],\dots,Q^q[u]\right)=\left(\eta^1-\sum_{j=1}^{p}\xi^j u_j^1,\dots,\eta^q-\sum_{j=1}^{p}\xi^j u_j^q\right),$$

بیان می‌گردد.

گروه یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای زیر

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\exp(\varepsilon X)\,x,\\ \bar{u}&=\exp(\varepsilon X)\,u,\end{aligned} \tag{۱۳.۱}$$

با مولد بی‌نهایت کوچک

$$X=\sum_{j=1}^{p}\xi^j(x,u)\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{\nu=1}^{q}\eta^\nu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\nu},$$

در نظر بگیرید، که در آن $x=(x^1,\ldots,x^p)$ و $u=(u^1,\ldots,u^q)$. همچنین $u=f(x)$ رویه‌ای در فضای $\mathcal{X}\times\mathcal{U}$ باشد. رویه $u=f(x)$ به خانواده‌ای از رویه‌های $u=g(x;\varepsilon)$ در فضای $\mathcal{X}\times\mathcal{U}$ تحت گروه یک‌ـپارامتری از تبدیلات نقطه‌ای $\exp(\varepsilon X)$ تصویر می‌شود. روابط (۱۳.۱) را طبق خاصیت گروه یک‌ـپارامتری تبدیلات می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned}x&=\exp(-\varepsilon X)\,\bar{x}=\bar{x}-\varepsilon\xi(\bar{x},f(\bar{x}))+O(\varepsilon^2),\\ u&=\exp(-\varepsilon X)\,\bar{u}=\bar{u}-\varepsilon\eta(\bar{x},f(\bar{x}))+O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{۱۴.۱}$$

که در آن $\xi=(\xi^1,\ldots,\xi^p)$ و $\eta=(\eta^1,\ldots,\eta^q)$. اکنون با قراردادن $u=f(x)$ در (۱۴.۱) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\bar{u}-\varepsilon\eta(\bar{x},f(\bar{x}))+O(\varepsilon^2)&=f\left(\bar{x}-\varepsilon\xi(\bar{x},f(\bar{x}))+O(\varepsilon^2)\right)\\ &=f(\bar{x})-\varepsilon\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\xi^j(\bar{x},f(\bar{x}))+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

درنتیجه داریم:

$$\bar{u}=f(\bar{x})+\left(\eta(\bar{x},f(\bar{x}))-\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial\bar{x}^j}\xi^j(\bar{x},f(\bar{x}))\right)\varepsilon+O(\varepsilon^2).\tag{۱۵.۱}$$

با جایگذاری $x$ و $u$ به جای $\bar{x}$ و $\bar{u}$ در (۱۵.۱) تصویر تبدیل خانوادهٔ رویه‌های $u=g(x;\varepsilon)$ حاصل می‌شود. حال آن دسته از رویه‌هایی را در نظر بگیرید که تحت این تبدیل متغیرهای مستقل آن‌ها ناوردا باقی می‌مانند به این معنا که

$$\begin{aligned}&\bar{x}^j=x^j,\qquad j=1,\ldots,p,\\ &\bar{u}^\nu=u^\nu+\varepsilon\Big[\eta^\nu(x,u)-\sum_{k=1}^{p}u_k^\nu\xi^k(x,u)\Big]+O(\varepsilon^2),\qquad \nu=1,\ldots,q.\end{aligned}$$

بنابر این مولد بی‌نهایت کوچک نظیر تبدیل فوق به شکل

$$\hat{X}=\sum_{\nu=1}^{q}\Big[\eta^\nu(x,u)-\sum_{j=1}^{p}u_j^\nu\xi^j(x,u)\Big]\frac{\partial}{\partial u^\nu},$$

نوشته می‌شود. مولد بی‌نهایت کوچک $X$ و صورت تکاملی آن $\hat{X}$ دارای عملکرد یکسان روی رویه‌ها هستند. در حالت کلی میدان برداری تعمیم‌یافته و صورت تکاملی آن در آنالیز تقارن هم‌ارز هستند.

امتداد مرتبه بی‌نهایت میدان برداری (۱۲.۱) با رابطه

$$X_Q = \sum_{\nu,J} D_J Q^\nu \frac{\partial}{\partial u_J^\nu},$$

بیان می‌شوند. هرگاه مشخصهٔ یک میدان برداری تعمیم‌یافته به‌صورت

$$Q^\nu = \eta^\nu - \sum_{j=1}^{p} \xi^j u_j^\nu, \quad \nu = 1, \ldots, q,$$

بیان شود، آنگاه برای چنین میدان برداری تعمیم‌یافته‌ای می‌توان یک نمایش تکاملی به دست آورد. این مطلب در لم زیر آورده شده است.

**لم ۲.۱.۱.** یک میدان برداری تعمیم‌یافته یک تقارن بی‌نهایت کوچک دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ است اگر و تنها اگر صورت تکاملی آن $\hat{X} = X_Q$ تقارن بی‌نهایت کوچک دستگاه معادلات باشد.

الگوریتم لی تقارن‌های نقطه‌ای، قابل تعمیم به الگوریتمی جهت یافتن تقارن‌های موضعی دستگاه معادلات است. ابتدا باید تقارن مورد نظر را به حالت تکاملی آن تبدیل کرد زیرا این امر به کاهش تعداد توابع مجهول از $p+q$ به $q$ کمک می‌کند. سپس امتداد بی‌نهایت کوچک آن را روی دستگاه معادلات اثر می‌دهیم. نتایج دیفرانسیلی دستگاه معادلات در حذف وابستگی بین مشتقات $u$ لازم است.

## ۲.۱ جواب‌های متشابه و روش کاهش دادن یک دستگاه معادلات

اولین مزیت مهم روش تقارن ساختن جواب‌های جدید از جواب‌های شناخته شده نظیر یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل می باشد. در حقیقت، رویه‌های ناوردای نظیر یک گروه لی از تبدیلات نقطه‌ای متناظر با یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل، منجر به پیدایش جواب‌های ناوردای گروهی خواهد شد. به منظور کاهش یک دستگاه معادلات می‌بایست به جستجوی دستگاه مختصات خاصی بپردازیم که منجر به کاهش دستگاه معادلات می‌گردد. این دستگاه مختصات، با یافتن ناورداهای مستقل نظیر مولدهای بی‌نهایت کوچک تقارنی ساخته خواهد شد. در نهایت، با به کارگیری قاعده زنجیره‌ای و بازنویسی معادله مورد مطالعه در دستگاه مختصات جدید، معادله کاهش‌یافته متناظر نتیجه می‌شود. در ادامه مراحل یافتن جواب‌های متشابه و کاهش معادلات با مثال توضیح می‌دهیم.

**مثال ۱.۲.۱.** دربخش قبل مشاهده شد که معادله برگر دارای تقارن تجانس به صورت

$$X = x\partial_x + 2t\partial_t,$$

است. به ازای مولد تقارنی $X$ دستگاه معادلات مشخصه متناظر عبارت است از:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = \frac{du}{0}.$$

در نتیجه، با حل معادله فوق ناورداهای حاصل شده عبارتند از:

$$y = \frac{x}{\sqrt{t}}, \qquad v\left(y\right) = u\left(x, t\right).$$

با توجه به آخرین ناوردا و به کارگیری قاعده مشتق زنجیره ای، داریم:

$$u_x = \frac{v_y}{\sqrt{t}}, \qquad u_{xx} = \frac{v_{yy}}{t}, \qquad u_t = -\frac{x}{2\sqrt{t^3}} v_y. \tag{۱۶.۱}$$

اکنون با جایگذاری (۱۶.۱) در معادله اصلی (۸.۱) معادله دیفرانسیل معمولی زیر نتیجه می‌شود:

$$2v_{yy} + yv_y + 2v_y^2 = 0,$$

که حل معادله فوق، جوابی به‌صورت

$$v\left(y\right) = \ln\left(C_1\sqrt{\pi}\mathrm{erf}\left(\frac{y}{2} + C_2\right)\right),$$

دارد که در آن $\mathrm{erf}\left(x\right) = 1/\sqrt{\pi}\int_0^x e^{\left(-t^2\right)}dt$ تابع خطا برای مقادیر مختلط $x$ است. با برگرداندن به متغیر اصلی، جواب دقیق

$$u\left(x, t\right) = \ln\left(C_1\sqrt{\pi}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + C_2\right)\right),$$

برای معادله (۸.۱) به‌دست می‌آید.

## ۳.۱ تبدیلات هم‌ارز

در این بخش به یکی از تبدیلات مهم در رده‌بندی گروه‌های لی اشاره می کنیم که از دستاوردهای جدید نظریه تقارن است که برای تعیین تقارن‌های نقطه‌ای بیشتر و نیز دسته‌بندی دستگاه‌های معادلات بسیار موثر عمل می کند. هرگاه دستگاه معادلات دیفرانسیل (۷.۱) شامل عناصر دلخواه ( پارامترها و یا توابع دلخواه ) باشد، تبدیلات خاصی از دستگاه وجود دارند که بر فضای گسترش‌یافته از متغیرهای مستقل، توابع، مشتق‌های آن‌ها و دستگاه اصلی مورد بحث تعریف می گردند و ساختار دیفرانسیلی معادلات در دستگاه را حفظ می کنند یعنی هر معادله را به یک معادله از همان فرم می‌نگارند. دو روش برای محاسبه تبدیلات هم‌ارز وجود دارد، روش مستقیم توسط لی [۷۲] و روش بی‌نهایت کوچک لی توسط اوزیانکوف [۱۰۰] معرفی شده است جزییات و مثال‌هایی از هر دو روش در مرجع [۵۲] یافت می‌شود.

خانواده $\mathcal{F}_K$ از دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta\{x, u; K\}$ را در نظر می گیریم

$$\Delta_\sigma\left(x, u^{(n)}, K\right) = 0, \qquad \sigma = 1, \ldots, N, \tag{۱۷.۱}$$

که علاوه‌بر متغیرهای مستقل $x$ و وابسته $u$، $r$ عنصر دلخواه (تابع و یا پارامتر) $K = (K_1, \ldots, K_r)$ شامل می‌شود. توابع تشکیل‌دهنده، توابع هموار از متغیرهای مستقل و یا وابسته و یا مشتقات متغیرهای وابسته یا ترکیبی از آن‌ها در نظر گرفته می‌شوند.

در حالت کلی تبدیلات هم‌ارز خانواده معادلات دیفرانسیل $\mathcal{F}_K$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

**تعریف ۱.۳.۱.** منظور از تبدیل هم‌ارز برای خانواده معادلات (۱۷.۱) تغییری از متغیرها و عناصر دلخواه $(x, u, K) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{u}, \bar{K})$ که هر دستگاه معادله به‌صورت $\Delta\{x, u; K\} \in \mathcal{F}_K$ به دستگاه معادله $\Delta\{\bar{x}, \bar{u}; \bar{K}\} \in \mathcal{F}_K$ از همان خانواده می نگارد.

گروه تشکیل‌شده از تمام تبدیلات هم‌ارز یک خانواده مفروض از معادلات دیفرانسیل را گروه هم‌ارزی نامند.

**تعریف ۲.۳.۱.** یک گروه لی یک‌ـ‌پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای هم‌ارز خانواده $\mathcal{F}_K$ از دستگاه معادلات (۱۷.۱)، گروه لی یک‌ـ‌پارامتری از تبدیلات است که بر فضای $(x, u, K)$ به‌صورت زیر عمل می کند:

$$\begin{aligned}
(\bar{x})^j &= f^j(x, u; \varepsilon) = x^j + \varepsilon\xi^j(x, u) + O\left(\varepsilon^2\right), \quad j = 1, \ldots, p, \\
(\bar{u})^\nu &= g^\nu(x, u; \varepsilon) = u^\nu + \varepsilon\eta^\nu(x, u) + O\left(\varepsilon^2\right), \quad \nu = 1, \ldots, q, \\
\left(\bar{K}\right)^l &= h^l(Q; \varepsilon) = K^l + \varepsilon\kappa^l(Q) + O\left(\varepsilon^2\right), \quad l = 1, \ldots, r,
\end{aligned} \tag{۱۸.۱}$$

به قسمی که که هر دستگاه معادله به‌صورت $\Delta\{x, u; K\} \in \mathcal{F}_K$ به دستگاه معادله $\Delta\{\bar{x}, \bar{u}; \bar{K}\} \in \mathcal{F}_K$ از همان خانواده می نگارد.

در فرمول (۱۸.۱) عوامل $Q^l$ نظیر تبدیلات $h^l$ و مؤلفه میدان برداری $\kappa^l$ به ماهیت عناصر دلخواه $K^l$ وابسته است. به‌ویژه اگر $K^l$ پارامتری ثابت باشد، $Q^l$ مجموعه‌ای از تمام پارامترهای ثابت خانواده معادلات (۱۷.۱) است. در صورتی که $K^l$ تابع دلخواه باشد، $Q^l$ می‌تواند متغیرهای مستقل و یا وابسته تشکیل دهنده $K^l$ وابسته باشد و به طور مشابه سایر توابع تشکیل‌دهنده با وابستگی موافق ظاهر خواهند شد. تبدیلات از $x$ و $u$ هیچ عنصر دلخواهی را شامل نمی‌شود. مولدهای هم‌ارز به‌صورت زیر معرفی می‌شوند

$$X = \xi^j(x, u)\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^\nu(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\nu} + \kappa^l\left(x, u^{(n)}, K\right)\frac{\partial}{\partial K^l}.$$

یک رویکرد کلی برای تعمیم گروه لی یک‌ـ‌پارامتری تبدیلات هم‌ارز نقطه‌ای (۱۸.۱) به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned}
(\bar{x})^j &= f^j[x, u, K], \quad j = 1, \ldots, p, \\
(\bar{u})^\nu &= g^\nu[x, u, K], \quad \nu = 1, \ldots, q, \\
\left(\bar{K}\right)^l &= h^l[x, u, K], \quad l = 1, \ldots, r,
\end{aligned} \tag{۱۹.۱}$$

که هر دستگاه معادلات دیفرانسیل از خانواده $\mathcal{F}_K$ به دستگاه معادلات در همان خانواده می‌نگارد. در حالت کلی تبدیلات (۱۹.۱) نقطه‌ای و یا موضعی نباشد؛ مفهوم براکت در (۱۹.۱) به موضعی یا غیرموضعی بودن مؤلفه‌های تبدیل روی فضای متغیرهای مستقل، وابسته، عناصر دلخواه و همچنین مشتقات متغیرهای وابسته اشاره دارد. مولدهای هم‌ارز تعمیم‌یافته به‌صورت زیر معرفی می‌شوند

$$X = \xi^j\left(x,u,K\right)\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^\nu\left(x,u,K\right)\frac{\partial}{\partial u^\nu} + \kappa^l\left(x,u^{(n)},K\right)\frac{\partial}{\partial K^l}.$$

برای یافتن تقارن‌های هم‌ارز مشابه روش تقارن‌های نقطه‌ای (یعنی با استفاده از الگوریتم لی) مساله را تا یافتن همه تقارن‌های هم‌ارز ادامه می‌دهیم. پس از آن روش رده‌بندی گروه‌های لی برای رده‌بندی زیرگروه‌های لی و در نتیجه دسته‌بندی معادلات دستگاه موردنظر استفاده می‌نماییم.

## ۴.۱ حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

حسابان کسری نامی است برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه دلخواه که تعمیمی برای مشتق و انتگرال از مرتبه صحیح است. از آنجاکه قدمت این مفاهیم کسری به اواخر قرن هفدهم میلادی بر می‌گردد لذا بر شمردن این شاخه از ریاضیات به عنوان یک موضوع جدید مطلقاً اشتباه است. در تاریخ سی‌ام سپتامبر ۱۶۹۵ هوپیتال[1] به لایب‌نیتز[2] نامه‌ای در مورد مشتق‌گیری از مرتبه $n = 1/2$ نوشت. لایبنیتس در پاسخ به او نوشت: « این موضوع منجر به تناقض می‌شود، اما بعد ها نتایج مفیدی از آن به دست خواهد آمد.» و این تولد حسابان کسری بود. لایبنیتز مکاتباتی هم با برنولی [3] و والیس[4] در رابطه با مشتقات با نمای کسری داشته است. تا کنون اشخاص زیادی در زمینه‌ی حسابان کسری به فعالیت پرداخته‌اند که از آن جمله می‌توان به لاپلاس (۱۸۱۲)، فوریه [5] (۱۸۲۲)، آبل [6] (۱۸۲۳ـ۱۸۲۶)، ریمن [7] (۱۸۴۷)، لیوویل [8] (۱۸۳۲ـ۱۸۷۳)، گرونوالد[9](۱۸۷۲ـ۱۸۶۷)، ویل [10] (۱۹۱۷)، ریس [11] (۱۹۴۹) و ... اشاره کرد. با پیشرفت روزافزون این علم به‌تدریج تعاریف گوناگونی هم برای مشتق‌ها و انتگرال‌های مرتبه کسری ارائه شد که از این جمله می‌توان به مشتق و انتگرال گرونوالدـلتنیکوف [12] ، کاپوتو [13] ، ریمنـلیوویل، میلر [14] و راس [15] ... اشاره نمود.

این بخش را با معرفی توابع خاصی که در محاسبات کسری نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند آغاز می‌کنیم. سپس به بیان تعاریف و ویژگی‌های مشتقات کسری ریمنـلیوویل، کاپوتو و معرفی عملگر کسری اردلیـکوبر خواهیم پرداخت. در آخر روش زیر فضا ناوردا در یافتن جواب‌های

[1] Guillaume L'Hôpital
[2] Gottfried W. Leibniz
[3] Nicolaus Bernoulli
[4] John Wallis
[5] Joseph Fourier
[6] Niels H. Abel
[7] Bernhard Riemann
[8] Joseph Liouville
[9] Anton K. Grünwald
[10] Hermann K. H. Weyl
[11] Marcel Riesz
[12] Aleksey V. Letnikov
[13] Michele Caputo
[14] Kenneth S. Miller
[15] Bertram Ross

دقیق این نوع معادلات را معرفی و با ذکر مثال توضیح می‌دهیم. مطالب ذکر شده در این بخش برگرفته از منابع [۱۲، ۸۶، ۹۵، ۱۰۲، ۱۰۶] هستند.

## ۱.۴.۱ توابع پرکاربرد در حسابان کسری

یکی از توابع اساسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری تابع گاما است که تعمیمی از تابع فاکتوریل است.

### تابع گاما

تابع گاما $\Gamma(z)$ با انتگرال $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ تعریف می‌شود که در نیمه راست صفحه مختلط $(\mathcal{R}(z)>0)$ همگرا است. برخی از خواص تابع گاما عبارت است از

۱) با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z}dt=\lim_{t\to\infty}[-e^{-t}t^z]_{t=0}+z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=z\Gamma(z),$$

که $z\in\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,-3,\dots\}$. برای هر $n\in\mathbb{N}$ می‌توان نتیجه گرفت $\Gamma(n+1)=n!$.

۲) با استفاده از خاصیت اول به راحتی می‌توان نشان داد

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\cdots(z+m-1)},\qquad -m<\mathcal{R}(z)<-m+1,$$

که $m\in\mathbb{Z}^+$ و $z\neq\{0,-1,-2,\dots\}$.

۳) نمایش حدی تابع گاما به‌صورت زیر است

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)},\qquad \mathcal{R}(z)>0.$$

۴) فرض کنید که $n$ عدد صحیح نامنفی و $\mathcal{R}(z)>0$ باشد آنگاه

$$\binom{-z}{n}=\frac{\Gamma(1-z)}{n!\Gamma(1-z-n)}=(-1)^n\frac{\Gamma(z+n)}{n!\Gamma(z)}.$$

### تابع میتاگ‌ـ لفلر

همان گونه که می‌دانیم تابع نمایی $e^z$ نقش مهمی در نظریه معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح ایفا می‌کند، صورت تعمیم‌یافته‌ی این تابع نخستین بار توسط ریاضی‌دان سوئدی به نام میتاگ‌ـ لفلر [1] در سال ۱۹۰۵ معرفی شد. تابع میتاگ‌ـ لفلر که نقش مهمی در جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه غیرصحیح دارد، در دو نوع تابع تک پارامتری و دو پارامتری به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\qquad E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\qquad \alpha,\beta>0,\qquad z\in\mathbb{C}.$$

[1] Gösta Mittag-Leffler

چند حالت خاص از تابع دو پارامتری میتاگ‌ـ‌لفلر در زیر بیان شده است

$$E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z,$$
$$E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(k+1\right)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}(2k)!\frac{e^z-1}{z},$$
$$E_{2,1}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cosh(z),$$
$$E_{2,2}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}(2k)!=\frac{\sinh\left(z\right)}{z}.$$

قابل ذکر است که $E_\alpha=E_{\alpha,1}$.

## ۲.۴.۱ انواع مشتق و انتگرال کسری

مفهوم انتگرال مرتبه کسری از اولین مفاهیمی است که در مبحث حسابان کسری درباره آن صحبت می‌شود. تعریف انتگرال مرتبه کسری، در واقع تعمیمی از فرمول کشی [۱] برای محاسبه انتگرال‌های مرتبه صحیح است. از طرف دیگر یکی از مهم‌ترین مفاهیم در سیستم‌های مرتبه کسری، تعریف مشتق است که برخلاف انتگرال مرتبه کسری می‌توان تعریف‌های متفاوتی از آن ارائه نمود. از آن‌جا که هدف ما روش حل معادلات دیفرانسیل کسری با روش آنالیز تقارن لی است تعاریف ریمن‌ـ‌لیوویل و کاپوتو کافی خواهد بود. خواننده علاقمند می‌تواند عملگرهای مشتق کسری دیگر را در کتاب‌های حسابان کسری از جمله [۵۸، ۸۶، ۱۰۲] مطالعه نماید.

### انتگرال و مشتق ریمن‌ـ‌لیوویل

فرض کنید $a\in\mathbb{R}$ و تابع $f\left(t\right)$ پیوسته و در هر بازه متناهی $(a,t)$ انتگرال‌پذیر باشد انتگرال مرتبه $n$ تابع $f\left(t\right)$ طبق فرمول کشی برابر است با

$$\begin{aligned} f^{(-n)}\left(t\right) &= \int_a^t dt_1\int_a^{t_1}dt_2\cdots\int_a^{t_{n-1}}f\left(t_n\right)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t\left(t-\tau\right)^{n-1}f\left(\tau\right)d\tau,\qquad n\in\mathbb{N}. \end{aligned}\tag{۲۰.۱}$$

$f^{(-n)}$ یا $D^{(-n)}$، $n$ بار انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد. از طرفی با توجه به تعریف تابع گاما، (۲۰.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$f^{(-n)}\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(n\right)}\int_a^t\left(t-\tau\right)^{n-1}f\left(\tau\right)d\tau,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

[1] Cauchy

با الهام گرفتن از فرمول کشی و جانشینی عدد حقیقی $\alpha > 0$ به جای عدد صحیح $n$، ${}_aI_t^{\alpha} f(t)$ و ${}_tI_b^{\alpha} f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned}
{}_aI_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \qquad (t > a), \\
{}_tI_b^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \qquad (t < b).
\end{aligned}$$

این انتگرال‌ها به ترتیب انتگرال‌های چپ و راست ریمن ـ لیوویل نامیده می‌شوند.

**تعریف ۱.۴.۱.** برای تابع $f(t)$ که روی بازه $[a,b]$ تعریف می‌شودو $n = [\alpha] + 1$، مشتق کسری چپ و راست ریمن ـ لیوویل نسبت به زمان از مرتبه $\alpha > 0$ به ترتیب این‌گونه تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_aI_t^{n-\alpha} f\right)(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \quad (t > a), \\
{}_tD_b^{\alpha} f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_tI_b^{n-\alpha} f\right)(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \quad (t < b).
\end{aligned}$$

## مشتق کسری ریمن ـ لیوویل تعمیم‌یافته

در این بخش، مفهوم مشتق ریمن ـ لیوویل یک بعدی را به فضای $p$ ـ بعدی $\mathbb{R}^p$ تعمیم می‌دهیم.
ابتدا تابع حقیقی مقدار $p$ ـ متغیره

$$f(x) : [a,b] \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p,\ \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

و $p$ ـ تایی $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}_+^p$ به‌قسمی‌که $(\alpha^j > 0)$ در نظر می‌گیریم، حال به معرفی برخی نمادهای به کار رفته می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}
x^{\alpha} &:= x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p} = \prod_{j=1}^{p} x_j^{\alpha_j}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} := \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_p} = \prod_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_j}, \\
[a,b] &= [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_p,b_p], \qquad a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p, \qquad b = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p, \\
\Gamma(\alpha) &:= \Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_p), \qquad x > a \quad (\forall j = 1, \ldots, p,\ x_j > a_j).
\end{aligned}$$

مشتقات کسری ریمن ـ لیوویل تعمیم‌یافته و مشتقات کسری آمیخته به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

**تعریف ۲.۴.۱.** فرض کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و $x_j \in [a_j, b_j]$ مشتق جزئی $\partial^n f(x) / \partial x_j^n$ برای $n \leqslant [\alpha_j] + 1$ و تابع تعریف شده $f(x)$، انتگرال‌پذیر و پیوسته باشد. مشتق کسری ریمن ـ لیوویل جزئی مرتبه $\alpha_j > 0$ نسبت به $x_j$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_{a_j}D_{x_j}^{\alpha_j} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha_j)} \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} \int_{a_j}^{x_j} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, s_j, x_{j+1}, \ldots, x_p)}{(x_j - s_j)^{1-n+\alpha_j}} ds_j, \qquad (x_j > a_j).$$

**تعریف ۳.۴.۱.** فرض کنید مشتق جزئی آمیخته $\partial^{n_1,\dots,n_p} f\left(x_1,\dots,x_p\right)/\partial x_1^{n_1},\dots,\partial x_p^{n_p}$ به ازای هر $n_j \in \mathbb{N}$ که $n_j \leqslant [\alpha_j]+1$، انتگرال‌پذیر و پیوسته باشد. مشتق کسری ریمن_لیوویل آمیخته برای $\alpha_j > 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} {}_aD_x^{\alpha} f\left(x\right) &= {}_{a_1,\dots,a_p}D_{x_1,\dots,x_p}^{\alpha_1,\dots,\alpha_p} f\left(x_1,\dots,x_p\right) \\ &= \prod_{j=1}^{p} \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha_j\right)} \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_p}^{x_p} \frac{f\left(s_1,\dots,s_p\right)}{\prod_{j=1}^{p}\left(x_j-s_j\right)^{1-n+\alpha_j}} ds_1 \dots ds_p,\ \left(x>a\right). \end{aligned}$$

### مشتق کسری کاپاتو

ایده تعریف مشتق کاپاتو بسیار مشابه با همان ایده‌ای است که در تعریف مشتق ریمن_لیوویل به کار گرفته شد. در این تعریف مانند تعریف ریمن_لیوویل، مشتق بر اساس مفهوم انتگرال مرتبه کسری توسعه پیدا می‌کند. تفاوت این دو تعریف در واقع در توالی عملگرهای مشتق مرتبه صحیح و عملگر انتگرال مرتبه کسری است. در مشتق کسری کاپاتو برعکس مشتق کسری ریمن_لیوویل ابتدا مشتق مرتبه صحیح از تابع گرفته شده و سپس انتگرال‌گیری مرتبه کسری انجام می‌شود.

**تعریف ۴.۴.۱.** برای تابع $f\left(t\right)$ که روی بازه $[a,b]$ تعریف می‌شود و $n=[\alpha]+1$، مشتق کسری چپ و راست کاپوتو نسبت به زمان از مرتبه $\alpha>0$ به ترتیب این‌گونه تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &{}_a^CD_t^{\alpha} f\left(t\right) = {}_aI_t^{n-\alpha}(D_t^n f\left(t\right)) = \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)} \int_a^t \left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1} f^{(n)}\left(\tau\right) d\tau, \\ &{}_t^CD_b^{\alpha} f\left(t\right) = \left(-1\right)^n {}_tI_b^{n-\alpha}\left(D_t^n f\left(t\right)\right) = \frac{\left(-1\right)^n}{\Gamma\left(n-\alpha\right)} \int_t^b \left(\tau-t\right)^{n-\alpha-1} f^{(n)}\left(\tau\right) d\tau. \end{aligned}$$

## ۳.۴.۱ خواص انتگرال و مشتقات کسری

در این بخش برخی از خواص مهم انتگرال و مشتقات ذکر شده در بخش قبل و همچنین قضایای مورد استفاده در این رساله بیان می‌شود.

### خواص مشتق و انتگرال مرتبه کسری ریمن_لیوویل

انتگرال و مشتق مرتبه کسری ریمن_لیوویل عملگر خطی هستند. یعنی برای تمام توابع $f\left(t\right)$ و $g\left(t\right)$ و تمام اسکالرهای حقیقی $\lambda$ و $\gamma$ می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned} &I^{\alpha}(\lambda f\left(t\right)+\gamma g\left(t\right)) = \lambda I^{\alpha} f\left(t\right) + \gamma I^{\alpha} g\left(t\right), \\ &D^{\alpha}(\lambda f\left(t\right)+\gamma g\left(t\right)) = \lambda D^{\alpha} f\left(t\right) + \gamma D^{\alpha} g\left(t\right). \end{aligned}$$

برای انتگرال مرتبه کسری داریم

$$\begin{aligned} &{}_aI_t^{\alpha}\,{}_aI_t^{\beta} f\left(t\right) = {}_aI_t^{\beta}\,{}_aI_t^{\alpha} f\left(t\right) = {}_aI_t^{\alpha+\beta} f\left(t\right),\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \\ &{}_tI_b^{\alpha}\,{}_tI_b^{\beta} f\left(t\right) = {}_tI_b^{\beta}\,{}_tI_b^{\alpha} f\left(t\right) = {}_tI_b^{\alpha+\beta} f\left(t\right),\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}. \end{aligned}$$

این تساوی بدان معناست که عملگر انتگرال مرتبه کسری خواص جمع‌پذیری و جابجایی پذیری را داراست. اما عملگرهای مشتق مرتبه کسری ریمن_لیوویل در حالت کلی جابجایی‌پذیر و جمع‌پذیر نیستند. یعنی تساوی‌های

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{\alpha}({}_aD_t^{\beta}f(t)) &= {}_aD_t^{\beta}({}_aD_t^{\alpha}),\\
{}_aD_t^{\alpha}({}_aD_t^{\beta}f(t)) &= {}_aD_t^{\alpha+\beta}f(t)\,,
\end{aligned}
\tag{۲۱.۱}
$$

در حالت کلی برقرار نیستند. از طرفی با توجه به اینکه

$$
{}_aD_t^{\alpha}({}_aD_t^{\beta}f(t)) = {}_aD_t^{\beta}({}_aD_t^{\alpha}) + \sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(a)\,(t-a)^{-\alpha-\beta+k}}{\Gamma(-\alpha-\beta+k+1)},
$$

می‌توان نشان داد که یک شرط کافی برای برقراری تساوی‌های (۲۱.۱) این است که برای

$$
k=0,1,\ldots,r-1,\qquad r=max\{[\alpha]+1,[\beta]+1\},
$$

داشته باشیم $f^{(k)}(a)=0$.

**قضیه ۱.۴.۱.** [۲۶] عملگر مشتق کسری ریمن_لیوویل از مرتبه $\alpha$ معکوس چپ عملگر انتگرال کسری از همان مرتبه $\alpha$ است. یعنی

$$
{}_aD_t^{\alpha}({}_aI_t^{\alpha}f(t)) = f(t)\,,\qquad {}_tD_b^{\alpha}({}_tI_b^{\alpha}f(t)) = f(t)\,.
$$

اما عملگر مشتق کسری ریمن_لیوویل یک معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن_لیوویل نیست. یعنی

$$
\begin{aligned}
{}_aI_t^{\alpha}({}_aD_t^{\alpha}f(t)) &= f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)},\\
{}_tI_b^{\alpha}({}_tD_b^{\alpha}f(t)) &= f(t) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\left[{}_tD_b^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=b}\frac{(b-t)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}.
\end{aligned}
$$

### قواعد اساسی انتگرال و مشتق مرتبه کسری ریمن_لیوویل

الف_ فرض کنید $\beta\in\mathbb{C}$، $\beta>0$ و $\mathbb{R}\geq 0$، آن‌گاه

$$
\begin{aligned}
{}_aI_t^{\alpha}(t-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha-1},\quad (\mathcal{R}(\alpha)>0)\,,\\
{}_aD_t^{\alpha}(t-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1},\quad (\mathcal{R}(\alpha)\geq 0),
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
{}_tI_b^{\alpha}(b-t)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-t)^{\beta+\alpha-1},\quad (\mathcal{R}(\alpha)>0)\,,\\
{}_tD_b^{\alpha}(b-t)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1},\quad (\mathcal{R}(\alpha)\geq 0).
\end{aligned}
$$

در حالت خاص اگر $\beta = 1$ و $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$، آن‌گاه در حالت کلی مشتق کسری ریمن_لیوویل از تابع ثابت صفر نیست. یعنی

$$ {}_aD_t^{\alpha}1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \qquad {}_tD_b^{\alpha}1 = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

ب_ فرض کنید $c \in \mathbb{R}$، آن‌گاه

$$ \begin{aligned} I^{\alpha}\mathrm{e}^{ct} &= t^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(ct), & {}_aD_t^{\alpha}(\mathrm{e}^{ct}) &= t^{-\alpha}E_{1,1-\alpha}(ct), \\ I^{\alpha}(\sin(ct)) &= ct^{\alpha+1}E_{2,\alpha+2}(-(ct)^2), & {}_aD_t^{\alpha}(\sin(ct)) &= ct^{1-\alpha}E_{2,2-\alpha}((ct)^2), \\ I^{\alpha}(\cos(ct)) &= t^{\alpha+1}E_{2,\alpha+1}(-(ct)^2), & {}_aD_t^{\alpha}(\cos(ct)) &= t^{-\alpha}E_{2,1-\alpha}(-(ct)^2). \end{aligned} $$

## خواص مشتق کسری کاپاتو

مشتق مرتبه کسری کاپاتو یک عملگر خطی است، یعنی برای تمام توابع $f(t)$ و $g(t)$ و تمام اسکالرهای حقیقی $\lambda$ و $\gamma$ می‌توان نشان داد

$$ {}^CD^{\alpha}(\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda {}^CD^{\alpha}f(t) + \gamma {}^CD^{\alpha}g(t). $$

برخلاف مشتق کسری ریمن_لیوویل مشتق کسری کاپاتو از عدد ثابت صفر است، یعنی برای هر عدد ثابت $C$ داریم ${}^CD^{\alpha}C = 0$.

مشتق کسری کاپاتو جابجایی‌پذیر است یعنی

$$ {}_a^CD_t^{m}\,{}_a^CD_t^{\alpha}f(t) = {}_a^CD_t^{\alpha}\,{}_a^CD_t^{m} = {}_a^CD_t^{m+\alpha}\,{}_a^CD_t^{\alpha}f(t), \quad n-1 < \alpha < n, $$

اگر و تنها اگر

$$ f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = n, n+1, \ldots, m). $$

اگر $\alpha > 0$ و $f(t) \in L_p(a,b)$، $(1 \leq p \leq \infty)$، آن‌گاه

$$ {}_a^CD_t^{\alpha}({}_aI_t^{\alpha}f(t)) = f(t), \qquad {}_t^CD_b^{\alpha}({}_tI_b^{\alpha}f(t)) = f(t). $$

این نشان می‌دهد عملگر مشتق کسری کاپوتو معکوس چپ برای عملگر انتگرال کسری ریمن_لیوویل از همان مرتبه است. اما اگر $f \in C^n[0,1]$ آنگاه

$$ \begin{aligned} {}_aI_t^{\alpha}\,{}_a^CD_t^{\alpha}f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \\ {}_tI_b^{\alpha}\,{}_t^CD_b^{\alpha}f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k. \end{aligned} $$

### قواعد اساسی مشتق مرتبه کسری کاپاتو

الف ـ فرض کنید $\beta \in \mathbb{C}$، $\beta > 0$ و $\mathbb{R} \geq 0$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0),\\
{}_t^C D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0),
\end{aligned}$$

ب ـ فرض کنید $c \in \mathbb{R}$ آن‌گاه

$$\begin{aligned}
&{}_a^C D_t^\alpha (\mathrm{e}^{ct}) = c^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(ct),\\
&{}_a^C D_t^\alpha (\sin(ct)) = -\frac{1}{2} i (ic)^n t^{n-\alpha} [E_{1,n-\alpha+1}(ict) - (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-ict)],\\
&{}_a^C D_t^\alpha (\cos(ct)) = \frac{1}{2} (ic)^n t^{n-\alpha} [E_{1,n-\alpha+1}(ict) + (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-ict)].
\end{aligned}$$

### رابطه بین مشتق‌های کسری ریمن ـ لیوویل و کاپاتو

رابطه بین مشتق‌های کسری ریمن ـ لیوویل و کاپاتو به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha f(t) &= {}_a D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{k-\alpha+1} (t-a)^{k-\alpha},\\
{}_t^C D_b^\alpha f(t) &= {}_t D_b^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b^-)}{k-\alpha+1} (b-t)^{k-\alpha}.
\end{aligned}$$

### قاعده لایبنیتز برای مشتق کسری

قاعده لایبنیتز برای مشتقات کسری به‌صورت زیر است:

$${}_a D_t^\alpha [f(t) g(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \mathrm{D}_t^{\alpha-n} f(t)\, \mathrm{D}_t^n g(t).$$

### قاعده زنجیره‌ای برای مشتقات کسری

یکی از نتایج مفید قاعده لایبنیتز برای مشتق کسری از ضرب دو تابع، مشتق کسری از تابع ترکیب است. فرض کنید که $f(t)$ یک تابع ترکیب باشد

$$f(t) = f(g(t)),$$

مشتق کسری مرتبه $\alpha$ـ‌ام از تابع $f(t)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha (f(g(t))) = \frac{t^\alpha f(g(t))}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{k! t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum_{m=1}^{k} (D_g^m f(g(t))_{g=g(t)} \times\\
\times \sum \prod_{r=1}^{k} \frac{1}{a_r!} \left( \frac{(D_t^r g)(t)}{r!} \right)^{a_r}, \qquad (۲۲.۱)
\end{aligned}$$

که $t > 0$ و مجموع $\sum_k$ روی تمام ترکیبات مقادیر متغیر نامنفی $a_1, a_2, \cdots, a_k$ است چنان چه $\sum_{r=1}^{k} r a_r = k$ و نیز $\sum_{r}^{k} a_r = m$ را داریم.

## ۴.۴.۱ تبدیل لاپلاس از مشتقات کسری

این بخش را با معرفی تبدیل لاپلاس آغاز می‌کنیم. تابع $F(s)$ از متغیر مختلط $s$ با تعریف

$$F(s) = L\{f(t) : s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \tag{۲۳.۱}$$

تبدیل لاپلاس از تابع $f(t)$ نامیده می‌شود. برای وجود این انتگرال تابع $f(t)$ باید از مرتبه نمایی $\alpha$ باشد؛ یعنی ثابت‌های مثبت $T$ و $M$ چنان وجود دارند که

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \le M, \quad \forall t > T.$$

به عبارت دیگر تابع $f(t)$ نباید رشد سریع‌تری نسبت به یک تابع نمایی معین زمانی که $t \to \infty$ داشته باشد. تابع اصلی $f(t)$ می‌تواند با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس از $F(s)$ به شکل

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)\, ds, \quad c = Re(s) > c_0, \tag{۲۴.۱}$$

بازیابی شود که $c_0$ در قسمت راست نیم صفحه کاملاً همگرای انتگرال لاپلاس (۲۳.۱) قرار دارد. این تبدیل از دیدگاه ما دارای دو ویژگی مهم است. نخست آنکه تبدیل لاپلاس از ضرب دو تابع برابر با ضرب تبدیل لاپلاس از آن دوتابع است یعنی:

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s)\, G(s).$$

دوم تبدیل لاپلاس از مشتق مرتبه صحیح $n$ـام از تابع $f(t)$ است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$L\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0).$$

### تبدیل لاپلاس از مشتق کسری ریمن‌ـ‌لیوویل

تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمن‌ـ‌لیوویل مرتبه $\alpha$ از تابع $f(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{{}_0D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0}, \quad (n-1 \le \alpha < n). \tag{۲۵.۱}$$

### تبدیل لاپلاس از مشتق کسری کاپوتو

تبدیل لاپلاس از مشتق کسری کاپوتو به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{{}_0^C D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 \le \alpha < n). \tag{۲۶.۱}$$

### ۵.۴.۱ عملگر کسری اردلی_ کوبر

در این بخش به معرفی عملگر انتگرالی اردلی_کوبر و مشتق کسری آن می‌پردازیم که توسط اردلی [1] و کوبر [2] در سال ۱۹۴۰ معرفی شد [۲۹] . این عملگر تعمیمی از انتگرال ریمن_لیوویل و ویل است.

**تعریف ۵.۴.۱.** مشتق کسری اردلی_کوبر چپ $P_\zeta^{\tau,\alpha}$ از مرتبه $\alpha > 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(P_\zeta^{\tau,\alpha} g\right)(z) := \left(\prod_{j=0}^{n-1}\left(\tau + j - \frac{1}{\zeta} z \frac{d}{dz}\right)\right)\left(K_\zeta^{\tau+\alpha, n-\alpha} g\right)(z),$$

$$n = \begin{cases} [\alpha]+1, & \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha, & \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad z>0,\ \zeta>0,\ \alpha>0,$$

که در آن

$$\left(K_\zeta^{\tau,\alpha} g\right)(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_1^\infty g(zs^{\frac{1}{\zeta}})(s-1)^{\alpha-1} s^{-(\tau+\alpha)} ds, & \alpha > 0, \\ g(z), & \alpha = 0 \end{cases}$$

انتگرال کسری اردلی_ کوبر چپ می باشد و مشتق کسری اردلی_ کوبر راست $D_\zeta^{\tau,\beta}$ از مرتبه $\beta > 0$ به‌صورت زیر تعریف می شود:

$$\left(D_\zeta^{\tau,\beta} g\right)(z) := \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\tau + j - \frac{1}{\zeta} z \frac{d}{dz}\right)\right)\left(I_\zeta^{\tau+\beta, n-\beta} g\right)(z),$$

$$n = \begin{cases} [\beta]+1, & \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \beta, & \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad z>0,\ \zeta>0,\ \beta>0,$$

که در آن

$$\left(I_\zeta^{\tau,\beta} g\right)(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} \displaystyle\int_0^1 g(zs^{\frac{1}{\zeta}})(1-s)^{\beta-1} s^{\tau} ds, & \beta > 0, \\ g(z), & \beta = 0 \end{cases}$$

انتگرال کسری اردلی_کوبر راست است.

این عملگرها در نظریه تقلیل معادلات دیفرانسیل جزیی با مرتبه‌های کسری به معادلات دیفرانسیل معمولی با مرتبه‌های کسری کاربرد فراوانی دارند.

[1] Arthur Erdélyi
[2] Hermann Kober

**تعریف ۶.۴.۱.** مشتق کسری اردلی- کوبر چپ تعمیم‌یافته $P_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}^{\zeta,\beta}$ از مرتبه $\beta>0$ و $\zeta\in\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(P_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}^{\zeta,\beta} g\right)(z_1,z_2,z_3) := \prod_{j=0}^{n-1}\left(\zeta + j - \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\delta_i} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right)\left(K_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}^{\zeta+\alpha,n-\beta} g\right)(z_1,z_2,z_3),$$

$$n=\begin{cases}[\alpha]+1, & \alpha\notin\mathbb{N},\\ \alpha, & \alpha\in\mathbb{N},\end{cases}\qquad z_i>0,\ \delta_i>0,\ \alpha>0, \tag{۲۷.۱}$$

که در آن

$$\left(K_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}^{\zeta,\beta} g\right)(z_1,z_2,z_3) := \begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_1^\infty (s-1)^{\beta-1} s^{-(\zeta+\beta)} g\left(z_1 s^{1/\delta_1}, z_2 s^{1/\delta_2}, z_3 s^{1/\delta_3}\right) ds, & \beta>0,\\ g(z_1,z_2,z_3), & \alpha=0\end{cases}$$

عملگر انتگرال کسری اردلی- کوبر چپ تعمیم‌یافته است. همچنین مشتق کسری اردلی- کوبر راست تعمیم‌یافته $D_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}^{\zeta,\beta}$ به‌صورت زیر تعریف می شود:

$$\left(D_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}^{\zeta,\beta} g\right)(z_1,z_2,z_3) := \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\zeta + j + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\delta_i} z_i \frac{d}{dz_i}\right)\right)\left(I_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}^{\zeta+\beta,n-\beta} g\right)(z_1,z_2,z_3),$$

$$n=\begin{cases}[\beta]+1, & \alpha\notin\mathbb{N},\\ \beta, & \alpha\in\mathbb{N},\end{cases}\qquad z_i>0,\ \delta_i>0,\ \beta>0,$$

که در آن

$$\left(I_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}^{\zeta,\beta} g\right)(z_1,z_2,z_3) := \begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} s^{\zeta} f\left(z_1 s^{1/\delta_1}, z_2 s^{1/\delta_2}, z_3 s^{1/\delta_3}\right) ds, & \beta>0,\\ g(z_1,z_2,z_3), & \beta=0\end{cases}$$

انتگرال کسری اردلی- کوبر راست تعمیم‌یافته است [۵۹].

## ۶.۴.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری

همانطور که اشاره شد، معادلات دیفرانسیل کسری عبارت است از معادلات دیفرانسیلی که در آن‌ها عملگر مشتق کسری وجود دارد. در واقع اگر در تمامی معادلات دیفرانسیل با مشتق از مرتبه ی صحیح، مشتق از مرتبه‌ی کسری (ریمن- لیوویل، کاپوتو، ریس،...) جایگزین کنیم، معادلات دیفرانسیل کسری خواهیم داشت لذا طبیعی است که تقسیم‌بندی صورت گرفته برای معادلات دیفرانسیل با مشتق صحیح را به طور مشابه برای معادلات دیفرانسیل کسری نیز داشته باشیم. یعنی زمانی که عملگر مشتق کسری در معادلات دیفرانسیل وجود دارد نیز یک دسته‌بندی کلی به‌صورت زیر داریم.

◄ معادلات دیفرانسیل کسری معمولی:

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی کسری از مرتبه‌های متفاوت به صورت زیر است

$$\Delta\left(x, y, D_x^{\alpha_1} y, D_x^{\alpha_2} y, \ldots, D_x^{\alpha_m} y\right)=0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

که در آن $D_x^{\alpha_i} y$ برای $\alpha_i>0$ $(\alpha_i \notin \mathbb{N})$، معرف مشتق کسری ریمن_لیوویل، کاپوتو، ریس،... و چنانچه $\alpha_i<0$ معرف انتگرال‌های کسری و برای $\alpha_i \in \mathbb{N}$ مشتقات مرتبه صحیح است.

◄ معادلات دیفرانسیل کسری جزئی:

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری به این صورت است:

$$\Delta_\sigma\left(x, u, {}_aD_x^\alpha u, \ldots\right)=0, \qquad \sigma=1, \ldots, N,$$

که شامل $N$ معادله دیفرانسیل با با $p$ ـ متغیر مستقل $x=(x^1, \ldots, x^p)$ و $q$ ـ متغیر وابسته $u=(u^1, \ldots, u^q)$، به‌قسمی که ${}_aD_x^\alpha u$ مجموعه تمام مشتقات کسری به‌صورت زیر باشد:

$${}_{a_1, \ldots, a_p} D_{x_1, \ldots, x_p}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} u^\nu, \quad \nu=1,2, \ldots, q,$$

که در آن $\alpha_j \geq 0$ برای هر $j=1,2, \ldots, p$.

**مثال ۱.۴.۱.** به عنوان مثال معادله دیفرانسیل معمولی با مشتق کسری ریمن_لیوویل به صورت

$${}_aD_x^\alpha y=c x^{\frac{-1}{2} \alpha}+\frac{b}{y}, \quad c, b \in \mathbb{R}-\{0\}, \quad \alpha \in(0,1),$$

در نظر بگیرید که در آن $y=y(x)$ . معادله پرکاربرد فوق حالت خاصی از معادله آبل نوع دوم است که در مطالعه جریان‌های اقیانوسی استفاده می‌شود.

**مثال ۲.۴.۱.** معادله‌ی کلاسیک هدایت گرما با صورت کلی

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k \frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad x \in(0, \infty), t>0,$$

از معادلات نام آشنا در ریاضیات و فیزیک است. در این معادله $u(x,t)$ دما در نقطه $x$ در زمان $t$ و $k$ ضریب ثابت انتشار گرماست که همان سرعت انتقال گرما در یک ماده به خصوص از ناحیه گرم به ناحیه سرد است. همانطور که می‌توان حدس زد این معادله انتشار گرما را در یک ناحیه از یک ماده در طول زمان نشان می‌دهد. تعمیم این معادله بعدها توسط میناردی[1] ارائه شد که در آن مشتق مرتبه صحیح نسبت به زمان با مشتق از مرتبه کسری جایگزین می‌شود:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k \frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad x \in(0, \infty), t>0.$$

[1] Gaspare Mainardi

که در آن $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ نشان دهنده‌ی مشتق کسری ریمن_لیوویل نسبت به زمان از مرتبه $\alpha$ است [۲۷]. این معادله نمونه‌ای از یک معادله دیفرانسیل کسری است.

لازم به ذکر است که هر کدام از این دسته معادلات با توجه به نوع مشتق کسری بکار رفته در آن‌ها به طور مجزا شناخته شده و مورد بررسی قرار می‌گیرند. یعنی بحث در مورد وجود جواب، پیدا کردن جواب معادله دیفرانسیل (تحلیلی یا عددی) با توجه به نوع مشتق کسری موجود در معادله دیفرانسیل انجام می‌گیرد، از آنجا که پرداختن به این موضوعات خارج از بحث اصلی این پایان نامه است لذا فقط خواننده را به [۵۸، ۲۶] ارجاع می‌دهیم.
ترغیب برای افزایش برخی از کاربردهای معادلات دیفرانسیل کسری، توجه قابل ملاحظه‌ای به فراهم کردن روش‌هایی برای یافتن جواب‌های عددی و دقیق این معادلات به خود جلب کرده است که می‌توان به روش تجزیه آدومیان، زیرمعادله کسری، اولین انتگرال، تقریب هموتوپی و غیره [۲۱، ۷۱، ۸۷، ۱۰۲، ۱۱۷] اشاره کرد.
همان‌گونه که ذکر شد تاکنون تعاریف متعددی برای مشتقات کسری ارائه گردیده است اما به علت پیچیدگی این تعاریف، یافتن جواب تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل کسری بسیار دشوار و در اکثر مواقع غیرممکن است.
آنالیز تقارن لی یک نقش اساسی در مطالعه معادلات دیفرانسیل و یافتن جواب‌های دقیق ایفا می‌کند. برخی ریاضیدانان، روش آنالیز تقارن لی را در حل معادلات دیفرانسیل کسری به کار بردند[۳۷، ۳۸، ۳۹] .

## ۵.۱ روش زیرفضا ناوردا

یکی از تکنیک‌های جدید برای ساخت جواب دقیق از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی، روش زیرفضای ناوردا است؛ که برای اولین بار توسط گالاکتینو [۱] [۳۶] مطرح شد تا با تفکیک متغیرها، معادلات غیرخطی به طور دقیق حل شود. مراجع بی‌شماری وجود دارند که به این روش و کاربرد آن‌ها پرداخته‌اند که خواننده جهت آشنایی بهتر می‌تواند به [۳۵، ۳۶، ۸۱، ۱۱۴] مراجعه نماید. اخیرا، کاربرد این روش با معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی توسط گزیزوف و کساتکین [۲] در [۳۹] توضیح داده شده است.
یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی کسری به‌صورت تکاملی

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = F[u] = \left(F^1[u], F^2[u], \ldots, F^q[u]\right)^T, \quad u = \left(u^1, u^2, \ldots, u^q\right)^T, \tag{۲۸.۱}$$

در نظر بگیرید که عملگر $\partial^\alpha/\partial t^\alpha(.)$ مشتق کسری نسبت به زمان در مفهوم کاپوتو باشد، همچنین عملگرهای دیفرانسیلی غیرخطی $F^i[u]$ از مرتبه $m_i$ به‌صورت

$$F^i[u] = F^i\left(x, u^1, \ldots, u^q, \ldots, u^1_{m_i}, \ldots, u^q_{m_i}\right), \qquad 1 \le i \le q,$$

[1] Victor A Galaktionov [2] Alexey A Kasatkin

توابع هموار از متغیرهای $x$، $u^i$ و مشتقات $u^i$ هستند.

فرض کنید $W_{k_1,\dots,k_q}=W_{k_1}^1\times\cdots\times W_{k_q}^q$ یک فضای خطی باشد که در آن زیرفضاهای خطی $k_i$ـ بعدی $W_{k_i}^i$ روی $\mathbb{R}$، توسط $k_i$ تابع مستقل خطی $\{f_j^i\}_{j=1}^{k_i}$ تولید شده باشد؛ یعنی:

$$W_{k_i}^i=\langle f_1^i\left(x\right),\dots,f_{k_i}^i\left(x\right)\rangle\equiv\left\{\sum_{j=1}^{k_i}C_j^i f_j^i\left(x\right)|C_j^i\in\mathbb{R},\ 1\leqslant j\leqslant k_i\right\},\ \forall i.$$

$W_{k_1,\dots,k_q}$ را یک زیرفضای ناوردا تحت عملگرهای دیفرانسیلی برداری $F\left[u\right]$ نامیم هرگاه برای هر $u\in W_{k_1,\dots,k_q}$ داشته باشیم $F\left[u\right]\in W_{k_1,\dots,k_q}$؛ یعنی

$$F^i\left[u\right]\in W_{k_i}^i\qquad\forall u\in W_{k_1,\dots,k_q}.$$

این بدان معناست که توابع $\widehat{F}_j^i$ $(1\leq j\leq k_i)$ چنان موجود است که برای هر $1\leq i\leq q$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$F^i\left[\sum_{j=1}^{k_1}C_j^1 f_j^1\left(x\right),\dots,\sum_{j=1}^{k_q}C_j^q f_j^q\left(x\right)\right]=\sum_{j=1}^{k_i}\widehat{F}_j^i\left(C_1^1,\dots,C_{k_1}^1,\dots,C_1^q,\dots,C_{k_q}^q\right)f_j^i\left(x\right).$$

حال اگر فضای $W_{k_1,\dots,k_q}$ با عملگر دیفرانسیلی برداری $F$ پذیرفته شود، در این‌صورت معادلات تکاملی (۲۸.۱) یک جواب دقیق به‌صورت زیر دارد:

$$u^i=\sum_{j=1}^{k_i}C_j^i f_j^i\left(x\right),\qquad 1\leq i\leq q,$$

اگر و تنها اگر ضرایب $C_j^i\left(t\right)$ در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی کسری زیر صادق باشند:

$$\frac{d^\alpha C_j^i}{dt^\alpha}=\widehat{F}_j^i\left(C_1^1,\dots,C_{k_1}^1,\dots,C_1^q,\dots,C_{k_q}^q\right),\quad 1\leq j\leq k_i,\ 1\leq i\leq q.$$

**مثال ۱.۵.۱.** دستگاه معادلات کسری تعمیم‌یافته جفت شده هیروتا ـ ساتسومای با کورتوگ ـ دو وریس (برای اختصار $Hs-cKdV$ ) عبارتست از:

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha u&=\frac{1}{2}u_{xxx}-2uu_x+3wv_x+3vw_x,\\ \partial_t^\alpha v&=-v_{xxx}+3uv_x,\\ \partial_t^\alpha w&=-w_{xxx}+3uw_x,\end{aligned}\qquad(۲۹.۱)$$

که $\partial_t^\alpha$ نشان‌دهنده مشتق کسری نسبت به زمان از مرتبه $0<\alpha<1$ است و دامنه امواج $u\left(x,t\right),\ v\left(x,t\right)$ و $w\left(x,t\right)$، توابعی از مکان $x$ و زمان $t$ هستند. این دستگاه برهم‌کنش غیرخطی سه موج بلند با روابط پراکندگی مختلف را نشان می‌دهد که می‌تواند در توصیف امواج سطحی آب، پاسخ‌های حلقوی مدل سیال سه لایه‌ای در دینامیک سیالات، امواج یون صوتی در پلاسما و امواج صوتی در یک شبکه بلوری مورد استفاده قرار گیرد [۴۷]. با قرار دادن $\alpha=1$ دستگاه

فوق به دستگاه هیروتا_ساتسوما تعمیم‌یافته شناخته می‌شود که اولین بار توسط وو [۱] معرفی شد. برای دستگاه (۲۹.۱) عملگر غیرخطی $F[u]$ به ازای $\alpha \in (0,1)$ به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} F^1[u,v,w] &= \frac{1}{2}u_{xxx} - 2uu_x + 3wv_x + 3vw_x, \\ F^2[u,v,w] &= -v_{xxx} + 3uv_x, \\ F^3[u,v,w] &= -w_{xxx} + 3uw_x, \end{aligned}$$

که زیرفضای ناوردا $W_{2,2,2} = W_1 \times W_2 \times W_3 = \langle 1,x\rangle \times \langle 1,x\rangle \times \langle 1,x\rangle$ را می‌پذیرد، بنابراین جواب دقیقی از دستگاه (۲۹.۱) به فرم زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A_1(t) + xA_2(t), \\ v(x,t) &= B_1(t) + xB_2(t), \\ w(x,t) &= C_1(t) + xC_2(t). \end{aligned} \quad (۳۰.۱)$$

با جایگذاری جواب فوق در دستگاه (۲۹.۱)، به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی کسری زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^\alpha A_1}{dt^\alpha} = -2A_1A_2 + 3B_2C_1 + 3B_1C_2, \quad \frac{d^\alpha A_2}{dt^\alpha} = -2A_2^2 + 6B_2C_2, \quad (۳۱.۱)$$

$$\frac{d^\alpha B_1}{dt^\alpha} = 3A_1B_2, \quad \frac{d^\alpha C_1}{dt^\alpha} = 3A_1C_2, \quad (۳۲.۱)$$

$$\frac{d^\alpha B_2}{dt^\alpha} = 3A_2B_2, \quad \frac{d^\alpha C_2}{dt^\alpha} = 3A_2C_2. \quad (۳۳.۱)$$

حال به‌منظور یافتن جواب‌های $u(x,t), v(x,t)$ و $w(x,t)$ کافی است هر یک از معادلات دستگاه فوق را حل کنیم. آخرین معادله از (۳۳.۱) به‌صورت

$$A_2(t) = at^\gamma, \qquad B_2(t) = bt^\beta, \qquad C_2(t) = ct^\delta,$$

است که در آن مقادیر حقیقی $a, b$ و $c$ و نماهای $\gamma, \beta, \delta$ با جایگذاری مستقیم در معادلات (۳۳.۱) یافت می‌شوند. از روابط

$$\frac{d^\alpha\left(ct^\delta\right)}{dt^\alpha} = \frac{c\,\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(\delta+1-\alpha)}t^{\delta-\alpha} = 3act^{\gamma+\delta},$$

داریم: $\gamma = -\alpha$ و $a = \frac{\Gamma(1+\delta)}{3\Gamma(\delta+1-\alpha)}$. با جایگذاری $A_2(t)$ در دومین معادله از معادلات (۳۱.۱) روابط زیر حاصل می‌شود:

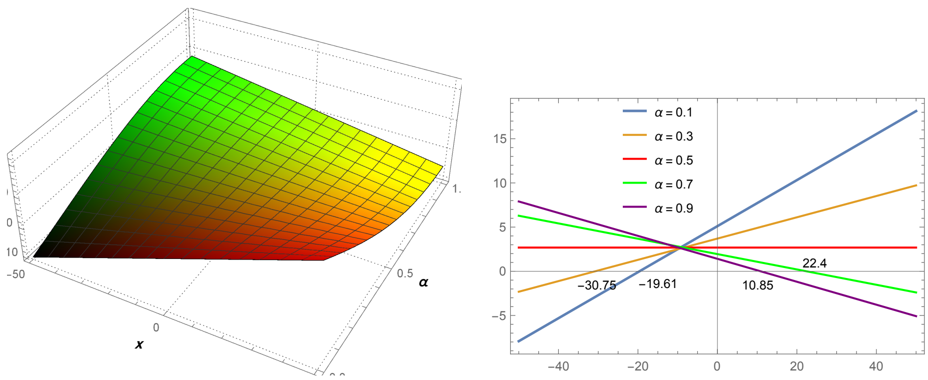
$$A_2(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{3\Gamma(1-2\alpha)}t^{-\alpha}, \quad B_2(t) = \frac{5\Gamma(1-\alpha)}{9\Gamma(1-2\alpha)}t^{-\alpha}, \quad C_2(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{6\Gamma(1-2\alpha)}t^{-\alpha}.$$

با استفاده از رابطه $B_2(t) = \frac{10}{3}C_2(t)$, و انتگرال‌گیری کسری از معادلات (۳۲.۱) با فرض $B_1(0) = C_1(0) = 0$ به‌دست می‌آوریم $B_1(t) = \frac{10}{3}C_1(t)$. حال با جایگذاری $B_2(t), C_2(t)$ و $B_1(t)$ در معادلات (۳۱.۱) داریم:

$$A_1(t) = 6\,t^{-\alpha}, \quad B_1(t) = 10\,t^{-\alpha}, \quad C_1(t) = 3\,t^{-\alpha}.$$

[1] Yongtang Wu

شکل ۱.۱: اثر $\alpha$ روی پروفیل $u(x,t)$ با انتخاب $t=5$.




در نتیجه یک جواب دقیق از دستگاه (۲۹.۱) نظیر (۳۰.۱)، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
u\,(x,t) &= \left(6+\frac{\Gamma\,(1-\alpha)}{3\,\Gamma\,(1-2\alpha)}x\right)t^{-\alpha}\\
v\,(x,t) &= \left(10+\frac{5\,\Gamma\,(1-\alpha)}{9\,\Gamma\,(1-2\alpha)}x\right)t^{-\alpha} \qquad (۳۴.۱)\\
w\,(x,t) &= \left(3+\frac{\Gamma\,(1-\alpha)}{6\,\Gamma\,(1-2\alpha)}x\right)t^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

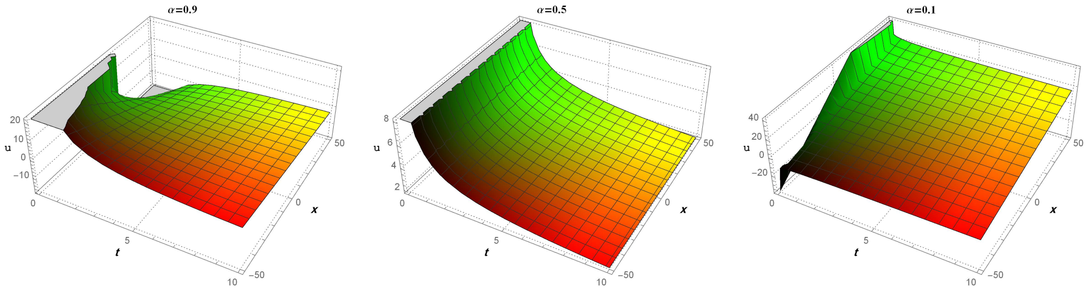
خاطرنشان می‌کنیم که برای $\alpha=1$، ضرایب ظاهرشده در (۳۴.۱) به دلیل نامنفرد بودن ضرایب گاما قابل تعریف نیستند. بنابراین داریم:

$$
\frac{\Gamma\,(1-\alpha)}{\Gamma\,(1-2\alpha)}=\begin{cases} >0, & 0<\alpha<\frac{1}{2},\\ <0, & \frac{1}{2}<\alpha<1.\end{cases}
$$

اگر $\alpha=\frac{1}{2}$ ، آنگاه $A_2(t)\to 0$ و $u(x,t)\to 10\,t^{-\alpha}$ منجر به ضرایب تکین گاما خواهند شد. نتایج مشابه برای توابع $v(x,t)$ و $w(x,t)$ برقرار است. یک نمایش گرافیکی از جواب‌های فوق برای مقادیر متفاوت $\alpha$ در نمودارهای ۱.۱ـ۶.۱ ارائه شده است. نمودار ۱.۱ پروفیل $u(x,t)$ زمانی که $t=5$ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که برای هر $\alpha\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$، بازه‌ای از $x$ وجود دارد که جواب $u$ در این بازه منفی است. برای مثال، زمانی که $\alpha=0.1$ به ازای هر $x$ در بازه $(-\infty,-19.6)$، جواب $u(x,t)$ منفی است.

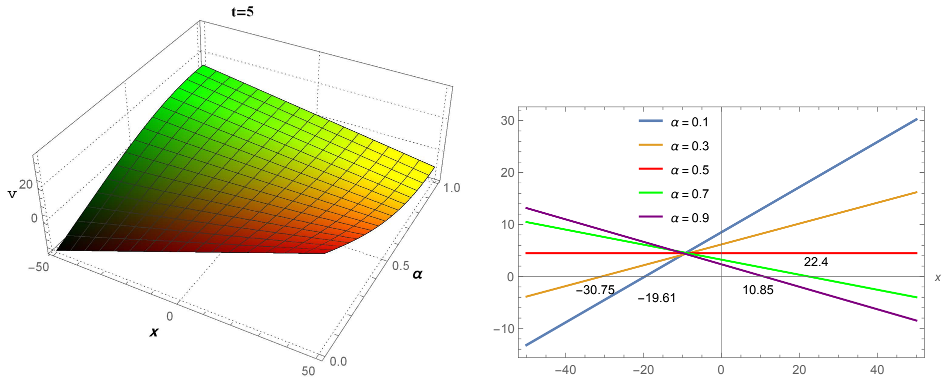
نتایج مشابه برای پروفیل‌های $v(x,t)$ و $w(x,t)$ در نمودارهای ۳.۱ـ۶.۱ مشاهده می‌شود.
لازم به ذکر است که نتایج این بخش در مقاله [۱۰۷] به چاپ رسیده است.

شکل ۲.۱: اثر $\alpha$ روی پروفیل $u(x,t)$.

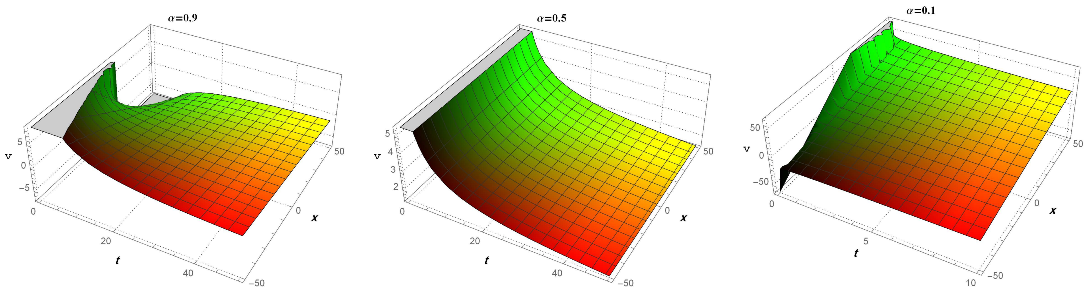



(آ) $\alpha = 0.1$ (ب) $\alpha = 0.5$ (ج) $\alpha = 0.9$

شکل ۳.۱: اثر $\alpha$ روی پروفیل $v(x,t)$ با انتخاب $t = 5$.

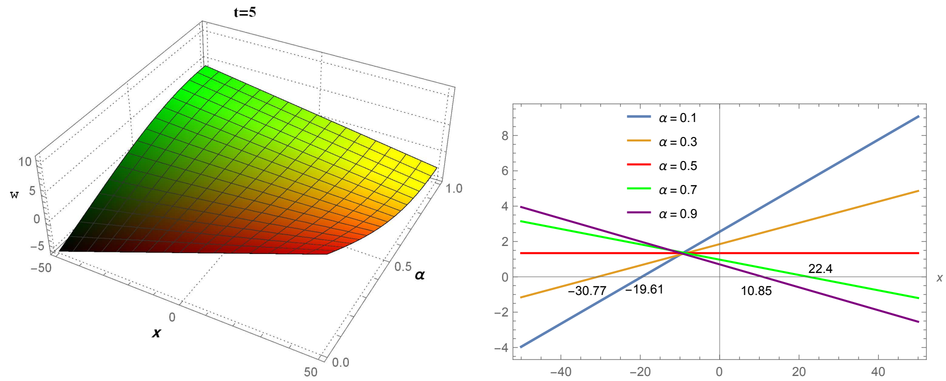



شکل ۴.۱: اثر $\alpha$ روی پروفیل $v(x,t)$.

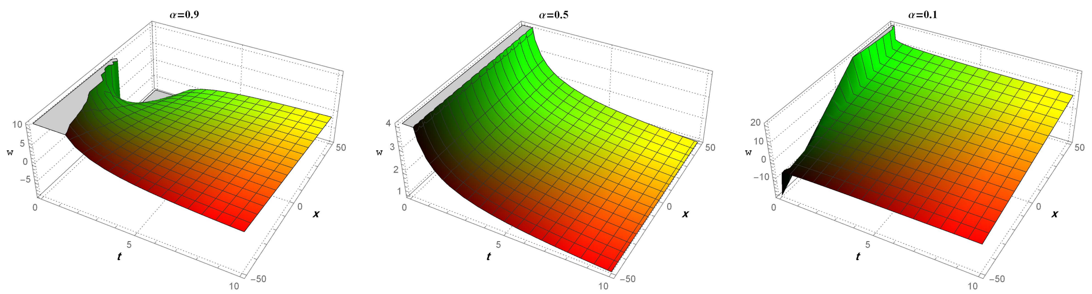



(آ) $\alpha = 0.1$ (ب) $\alpha = 0.5$ (ج) $\alpha = 0.9$

شکل ۵.۱: اثر $\alpha$ روی پروفیل $w(x,t)$ با انتخاب $t=5$.




شکل ۶.۱: اثر $\alpha$ روی پروفیل $w(x,t)$.




(آ) $\alpha = 0.1$ (ب) $\alpha = 0.5$ (ج) $\alpha = 0.9$

# فصل ۲

# قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل

قانون پایستگی (اصل بقا)، به یک کمیت فیزیکی اشاره می‌کند که ثابت می‌ماند و بنابراین حین گذر زمان نوسان نخواهد داشت. مهم‌ترین قانون‌های پایستگی عبارتنداز: پایستگی جرم و انرژی؛ پایستگی تکانه (اندازهٔ حرکت خطی) پایستگی تکانه زاویه‌ای (اندازهٔ حرکت زاویه‌ای) پایستگی بار الکتریکی.

چندین روش برای یافتن قوانین پایستگی در طول دوره‌های مختلف ارائه شده است. ایده محاسبه قوانین پایستگی با استفاده از تعریف قانون پایستگی اولین بار توسط لاپلاس در سال ۱۷۹۸ ارائه شد. قانون پایستگی یک دستگاه PDE، نمایشی به فرم دیورژانس است که روی تمام جوابهای دستگاه PDE صفر می شود. در حالت کلی، هر نمایش دیورژانس غیربدیهی که قانون پایستگی موضعی از دستگاه PDE را نتیجه می‌دهد، از ضرایب موضعی وابسته به متغیرهای مستقل، متغیرهای وابسته و به تعداد متناهی مشتقات متغیرهای وابسته به‌دست می‌آیند. ثابت می‌شود که هر نمایش دیورژانس وابسته به متغیرهای مستقل و وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته توسط عملگرهای اویلر پوچ می‌شود. برعکس، اگر عملگرهای اویلر مربوط به متغیرهای وابسته ظاهر شده در نمایشی شامل متغیرهای مستقل و مشتقات متغیرهای وابسته نمایش را پوچ سازد آنگاه آن نمایش، یک نمایش دیورژانس خواهد بود. بنابراین هر دستگاه PDE دارای قانون پایستگی است اگر و تنها اگر مجموعه ای از ضرایب موضعی موجود باشد که ترکیب خطی آن‌ها با هر PDE در دستگاه توسط عملگرهای اویلر مربوط به هر متغیر وابسته پوچ شود.

بنابراین مساله یافتن قوانین پایستگی دستگاه PDE به مساله یافتن مجموعه‌ای از ضرایب موضعی منتهی می‌شود که ترکیب خطی آن‌ها با هر دستگاه PDE توسط عملگرهای اویلر پوچ می‌شود. به‌علاوه، برای هر مجموعه‌ای از ضرایب موضعی که باعث تولید قانون پایستگی می‌شود یک فرمول انتگرالی برای به‌دست آوردن شار و چگالی‌های قانون پایستگی وجود دارد. اغلب آن‌ها از محاسبه مستقیم بعد از مشخص شدن ضرایب موضعی به‌دست می‌آیند که معمولا از آن به عنوان روش مستقیم برای محاسبه قوانین پایستگی یاد می‌کنند [۱۰، ۱۵].

امی نوتر [1] با تاثیر از کارهای ژاکوبی [2] و کلاین [3] به بررسی و مطالعه ارتباط بین قوانین پایستگی و تقارن‌های دستگاه معادلات پرداخت. در سال ۱۹۱۸ نوتر نشان داد که اگر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل یک اصل تغییراتی (لاگرانژی) را بپذیرد، آنگاه هر گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای که عمل تابعی را پایا نگه دارد یک قانون پایستگی را نتیجه خواهد داد. در حالت خاص، نوتر فرمولی برای شار قوانین پایستگی ارائه نمود. قضیه نوتر در سال ۱۹۲۱ توسط باسل‌ـ هاگن [4] به ناوردایی عمل تابعی تحت یک گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای همراه با یک عبارت دیورژانسی توسیع داده شد [۱۳]. این نتایج به گروه‌های لی از تبدیلات نقطه‌ای در فرم کانونی (یعنی غیرتکاملی) وابسته بود. در سال ۱۹۶۷ بویر [5] قضیه نوتر را به تقارن‌های مراتب بالاتر(لی‌ـ بکلاند) تعمیم داد. تبدیلات مرتبه بالاتر که عمل تابعی را حدود یک عبارت دیورژانسی پایا نگه می‌دارند تقارن‌های تغییراتی (وردشی) نامیده می‌شوند. بنابر روش نوتر، قوانین پایستگی برای دستگاه‌های PDE خودالحاق (که خود معادلات اویلرـ لاگرانژ نظیر یک اصل تغییراتی با لاگرانژي مشخص هستند.) از تقارن‌های تغییراتی حاصل می‌گردند. با این همه کاربرد قضیه نوتر به طرز شدیدی محدود است زیرا طیف وسیعی از دستگاه‌های PDE خودالحاق نیستند. به‌ویژه در مورد دستگاه‌هایی که تعداد معادلات آن‌ها برابر مجهولاتشان نیست (مثل معادلات ماکسول) و یا معادلات دیفرانسیل از مرتبه فرد تقریباً خالی از فایده است، زیرا براي این‌گونه معادلات اساساً تعریف لاگرانژي و مساله تغییراتی نظیر ممکن نیست و این مساله منجر به ارائه کارهای زیادی برای تعمیم قضیه نوتر به دستگاه‌های PDE غیر خودالحاق شد. در این راستا معرفی ساختار جدید جایگزین اصل تغییراتی لازم بود [۱۱، ۲۲، ۸۰].

نیل ابراگیموف، ریاضیدان روس‌تبار سوئدي، در سال‌هاي ۲۰۰۷ و ۲۰۱۱ روش‌هایی به ترتیب تحت عناوین خودالحاقی [۵۳] و شبه خودالحاقی [۵۵] پایه‌گذاری شده روی مفهوم لاگرانژی قراردادی ابداع کرد که بر اساس آن امکان محاسبه قوانین پایستگی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل حتی غیراویلرـ لاگرانژ نیز وجود دارد. به‌طور خلاصه، قضیه ابراگیموف بیان می‌کند که برای هر دستگاه از معادلات دیفرانسیل با این خاصیت که خودالحاق غیرخطی باشد می‌توان قوانین پایستگی موضعی از دستگاه نظیر تقارن‌های دستگاه را با استفاده از لاگرانژی قراردادی محاسبه نمود. با این وجود این روش خالی از ایراد نیست در برخی

[1] Emmy Noether
[2] Carl G. J. Jacobi
[3] Felix C. Klein
[4] Erich Bessel-Hagen
[5] Timothy H. Boyer

مقالات این فرمول منجر به قوانین پایستگی بدیهی شده و گاهی اوقات تمام قوانین پایستگی پذیرفته‌شده با دستگاه معادلات را نتیجه نمی‌دهد [۱۲۰، ۳۲، ۳۴]. در [۲۳] یک مطالعه و مرور جامع از روش‌های متفاوت محاسبه قوانین پایستگی ارائه شده است. در این فصل به معرفی و تحلیل این روش‌ها خواهیم پرداخت.

قوانین پایستگی را می‌توان به عنوان تعابیر ریاضی برای اصول فیزیکی بنیادی از قبیل جرم، اندازه حرکت، بار و انرژی تلقی نمود. قوانین پایستگی در تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نقش عمده‌ای ایفا می کنند؛ که از آن جمله می‌توان به مطالعه وجود، یکتایی و پایداری جواب‌های معادلات غیرخطی اشاره نمود. یک حوزه مهم دیگر از کاربردهای قوانین پایستگی توسعه چشمگیر روش‌های عددی در مطالعه یک دستگاه PDE است که در دهه‌های اخیر با پیشرفت روز افزونی همراه بوده است. و نقش مهمی در نقطه شروع یافتن دستگاه‌های وابسته غیر موضعی و متغیرهای پتانسیلی برعهده دارند.

## ۱.۲ تعاریف مقدماتی

دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی $R(x,u) := \Delta^\sigma[u]$ از مرتبه $k$ با $p$ - متغیر مستقل $x = (x^1,\ldots,x^p)$ و $q$ - متغیر وابسته $u = (u^1,\ldots,u^q)$ به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Delta^\sigma[u] = \Delta^\sigma\left(x,u,\partial u,\ldots,\partial^k u\right) = 0, \qquad \sigma = 1,\ldots,N. \tag{۱.۲}$$

نمادگذاری "$f[u]$" به این معناست که $f$ تابعی از یک یا چند متغیر مستقل $x$، متغیرهای وابسته $u$ و مشتقات متغیرهای وابسته تا یک مرتبه مشخص است، یعنی:

$$f[u] = f\left(x,u,\partial u,\ldots,\partial^l u\right), \quad l \geqslant 0.$$

**تعریف ۱.۱.۲.** یک قانون پایستگی موضعی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی $R(x,u)$ یک عبارت دیورژانسی به صورت

$$\mathrm{div}\Phi[u] = D_i\Phi^i[u]_1\,\Phi^1[u] + \ldots + D_p\Phi^p[u] = 0, \tag{۲.۲}$$

می باشد که برای همه جواب‌های دستگاه (۱.۲) برقرار است. در رابطه (۱.۲)، $D_i$ عملگر مشتق کامل نسبت به متغیرهای مستقل $x_i$ است و $\Phi^i[u] = \Phi^i(x,u,\partial u,\ldots,\partial^r u)$ها را شار قانون پایستگی گویند. همچنین بیشترین مرتبه مشتق $(r)$ که در شار $\Phi^i[u]$ ظاهر می‌شود مرتبه قانون پایستگی نامیده می‌شود.

اگر یکی از متغیرهای مستقل دستگاه PDE متغیر زمان $t$ باشد، در این‌صورت قانون پایستگی به صورت

$$D_t\Psi^t[u] + \mathrm{div}\Phi[u] \equiv 0, \tag{۳.۲}$$

نوشته می‌شود که در آن $\Psi^t[u]$ را چگالی قانون پایستگی و زوج $(\Psi, \Phi^i)$ بردار پایستگی نامند.
با انتگرال‌گیری از قانون پایستگی موضعی (۳.۲) روی دامنه فضای مفروض $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ داریم

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \Psi d^p x = -\int_{\partial\Omega} \Phi^i dA_i \tag{۴.۲}$$

که نشان می‌دهد نرخ تغییر کمیت

$$\mathcal{C}[u] = \int_{\Omega} \Psi d^p x$$

با شار خروجی از مرز دامنه $\partial\Omega$ متعادل می‌شود. در اینجا $dA_i$ المان مساحت در بردار نرمال واحد خارجی روی مرز $\partial\Omega$ است. رابطه (۴.۲) را فرم فراگیر قانون پایستگی نامند.

## قوانین پایستگی بدیهی

دو نوع قانون پایستگی بدیهی تعریف می‌شود:

الف) شارهای قانون پایستگی به‌طور همانی روی فضای جواب پوچ شوند. این نوع بدیهی، بدیهی نوع اول نامیده می‌شود.

ب) قانون پایستگی به‌صورت یک تساوی دیفرانسیلی صفر شود (برای مثال: یک نتیجه دیفرانسیلی $\operatorname{div}(\Phi^i[u]) \equiv 0$ ). این بدیهی نوع دوم نامیده می‌شود.

**تعریف ۲.۱.۲.** قانون پایستگی (۲.۲) یک قانون پایستگی بدیهی برای دستگاه $R(x,u)$ است هرگاه شارهای آن به‌صورت $\Phi^i = M^i + H^i$ باشند به‌طوری‌که $M^i$ روی جواب‌های دستگاه صفر شود (بدیهی نوع اول) و $H^i$ در رابطهٔ $D_i H^i[u] \equiv 0$ صدق کند (بدیهی نوع دوم).

قوانین پایستگی بدیهی اطلاعاتی در مورد دستگاه فراهم نمی‌کنند.

**مثال ۱.۱.۲.** دستگاه PDE

$$\begin{aligned} v_x - u_y &= 0, \\ v_y + u_t + uu_x + u_{xxx} &= 0, \end{aligned}$$

که در آن $u = u(x,y,t)$ و $v = v(x,y,t)$ درنظر می‌گیریم. با حذف متغیر $v$ این دستگاه به معادله کدامتسو [۱] ــ پتویشولی [۲] (KP) تبدیل می‌شود. قانون پایستگی

$$\begin{aligned} &D_t\left(v^2 v_x - v^2 u_y\right) + D_x\left(v_y + u_t + uu_x + u_{xxx} - 4y\right) \\ &+ D_y\left(v_y + u_t + uu_x + u_{xxx} - 4v_x + 4u_y\right) = 0 \end{aligned}$$

به‌طور همانی روی فضای جواب صفر می‌شود و بنابراین یک قانون پایستگی از نوع اول است.
قانون پایستگی

$$D_t(u_x) - D_x(u_t) = 0,$$

یک نتیجه دیفرانسیلی است لذا بدیهی نوع دوم است.

[1] Boris B. Kadomtsev
[2] Vladimir I. Petviashvili

### قانون پایستگی هم‌ارز

**تعریف ۳.۱.۲.** دو قانون پایستگی $D_i\Phi^i = 0$ و $D_i\Psi^i = 0$ را هم‌ارز (معادل) نامند اگر

$$D_i(\Phi^i - \Psi^i) = 0,$$

یک قانون پایستگی بدیهی باشد. یک رده هم‌ارزی از قوانین پایستگی شامل قوانین پایستگی معادل با یک قانون پایستگی غیربدیهی است.

**مثال ۲.۱.۲.** معادله موج خطی

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

یک قانون پایستگی به صورت زیر می‌پذیرد

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) - D_x\left(u_t u_x\right) = 0,$$

که یک قانون پایستگی هم‌ارز آن به صورت زیر است

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + u_x\right) - D_x\left(u_t u_x + u_t\right) = 0.$$

یک مجموعه از $k$ قانون پایستگی $\{\operatorname{div}(\Phi_j[u]) = 0\}_{j=1}^{k}$ مستقل خطی نامند هرگاه یک مجموعه از ثابت‌های غیرصفر $\{a^j\}_{j=1}^{k}$ چنان موجود باشد که ترکیب خطی

$$\operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^{k} a^j \Phi_j[u]\right) = 0,$$

یک قانون پایستگی بدیهی باشد. یک مشتق جزئی $u$ در دستگاه معادلات (۱.۲) مشتق پیشرو نامند هرگاه هیچ نتیجه دیفرانسیلی از آن در دستگاه وجود نداشته باشد.

فرض کنید دستگاه PDE (۱.۲) را بتوان به فرم حل‌شده زیر نوشت:

$$\Delta^\sigma[u] = u^{j_\sigma}_{i_{\sigma,1}\cdots i_{\sigma,s}} - G^\sigma(x, u^{(n)}) = 0, \qquad \sigma = 1, \dots, N, \tag{۵.۲}$$

که $1 \le j_\sigma \le q$ و $1 \le i_{\sigma,1}\cdots i_{\sigma,s} \le p$ به ازای هر $\sigma = 1, \dots, N$. در رابطه (۵.۲)، مجموعه $\{u^{j_\sigma}_{i_{\sigma,1}\cdots i_{\sigma,s}}\}$ شامل $N$ مشتق جزئی پیشرو مستقل خطی از مرتبه $s$ هستند با این خاصیت که هیچ یک از آن‌ها و مشتقات نتیجه شده از آن‌ها در $\{G^\sigma(x, u^{(n)})\}_{\sigma=1}^{N}$ ظاهر نمی‌شوند.

**تعریف ۴.۱.۲.** دستگاه $R(x,u)$ به فرم کوشی‐کوالفسکی نسبت به متغیر مستقل $x^j$ است، اگر دستگاه نسبت به بیشترین مرتبه مشتق هر متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل $x^j$ قابل حل باشد، یعنی

$$\frac{\partial^{s_\sigma}}{\partial (x^j)^{s_\sigma}} u^\sigma = G^\sigma(x, u^{(n)}), \qquad 1 \le s_\sigma \le n,\ \sigma = 1, \dots, q, \tag{۶.۲}$$

که در آن همه مشتق‌ها نسبت به $x^j$ که در سمت راست هر PDE از (۶.۲) ظاهر شده است دارای مرتبه کمتری از مشتق‌های سمت چپ است.

**تعریف ۵.۱.۲.** یک دستگاه معادلات دیفرانسیل $R\left(x,u\right)$ ناتباهیده است اگر بتوان آن‌را در صورت وجود به کمک یک تبدیل نقطه‌ای به فرم کوشی_ کوالفسکی نوشت. باید به این نکته توجه نمود که فرم کوشی_ کوالفسکی از یک دستگاه PDE نسبت به مشتق‌های پیشرو برای تمام متغیرهای وابسته حالت خاصی از دستگاه حل‌شده است. بنابراین یک دستگاه PDE فرم کوشی_ کوالفسکی می‌پذیرد، اگر تعداد متغیرهای وابسته آن با تعداد PDEهای دستگاه، برابر باشد.

در ادامه به بررسی انواع روش‌های مختلف برای یافتن قوانین پایستگی یک دستگاه PDE، خواهیم پرداخت.

## ۲.۲ ضرایب قانون پایستگی

در حالت کلی، برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ناتباهیده (۱.۲)، قانون پایستگی غیربدیهی از ترکیب خطی دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) با ضرایب تابعی خاص (فاکتورها) که عبارت دیورژانس غیربدیهی را نتیجه می‌دهد، ناشی می‌شود. برای یافتن چنین عبارت‌هایی متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها که در دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) و یا در ضرایب تابعی ظاهر شده‌اند توسط توابعی دلخواه و مشتقات آن‌ها جایگزین می‌شوند. با چنین عملی نمایش‌های دیورژانسی حاصل روی همه جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) به صفر میل می‌کند به شرط آن‌که ضرایب ناتکین باشند.
در حالت خاص، مجموعه‌ای از ضرایب تابعی به فرم $\{\Lambda_\sigma\left[U\right]\}_{\sigma=1}^N$، برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) نمایش دیورژانسی تولید می‌کنند، هرگاه اتحاد

$$\Lambda_\sigma\left[U\right]\Delta^\sigma\left[U\right]\equiv D_i\Phi^i\left[U\right],$$

برای توابع دلخواه $U\left(x\right)$ برقرار باشد. دراین صورت روی جواب $U\left(x\right)=u\left(x\right)$ از دستگاه (۱.۲) قانون پایستگی موضعی زیر نتیجه می‌شود:

$$\Lambda_\sigma\left[u\right]\Delta^\sigma\left[u\right]\equiv D_i\Phi^i\left[u\right]=0,$$

مشروط بر اینکه هر ضریب ناتکین باشد ( به ضریب $\Lambda_\sigma\left[U\right]$ یک ضریب تکین گفته می‌شود، هرگاه یک تابع تکین روی جواب های $U\left(x\right)=u\left(x\right)$ دستگاه PDE مفروض (۱.۲) باشد.) در عمل ،ضرایب تابعی ناتکین مورد استفاده قرار می‌گیرند، زیرا با در نظر گرفتن ضرایب تابعی تکین می‌توان به نمایش‌های دیورژانسی رسید که قانون پایستگی برای دستگاه نیست.
در این حالت، یافتن قوانین پایستگی موضعی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل به یافتن مجموعه‌ای از ضرایب تابعی موضعی کاهش پیدا می‌کند.

**تعریف ۱.۲.۲.** عملگر اویلر نسبت به $U^j(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{U^j} = \frac{\delta}{\delta U^j} = \frac{\partial}{\partial U^j} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial U^j_{i_1 \dots i_s}}. \tag{۷.۲}$$

می‌توان نشان داد که عملگر اویلر عبارت دیورژانسی $D_i \Phi^i[U]$ را پوچ می‌کند. به‌طور کلی رابطه

$$E_{U^j}(D_i \Phi^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^r U)) \equiv 0, \qquad j = 1, \dots, q,$$

برای هر $U(x)$ دلخواهی برقرار است. در حالت خاص تنها نمایش اسکالری که توسط عملگر اویلر پوچ می‌شود نمایش دیورژانس است.

**قضیه ۱.۲.۲.** [۱۰] معادلات $E_{U^j}(F(x, U, \dots, \partial^s U)) \equiv 0$ $(j = 1, \dots, q)$ برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است اگر و تنها اگر

$$F(x, U, \dots, \partial^s U) \equiv D_i \Psi^i \left(x, U, \dots, \partial^{s-1} U\right),$$

برای توابع $\Psi^i \left(x, U, \dots, \partial^{s-1} U\right)$ که در آن $i = 1, \dots, p$ برقرار باشد.

بنا به قضیه ۱.۲.۲ ، قضیه زیر ارتباط بین ضرایب تابعی موضعی و قوانین پایستگی موضعی را مشخص می‌کند.

**قضیه ۲.۲.۲.** [۱۵] مجموعه‌ای از ضرایب تابعی موضعی ناتکین $\{\Lambda_\sigma(x, U, \dots, \partial^r U)\}_{\sigma=1}^N$ یک قانون پایستگی موضعی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) نتیجه می‌دهد اگر و تنها اگر به ازای توابع دلخواه $U(x)$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$E_{U^j}\left(\Lambda_\sigma(x, U, \dots, \partial^r U) \Delta^\sigma(x, U, \dots, \partial^n U)\right) = 0, \qquad j = 1, \dots, q. \tag{۸.۲}$$

از مجموعه معادلات (۸.۲) ، مجموعه‌ای از معادلات مشخصه خطی برای یافتن تمام ضرایب تابعی قوانین پایستگی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) نتیجه می‌شود. چون معادلات (۸.۲) برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، می‌توان $U^j$ و تمام مشتقات آن‌را به‌عنوان متغیرهای مستقلی نسبت به $x^i$ در نظر گرفت، بنابراین دستگاه PDE خطی (۸.۲) به دستگاه خطی از معادلات خطی مشخصه تبدیل می‌شود که جواب‌های آن مجموعه‌هایی از ضرایب تابعی موضعی برای دستگاه $R(x, u)$ خواهند بود.

از دو قضیه ای که در بالا آورده شد می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ی ضرایب

$$\Lambda_\sigma[U]_{\sigma=1}^N = \Lambda_\sigma(x, U, \partial U, \dots, \partial^r U)_{\sigma=1}^N,$$

در رابطه $\Lambda_\sigma[U] R^\sigma[U] \equiv D_i \Phi^i[U]$ برای هر تابع دلخواه $U(x)$ صدق می‌کند. در واقع با برابر قراردادن ترکیب خطی ضرایب و دستگاه معادلات دیفرانسیل(۱.۲) با عبارت دیورژانسی $D_i \Phi^i[U]$ می‌توان به قوانین پایستگی دست یافت.

## ۳.۲ روش مستقیم

قضیه‌های ۱.۲.۲ و ۲.۲.۲ روش نظام‌مندی برای یافتن قوانین پایستگی ارائه می‌دهند که به آن روش مستقیم می‌گویند و می‌توان الگوریتم آن‌را به‌صورت زیر بیان نمود:

۱. به ازای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲)، ابتدا می‌بایست به جستجوی ضرایب به صورت $\{\Lambda_\sigma\left(x,U,\ldots,\partial^r U\right)\}_{\sigma=1}^{N}$ به ازای مرتبه مشخص $N$ پرداخته شود. (در محاسبات عملی توصیه می‌شود که حتی المقدور دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) به فرم حل‌شده نسبت به یک مشتق پیشرو نوشته شود. در این صورت در مرحله اول روش مستقیم، به‌راحتی می‌توان از ضرایب تکین متناظر با قوانین پایستگی با خارج کردن مشتقات پیشرو و مشتقات حاصل از آن‌ها، از وابستگی ضرایب اجتناب نمود.)

۲. معادلات مشخصه (۸.۲) را برای تابع دلخواه $U\left(x\right)$ به‌منظور یافتن تمام ضرایب تابعی حل کنید.

۳. در این مرحله باید تمامی شارهای متناظر با ضرایب تابعی $\Phi^i\left[U\right]$ را پیدا نمایید که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\Lambda_\sigma\left(x,U,\ldots,\partial^r U\right)\Delta^\sigma\left(x,U,\ldots,\partial^n U\right)\equiv D_i\Phi^i\left(x,U,\ldots,\partial^r U\right).$$

۴. در نهایت، هر شار و ضریب تابعی، یک قانون پایستگی $D_i\Phi^i\left(x,U,\ldots,\partial^r U\right)=0$ که به ازای تمام جواب های دستگاه (۱.۲) برقرار است، نتیجه می‌دهد.

در حالت کلی تناظر یک به یک بین مجموعه‌های ضرایب تابعی موضعی غیربدیهی و شارهای غیربدیهی تنها برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل که فرم کوشی‌ـ کوالفسکی می‌پذیرند برقرار است.

برای درک بهتر روش مستقیم قوانین پایستگی مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

**مثال ۱.۳.۲.** معادله انتشار غیرخطی

$$h_t=-\frac{h^3h_r}{3r}+h^2h_r^2+\frac{h^3h_{rr}}{3}=0. \tag{۹.۲}$$

توصیف کننده یک قطره مایع نازک از سیال تراکم‌ناپذیر روی یک صفحه افقی ثابت است [۸۸]. معادله فوق به فرم کوشی‌ـ کوالسفکی نسبت به $t$ با مشتق پیشرو $h_t$ است. هدف یافتن تمامی ضرایب قوانین پایستگی موضعی مرتبه اول به‌صورت

$$\Lambda=\xi(r,t,h,h_r), \tag{۱۰.۲}$$

از PDE (۹.۲) است. برحسب عملگر اویلر متناظر

$$E_H=\frac{\partial}{\partial H}-D_r\frac{\partial}{\partial H_r}-D_t\frac{\partial}{\partial H_t}+D_r^2\frac{\partial}{\partial H_{rr}}$$

معادلات مشخصه برای ضریب (۱۰.۲) به شکل زیر خواهد بود:

$$E_H\left[\xi(r,t,H,H_r)\left(H_t-\frac{H^3H_r}{3r}-H^2H_r^2-\frac{H^3H_{rr}}{3}\right)\right]\equiv 0, \qquad (۱۱.۲)$$

که در آن $H(r,t)$ تابعی دلخواه است. معادلات مشخصه (۱۱.۲) جوابی به‌صورت $\Lambda = r\,(c_2\ln r+c_1)$ دارد؛ از این رو دو ضریب قانون پایستگی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\Lambda_1=r, \qquad \Lambda_2=r\ln r.$$

هر ضریب تعیین‌کننده یک قانون پایستگی موضعی غیربدیهی

$$\begin{aligned}
&D_r\Phi^1(r,t,H,H_r)+D_t\Psi^1(r,t,H,H_r)\\
&\qquad\equiv\Lambda_1(r,t,H,H_r)\left(H_t-\tfrac{H^3H_r}{3r}-H^2H_r^2-\tfrac{H^3H_{rr}}{3}\right),\\
&D_r\Phi^2(r,t,H,H_r)+D_t\Psi^2(r,t,H,H_r)\\
&\qquad\equiv\Lambda_2(r,t,H,H_r)\left(H_t-\tfrac{H^3H_r}{3r}-H^2H_r^2-\tfrac{H^3H_{rr}}{3}\right),
\end{aligned} \qquad (۱۲.۲)$$

است. به‌ویژه پس از مساوی قرار دادن جملات مشتق مشابه از رابطه (۱۲.۲)، با انتگرال‌گیری از معادلات نتیجه شده، دو قانون پایستگی موضعی مستقل خطی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&D_t\,[rh]+D_r\left[-\frac{1}{3}rh_rh^3\right]=0,\\
&D_t\,[rh\ln r]+D_r\left[-\frac{1}{3}rh_rh^3\ln r+\frac{h^4}{r}\right]=0.
\end{aligned}$$

# عملگرهای خطی‌کننده

دستگاه معادلات (۱.۲) را درنظربگیرید. فرض کنید که به ازای تابع دلخواه $U(x)=\left(U^1(x),\ldots,U^q(x)\right)$ داشته باشیم:

$$\Delta^\sigma[U]=\Delta^\sigma\left(x,U,\partial U,\ldots,\partial^kU\right)=0, \qquad \sigma=1,\ldots,N,$$

در این صورت،عملگر خطی‌کننده (مشتق فرشه) $L[U]$ متناظر با دستگاه PDE (۱.۲) برحسب تابع دلخواه $V(x)=\left(V^1(x),\ldots,V^q(x)\right)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
L_\nu^\sigma[U]\,V^\nu &= \left[\frac{\partial\Delta^\sigma[U]}{\partial U^\nu}+\frac{\partial\Delta^\sigma[U]}{\partial U_i^\nu}D_i+\ldots\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial\Delta^\sigma[U]}{\partial U_{i_1\ldots i_k}^\nu}D_{i_1\ldots i_k}\right]V^\nu, \qquad \sigma=1,\ldots,N,
\end{aligned}$$

(۱۴.۲)

با انتگرال‌گیری جزء به جزء، عملگر الحاقی $L^{*}[U]$ متناظر با دستگاه PDE (۱.۲) برحسب تابع دلخواه $W(x)=\left(W^{1}(x),\ldots,W^{q}(x)\right)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} L_{\nu}^{*\sigma}[U]\,W_{\sigma} &= \frac{\partial\Delta^{\sigma}[U]}{\partial U^{\nu}}W_{\sigma}-D_{i}\left(\frac{\partial\Delta^{\sigma}[U]}{\partial U_{i}^{\nu}}W_{\sigma}\right)+\ldots \\ &\quad +(-1)^{k}D_{i_{1}\ldots i_{k}}\left(\frac{\partial\Delta^{\sigma}[U]}{\partial U_{i_{1}\ldots i_{k}}^{\nu}}W_{\sigma}\right),\qquad \nu=1,\ldots,q. \end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

یک حالت ویژه زمانی اتفاق می افتد که عملگر خطی‌کننده $L[U]$ نظیر دستگاه (۱.۲) خودالحاق باشد.

**تعریف ۱.۳.۲.** فرض کنید $L[U]$ بامؤلفه‌های نظیر آن که با معادله (۱۳.۲) بیان می‌شوند، عملگر خطی‌کننده متناظر با دستگاه (۱.۲) باشد. عملگر الحاقی متناظر با $L[U]$ را با نماد $L^{*}[U]$ نمایش داده و مؤلفه‌های نظیر آن با رابطه (۱۵.۲) تعریف می‌شوند. در این‌صورت، $L[U]$ یک عملگر خودالحاق است اگر و تنها اگر $L[U]=L^{*}[U]$.

هرگاه یک دستگاه PDE دارای یک عملگر خطی‌کننده خودالحاق باشد، آنگاه تعداد متغیرهای وابسته که در این دستگاه ظاهر می‌شود می‌بایست با تعداد معادلات موجود در دستگاه مورد مطالعه برابر باشد؛ یعنی $N=q$. همچنین، اگر دستگاه PDE مورد بحث یک PDE اسکالر است، آنگاه بالاترین مرتبه مشتق جزئی ظاهرشده در آن می‌بایست زوج باشد.

می‌توان نشان داد که دستگاه PDE دارای یک فرمول‌بندی تغییراتی است اگر و تنها اگر عملگرخطی‌کننده متناظر با آن خودالحاق است. در بخش بعدی به مطالعه لاگرانژی و فرمول‌بندی‌های تغییراتی می‌پردازیم.

## ۴.۲ قضیه نوتر

نوتر در مقاله مشهور خود [۹۲] (قضیه نوتر) روشی برای یافتن قوانین پایستگی موضعی از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی که اصل تغییر می‌پذیرند، ارائه نمود. وقتی که دستگاه معادلات دیفرانسیل اصل تغییر (انتگرال کنش) می‌پذیرد، آنگاه اکسترمم‌های اصل تغییر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل نتیجه می‌دهد که آن را معادلات اویلر_لاگرانژ می‌نامند. در این حالت نوتر نشان داد که اگر یک تقارن نقطه‌ای از اصل تغییر موجود باشد، آنگاه شارهای قانون پایستگی موضعی توسط فرمولی صریح به‌دست می‌آیند.

نخست مقدماتی در باب مساله تغییراتی و تقارن‌های تغییراتی بیان می‌کنیم.

**تعریف ۱.۴.۲.** یک مساله تغییراتی شامل یافتن یک اکسترمم از یک تابعک

$$\mathcal{J}[u]=\int_{\Omega}\mathcal{L}\left(x,u^{(n)}\right)dx, \tag{۱۶.۲}$$

در رده‌ای از توابع $u=f(x)$ تعریف شده روی دامنه $\Omega$ است. انتگرالده $\mathcal{L}\left(x,u^{(n)}\right)$ لاگرانژی مساله تغییراتی $\mathcal{J}$ نامیده می‌شود که تابعی هموار است و به $x,u$ و مشتقات $u$ بستگی دارد.

**تعریف ۲.۴.۲.** فرض کنیم $\mathcal{J}[u]$ یک تابعک دیفرانسیلی باشد. در این صورت مشتق تغییراتی $\mathcal{J}$، $q$ـ تایی منحصر به فرد

$$\delta\mathcal{J}[u] = \left(\delta_1\mathcal{J}[u], \ldots, \delta_q\mathcal{J}[u]\right),$$

است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\mathcal{J}[f+\varepsilon\zeta] = \int_{\Omega}\delta\mathcal{J}[f(x)].\zeta(x)\,dx,$$

که در آن $u = f(x)$ تابع هموار است که روی $\Omega$ تعریف شده و $\zeta(x) = \left(\zeta^1(x), \ldots, \zeta^q(x)\right)$ تابع هموار با محمل فشرده در $\Omega$ است.

**تعریف ۳.۴.۲.** تابع $\mathcal{L}\left(x, u^{(n)}\right)$ را یک لاگرانژي پوچ نامند هرگاه معادلات اویلرـ لاگرانژ متناظر با آن به‌ازای هر $x, u$ متحد با صفر باشد: $E(\mathcal{L}) \equiv 0$.

**قضیه ۱.۴.۲.** [۱۰] تابع $\mathcal{L}\left(x, u^{(n)}\right)$ را یک لاگرانژی پوچ است اگر و تنها اگر یک دیورژانس کامل باشد: $\mathcal{L} = \mathrm{div}P$ برای $P = (P_1, \ldots, P_p)$.

تابعک $\mathcal{J}[U]$ با $p$ـ متغیر مستقل و $q$ـ تابع دلخواه $U = \left(U^1(x), \ldots, U^q(x)\right)$ و مشتق‌هایشان تا مرتبه $k$ که روی دامنه $\Omega$ تعریف شده اند، به صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$\mathcal{J}[U] = \int_{\Omega}\mathcal{L}[U]\,dx = \int_{\Omega}\mathcal{L}\left(x, U, \partial U, \ldots, \partial^k U\right)dx.$$

تابع $\mathcal{L}[U] = \mathcal{L}\left(x, U, \partial U, \ldots, \partial^k U\right)$ را لاگرانژی و تابعک $\mathcal{J}[U]$ را اصل تغییر (انتگرال کنش ) می‌نامند.

تغییر بی‌نهایت کوچک از $U$ به‌صورت $U(x) \to U(x) + \varepsilon v(x)$ که $v(x)$ تابعی دلخواه است، که خودش و مشتق‌هایش تا مرتبه $k-1$ روی مرز $\partial\Omega$ از دامنه $\Omega$ صفر می‌شوند. تغییر متناظر در لاگرانژی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(x, U+\varepsilon v, \partial U + \varepsilon\partial v, \ldots, \partial^k[U] + \varepsilon\partial^k v) - \mathcal{L}(x, U, \partial U, \ldots, \partial^k[U]) \\
&= \varepsilon\left(\frac{\partial\mathcal{L}[U]}{\partial U^\sigma}v^\sigma + \frac{\partial\mathcal{L}[U]}{\partial U^\sigma_j}v^\sigma_j + \ldots + \frac{\partial\mathcal{L}[U]}{\partial U^\sigma_{j_1\ldots j_k}}v^\sigma_{j_1\ldots j_k}\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان نشان داد که

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon\left(v^\sigma E_{U^\sigma}(\mathcal{L}[U]) + D_i W^i[U, v]\right) + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \qquad (۱۷.۲)$$

که $E_{U^\sigma}$ عملگراویلر نسبت به $U^\sigma$ است و

$$\begin{aligned}
W^i[U, v] &= v^\sigma\left(\frac{\partial\mathcal{L}[U]}{\partial U^\sigma_i} + \ldots + (-1)^{(k-1)}D_{j_1}\ldots D_{j_{(k-1)}}\frac{\partial\mathcal{L}[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1\ldots j_{k-1}}}\right) \\
&+ v^\sigma_{ij_1}\left(\frac{\partial\mathcal{L}[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1}} + \ldots + (-1)^{(k-2)}D_{j_2}\ldots D_{j_{(k-1)}}\frac{\partial\mathcal{L}[U]}{\partial U^\sigma_{ij_1\ldots j_{k-1}}}\right)
\end{aligned}$$

$$+\quad \ldots + v^{\sigma}_{j_1\ldots j_{k-1}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}[U]}{\partial U^{\sigma}_{ij_1\ldots j_{k-1}}}\right). \tag{۱۸.۲}$$

بنا به نمایش (۱۷.۲) و قضیه دیورژانس، تغییر متناظر در $\mathcal{J}[U]$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J} &= \mathcal{J}[U+\varepsilon v] - \mathcal{J}[U] = \int_{\Omega}\delta\mathcal{L}dx\\ &= \varepsilon\int_{\Omega}\Big(v^{\sigma}E_{U^{\sigma}}(\mathcal{L}[U]) + D_l W^l[U,v]\Big)dx + \mathrm{O}(\varepsilon^2)\\ &= \varepsilon\left(\int_{\Omega}v^{\sigma}E_{U^{\sigma}}(\mathcal{L}[U])\,dx + \int_{\partial\Omega}W^l[U,v]\,n^l ds\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right),\end{aligned} \tag{۱۹.۲}$$

که $\int_{\partial\Omega}$ بیانگر انتگرال‌های سطح روی مرز $\partial\Omega$ از دامنه $\Omega$ با بردار نرمال برون سوی یکه هستند. بنابراین، اگر $U=u(x)$ اکسترمم $\mathcal{J}[U]$ باشد، آنگاه جمله $\mathrm{O}(\varepsilon)$ از $\delta\mathcal{J}$ باید صفر شود، لذا

$$\int_{\Omega}v^{\sigma}E_{u^{\sigma}}(\mathcal{L}[u])dx = 0, \tag{۲۰.۲}$$

برای هر $v(x)$ دلخواه تعریف شده روی دامنه $\Omega$، برقرار است. بنابراین، اگر $U=u(x)$ اکسترمم $\mathcal{J}[U]$ باشد، آنگاه $u(x)$ باید در دستگاه PDE زیر صدق کند:

$$E_{u^{\sigma}}(\mathcal{L}[u]) = \frac{\partial\mathcal{L}[u]}{\partial u^{\sigma}} + \ldots + (-1)^{(k)}D_{j_1}\ldots D_{j_{(k)}}\frac{\partial\mathcal{L}[u]}{\partial u^{\sigma}_{j_1\ldots j_k}} = 0, \quad \sigma = 1,\ldots,q. \tag{۲۱.۲}$$

معادلات (۲۱.۲) را معادلات اویلر_لاگرانژ می‌نامند که اکسترمم $U=u(x)$ از اصل تغییر $\mathcal{J}[U]$ دراین معادلات صدق می‌کند. لذا قضیه زیر را خواهیم داشت.

**قضیه ۲.۴.۲.** [۱۵] اگرتابع هموار $U=u(x)$ اکسترمم اصل تغییر

$$\mathcal{J}[U] = \int_{\Omega}\mathcal{L}[U]\,dx,$$

با لاگرانژی $\mathcal{L}[U] = \mathcal{L}(x,U,\partial U,\ldots,\partial^k U)$ باشد، آنگاه $u(x)$ در معادلات اویلر_لاگرانژ (۲۱.۲) صدق می‌کند.

## ۱.۴.۲ الگوریتم نوتر از قضیه‌ی نوتر

دراین بخش به بیان الگوریتم نوتر از قضیه‌ی نوتر خواهیم پرداخت. دراین الگوریتم لازم است که اصل تغییر $\mathcal{J}[U]$ تحت گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای

$$\begin{aligned}\tilde{x}^i &= x^i + \varepsilon\xi^i(x,U) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right), \quad i = 1,\ldots,p,\\ \tilde{U}^j &= U^j + \varepsilon\eta^j(x,U) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right), \quad j = 1,\ldots,q,\end{aligned} \tag{۲۲.۲}$$

با مولد بی‌نهایت کوچک

$$X = \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,U)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{q}\eta^j(x,U)\frac{\partial}{\partial U^j}, \tag{۲۳.۲}$$

ناوردا باشد. ناوردایی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mathcal{L}[\tilde{U}]d\tilde{x} = \int_{\Omega} \mathcal{L}\left[U\right]Dx,$$

که $\tilde{\Omega}$ تصویر $\Omega$ تحت تبدیل نقطه‌ای (۲۲.۲) است. ژاکوبین تبدیل ۲۲.۲ عبارتست از

$$\mathbb{J} = \det(D_i\tilde{x}^i) = 1 + \varepsilon D_i\xi^i\left(x, U\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right),$$

در این‌صورت $d\tilde{x} = \mathbb{J}dx$ . از آنجایی‌که (۲۲.۲) گروه لی از تبدیلات است و رابطه $\mathcal{L}\left[\tilde{U}\right] =$ $\mathrm{e}^{\varepsilon X^{(k)}}\mathcal{L}\left[U\right]$ شامل جملاتی از امتداد مرتبه $k$ــام مولد بی‌نهایت کوچک (۲۳.۲) است، بنابراین در الگوریتم نوتر گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۲.۲) تقارن نقطه‌ای برای $\mathcal{J}\left[U\right]$ است اگر و تنها اگر رابطه

$$\int_{\Omega}\left(J\mathrm{e}^{\varepsilon X^{(k)}} - 1\right)\mathcal{L}\left[U\right]dx = \varepsilon\int_{\Omega}\left(\mathcal{L}\left[U\right]D_i\xi^i\left(x, U\right) + X^{(k)}\mathcal{L}\left[U\right]\right)dx + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right), \quad (۲۴.۲)$$

برای هر$U\left(x\right)$ برقرار باشد. اگر $\mathcal{J}\left[U\right]$ دارای تقارن نقطه‌ای (۲۲.۲) باشد، آنگاه جمله$\mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right)$ در رابطه (۲۴.۲) صفرخواهدشد. در نتیجه اتحاد زیر برقرار است:

$$\mathcal{L}\left[U\right]D_i\xi^i\left(x, U\right) + X^{(k)}\mathcal{L}\left[U\right] \equiv 0. \quad (۲۵.۲)$$

می‌دانیم که گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۲.۲) با خانواده‌ای از تبدیلات موضعی به صورت زیر معادل است:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^i &= x^i, \qquad i = 1, \ldots, p\\ \tilde{U}^j &= U^j + \varepsilon[\eta^j\left(x, U\right) - U_i^j\xi^i\left(x, U\right)] + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right), \qquad j = 1, \ldots, q,\end{aligned} \quad (۲۶.۲)$$

که با مولد بی‌نهایت کوچک امتداد یافته مرتبه $k$ ــام متناظرش یعنی $\tilde{X}^{(k)}$ به صورت

$$\tilde{X} = \sum_{j=1}^{q}[\eta^j\left(x, U\right) - \sum_{i=1}^{p} u_i^j\xi^i\left(x, U\right)]\frac{\partial}{\partial u^j}$$

بیان می‌شود.

تحت تبدیل (۲۶.۲) تغییر بی‌نهایت کوچک

$$U\left(x\right) \to U\left(x\right) + \varepsilon v\left(x\right)$$

دارای مؤلفه‌های

$$v^j\left(x\right) = \tilde{\eta^j}\left[U\right] = \eta^j\left(x, U\right) - U_i^j\xi^i\left(x, U\right),$$

با جملاتی از تبدیل (۲۶.۲) هستند. به‌علاوه، بنا به خواص گروهی (۲۶.۲) نتیجه می‌شود که

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon\tilde{X}^{(k)}\mathcal{L}\left[U\right] + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

بنابراین

$$\int_{\Omega} \delta\mathcal{L}dx = \varepsilon \int_{\Omega} \tilde{X}^{(k)}\mathcal{L}\left[U\right]dx + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right). \qquad (۲۷.۲)$$

بعد از مقایسه روابط (۲۷.۲) و (۱۹.۲) با

$$v^j\left(x\right) = \tilde{\eta^j}\left[U\right] = \eta^j\left(x,U\right) - U_i^j\xi^i\left(x,U\right)$$

داریم

$$\tilde{X}^{(k)}\mathcal{L}\left[U\right] \equiv \tilde{\eta}^j\left[U\right]E_{U^j}\left(\mathcal{L}\left[U\right]\right) + D_iW^i\left[U,\tilde{\eta}^j\left[U\right]\right], \qquad (۲۸.۲)$$

که در آن $W^i\left[U,\tilde{\eta}^j\left[U\right]\right]$ توسط رابطه‌ی (۱۸.۲) بیان می‌شود.

**لم ۱.۴.۲.** [۱۵] فرض کنید $X^{(k)}$ امتداد مرتبه $k$ ـ‌ام مولد بی‌نهایت کوچک از گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۲.۲) و $\tilde{X^{(k)}}$ امتداد مرتبه $k$ ـ‌ام مولد بی‌نهایت کوچک از خانواده تبدیلات یک پارامتری معادل (۲۶.۲) باشد. اگر

$$F\left(U\right) = \left(x,U,\partial U,\ldots,\partial^k\left(U\right)\right)$$

تابع دلخواهی باشد، آنگاه اتحاد زیر برقراراست:

$$\tilde{X}^{(k)}F\left[U\right] + F\left[U\right]D_i\xi^i\left(x,U\right) \equiv \tilde{X}^kF\left[U\right] + D_i\left(F\left[U\right]\xi^i\left(x,U\right)\right). \qquad (۲۹.۲)$$

**قضیه ۳.۴.۲.** (قضیه‌ی نوتر) فرض کنید یک دستگاه PDE، از اصل تغییراتی نتیجه شده باشد، یعنی دستگاه PDE مفروض مجموعه‌ای از معادلات اویلرـ‌لاگرانژ (۲۱.۲) باشد که جواب‌های $u\left(x\right)$ اکسترمم $U\left(x\right) = u\left(x\right)$ از اصل تغییر $\mathcal{J}\left[U\right]$ با لاگرانژی $\mathcal{L}\left[U\right]$ باشد. فرض کنید گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۲.۲) تقارن نقطه‌ای برای $\mathcal{J}\left[U\right]$ باشد. فرض کنید $W^1[U,u]$ برای توابع دلخواه $U\left(x\right)$ و $v\left(x\right)$ توسط رابطه (۱۸.۲) تعریف شده باشد. در این صورت

رابطه

$$\tilde{\eta}^j\left[U\right]E_{U^j}(\mathcal{L}\left[U\right]) \equiv -D_i(\xi^i\left(x,U\right)\mathcal{L}\left[U\right] + W^i[U,\tilde{\eta}^j\left[U\right]]), \qquad (۳۰.۲)$$

برای تابع دلخواه $U\left(x\right)$ برقرار است. یعنی $\{\tilde{\eta}^j\left[U\right]\}_{j=1}^q$ مجموعه ای از ضرایب تابعی برای دستگاه اویلرـ‌لاگرانژ (۲۱.۲) است.

قانون پایستگی موضعی

$$D_i\left(\xi^i\left(x,u\right)\mathcal{L}\left[u\right] + W^i\left[u,\tilde{\eta}\left[u\right]\right]\right) = 0, \qquad (۳۱.۲)$$

برای هر جواب $u = \Theta\left(x\right)$ از دستگاه اویلرـ‌لاگرانژ (۲۱.۲) برقراراست.

**برهان.** کافی است در رابطه (۲۹.۲) قرار دهیم: $F[U] = \mathcal{L}[U]$. در این صورت از رابطه‌ی (۲۵.۲) به‌ازای توابع دلخواه $U(x)$ نتیجه می‌شود که:

$$\tilde{X}^{(k)}\mathcal{L}[U] + D_i\left(\mathcal{L}[U]\,\xi^i(x,U)\right) \equiv 0.$$

با توجه به مقدار $\tilde{X}^{(k)}\mathcal{L}[U]$ در رابطه (۲۸.۲) و جایگزین نمودن آن در رابطه فوق، تساوی (۳۰.۲) نتیجه می‌شود. لذا، هرگاه $U(x) = u(x)$ یک جواب دستگاه اویلر_لاگرانژ (۲۰.۲) باشد، آنگاه عبارت سمت چپ رابطه (۳۰.۲) صفر خواهد شد؛ در نتیجه قانون پایستگی (۳۱.۲) حاصل خواهد شد. □

## ۲.۴.۲ فرمول بویر از قضیه‌ی نوتر

بویر [۱۹] در سال ۱۹۶۷ قضیه‌ی نوتر را برای یافتن قوانین پایستگی حاصل از تبدیلات مرتبه بالاتر تعمیم داد. در این حالت خاص، اصل تغییراتی $\mathcal{J}[U]$ نسبت به تبدیلات مرتبه بالاتر یک_پارامتری ناوردا است هرگاه لاگرانژی آن یعنی $\mathcal{L}[U]$ نسبت به چنین تبدیلاتی ناوردا باشد.

**تعریف ۴.۴.۲.** فرض کنید

$$\tilde{X} = \sum_{j=1}^{q} \tilde{\eta}^j\left(x,U,U^{(s)}\right)\frac{\partial}{\partial u^j}, \qquad (۳۲.۲)$$

مولد بی‌نهایت کوچک تبدیلات موضعی مرتبه بالاتر با امتداد $\tilde{X}^{(\infty)}$ باشد که

$$\tilde{\eta}^j[U] \equiv \tilde{\eta}^j\left[x,U,U^{(s)}\right].$$

این تبدیل یک تقارن موضعی برای $\mathcal{J}[U]$ است اگر و تنها اگر

$$\tilde{X}^{(\infty)}\mathcal{L}[U] \equiv D_iA^i[U],$$

برای مجموعه ای از توابع $A^i[U] = A^i(x,U,\partial U,\ldots,\partial^r U)$ برقرار باشد، که در آن $\tilde{X}^{(\infty)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{X}^{(\infty)} = \tilde{\eta}^j\frac{\partial}{\partial U^j} + \tilde{\eta}_i^{(1)j}\frac{\partial}{\partial U_i^j} + \ldots + \tilde{\eta}_{i_1\ldots i_p}^{(p)j}\frac{\partial}{\partial U_{i_1\ldots i_p}^j} + \ldots.$$

**تعریف ۵.۴.۲.** تبدیل موضعی

$$\begin{aligned}\tilde{x}^i &= x^i, \qquad i=1,\ldots,p,\\ \tilde{U}^j &= U^j + \varepsilon\tilde{\eta}^j(x,U^{(k)}) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right), \qquad j=1,\ldots,q,\end{aligned}$$

با مولد بی‌نهایت کوچک $\tilde{X}$ که یک تقارن موضعی برای $\mathcal{J}[U]$ است را تقارن تغییراتی برای $\mathcal{J}[U]$ می‌نامند.

**قضیه ۴.۴.۲.** (تعمیم قضیه نوتر) [۱۵] فرض کنید دستگاه PDE مانند $R[U]$ از اصل تغییراتی نتیجه شده باشد؛ یعنی دستگاه PDE مفروض مجموعه ای از معادلات اویلر_لاگرانژ (۲۱.۲) باشد که جواب‌های $u(x)$ اکسترمم $U(x)=u(x)$ از اصل تغییراتی $\mathcal{J}[U]$ با لاگرانژی $\mathcal{L}[U]$ باشند. فرض کنید گروه لی یک پارامتری از تبدیلات موضعی با مولد بی‌نهایت کوچک (۳۲.۲) تقارن تغییراتی از $\mathcal{J}[U]$ باشد. فرض کنید $W^1[U,u]$ برای توابع دلخواه $U(x)$ و $v(x)$ توسط رابطه (۱۸.۲) تعریف شده باشد. در این‌صورت

رابطه

$$\tilde{\eta}^j[U]\,E_{U^j}(\mathcal{L}[U]) \equiv D_i\left(A^i[U]-W^i\left[U,\tilde{\eta}^j[U]\right]\right),$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است؛ یعنی $\{\tilde{\eta}^j[U]\}_{j=1}^q$ مجموعه‌ای از ضرایب تابعی برای دستگاه اویلر_لاگرانژ (۲۱.۲) است.

قانون پایستگی موضعی

$$D_i\left(A^i[u]-W^i\left[u,\tilde{\eta}^j[u]\right]\right)=0,$$

برای هر جواب $u=\Theta(x)$ از دستگاه اویلر_لاگرانژ (۱۸.۲) صدق می‌کند.

**قضیه ۵.۴.۲.** (قضیه بویر) [۱۵] اگر قانون پایستگی از قضیه نوتر حاصل شده باشد، آنگاه قانون پایستگی مذکور از تعمیم قضیه نوتر (الگوریتم بویر) نیز به‌دست می آید.

**مثال ۱.۴.۲** دستگاه بازینسک غیرخطی (SNLB ) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} u_t = v_{xx}, \\ v_t = u_{xx}-u-u^2. \end{cases} \tag{۳۳.۲}$$

این دستگاه، مدل طبیعی برای انتشار موج‌های طولانی مدت روی رویه‌ای از آب با دامنه کوچک است که اولین بار توسط جوزف بازینسک [1] در سال ۱۸۷۰ معرفی شد [۱۷]. این معادله دارای اصل تغییراتی است که با تابعک کنش زیر بیان می‌شود:

$$\mathcal{J}[U,V]=\int \mathcal{L}[U,V]dtdx.$$

لاگرانژی متناظر نیز به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(U_x^2+V_x^2+VU_t-UV_t)-\frac{1}{3}U^3-\frac{1}{2}U^2. \tag{۳۴.۲}$$

قبل از هر چیز، ابتدا به محاسبه تقارن‌های تغییراتی متناظر با تابعک $\mathcal{J}[U,V]$ می‌پردازیم. بدین منظور مولد بی‌نهایت کوچک زیر را در نظر بگیرید:

$$X=\xi_1(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial t}+\xi_2(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial x}+\phi_1(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial u}+\phi_2(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial v}.$$

[1] Joseph Boussinesq

تقارن‌های نقطه‌ای دستگاه بازینسک عبارتست از:

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial v}, \\ &X_5 = t\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{x}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(u + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{t}{2} - v\right)\frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned} \tag{۳۵.۲}$$

چهار تقارن $X_1, X_2, X_3$ و $X_4$ تقارن‌های تغییراتی برای اصل تغییر $\mathcal{J}[U,V]$ هستند. با امتداد تقارن‌های فوق داریم:

$$\begin{aligned} &\hat{X}_1 = -u_t\frac{\partial}{\partial u} - v_t\frac{\partial}{\partial v}, \quad \hat{X}_1^\infty = -u_t\frac{\partial}{\partial u} - v_t\frac{\partial}{\partial v} - u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + \dots, \\ &\hat{X}_2 = -u_x\frac{\partial}{\partial u} - v_x\frac{\partial}{\partial v}, \quad \hat{X}_2^\infty = -u_x\frac{\partial}{\partial u} - v_x\frac{\partial}{\partial v} - u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \dots, \\ &\hat{X}_3 = \frac{\partial}{\partial v}, \quad \hat{X}_3^\infty = \frac{\partial}{\partial v}, \\ &\hat{X}_4 = x\frac{\partial}{\partial v}, \quad \hat{X}_4^\infty = x\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v_x}. \end{aligned} \tag{۳۶.۲}$$

عمل امتداد یافته تقارن‌های (۳۶.۲) روی لاگرانژی (۳۴.۲) نمایش دیورژانسی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1^\infty\mathcal{L} &= D_t\left(2U^2 + 3U^3 + 2UU_{xx} + 2VV_{xx} - 2VU_t + \frac{1}{2}UV_t\right) \\ &+ D_x\left(-\frac{1}{2}U_xU_t - \frac{1}{2}V_xV_t - \frac{1}{2}UU_{tx} - \frac{1}{2}VV_{tx}\right), \\ \hat{X}_2^\infty\mathcal{L} &= D_x\left(\frac{1}{2}UV_t + 2U^2 + 3U^3 - 2V_x^2 - 2U_x^2 - 2VU_t\right), \\ \hat{X}_3^\infty\mathcal{L} &= D_t\left(\frac{1}{2}U\right), \qquad \hat{X}_4^\infty\mathcal{L} = D_t\left(\frac{1}{2}xU\right) + D_x\left(\frac{1}{2}V\right). \end{aligned} \tag{۳۷.۲}$$

بنا به الگوریتم بویر تقارن‌های (۳۷.۲)، ضرایب تابعی زیر را نتیجه می‌دهند:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^1[U,V] &= \hat{\eta}_1^1[U,V] = -U_t, \qquad \Lambda_1^2[U,V] = \hat{\eta}_1^2[U,V] = -V_t, \\ \Lambda_2^1[U,V] &= \hat{\eta}_2^1[U,V] = -U_x, \qquad \Lambda_2^2[U,V] = \hat{\eta}_2^2[U,V] = -V_x, \\ \Lambda_3^1[U,V] &= \hat{\eta}_3^1[U,V] = 0, \qquad \Lambda_3^2[U,V] = \hat{\eta}_3^2[U,V] = 1, \\ \Lambda_4^1[U,V] &= \hat{\eta}_4^1[U,V] = 0, \qquad \Lambda_4^2[U,V] = \hat{\eta}_4^2[U,V] = x. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $x^2 = x$ و $x^1 = t$ . ابتدا مقادیر $W^i[U,v]$ رابرای $i = 1,2$ با استفاده از لاگرانژی (۳۴.۲) و کمک گرفتن از رابطه (۱۸.۲) محاسبه می‌کنیم:

$$W^1[U,v] = -\frac{1}{2}vU_x, \qquad W^2[U,v] = -\frac{1}{2}vU_t.$$

سپس با توجه به روابط (۳۷.۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$
\begin{aligned}
\left(A_1^1, A_1^2\right) &= (2U^2+3U^3+2UU_{xx}+2VV_{xx}-2VU_t+\frac{1}{2}UV_t, \\
&\quad -\frac{1}{2}U_xU_t-\frac{1}{2}V_xV_t-\frac{1}{2}UU_{tx}-\frac{1}{2}VV_{tx}), \\
\left(A_2^1, A_2^2\right) &= \left(0, \frac{1}{2}UV_t+2U^2+3U^3-2V_x^2-2U_x^2-2VU_t\right), \\
\left(A_3^1, A_3^2\right) &= \left(\frac{1}{2}U, 0\right), \qquad \left(A_4^1, A_4^2\right)=\left(\frac{1}{2}xU, \frac{1}{2}V\right).
\end{aligned}
$$

در این‌صورت چهار قانون پایستگی نظیر تقارن‌های تغییراتی (۳۵.۲) به‌دست می‌آیند که عبارتنداز:

$$
\begin{aligned}
D_t(-u)+D_x(v_x) &= 0, \\
D_t(0)+D_x\left(xv_x-\frac{1}{2}v\right) &= 0, \\
D_t\left(-\frac{1}{2}vu_x+\frac{1}{2}uv_x\right) &+ \\
D_x\left(-u_xu_t+v_x^2-\frac{1}{2}uv_t-2u^2-3u^3+2u_x^2+vu_t\right) &= 0, \\
D_t\left(-\frac{1}{2}vu_t+\frac{1}{2}uv_t-2u^2-3u^3-2uu_{xx}-2vv_{xx}+2vu_t-\frac{1}{2}uv_t\right) &+ \\
D_x\left(-\frac{1}{2}u_xu_t-\frac{1}{2}v_xv_t+\frac{1}{2}uu_{tx}+\frac{1}{2}vv_{tx}\right) &= 0.
\end{aligned}
$$

شایان ذکر است که قوانین پایستگی فوق در [۱۱۰] به روش قضیه نوتر، مستقیم، ابراگیموف و هرمان‌ـ‌پل محاسبه شده‌است.

## ۵.۲ روش ابراگیموف

قضیه نوتر، ارتباطی میان تقارن‌های یک دستگاه معادلات دیفرانسیل و قوانین پایستگی برقرار می‌کند با این شرط که دستگاه معادلات دیفرانسیل، اصل تغییر را بپذیرد. درنتیجه، استفاده از قضیه نوتر به منظور یافتن قوانین پایستگی با چندین محدودیت همراه است. اول از همه، این روش منحصر به دستگاه‌های تغییراتی است. در نتیجه، عملگر خطی‌کننده (مشتق فرشه) متناظر با $R(x,u)$ می بایست خودالحاق باشد. همچنین باید فرمول صریحی برای لاگرانژی $\mathcal{L}[U]$ یافت که معادلات اویلرـ‌لاگرانژ آن دستگاه تغییراتی را نتیجه می‌دهد. به‌علاوه می بایست بررسی نمود که کدام یک از تقارن‌های دستگاه، لاگرانژی $\mathcal{L}[U]$ را تا حد دیورژانس پایا نگه می‌دارند، یعنی نمی‌توان به ازای هر تقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل قانون پایستگی با قضیه نوتر به‌دست آورد. ابراگیموف در مقاله‌اش [۵۳] تعریفی جدید از معادله الحاقی برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی ارائه کرد [۵۵، ۵۶] و یک لاگرانژی برای هر معادله دیفرانسیل دلخواه (خطی یا غیرخطی) به‌دست آورد. لذا برای هر دستگاه معادلات دیفرانسیل که تعداد

معادلاتش با تعداد متغیرهای وابسته برابر باشد می‌توان از قضیه نوتر استفاده کرد. از آنجایی‌که معادلات الحاقی تمام تقارن‌های معادله اصلی را به ارث می‌برند می‌توان یک تناظر میان قوانین پایستگی با هر یک از گروه های تقارن نقطه‌ای، برخوردی و مرتبه بالاتر (لی بکلاند) برقرار نمود و قوانین پایستگی را بدون لاگرانژی کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل محاسبه کرد. در این بخش با استفاده از قضیه ابراگیموف [۵۳، ۵۶]، فرمول دقیقی برای یافتن قوانین پایستگی ارائه می‌دهیم.

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱.۲) با فرض $N = q$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Delta^{\sigma}[u] = \Delta^{\sigma}\left(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u\right) = 0, \qquad \sigma = 1, \ldots, q. \tag{۳۸.۲}$$

اگر

$$\mathcal{L} = \sum_{\beta=1}^{q} v^{\beta} \Delta^{\beta}\left(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u\right),$$

لاگرانژی قراردادی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) باشد، دراین صورت معادلات الحاقی برای دستگاه (۱.۲) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\Delta^{\sigma})^{*}\left(x, u, v, \partial u, \ldots, \partial^k u, \partial^k v\right) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^{\sigma}} = 0, \tag{۳۹.۲}$$

به قسمی که $v = (v^1, \ldots, v^q)$ متغیرهای وابسته جدید هستند و $\delta/\delta u^{\sigma}$ عملگر اویلر– لاگرانژ است که در رابطه (۷.۲) معرفی شد.

**تعریف ۱.۵.۲.** دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۸.۲) را خودالحاق غیرخطی گویند هرگاه دستگاه الحاقی (۳۹.۲) روی همه جواب‌های $u$ از دستگاه (۳۸.۲) با جایگذاری $v^{\sigma} = \varphi(x, u)$ صدق کند به‌طوری‌که $\varphi(x,u) \neq 0$. یا به‌عبارتی

$$(\Delta^{\sigma})^{*}\left(x, u, v, \partial u, \ldots, \partial^k u, \partial^k v\right)\Big|_{v=\varphi} = \lambda_{\sigma}^{\beta} \Delta^{\beta}, \quad \sigma, \beta = 1, \ldots, q, \tag{۴۰.۲}$$

که $\lambda_{\sigma}^{\beta} = \lambda_{\sigma}^{\beta}\left(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u\right)$ها ضرایب هستند.

مفهوم خودالحاقی غیرخطی شامل سه زیر رده است. در تعریف فوق دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۸.۲) را اکیداً خودالحاق گویند هرگاه معادله الحاقی به‌دست آمده از (۳۹.۲) با جایگذاری $u = v$ تبدیل به خود معادله با یک ضریب $\lambda$ شود. با جایگذاری $v = \varphi(u)$ و در صورتی که شرط $\varphi\prime(u) = \|\partial \varphi^j(u)/\partial u^{\beta}\|$ و $\varphi\prime(u) \neq 0$ برقرار باشد دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۸.۲) را شبه خودالحاق می‌نامند. هرگاه جایگذاری $v = \varphi(x, u)$ شامل $x$ و $u$ باشد آن را خودالحاقی ضعیف می‌نامند و اگر $v = \varphi\left(x, u, \partial u, \ldots, \partial^k u\right)$ آن را خودالحاقی غیرخطی با جایگذاری دیفرانسیلی می‌نامند.

**مثال ۱.۵.۲.** معادله تکاملی مرتبه دوم غیرخطی

$$u_t = \left(f\left(u\right)u_x\right)_x + \left(g\left(u\right)u_y\right)_y + \left(h\left(u\right)u_z\right)_z \qquad (۴۱.۲)$$

توصیف کننده انتقال حرارت با مواد ناهمسانگرد است که ضریب انتشار حرارت تحت تاثیر دما است. ضرایب مثبت و دلخواه $f\left(u\right)$، $g\left(u\right)$،$h\left(u\right)$ مستقل خطی هستند و هیچ یک ثابت نیستند، یعنی

$$f'\left(u\right) \neq 0 \qquad g'\left(u\right) \neq 0, \qquad h'\left(u\right) \neq 0. \qquad (۴۲.۲)$$

کاربرد های فیزیکی و خواص ریاضی از معادله و تعمیم آن به یک منبع خارجی $q\left(u\right)$ :

$$u_t = \left(f\left(u\right)u_x\right)_x + \left(g\left(u\right)u_y\right)_y + \left(h\left(u\right)u_z\right)_z + q\left(u\right),$$

در [۲۸، ۵۰] به‌طور مبسوط بیان شده است.
با استفاده از رابطه (۳۹.۲) معادله الحاقی (۴۱.۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F^* \equiv v_t + f\left(u\right)v_{xx} + g\left(u\right)v_{yy} + h\left(u\right)v_{zz} = 0.$$

با جایگذاری $v = \varphi(t, x, y, z, u)$ و مشتقات لازم

$$\begin{aligned} v_\alpha &\equiv D_\alpha\left(\varphi\right) = \varphi_u u_\alpha + \varphi_\alpha \qquad \alpha = t, x, y, z, \\ v_{\alpha\alpha} &\equiv D_\alpha^2\left(\varphi\right) = \varphi_u u_{2\alpha} + \varphi_{uu}u_\alpha^2 + 2\varphi_{\alpha u}u_\alpha + \varphi_{2\alpha} \qquad \alpha = t, x, y, z, \end{aligned}$$

در شرط خودالحاقی غیرخطی (۴۰.۲) خواهیم داشت:

$$\lambda = 0, \quad \varphi_u = 0, \quad v_t = \varphi_t, \quad v_{xx} = \varphi_{xx}, \quad v_{yy} = \varphi_{yy}, \quad v_{zz} = \varphi_{zz}.$$

درنتیجه شرط خودالحاقی غیرخطی به معادله زیر تقلیل می‌یابد:

$$-\varphi_t + f\left(u\right)\varphi_{xx} + g\left(u\right)\varphi_{yy} + h\left(u\right)\varphi_{zz} = 0.$$

بنا به استقلال خطی $f\left(u\right)$، $g\left(u\right)$،$h\left(u\right)$ و شرایط (۴۲.۲) داریم:

$$\varphi_t = 0, \qquad \varphi_{xx} = 0, \qquad \varphi_{yy} = 0, \qquad \varphi_{zz} = 0.$$

ازحل معادلات بالا به رابطه زیر می‌رسیم:

$$v = a_1xyz + a_2xy + a_3xz + a_4yz + a_5x + a_6y + a_7z + a_8.$$

بنابراین معادله در شرایط خودالحاقی غیرخطی با جایگذاری $v$ در (۴۰.۲) صادق است.

**قضیه ۱.۵.۲.** (قضیه ابراگیموف) [۵۳، ۵۴] فرض کنیم که دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۸.۲)، یک معادله خودالحاق غیرخطی باشد . در این صورت هر تقارن نقطه‌ای، برخوردی و مراتب بالاتر دستگاه (۳۸.۲) منجر به یک قانون پایستگی به صورت $D_i\left(C^i\right)=0$ می‌شود که مؤلفه های $C^i$ از رابطه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} C^i &= \xi^i\mathcal{L}+W^\sigma\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i^\sigma}-D_j\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\sigma}\right)+D_jD_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\sigma}\right)-\ldots\right] \\ &\quad +D_j\left(W^\sigma\right)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\sigma}-D_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\sigma}\right)+\ldots\right]+D_jD_k\left(W^\sigma\right)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\sigma}-\ldots\right]+\ldots \end{aligned} \tag{۴۳.۲}$$

که در آن $W^\sigma=\eta^\sigma-\xi^j u_j^\sigma$ و $\mathcal{L}=v^\beta\Delta^\beta$.

**مثال ۲.۵.۲.** معادله انتقال حرارت $u_t-u_{xx}=0$ با لاگرانژی قراردادی‌اش $v\left(u_t-u_{xx}\right)$ درنظرمی گیریم. از آنجایی‌که یک متغیر وابسته و لاگرانژیی از مرتبه دو داریم معادله (۴۳.۲) برای محاسبه بردارهای قانون پایستگی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$C^i=\xi^i\mathcal{L}+W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}-D_j\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}}\right)\right]+D_j\left(W\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}}.$$

قوانین پایستگی را با یک تقارن نقطه‌ای و یک تقارن مرتبه بالاتر از معادله به‌دست می‌آوریم. برای تقارن نقطه‌ای مولد $X=2t\frac{\partial}{\partial t}-xu\frac{\partial}{\partial u}$ و برای تقارن مرتبه بالاتر مولد $Y=\left(2tu_{xxx}-xu_{xx}\right)\frac{\partial}{\partial u}$ درنظرمی گیریم. در این صورت متناظر با $X$ داریم:

$$\xi_1=0,\qquad \xi_2=2t,\qquad \eta=-xu,\qquad W=-\left(xu+2tu_x\right).$$

با جایگذاری $W$ در بردار پایستگی $C=\left(C^1,C^2\right)$ خواهیم داشت:

$$C^1=-v\left(xu+2tu_x\right),\qquad C^2=v\left(2tu_t+u+xu_x\right)-\left(xu+2tu_x\right)v_x.$$

درنتیجه قانون پایستگی به صورت $D_t\left(C^1\right)+D_x\left(C^2\right)=0$ به‌دست می آید. برای تقارن مرتبه بالاتر $Y$ داریم:

$$\xi_1=\xi_2=0,\qquad W=\eta=xu_{xx}+2tu_{xxx}.$$

بنابراین مؤلفه های بردار پایستگی به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} C^1 &= \left[xu_{xx}+2tu_{xxx}\right]v, \\ C^2 &= \left[2t\left(u_t-u_{xx}-u_{xxx}\right)-u_{xx}-xu_{xxx}\right]v+\left[u_{xx}+2tu_{xxx}\right]v. \end{aligned}$$

## ۶.۲ روش مستقیم بهینه‌شده

ضعف عمده روش مستقیم در محاسبه شارها و چگالی‌های قانون پایستگی موضعی بود، چرا که در این روش یا باید به‌صورت مستقیم بدنبال دو چند جمله ای براساس متغیرهای وابسته

و مشتقات آن‌ها می پرداختیم که در نمایش دیورژانسی صادق باشند یا این که با فرمول‌های خاصی که معمولا شامل انتگرال گیری از جملات متعدد هستند به هدف خود می رسیدیم،از آن‌جاییکه در موارد پیچیده، دستگاه PDE شامل مشتقات مراتب بالا است انتگرال گیری به سادگی امکان پذیر نیست. در این بخش به معرفی روش دیگری برای یافتن قوانین پایستگی خواهیم پرداخت، که تا حد زیادی می‌تواند ضعف عمده روش مستقیم در محاسبه شارها و چگالی‌های قانون پایستگی را مرتفع کند .

در سال ۲۰۱۰ هرمان [1] و پل [2] روش زیر را برای یافتن قوانین پایستگی ارائه کردند [۴۴، ۴۵]. برای انجام محاسبات خود از نرم افزار متمتیکا استفاده نمودند و برای بیان الگوریتم خود به محاسبه قوانین پایستگی دو معادله کازنتسو ـ زاخارف (ZK) و کدامتسو ـ پتویاشویلی (KP) پرداختند. سپس روش خود را برای فضاهای چندبعدی تعمیم دادند.

۱. در این روش PDE مورد نظر باید به‌صورت تکاملی باشد.

۲. چگالی‌ها را به‌صورت ترکیب خطی (با ضرایب نامعین) از جملاتی در نظر بگیرید که نسبت به تقارن‌های تجانس PDE ناوردا باشند.

۳. چون معادله به فرم تکاملی است می‌توان جملات $u_t$ را از معادله حذف کرد و از این مساله که اثر عملگر اویلر بر عبارت دقیق باقی‌مانده حاصلی برابر با صفر دارد استفاده نمود تا به دستگاه خطی از ضرایب برسیم. با حل این دستگاه، ضرایب در نظر گرفته شده محاسبه می‌شوند.

۴. بعد از مشخص شدن ضرایب با استفاده از عملگر هوموتوپی (که در ادامه تعریف آن آمده است) شارهای متناظر با ضرایب مفروض به‌دست می‌آیند.

۵. قوانین پایستگی متناظر با چگالی و شارهای به‌دست آمده محاسبه می‌شوند.

ابتدا به معرفی یک عملگر هوموتوپی خاص که در [۴۵] مطرح شده است، می‌پردازیم. بنابراین عملگر هوموتوپی تعریف شده در ذیل با عملگرهای مطرح شده در [۱۵، ۲۳] که برحسب عملگرهای اویلر مرتبه بالاتر ساخته می‌شوند، متفاوت است.

**تعریف ۱.۶.۲.** عملگر هوموتوپی دو بعدی، عملگر برداری است با دو مؤلفه

$$\left(\mathcal{H}^x_{u(x,t)}(f), \mathcal{H}^t_{u(x,t)}(f)\right)$$

که در آن

$$\mathcal{H}^x_{u(x,t)}(f) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{q} I^x_{u^j}(f)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \mathcal{H}^t_{u(x,t)}(f) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{q} I^t_{u^j}(f)[\lambda u]\frac{d\lambda}{\lambda}. \qquad (۴۴.۲)$$

[1] Willy Hereman
[2] Douglas Poole

توابع زیر انتگرال $I^x_{u^j(x,t)}(f)$ و $I^t_{u^j(x,t)}(f)$ به صورت

$$\begin{aligned}
I^x_u(f) &= \sum_{k_1=1}^{M_1^j}\sum_{k_2=0}^{M_2^j}\left[\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k2} B^x u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1-1}(-D_t)^{k_2-i_2}\right]\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}},\\
I^t_u(f) &= \sum_{k_1=0}^{M_1^j}\sum_{k_2=1}^{M_2^j}\left[\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k2-1} B^t u_{x^{i_1}t^{i_2}}(-D_x)^{k_1-i_1}(-D_t)^{k_2-i_2-1}\right]\frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1}t^{k_2}}} \qquad (۴۵.۲)
\end{aligned}$$

نوشته می‌شوند که $M_1^j$ و $M_2^j$ به ترتیب مشتقات $f$ در $u$ نسبت به $x$ و $t$ هستند و ضرایب ترکیبی عبارتنداز:

$$B^x = B(i_1,i_2,k_1,k_2) = \frac{\binom{i_1+i_2}{i_1}\binom{k_1+k_2-i_1-i_2-1}{k_1-i_1-1}}{\binom{k_1+k_2}{k_1}},$$

$$B^t = B(i_1,i_2,k_1,k_2) = \frac{\binom{i_1+i_2}{i_2}\binom{k_1+k_2-i_1-i_2-1}{k_2-i_2-1}}{\binom{k_1+k_2}{k_1}}.$$

**قضیه ۱.۶.۲.** [۴۵] فرض کنید $f = f\left(x,t,\mathbf{u}^{(M)}(x,t)\right)$ تابعی دقیق باشد، یعنی $f = \mathrm{div}F$ برای $F = F\left(x,t,\mathbf{u}^{(M-1)}(x,t)\right)$. در این‌صورت برای حالت دوبعدی

$$F = \mathrm{div}^{-1}(f) = \left(\mathcal{H}^t_{\mathbf{u}(x,t)}(f), \mathcal{H}^x_{\mathbf{u}(x,t)}(f)\right).$$

این روش نیز محدودیت‌های خاص خود را دارد. بارزترین آن‌ها این است که معادله باید به صورت تکاملی نوشته شود که در برخی موارد این امکان وجود ندارد. از طرفی چگالی در نظر گرفته‌شده باید دارای تقارن‌های تجانسی باشد که ممکن است چنین تقارن‌هایی موجود نباشند.

در این بخش هدف ما ترکیب روش هرمان–پل با روش مستقیم است تا ضعف روش مستقیم در محاسبه چگالی و شارها برطرف شود و روش بهینه‌تری برای محاسبه قوانین پایستگی موضعی به‌دست آوریم.

الگوریتم روش مستقیم را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

۱. به ازای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) ابتدا می‌بایست به جستجوی ضرایب به صورت $\{\Lambda_\sigma(x,U,\ldots,\partial^r U)\}_{\sigma=1}^N$ به ازای مرتبه مشخص $N$ پرداخته شود.

۲. معادلات مشخصه (۸.۲) را برای تابع دلخواه $U(x)$ به منظور یافتن تمام ضرایب تابعی حل کنید.

۳. از عملگر هوموتوپی برای یافتن شارهای متناظر با ضرایب تابعی $\Phi^i[U]$ را استفاده نمایید .

۴. در نهایت هر شار و ضریب تابعی، یک قانون پایستگی $D_i\Phi^i(x,U,\ldots,\partial^r U) = 0$ نتیجه می‌دهد که به ازای تمام جواب های دستگاه (۱.۲) برقرار است.

**مثال ۱.۶.۲.** در این قسمت قوانین پایستگی دستگاه بازینسک (۳۳.۲) را به عنوان مثالی برای روش مستقیم بهینه شده می‌یابیم. برای این منظور فرض کنید ضرایب تابعی به صورت

$$\Lambda_1 = \xi\left(x,t,u,v,u_t,v_t,u_x,v_x\right), \qquad \Lambda_2 = \varphi\left(x,t,u,v,u_t,v_t,u_x,v_x\right)$$

هستند. برحسب عملگرهای اویلر_لاگرانژ

$$\begin{aligned} E_u &= \frac{\partial}{\partial u} - \mathrm{D}_x\frac{\partial}{\partial u_x} - \mathrm{D}_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \mathrm{D}_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \\ E_v &= \frac{\partial}{\partial v} - \mathrm{D}_x\frac{\partial}{\partial v_x} - \mathrm{D}_t\frac{\partial}{\partial v_t} + \mathrm{D}_x^2\frac{\partial}{\partial v_{xx}}, \end{aligned} \tag{۴۶.۲}$$

معادلات مشخصه (۸.۲) برای این دستگاه از رابطه زیر به‌دست می‌آیند:

$$E_u\left[\xi\left(x,t,u,\ldots,v_x\right)\left(u_t - v_{xx}\right) + \varphi\left(x,t,u,\ldots,v_x\right)\left(v_t - u_{xx} + u + u^2\right)\right] \equiv 0, \tag{۴۷.۲}$$

$$E_v\left[\xi\left(x,t,u,\ldots,v_x\right)\left(u_t - v_{xx}\right) + \varphi\left(x,t,u,\ldots,v_x\right)\left(v_t - u_{xx} + u + u^2\right)\right] \equiv 0, \tag{۴۸.۲}$$

که $u\left(x,t\right)$ و $v\left(x,t\right)$ تابع‌های دلخواه هستند. رابطه (۴۷.۲) جوابی به صورت زیر دارد:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{5}\left(-7\,tv_t - 5xv_x + 2t - v\right)C_1 - C_4\,v_x + x\,C_2 - v_t C_3 + C_5, \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{5}\left(7\,tu_t + 5xu_x + 4\,u + 2\right)C_1 + u_t C_3 + C_4\,u_x. \end{aligned}$$

در نتیجه ضرایب زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \left(\xi_1,\varphi_1\right) &= \left(-v_t, u_t\right), \\ \left(\xi_2,\varphi_2\right) &= \left(-v_x, u_x\right), \\ \left(\xi_3,\varphi_3\right) &= \left(1,0\right), \\ \left(\xi_4,\varphi_4\right) &= \left(x,0\right), \\ \left(\xi_5,\varphi_5\right) &= \left(-\frac{7}{5}\,tv_t - xv_x + \frac{2}{5}t - \frac{1}{5}v, \frac{7}{5}\,tu_t + xu_x + \frac{4}{5}\,u + \frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

که متناظر با هر $(\xi_i,\varphi_i)$ یک قانون پایستگی غیربدیهی مرتبه دوم با مشخصه

$$D_t\Psi^i + D_x\Phi^i \equiv 0,$$

نتیجه می‌شود. به منظور محاسبه مقادیر پایسته $\Psi^i$ و $\Phi^i$ از عملگرهای هوموتوپی استفاده می‌کنیم. در اینجا به دلیل روند طولانی محاسبات، قوانین پایستگی متناظر با ضریب $(\xi_1,\varphi_1)$ را به‌دست می‌آوریم و بقیه نتایج را به طور خلاصه آورده‌ایم. قرار می‌دهیم:

$$f = -v_t\left(u_t - v_{xx}\right) + u_t\left(v_t - u_{xx} + u + u^2\right),$$

بنابراین روابط متناظر (۴۵.۲) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
I^x_{u(x,t)}(f) &= \sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=1}^{2}\left(\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} B^x u_{i_1 t\, i_2 x}\left(-\mathrm{D}_t\right)^{k_1-i_1}\left(-\mathrm{D}_x\right)^{k_2-i_2-1}\right)\frac{\partial f}{\partial u_{k_1 t\, k_2 x}}\\
&= u\left(-\mathrm{D}_x\right)\frac{\partial f}{\partial u_{xx}} + u_x\frac{\partial f}{\partial u_{xx}} = u u_{tx} - u_t u_x,\\
I^x_{v(x,t)}(f) &= \sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=1}^{2}\left(\sum_{i_1=0}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} B^x v_{i_1 t\, i_2 x}\left(-\mathrm{D}_t\right)^{k_1-i_1}\left(-\mathrm{D}_x\right)^{k_2-i_2-1}\right)\frac{\partial f}{\partial v_{k_1 t\, k_2 x}}\\
&= v\left(-\mathrm{D}_x\right)\frac{\partial f}{\partial v_{xx}} + v_x\frac{\partial f}{\partial v_{xx}} = v_x v_t - v v_{tx}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I^t_{u(x,t)}(f) &= \sum_{k_1=1}^{1}\sum_{k_2=0}^{2}\left(\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2} B^t u_{i_1 t\, i_2 x}\left(-\mathrm{D}_t\right)^{k_1-i_1-1}\left(-\mathrm{D}_x\right)^{k_2-i_2}\right)\frac{\partial f}{\partial u_{k_1 t\, k_2 x}},\\
&= u\frac{\partial f}{\partial u_t} = -u u_{xx} + u^2 + u^3,\\
I^t_{v(x,t)}(f) &= \sum_{k_1=1}^{1}\sum_{k_2=0}^{2}\left(\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2} B^t v_{i_1 t\, i_2 x}\left(-\mathrm{D}_t\right)^{k_1-i_1-1}\left(-\mathrm{D}_x\right)^{k_2-i_2}\right)\frac{\partial f}{\partial v_{k_1 t\, k_2 x}},\\
&= v\frac{\partial f}{\partial v_t} = v v_{xx}.
\end{aligned}
$$

حال با جایگذاری $\lambda u$ و $\lambda v$ به جای $u$ و $v$ در روابط (۴۴.۲) و انتگرال‌گیری از آن‌ها نسبت به $\lambda$ روی بازه $[0,1]$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_{\mathbf{u}(x,t)}(f) &= \int_0^1\left(I^t_{u(x,t)}(f)[\lambda\mathbf{u}] + I^t_{v(x,t)}(f)[\lambda\mathbf{u}]\right)\frac{d\lambda}{\lambda}\\
&= \tfrac{1}{2}\left(v v_{xx} - u u_{xx} + u^2\right) + \tfrac{1}{3}u^3,\\
\mathcal{H}^x_{\mathbf{u}(x,t)}(f) &= \int_0^1\left(\mathcal{I}^x_{u(x,t)}(f)[\lambda\mathbf{u}] + \mathcal{I}^x_{v(x,t)}(f)[\lambda\mathbf{u}]\right)\frac{d\lambda}{\lambda}\\
&= \tfrac{1}{2}\left(u u_{tx} - u_t u_x - v v_{tx} + v_t v_x\right).
\end{aligned}
$$

از این رو برای معادله بازینسک متناظر با ضریب $(\xi_1,\varphi_1)$ قانون پایستگی موضعی زیر نتیجه می‌شود:

$$
D_t\left(v v_{xx} - u u_{xx} + u^2 + \tfrac{2}{3}u^3\right) + D_x\left(u u_{tx} - u_t u_x - v v_{tx} + v_t v_x\right) = 0.
$$

به طریق مشابه می‌توان متناظر با سایر ضرایب نیز قوانین پایستگی را محاسبه کرد. نتایج به طور خلاصه در جدول ۱.۲ آورده شده است.

جدول ۱.۲: عملگرهای هموتوپی نظیر ضرایب دستگاه بازینسک

| شار و چگالی | ضرایب |
|---|---|
| $\mathcal{H}^t_{\mathbf{u}(x,t)}(f)=\frac{1}{2}\left(vv_{xx}-uu_{xx}+u^2\right)+\frac{1}{3}u^3,$ <br> $\mathcal{H}^x_{\mathbf{u}(x,t)}(f)=\frac{1}{2}\left(uu_{tx}-u_tu_x-vv_{tx}+v_tv_x\right)$ | $(\xi_1,\varphi_1)=(-v_t,u_t)$ |
| $\mathcal{H}^t_{\mathbf{u}(x,t)}(f)=\frac{1}{2}\left(vu_x-uv_x\right),$ <br> $\mathcal{H}^x_{\mathbf{u}(x,t)}(f)=\frac{1}{2}\left(uv_t-vu_t+u^2-u_x^2+v_x^2+\frac{2}{3}u^3\right)$ | $(\xi_2,\varphi_2)=(-v_x,u_x)$ |
| $\mathcal{H}^t_{\mathbf{u}(x,t)}(f)=u,$ <br> $\mathcal{H}^x_{\mathbf{u}(x,t)}(f)=-v_x$ | $(\xi_3,\varphi_3)=(1,0)$ |
| $\mathcal{H}^t_{\mathbf{u}(x,t)}(f)=xu,$ <br> $\mathcal{H}^x_{\mathbf{u}(x,t)}(f)=v-xv_x$ | $(\xi_4,\varphi_4)=(x,0)$ |
| $\mathcal{H}^t_{\mathbf{u}(x,t)}(f)=\frac{1}{2}vu_t-\frac{1}{2}uv_x+\frac{2}{5}tu+\frac{7}{10}tu^2+\frac{7}{15}tu^3+\frac{3}{10}uv+\frac{7}{5}v_t-\frac{7}{5}tv_t-\frac{7}{10}tuu_{xx}+\frac{2}{5}v-$ $\frac{7}{10}tvu_t+\frac{1}{2}xvu_x+\frac{7}{10}tvv_{xx},$ <br> $\mathcal{H}^x_{\mathbf{u}(x,t)}(f)=\frac{1}{2}xu^2+\frac{1}{2}xu^3+\frac{1}{2}xuv_t+\frac{1}{2}uu_x-\frac{2}{5}u_x-\frac{1}{2}xu_x^2-\frac{7}{10}tu_tu_x+\frac{7}{10}tuu_{tx}-\frac{2}{5}tv_x+$ $\frac{1}{2}xv_x^2-\frac{1}{2}vv_x-\frac{1}{2}xvu_t-\frac{7}{10}tvv_{tx}+\frac{7}{10}tv_xv_t$ | $(\xi_5,\varphi_5)=(-\frac{7}{5}\,tv_t-xv_x+$ <br> $\frac{2}{5}t-\frac{1}{5}v,\frac{7}{5}\,tu_t+xu_x+\frac{4}{5}\,u+\frac{2}{5})$ |

# ۷.۲ دستگاه‌های پتانسیل به‌طور غیرموضعی مرتبط و زیردستگاه‌ها

یکی از روش‌های به دست آوردن تقارن‌های بیشتر برای یک معادله‌ی دیفرانسیل، استفاده از تقارن‌های معادلات یک دستگاه پتانسیل غیرموضعی مرتبط است. زیرا هر جواب یک دستگاه پتانسیل غیرموضعی مرتبط یک جواب برای معادله‌ی دیفرانسیل مفروض تولید می‌کند و برعکس هر جواب معادله‌ی دیفرانسیل مفروض نیز یک جواب برای دستگاه پتانسیل غیرموضعی مرتبط تولید می‌کند.

در این بخش، به گسترش یک چارچوب کلی به‌منظور یافتن دستگاه‌های به‌طور غیرموضعی مرتبط متناظر با آن دسته از معادلات دیفرانسیل جزئی که شامل دو متغیر مستقل هستند، می‌پردازیم. برای مشاهده توصیف کامل به [۱۵، ۱۶] مراجعه نمایید.

یک PDE اسکالر از $N$ معادله دیفرانسیل جزئی از مرتبه $k$ به صورت $U\{x,t;u\}$ با $q$ متغیر وابسته $u=(u^1,\ldots,u^q)$ و دو متغیر مستقل $(x,t)$ به صورت زیر در نظر بگیرید

$$U\{x,t;u\}:\Delta^\sigma[u]=\Delta^\sigma\left(x,t,u,\ldots,\partial^k u\right)=0,\qquad \sigma=1,\ldots,N. \tag{۴۹.۲}$$

در [۱۶] بلومن [1]، کومی [2] و رد [3] یک روش اصولی جهت محاسبه دستگاه‌های PDE به‌طور غیرموضعی مرتبط بر پایه قوانین پایستگی معرفی کرده‌اند. همان‌طور که پیشتر تعریف کردیم یک قانون پایستگی موضعی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۴۹.۲) یک عبارت دیورژانسی به صورت

$$D_t\Psi[u]+D_x\Phi[u]=0, \tag{۵۰.۲}$$

است که برای همه جواب‌های دستگاه (۴۹.۲) برقرار است.

[1] George W. Bluman [2] Sukeyuki Kumei [3] Gregory J. Reid

دستگاه $U\{x,t;u\}$ در صورت قانون پایستگی (۵۰.۲) در نظر بگیرید. هر قانون پایستگی (۵۰.۲)، یک جفت از معادلات پتانسیل به صورت $UV\{x,t;u,v\}$ به‌ازای متغیر پتانسیل دلخواه $v=v\left(x,t\right)$ به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\mathcal{P}:\begin{cases} v_x=\Psi\left[u\right], \\ v_t=-\Phi\left[u\right]. \end{cases} \qquad (۵۱.۲)$$

در رابطه (۵۱.۲) متغیر پتانسیل $v$، یک متغیر غیرموضعی است؛ یعنی اینکه نمی‌توان آن را به عنوان یک تابع موضعی برحسب متغیرهای مفروض $(x,t;u)$ و مشتقات جزئی $u$ بیان نمود.

**ملاحظه ۱.۷.۲.** شایان ذکر است که دستگاه PDE مفروض $U\{x,t;u\}$ و دستگاه پتانسیل متناظر $UV\{x,t;u,v\}$ هم‌ارز هستند. بدون از دست دادن کلیت مساله، دستگاه PDE مفروض را اسکالری درنظر می‌گیریم. دستگاه پتانسیل (۵۱.۲) $UV\{x,t;u,v\}$ لزوماً دارای مجموعه جوابی یکسان با PDE اسکالر مورد مطالعه یعنی (۴۹.۲) است. به‌خصوص، هرگاه $u=\theta\left(x,t\right)$، جوابی از معادله $U\{x,t;u\}$ باشد آنگاه با توجه به برقراری شرط انتگرال‌پذیری مبنی بر $v_{tx}=v_{xt}$، نتیجه می‌شود که یک جواب متناظر به فرم $v=\Xi\left(x,t\right)$ از دستگاه پتانسیل $UV\{x,t;u,v\}$ وجود دارد به‌طوری‌که در حد یک ثابت دلخواه یکتا است. به‌عبارت‌دیگر، هرگاه $(u,v)=\left(\theta\left(x,t\right),\Xi\left(x,t\right)\right)$ جوابی از دستگاه پتانسیل $UV\{x,t;u,v\}$ باشد آنگاه به‌ازای ثابت دلخواه $C$ بردار $(u,v)=\left(\theta\left(x,t\right),\Xi\left(x,t\right)+C\right)$ نیز جوابی از دستگاه مذکور خواهد بود. بالعکس، هرگاه $(u,v)=\left(\theta\left(x,t\right),\Xi\left(x,t\right)\right)$، دستگاه پتانسیل (۵۱.۲) را حل کند، آنگاه به‌واسطه تصویر $u=\theta\left(x,t\right)$ جوابی از دستگاه (۴۹.۲) خواهد بود. در نتیجه ارتباط بین جواب‌های دستگاه $U\{x,t;u\}$ و جواب‌های دستگاه پتانسیل آن یک به یک نیست. طریق این ارتباط موجود میان مجموعه جواب‌ها، دستگاه پتانسیل (۵۱.۲) به‌طور غیرموضعی هم ارز با (۴۹.۲) خواهد بود.

**تعریف ۱.۷.۲.** به یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که شامل یک دستگاه PDE داده‌شده به فرم $U\{x,t;u\}$ به همراه یک جفت از معادلات پتانسیل $\mathcal{P}$ (۵۱.۲)، که برگرفته از قانون پایستگی (۵۰.۲) هستند، یک دستگاه پتانسیل گفته می‌شود و آن را با نماد $UV\{x,t;u,v\}=U\{x,t;u\}\bigcup\mathcal{P}$ نمایش می‌دهیم.

شایان ذکر است که دستگاه پتانسیل $UV\{x,t;u,v\}$ را که شامل فقط یک متغیر پتانسیل $v$ می‌شود دستگاه پتانسیل یکتایی گوییم.

**ملاحظه ۲.۷.۲.** اگر در دستگاه پتانسیل $\mathcal{P}$ بتوان $v$ را به‌صورت تابعی از $x,t,u$ و مشتقات $u$ نوشت آن‌گاه $v$ یک متغیر موضعی است، در غیراین‌صورت آن را یک متغیر غیرموضعی گویند و دستگاه پتانسیل $\mathcal{P}$، یک دستگاه پتانسیل غیرموضعی مرتبط با معادله‌ی دیفرانسیل دلخواه $U$ خواهد بود. به برهان خلف، فرض کنید $v$ متغیرموضعی از $U\{x,t;u\}$ باشد، در این‌صورت به‌ازای تابع موضعی $F$ روی مجموعه جواب‌های $U\{x,t;u\}$ خواهیم داشت $v=F\left[u\right]$. در

نتیجه:

$$v_x = \Psi[u], \qquad v_t = -\Phi[u].$$

بنابراین:

$$D_x(F[u]) = \Psi[u], \qquad D_t(F[u]) = -\Phi[u],$$

بنابراین روی مجموعه جواب‌های $U\{x,t;u\}$ قانون پایستگی (۵۰.۲) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$D_t\Psi[u] + D_x\Phi[u] = D_t(D_x(F[u])) + D_x(D_t(F[u])) = 0,$$

که ایجاب می‌کند قانون پایستگی (۵۰.۲) بدیهی است و این یک تناقض با فرض غیربدیهی بودن قانون پایستگی (۵۰.۲) است لذا متغیر $v$ غیرموضعی است.

دستگاه‌های پتانسیل یک‌ـ تایی از مجموعه مستقل خطی از قوانین پایستگی به‌طور غیرموضعی مرتبط ناشی می‌شوند. قضیه مهم زیر در ارتباط با متغیرهای پتانسیلی که از قوانین پایستگی هم‌ارز نشأت گرفته شده‌اند، بیان می‌شود.

**قضیه ۱.۷.۲.** [۱۵] فرض کنید که دو قانون پایستگی هم ارز برای دستگاه $U\{x,t;u\}$ در اختیار باشد. در این‌صورت، متغیرهای پتانسیل $v^1, v^2$ به‌طور موضعی به یکدیگر مرتبط هستند. به خصوص، به ازای تابع دلخواه $f(x,t,u,\partial u,\ldots,\partial^s u)$ رابطه زیر برقرار است:

$$v^2 = v^1 + f(x,t,u,\partial u,\ldots,\partial^s u), \qquad s \geqslant 0.$$

بدون از دست دادن کلیت مساله، می‌توان معادلات پتانسیل را جایگزین معادلات پایسته و یا یکی از PDE های دستگاه مفروض نمود مشروط به آن‌که PDE مورد نظر قانون پایستگی با ضریب پایستگی غیرصفر ایجاد کند.

به‌طور مشابه، دستگاه‌های پتانسیل چندتایی با بیش از یک متغیر پتانسیل تشکیل می‌شوند. اگر دستگاه $U\{x,t;u\}$ دارای $q$ قانون پایستگی مستقل خطی به صورت زیر باشد:

$$D_t\Psi^i[u] + D_x\Phi^i[u] = 0, \qquad i = 1,\ldots,q, \tag{۵۲.۲}$$

در این‌صورت $q$ متغیر پتانسیل $v^i$ با معادلات پتانسیل زیر معرفی می‌شوند

$$v^i_x = \Psi^i[u], \qquad v^i_t = -\Phi^i[u]. \tag{۵۳.۲}$$

$i$ـ امین معادله از معادلات پتانسیل (۵۳.۲) با نماد $\mathcal{P}^i$ نمایش می‌دهیم. از طریق معادلات پتانسیل فوق، $q$ دستگاه پتانسیل $S^{(1)}\{x,t;u,v^i\} = U\{x,t;u\} \cup \mathcal{P}^i$ به‌دست می‌آید.

**تعریف ۲.۷.۲.** یک دستگاه پتانسیل $k$ـ تایی $(1 \le k \le q)$ نظیر دستگاه PDE $U\{x,t;u\}$ با $q$ قانون پایستگی مستقل خطی به صورت زیر است:

$$S^{(k)}\{x,t;u,v^{i_1},\ldots,v^{i_k}\} = U\{x,t;u\} \cup \mathcal{P}^{i_1} \cup \ldots \cup \mathcal{P}^{i_k}.$$

برای مثال با استفاده از دو قانون پایستگی یک دستگاه پتانسیل دوتایی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$UV^1V^2\{x,t;u,v^1,v^2\}:\begin{cases}\Delta^\sigma[u]=0, \quad \sigma=1,\dots,N,\\ v^1_x=\Psi_1\left(x,t,u,\dots,\partial^{k-1}u\right),\\ v^1_t=-\Phi_1\left(x,t,u,\dots,\partial^{k-1}u\right),\\ v^2_x=\Psi_2\left(x,t,u,\dots,\partial^{k-1}u\right),\\ v^2_t=-\Phi_2\left(x,t,u,\dots,\partial^{k-1}u\right)\end{cases}$$

نظیر دستگاه PDE $U\{x,t;u\}$ با $q$ قانون پایستگی مستقل خطی، $2^q-1$ دستگاه پتانسیل به‌صورت زیر ساخته می‌شود:

- $q$تا یکتایی: $S^{(1)}\{x,t;u,v^i\}\ (i=1,\dots,q)$.
- $\frac{1}{2}q\,(q-1)$ دوتایی: $S^{(2)}\{x,t;u,v^i,v^j\}\ (i,j=1,\dots,q)$ و $i\neq j$.
- $\vdots$
- یک $q$ـ تایی: $S^{(q)}\{x,t;u,v^1,\dots,v^q\}$.

**تعریف ۳.۷.۲.** دستگاه معادلات $U\{x,t;u\}$ با $q$ قانون پایستگی مستقل خطی در نظر بگیرید. مجموعه تمام $2^q-1$ دستگاه پتانسیل نظیر $q$ متغیر پتانسیل $v^1,\dots,v^q$ دستگاه پتانسیل مرکب نامند و با نماد $\mathbb{P}_{v^1\dots v^q}$ نشان می‌دهند.

**مثال ۱.۷.۲.** فرض کنید که $U\{x,t;u\}$ معرف معادله انتشار غیرخطی زیر باشد:

$$u_t=\left(L\left(u\right)\right)_{xx}, \tag{۵۴.۲}$$

که در آن $L\left(u\right)$ یک تابع دلخواه است. ازآنجایی‌که معادله (۵۴.۲) به صورت یک قانون پایستگی است، یک متغیر پتانسیل مانند $v$ معرفی نموده و دستگاه پتانسیل متناظر را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$UV\{x,t;u,v\}=0:\begin{cases}v_x=u,\\ v_t=\left(L\left(u\right)\right)_x,\end{cases} \tag{۵۵.۲}$$

همچنین معادله دوم از دستگاه (۵۵.۲) نیز یک قانون پایستگی است، از این رو می‌توان یک متغیر پتانسیل دیگر مانند $w$ را در نظر گرفت و دستگاه پتانسیل $UVW\{x,t;u,v,w\}$ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$UVW=\begin{cases}v_x=u,\\ w_x=v,\\ w_t=L\left(u\right).\end{cases}$$

سه دستگاه PDE $U\{x,t;u\}$، $UV\{x,t;u,v\}$ و $UVW\{x,t;u,v,w\}$ به‌طور غیرموضعی با یکدیگر مرتبط هستند.

هرگاه دستگاه مفروض شامل دو یا بیشتر قانون پایستگی مستقل خطی باشد علاوه بر دستگاه پتانسیل دوتایی، ترکیب خطی قوانین پایستگی با ضرایب غیرصفر تشکیل یک دستگاه پتانسیل طیفی می‌دهد. برای نمونه، با دو قانون پایستگی می‌توان نوشت:

$$UV_\lambda\{x,t;u,v_\lambda\}:\left\{\begin{array}{l}\Delta^\sigma[u]=0,\quad \sigma=1,\ldots,N,\\ (v_\lambda)_x=\Psi^1\left(x,t,u,\ldots,\partial^{k-1}u\right)+\lambda\Psi^2\left(x,t,u,\ldots,\partial^{k-1}u\right),\\ (v_\lambda)_t=-\left(\Phi^1\left(x,t,u,\ldots,\partial^{k-1}u\right)+\lambda\Phi^2\left(x,t,u,\ldots,\partial^{k-1}u\right)\right),\end{array}\right.$$

که در آن $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ یک پارامتر پیوسته است. دستگاه $UV_\lambda\{x,t;u,v_\lambda\}$ به‌طور غیرموضعی با هر دو دستگاه پتانسیل یکتایی با پتانسیل‌های $v^1,v^2$ مرتبط است؛ همچنین دو دستگاه پتانسیل طیفی $UV_\lambda\{x,t;u,v_\lambda\}$ و $UV_\kappa\{x,t;u,v_\kappa\}$ مشروط به $\lambda\neq\kappa$ به‌طور غیرموضعی مرتبط هستند. برای دستگاه‌ها با بیش از دو قانون پایستگی، دستگاه‌های پتانسیل طیفی کامل‌تری می‌توان ساخت.

## ۱.۷.۲ زیردستگاه‌های به‌طور غیرموضعی مرتبط

یک روش دیگر جهت ساخت دستگاه‌های به‌طور غیرموضعی مرتبط با دستگاه مفروض $U\{x,t;u\}$ تشکیل زیردستگاه‌های به‌طور غیرموضعی مرتبط است که با استخراج کردن یکی یا تعدادی بیشتر از متغیرهای وابسته آن با جایگذاری مشتقات به‌دست می‌آید؛ مشروط بر آنکه دو خاصیت مهم زیر برقرار باشد:

۱. هر جواب از این زیردستگاه، جوابی از $U\{x,t;u\}$ را نتیجه دهد؛

۲. جواب‌های زیردستگاه حاصل‌شده، تمامی جواب‌های $U\{x,t;u\}$ را نتیجه دهد.

یک زیردستگاه غیرموضعی مرتبط به یک معادله دیفرانسیل به دو روش زیر به دست می‌آید:

۱. حذف یک یا چند متغیر وابسته از دستگاه داده شده که زیردستگاه غیرموضعی نداریم، (روش مستقیم).

۲. حذف یک یا چند متغیر وابسته پس از عمل دسته‌ای از تبدیلات نقطه‌ای که به‌صورت جابه‌جایی متغیر مستقل و وابسته عمل می‌کنند، (روش غیرمستقیم).

از مباحث فوق، این‌گونه استنباط می‌شود که زیردستگاه‌های متناظر با یک دستگاه PDE مانند $U\{x,t;u\}$ ممکن است به‌طور موضعی یا غیرموضعی با آن مرتبط باشند. در مسائل کاربردی، زیردستگاه‌های به‌طور غیرموضعی مرتبط از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند؛ زیرا که به‌ازای یک دستگاه PDE مفروض تنها زیردستگاه‌های به‌طور غیرموضعی مرتبط قادر هستند که منجر

به پیدایش جواب‌های جدید گردند. قضیه زیر بیان می‌کند که زیردستگاه در چه صورت به‌طور غیرموضعی مرتبط با یک دستگاه PDE می‌باشد.

**قضیه ۲.۷.۲.** [۱۵] دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی $U\{x,t;u\}$ با متغیرهای وابسته $u=(u^1,\ldots,u^q)$ و متغیرهای مستقل $(x,t)$ درنظر بگیرید. زیردستگاه $\tilde{U}\{x,t;u^1,\ldots,u^{q-1}\}$ که با حذف یک متغیر وابسته مانند $u^q$ از دستگاه $U\{x,t;u\}$ به‌دست آمده است غیرموضعی مرتبط به این دستگاه است، هرگاه نتوان $u^q$ را مستقیماً از معادلات $U\{x,t;u\}$ به صورت ترکیبی از متغیرهای $(x,t,u^1,\ldots,u^{q-1})$ و مشتقات آن‌ها نوشت؛ در غیر این‌صورت زیردستگاه $\tilde{U}\{x,t;u^1,\ldots,u^{q-1}\}$ یک زیردستگاه موضعی مرتبط با دستگاه $U\{x,t;u\}$ است.

**مثال ۲.۷.۲.** دستگاه $UV\{x,t;u,v\}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$UV\{x,t;u,v\}=0:\begin{cases} v_x=u, \\ v_t=(L(u))_x\,. \end{cases} \tag{۵۶.۲}$$

در این‌صورت زیردستگاه

$$U=V\{x,t;v\}=0: v_t=(L(v_x))_x\,, \tag{۵۷.۲}$$

با حذف متغیر $u$ از دستگاه (۵۶.۲) به‌دست می‌آید. حال اگر $v(x,t)$ جوابی برای معادله‌ی (۵۷.۲) باشد ازآنجایی‌که $u=v_x$ آن‌گاه $(u,v)=(v_x,v)$ یک جواب دستگاه (۵۶.۲) خواهد بود. یعنی متغیر حذف شده‌ی $u$ را می‌توان به صورت تابعی از $v_x$ دانست. در نتیجه زیردستگاه مذکور به‌طور موضعی مرتبط با دستگاه پتانسیل (۵۶.۲) است. همچنین می‌توان متغیر $v$ را از دستگاه (۵۶.۲) حذف نمود و زیردستگاه جدید

$$U\{x,t;u\}=0: u_t=(L(u))_{xx}\,, \tag{۵۸.۲}$$

را ساخت، از آن‌جایی‌که متغیر $v$ به‌صورت تابع موضعی از $x,t,u$ و مشتقات $u$ از معادلات (۵۶.۲) قابل بیان نیست، زیردستگاه (۵۸.۲) به‌طور غیرموضعی مرتبط با دستگاه پتانسیل (۵۶.۲) است.

## ۲.۷.۲ تقارن‌های غیرموضعی

در این بخش دسته‌ای از تقارن‌های معادله‌ی دیفرانسیل $U\{x,t;u\}$ را مطالعه می‌کنیم که مولدهای بسیار کوچک آن‌ها روی فضای گسترش یافته‌ی $(x,t,u,v)$ عمل می‌کنند که در آن $v$ متغیر پتانسیل است. در واقع تقارن‌هایی را خواهیم یافت که از دستگاه پتانسیل غیرموضعی مرتبط به دست آمده‌اند.

فرض کنید که دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی $U\{x,t;u\}$ دارای یک دستگاه پتانسیل به صورت $UV\{x,t;u,v\}$ باشد به‌طوری‌که تحت گروه لی تک پارامتری از تقارن‌های نقطه‌ای

زیر ناوردا باشد:

$$\bar{x} = x + \varepsilon\xi_{UV}(x,t,u,v) + o(\varepsilon^2),$$
$$\bar{t} = t + \varepsilon\tau_{UV}(x,t,u,v) + o(\varepsilon^2),$$
$$\bar{u} = u + \varepsilon\eta_{UV}(x,t,u,v) + o(\varepsilon^2),$$
$$\bar{v} = v + \varepsilon\zeta_{UV}(x,t,u,v) + o(\varepsilon^2),$$

از این‌رو مولد بی‌نهایت کوچک آن به‌صورت زیر است:

$$X = \xi_{UV}(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial x} + \tau_{UV}(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^{\nu}_{UV}(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \zeta^{\mu}_{UV}(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial v}, \quad (۵۹.۲)$$

که در آن $\eta^{\nu}_{UV}$ ضرایب مولد بی‌نهایت کوچک نظیر متغیرهای وابسته $u^{\nu}$ $(\nu = 1,\dots,q)$ از دستگاه $U\{x,t;u\}$ و $\zeta^{\mu}_{UV}$ معرف ضرایب مولد بی‌نهایت کوچک نظیر متغیرهای پتانسیل $v^{\mu}$ $(\mu = 1,\dots,q)$ از دستگاه پتانسیل $UV\{x,t;u,v\}$ هستند.

**تعریف ۴.۷.۲.** تقارن نقطه‌ای (۵۹.۲) از دستگاه پتانسیل $UV\{x,t;u,v\}$ یک تقارن پتانسیل از دستگاه $U\{x,t;u\}$ تعریف می‌کند اگر و تنها اگر بی‌نهایت کوچک‌های

$$\left(\xi_{UV}\left(x,t,u,v\right),\, \tau_{UV}\left(x,t,u,v\right),\, \eta_{UV}\left(x,t,u,v\right)\right),$$

صراحتاً به یکی یا تعدادی بیشتر از مؤلفه‌های $v$ بستگی داشته باشند. به عبارت دیگر، هرگاه:

$$\xi^2_{UV}\left(x,t,u,v\right) + \tau^2_{UV}\left(x,t,u,v\right) + \eta^2_{UV}\left(x,t,u,v\right) > 0.$$

**قضیه ۳.۷.۲.** [۱۵] هر تقارن پتانسیل از $U\{x,t;u\}$ یک تقارن غیرموضعی از $U\{x,t;u\}$ مباشد.

تقارن‌های غیرموضعی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزئی می‌توانند نشأت گرفته از تقارن‌های پتانسیل (یعنی، تقارن‌های نقطه‌ای دستگاه‌های پتانسیل) و یا به عنوان تقارن‌های زیردستگاه‌های به‌طور غیرموضعی مرتبط باشند. در همین راستا، هر تقارن موضعی از $U\{x,t;u\}$ می‌تواند یک تقارن غیرموضعی از $UV\{x,t;u,v\}$ را نتیجه دهد (زیرا که $U\{x,t;u\}$ یک زیردستگاه به‌طور غیرموضعی مرتبط بدیهی برای $UV\{x,t;u,v\}$ محسوب می‌شود).

**مثال ۳.۷.۲.** در مثال (۱.۷.۲) دیدیم که معادله انتشار غیرخطی (۵۴.۲) دارای یک دستگاه پتانسیل غیرموضعی مرتبط (۵۵.۲) است. تقارن موضعی

$$X = v\frac{\partial}{\partial x} + \lambda t\frac{\partial}{\partial t} - \left(u^2+1\right)\frac{\partial}{\partial u} - x\frac{\partial}{\partial v},$$

از دستگاه پتانسیل (۵۵.۲) با فرض $L'\left(u\right) = \left(u^2+1\right)^{-1} e^{\lambda \tan^{-1} u}$ یک تقارن غیرموضعی از معادله انتشار غیرخطی (۵۴.۲) است.

جزییات رده‌بندی تقارن‌های غیرموضعی از معادله (۵۴.۲) را در [۱۵] ببینید.

مثال فوق، تقارن غیرموضعی نشأت‌گرفته از تقارن موضعی یک دستگاه پتانسیل را نشان می‌دهد. اکنون مثالی از تقارن غیرموضعی که تقارن موضعی از زیردستگاه غیرموضعی مرتبط است ارائه می‌دهیم.

**مثال ۴.۷.۲.** دستگاه لاگرانژ از دینامیک‌های گاز را به‌صورت زیر درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &q_x - v_y = 0, \\ &v_x + p_y = 0, \\ &p_x + B\left(p, q\right) v_y = 0, \end{aligned} \tag{۶۰.۲}$$

که در آن $B\left(p, q\right)$ تابع دلخواه باشد. با حذف $v$ از دستگاه (۶۰.۲) زیردستگاه به‌طور غیرموضعی مرتبط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &q_{xx} - p_{yy} = 0, \\ &p_x + B\left(p, q\right) q_x = 0. \end{aligned} \tag{۶۱.۲}$$

تقارن‌های موضعی

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\alpha e^p}{1 + \alpha e^p} q \frac{\partial}{\partial q}, \qquad Y_2 = y \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\alpha e^p}{1 + \alpha e^p} y q \frac{\partial}{\partial q},$$

از زیردستگاه پتانسیل (۶۱.۲) با فرض $B\left(p, q\right) = \left(1 + \alpha e^p\right)/q$ یک تقارن غیرموضعی از دستگاه (۶۰.۲) است. همچنین جزییات رده‌بندی تقارن‌های دستگاه (۶۰.۲) در [۱۵] بیان شده است.

# فصل ۳

# معادله انتشار موج برشی

بیماری‌های قلبی عروقی یکی از عوامل مهم مرگ و میر در جهان می‌باشد. عمده‌ی این بیماری‌ها بر اثر تجمع و نشست ذرات چربی و لیپوپروتئین‌های کم چگال در شریان‌ها به وجود می‌آیند که از جمله می‌توان به آترواسکلروز اشاره کرد. با توجه به این که انتقال جرم از لایه‌های رگ عامل اصلی این بیماری می‌باشد از این رو بررسی چگونگی و انجام این رفتار از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. یکي از پارامترهاي همودینامیکي که نقش مهمي در تعیین محل و نحوه پیشرفت بیماري‌هاي سیستم قلب و عروق داشته و از سال‌هاي دور مطرح بوده است، مقدار تنش برشي در دیواره شریان است. این پارامتر با تغییر پروفیل سرعت در نزدیکي دیواره رابطه دارد.

از گذشته تاکنون مدل‌های ریاضی متفاوتی برای بیان جریان خون در بافت و انتقال جرم در لایه‌های شریان بیان شده است. برای مدل‌سازی شریان‌ها، آن‌ها را به‌عنوان یک ماده تقویت‌شده با الیاف و معمولا به شکل یک استوانه کامپوزیتی سه لایه دارای خواص ناهمسانگردی و تقریبا تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود. در این بخش معادله انتشار موج برشی که برگرفته از مقاله [۲۴] است، مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. در این مدل شریان به صورت یک استوانه جدار ضخیم درنظر گرفته می‌شود که دو دسته الیاف کلاژن پیچشی در ماده زمینه آن بر روی بستر هایپرالاستیک قرار دارد.

## ۱.۳ معادله موج هایپرالاستیک

در مدلسازی مکانیکی شریان معادلات تعادل حاکم هستند. با اعمال این معادلات بر تنش‌های کوشی به‌دست آمده در [۲۴] معادله موج حاصل می‌شود. معادله حاکم با خانواده معادلات موج غیرخطی

$$\begin{aligned}\Delta : G_{tt} = &N_1\left(G_{RR}+\frac{G_R}{R}\right)-N_2G_R\left(2G_{RR}+\frac{G_R}{R}\right)\\&+N_3G_R^2\left(3G_{RR}+\frac{G_R}{R}\right)+\frac{N_4}{R},\end{aligned} \tag{۱.۳}$$

توصیف می‌شود که در آن جابجایی‌های عمودی $G(R,t)$ تابعی از شعاع مادی $R$ و زمان $t$ هستند. همچنین ضرایب $N_i$ به‌صورت

$$\begin{aligned}N_1 &= \alpha-2\cos^2\beta\sin^2\delta\Big(2K_3\left(2\cos^2\beta\left(\cos^2\delta+1\right)-3\right)\left(2\cos^2\beta\cos^2\delta-1\right)^2\\&\quad+K_4\left(2\cos^2\beta\cos^2\delta-1\right)+8q\left(\cos^2\beta-1\right)\Big),\\N_2 &= 24\cos^3\beta\sin\beta\sin^3\delta\left(2K_3\left(\cos^2\beta\cos^2\delta-\frac{1}{2}\right)^2+q\right),\\N_3 &= 8\cos^4\beta\sin^4\delta\left(2K_3\left(\cos^2\beta\cos^2\delta-\frac{1}{2}\right)^2+q\right),\\N_4 &= 4\cos\beta\sin\beta\sin\delta\left(8K_3\left(\cos^2\beta\cos^2\delta-\frac{1}{2}\right)^2+K_4\right),\end{aligned}$$

شامل پارامترهای $q, K_3, K_4, \beta, \delta$ و $\alpha$ هستند. با جایگذاری مقادیر متفاوت ثابت‌های $N_i$ معادله (۱.۳) به حالت‌های زیر کاهش داده می‌شود.

اول . در حالت کلی $N_i > 0$ ( $i = 1, \ldots, 4$) در نظر گرفته می‌شود که معادله به صورت (۱.۳) داده شده است.

دوم . زمانی که $\delta = 0$ داریم: $N_i = 0$ ($i = 2, 3, 4$) که اثرات فیبر صفر شده و در نتیجه‌ی آن یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی و همگن به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

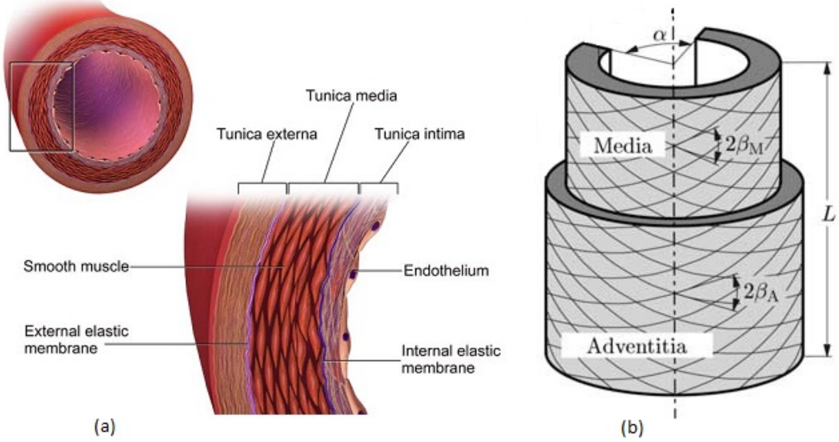
$$G_{tt} = \alpha\left(G_{RR}+\frac{G_R}{R}\right). \tag{۲.۳}$$

این معادله به‌صورت عددی و تحلیلی توسط شویاکوف [۱] مطالعه شده است [۲۴].

سوم . در حالتی که $\beta$ (زاویه‌ی بین فیبرهای کلاژن در پیچش تقارنی و راستای محیطی دایره در صفحه $xy$ در لایه‌های مدیا و ادونتیا صفر باشد) ضرایب $N_2$ و $N_4$ صفر باشند که در

[1] Alexey Shevyakov

شکل ۱.۳: $(a)$ یک طرح کلی از آناتومی ساختار دیواره‌ی رگ: نمایشی از مولفه‌های یک شریان الاستیک سالم تشکیل شده از سه لایه: اینتیما، مدیا و ادونتیس ؛ $(b)$ زاویه $\beta$ بین دو فیبر پیچشی.




این صورت فیبرها مسطح هستند. در شکل ۱.۳ زاویه $\beta$ مشخص شده است. در نتیجه، معادله کاهش‌یافته به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$G_{tt} = N_1 \left( G_{RR} + \frac{G_R}{R} \right) + N_3 G_R^2 \left( 3G_{RR} + \frac{G_R}{R} \right),$$

که در آن

$$\begin{aligned} N_1 &= \alpha - 2\sin^2\delta \left( 2K_3 \left( 2\left(\cos^2\delta + 1\right) - 3 \right) \left( 2\cos^2\delta - 1 \right)^2 + K_4 \left( 2\cos^2\delta - 1 \right) \right), \\ N_3 &= 8\sin^4\delta \left( 2K_3 \left( \cos^2\delta - \frac{1}{2} \right)^2 + q \right). \end{aligned}$$

چهارم . هرگاه $K_3 = q = 0$ که با صفر شدن عبارات مربوط به فیبر در تابع انرژی ذخیره شده هایپرالاستیک پدیدار می‌شود در این حالت $N_2 = N_3 = 0$. در نتیجه مدل به PDE همگن خطی زیر

$$G_{tt} = N_1 \left( G_{RR} + \frac{G_R}{R} \right) + \frac{N_4}{R}, \tag{۳.۳}$$

با ضرایب

$$N_1 = \alpha - 2K_4 \cos^2\beta \sin^2\delta \left( 2\cos^2\beta\cos^2\delta - 1 \right), \qquad N_4 = 2K_4 \sin\delta \sin 2\beta,$$

کاهش می‌یابد.

## ۲.۳ تقارن، قوانین پایستگی و اصل تغییرات معادله (۱.۳)

معادله خطی‌شده (۱.۳) روی جواب‌های معادله برابر است با:

$$\begin{aligned} L\left[G\right]W &= W_{tt} - N_1 W_{RR} - 2N_2 G_{RR} W_R - 2N_2 G_R W_{RR} - 3N_3 G_R^2 W_{RR} - 6N_3 G_R G_{RR} W_R \\ & -\frac{1}{R}\left(N_1 W_R + 2N_2 G_R W_R + 3N_3 G_R^2 W_R\right). \end{aligned}$$

در حالی که معادله خطی شده الحاقی متناظر آن به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} L^*\left[G\right]V &= V_{tt} - N_1 V_{RR} + 2N_2 G_{RR} V_R + 2N_2 G_R V_{RR} - 3N_3 G_R^2 V_{RR} - 6N_3 G_R G_{RR} V_R \\ & +\frac{1}{R}\left(3N_3 G_R^2 V_R - 2N_2 G_{RR} V + 6N_3 G_R G_{RR} V - 2N_2 G_R V_R + N_1 V_R\right) \\ & -\frac{1}{R^2}\left(N_1 V - 2N_2 G_R V + 3N_3 G_R^2 V\right). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه معادله خطی‌شده (۱.۳) با معادله الحاقی متناظرش مغایرت دارد خانواده معادلات (۱.۳) اصل تغییراتی نمی‌پذیرد. با این وجود، خانواده مذکور با یک عامل انتگرال تغییراتی $R$، یک معادله اویلر_لاگرانژ برای اکسترممی از انتگرال کنش با لاگرانژی نظیر

$$\mathcal{L} = \frac{R}{12}\left(6G_t^2 - 6N_1 G_R^2 + 4N_2 G_R^3 - 3N_3 G_R^4 + \frac{12}{R} N_4 G\right), \qquad (۴.۳)$$

است؛ یعنی $E_u(L) = R\Delta$. برای یک دستگاه PDE تغییراتی، هر ضریب قانون پایستگی یک تقارن موضعی نتیجه می‌دهد و بنابراین تعداد قوانین پایستگی از تعداد تقارن‌های موضعی تجاوز نمی‌کند. اکنون یک مقایسه بین تقارن‌های نقطه‌ای و ضرایب قانون پایستگی خانواده (۱.۳) برحسب رده‌بندی $N_i$ها حاصل شده است. جدول ۱.۳ تعداد قوانین پایستگی و تقارن‌های حالت‌های رده‌بندی شده را نشان می‌دهد. برای جزییات این رده‌بندی بخش ۲.۲.۳ را ببینید. از جدول ۱.۳، می‌توان دید که تمام تقارن‌های خانواده (۱.۳) به جز تقارن تجانس، تغییراتی

جدول ۱.۳: رده‌بندی تعداد قوانین پایستگی و تقارن‌های نقطه‌ای از خانواده (۱.۳)بر حسب ثابت‌های $N_i$

| حالت | ثابت | #تقارن | # ضرایب قوانین پایستگی |
|---|---|---|---|
| اول | $N_i \neq 0, i = 1\ldots 4$ | 4 | 3 |
| دوم | $N_2^2 = 3N_1N_3,\ N_2^3 = -27N_4N_3^2$ | 5 | 4 |
| سوم | $N_3 = 0,\ N_1^2 = -4N_2N_4$ | 5 | 4 |
| چهارم | $N_i = 0, i = 2, 3$ | $\infty$ | $\infty$ |

هستند. برای حالت دوم یک تقارن تغییراتی اضافی متناظر یک ضریب قانون پایستگی وجود دارد. همچنین یک تقارن غیرتغییراتی اضافی برای حالت سوم به‌دست می‌آید. علاوه‌براین، خانواده معادلات (۱.۳) در حالت خطی که $N_2 = N_4 = 0$ بی‌نهایت تقارن نقطه‌ای و قانون پایستگی دارد.

### ۱.۲.۳ تبدیلات هم‌ارز

تبدیلات هم‌ارز برای مدل (۱.۳) به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} R^* &= R^*(R,t,G), \qquad t^* = t^*(R,t,G), \qquad G^* = G^*(R,t,G), \\ N_i^* &= N_i^*(N_1,N_2,N_3,N_4), \qquad i = 1,\dots,4. \end{aligned}$$

برای وارون‌پذیری، می‌بایست داشته باشیم $\partial(R^*,t^*,G^*)/\partial(R,t,G) \neq 0$. با به کارگیری روش‌های استفاده شده در مراجع [۱۵، ۵۲، ۹۶] گروه‌های لی از تبدیلات هم‌ارز خانواده معادلات (۱.۳) با جبرلی تولیدشده توسط مولدهای زیر قابل محاسبه است

$$\begin{aligned} V_1 &= N_1\frac{\partial}{\partial N_4} - 2N_2\frac{\partial}{\partial N_1} - 3N_3\frac{\partial}{\partial N_2} - R\frac{\partial}{\partial G}, \\ V_2 &= \frac{2N_1}{3}\frac{\partial}{\partial N_1} + \frac{N_2}{3}\frac{\partial}{\partial N_2} + N_4\frac{\partial}{\partial N_4} - \frac{R}{3}\frac{\partial}{\partial R} - \frac{2t}{3}\frac{\partial}{\partial t}, \\ V_3 &= \frac{N_1}{3}\frac{\partial}{\partial N_1} + \frac{2N_2}{3}\frac{\partial}{\partial N_2} + N_3\frac{\partial}{\partial N_3} + \frac{R}{3}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{t}{6}\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری نتیجه زیر حاصل می‌شود.

**قضیه ۱.۲.۳.** گروه هم‌ارزی از خانواده معادلات (۱.۳) تبدیلاتی به‌صورت

$$\begin{aligned} R^* &= B_2^{-1}B_3^2R, \qquad t^* = B_2^{-2}B_3t, \qquad G^*(R^*,t^*) = G(R,t) - B_1R, \\ N_1^* &= B_2^2B_3^2\left(N_1 - 2B_1N_2 + 3B_1^2N_3\right), \qquad N_2^* = B_2B_3^4\left(N_2 - 3B_1N_3\right), \\ N_3^* &= B_3^6N_3, \qquad N_4^* = B_2^3\left(N_4 + B_1N_1 - B_1^2N_2 + B_1^3N_3\right), \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

است که در آن ثابت‌های $B_1, B_2, B_3 \in \mathbb{R},\ B_2 > 0,$ دلخواه هستند.

به‌وضوح تبدیلات (۵.۳) هر معادله از خانواده معادلات (۱.۳) را به معادله‌ای با فرم یکسان می‌نگارند.

$$\begin{aligned} G^*_{t^*t^*} =& N_1^*\left(G^*_{R^*R^*} + \frac{G^*_{R^*}}{R^*}\right) - N_2^*G^*_{R^*}\left(2G^*_{R^*R^*} + \frac{G^*_{R^*}}{R^*}\right) \\ &+ N_3^*G^{*2}_{R^*}\left(3G^*_{R^*R^*} + \frac{G^*_{R^*}}{R^*}\right) + \frac{N_4^*}{R^*}. \end{aligned} \tag{۶.۳}$$

با استفاده از تبدیلات هم‌ارز (۵.۳)، می‌توان معادله (۶.۳) را به فرم ساده‌تری کاهش داد. اکنون رده‌بندی از فرم‌های ساده‌تر معادله فوق نسبت به ثابت‌های $N_i, i = 1,\dots,4$ ارائه می‌دهیم.

**حالت اول: کلی**

۱. یک ساده‌سازی از معادله موج (۱.۳) در حالت کلی $N_i \neq 0,\ i=1,\ldots,4,$ با حذف اثر منبع $N_4/R$ و تغییر مقیاس $N_3$ و $N_2$ حاصل می‌شود. با استفاده از تبدیلات (۵.۳) با انتخاب

$$B_3 = \frac{1}{\sqrt[6]{N_3}}, \qquad B_2 = \frac{N_3^{\frac{2}{3}}}{N_2 - 3N_3\, B_1},$$

که در آن $B_1$ ریشه معادله $N_3B_1^3 - N_2B_1^2 + N_1B_1 + N_4 = 0$ است. بنابراین صورت هم‌ارز از خانواده معادلات (۱.۳) برابر است با:

$$G^*_{t^*t^*} = N_1^* \left(G^*_{R^*R^*} + \frac{G^*_{R^*}}{R^*}\right) - G^*_{R^*}\left(2G^*_{R^*R^*} + \frac{G^*_{R^*}}{R^*}\right) + G^{*^2}_{R^*}\left(3G^*_{R^*R^*} + \frac{G^*_{R^*}}{R^*}\right).$$

۲. یک صورت ساده دیگر از معادلات (۱.۳) در حالت کلی $N_i \neq 0$ با حذف پارامتر $N_2$ حاصل می‌شود. همچنین می‌توان پارامترهای $N_3$ و $N_1$ را یک نمود. برای این هدف، تبدیلات هم‌ارز متناظر (۵.۳) با انتخاب

$$B_1 = \frac{N_2}{3N_3}, \qquad B_3 = \frac{1}{\sqrt[6]{N_3}}, \qquad B_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{N_3}\sqrt{3N_3N_1 - N_2^2}},$$

در نظر می‌گیریم در این صورت خانواده معادلات (۱.۳) در حالت کلی به صورت ساده زیر نگاشته می‌شود:

$$G^*_{t^*t^*} = \left(G^*_{R^*R^*} + \frac{G^*_{R^*}}{R^*}\right) + G^{*^2}_{R^*}\left(3G^*_{R^*R^*} + \frac{G^*_{R^*}}{R^*}\right) + \frac{N_4^*}{R^*}.$$

حال تبدیلات هم‌ارز برای حالت‌های خاص از معادله (۱.۳) مطابق جدول ۱.۳ تعیین می‌کنیم.

**حالت دوم: $\mathbf{N_2^2 - 3N_1N_3 = 0,\ N_2^3 + 27N_4N_3^2 = 0}$**، در این حالت خانواده معادلات (۱.۳) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} G_{tt} =& \frac{N_2^2}{3N_3}\left(G_{RR} + \frac{G_R}{R}\right) - N_2G_R\left(2G_{RR} + \frac{G_R}{R}\right) \\ &+ N_3G_R^2\left(3G_{RR} + \frac{G_R}{R}\right) - \frac{N_2^3}{27N_3^2R}, \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

که تبدیلات هم‌ارز متناظر به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{B_3^2}{B_2}R, \qquad t^* = \frac{B_3^3}{B_2^2}t, \qquad G^*(R^*,t^*) = G(R,t) + B_1R, \\ N_2^* &= B_2\left(N_2 + 3B_1N_3\right), \qquad N_3^* = B_3^2N_3. \end{aligned}$$

فرض کنید $B_1 = -\frac{N_2}{3N_3}$ و $B_3 = \frac{1}{\sqrt{N_3}}$، در این صورت معادله (۷.۳) به صورت ساده هم‌ارز زیر کاهش داده می‌شود:

$$G^*_{t^*t^*} = G^{*^2}_{R^*}\left(3G^*_{R^*R^*} + \frac{G^*_{R^*}}{R^*}\right).$$

**حالت سوم:** $\mathbf{N_3=0,\ N_1^2+4N_2N_4=0}$، در این حالت خانواده معادلات (۱.۳) به‌صورت

$$G_{tt}=N_1\left(G_{RR}+\frac{G_R}{R}\right)-N_2G_R\left(2G_{RR}+\frac{G_R}{R}\right)-\frac{N_1^2}{4N_2R}, \tag{۸.۳}$$

است. تبدیلات هم‌ارز دو پارامتری متناظر به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{B_2}{B_3^2}R, \qquad t^*=\frac{B_2}{B_3^3}t, \qquad G^*\left(R^*,t^*\right)=G\left(R,t\right)+B_1R,\\ N_1^* &= B_3^2\left(N_1+2B_1N_2\right), \qquad N_2^*=B_2N_2. \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

معادله (۸.۳) را می توان به صورت

$$G^*_{t^*t^*}=-G^*_{R^*}\left(2G^*_{R^*R^*}+\frac{G^*_{R^*}}{R^*}\right),$$

با انتخاب $B_1=-\frac{N_1}{2N_2}$ و $B_2=\frac{1}{N_2}$ در تبدیلات هم‌ارز (۹.۳) کاهش داد.

**حالت چهارم:** $\mathbf{N_2=N_3=0}$، فرض می‌کنیم $K_3=q=0$. در نتیجه ثابت‌های $N_2$ و $N_3$ صفر خواهند شد. صورت کاهش‌یافته (۳.۳) به (۲.۳) از طریق تبدیلات هم‌ارز

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{B_3^2}{B_2}R, \qquad t^*=\frac{B_3}{B_2}t, \qquad G^*\left(R^*,t^*\right)=G\left(R,t\right)-B_1R,\\ N_1^* &= B_3^2N_1, \qquad N_4^*=B_2\left(N_4+B_1N_1\right), \end{aligned}$$

با جایگذاری

$$B_1=\frac{-N_4}{N_1}, \qquad B_3=\frac{1}{\sqrt{N_1}},$$

حاصل می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود معادله زیر از خانواده (۳.۳) با معادله خطی همگن (۲.۳) هم‌ارز است که در آن $\alpha=1$

$$G^*_{t^*t^*}=G^*_{R^*R^*}+\frac{G^*_{R^*}}{R^*}. \tag{۱۰.۳}$$

## ۲.۲.۳ آنالیز تقارن لی

### رده‌بندی تقارن‌ها

اکنون گروه‌های لی از تبدیلات نقطه‌ای خانواده PDE (۱.۳) را محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} R &= f\left(R,t,G;\varepsilon\right)= R+\varepsilon\xi\left(R,t,G\right)+O\left(\varepsilon^2\right),\\ t &= g\left(R,t,G;\varepsilon\right)= t+\varepsilon\tau\left(R,t,G\right)+O\left(\varepsilon^2\right),\\ G &= h\left(R,t,G;\varepsilon\right)= G+\varepsilon\phi\left(R,t,G\right)+O\left(\varepsilon^2\right), \end{aligned}$$

به طوری که $\varepsilon$ پارامتر گروهی و مولد تقارن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial R} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial G}.$$

فرم تکاملی این مولد به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{X} = \hat{\eta}\frac{\partial}{\partial G}, \quad \hat{\eta} = \eta - \xi G_R - \tau G_t.$$

تقارن‌های نقطه‌ای غیربدیهی خانواده معادلات (۱.۳) با استفاده از بسته نرم‌افزاری $GeM$ در میپل نسبت به پارامترهای $N_i$ حول تبدیلات هم‌ارز (۵.۳) رده‌بندی می‌کنیم. تقارن‌های نقطه‌ای و قوانین پایستگی اضافی از معادله (۱.۳) برای برخی حالت‌های خاص از پارامترها حاصل می‌شود که در جدول ۱.۳ درنظر گرفته شده است. جدول ۲.۳ رده‌بندی از تقارن‌های نقطه‌ای معادله (۱.۳) برحسب پارامترهای $N_i$ را نشان می‌دهد.

جدول ۲.۳: رده‌بندی از تقارن‌های نقطه‌ای(۱.۳).

| حالت | معادله | # | تقارن |
|---|---|---|---|
| 1 | (۶.۳) | 4 | $X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = t\,\frac{\partial}{\partial G},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial G},\ X_4 = R\,\frac{\partial}{\partial R} + t\,\frac{\partial}{\partial t} + G\,\frac{\partial}{\partial G}$ |
| ۲ | (۷.۳) | 5 | $X_1,\ldots,X_4,\ X_5 = \frac{1}{N_2}\left(N_2 R\,\frac{\partial}{\partial G} + 3N_3 R\frac{\partial}{\partial R} + 6N_3 t\frac{\partial}{\partial t}\right)$ |
| سوم | (۸.۳) | 5 | $X_1,\ldots,X_4,\ X_6 = \frac{1}{N_1}\left(N_1 R\frac{\partial}{\partial G} + 2N_2 R\frac{\partial}{\partial R} + 3N_2 t\frac{\partial}{\partial t}\right)$ |
| چهارم | (۳.۳) | $\infty$ | $X_1,\ X_3,\ X_4,\ X_7 = \ln(R)\,\frac{\partial}{\partial G},\ X_8 = \frac{1}{N_4}\left(N_4 R\frac{\partial}{\partial G} - N_1 R\frac{\partial}{\partial R} - N_1 t\frac{\partial}{\partial t}\right),$<br>$X_9 = \left(tG + 3\frac{N_4}{N_1}tR\right)\frac{\partial}{\partial G} - \left(\frac{R^2}{N_1} + t^2\right)\frac{\partial}{\partial t} - 2tR\frac{\partial}{\partial R},\ X_\infty = h(R,t)\frac{\partial}{\partial G},$<br>به طوری که $h\,(R,t)$ جواب دلخواهی از معادله همگن (۲.۳) است. |

در کلی‌ترین حالت، معادله (۶.۳) چهار تقارن نقطه‌ای: انتقال زمان، انتقال فضا اویلری، گالیله و یک تجانس فضاـزمان با مولدهای $X_1$، $X_2$، $X_3$ و $X_4$ دارد. به‌وضوح تقارن تجانس، یک تقارن تغییراتی نظیر تابعک عمل $\mathcal{L}[G]$ (۲.۳) نیست درحالی‌که سایر تقارن‌ها تغییراتی هستند. تقارن‌های اضافی $X_5$ و $X_6$ به ترتیب در حالت‌های دوم و سوم نتیجه می‌شوند. علاوه‌براین معادله همگن خطی (۳.۳) بی‌نهایت تقارن با مولد بی‌نهایت کوچک $X_\infty = h\partial/\partial G$، وابسته به تابع هموار دلخواه $h\,(R,t)$ دارد که در معادله خطی (۲.۳) صدق می‌کند. همچنین تقارن‌های $X_7$ ( گالیله‌ای) و $X_8$، $X_9$ در این حالت خاص نتیجه می‌شود . حالت خطی دارای تقارن مرتبه بالاتر (لی‌ـ بکلاند) با مولد زیر است:

$$\hat{X} = \frac{1}{N_1 R}\left(N_1 G_R + N_4 + N_1 G_{RR}\right)\frac{\partial}{\partial G}.$$

### ۳.۲.۳ قوانین پایستگی

همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، قانون پایستگی یک عبارت دیورژانسی است که روی فضای جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل صفر می‌شود. برای معادله (۱.۳) این عبارت دیورژانسی به صورت زیر است:

$$D_t\Psi + D_R\Phi = 0, \tag{۱۱.۳}$$

که در آن $\Psi = \Psi[G]$ و $\Phi = \Phi[G]$ چگالی و شار پایسته، توابع دیفرانسیلی موضعی روی فضای جواب معادله (۱.۳) هستند. با انتگرال‌گیری از معادله (۱۱.۳) روی دامنه $\Omega \subset \mathbb{R}$، قانون پایستگی فراگیر حاصل می‌شود

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \Phi dR = -\Psi|_{\partial\Omega}.$$

از آنجایی که معادله (۱.۳)، یک معادله اویلر–لاگرانژ با لاگرانژی (۲.۳) است، تمام قوانین پایستگی نظیر ضرایب پایستگی به‌صورت $\Lambda = R\hat{\eta}$ هستند که $\hat{\eta}$ تابع مشخصه از تقارن تغییراتی $\hat{X}$ است. با اعمال شرایط تغییراتی نظیر ترکیب خطی تقارن‌های جدول ۲.۳ مشاهده می‌شود که تقارن‌های $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ و $\hat{X}_3$ در حالت کلی، $\hat{X}_5$ در حالت $A$، تقارن $3\hat{X}_6 - \hat{X}_4$ در حالت سوم و تقارن‌های $1/2\left(3\hat{X}_8 + 2\hat{X}_4\right)$ و $\hat{X}_9$ در حالت چهارم تمام تقارن‌های تغییراتی را تولید می‌کنند.
اکنون تمام ضرایب قوانین پایستگی مرتبه اول به صورت زیر را برای معادله (۱.۳) و مدل‌های هم‌ارزی می‌یابیم

$$\Lambda = \Lambda\left(R, t, G, G_R, G_t\right), \tag{۱۲.۳}$$

به‌قسمی که

$$\Lambda\Delta = D_t\Psi + D_R\Phi.$$

عبارت $\Lambda\Delta$ دیورژانسی است اگر و تنها اگر توسط عملگر دیفرانسیلی اویلر نسبت به متغیر $G(R,t)$ پوچ شود؛ یعنی

$$E_G(\Lambda\Delta) \equiv 0, \tag{۱۳.۳}$$

به‌قسمی که

$$E_G = \frac{\partial}{\partial G} - D_R\frac{\partial}{\partial G_R} - D_t\frac{\partial}{\partial G_t} + D_R^2\frac{\partial}{\partial G_{RR}} + D_RD_t\frac{\partial}{\partial G_{Rt}} + D_t^2\frac{\partial}{\partial G_{tt}}.$$

معادلات مشخصه خطی (۱۳.۳) از ضرایب نامعلوم (۱۲.۳) نسبت به حالت‌های پارامتر طبق جدول ۱.۳ تفکیک می‌کنیم. نتایج این رده‌بندی در جدول ۳.۳ گردآوری شده است. در حالت خطی $C$ یک خانواده نامتناهی از ضرایب قانون پایستگی $\Lambda_\infty = h(R,t)$ به‌دست می‌آید که در آن $h$ در معادله الحاقی معادله همگن خطی $h_{tt} = N_1\left(h_{RR} + \frac{h_R}{R}\right)$ (۳.۳) صدق می‌کند.

**ملاحظه ۱.۲.۳.** این نکته حائز اهمیت است که ضریب $\Lambda_\infty$ شامل ضرایب $\Lambda_2$ و $\Lambda_3$ است.

**ملاحظه ۲.۲.۳.** ترکیب خطی از تقارن‌های تکاملی غیرتغییراتی $R\left(3\hat{\eta}_6-\hat{\eta}_4\right)$ نظیر ضریب $\Lambda_6$ یک تقارن تغییراتی است؛ ضریب $\Lambda_8$ نظیر تقارن تغییراتی $1/2\left(3\hat{\eta}_8+2\hat{\eta}_4\right)$ به‌صورت ترکیب خطی از تقارن‌های تکاملی غیرتغییراتی $\hat{\eta}_8$ و $\hat{\eta}_4$ در جدول ۳.۳ ناشی می‌شود.

جدول ۳.۳: تقارن‌های تکاملی و ضرایب پایستگی از خانواده معادلات(۱.۳)طبق جدول ۲.۳

| حالت | معادله | # | تقارن‌های تکاملی $\hat{\eta}\left(R,t,G,G_R,G_t\right)$ طبق جدول ۲.۳ | # | ضرایب $\Lambda\left(R,t,G,G_R,G_t\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (۶.۳) | 4 | $\hat{\eta}_1=G_t,\hat{\eta}_2=t,\hat{\eta}_3=1,\hat{\eta}_4=G-tG_t-RG_R$ | 3 | $\Lambda_1=RG_t,\Lambda_2=tR,\Lambda_3=R$ |
| $A$ | (۷.۳) | 5 | $\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2,\hat{\eta}_3,\hat{\eta}_4,$ <br> $\hat{\eta}_5=N_2R-6N_3tG_t-3N_3RG_R$ | 4 | $\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3,$ <br> $\Lambda_5=R\left(N_2R-6N_3tG_t-3N_3RG_R\right)$ |
| $B$ | (۸.۳) | 5 | $\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2,\hat{\eta}_3,\hat{\eta}_4,$ <br> $\hat{\eta}_6=\frac{N_1}{N_2}R-3tG_t-2RG_R$ | 4 | $\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3,$ <br> $\Lambda_6=R\left(\frac{3N_1}{N_2}R-G-8tG_t-5RG_R\right)$ |
| چهارم | (۳.۳) | $\infty$ | $\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2,\hat{\eta}_3,\hat{\eta}_4,\hat{\eta}_7=\ln(R),$ <br> $\hat{\eta}_8=\frac{N_4}{N_1}R+tG_t+RG_R,$ <br> $\hat{\eta}_9=R^2G_t+N_1t^2G_t+2N_1RtG_R+N_1tG+3N_4Rt,$ <br> $\hat{\eta}_\infty=h(R,t)$ که $h(R,t)$ جواب دلخواهی از معادله همگن (۲.۳) است. | $\infty$ | $\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3,$ <br> $\Lambda_8=R\left(\frac{3N_4}{2N_1}R+tG_t+RG_R+\frac{1}{2}G\right),$ <br> $\Lambda_9=R\Big(R^2G_t+N_1t^2G_t+2N_1RtG_R+N_1tG+3N_4Rt\Big),$ <br> $\Lambda_\infty=Rh(R,t)$ که $h(R,t)$ جواب دلخواهی از معادله همگن (۲.۳) است. |

اکنون فرم دقیق از قانون پایستگی (۱۱.۳) را برای ضرایب مفروض در جدول ۳.۳ محاسبه می‌کنیم.

۱. قانون پایستگی انرژی به‌صورت

$$
\begin{aligned}
\Psi^1 &= \frac{R}{12}\left(6N_1G_R^2-4N_2G_R^3+3N_3G_R^4+12N_4G_R+6G_t^2\right),\\
\Phi^1 &= R\left(-N_1G_R+N_2G_R^2-N_3G_R^3-N_4\right)G_t,
\end{aligned}
$$

نظیر ضریب $\Lambda_1=RG_t$ محاسبه می‌شود.

۲. قانون پایستگی نظیر ضریب $\Lambda_2=tR$، با تقارن انتقال دامنه وابسته زمان (گالیله) به صورت $t\,\partial/\partial G$

$$
\begin{aligned}
\Psi^2 &= \frac{R}{2}\left(RG_R+2tG_t\right),\\
\Phi^2 &= -\frac{R}{2}\left(2N_1tG_R-2N_2tG_R^2+2N_3tG_R^3+2N_4t+RG_t\right),
\end{aligned}
$$

است.

۳. قانون پایستگی اندازه حرکت اویلر نظیر ضریب $\Lambda_3=R$ و تقارن انتقال فضای اویلری $\partial/\partial G$ به صورت زیر است .

$$
\Psi^3=RG_t,\qquad \Phi^3=-\left(RG_R+RG_R^2G_{Rt}+2RG_R^4G_{Rt}\right).
$$

۴. در حالت دوم ضریب اضافی $\Lambda_5$ نظیر فرم تکاملی از تقارن تجانس و انتقال $X_5$ است که قانون پایستگی با بردارهای پایسته به‌صورت

$$\begin{aligned}
\Psi^5 &= R\Big( N_3\left(18N_2^2tG_R - 36N_2N_3tG_R^2 + 27N_3^2tG_R^3 + 54N_3RG_t\right)G_R \\
&\quad -4N_2^3tG_R - 18N_2N_3RG_t + 54N_3^2tG_t^2\Big), \\
\Phi^5 &= -\frac{R}{6N_3}\Big(2N_2^4R + 81N_3^3\left(-4N_2R + 3N_3RG_R + 8N_3tG_t\right)G_R^3 - 24N_2^3N_3tG_t \\
&\quad +162N_2N_3^2\left(N_2R - 4N_3tG_t\right)G_R^2 - 36N_2^2N_3\left(N_2R - 6N_3tG_t\right)G_R + 162N_3^3RG_t^2\Big),
\end{aligned}$$

را برای معادله (۸.۳) نتیجه می‌دهد.

۵. در حالت سوم یک قانون پایستگی اضافی نظیر $\Lambda_6$ با بردارهای پایسته به صورت

$$\begin{aligned}
\Psi^6 &= R\Big[\left(-2N_1^2t + 4N_1N_2tG_R - \frac{8}{3}N_2^2tG_R^2 + 5N_2RG_t\right)G_R \\
&\quad -\left(3N_1R - N_2G - 4N_2tG_t\right)G_t\Big], \\
\Phi^6 &= \frac{R}{N_2}\Big[-\frac{3}{8}N_1^3R + N_2R\left(3N_1^2 - \frac{11}{2}N_1N_2G_R + \frac{10}{3}N_2^2G_R^2\right)G_R - \frac{5}{2}N_2^2RG_t^2 \\
&\quad +N_2\left(\frac{1}{4}N_1^2 - N_1N_2G_R + N_2^2G_R^2\right)\left(G + 8tG_t\right)\Big],
\end{aligned}$$

برای معادله (۷.۳) داریم.

۶. در حالت چهارم ضریب پایستگی اضافی $\Lambda_8$ نظیر فرم تکاملی تقارن $\hat{\eta}_8$ در جدول ۳.۳ است. مؤلفه‌های قانون پایستگی متناظر معادله (۳.۳) به فرم عبارت دیورژانسی (۱۱.۳) عبارتنداز:

$$\begin{aligned}
\Psi^8 &= R\Big(2N_4tG_R + N_1tG_R^2 + GG_t + 2RG_RG_t + tG_t^2\Big) + \frac{3N_4}{N_1}R^2G_t, \\
\Phi^8 &= -R\Big[N_4\left(G + 3RG_R + 2tG_t\right) + N_1\left(G + RG_R + 2tG_t\right)G_R + RG_t^2\Big] + \frac{3N_4^2}{2N_1}R^2.
\end{aligned}$$

۷. قانون پایستگی اضافی دیگر از حالت چهارم نظیر ضریب پایستگی $\Lambda_9$ در فرم دیورژانسی (۱۱.۳) به‌صورت

$$\begin{aligned}
\Psi^9 &= \frac{R}{4}\Big(R^2G_R^2 + t^2G_t^2 + RGG_R + N_1t^2G_R^2 + 4tRG_RG_t + 2N_4t^2G_R + 2tGG_t\Big) \\
&\quad +\frac{R^2}{3N_1}\left(3RG_t^2 + 8N_4RG_R + 18N_4tG_t\right), \\
\Phi^9 &= -\frac{tR}{2}\Big(N_1RG_R^2 + RG_t^2 + 3N_4RG_R + N_1tG_RG_t + N_1GG_R - N_4t^2G_t + N_4G\Big) \\
&\quad -\frac{R^2}{12N_1}\left(8N_4RG_t + 9N_4^2t + 3N_1GG_t + 6N_1RG_tG_R\right),
\end{aligned}$$

نظیر معادله (۷.۳) بیان می‌شود.

۸. در نهایت تعداد نامتناهی قانون پایستگی از ضرایب موضعی نظیر مولد تقارنی $X_\infty$ برای معادله (۱۰.۳) نتیجه می‌شود به‌طوری‌که رابطه زیر برقرار است:

$$\mathrm{Pr}^{(1)} X_\infty (L) = R\left(G_t h_t - \alpha\, G_R h_R\right) = D_t\left(R h_t G\right) - D_R\left(\alpha R h_R G\right).$$

قانون پایستگی متناظر به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} D_t\left(RhG_t - Rh_tG\right) + D_R\left(Rh_RG - RhG_R\right) = \\ h\left(RG_{tt} - G_R - RG_{RR}\right) - G\left(Rh_{tt} - h_R - Rh_{RR}\right), \end{aligned}$$

که در آن توابع $h$ و $G$ هر دو جوابی از معادله (۱۰.۳) هستند.

## ۳.۳ دستگاه‌های به طور غیرموضعی مرتبط با خانواده معادلات (۱.۳)

همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، بلومن و همکارانش در [۱۶] روشی جهت یافتن تقارن‌های جدید از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی معرفی نمودند مشروط به اینکه PDEها به فرم قانون پایستگی قابل بیان باشند. این تقارن‌های غیرموضعی را تقارن‌های پتانسیل نامیم.

به منظور یافتن تقارن‌های پتانسیل خانواده معادلات (۱.۳)، می‌بایست معادله مذکور را به فرم قانون پایستگی طبق بردارهای پایستگی جدول ۳.۳ نوشت. اگر دستگاه PDE مفروض شامل $n$ قانون پایستگی باشد با یک محاسبه مستقیم $2^n-1$ دستگاه به طور غیرموضعی مرتبط با در نظر گرفتن دستگاه‌های پتانسیل تکی ($n$ تا یکی)، زوج ($n(n-1)/2$ دوتایی‌ها)،...، تمام دستگاه‌ها (یک $n$ـ تایی)، به‌دست می‌آید. در نتیجه، هر یک از این $2^n-1$ دستگاه می‌توانند منجر به تقارن‌های غیرموضعی جدید و یا قوانین پایستگی غیرموضعی جدید از دستگاه PDE شوند. توجه نمایید که حالت خطی چهارم صرف‌نظر شده است.

**حالت کلی:** معادله (۱.۳) سه قانون پایستگی موضعی دارد لذا دستگاه‌های کمکی تکی به‌صورت

زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{GX}\{R,t,G,X\}=0:\begin{cases} X_R=\frac{R}{12}\left(4N_2G_R^3-12N_4G_R-6G_t^2-6N_1G_R^2-3N_3G_R^4\right), \\ X_t=R\left(N_2G_tG_R^2-N_1G_tG_R-N_3G_tG_R^3-N_4G_t\right); \end{cases}$$
(۱۴.۳)

$$\mathbf{GY}\{R,t,G,Y\}=0:\begin{cases} Y_R=-\frac{R}{2}\left(2tG_t+RG_R\right), \\ Y_t=-\frac{R}{2}\left(RG_t+2N_4t+2t\left(N_1-N_2G_R+N_3G_R^2\right)G_R\right); \end{cases}$$
(۱۵.۳)

$$\mathbf{GZ}\{R,t,G,Z\}=0:\begin{cases} Z_R=-RG_t, \\ Z_t=R\left(N_2G_R^2-N_1G_R-N_3G_R^3-N_4\right); \end{cases} \qquad (۱۶.۳)$$

**حالت دوم :** در این حالت، علاوه بر دستگاه‌های پتانسیل (۱۴.۳)، (۱۵.۳) و (۱۶.۳)، دستگاه پتانسیل $\mathbf{GA}\{R,t,G,A\}=0$ به‌صورت

$$\begin{cases} A_R=-R\Bigg(-4N_2^3tG_R+54N_3^2tG_t^2-18N_2N_3RG_t \\ 27N_3\left(N_3^2tG_R^3-36N_2N_3tG_R^2+18N_2^2tG_R+54N_3G_t\right)G_R\Bigg), \\ A_t=-\dfrac{R}{6N_3}\Bigg(2N_2^4R+81N_3^3\left(3N_3RG_R+8N_3tG_t-4N_2R\right)G_R^3 \\ -24N_2^3N_3tG_t+162N_2N_3^2\left(N_2R-4N_3tG_t\right)G_R^2 \\ +36N_2^2N_3\left(6N_3tG_t-N_2R\right)G_R+162N_3^3RG_t^2\Bigg). \end{cases} \qquad (۱۷.۳)$$

برخوردار است.

**حالت سوم:** علاوه بر دستگاه‌های پتانسیل (۱۴.۳)، (۱۵.۳) و (۱۶.۳)، دستگاه پتانسیل اضافی $\mathbf{GB}\{R,t,G,B\}=0$ را به صورت زیر داراست :

$$\begin{cases} B_R=-R\Bigg[N_2\left(4N_1tG_R-\dfrac{8}{3}N_2tG_R^2+5RG_t\right)G_R-2N_1^2tG_R \\ +N_2\left(4tG_t+G\right)G_t-3N_1RG_t\Bigg], \\ B_t=\dfrac{R}{N_2}\Bigg[-\dfrac{5}{2}N_2^2RG_t^2+\dfrac{1}{4}N_1^2N_2\left(12RG_R+8tG_t+G\right)-\dfrac{3}{8}N_1^3R \\ N_2^3\left(\dfrac{10}{3}RG_R+8tG_t+G\right)G_R^2-N_1N_2^2\left(\dfrac{11}{2}RG_R+8tG_t+G\right)G_R\Bigg]. \end{cases} \qquad (۱۸.۳)$$

لازم به ذکر است که دستگاه‌های پتانسیل $\mathbf{GX}, \mathbf{GY}, \mathbf{GZ}, \mathbf{GA}$ و $\mathbf{GB}$ فاقد زیردستگاه‌های به طور غیرموضعی مرتبط با حذف مستقیم متغیر وابسته هستند. با استفاده از دستگاه‌های پتانسیل، تمام ترکیبات به‌صورت دوتایی، سه‌تایی و چهارتایی را محاسبه می‌کنیم که منجر به درختی از دستگاه‌های به‌طور غیرموضعی مرتبط نظیر خانواده معادلات (۱.۳) می‌شود.

جهت ساخت درخت از دستگاه‌های به طور غیرموضعی مرتبط با خانواده معادلات (۱.۳) نظیر حالت‌های دوم و سوم دستگاه‌های پتانسیل تکی را در فرم دوتایی، سه‌تایی و چهارتایی ترکیب می‌کنیم. بنابرین نتیجه زیر را بدنبال دارد.

**نتیجه ۱.۳.۳.** برحسب ضرایب مطابق جدول ۳.۳، مجموعه‌ای از دستگاه‌های پتانسیل موضعی غیرهم‌ارز نظیر خانواده معادلات (۱.۳) با ثابت‌های دلخواه توسط دستگاه‌های PDE زیر نشان داده می‌شود:

* سه دستگاه پتانسیل $\mathbf{GX}$، $\mathbf{GY}$ و $\mathbf{GZ}$ پتانسیل‌های یکی را شامل می‌شوند؛
* سه دوتایی $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GY}\}$، $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GZ}\}$ و $\{\mathbf{GY}, \mathbf{GZ}\}$ شامل جفت پتانسیل‌ها می‌شوند؛
* یک سه‌تایی $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GY}, \mathbf{GZ}\}$ شامل سه دستگاه پتانسیل می‌شود.

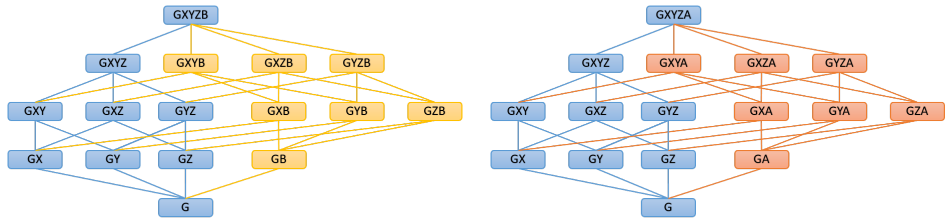
**نتیجه ۲.۳.۳.** در حالت دوم، مجموعه دستگاه‌های پتانسیل موضعی غیرهم‌ارز طبق ضرایب جدول ۳.۳، توسط دستگاه‌های PDE زیر نشان داده می‌شود:

* چهار دستگاه پتانسیل $\mathbf{GX}$، $\mathbf{GY}$، $\mathbf{GZ}$ و $\mathbf{GA}$ شامل دستگاه‌های پتانسیل یکی می‌شوند؛
* شش دوتایی $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GY}\}$، $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GZ}\}$، $\{\mathbf{GY}, \mathbf{GZ}\}$، $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GA}\}$، $\{\mathbf{GY}, \mathbf{GA}\}$ و $\{\mathbf{GZ}, \mathbf{GA}\}$ شامل دو دستگاه پتانسیل می‌شوند؛
* چهار سه‌تایی $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GY}, \mathbf{GZ}\}$، $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GY}, \mathbf{GA}\}$، $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GZ}, \mathbf{GA}\}$ و $\{\mathbf{GY}, \mathbf{GZ}, \mathbf{GA}\}$ شامل سه دستگاه پتانسیل می‌شوند؛
* یک چهارتایی $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GY}, \mathbf{GZ}, \mathbf{GA}\}$ شامل چهار دستگاه پتانسیل است.

**نتیجه ۳.۳.۳.** مطابق جدول ضرایب ۳.۳، مجموعه دستگاه‌های پتانسیل موضعی غیرهم‌ارز نظیر معادله (۹.۳) (حالت سوم ) توسط دستگاه‌های PDE زیر نشان داده می‌شود:

* چهار دستگاه پتانسیل $\mathbf{GX}$، $\mathbf{GY}$، $\mathbf{GZ}$ و $\mathbf{GB}$ شامل پتانسیل‌های تکی می‌شود؛
* شش دوتایی $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GY}\}$، $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GZ}\}$، $\{\mathbf{GY}, \mathbf{GZ}\}$، $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GB}\}$، $\{\mathbf{GY}, \mathbf{GB}\}$ و $\{\mathbf{GZ}, \mathbf{GB}\}$ شامل جفتی از پتانسیل‌هاست؛
* چهار سه‌تایی $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GY}, \mathbf{GZ}\}$، $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GY}, \mathbf{GB}\}$، $\{\mathbf{GX}, \mathbf{GZ}, \mathbf{GB}\}$ و $\{\mathbf{GY}, \mathbf{GZ}, \mathbf{GB}\}$ ترکیبی از سه پتانسیل است.

شکل ۲.۳: درخت دستگاه‌ها و زیردستگاه‌های پتانسیل به طور غیرموضعی مرتبط نظیر معادله موج $G$.




(ب) حالت سوم

(آ) حالت دوم

جدول ۴.۳: تقارن‌های خانواده معادلات (۱.۳) و دستگاه‌های پتانسیل (۱۴.۳)، (۱۵.۳)، (۱۶.۳) .

| حالت | دستگاه | تقارن |
|---|---|---|
| کلی | **GXYZ**, <br> **GXY**, **GXZ**, **GYZ**, <br> **GX**, **GY**, **GZ**, **G** | $V_1=\frac{\partial}{\partial G},\quad V_2=\frac{\partial}{\partial X},\quad V_3=\frac{\partial}{\partial Y},\quad V_4=\frac{\partial}{\partial Z},$ <br> $V_5=Z\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{\partial}{\partial t},\quad V_6=tR^2\frac{\partial}{\partial Y}+2t\frac{\partial}{\partial G}+R^2\frac{\partial}{\partial Z}+2Z\frac{\partial}{\partial X},$ <br> $V_7=\frac{1}{2}\left(R\frac{\partial}{\partial R}+t\frac{\partial}{\partial t}+G\frac{\partial}{\partial G}+2X\frac{\partial}{\partial X}+3Y\frac{\partial}{\partial Y}+2Z\frac{\partial}{\partial Z}\right)$ |
| $N_2,\, N_3=0$ | **GXYZ**, <br> **GXZ**, **GXY**, <br> **GX** | $V_8=\frac{1}{4N_1}\left(4\ln(R)\frac{\partial}{\partial G}+4(N_1G+N_4R)\frac{\partial}{\partial X}+(2N_1t^2+R^2)\frac{\partial}{\partial Y}+4t\frac{\partial}{\partial Z}\right),$ <br> $V_9=\frac{1}{8N_1}\left(4(2N_1t^2+R^2)\frac{\partial}{\partial G}+24(6N_1Y+N_4R^3)\frac{\partial}{\partial X}+R^2(8N_1t^2+R^2)\frac{\partial}{\partial Y}+8tR^2\frac{\partial}{\partial Z}\right),$ <br> $V_{10}=\frac{-1}{3N_1}\left(3N_1R\frac{\partial}{\partial R}+3N_1t\frac{\partial}{\partial t}+3(2N_4R+N_1G)\frac{\partial}{\partial G}+3(2N_1X+N_4R^2)\frac{\partial}{\partial X}-(3N_1Y-N_4R^3)\frac{\partial}{\partial Y}\right),$ <br> $V_{11}=\frac{-1}{2N_1}\left(2N_1R\frac{\partial}{\partial R}+2N_1t\frac{\partial}{\partial t}-2(3N_4R+2N_1G)\frac{\partial}{\partial G}-(8N_1X+3N_4R^2)\frac{\partial}{\partial X}-N_4R^3\frac{\partial}{\partial Y}-2N_1Z\frac{\partial}{\partial Z}\right)$ |

* یک چهارتایی $\{\mathbf{GX},\mathbf{GY},\mathbf{GZ},\mathbf{GB}\}$ شامل چهار پتانسیل می‌شود.

در جدول ۴.۳، رده‌بندی از تقارن‌های معادله (۱.۳) و دستگاه‌های پتانسیل آن گردآوری شده است. همان‌طور که از جدول ۴.۳ ملاحظه می‌شود، خانواده معادلات (۱.۳) فاقد تقارن‌های غیرموضعی هستند. این بدان معناست که تمام تقارن‌های خانواده دستگاه‌های پتانسیل با مولد بی‌نهایت کوچک وابسته به متغیرهای موضعی $(R,t,G)$ پارامتری شده‌اند. در حالت کلی، مولد بی‌نهایت کوچک $V_5$ یک تقارن غیرموضعی از دستگاه‌های **GY** و **GXY** (یعنی دستگاه‌های **GY** و **GXY** تحت انتقال زمان ناوردا نیستند.) و تقارن نقطه‌ای از سایر دستگاه‌ها است. مولد $V_6$ یک تقارن غیرموضعی نظیر دستگاه‌های **GX** و **GXY** و تقارن نقطه‌ای از سایر دستگاه‌ها است. همچنین مولد $V_9$ تقارن غیرموضعی نظیر دستگاه‌های **GX** و **GXZ** و تقارن نقطه‌ای برای دستگاه‌ها **GXYZ**، **GXY** است. سایر مولدها، تقارن‌های نقطه‌ای برای تمام دستگاه‌های مذکور در جدول ۴.۳ هستند. توجه نمایید که با استفاده از روش مستقیم، تمام قوانین پایستگی نظیر دستگاه‌های پتانسیل یکی خانواده معادلات (۱.۳) برای سه حالت مذکور محاسبه و ملاحظه می‌شود که فاقد قوانین پایستگی غیرموضعی هستند. همچنین دستگاه پتانسیل **GX** در حالت کلی، فاقد قانون پایستگی محض است یعنی فقط شامل قانون پایستگی بدیهی صفر است. دستگاه پتانسیل **GZ** شامل یک قانون پایستگی مستقل خطی نظیر ضریب $(\Lambda_1,\Lambda_2)=(1,0)$ است. دستگاه **GY** نیز شامل فقط یک قانون پایستگی موضعی نظیر ضریب

و دستگاه پتانسیل **GYZ** شامل تنها یک قانون پایستگی نظیر ضریب $(\Lambda_1,\Lambda_2)=(1/t^2,0)$

$$(\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3,\Lambda_4)=\left(\frac{1}{t^2}\int tF_t\left(t\right)dt,0,F\left(t\right),0\right)$$

است. سایر دستگاه‌های پتانسیل **GY**، **GYA**، **GYB**، **GYZA**، **GYZB** و **GXYZ** شامل مجموعه ضرایب مشابه هستند.

بلومن و همکارانش [۱۶] به نتیجه‌ای قابل ملاحظه برای قوانین پایستگی پتانسیل دست یافتند. آن‌ها نشان دادند که برای هر دستگاه دلخواه از معادلات دیفرانسیل، یک قانون پایستگی از دستگاه پتانسیل متناظر با ضرایبی که تنها تابعی از متغیرهای مستقل است توسط قوانین پایستگی دستگاه اولیه ایجاد می‌شود. لذا تابع دلخواه $F\left(t\right)$ ظاهرشده در ضرایب و قوانین پایستگی متناظر، قوانین پایستگی غیرموضعی ایجاد نمی‌کند. برای مثال، بردارهای پایستگی از دستگاه پتانسیل **GXYZ** با استفاده از روش معرفی‌شده در [۶۴] به‌دست می‌آوریم. دستگاه پتانسیل **GXYZ** دقیقا دو قانون پایستگی مستقل خطی با ضرایب

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_1&=(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_8)=\left(0,\ldots,0,\frac{1}{t^2},0,\ldots,0\right);\\ \hat{\Lambda}_2&=(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_8)=\left(0,\ldots,0,\frac{-\int tF_t\left(t\right)dt}{t^2},0,F\left(t\right),0\right),\end{aligned}$$

و بردارهای پایستگی

$$\begin{aligned}(\varphi_1,\psi_1)&=\left(\frac{-RG}{t},\frac{2Y-GR^2}{2t^2}\right),\\ (\varphi_2,\psi_2)&=\left(\frac{RG\left(\int tF_t\left(t\right)dt-tF\left(t\right)\right)}{t},\frac{\left(R^2G-2Y\right)\int tF_t\left(t\right)dt+2t^2F\left(t\right)Z}{2t^2}\right)\end{aligned}$$

برخوردار است. بردار پایستگی موضعی نظیر ضریب $\hat{\Lambda}_2$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_2 =&\left(F(t)-\frac{1}{t}\int tF_t(t)\,dt\right)\left(-\frac{RG}{t}+Y_R-\frac{R^2}{2}G_R-tRG_t\right)\\
&-C\left(X_R+\frac{R}{12}\left(4N_2G_R^3-12N_4G_R-6G_t^2-6N_1G_R^2-3N_3G_R^4\right)\right)\\
&-\int F(t)\,dt\,(Z_R-RG_t)\\
=&D_R\left(\left(\frac{1}{t}\int tF_t(t)\,dt+F(t)\right)\left(\frac{2Y-R^2G}{2}\right)-Z\int F(t)\,dt-X\right)\\
&-\frac{R}{12}\left(4N_2G_R^3-12N_4G_R-6G_t^2-6N_1G_R^2-3N_3G_R^4\right), \qquad (۱۹.۳)\\
\hat{\psi}_2 =&\frac{R^2G-2Y}{2t^2}\int tF_t(t)\,dt+ZF(t)+C\left(X_t-R\left(N_1G_tG_R-N_2G_tG_R^2+N_3G_tG_R^3+N_4G_t\right)\right)\\
&+\left(\frac{1}{t}\int tF_t(t)\,dt-F(t)\right)\left(Y_t-\frac{R}{2}\left(RG_t+2N_4t+2tN_1G_R-2tN_2G_R^2+2tN_3G_R^3\right)\right)\\
&+\int F(t)\,dt\Big(Z_t-R\left(N_1G_R-N_2G_R^2+N_3G_R^3+N_4\right)\Big)\\
=&D_t\left(X+\left(\int tF_t(t)\,dt-F(t)\right)\left(\frac{2Y-R^2G}{2}\right)+Z\int F(t)\,dt\right)\\
&-R\left(N_1G_R-N_2G_R^2+N_3G_R^3+N_4\right)G_t,
\end{aligned}$$

که با بردار پایستگی $(\phi_2,\psi_2)$ برابر است. از این‌رو اختلاف آن‌ها روی فضای جواب صفر است. این قوانین پایستگی توسط قوانین پایستگی موضعی نظیر ضریب $\Lambda_1 = RG_t$ از PDE (۱.۳) با بردارهای پایستگی

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_2 &= -\frac{R}{12}\left(4N_2G_R^3-12N_4G_R-6G_t^2-6N_1G_R^2-3N_3G_R^4\right),\\
\tilde{\psi}_2 &= -R\left(N_1G_R-N_2G_R^2+N_3G_R^3+N_4\right)G_t,
\end{aligned}$$

حدود دیورژانس کامل

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_2-\tilde{\phi}_2 &= D_R\left(\left(\frac{1}{t}\int tF_t(t)\,dt+F(t)\right)\left(\frac{2Y-R^2G}{2}\right)-Z\int F(t)\,dt-X\right),\\
\hat{\psi}_2-\tilde{\psi}_2 &= +D_t\left(X+\left(\int tF_t(t)\,dt-F(t)\right)\left(\frac{2Y-R^2G}{2}\right)+Z\int F(t)\,dt\right),
\end{aligned}$$

ایجاد می‌شود. به طور مشابه، بردارهاری پایستگی موضعی برای سایر دستگاه‌های پتانسیل قابل محاسبه است.

# فصل ۴

# تقارن‌های معادلات دیفرانسیل کسری

به دلیل طبیعت غیرموضعی از عملگرهای دیفرانسیلی کسری تعمیم روش آنالیز تقارن لی موجود برای معادلات دیفرانسیل با مرتبه صحیح، به معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری آسان نیست. برای انجام این کار می‌بایست فرمول توسیع برای عملگرهای کسری موجود در معادلات دیفرانسیل به‌دست آید. فرمول توسیع برای عملگر مشتق کسری ریمن_لیوول و کاپوتو توسط گزیزوف و همکارانش محاسبه شده است. آنچه در ادامه بیان می‌شود تعمیمی از نظریه گروه تقارن لی به معادلات دیفرانسیل کسری است. جزئیات بیشتر در این خصوص را در منابع [۳۷، ۳۸، ۳۹] می‌توان دید.

## ۱.۴ توسیع تبدیلات برای مشتقات و انتگرال‌های کسری

اولین گام در ساخت گروه‌های تقارنی معادلات دیفرانسیل کسری، تعمیم گروه‌های لی موضعی تبدیلات به تمام مشتقات و انتگرال‌های کسری وارد شده در معادلات است. همانطور که پیش‌تر ذکر شد مشتقات از نوع کاپوتو و ریمن_لیوول در نظر گرفته می‌شود. فرمول امتداد در این رساله را با انتگرال کسری چپ توضیح می‌دهیم. انتگرال کسری با متغیر مستقل $\bar{x}$ و وابسته $\bar{y}$ به‌صورت زیر است:

$$ {}_aI_{\bar{x}}^{\alpha}\bar{y}\left(\bar{x}\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^{\bar{x}}\bar{y}\left(\bar{s}\right)\left(\bar{x}-\bar{s}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}\bar{s}. \tag{۱.۴}$$

فرض کنید متغیرهای $(x,y)$ و $(\bar{x},\bar{y})$ با گروه تبدیلات

$$T_{\varepsilon}:(x,y)\longrightarrow(\bar{x},\bar{y}):\bar{x}=\phi\left(x,y,\varepsilon\right),\quad \bar{y}=\psi\left(x,y,\varepsilon\right),\quad \forall\varepsilon\in\mathcal{O}\subset\mathbb{R}, \tag{۲.۴}$$

مرتبط شده‌اند که در آن $\mathcal{O}$ همسایگی باز حول $\varepsilon=0$ باشد. دراین‌صورت داریم $\bar{y}\left(\bar{s}\right)=\psi\left(s,y\left(s\right),\varepsilon\right)$ که در آن متغیر انتگرال‌گیری جدید $\bar{s}$ با $s$ بوسیله معادله $\bar{s}=\phi\ \left(s,y\left(s\right),\varepsilon\right)$ مرتبط می‌شود. محدوده انتگرال‌گیری $\tilde{a}\left(\varepsilon\right)$ و $x$ است به‌قسمی‌که $a=\phi\left(\tilde{a},y\left(\tilde{a}\right),\varepsilon\right)$. با استفاده از نمایش بی‌نهایت کوچک

$$\bar{x}=x+\varepsilon\xi\left[x\right]+O\left(\varepsilon\right),\quad \bar{s}=s+\varepsilon\xi\left[s\right]+O\left(\varepsilon\right),\quad \bar{y}\left(\bar{s}\right)=y\left(s\right)+\varepsilon\eta\left[s\right]+O\left(\varepsilon\right),$$

(در این فصل، به اختصار قرار می‌دهیم: $f\left[x\right]=f\left(x,y\left(x\right)\right)$ ) انتگرال (۱.۴) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{aligned} {}_{a}I_{x}^{\alpha}\bar{y}\left(\bar{x}\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{\tilde{a}\left(\varepsilon\right)}^{x}\left(y\left(s\right)+\varepsilon\eta\left[s\right]\right)\left(x-s+\varepsilon\left(\xi\left[x\right]-\xi\left[s\right]\right)\right)^{\alpha-1} \\ &\quad\times\left(1+\varepsilon D_{s}\xi\left[s\right]\right)\mathrm{d}s+O\left(\varepsilon\right). \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

اگر $a<\tilde{a}\left(\varepsilon\right)$، بنا به انتگرال (۱.۴) $y\left(s\right)$ برای $s\in\left(\tilde{a}\left(\varepsilon\right),a\right)$ تعریف‌شده نباشد، در نتیجه آخرین انتگرال در رابطه فوق تعریف‌شده نیست. در این‌صورت می‌بایست فرم انتگرال بعد تبدیل (۲.۴) (شامل حد پایینی ) حفظ شود. این بدان معناست که $\tilde{a}\left(\varepsilon\right)=a$، در نتیجه

$$\phi\left(a,y\left(a\right),\varepsilon\right)=a,\quad \forall\varepsilon\in\mathcal{O}. \tag{۴.۴}$$

شرط (۴.۴) برحسب ضرایب عملگر بی‌نهایت کوچک به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\xi\left(x,y\left(x\right)\right)|_{x\rightarrow a}=0. \tag{۵.۴}$$

**ملاحظه ۱.۱.۴.** در حال کلی هر گروه تبدیل به صورت

$$\bar{x}=x+\varepsilon,\quad \bar{y}\left(\bar{x}\right)=\psi\left(x,y\left(x\right),\varepsilon\right),$$

دامنه انتگرال‌گیری حفظ نمی‌کند، لذا می‌بایست تابع درنظر گرفته شده $y\left(x\right)$ بر $x<a$ به‌کار برد.

قضیه زیر صورت بی‌نهایت کوچک تبدیلات از انتگرال کسری (۳.۴) را بیان می‌کند.

**قضیه ۱.۱.۴.** فرض کنید $\alpha>0$ و انتگرال‌های ${}_{a}I_{x}^{\alpha}y\left(x\right)\in C^{1}\left(a,b\right)$ و ${}_{a}I_{x}^{\alpha}\left(\eta-\xi y'\right)$ وجود داشته باشد، همچنین شرط (۵.۴) برقرار باشد. آنگاه تبدیل بی نهایت کوچک انتگرال کسری (۱.۴) به‌صورت زیر است:

$${}_{a}I_{x}^{\alpha}\bar{y}\left(\bar{x}\right)={}_{a}I_{x}^{\alpha}y\left(x\right)+\varepsilon\eta^{(\alpha)}+O\left(\varepsilon\right),$$

که در آن ضریب $\eta^{(\alpha)}$ با فرمول امتداد زیر محاسبه می‌شود:

$$\eta^{(\alpha)}={}_{a}I_{x}^{\alpha}\left(\eta-\xi y'\right)+\xi D_{x}\left({}_{a}I_{x}^{\alpha}y\right).$$

**برهان.** با جایگذاری رابطه هم‌ارزی

$$\begin{aligned}(x-s+\varepsilon(\xi[x]-\xi[s]))^{\alpha} &= (x-s)^{\alpha}\left(1+\varepsilon\frac{\xi[x]-\xi[s]}{x-s}\right)^{\alpha}\\ &\approx (x-s)^{\alpha}\left(1+\alpha\varepsilon\frac{\xi[x]-\xi[s]}{x-s}\right),\end{aligned} \tag{۶.۴}$$

در رابطه (۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned}{}_aI_x^{\alpha}\bar{y}(\bar{x}) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\Big(y(s)(x-s)^{\alpha-1}+\varepsilon\eta[s](x-s)^{\alpha-1}\\ &\quad +\varepsilon(\alpha-1)y(s)(x-s)^{\alpha-1}\frac{\xi[x]-\xi[s]}{x-s}\Big)\times(1+\varepsilon D_s\xi[s])\,\mathrm{d}s+O(\varepsilon).\end{aligned}$$

□

**ملاحظه ۲.۱.۴.** فرمول‌های امتداد انتگرال کسری راست به‌صورت

$${}_xI_b^{\alpha}\bar{y}(\bar{x}) = {}_xI_b^{\alpha}y(x)+\varepsilon\eta^{(\alpha)}+O(\varepsilon), \quad \eta^{(\alpha)} = {}_xI_b^{\alpha}(\eta-\xi y')+\xi D_x({}_xI_b^{\alpha}y), \tag{۷.۴}$$

است.

در قضیه زیر، بنا به تعریف مشتق کسری ریمن‌ـلیوول ۱.۴.۱،

$${}_aD_x^{\alpha}y(x) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^n({}_aI_x^{n-\alpha}y)(x), \quad {}_xD_b^{\alpha}y(x) = (-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^n({}_xI_b^{n-\alpha}f)(x),$$

فرمول‌های امتداد برای این مشتقات با ترکیبی از روابط (۷.۴) و قضیه (۱.۱.۴) محاسبه می‌شود.

**قضیه ۲.۱.۴.** فرض کنید $\alpha>0$ و مشتقات ${}_aD_x^{\alpha}y(x)\in C^1(a,b)$ و ${}_aD_x^{\alpha}(\eta-\xi y')$ وجود داشته باشد، همچنین شرط (۵.۴) برقرار باشد. آنگاه تبدیل بی‌نهایت کوچک مشتق کسری ریمن‌ـلیوول چپ (۱.۴) به‌صورت زیر است:

$${}_aD_x^{\alpha}\bar{y}(\bar{x}) = {}_aD_x^{\alpha}y(x)+\varepsilon\eta^{(\alpha)}+O(\varepsilon),$$

که در آن ضریب $\eta^{(\alpha)}$ با فرمول امتداد زیر محاسبه می‌شود:

$$\eta^{(\alpha)} = {}_aD_x^{\alpha}(\eta-\xi y')+\xi\,{}_aD_x^{\alpha+1}y.$$

هرگاه شرط $\xi|_{x\to b}=0$ برقرار باشد، همچنین مشتقات ${}_xD_b^{\alpha}y(x)\in C^1(a,b)$ و ${}_xD_b^{\alpha}(\eta-\xi y')$ وجود داشته باشد، آنگاه امتداد برای مشتق کسری راست به‌صورت زیر است:

$$\eta^{(\alpha)} = {}_xD_b^{\alpha}(\eta-\xi y')+\xi\,{}_xD_b^{\alpha+1}y.$$

**برهان.** اثبات را برای مشتق کسری چپ بیان می‌کنیم و به دلیل مشابه بودن روند اثبات از ذکر آن برای مشتق کسری راست صرف‌نظر می‌کنیم. بنا به تعریف داریم:

$$ {}_aD_x^\alpha \bar{y}(\bar{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{x}}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{\bar{y}(\bar{x})}{(x-s)^\alpha}\mathrm{d}s. \tag{۸.۴} $$

با استفاده از بسط‌های بی‌نهایت کوچک زیر

$$ \begin{aligned} \bar{x} &= x+\varepsilon\xi[x]+O(\varepsilon), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{x}} = (1-\varepsilon D_x\xi)\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon),\\ \bar{s} &= s+\varepsilon\xi[s]+O(\varepsilon), \quad \mathrm{d}\bar{s} = (1+\varepsilon D_s\xi)\,\mathrm{d}s + O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{۹.۴} $$

و تبدیل بی‌نهایت کوچک وارون $s=\bar{s}-\varepsilon\xi[\bar{s}]+O(\varepsilon)$ در فرمول (۸.۴) داریم:

$$ {}_aD_x^\alpha \bar{y}(\bar{x}) \cong \frac{1-\varepsilon D_x\xi[x]}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x+\varepsilon\xi[x]}\frac{y(\bar{s}-\varepsilon\xi[\bar{s}])+\varepsilon\eta[\bar{s}-\varepsilon\xi[\bar{s}]]}{(x+\varepsilon\xi[x]-\bar{s})^\alpha}\mathrm{d}\bar{s}+O(\varepsilon). $$

سپس با جایگذاری دومین تبدیل (۹.۴) در رابطه فوق، به‌دست می‌آوریم:

$$ {}_aD_x^\alpha \bar{y}(\bar{x}) \cong \frac{1-\varepsilon D_x\xi[x]}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{(y(s)+\varepsilon\eta[s])(1+\varepsilon D_s\xi[s])}{(x-s+\varepsilon(\xi[x]-\xi[s]))^\alpha}\mathrm{d}s+O(\varepsilon). \tag{۱۰.۴} $$

. با جایگذاری رابطه هم‌ارزی (۶.۴) در رابطه (۱۰.۴) داریم:

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^\alpha \bar{y}(\bar{x}) &\cong \frac{1-\varepsilon D_x\xi[x]}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{y(s)+\varepsilon\eta[s]+\varepsilon y(s)D_s\xi[s]}{(x-s)^\alpha}\\ &\quad\times\left(1-\varepsilon\alpha\frac{\xi[x]-\xi[s]}{x-s}\right)\mathrm{d}s+O(\varepsilon) \approx \frac{1-\varepsilon D_x\xi[x]}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{y(s)}{(x-s)^\alpha}\mathrm{d}s\\ &\quad+\frac{\varepsilon}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{\eta[s]}{(x-s)^\alpha}\mathrm{d}s+\frac{\varepsilon}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{y(s)D_s\xi[s]}{(x-s)^\alpha}\mathrm{d}s\\ &\quad-\frac{\varepsilon\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{y(s)(\xi[x]-\xi[s])}{(x-s)^{1+\alpha}}\mathrm{d}s+O(\varepsilon)\\ &= {}_aD_x^\alpha y-\varepsilon D_x\xi\,{}_aD_x^\alpha y+\varepsilon\,{}_aD_x^\alpha\eta+\varepsilon\,{}_aD_x^\alpha(yD_x\xi)\\ &\quad-\frac{\varepsilon\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{y(s)(\xi[x]-\xi[s])}{(x-s)^{1+\alpha}}\mathrm{d}s+O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{۱۱.۴} $$

با استفاده از رابطه

$$ {}_aD^\alpha f(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)x^\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x\frac{f(x)-f(s)}{(x-s)^{1+\alpha}}\mathrm{d}s, $$

که در [۱۰۲] برای مشتق ریمن-لیوویل یک تابع ارائه شده است، آخرین انتگرال از فرمول (۱۱.۴) به شکل ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$ \begin{aligned} \int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{y(s)(\xi[x]-\xi[s])}{(x-s)^{1+\alpha}}\mathrm{d}s &= \int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{y(s)(\xi[x]-\xi[s])+y(x)\xi[x]-y(x)\xi[x]}{(x-s)^{1+\alpha}}\mathrm{d}s\\ &= \xi[x]\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{y(s)-y(x)}{(x-s)^{1+\alpha}}\mathrm{d}s+\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{y(x)\xi[x]-y(s)\xi[s]}{(x-s)^{1+\alpha}}\mathrm{d}s\\ &= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\left({}_aD_x^\alpha(\xi y)-\xi\,{}_aD_x^\alpha y\right). \end{aligned} $$

و بنابراین

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{\tilde{a}(\varepsilon)}^{x}\frac{y\left(s\right)\left(\xi\left[x\right]-\xi\left[s\right]\right)}{\left(x-s\right)^{1+\alpha}}\mathrm{d}s={}_{a}D_{x}^{\alpha+1}\left(\xi y\right)-D_{x}\left(\xi\right){}_{a}D_{x}^{\alpha}y-\xi_{a}D_{x}^{\alpha+1}y. \quad (۱۲.۴)$$

با جایگذاری (۱۲.۴) در رابطهٔ (۱۱.۴) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$${}_{a}D_{x}^{\alpha}\bar{y}={}_{a}D_{x}^{\alpha}y+\varepsilon\eta^{(\alpha)}+O\left(\varepsilon\right),$$

که در آن

$$\eta^{(\alpha)}={}_{a}D_{x}^{\alpha}\eta+{}_{a}D_{x}^{\alpha}\left(yD_{x}\xi\right)-{}_{a}D_{x}^{\alpha+1}\left(\xi y\right)+\xi_{a}D_{x}^{\alpha+1}y, \quad (۱۳.۴)$$

امتداد $\alpha$ــام بی‌نهایت کوچک مورد نظر است. با استفاده از رابطه

$${}_{a}D_{x}^{\alpha}\left(\xi y'\right)={}_{a}D_{x}^{\alpha+1}\left(\xi y\right)-{}_{a}D_{x}^{\alpha}\left(yD\xi\right),$$

فرمول امتداد (۱۳.۴) به‌صورت زیر نوشته شده و برهان قضیه کامل می‌شود:

$$\eta^{(\alpha)}={}_{a}D_{x}^{\alpha}\left(\eta-\xi y'\right)+\xi_{a}D_{x}^{\alpha+1}y.$$

□

**ملاحظه ۳.۱.۴. صورت‌های دیگر از فرمول امتداد**

۱. زمانی که $\forall n\in\mathbb{N},\alpha=n$ فرمول امتداد با همان نمونه کلاسیک مرتبه صحیح آن برای *ODEs برابر است.*

۲. *با به‌کارگیری قاعده لایبنیتز تعمیم‌یافته ۳.۴.۱ در رابطهٔ (۱۳.۴) و همچنین استفاده از رابطهٔ*

$$\binom{\alpha+1}{n+1}=\binom{\alpha}{n}\left(\frac{\alpha+1}{n+1}\right),$$

*فرمول امتداد (۱۲.۴) را می‌توان به‌صورت یک سری به‌ازای توابع به‌قدر کافی هموار $\xi$ و $y$ نوشت:*

$$\begin{aligned}\eta^{(\alpha)}&={}_{a}D_{x}^{\alpha}(\eta)+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_{a}D_{x}^{\alpha-n}yD_{x}^{n+1}\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}{}_{a}D_{x}^{\alpha+1-n}yD_{x}^{n}\xi\\&={}_{a}D_{x}^{\alpha}(\eta)+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_{a}D_{x}^{\alpha-n}yD_{x}^{n+1}\xi+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n+1}{}_{a}D_{x}^{\alpha-n}yD_{x}^{n+1}\xi\\&={}_{a}D_{x}^{\alpha}(\eta)+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{n-\alpha}{n+1}\right){}_{a}D_{x}^{\alpha-n}yD_{x}^{n+1}\xi. \quad (۱۴.۴)\end{aligned}$$

۳. *با به‌کارگیری صورت‌های متفاوت قاعده زنجیری تعمیم‌یافته، قادر به محاسبه عبارت ${}_{a}D_{x}^{\alpha}(\eta)$ در (۱۳.۴) هستیم. برای مثال، گزیزوف و همکارانش [۳۸] فرمول زیر را ارائه کردند:*

$${}_{a}D_{x}^{\alpha}\left(\eta\right)=\partial_{x}^{\alpha}\left(\eta\right)+\partial_{x}^{\alpha}\left(y\left(x\right)\eta_{y}\right)-y\partial_{x}^{\alpha}\left(\eta_{y}\right)+\mu,$$

*که در آن $\mu$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید*

$$\mu=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{x^{n-\alpha}}{k!\Gamma(n+1-\alpha)}\left[-y\left(x\right)\right]^{r}$$
$$\times D_{x}^{m}\left[y\left(x\right)\right]^{k-r}\frac{\partial^{n-m+k}\eta\left(x,y\right)}{\partial x^{n-m}\partial y^{k}}.$$

توجه به این نکته ضروری است که اگر $\eta$ نسبت به متغیر وابسته $y$ خطی باشد آنگاه $\mu$ برابر صفر است و دلیل آن وجود مشتق $\frac{\partial^k\eta}{\partial y^k}$ $(k\geq 2)$ در رابطه $\mu$ است. محاسبه امتداد بی‌نهایت کوچک $\eta^{(\alpha)}$ با چنین فرمولی بسیار پیچیده است، این مساله با در نظر گرفتن حالت ساده زیر قابل حل است

$$\xi=\xi\left(x\right),\qquad \eta\left(x,y\right)=p\left(x\right)y+q\left(x\right). \tag{۱۵.۴}$$

**تعریف ۱.۱.۴.** تبدیلات نظیر مولدهای بی‌نهایت کوچک (۲۱.۴) با ضرایبی به صورت (۱۵.۴) تبدیلات خودگردان خطی نامیده می‌شوند.

**قضیه ۳.۱.۴.** فرمول امتداد (۱۳.۴) نظیر تبدیلات خودگردانخطی با ضرایب (۱۵.۴) صادق در شرط (۵.۴)، ترکیب خطی از مشتقات و انتگرال کسری به صورت زیر است:

$$\eta^{(\alpha)}={}_aD_x^{\alpha}(q\left(x\right))+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_aD_x^{\alpha-n}y\left[p^{(n)}\left(x\right)+\frac{n-\alpha}{n+1}\xi^{(n+1)}\left(x\right)\right]. \tag{۱۶.۴}$$

همچنین برای مشتق راست (منوط به برقراری تساوی $\xi=0$ در نقطه انتهایی $b$ ) داریم:

$$\eta^{(\alpha)}={}_xD_b^{\alpha}(q\left(x\right))+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(-1\right)^n{}_xD_b^{\alpha-n}y\left[p^{(n)}\left(x\right)+\frac{n-\alpha}{n+1}\xi^{(n+1)}\left(x\right)\right].$$

فرمول امتداد بی‌نهایت کوچک به طور مشابه برای مشتقات کسری کاپوتو برقرار است.

**قضیه ۴.۱.۴.** فرض کنید $\alpha>0$ و مشتقات ${}_a^CD_x^{\alpha}y\left(x\right)\in C^1\left(a,b\right)$ و ${}_a^CD_x^{\alpha}\left(\eta-\xi y'\right)$ وجود داشته باشد، همچنین شرط (۵.۴) برقرار باشد. آنگاه تبدیل بی‌نهایت کوچک مشتق کسری کاپوتو چپ (۱.۴) به‌صورت زیر است:

$${}_a^CD_x^{\alpha}\bar{y}\left(\bar{x}\right)={}_a^CD_x^{\alpha}y\left(x\right)+\varepsilon{}^C\eta^{(\alpha)}+O\left(\varepsilon\right),$$

که در آن ضریب ${}^C\eta^{(\alpha)}$ با فرمول امتداد زیر محاسبه می‌شود:

$${}^C\eta^{(\alpha)}={}_a^CD_x^{\alpha}\left(\eta-\xi y'\right)+\xi D_x\left({}_a^CD_x^{\alpha}y\right).$$

هرگاه شرط $\xi|_{x\to b}=0$ برقرار باشد، همچنین مشتقات ${}_x^CD_b^{\alpha}y\left(x\right)\in C^1\left(a,b\right)$ و ${}_x^CD_b^{\alpha}\left(\eta-\xi y'\right)$ وجود داشته باشد، آنگاه امتداد برای مشتق کسری راست به‌صورت زیر است:

$${}^C\eta^{(\alpha)}={}_x^CD_b^{\alpha}\left(\eta-\xi y'\right)+\xi D_x\left({}_x^CD_b^{\alpha}y\right).$$

***برهان.*** اثبات مشابه مشتق کسری ریمن‌ـ‌لیوول است. □

## ۲.۴ تقارن‌های نقطه‌ای لی معادلات دیفرانسیل معمولی کسری

معادله دیفرانسیل معمولی کسری زیر را از مرتبه‌های متفاوت در نظر بگیرید:

$$\Delta\left(x, y, D_x^{\alpha_1} y, D_x^{\alpha_2} y, \ldots, D_x^{\alpha_m} y\right)=0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \qquad (۱۷.۴)$$

که در آن $D_x^{\alpha_i} y$ مشتق کسری چپ یا راست ریمن‌ـ‌لیوول یا کاپوتو $(\alpha_i > 0, \alpha_i \notin \mathbb{N})$، انتگرال‌های کسری $(\alpha_i < 0)$، یا مشتقات مرتبه صحیح $(\alpha_i \in \mathbb{N})$، باشد.

با اعمال تبدیل بی‌نهایت کوچک گروه $G$ بر معادله (۱۷.۴) داریم:

$$\Delta\left(\bar{x}, \bar{y}, D_{\bar{x}}^{\alpha_1} \bar{y}, D_{\bar{x}}^{\alpha_2} \bar{y}, \ldots, D_{\bar{x}}^{\alpha_m} \bar{y}\right)=\Delta\left(x, y, D_x^{\alpha_1} y, D_x^{\alpha_2} y, \ldots, D_x^{\alpha_m} y\right)+\varepsilon X^{(\alpha)} \Delta+O(\varepsilon),$$

که در آن $X^{(\alpha)}=X+\sum_{i=1}^m \eta^{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial\left(D_x^{\alpha_i} y\right)}$ مولد بی‌نهایت کوچک گروه امتدادیافته است.

**تعریف ۱.۲.۴.** یک گروه تقارن برای معادله دیفرانسیل کسری (۱۷.۴)، گروهی موضعی از تبدیلات مانند $G$ است که روی یک زیرمجموعه باز از $E$ مانند $\mathcal{O}$ عمل کرده و هر جواب از معادله (۱۷.۴) را به جواب دیگری تبدیل و فرم معادله را حفظ نماید.

مشابه آنالیز گروه لی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح ، تعریف فوق شرط بی‌نهایت کوچک زیر را فراهم می‌کند:

$$X^{(\alpha)} \Delta|_{\Delta=0}=0. \qquad (۱۸.۴)$$

توجه به این نکته ضروری است که شرط فوق به تنهایی یک محک ناوردایی برای معادله (۱۷.۴) نیست زیرا شرط (۱۸.۴) معادله (۱۷.۴) به معادله‌ای با ساختار دیفرانسیلی متفاوت (با مجموعه جواب یکسان) تبدیل می‌نماید. در نتیجه حفظ ساختار دیفرانسیلی معادله‌یک شرط لازم در تعمیم تعریف گروه تقارن معادله دیفرانسیل کسری است. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۳۸] رجوع کنید.

**الگوریتم ۱.۲.۴ (الگوریتم یافتن تقارن‌های خودگردان خطی).** معادله دیفرانسیل مرتبه کسری به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Delta\left(x, y, D_x^{\alpha_1} y, D_x^{\alpha_2} y, \ldots, D_x^{\alpha_m} y\right)=0, \quad 0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{m-1}<\alpha_m .$$

۱. فرض می‌کنیم ضرایب عملگر $X$ در شرایط زیر صدق کنند:

$$\xi=\xi(x), \quad \eta(x, y)=p(x) y+q(x), \quad \xi(a)=0, \quad(\xi y)(a)=0.$$

۲. فرمول امتداد برای $\eta^{(\alpha)}$ طبق رابطه (۱۶.۴) استفاده می‌شود.

۳. ضرایب $\xi, p, q$ عملگر $X$ با حل معادلات مشخصه زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(X^{(\alpha)}\Delta\right)|_{\Delta=0} = 0,$$

که در آن بالاترین مرتبه مشتق از معادله جایگذاری می‌شود.

۴. نمادهای $x, y, {}_aD_x^{\alpha_i}y, {}_aD_x^{\alpha_i-n}y,\ n\in\mathbb{N}$ در معادلات مشخصه فوق به‌صورت متغیرهای مستقل در نظر می‌گیریم و معادلات مشخصه را نسبت به این متغیرها تفکیک نموده با حل دستگاه فرامعین نامتناهی، به جواب‌های عمومی $\xi$ و $\eta$ دست می‌یابیم.

**مثال ۱.۲.۴.** به عنوان مثال معادله دیفرانسیل معمولی با مشتق کسری ریمن_لیوویل به صورت

$${}_aD_x^{\alpha}y = cx^{\frac{-1}{2}\alpha} + \frac{b}{y}, \quad c, b\in\mathbb{R}-\{0\}, \quad \alpha\in(0,1),$$

را در نظر بگیرید که در آن $y=y(x)$ . معادله پرکاربرد فوق حالت خاصی از معادله آبل نوع دوم است که در مطالعه جریان‌های اقیانوسی استفاده می‌شود.

عملگر تقارن برای معادله آبل فوق به‌صورت

$$X = \xi\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial x} + \eta\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial y},$$

است.

با جایگذاری بسط $\eta^{(\alpha)}$ ارائه شده در (۱۴.۴) در محک

$$\eta^{(\alpha)} = \frac{-1}{2}c\alpha x^{\frac{-1}{2}\alpha-1}\xi - \frac{b}{y^2}\eta$$

به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&{}_aD_x^{\alpha}(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{n-\alpha}{n+1}\right)\frac{d^{n+1}\xi}{dx^{n+1}}{}_aD_x^{\alpha-n}y\\&= \frac{-1}{2}c\alpha x^{\frac{-1}{2}\alpha-1}\xi - \frac{b}{y^2}\eta.\end{aligned}$$

با به‌کارگیری معادله آبل در رابطه فوق به دستگاه فرامعین زیر از معادلات مشخصه می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&\eta_{yy} = \xi_y = 0, \quad (\alpha-1)\,\xi_{xx} = 2\eta_{xy}, \quad \xi\,(0,y) = 0,\\&\partial_x^{\alpha}\eta - y\partial_x^{\alpha}\eta_y + \left(\frac{b}{y} + cx^{-\frac{1}{2}\alpha}\right)\eta_y + \frac{b}{y}\eta + \frac{1}{2}c\alpha x^{-\frac{\alpha+2}{2}}\xi - \alpha\left(\frac{b}{y} + cx^{-\frac{1}{2}\alpha}\right)\xi_x = 0,\\&\frac{a-n}{1+n}\binom{\alpha}{n}D_x^{n+1}\xi + \binom{\alpha}{n}\partial_x^n\eta_y = 0, \quad \forall\, n = 3,4,\ldots.\end{aligned} \tag{۱۹.۴}$$

معادله (۱۹.۴) با توجه به $\xi(0)=0$ نتیجه می‌دهد:

$$\xi\,(x) = 2c_3x + c_4x^2, \quad \eta\,(x,y) = h\,(x) + c_3\,(\alpha-1)\,y + c_4\,(\alpha-1)\,xy + c_1y,$$

به طوریکه ها $c_i$ ثابت و $h(x)$ تابع دلخواه است. با جایگذاری ضرایب $\xi$ و $\eta$ فوق در آخرین معادله (۱۹.۴) و تفکیک نسبت به $y$ داریم:

$$2bxh(x)=0,\quad 4bx(c_3+xc_4-c_1)=0,$$
$$c_4c(\alpha+2)x^{-\frac{1}{2}\alpha+2}+2c(c_3-c_1)x^{-\frac{1}{2}\alpha+1}-2x\partial_x^{\alpha}h(x)=0.$$

از آنجایی که $b\neq 0$، دوشرط اول ایجاب می‌کند که

$$h(x)=0\quad c_4=0,\quad c_1=c_3,$$

درنتیجه معادله کسری آبل یک تقارن تجانس به‌صورت

$$X=2x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial}{\partial y}$$

می‌پذیرد.

## ۳.۴ تقارن‌های نقطه‌ای لی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری

فرض کنید

$$R(x,u):=\Delta_{\sigma}(x,u,{}_aD_x^{\alpha}u,\ldots)=0,\qquad \sigma=1,\ldots,N, \tag{۲۰.۴}$$

دستگاهی شامل $N$ معادله دیفرانسیل با با $p$ ـ متغیر مستقل $x=(x^1,\ldots,x^p)$ و $q$ ـ متغیر وابسته $u=(u^1,\ldots,u^q)$، $(q\geq 2)$ به‌قسمی که ${}_aD_x^{\alpha}u$ مجموعه تمام مشتقات کسری به‌صورت زیر باشد:

$${}_{a_1,\ldots,a_p}D_{x_1,\ldots,x_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}u^{\nu},\quad \nu=1,2,\ldots,q,$$

که در آن $\alpha_j\geq 0$ برای هر $j=1,2,\ldots,p$.

ناوردایی دستگاه (۲۰.۴) تحت گروه لی یک‌ـ‌پارامتری از تبدیلات با پارامتر $\varepsilon$ به‌صورت زیر است:

$$T_{\varepsilon}:(x,u)\longrightarrow(\bar{x},\bar{u}):\bar{x}=\phi(x,u;\varepsilon),\quad \bar{u}=\psi(x,u;\varepsilon),\quad \forall\varepsilon\in\mathcal{O}\subset\mathbb{R}, \tag{۲۱.۴}$$

که در آن $\mathcal{O}$ همسایگی باز حول $\varepsilon=0$ باشد. جبرلی وابسته به گروه (۲۱.۴) توسط میدان برداری

$$X=\sum_{j=1}^{p}\xi^j(x,u)\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{\nu=1}^{q}\eta^{\nu}(x,u)\frac{\partial}{\partial u^{\nu}},$$

تولید می‌شود که مؤلفه های آن از روابط

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{x}_j}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\xi^j,\qquad \left.\frac{\mathrm{d}\bar{u}^\nu}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\eta^\nu,$$

محاسبه می‌شوند. مطابق با محک بی‌نهایت کوچک، معادله (۲۰.۴) گروه تبدیلات (۲۱.۴) را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد اگر و تنها اگر اثر مولد امتداد یافته (مرتبه امتداد بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله است.) روی معادله (۲۰.۴) روی منیفلد جوابهای آن صفر شود. به عبارت دیگر

$$X^{(\alpha,x)}(\Delta)\big|_{\Delta=0}=0. \tag{۲۲.۴}$$

**قضیه ۱.۳.۴.** فرمول امتداد آمیخته کلی به ازای مولد بی‌نهایت کوچک (۲۲.۴) نشان داده شده به‌صورت

$$(\eta^\nu)^{\alpha,x}=\left.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left({}_aD_x^\alpha\bar{u}\left(\bar{x}\right)\right)\right]\right|_{\varepsilon=0}=\left.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left({}_{a_1,\dots,a_p}D_{x_1,\dots,x_p}^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}u^\nu\left(\bar{x}\right)\right)\right]\right|_{\varepsilon=0},$$

با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$(\eta^\nu)^{\alpha,x}={}_aD_x^\alpha\left(\eta\right)+\sum_{j=1}^{p}\xi^j\frac{\partial}{\partial x_j}\left({}_aD_x^\alpha\left(u^\nu\right)\right)-{}_aD_x^\alpha\left(\sum_{j=1}^{p}\xi^j u_{x_j}^\nu\right),\qquad \forall\nu=1,2,\dots,q,$$

که در آن $u_{x_j}^\nu=\frac{\partial u^\nu}{\partial x_j}$ و ${}_aD_x^\alpha={}_{a_1,\dots,a_p}D_{x_1,\dots,x_p}^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}$.

اثبات قضیه فوق برای $q=1$ در [۷۰] آمده است. از اینجا به بعد برای تمام مشتقات کسری، حد پایینی تعریف ریمن‌ــلیوول به ازای $a=0$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین ${}_0D_x^\alpha$ را با نماد $D_x^\alpha$ نشان می‌دهیم. فرمول گسترش یافته امتداد $(\eta^\nu)^{\alpha_j,x_j}$ در قضیه زیر بیان می‌شود.

**قضیه ۲.۳.۴.** امتداد مرتبه $\alpha_j$ام بی‌نهایت کوچک $(\eta^\nu)^{\alpha_j,x_j}=\left.\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(D_{x_j}^{\alpha_j}\bar{u}^\nu\left(\bar{x}\right)\right)\right]\right|_{\varepsilon=0}$ به ازای $\alpha_j>0$ $(j=1,\dots,p,\ \nu=1,\dots,q)$ نظیر مولد (۲۲.۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}(\eta^\nu)^{\alpha_j,x_j}\ &=\ \frac{\partial^{\alpha_j}\eta^\nu}{\partial x_j^{\alpha_j}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha_j}{k}\frac{\partial^k\eta_{u^\nu}^\nu}{\partial x_j^k}-\binom{\alpha_j}{k+1}D_{x_j}^{k+1}\xi^j\right]\partial_{x_j}^{\alpha_j-k}\left(u^\nu\right)\\&+\sum_{s\neq\nu,s=1}^{q}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha_j}{k}\frac{\partial^k\eta_{u^s}^\nu}{\partial x_j^k}\partial_{x_j}^{\alpha_j-k}\left(u^s\right)-\sum_{i\neq j,i=1}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha_j}{k}D_{x_j}^k\xi^iD_{x_j}^{\alpha_j-k}u_{x_i}^\nu\\&+\left(\eta_{u^\nu}^\nu-\alpha_jD_{x_j}\xi^j\right)\partial_{x_j}^{\alpha_j}u^\nu-u^\nu\frac{\partial^{\alpha_j}\eta_{u^\nu}^\nu}{\partial x_j^{\alpha_j}}+\sum_{s\neq\nu,s=1}^{q}\left(\eta_{u^s}^\nu\frac{\partial^{\alpha_j}u^s}{\partial x_j^{\alpha_j}}-u^s\frac{\partial^{\alpha_j}\eta_{u^s}^\nu}{\partial x_j^{\alpha_j}}\right)\\&+\sum_{s=1}^{q}\mu_{\nu,s}^j.\end{aligned}$$

که در آن $\eta_{u^s}^\nu=\frac{\partial\eta^\nu}{\partial u^s}$، $D_{x_j}$ نمایانگر مشتق کل و $\mu_{\nu,s}^j$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\mu_{\nu,s}^j=&\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{k}\sum_{l=2}^{m}\sum_{i=0}^{l-1}\binom{\alpha_j}{k}\binom{k}{m}\binom{l}{i}\frac{x_j^{k-\alpha_j}}{l!\Gamma(k+1-\alpha_j)}\\&\times\left(-u^s\right)^i\frac{\partial^m}{\partial x_j^m}\left(u^s\right)^{l-i}\frac{\partial^{k-m+l}\eta^\nu}{\partial x_j^{k-m}\partial(u^s)^l}.\end{aligned}\tag{۲۳.۴}$$

***برهان.*** فرمول امتداد بی‌نهایت کوچک $(\eta^\nu)^{\alpha_j,x_j}$ نظیر مولد (۲۲.۴) به صورت زیر است:

$$(\eta^\nu)^{\alpha_j,x_j} = D_{x_j}^{\alpha}\left(\eta^\nu\right) + \sum_{j=1}^{p}\left(\xi^j D_{x_j}^{\alpha}\left(u_{x_j}^{\nu}\right) - D_{x_j}^{\alpha}\left(\xi^j u_{x_j}^{\nu}\right)\right). \qquad (۲۴.۴)$$

با به‌کارگیری قاعده لایبنیتز تعمیم‌یافته ۳.۴.۱ داریم:

$$\xi^j D_{x_j}^{\alpha_j}\left(u_{x_j}^{\nu}\right) - D_{x_j}^{\alpha}\left(\xi^j u_{x_j}^{\nu}\right) = -\alpha_j D_{x_j}\xi^j \partial_{x_j}^{\alpha_j} u^\nu - \sum_{j=1}^{k}\binom{\alpha_j}{k+1} D_{x_j}^{k+1}\xi^j D_{x_j}^{\alpha_j-k}u^\nu,$$

که در آن $D_{x_j}$ عملگرهای مشتق کامل به شکل

$$D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + u_{x_j}^{\nu}\frac{\partial}{\partial u^\nu} + u_{x_j x_j}^{\nu}\frac{\partial}{\partial u_{x_j}^{\nu}} + \sum_{i\neq j} u_{x_i x_j}^{\nu}\frac{\partial}{\partial u_{x_i}^{\nu}} + \dots,$$

نوشته می‌شوند. به طور معادل، برای $i \neq j$ داریم:

$$\xi^j D_{x_j}^{\alpha_j}\left(u_{x_j}^{\nu}\right) - D_{x_j}^{\alpha}\left(\xi^j u_{x_j}^{\nu}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha_j}{k} D_{x_j}^{k}\xi^j D_{x_j}^{\alpha_j-k}u_{x_j}^{\nu}.$$

لذا فرمول امتداد (۲۴.۴) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}(\eta^\nu)^{\alpha_j,x_j} &= D_{x_j}^{\alpha_j}\left(\eta^\nu\right) - \alpha_j D_{x_j}\xi^j \partial_{x_j}^{\alpha_j}u^\nu - \sum_{i\neq j, i=1}^{p}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha_j}{k} D_{x_j}^{k}\xi^j D_{x_j}^{\alpha_j-k}u_{x_j}^{\nu}\\ &\quad -\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha_j}{k+1}\left(D_{x_j}^{k+1}\xi_j\right) D_{x_j}^{\alpha_j-k}u^\nu. \qquad (۲۵.۴)\end{aligned}$$

صورت تعمیم‌یافته فرمول اوسلر [۱] برای $\alpha > 0$ به‌صورت

$$\begin{aligned}D_t^{\alpha} f\left(t, g_1(t), \dots, g_p(t)\right) &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{k}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{t^{n-\alpha}}{k!\Gamma(n+1-\alpha)}\\ &\quad (-g_i)^r \frac{d^m}{dt^m}(g_i)^{k-r}\frac{\partial^{n-m+k} f\left(t, g_1, \dots, g_p\right)}{(\partial t)^{n-m}\left(\partial(g_j)\right)^k}, \qquad (۲۶.۴)\end{aligned}$$

بیان می‌شود. از آنجایی که $\eta^\nu = \eta^\nu\left(x_1, \dots, x_p, u^1, \dots, u^q\right)$، با به کارگیری رابطه (۲۶.۴) و قاعده زنجیری چندمتغیره تعمیم‌یافته، عبارت $D_{x_j}^{\alpha_j}\left(\eta^\nu\right)$ در (۲۵.۴) با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$D_{x_j}^{\alpha_j}\left(\eta^\nu\right) = \frac{\partial^{\alpha_j}\eta^\nu}{\partial x_j^{\alpha_j}} + \sum_{s=1}^{q}\left[\left(\eta_{u^s}^{\nu}\frac{\partial^{\alpha_j}u^s}{\partial x_j^{\alpha_j}} - u^s\frac{\partial^{\alpha_j}\eta_{u^s}^{\nu}}{\partial x_j^{\alpha_j}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha_j}{n}\frac{\partial^{\alpha_j}\eta_{u^s}^{\nu}}{\partial x_j^{n}} D_{x_j}^{\alpha_j-n}\left(u^s\right) + \mu_{\nu,s}^{j}\right],$$

که در آن $\eta_{u^s}^{\nu} = \partial\eta^\nu/\partial u^s$ و $\mu_{\nu,s}^{j}$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mu_{\nu,s}^{j} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=2}^{k}\binom{\alpha_j}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{1}{k!}\frac{x_j^{n-\alpha_j}}{\Gamma(n+1-\alpha_j)}(-u^s)^r\frac{\partial^m}{\partial x_j^m}(u^s)^{k-r}\frac{\partial^{n-m+k}\eta^\nu}{\partial x_j^{n-m}\partial\left(u^s\right)^k}.$$

[1] Thomas J Osler

لذا فرمول امتداد $(\eta^{\nu})^{\alpha_j,x_j}$ عبارتست‌از:

$$\begin{aligned}(\eta^{\nu})^{\alpha_j,x_j} &= \frac{\partial^{\alpha_j}\eta^{\nu}}{\partial x_j^{\alpha_j}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha_j}{k}\frac{\partial^k \eta^{\nu}_{u^{\nu}}}{\partial x_j^k} - \binom{\alpha_j}{k+1} D_{x_j}^{k+1}\xi^j\right]\partial_{x_j}^{\alpha_j-k}(u^{\nu}) \\ &+ \sum_{s\neq\nu,s=1}^{q}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha_j}{k}\frac{\partial^k\eta^{\nu}_{u^s}}{\partial x_j^k}\partial_{x_j}^{\alpha_j-k}(u^s) - \sum_{i\neq j,i=1}^{p}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha_j}{k} D_{x_j}^k\xi^i D_{x_j}^{\alpha_j-k}u^{\nu}_{x_i} \\ &+ \left(\eta^{\nu}_{u^{\nu}} - \alpha_j D_{x_j}\xi^j\right)\partial_{x_j}^{\alpha_j}u^{\nu} - u^{\nu}\frac{\partial^{\alpha_j}\eta^{\nu}_{u^{\nu}}}{\partial x_j^{\alpha_j}} + \sum_{s\neq\nu,s=1}^{q}\left(\eta^{\nu}_{u^s}\frac{\partial^{\alpha_j}u^s}{\partial x_j^{\alpha_j}} - u^s\frac{\partial^{\alpha_j}\eta^{\nu}_{u^s}}{\partial x_j^{\alpha_j}}\right) \\ &+ \sum_{s=1}^{q}\mu^j_{\nu,s}. \end{aligned} \tag{۲۷.۴}$$

□

توجه به این نکته ضروری است که عملگر تقارنی تعمیم‌یافته کسری برای نمونه مرتبه صحیح آن قابل اجرا است. در ادامه به ارائه چند مثال از به‌کارگیری قضیه فوق در محاسبه تقارن‌های معادله دیفرانسیل جزئی کسری می‌پردازیم. اکنون به منظور توضیح قابلیت این روش سه حالت از معادله آلن_ کان مرتبه کسری را بررسی می‌کنیم.

**مثال ۱.۳.۴.** معادله آلن [۱] _ کان [۲] عبارتست از

$$u_t - ku_{xx} = a\left(u-u^3\right), \qquad a, \in \mathbb{R}, \tag{۲۸.۴}$$

که در آن ثابت حقیقی $a$ ضریب واکنش و $k>0$ ضریب پخش است. همچنین $u$ تابعی از متغیر مکانی $x\in\mathbb{R}$ و متغیر زمانی $t\geq 0$ است. این معادله در فرآیند جداسازی فاز یک سیال دوتایی، همسانگرد و هم‌دما از قبیل آلیاژهای مذاب مطرح می‌شود [۹، ۱۱۶]. با اختصاص دادن مقادیر مختلف به ثابت $a$ معادلات قابل توجه زیر حاصل می‌شود.

اگر $a$ مساوی صفر باشد معادله‌ی معروف گرما را به‌صورت زیر داریم:

$$u_t = ku_{xx};$$

برای $a$ مثبت به معادله انتشار با یک منبع غیرخطی کاهش می‌یابد.

برای $a=-1$، حالت خاصی از معادله‌ی فیزوگ [۳] _ ناگومو [۴] به دست می‌آید که در ارسال ضربه‌های الکتریکی در سیستم عصبی به کار می‌رود [۳۳، ۹۰].

معادلات آلن_ کان مرتبه کسری که به مطالعه‌ی آن‌ها می‌پردازیم به صورت

$$\partial_t^{\alpha}u = k\partial_x^{\beta+1}u + au - au^3, \qquad x,\ t>0, \tag{۲۹.۴}$$

$$k\partial_x^{\beta+1}u = u_t - au + au^3, \qquad x>0, \tag{۳۰.۴}$$

$$\partial_t^{\alpha}u = ku_{xx} + au - au^3, \qquad t>0, \tag{۳۱.۴}$$

[1] Sam Allen
[2] John W. Cahn
[3] Richard FitzHugh
[4] Jinichi Nagumo

هستند که در آن $\partial_t^{\alpha}$ مشتق کسری زمان از مرتبه $0 < \alpha \leq 1$ درنظر گرفته می‌شود، در حالی‌که $\partial_x^{\beta+1}$ مشتق کسری مکان از مرتبه $1 < \beta + 1 \leq 2$ است. با فرض $\alpha = \beta = 1$ در معادلات فوق، به معادله آلن ـ کان کلاسیک کاهش داده می‌شود.

**معادله آلن ـ کان مکان ـ زمان کسری :**

ابتدا گروه لی تک پارامتری از تبدیلات را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\xi(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \\ t^* &= t + \varepsilon\tau(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon\eta(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{۳۲.۴}$$

در این‌صورت مولد تقارنی نظیر گروه تبدیلات فوق را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u}.$$

امتداد میدان برداری فوق نظیر معادلات مفروض با فرمول زیر داده می‌شود:

$$X^{(\alpha,\beta+1,i)} = X + \eta^{\beta+1,x}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_x^{\beta+1}u\right)} + \eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_t^{\alpha}u\right)} + \eta^{x}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{2x}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{t}\frac{\partial}{\partial u_t}.$$

ضرایب امتداد از روابط زیر به‌دست می آید.

$$\begin{aligned} \eta^{\beta+1,x} &= D_x^{\beta+1}(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \xi D_x^{\beta+1}(u_x) + \tau D_x^{\beta+1}(u_t), \\ \eta^{\alpha,t} &= D_t^{\alpha}(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \xi D_t^{\alpha}(u_x) + \tau D_t^{\alpha}(u_t), \\ \eta^{ix} &= D_x^{i}(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \xi D_x^{i}(u_x) + \tau D_x^{i}(u_t), \\ \eta^{t} &= D_t(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \xi D_t(u_x) + \tau D_t(u_t). \end{aligned}$$

با جایگذاری $q = 1, p = 2, x_1 = x,\ x_2 = t$ و $\alpha_j = \alpha$ $(\forall j = 1,2)$ در رابطه (۲۷.۴)، امتداد

ضرایب بی‌نهایت کوچک $(\eta)^{\beta+1,x}$ , $(\eta)^{\alpha,t}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
\eta^{\alpha,t} &= \frac{\partial^{\alpha}\eta}{\partial t^{\alpha}} + \left(\eta_u - \alpha D_t\left(\tau\right)\right)\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} - u\frac{\partial^{\alpha}\eta_u}{\partial t^{\alpha}} \\
&+ \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\binom{\alpha}{k}\frac{\partial^{k}\eta_u}{\partial t^{k}} - \binom{\alpha}{k+1}D_t^{k+1}\left(\tau\right)\right]D_t^{\alpha-k}\left(u\right) \\
&- \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}D_t^{k}\left(\xi\right)D_t^{\alpha-k}\left(u_x\right) \\
&+ \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{t^{n-\alpha}\left(-u\right)^{r}}{k!\Gamma(n+1-\alpha)}\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m}}\left[\left(u\right)^{k-r}\right]\frac{\partial^{n-m+k}\eta}{\partial t^{n-m}\partial\left(u\right)^{k}} \\
\eta^{\beta+1,x} &= \frac{\partial^{\beta+1}\eta}{\partial x^{\beta+1}} + \left(\eta_u - \left(\beta+1\right)D_x\left(\xi\right)\right)\frac{\partial^{\beta+1}u}{\partial x^{\beta+1}} - u\frac{\partial^{\beta+1}\eta_u}{\partial x^{\beta+1}} \\
&+ \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\binom{\beta+1}{n}\frac{\partial^{n}\eta_u}{\partial x^{n}} - \binom{\beta+1}{n+1}D_x^{n+1}\left(\xi\right)\right]D_x^{\beta+1-n}\left(u\right) \\
&- \sum_{n=1}^{+\infty},\binom{\beta+1}{n}D_x^{n}\left(\tau\right)D_x^{\beta+1-n}\left(u_t\right) \\
&+ \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{x^{n-\beta-1}\left(-u\right)^{r}}{k!\Gamma(n-\beta)}\frac{\partial^{m}}{\partial x^{m}}\left[\left(u\right)^{k-r}\right]\frac{\partial^{n-m+k}\eta}{\partial x^{n-m}\partial\left(u\right)^{k}}.
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۲۲.۴) شرط ناوردایی نظیر معادله مکان‌ـزمان کسری (۲۹.۴) به منظور یافتن تقارن‌ها به‌صورت

$$X^{(\alpha,\beta+1)}X\left(\partial_t^{\alpha}u - \partial_x^{\beta+1}u - au + au^3\right)|_{\partial_t^{\alpha}u=k\partial_x^{\beta+1}u+au-au^3} = 0, \tag{۳۳.۴}$$

است. شرط ناوردایی (۱.۳.۴) قابل بیان به شکل

$$\eta^{\alpha,t} - \eta^{\beta+1,x} - a\eta + 3au^2\eta = 0, \tag{۳۴.۴}$$

است. اکنون با جایگزین کردن ضرایب $\eta^{\alpha,t}$ و $\eta^{\beta+1,x}$ در شرط ناوردایی (۳۴.۴) معادلات تعیین‌کننده زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\xi_t = \xi_u = \tau_x = \tau_u = \eta_{uu} = 0, \\
&(\beta+1)\xi_x = \alpha\tau_t, \partial_t^{n}\eta_u - \binom{\alpha}{n+1}\mathrm{D}_t^{n+1}(\tau) = 0, \qquad \forall\, n = 1,2,\ldots, \\
&\binom{\beta+1}{n}\partial_x^{n}\eta_u - \binom{\beta+1}{n+1}\mathrm{D}_x^{n+1}(\xi) = 0, \qquad \forall\, n = 1,2,\ldots, \\
&\partial_t^{\alpha}\eta - u\partial_t^{\alpha}\eta_u - k\partial_x^{\beta+1}\eta + ku\partial_x^{\beta+1}\eta_u + au\eta_u - a\eta - a\alpha u\tau_t \\
&+3au^2\eta - au^3\eta_u + a\alpha u^3\tau_t = 0.
\end{aligned} \tag{۳۵.۴}$$

با حل نمودن دستگاه معادلات فوق و محدود به شرایط اولیه $\xi\left(0,t,u\right) = \tau\left(x,0,u\right) = 0$

مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه تقارن به‌وسیله‌ی عملگرهای

$$X_1 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2\left(\beta+1\right)t\frac{\partial}{\partial t} + u\left(2\alpha\beta+\alpha-\beta-1\right)\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_2 = u\frac{\partial}{\partial u},$$

ایجاد می‌شود. اکنون معادله (۲۹.۴) را نسبت به مولد تجانس $X_1$ به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه کسری کاهش می‌دهیم. ناورداهای نظیر این تقارن به صورت

$$z = xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}}, \quad u(x,t) = g(xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}})t^{\gamma} \tag{۳۶.۴}$$

حاصل می‌شود که در آن $\gamma = \frac{2\alpha\beta+\alpha-\beta-1}{2(\beta+1)}$.

**قضیه ۳.۳.۴.** معادله (۲۹.۴) تحت تبدیلات (۳۶.۴) به معادله دیفرانسیل مرتبه کسری زیر کاهش داده می‌شود:

$$t^{-\alpha}\left(P^{1-\alpha+\gamma,\,\alpha}_{\frac{\beta+1}{\alpha}}g\right)(z) - kx^{-\beta-1}\left(D^{-\beta-1,\,\beta+1}_{1}g\right)(z) - ag\left(z\right) + at^{2\gamma}g^{3}\left(z\right) = 0, \tag{۳۷.۴}$$

که در آن $P^{\tau,\alpha}_{\zeta}$ مشتق کسری اردلی‌ـ کوبر چپ از مرتبه $\alpha > 0$ و $D^{\tau,\beta}_{\zeta}$ مشتق کسری اردلی‌ـ کوبر راست از مرتبه $\beta > 0$ هستند.

***برهان.*** فرض کنید $n-1 < \alpha < n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ در این‌صورت مشتق کسری ریمن‌ـ لیوول برای تبدیل متشابه (۳۶.۴) نسبت به متغیر $t$ به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{g(xs^{\frac{-\alpha}{\beta+1}})s^{\gamma}}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds\right].$$

فرض کنید $v = t/s$، در نتیجه $ds = -(t/v^2)dv$. از این‌رو معادله فوق به‌صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} &= \frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\left[\frac{t^{n-\alpha+\gamma}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_1^{\infty}\frac{g(zv^{\frac{\alpha}{\beta+1}})v^{-(n-\alpha+1+\gamma)}}{(v-1)^{\alpha-n+1}}dv\right], \\ &= \frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\left[t^{n-\alpha+\gamma}\left(K^{1+\gamma,n-\alpha}_{\frac{\beta+1}{\alpha}}g\right)(z)\right],\end{aligned} \tag{۳۸.۴}$$

نوشته می‌شود. به منظور ساده کردن سمت راست از معادله‌ی (۳۸.۴) و ناوردای $\left(z = xt^{-\frac{\alpha}{\beta+1}}\right)$ داریم:

$$t\frac{d}{dt}f(z) = -\frac{\alpha}{\beta+1}z\frac{d}{dz}f(z).$$

بنابراین تساوی پی در پی

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[t^{n-\alpha-1+\gamma}\left(n-\alpha+\gamma-\frac{\alpha}{\beta+1}z\frac{d}{dz}\right)\left(K^{1+\gamma,n-\alpha}_{\frac{\beta+1}{\alpha}}g\right)(z)\right], \\ &\ \vdots \\ &= t^{-\alpha+\gamma}\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\alpha+\gamma+j-\frac{\alpha}{\beta+1}z\frac{d}{dz}\right)\left(K^{1+\gamma,n-\alpha}_{\frac{\beta+1}{\alpha}}g\right)(z), \\ &= t^{-\alpha+\gamma}\left(P^{1-\alpha+\gamma,\alpha}_{\frac{\beta+1}{\alpha}}g\right)(z),\end{aligned} \tag{۳۹.۴}$$

نتیجه می‌شود. به طور مشابه، با استفاده از رابطه‌ی

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\beta+1}u}{\partial x^{\beta+1}} &= \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int_0^x \frac{g(st^{\frac{-\alpha}{\beta+1}})t^{\gamma}}{(x-s)^{\beta+1-n}}ds\right],\\ &= t^{\gamma}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\left[x^{n-\beta}\left(I_1^{0,n-\beta}g\right)(z)\right],\end{aligned}$$

برای $n-1<\beta<n$ و

$$x\frac{\partial}{\partial x}g(z) = xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}}\frac{d}{dz}g(z), \qquad z = xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}},$$

داریم:

$$\frac{\partial^{\beta+1}u}{\partial x^{\beta+1}} = t^{\gamma}x^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\beta+1}g\right)(z). \tag{۴۰.۴}$$

در حالتی‌که $\alpha=n=1,2,3,\dots,$ برای $z=xt^{-\frac{\alpha}{2(\beta+1)}}$ تساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} &= \frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\left(t^{\gamma}g(z)\right) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[t^{\gamma-1}\left(\gamma-\frac{n}{\beta+1}z\frac{d}{dz}\right)g(z)\right],\\ &\vdots\\ &= t^{\gamma-n}\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-n+\gamma+j-\frac{n}{\beta+1}z\frac{d}{dz}\right)g(z),\\ &= t^{\gamma-n}\left(P_{\frac{\beta+1}{n}}^{1-n+\gamma,n}g\right)(z).\end{aligned}$$

به طور مشابه به‌ازای $\beta=n$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\beta+1}u}{\partial x^{\beta+1}} &= \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\left(t^{\gamma}g(z)\right) = \frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}\left[t^{\gamma}x^{-1}z\frac{d}{dz}g(z)\right],\\ &\vdots\\ &= t^{\gamma}x^{-n-1}\prod_{j=1}^{n+1}\left(-n-1+j+z\frac{d}{dz}\right)g(z),\\ &= t^{\gamma}x^{-n-1}\left(D_1^{-n-1,n+1}g\right)(z).\end{aligned}$$

لذا عبارات (۳۹.۴) و (۴۰.۴) به ازای $n-1<\alpha\le n$ و $n-1<\beta\le n$ به ترتیب برقرار هستند. اکنون جایگذاری (۳۹.۴) و (۴۰.۴) در معادله آلن‌ـ کان مکان‌ـزمان کسری (۲۹.۴) منجر به معادله

$$t^{-\alpha}\left(P_{\frac{\beta+1}{\alpha}}^{1-\alpha+\gamma,\alpha}g\right)(z)-kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\beta+1}g\right)(z)-ag(z)+at^{2\gamma}g(z)=0,$$

شده و بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

برای تقارن $X_1-(2\alpha\beta+\alpha-\beta-1)X_2$، ناورداهای متناظر به‌صورت زیر است:

$$z = xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}}, \qquad u(x,t) = g(xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}}).$$

تحت تبدیل فوق، معادله (۲۹.۴) به ازای $0 < \alpha, \beta \leq 1$ به معادله دیفرانسیل معمولی زیر کاهش داده می‌شود:

$$t^{-\alpha}\left(P^{1-\alpha,\alpha}_{\frac{\beta+1}{\alpha}}g\right)(z) - kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\beta+1}g\right)(z) - ag(z) + ag^3(z) = 0.$$

**معادله آلن‌ـ کان زمان‌ـ کسری:**

برای این معادله

$$\partial_t^\alpha u = ku_{xx} + au - au^3, \qquad t > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

شرط ناوردایی به‌صورت

$$\eta^{\alpha,t} - \eta^{xx} - a\eta + 3au^2\eta = 0, \tag{۴۱.۴}$$

داریم. با جایگذاری ضرایب $\eta^{\alpha,t}$ و $\eta^{xx}$ از (۴۳.۴) در رابطه (۴۱.۴) دستگاه معادلات مشخصه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\xi_t = \xi_u = \tau_x = \tau_u = \eta_{uu} = 0, \qquad 2\xi_x = \alpha\tau_t,\\
&\binom{\alpha}{n}\partial_t^n\eta_u - \binom{\alpha}{n+1}\mathrm{D}_t^{n+1}(\tau) = 0, \qquad\qquad \forall n = 1, 2, \dots\\
&\partial_t^\alpha\eta - u\partial_t^\alpha\eta_u - k\eta_{xx} + au\eta_u - a\eta - a\alpha u\tau_t + 3au^2\eta - au^3\eta_u + a\alpha u^3\tau_t = 0.
\end{aligned}$$

با حل دستگاه فوق و رابطه $\tau(x, 0, u) = 0$ ضرایب میدان برداری عبارتنداز:

$$\xi = C + 2C_2\alpha x, \qquad \tau = 4C_2 t, \qquad \eta = C_3 u + C_2(3\alpha - 2),$$

که $C_1, C_2, C_3$ ثابت‌هایی دلخواه هستند. بنابراین مولدهای بی‌نهایت کوچک نظیر هر گروه لی تک پارامتری معادله (۳۱.۴) عبارتنداز:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 4t\frac{\partial}{\partial t} + u(3\alpha - 2)\frac{\partial}{\partial u},\\
&X_3 = u\frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}$$

در نهایت با محاسبه تابع نمایی نظیر این میدان‌های برداری داریم:

$$\begin{aligned}
g_1 &:= \exp(\varepsilon\mathbf{v}_1)(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u),\\
g_2 &:= \exp(\varepsilon\mathbf{v}_2)(x, t, u) = (\lambda^{2\alpha}x, \lambda^4 t, \lambda^{3\alpha-2}u),\\
g_3 &:= \exp(\varepsilon\mathbf{v}_5)(x, t, u) = (x + \varepsilon t, t, \frac{1}{a}\varepsilon + u).
\end{aligned}$$

اگر $u = f(x,t)$ یک جواب برای معادله‌ی مذکور باشد و تقارن‌ها را روی آن اثر دهیم، در این‌صورت یک جواب جدید برای معادله به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
u^1 &= f(x - \varepsilon, t),\\
u^2 &= f(x, t - \varepsilon),\\
u^3 &= f(x - \varepsilon t, t) + \frac{1}{a}\varepsilon.
\end{aligned}$$

جدول ۱.۴: معادلات کاهش‌یافته نظیر معادله (۳۱.۴)

| $X_i$ | $z_i$ | $u_i$ | $FODE_i$ |
|---|---|---|---|
| $X_1$ | $t$ | $g\left(t\right)$ | $\partial_t^\alpha g\left(t\right)-ag\left(t\right)+ag^3\left(t\right)=0$ |
| $X_2$ | $xt^{-\frac{\alpha}{2}}$ | $t^{\frac{3\alpha-2}{4}}g\left(xt^{-\frac{\alpha}{2}}\right)$ | $t^{-\alpha}\left(P_{\frac{2}{\alpha}}^{\frac{2-\alpha}{4},\alpha}g\right)\left(z\right)-kt^{-\alpha}g''\left(z\right)-ag\left(z\right)+at^{\frac{2(3\alpha-2)}{4}}g^3\left(z\right)=0$ |
| $X_1+\lambda X_3$ | $t$ | $e^{\lambda x}g\left(t\right)$ | $\partial_t^\alpha g-k\lambda^2 g\left(t\right)-ag\left(t\right)+ae^{2\lambda x}g^3\left(t\right)=0$ |

در جدول ۱.۴، معادلات کاهش‌یافته نظیر معادله (۳۱.۴) ارائه شده است.

**معادله آلن ـ کان مکان ـ کسری:**

در این حالت، معادله آلن ـ کان با مشتقات کسری مکان

$$k\partial_x^{\beta+1}u=u_t-au+au^3,\qquad x>0,\quad 0<\beta<1,$$

تحت گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای بی‌نهایت کوچک (۳۲.۴) ناوردا است اگر و تنها اگر

$$k\eta^{\beta+1,x}-\eta^t+a\eta-3au^2\eta=0. \tag{۴۲.۴}$$

با جایگذاری $\eta^{\beta+1,x}$ و $\eta^t$ در رابطه (۴۲.۴) مجموعه معادلات تعیین‌کننده‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\xi_t=\xi_u=\tau_x=\tau_u=\eta_{uu}=0,\qquad (\beta+1)\,\xi_x=\tau_t,\\
&\binom{\beta+1}{n}\partial_x^n\eta_u-\binom{\beta+1}{n+1}\mathrm{D}_x^{n+1}(\xi)=0,\qquad\quad \forall n=1,2,\ldots\\
&k\partial_x^{\beta+1}\eta-ku\partial_x^{\beta+1}\eta_u-\eta_t+au^3\eta_u+a\eta-3au^2\eta-au\eta_u\\
&-(\beta+1)au^3\xi_x+(\beta+1)au\xi_x=0.
\end{aligned}$$

اکنون با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی کسری فوق و رابطه‌ی $\xi\left(0,t,u\right)=0$، ضرایب میدان برداری حاصل می‌شوند:

$$\xi=2C_2x,\qquad \tau=2C_2\left(\beta+1\right)t+C_1,\qquad \eta=C_2\beta u+u,$$

که $C_1,C_2$ ثابت‌هایی دلخواه هستند. بنابراین مولدهای متناظر گروه تقارن عبارتند:

$$\begin{aligned}
X_1&=\frac{\partial}{\partial t},\qquad\quad X_2=2x\frac{\partial}{\partial x}+2\left(\beta+1\right)t\frac{\partial}{\partial t}+u\beta\frac{\partial}{\partial u},\\
X_3&=u\frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}$$

در جدول ۲.۴، معادلات کاهش‌یافته نظیر معادله (۳۰.۴) ارائه شده است. در جدول‌های ۳.۴ـ۵.۴، رده‌بندی از معادلات کاهش‌یافته نظیر معادله آلن ـ کان نسبت به پارامتر $a$ و مرتبه مشتق کسری گردآوری شده است.

جدول ۲.۴: معادلات کاهش‌یافته نظیر معادله (۳۰.۴)

| $X_i$ | $z_i$ | $u_i$ | $FODE_i$ |
|---|---|---|---|
| $X_1$ | $x$ | $g(x)$ | $k\partial_x^{\beta+1} g(x) + ag(x) - ag^3(x) = 0$ |
| $X_2$ | $xt^{\frac{-1}{\beta+1}}$ | $t^{\frac{\beta}{2(\beta+1)}} g\left(xt^{\frac{-1}{\beta+1}}\right)$ | $kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\,\beta+1} g\right)(z) + zt^{-1}g'(z) + ag(z) - \frac{\beta}{2(\beta+1)}t^{-1}g(z) - at^{\frac{2\beta}{2(\beta+1)}}g^3(z) = 0$ |

جدول ۳.۴: تقارن‌ها و معادلات کاهش‌یافته نظیر مدل زمان ــ کسری.

| معادلات | پارامترها | مولدهای تقارنی | متغیرهای مشابه | معادلات کاهش‌یافته |
|---|---|---|---|---|
| گرما | $a=0$ | $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ | $z=t, \quad u=g(t)$ | $\partial_t^\alpha g(t) = 0$ |
| | | $X_2 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 4t\frac{\partial}{\partial t} + u(3\alpha-2)\frac{\partial}{\partial u},$ | $z = xt^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad u = t^{-\frac{3\alpha-2}{4}} g(z)$ | $\left(P_{\frac{2}{\alpha}}^{\frac{2-\alpha}{4},\,\alpha} g\right)(z) - kg''(z) = 0$ |
| | | $X_1 + \lambda X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda u\frac{\partial}{\partial u}$ | $z=t, \quad u = e^{\lambda x} g(t)$ | $\partial_t^\alpha g(t) - k\lambda^2 g(t) = 0$ |
| آلن ــ کان | $a$ | $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ | $z=t, \quad u=g(t)$ | $\partial_t^\alpha g(t) - ag(t)\left(1-g^2(t)\right) = 0$ |
| | | $X_2 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 4t\frac{\partial}{\partial t} + u(3\alpha-2)\frac{\partial}{\partial u},$ | $z = xt^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad u = t^{-\frac{3\alpha-2}{4}} g(z)$ | $t^{-\alpha}\left(P_{\frac{2}{\alpha}}^{\frac{2-\alpha}{4},\,\alpha} g\right)(z) - kt^{-\alpha}g''(z) - ag(z) + at^{\frac{(3\alpha-2)}{2}} g^3(z) = 0$ |
| | | $X_1 + \lambda X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda u\frac{\partial}{\partial u}$ | $z=t, \quad u = e^{\lambda x} g(t)$ | $\partial_t^\alpha g(t) - k\lambda^2 g(t) - ag(t)\left(1 - e^{2\lambda x} g^2(t)\right) = 0$ |
| فیژوگ ــ ناگومو | $a=-1$ | $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ | $z=t, \quad u=g(t)$ | $\partial_t^\alpha g(t) - ag(t)\left(1+g^2(t)\right) = 0$ |
| | | $X_2 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 4t\frac{\partial}{\partial t} + u(3\alpha-2)\frac{\partial}{\partial u},$ | $z = xt^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad u = t^{-\frac{3\alpha-2}{4}} g(z)$ | $t^{-\alpha}\left(P_{\frac{2}{\alpha}}^{\frac{2-\alpha}{4},\,\alpha} g\right)(z) - kt^{-\alpha}g''(z) - ag(z) - at^{\frac{(3\alpha-2)}{2}} g^3(z) = 0$ |
| | | $X_1 + \lambda X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda u\frac{\partial}{\partial u}$ | $z=t, \quad u = e^{\lambda x} g(t)$ | $\partial_t^\alpha g(t) - k\lambda^2 g(t) - ag(t)\left(1 + e^{2\lambda x} g^2(t)\right) = 0$ |

جدول ۴.۴: تقارن‌ها و معادلات کاهش‌یافته نظیر مدل مکان ــ کسری .

| معادلات | پارامترها | مولدهای تقارنی | متغیرهای مشابه | معادلات کاهش‌یافته |
|---|---|---|---|---|
| گرما | $a=0$ | $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ | $z=x, \quad u=g(x)$ | $\partial_x^{\beta+1} g(x) = 0$ |
| | | $X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2(\beta+1)t\frac{\partial}{\partial t} + u\beta\frac{\partial}{\partial u},$ | $z = xt^{\frac{-1}{\beta+1}}, \quad u = t^{\frac{\beta}{2(\beta+1)}} g(z)$ | $ktx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\,\beta+1} g\right)(z) - \frac{\beta}{2(\beta+1)} g(z) + zg'(z) = 0$ |
| آلن ــ کان | $a$ | $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ | $z=x, \quad u=g(x)$ | $k\partial_x^{\beta+1} g(x) + ag(x)\left(1-g^2(x)\right) = 0$ |
| | | $X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2(\beta+1)t\frac{\partial}{\partial t} + u\beta\frac{\partial}{\partial u}$ | $z = xt^{\frac{-1}{\beta+1}}, \quad u = t^{\frac{\beta}{2(\beta+1)}} g(z)$ | $kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\,\beta+1} g\right)(z) + zt^{-1}g'(z) + ag(z) - \frac{\beta}{2(\beta+1)}t^{-1}g(z) - at^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} g^3(z) = 0$ |
| فیژوگ ــ ناگومو | $a=-1$ | $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ | $z=x, \quad u=g(x)$ | $k\partial_x^{\beta+1} g(x) + ag(x)\left(1-g^2(x)\right) = 0$ |
| | | $X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2(\beta+1)t\frac{\partial}{\partial t} + u\beta\frac{\partial}{\partial u}$ | $z = xt^{\frac{-1}{\beta+1}}, \quad u = t^{\frac{\beta}{2(\beta+1)}} g(z)$ | $kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\,\beta+1} g\right)(z) + zt^{-1}g'(z) + ag(z) - \frac{\beta}{2(\beta+1)}t^{-1}g(z) + at^{\frac{\beta}{(\beta+1)}} g^3(z) = 0$ |

جدول ۵.۴: تقارن‌ها و معادلات کاهش‌یافته نظیر مدل مکان ــ زمان ــ کسری ($\gamma = \frac{2\alpha\beta+\alpha-\beta-1}{2(\beta+1)}$).

| معادلات | پارامترها | مولدهای تقارنی | متغیرهای مشابه | معادلات کاهش‌یافته |
|---|---|---|---|---|
| گرما | $a=0$ | $X_1 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2(\beta+1)t\frac{\partial}{\partial t} + u(2\alpha\beta+\alpha-\beta-1)\frac{\partial}{\partial u},$ | $z = xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}}, \quad u(x,t) = g(z)t^\gamma$ | $t^{-\alpha}\left(P_{\frac{\beta+1}{\alpha}}^{1-\alpha+\gamma,\,\alpha} g\right)(z) - kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\,\beta+1} g\right)(z) = 0$ |
| | | $X_1 - (2\alpha\beta+\alpha-\beta-1)X_2 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2(\beta+1)t\frac{\partial}{\partial t}$ | $z = xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}}, \quad u(x,t) = g(z)$ | $t^{-\alpha}\left(P_{\frac{\beta+1}{\alpha}}^{1-\alpha,\,\alpha} g\right)(z) - kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\,\beta+1} g\right)(z) = 0$ |
| آلن ــ کان | $a$ | $X_1 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2(\beta+1)t\frac{\partial}{\partial t} + u(2\alpha\beta+\alpha-\beta-1)\frac{\partial}{\partial u},$ | $z = xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}}, \quad u(x,t) = g(z)t^\gamma$ | $t^{-\alpha}\left(P_{\frac{\beta+1}{\alpha}}^{1-\alpha,\,\alpha} g\right)(z) - kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\,\beta+1} g\right)(z) - ag(z) + at^{2\gamma}g^3(z) = 0$ |
| | | $X_1 - (2\alpha\beta+\alpha-\beta-1)X_2 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2(\beta+1)t\frac{\partial}{\partial t}$ | $z = xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}}, \quad u(x,t) = g(z)$ | $t^{-\alpha}\left(P_{\frac{\beta+1}{\alpha}}^{1-\alpha,\,\alpha} g\right)(z) - kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\,\beta+1} g\right)(z) - ag(z)\left(1-g^2(z)\right) = 0$ |
| فیژوگ ــ ناگومو | $a=-1$ | $X_1 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2(\beta+1)t\frac{\partial}{\partial t} + u(2\alpha\beta+\alpha-\beta-1)\frac{\partial}{\partial u},$ | $z = xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}}, \quad u(x,t) = g(z)t^\gamma$ | $t^{-\alpha}\left(P_{\frac{\beta+1}{\alpha}}^{1-\alpha,\,\alpha} g\right)(z) - kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\,\beta+1} g\right)(z) - ag(z) - at^{2\gamma}g^3(z) = 0$ |
| | | $X_1 - (2\alpha\beta+\alpha-\beta-1)X_2 = 2\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2(\beta+1)t\frac{\partial}{\partial t}$ | $z = xt^{\frac{-\alpha}{\beta+1}}, \quad u(x,t) = g(z)$ | $t^{-\alpha}\left(P_{\frac{\beta+1}{\alpha}}^{1-\alpha,\,\alpha} g\right)(z) - kx^{-\beta-1}\left(D_1^{-\beta-1,\,\beta+1} g\right)(z) - ag(z)\left(1+g^2(z)\right) = 0$ |

اکنون توسیع روش آنالیز گروه لی در دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه کسری با مثال ۱.۵.۱ ارائه شده در فصل اول توضیح می‌دهیم.

**مثال ۲.۳.۴.** در این مثال، به یافتن تقارن‌های لی نظیر دستگاه (۲۹.۱) می‌پردازیم. بدین منظور، ابتدا گروه لی تک پارامتری از تبدیلات را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x^* &= x+\varepsilon\xi(x,t,u,v,w)+O(\varepsilon^2),\\ t^* &= t+\varepsilon\tau(x,t,u,v,w)+O(\varepsilon^2),\\ u^* &= u+\varepsilon\eta_1(x,t,u,v,w)+O(\varepsilon^2),\\ v^* &= v+\varepsilon\eta_2(x,t,u,v,w)+O(\varepsilon^2),\\ w^* &= w+\varepsilon\eta_3(x,t,u,v,w)+O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

در این‌صورت، مولد تقارنی نظیر گروه تبدیلات فوق را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\tau\frac{\partial}{\partial t}+\eta^1\frac{\partial}{\partial u}+\eta^2\frac{\partial}{\partial v}+\eta^3\frac{\partial}{\partial w}.$$

امتداد میدان برداری فوق با فرمول زیر داده می‌شود.

$$\begin{aligned} V^{(\alpha,3)} &= X+\left(\eta^1\right)^{\alpha,t}\partial_{\partial_t^\alpha u}+(\eta_2)^{\alpha,t}\,\partial_{\partial_t^\alpha v}+(\eta_3)^{\alpha,t}\,\partial_{\partial_t^\alpha w}+\eta_1^x\partial_{u_x}\\ &\quad +\eta_2^x\partial_{v_x}+\eta_3^x\partial_{w_x}+\eta_1^{xxx}\partial_{u_{xxx}}+\eta_2^{xxx}\partial_{v_{xxx}}+\eta_3^{xxx}\partial_{w_{xxx}}, \end{aligned}$$

ضرایب امتداد را با استفاده از روابط زیر به‌دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \eta_1^{\alpha,t} &= D_t^\alpha(\eta^1-\xi u_x-\tau u_t)+\xi D_t^\alpha(u_x)+\tau D_t^\alpha(u_t),\\ \eta_1^x &= D_x(\eta^1-\xi u_x-\tau u_t)+\xi D_x(u_x)+\tau D_x(u_t),\\ \eta_1^{3x} &= D_x^3(\eta^1-\xi u_x-\tau u_t)+\xi D_x^3(u_x)+\tau D_x^3(u_t),\\ \eta_2^{\alpha,t} &= D_t^\alpha(\eta^2-\xi v_x-\tau v_t)+\xi D_t^\alpha(v_x)+\tau D_t^\alpha(v_t),\\ &\vdots \end{aligned} \tag{۴۳.۴}$$

با به کارگیری رابطه (۲۷.۴) برای $q=3,\, p=2,\, \alpha_j=\alpha,\;\; j=1$ امتداد مرتبه $\alpha$ام ضرایب

بی‌نهایت کوچک $(\nu = 1,2,3)$ , $(\eta^{\nu})^{\alpha,t}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
(\eta^{\nu})^{\alpha,t} &= \frac{\partial^{\alpha}\eta^{\nu}}{\partial t^{\alpha}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{k}\frac{\partial^{k}\eta^{\nu}_{u^{\nu}}}{\partial t^{k}} - \binom{\alpha}{k+1}D_t^{k+1}\tau\right]\partial_t^{\alpha-k}(u^{\nu}) \\
&+ \sum_{s\neq\nu,s=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\frac{\partial^{k}\eta^{\nu}_{u^{s}}}{\partial t^{k}}\partial_t^{\alpha-k}(u^{s}) - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D_t^{k}\xi D_t^{\alpha-k}u^{\nu}_{x} \\
&+ \left(\eta^{\nu}_{u^{\nu}} - \alpha D_t\tau\right)\partial_t^{\alpha}(u^{\nu}) - u^{\nu}\frac{\partial^{\alpha}\eta^{\nu}_{u^{\nu}}}{\partial t^{\alpha}} + \sum_{s\neq\nu,s=1}^{3}\left(\eta^{\nu}_{u^{s}}\frac{\partial^{\alpha}u^{s}}{\partial t^{\alpha}} - u^{s}\frac{\partial^{\alpha}\eta^{\nu}_{u^{s}}}{\partial t^{\alpha}}\right) \\
&+ \sum_{s=1}^{3}\mu^{\nu,s}, \qquad \nu = 1,2,3.
\end{aligned} \tag{۴۴.۴}$$

که در آن $\mu^{\nu,s}$ با فرمول (۲۳.۴) داده شده است. حال با اعمال امتداد مولد بی‌نهایت کوچک $X^{(\alpha,3)}$ بر دستگاه معادلات (۲۹.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
&(\eta^1)^{\alpha,t} - \frac{1}{2}(\eta^1)^{3x} + 2u_x\eta^1 + 2u(\eta^1)^{x} - 3v_x\eta^3 - 3w\eta_2^{x} - 3w_x\eta^2 - 3v(\eta^3)^{x} = 0, \\
&(\eta^2)^{\alpha,t} + (\eta^2)^{3x} - 3v_x\eta^1 - 3u(\eta^2)^{x} = 0, \\
&(\eta^3)^{\alpha,t} + (\eta^3)^{3x} - 3w_x\eta^1 - 3u(\eta^3)^{x} = 0.
\end{aligned} \tag{۴۵.۴}$$

با جایگذاری ضرایب (۴۳.۴) و (۴۴.۴) در محک ناوردایی (۴۵.۴) و برابر صفر قرار دادن توان‌های مختلف از مشتقات $u$ به یک دستگاه فرامعین از معادلات خطی کسری و غیرکسری به شرح زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
&\xi_t = \xi_u = \xi_v = \xi_w = \tau_x = \tau_u = \tau_v = \tau_w = \eta^2_u = \eta^2_w = \eta^3_u = \eta^3_v = 0, \\
&\eta^1_{uu} = \eta^1_{vv} = \eta^1_{xv} = \eta^1_{xw} = \eta^1_{vw} = \eta^1_{ww} = \eta^2_{vv} = \eta^3_{ww} = 0, \qquad \alpha\tau_t = 3\xi_x, \\
&(\alpha-1)\tau_{tt} = 2\eta^1_{ut}, \quad (\alpha-1)\tau_{tt} = 2\eta^2_{vt}, \quad (\alpha-1)\tau_{tt} = 2\eta^3_{wt}, \\
&3u\xi_x - \xi_{3x} - 3\alpha\tau_t = 3\eta^1 - 3\eta^2_{xxv}, \quad 3u\xi_x - \xi_{3x} - 3\alpha\tau_t = 3\eta^1 - 3\eta^3_{xxw}, \\
&3u\xi_x - 3\alpha u\tau_t - \frac{1}{2}\xi_{3x} = 3\eta^1 - 3/2\eta^1_{xxu}, \\
&3u\eta^1_v + 3\eta^1_u - 3w\eta^2_v - 3\eta^3 = 3\alpha w\tau_t - 3w\xi_x, \\
&3u\eta^1_w + 3\eta^1_u - 3v\eta^3_w - 3\eta^2 = 3\alpha v\tau_t - 3v\xi_x, \\
&\binom{\alpha}{n}\partial_t^{n}\eta^1_u - \binom{\alpha}{n+1}\mathrm{D}_t^{n+1}(\tau) = 0 \quad \forall n = 1,2,\ldots \\
&\binom{\alpha}{n}\partial_t^{n}\eta^2_v - \binom{\alpha}{n+1}\mathrm{D}_t^{n+1}(\tau) = 0 \quad \forall n = 1,2,\ldots \\
&\binom{\alpha}{n}\partial_t^{n}\eta^3_w - \binom{\alpha}{n+1}\mathrm{D}_t^{n+1}(\tau) = 0 \quad \forall n = 1,2,\ldots.
\end{aligned}$$

با حل سیستم فوق، ضرایب $X$ به‌صورت

$$\begin{aligned}
\xi &= C_1 + 2C_2\alpha x, \qquad \tau = 6C_2 t, \qquad \eta^1 = -4C_2\alpha u, \\
\eta^2 &= C_2(5\alpha-3)v + C_3 v, \qquad \eta^3 = -C_2(13\alpha-3)w - C_3 w,
\end{aligned}$$

با ثابت‌های دلخواه $C_i(i=1,2,3)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین دستگاه (۲۹.۱) یک جبرلی سه‌بعدی از تقارن‌ها با مولدهای بی‌نهایت کوچک زیر می‌پذیرد:

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\qquad X_2=v\frac{\partial}{\partial v}-w\frac{\partial}{\partial w},$$
$$X_3=2\alpha x\frac{\partial}{\partial x}+6t\frac{\partial}{\partial t}-4\alpha u\frac{\partial}{\partial u}+(5\alpha-3)v\frac{\partial}{\partial v}-(13\alpha-3)w\frac{\partial}{\partial w}.$$

جدول لی زیر، جبرلی ساختن مولدهای تقارنی بینهایت کوچک فوق را اثبات می‌کند. گروه‌های

جدول ۶.۴: جدول لی

| $[\,,\,]$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|
| $X_1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $X_2$ | $0$ | $0$ | $2\alpha X_2$ |
| $X_3$ | $0$ | $-2\alpha X_2$ | $0$ |

یک پارامتری $G_i$ تولید شده توسط $X_i$ به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}G_1 &: \ (t,\varepsilon+x,u,v,w)\,,\\ G_2 &: \ (t,x,u,e^{\varepsilon}v,e^{-\varepsilon}w)\,,\\ G_3 &: \ \left(e^{6\varepsilon}t,e^{2\alpha\varepsilon}x,e^{-4\alpha\varepsilon}u,e^{(5\alpha-3)\varepsilon}v,e^{-(13\alpha-3)\varepsilon}w\right).\end{aligned}$$

جواب‌های ناوردا نظیر گروه تبدیلات با مولد $X_1$ عبارتنداز:

$$u(x,t)=f(t),\quad v(x,t)=g(t),\quad w(x,t)=h(t).$$

با جایگذاری جواب در (۲۹.۱) به دستگاه کاهش‌یافته زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^{\alpha}f(t)}{dt^{\alpha}}=0,\qquad \frac{d^{\alpha}g(t)}{dt^{\alpha}}=0,\qquad \frac{d^{\alpha}h(t)}{dt^{\alpha}}=0.$$

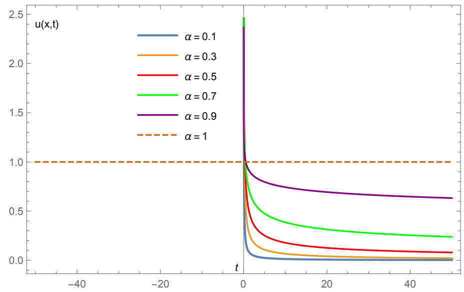
در نتیجه، دستگاه (۲۹.۱) دارای جواب متشابه به صورت زیر است:

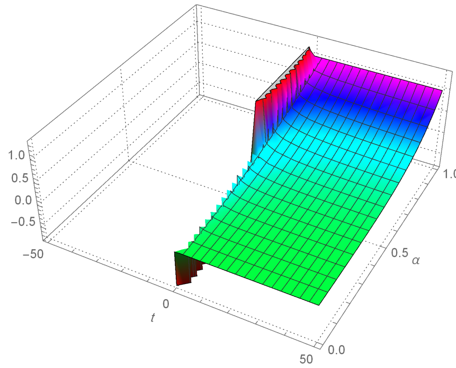
$$u(x,t)=\frac{C_1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1},\quad v(x,t)=\frac{C_2}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1},\quad w(x,t)=\frac{C_3}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1},$$

که در آن ثابت‌های $C_i(i=1,2,3)$ دلخواه هستند. در نمودار ۱.۴ یک نمایش گرافیکی از جواب‌های فوق برای مقادیر متفاوت $\alpha$ نمایش داده شده است. حال جواب‌های ناوردای گروهی نظیر تبدیل تجانس با مولد $X_3$، به‌دست آوریم. ناورداهای مستقل نظیر این تبدیل به صورت

$$u\left(x,t\right)=x^{-2}f\left(tx^{\frac{-3}{\alpha}}\right),\ v\left(x,t\right)=x^{\frac{5\alpha-3}{2\alpha}}g\left(tx^{\frac{-3}{\alpha}}\right),\ w\left(x,t\right)=x^{\frac{-13\alpha+3}{2\alpha}}h\left(tx^{\frac{-3}{\alpha}}\right),\ z=tx^{\frac{-3}{\alpha}},$$

شکل ۱.۴: اثر $\alpha$ روی $u(x,t)$ برای $C_1 = 1$.




هستند، بنابراین دستگاه معادلات کاهش‌یافته تحت این تبدیل، $FODE$های زیر هستند:

$$\partial_z^\alpha f(z) = \frac{-3}{2}\alpha^{-3}\Bigg[4\alpha^3\Big(2h(z)g(z) + 2f(z) - f^2(z)\Big) + 9zf'(z)(3\alpha+1)$$
$$+ 6z\alpha^2\Big(g(z).h'(z) + h(z).g'(z) - f(z)f'(z) + 13/3f'(z)\Big)$$
$$+ 27z^2f''(z)(\alpha+1) + 9z^3f'''(z)\Bigg],$$

$$\partial_z^\alpha g(z) = \frac{3}{8}\alpha^{-3}\Bigg[g(z)\Big(20\alpha^3f(z) - 5\alpha^3 - 12\alpha^2f(z) + 23\alpha^2 - 27\alpha + 9\Big)$$
$$+ 2zg'(z)\Big(217 - 108\alpha + 23\alpha^2 - 12\alpha^2f(z)\Big)$$
$$+ 108z^2g''(z)(3-\alpha) + 72z^3g'''(z)\Bigg],$$
$$\partial_z^\alpha h(z) = \frac{3}{8}\alpha^{-3}\Bigg[h(z)\Big(-52\alpha^3f(z) + 1105\alpha^3 + 12\alpha^2f(z) - 671\alpha^2 + 135\alpha - 9\Big)$$
$$+ 2zh'(z)\Big(9 + 671\alpha^2 - 12\alpha^2f(z)\Big)$$
$$+ 27z^2h''(z)(3/2 - 20\alpha) + 72z^3h'''(z)\Bigg].$$

# فصل ۵

# قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری

پیشتر دانستیم که اگر یک معادله دیفرانسیل یک معادله اویلر_لاگرانژ باشد، قوانین پایستگی برای این معادله با استفاده از قضیه‌ی نوتر با کمک تقارن‌های تغییراتی نقطه‌ای از این معادله ساخته می‌شوند. یاد آوری می‌کنیم که یک معادله دیفرانسیل اویلر_لاگرانژ از اصل تغییراتی با مینیمم سازی انتگرال تغییرات با یک تابع لاگرانژی به عنوان انتگرالده در آن به دست می‌آید. نخستین بار در سال ۱۹۹۶ فردی به نام ریو [۱] لاگرانژیی وابسته به مشتقات کسری را معرفی نمود[۱۰۵]. در طول دو دهه گذشته تعمیم‌های بسیاری از معادلات اویلر_لاگرانژ با انواع مشتق‌های کسری ارائه شده است [۳، ۴، ۵، ۴۶، ۶۸، ۱۰۵]. بر پایه‌ی این نتایج تعمیم کسری از قضیه‌ی نوتر ساخته شد [۸، ۱۸، ۳۱، ۷۴، ۸۳، ۹۴]. همچنین در مواردی نیز قوانین پایستگی کسری برای معادلات و دستگاه‌هایی که دارای لاگرانژی هستند به دست آمده است. با این اوصاف بیشتر معادلات پر کاربرد در فیزیک مانند معادله انتشار کسری، معادلات انتقال و معادلات جنبشی کسری، معادلات اویلر_لاگرانژ نبوده و دارای لاگرانژی به مفهوم کلاسیک آن نیستند. بنابراین برای این معادلات، قوانین پایستگی با استفاده از قضیه‌ی نوتر قابل دستیابی نیست و نیازمند رویکرد جدیدی برای یافتن آن‌ها هستیم.

همان‌گونه که می‌دانیم ابراگیموف روش جایگزینی برای یافتن قوانین پایستگی برای معادلات

[1]Fred Riewe

دیفرانسیل مرتبه صحیح که فاقد لاگرانژی هستند ارائه نمود. این روش برپایه مفهوم خودالحاقی غیرخطی بر اساس لاگرانژی قراردادی استوار است. وی ثابت نمود که قوانین پایستگی می‌توانند به تقارن‌های معادلات دیفرانسیلی که غیرخطی خودالحاقی هستند و یا دستگاه‌هایی متشکل از این معادلات وابسته شوند. مؤلفه‌های بردارهای پایستگی بر طبق الگوریتمی که او اثبات کرد با اعمال عملگرهای نوتر بر تابع لاگرانژی حاصل می‌شوند. با کمک این رویکرد قوانین پایستگی برای تمامی معادلات مرتبه‌ی صحیح و یا دستگاه‌هایی متشکل از آن‌ها که تنها دارای لاگرانژی قراردادی هستند با کمک تقارن‌های آن‌ها ساخته می‌شوند [۵۴، ۵۵، ۵۶].

در این فصل، بعد از تعمیم قضیه‌ی نوتر به معادلات دیفرانسیل کسری، نشان می‌دهیم که مفهوم خودالحاقی غیرخطی قابل تعمیم به معادلات دیفرانسیل کسری که دارای لاگرانژی در مفهوم کلاسیک آن نیستند نیز بوده و از این مفهوم می‌توان برای ساختن قوانین پایستگی برای چنین معادلاتی بهره جست.

## ۱.۵ قوانین پایستگی برای $FPDE$ها با لاگرانژی

فرض کنید

$$R\left(x,u\right):=\Delta_{\sigma}\left(x,u,{}_{a}D_{x}^{\alpha}u,\ldots\right)=0,\qquad\sigma=1,\ldots,N,\tag{۱.۵}$$

دستگاهی شامل $N$ معادله دیفرانسیل کسری با $p$ - متغیر مستقل $x=(x^1,\ldots,x^p)$ و $q$ - متغیر وابسته $u=(u^1,\ldots,u^q)$ است که در آن ${}_{a}D_{x}^{\alpha}u$ نشان‌دهنده‌ی مشتق کسری آمیخته (ریمن–لیوول یا کاپوتو)

$${}_{a}D_{x}^{\alpha}={}_{a_1,\ldots,a_p}D_{x_1,\ldots,x_p}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p},$$

باشد به‌قسمی‌که $\alpha_j\geq 0$ برای هر $j=1,2,\ldots,p$.

گویند دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۱.۵) یک لاگرانژی کسری

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(x,u,u^{(1)},\ldots,u^{(k)},\ D_{u}^{\alpha}),$$

می‌پذیرد، هرگاه دستگاه (۱.۵) را بتوان به‌صورت دستگاه معادلات اویلر–لاگرانژ زیر نوشت:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u^{\nu}}=0,\quad\nu=1,\ldots,q.\tag{۲.۵}$$

عملگر

$$\frac{\delta}{\delta u^{\nu}}=\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}+\sum_{s=1}^{k}(-1)^{s}D_{i_1 i_s}\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_s}^{\nu}}+\left(D_{i\pm}^{\alpha_j}\right)^{*}\frac{\partial}{\partial D_{i\pm}^{\alpha_j}u^{\nu}},\quad\nu=1,\ldots,q,\tag{۳.۵}$$

عملگر مشتق تغییراتی ( اویلر–لاگرانژ) است که $(D_{i\pm}^{\alpha_j})^{*}$ عملگرهای الحاقی کسری از $D_{i\pm}^{\alpha_j}$ هستند. برای مشتقات کسری ریمن–لیوویل و کاپوتو عملگرهای الحاقی متناظر به فرم زیر

می‌باشند:

$$(D_{i\pm}^{\alpha})^* =^C D_{i\mp}^{\alpha_j}, \qquad (^C D_{i\pm}^{\alpha})^* = D_{i\mp}^{\alpha_j}. \tag{۴.۵}$$

معادلات اویلر_لاگرانژ (۲.۵) یک اکسترمم از تعمیم کسری انتگرال تغییراتی

$$\mathcal{J}[u] = \int_{\Omega} \mathcal{L}\left(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}, D^{\alpha} u\right) dx, \tag{۵.۵}$$

فراهم می‌کند.

## ۲.۵ عملگرهای کسری نوتر

همان‌طور که در فصل قبل ارائه شد مؤلفه‌های بردار پایستگی از عمل عملگرهای نوتر بر لاگرانژی حاصل می‌شوند. این عملگرها از اتحاد عملگری یا همان اتحاد نوتر به دست می‌آیند. برای حالت مفروض با $p$ متغیر مستقل و $q$ متغیر وابسته این اتحاد به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{X}\mathcal{L} + \mathcal{L} D_i\left(\xi^i\right) = W^{\nu} \frac{\delta}{\delta u^{\nu}} + D_i\left(\mathcal{N}^i \mathcal{L}\right). \tag{۶.۵}$$

در اتحاد فوق $\frac{\delta}{\delta u}$ عملگر اویلر_لاگرانژ، $\mathcal{N}^i$ عملگرهای نوتر و $\tilde{X}$ امتداد مناسب از مولد گروه تقارن نقطه‌ای است که برای تمام مشتقات مرتبه‌ی صحیح و یا کسری از متغیر وابسته درگیر در معادله عبارتست‌از:

$$X = \xi^i(x,u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^{\nu}(x,u) \frac{\partial}{\partial u^{\nu}}, \tag{۷.۵}$$

که مشخصه‌ی آن به‌صورت $W^{\nu} = \eta^{\nu} - \xi^i \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^i}$ است. امتداد گروه تبدیلات نقطه‌ای عمل کننده روی فضایی با متغیرهای کسری در بخش (۳.۴) از فصل سوم به تفصیل شرح داده شده است. عملگر $\mathcal{N}^i$ کسری به‌صورت

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^i \;=\;& \xi^i + W^{\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial u_i^{\nu}} + \sum_{s=1}^{k-1} (-1)^s D_{j_1} \ldots D_{j_s} \frac{\partial}{\partial u_{ij_1\ldots j_s}^{\nu}}\Big) \qquad (۸.۵)\\
&+ \sum_{r=1}^{k-1} D_{l_1} \ldots D_{l_r}\left(W^{\nu}\right)\Big[\frac{\partial}{\partial u_{il_1\ldots l_r}^{\nu}} + \sum_{s=1}^{k-1-r} (-1)^s D_{j_1} \ldots D_{j_s} \frac{\partial}{\partial u_{il_1\ldots l_r j_1 \ldots j_s}^{\nu}}\Big]\\
&- \sum_{j} \sum_{r=1}^{[\alpha_j]+1} (-1)^r \Big[D_i^{[\alpha_j]+1-r}\left(I_{i\pm}^{1-\{\alpha_j\}} W^{\nu}\right) D_i^{r-1} \frac{\partial}{\partial\left(D_{i\pm}^{\alpha_j} u^{\nu}\right)}\\
&+ D_i^{r-1}\left(W^{\nu}\right) D_i^{[\alpha_j]+1-r}\Big(I_{i\mp}^{1-\{\alpha_j\}} \frac{\partial}{\partial\left({}^C D_{i\pm}^{\alpha_j} u^{\nu}\right)}\Big)\Big]\\
&+ \sum_{j} \Big[(-1)^{[\alpha_j]+1} J_{i+}^{\alpha_j}\Big\{W^{\nu}, D_i^{[\alpha_j]+1} \frac{\partial}{\partial\left(D_{i+}^{\alpha_j} u^{\nu}\right)}\Big\}\\
&+ J_{i-}^{\alpha_j}\Big\{W^{\nu}, D_i^{[\alpha_j]+1} \frac{\partial}{\partial\left(D_{i-}^{\alpha_j} u^{\nu}\right)}\Big\} + J_{i+}^{\alpha_j}\Big\{D_i^{[\alpha_j]+1}\left(W^{\nu}\right), \frac{\partial}{\partial\left({}^C D_{i+}^{\alpha_j} u^{\nu}\right)}\Big\}\\
&+ (-1)^{[\alpha_j]+1} J_{i-}^{\alpha_j}\Big\{D_i^{[\alpha_j]+1}\left(W^{\nu}\right), \frac{\partial}{\partial\left({}^C D_{i-}^{\alpha_j} u^{\nu}\right)}\Big\}\Big], \qquad (۹.۵)
\end{aligned}$$

نوشته می‌شود که در آن عملگر $J_{i\pm}^{\alpha_j}\{;\}$ روی زوج منظم از توابع $\{f(x), g(x)\}(x \in \Omega)$ همراه با قواعد زیر

$$\begin{aligned} J_{i+}^{\alpha_j}\{f,g\} &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \int_{c_i}^{x_i} \int_{x_i}^{d_i} \frac{f(x_i(t))\, g(x_i(s))}{(s-t)^{1-\alpha_j}} ds dt, \\ J_{i-}^{\alpha_j}\{f,g\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \int_{c_i}^{x_i} \int_{x_i}^{d_i} \frac{f(x_i(s))\, g(x_i(t))}{(s-t)^{1-\alpha_j}} ds dt, \end{aligned}$$

تعریف می‌شود که $x_i(s) = (x^1, \ldots, x^{i-1}, s, x^{i+1}, \ldots, x^p)$. در صورتی‌که مشتق کسری نداشته باشیم $\mathcal{N}$ مانند حالت کلاسیک آن خواهد بود. همانند حالت کلاسیک (مرتبه صحیح)، تعریف زیر برقرار است.

**تعریف ۱.۲.۵.** تابعک انتگرال (۵.۵) تحت گروه $G$ از تبدیلات نقطه‌ای (۷.۵) ناورداست هرگاه

$$\int_\Omega \mathcal{L}\left(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}^{(1)}, \ldots, \bar{u}^{(k)}, D^\alpha \bar{u}\right) d\bar{x} = \int_\Omega \mathcal{L}\left(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}, D^\alpha u\right) dx. \qquad (۱۰.۵)$$

تساوی (۱۰.۵) شرط زیر را ایجاب می‌کند [۹۲]:

$$\bar{X}\mathcal{L} + \mathcal{L} D_i\left(\xi^i\right) = 0. \qquad (۱۱.۵)$$

مشابه معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح، شرط (۱۱.۵) را می‌توان به شرط دیورژانسی زیر تغییر داد:

$$\bar{X}\mathcal{L} + \mathcal{L} D_i\left(\xi^i\right) = D_i\left(H^i\right), \qquad (۱۲.۵)$$

که در آن $H^i\,(i = 1, \ldots, p)$ توابعی معلوم هستند.

تعمیم کسری قضیه‌ی نوتر را می‌توان با به کارگیری روابط (۶.۵) و (۱۰.۵) بیان و اثبات نمود.

**قضیه ۱.۲.۵.** فرض کنید انتگرال کنش $\mathcal{J}[u]$ (۵.۵) تحت گروه تبدیلات $G$ ناوردا باشد یعنی شرط (۱۱.۵) برقرار باشد. آن‌گاه بردار پایستگی $C$ نظیر معادلات اویلر- لاگرانژ (۲.۵) با مؤلفه‌های زیر است:

$$C^i = \mathcal{N}^i \mathcal{L}, \qquad i = 1, \ldots, p, \qquad (۱۳.۵)$$

به‌طوری‌که $\mathcal{N}^i$ ها با رابطه (۸.۵) تعریف شده‌اند.

**ملاحظه ۱.۲.۵.** هرگاه شرط (۱۲.۵) برقرار بود در این‌صورت مؤلفه‌های پایستگی عبارتنداز:

$$C^i = \mathcal{N}^i \mathcal{L} - H^i, \qquad i = 1, \ldots, p. \qquad (۱۴.۵)$$

روابط (۸.۵)، (۱۰.۵) و (۱۳.۵) الگوریتمی ساده جهت محاسبه قوانین پایستگی فراهم می‌کنند. ابتدا می‌بایست شرایط (۱۱.۵) ( یا (۱۲.۵) ) را برای تقارن مفروض از دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری تحت فرضیات بررسی نمود، سپس مؤلفه‌های بردارهای پایستگی با فرمول‌های (۸.۵) و (۱۳.۵) (یا (۱۴.۵) ) را محاسبه کرد.

**مثال ۱.۲.۵.** معادله‌ی مکان‌ـ کسری موج به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$u_{tt} = -{}_{x}^{C}D_{1}^{\alpha}\left(D_{x}^{\alpha}u\right), \quad x \in (0,1), \quad \alpha \in (0,1). \tag{۱۵.۵}$$

معادله‌ی فوق، معادله‌ی اویلرـ لاگرانژ مسئله‌ي تغییراتی

$$\mathcal{J}[u] = \int\int \frac{1}{2}\left[\left(D_{x}^{\alpha}u\right)^{2} - u_{t}^{2}\right] dxdt,$$

است و تقارن‌های آن عبارتنداز:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \; X_2 = u\frac{\partial}{\partial u}, \; X_3 = x^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial u}, \; X_4 = x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u}.$$

قانون پایستگی نظیر معادله موج (۱۵.۵) به‌صورت زیر است:

$$D_t C^t + D_x C^x = 0.$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که کدام یک از تقارن‌های به‌دست آمده، تقارن‌های تغییراتی $\mathcal{J}$ هستند. بدین منظور محک‌های (۴.۵) و (۶.۵) با لاگرانژی $\mathcal{L} = 1/2\left[\left(D_{x}^{\alpha}u\right)^{2} - u_{t}^{2}\right]$ به کار می‌بریم. واضح است که عملگرهای $X_1$ و $X_3$ در شرط (۴.۵) و عملگر $X_4$ در شرط دیورژانس (۶.۵) با $H^x = \Gamma(\alpha+1) I_{x}^{1-\alpha}u$ صدق می‌کنند. عملگر $X_2$ صادق در هیچ یک از شرط‌های مذکور ناست و در نتیجه یک گروه تقارنی تغییراتی برای $\mathcal{L}$ تولید نمی‌کند و منجر به قانون پایستگی نمی‌شود. مؤلفه‌های بردار پایستگی (۱۳.۵) و (۱۴.۵) نظیر لاگرانژی $\mathcal{L}\left(u_t, D_{x}^{\alpha}u\right)$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} C^t &= \mathcal{N}^t\mathcal{L} = \tau\mathcal{L} + W\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}, \\ C^x &= \mathcal{N}^x\mathcal{L} - H^x = \xi\mathcal{L} + I_{x}^{1-\alpha}u\left(W\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_{x}^{\alpha}u} - J_{x+}^{1-\alpha}\left\{W, D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_{x}^{\alpha}u}\right\} - H^x, \end{aligned}$$

که $W = \eta - \xi u_x - \tau u_t$.

عملگر $X_1$ با مشخصه‌ی $W = u_t$ بردار پایستگی با مؤلفه‌های زیر را نتیجه می‌دهد:

$$C^t = \frac{\left(D_{x}^{\alpha}\right)^{2}u}{2} + \frac{u_{t}^{2}}{2}, \quad C^x = -\left(D_{x}^{\alpha}\right)\left(I_{x}^{1-\alpha}u_t\right) + J_{x+}^{1-\alpha}\{u_t, D_{x}^{\alpha+1}u\}.$$

قانون پایستگی متناظر، قانون پایستگی انرژی است.

بردار پایستگی نظیر عملگر $X_3$ با مشخصه $W = x^{\alpha-1}$ مؤلفه‌های زیر را داراست:

$$C^t = -x^{\alpha-1}u_t, \quad C^x = \Gamma(\alpha)\,D_{x}^{\alpha}u - J_{x+}^{1-\alpha}\{x^{\alpha-1}, D_{x}^{\alpha+1}u\}.$$

قانون پایستگی متناظر، فرم کسری قانون پایستگی اندازه حرکت است.

عملگر $X_4$ با مشخصه‌ی $W = x^{\alpha}$ بردار پایستگی با مؤلفه‌های زیر است:

$$C^t = -x^{\alpha}u_t, \quad C^x = \Gamma(1+\alpha)\left[xD_{x}^{\alpha}u - I_{x}^{1-\alpha}u\right] - J_{x+}^{1-\alpha}\{x^{\alpha}, D_{x}^{\alpha+1}u\}.$$

قانون پایستگی متناظر، نتیجه‌ی قانون پایستگی اندازه حرکت است.

## ۳.۵ قوانین پایستگی برای $FPDE$های فاقد لاگرانژی

بسیاری از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری فاقد لاگرانژی بوده و بنابراین قضیه‌ی نوتر در ساخت قوانین پایستگی این دسته از معادلات اجرایی و مفید نیست. همانطور که می‌دانید یک روش جایگزین برای معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح که فاقد لاگرانژی هستند روش خودالحاقی غیرخطی است که توسط ابراگیموف ارائه شد. وی با معرفی یک لاگرانژی قراردای ثابت نمود که قوانین پایستگی می‌توانند به تقارن‌های معادلات دیفرانسیلی که خودالحاقی غیرخطی هستند و یا دستگاه‌هایی متشکل از این معادلات وابسته شوند. مؤلفه‌های بردارهای پایستگی بر طبق الگوریتمی که او اثبات کرد با اعمال عملگرهای نوتر بر تابع لاگرانژی حاصل می‌شوند. با کمک این رویکرد قوانین پایستگی برای تمامی معادلات مرتبه صحیح و یا دستگاه‌هایی متشکل از آن‌ها که تنها دارای لاگرانژی قراردادی هستند با کمک تقارن‌های آن‌ها ساخته می‌شوند [۵۴، ۵۵، ۵۶].

در این بخش، نشان می‌دهیم که مفهوم خودالحاقی غیرخطی قابل تعمیم به معادلات دیفرانسیل کسری، که دارای لاگرانژی در مفهوم کلاسیک آن نیستند، نیز بوده و از این مفهوم می‌توان برای ساختن قوانین پایستگی برای چنین معادلاتی بهره جست.

برای دستگاه معادلات (۱.۵) لاگرانژی قراردادی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{L} = v^\sigma \Delta_\sigma \left(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}, D^\alpha u\right), \tag{۱۶.۵}$$

به قسمی‌که $v = (v^1, \ldots, v^q)$ متغیرهای وابسته جدید هستند[۵۵]. در نتیجه معادلات

$$(\Delta^\nu)^\star (x, u, v, \ldots) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\nu} = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, q, \tag{۱۷.۵}$$

معادلات الحاقی نظیر معادلات (۱.۵) خواهد بود. عملگر اویلر_لاگرانژ $\delta/\delta u^\nu$ طبق (۳.۵) داده شده است.

**تعریف ۱.۳.۵.** دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۵) را خودالحاق غیرخطی گویند هرگاه دستگاه الحاقی (۱۷.۵) روی همه جواب‌های $u\,(x)$ از دستگاه (۱.۵) با جایگذاری

$$v^\nu = \varphi^\nu\,(x, u) \qquad \nu = 1, \ldots, q, \tag{۱۸.۵}$$

به طوری که $\varphi(x, u) \neq 0$ صدق کند. به عبارت دیگر

$$(\Delta^\nu)^* \,(x, u, \varphi(x, u), \ldots) = \lambda^\sigma_\nu \Delta^\sigma \left(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}, D^\alpha u\right), \tag{۱۹.۵}$$

که در آن $\lambda^\sigma_\nu$ ها ضرایب و $v$ و $\varphi$ بردارهای $q$ــ بعدی $v = (v^1, \ldots, v^q)$ و $\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^q)$ هستند.

هرگاه دستگاه $FPDE$ها خودالحاق غیرخطی باشد، آن‌گاه مؤلفه‌های بردار پایستگی با درنظرگرفتن لاگرانژی قراردادی (۱۶.۵) با جایگذاری (۱۸.۵) و بکارگیری روابط (۱۳.۵) محاسبه می‌شوند.

**ملاحظه ۱.۳.۵.** لاگرانژی قراردادی (۱۶.۵) به طور همانی روی تمام جواب‌های دستگاه (۱.۵) صفر می‌شود و شرط (۱۱.۵) روی چنین جواب‌هایی صادق است از این رو می‌توان قوانین پایستگی را برای هر تقارن دستگاه (۱.۵) با استفاده از لاگرانژی قراردادی محاسبه نمود.

**مثال ۱.۳.۵.** معادله تعمیم‌یافته‌ی کامپنیتز [1] مرتبه کسری را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید:

$$D_t^{\alpha}u_t = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial u}{\partial x}+u^2\right)\right], \quad \alpha\in(0,1), \quad t\in(0,T). \tag{۲۰.۵}$$

تنها تقارن این معادله به‌صورت زیر است:

$$X = -x\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{۲۱.۵}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۷.۵) معادله‌ی الحاقی (۲۰.۵) به‌صورت

$${}_tD_T^{\alpha}v_t + x^2v_{xx} - 2x^2uv_x + 4xuv - 2v = 0,$$

نوشته می‌شود. با جایگذاری $v=\varphi(t,x,u)$ در شرط خودالحاقی غیرخطی (۱۹.۵)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&{}_tD_T^{\alpha}\varphi_t +{}_t D_T^{\alpha}\left(\varphi_u u_t\right) + x^2\left(\varphi_x + 2\varphi_{xu}u_x + \varphi_{uu}u_x^2 + \varphi_u u_{xx}\right) - 2x^2u\left(\varphi_x+\varphi_u u_x\right)\\ &+2\left(2xu-1\right) = \lambda\left[D_t^{\alpha}u_t - 4x\left(u_x+u^2\right) - x^2\left(u_{xx}+2uu_x\right)\right].\end{aligned} \tag{۲۲.۵}$$

همان‌طور که دیده می‌شود سمت چپ معادله فوق، مشتق کسری راست و سمت راست معادله فوق مشتق چپ شامل می‌شود بنابراین $\lambda=0$ و ${}_tD_T^{\alpha}\varphi_t +{}_t D_T^{\alpha}\left(\varphi_u u_t\right)=0$. با صفر قرار دادن ضریب $u_{xx}$ خواهیم داشت: $\varphi_u=0$. از این رو به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\varphi = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\left(T-t\right)^{\alpha}.$$

از بخش باقیمانده‌ی معادله بدست می‌آوریم: $\varphi_1(x)=A_1x^2$ و $\varphi_2(x)=A_2x^2$، که $A_1$ و $A_2$ ثابت‌های دلخواه هستند. بنابراین معادله‌ی (۲۰.۵) در شرایط خودالحاقی غیرخطی با جایگذاری $v=x^2\left(A_1+A_2\left(T-t\right)^{\alpha}\right)$ در (۲۲.۵) صدق می‌کند. سپس لاگرانژی قراردادی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{L} = x^2\left(A_1+A_2\left(T-t\right)^{\alpha}\right)\left[D_t^{\alpha}u_t - 4x\left(u_x+u^2\right) - x^2\left(u_{xx}+2uu_x\right)\right], \tag{۲۳.۵}$$

[1] A. S. Kompaneets

و از (۸.۵) مؤلفه‌های بردار پایستگی $C=(C^x,C^t)$ عبارتست‌از:

$$\begin{aligned} C^t &= I_t^{1-\alpha}D_t\left(W\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(D_t^\alpha u_t\right)}-W_tI_T^{1-\alpha}D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(D_t^\alpha u_t\right)} \\ &+J_{t+}^{1-\alpha}\Big\{D_t\left(W\right),D_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(D_t^\alpha u_t\right)}\Big\}, \\ C^x &= W\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x}-D_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\Big)+D_x\left(W\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xx}}. \end{aligned}$$

در این صورت متناظر با تقارن (۲۱.۵) داریم: $W=u+xu_x$ و با جایگذاری (۲۳.۵) در مؤلفه‌های فوق دو قانون پایستگی متفاوت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C_1^t &= x^{2C}D_t^\alpha u, \quad C_1^x=-x^4\left(u_x+u^2\right); \\ C_2^t &= x^2\big[\left(T-t\right)^\alpha I_x^{1-\alpha}u_t+\Gamma\left(1+\alpha\right)u-\alpha J_{t+}^{1-\alpha}\{u_t,\left(T-t\right)^{\alpha-1}\}\big], \\ C_2^x &= -x^4\left(T-t\right)^\alpha\left(u_x+u^2\right). \end{aligned}$$

بردار $C_1$ نظیر ثابت $A_1$ و $C_2$ نظیر ثابت $A_2$ است.

**مثال ۲.۳.۵.** یک قانون پایستگی موضعی از دستگاه $HS-cKdV$ (مثال ۱.۵.۱) معادله‌ي پیوسته

$$D_t\left(\Psi\right)+D_x\left(\Phi\right)=0,$$

است که روی فضای جواب دستگاه (۲۹.۱) صدق کند. همچنین بردار پایستگی چگالی $\Psi$ و شار $\Phi$ توابعی از متغیرهای $x,t,u,v,w$ و مشتقات $u,v,w$ هستند. لاگرانژی قراردادی برای دستگاه (۲۹.۱) به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}=p\left(D_t^\alpha u-1/2u_{xxx}+2uu_x-3wv_x-3vw_x\right) \\ &+q\left(D_t^\alpha v+v_{xxx}-3uv_x\right)+r\left(D_t^\alpha w+w_{xxx}-3uw_x\right), \end{aligned}$$

که در آن $p,q,r\left(x,t\right)$ متغیرهای وابسته جدید هستند. در اینصورت دستگاه معادلات الحاقی متناظر برابر است با:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}=0,\qquad\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v}=0,\qquad\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta w}=0,$$

که در آن عملگرهای $\delta/\delta u,\delta/\delta v$ و $\delta/\delta w$، عملگرهای اویلرـلاگرانژ نسبت به متغیرهای وابسته $u,v,w$ هستند. بنابراین دستگاه معادلات الحاقی برای دستگاه $HS-cKdv$ به فرم

$$\begin{aligned} &(D_t^\alpha)^*p+1/2p_{xxx}-2up_x-3qv_x-3rw_x=0, \\ &(D_t^\alpha)^*q-q_{xxx}+3uq_x+3qu_x+3wp_x=0, \\ &(D_t^\alpha)^*r-r_{xxx}+3ur_x+3ru_x+3vp_x=0, \end{aligned}$$

نوشته می‌شود. هر تقارن (۷.۵) پذیرفته شده با دستگاه (۲۹.۱) منجر به قانون پایستگی به فرم $D_i\left(C^i\right)=0$ می‌شود.

برای اولین مولد تقارنی $X_1$ مشخصه‌ها را به‌صورت $W_1 = -u_x,\ W_2 = -v_x$ و $W_3 = -w_x$ در نظر می‌گیریم. با جایگذاری در (۱۳.۵) و (۸.۵)، بردارپایستگی به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned}
C^x &= \frac{1}{2}p_{xx}u_x - \frac{1}{2}p_x u_{xx} - q_{xx}v_x + q_x v_{xx} - r_{xx}w_x + r_x w_{xx} \\
&\quad + pD_t^\alpha u + qD_t^\alpha v + rD_t^\alpha w, \\
C^t &= -pD_t^{\alpha-1}(u_x) + I(-u_x, p_t) - qD_t^{\alpha-1}(v_x) + I(-v_x, q_t) \\
&\quad - rD_t^{\alpha-1}(w_x) + I(-w_x, r_t).
\end{aligned}$$

به طریق مشابه بردار پایستگی متناظر با تقارن $X_2$ و مشخصه‌های $W_1 = 0,\ W_2 = v$ و $W_3 = -w$ به شکل زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned}
C^x &= v(q_{xx} - 3uq - 3wp) - q_x v_x + qv_{xx} - w(r_{xx} - 3ur - 3vp) - r_x w_x + rw_{xx}, \\
C^t &= D_t^{\alpha-1}(v) + I(v, q_t) - D_t^{\alpha-1}(w) + I(-w, r_t).
\end{aligned}$$

در نهایت برای تقارن $X_3$ با مشخصه‌هایی به فرم

$$W_1 = -4\alpha u - 6tu_t - 2\alpha x u_x,\ W_2 = 5\alpha v - 3v - 6tv_t - 2\alpha x v_x,\ W_3 = -13\alpha w + 3w - 6tw_t - 2\alpha x w_x,$$

بردار پایستگی عبارتستاز:

$$\begin{aligned}
C^x &= 2\alpha x\left(p\partial_t^\alpha u + qD_t^\alpha v + rD_t^\alpha w\right) + 2\alpha u p_{xx} + 3tu_t p_{xx} + \alpha x u_x p_{xx} - 12\alpha p u^2 \\
&\quad - 18tuu_t p_x - 2\alpha p_x u_x - 3tu_{tx}p_x - \alpha u_x p_x - \alpha x p_x u_{xx} + 2\alpha p u_{xx} + 3tpu_{txx} \\
&\quad + 2\alpha p u_{xx} - 2\alpha x q_{xx} v_x - 15\alpha pvw - 15\alpha quv + 5\alpha q_{xx} v + 9quv - 3vq_{xx} \\
&\quad - 18twv_t p + 18tquv_t - 6tv_t q_{xx} - 5\alpha q_x v_x + 3v_x q_x + 6tq_x v_{tx} + 2\alpha q_x v_x \\
&\quad + 2\alpha x q_x v_{xx} + 5\alpha q v_{xx} - 3qv_{xx} - 6tqv_{txx} - 4\alpha q v_{xx} - 2\alpha x w_x r_{xx} \\
&\quad + 39\alpha pvw + 39\alpha ruw - 13\alpha w r_{xx} - 9ruw + 3wr_{xx} - 18tvw_t p + 18truw_t \\
&\quad - 6tw_t r_{xx} + 13\alpha r_x w_x - 3w_x r_x + 6tr_x w_{tx} + 2\alpha r_x w_x + 2\alpha x r_x w_{xx} \\
&\quad - 13\alpha r w_{xx} + 3rw_{xx} - 6trw_{txx} - 4\alpha r w_{xx} - 2\alpha x r_x w_{3x}, \\
C^t &= 6t\Big[p\left(D_t^\alpha u - 1/2u_{xxx} + 2uu_x - 3wv_x - 3vw_x\right) + q\left(D_t^\alpha v + v_{xxx} - 3uv_x\right) \\
&\quad + r\left(D_t^\alpha w + w_{xxx} - 3uw_x\right)\Big] + rD_t^{\alpha-1}(-13\alpha w + 3w - 6tw_t - 2\alpha x w_x) \\
&\quad + I(-4\alpha u - 6tu_t - 2\alpha x u_x, p_t) + qD_t^{\alpha-1}(5\alpha v - 3v - 6tv_t - 2\alpha x v_x) \\
&\quad + I(5\alpha v - 3v - 6tv_t - 2\alpha x v_x, q_t) + pD_t^{\alpha-1}(-4\alpha u - 6tu_t - 2\alpha x u_x) \\
&\quad + I(-13\alpha w + 3w - 6tw_t - 2\alpha x w_x, r_t).
\end{aligned}$$

# فصل ۶

# معادلات انتقال حرارت غیرخطی

هدف از این فصل تحلیل هندسی معادله غیرخطی حرارت به روش آنالیز تقارن لی است. ابتدا شکل کلی معادله‌ی انتشار حرارت را در نظر می‌گیریم و با بررسی و اعمال تغییرات لازم حالت‌های مختلفی که این معادله به خود می‌گیرد را معرفی می‌کنیم. رده‌بندی از تقارن‌ها برای معادله انتقال حرارت غیرهمسانگرد سه‌ـ بعدی ارائه می‌کنیم. در ادامه ناورداها و قوانین پایستگی را در برخی حالات مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

معادله انتقال حرارت یک معادله دیفرانسیل جزئی سهموی مرتبه دوم است که اولین بار توسط فوریه [۱] در سال ۱۸۸۲ جهت توصیف شار گرما ارائه شد. با این وجود در شاخه‌های مختلف علمی کاربرد بسیار دارد. به عنوان مثال در نظریه‌ی احتمالات معادله‌ی حرارت با مطالعه حرکت‌های براونی از طریق معادله فوکرـ پلانک مرتبط است. همین‌طور در بحث ریاضیات مالی، برای حل معادله دیفرانسیل جزئی بلک‌ـ شولز، ابتدا از تبدیل این معادله به معادله‌ی حرارت استفاده می‌شود. البته به معادله‌ی حرارت، معادله انتشار (نفوذ) هم می‌گویند که حالت کلی‌تر معادله حرارت است و می‌تواند برای توصیف انتشار مقادیر دیگری بجز حرارت (گرما) استفاده شود. معادله‌ی انتشار در مطالعه پدیده‌های انتشار شیمیایی و عملیات انتقال جرم در مهندسی شیمی ظاهر می‌شود.

[1] Joseph Fourier

## ۱.۶ معادله‌ی انتشار

معادله‌ی انتشار (نفوذ)، فرآیند انتشار یعنی فرآیند تعدیل تراکم در یک محیط با توزیع غیرهمگن اولیه ماده را توصیف می‌کند. معادله‌ی انتشار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial t}=\nabla\cdot\left[D\left(u,r\right)\nabla u\left(r,t\right)\right], \tag{۱.۶}$$

که در آن $D\left(u,r\right)$ ضریب انتشار (پخش) برای چگالی $u\left(r,t\right)$ در مکان $r=\left(x_1,\ldots,x_p\right)$ و زمان $t$ را نشان می‌دهد و عملگر $\nabla$ نمایانگر گرادیان تابع است. هرگاه ضریب انتشار وابسته به چگالی $u$ باشد معادله انتشار غیرخطی و در غیر این‌صورت خطی است.

هرگاه $D$ یک ماتریس معین مثبت متقارن باشد معادله‌ی (۱.۶) انتشار ناهمسانگرد غیرهمگن را توصیف می‌کند که در حالت سه‌ـ‌بعدی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial t}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[D_{ij}\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial x_j}\right]. \tag{۲.۶}$$

همچنین اگر $D$ را ثابت در نظر بگیریم در این‌صورت معادله‌ی (۱.۶) به معادله دیفرانسیل خطی

$$\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial t}=D\nabla^2 u\left(r,t\right),$$

کاهش داده می‌شود. معادله‌ي انتقال حرارت (انتشار)

$$u_t=\sum_{j=1}^{p}\left(k_j\left(u\right)u_{x_j}\right)_{x_j}+q\left(u\right), \tag{۳.۶}$$

با یک منبع خارجی $q\left(u\right)$ توصیف کننده انتقال حرارت با مواد ناهمسانگرد همگن است که ضرایب انتشار حرارت $k_i\geq 0$ تحت تاثیر دما $u\geq 0$ هستند. تابع $q>0$ یک چشمه گرما و $q<0$ چاهک گرما (سینک) است. معادله فوق خطی است هرگاه ضرایب انتشار $k_j\left(u\right)$ ثابت بوده و منبع $q\left(u\right)$ تابع خطی باشد. به بیان دیگر، معادله‌ی انتقال حرارت (۳.۶) خطی است هرگاه معادلات زیر به طور همزمان برقرار باشند:

$$\forall j=1,\ldots,p,\ k_j'\left(u\right)=0,\qquad q''\left(u\right)=0.$$

همچنین معادله‌ی (۳.۶) توصیف کننده انتقال حرارت در یک محیط همسانگرد است هرگاه

$$\forall j=1,\ldots,p,\ k_j\left(u\right)=k\left(u\right).$$

## معرفی معادله‌ی انتقال حرارت

پدیده انتقال حرارت یکی از مسائل کاربردی در حوزه های علمی و فنی و مهندسی است و از اهمیت بسزایی برخوردار است. بررسی علمی و همه جانبه‌ی این پدیده به کمک مدل‌سازی

آن در قالب معادلات ریاضی امکان‌پذیر است. در این بخش قصد داریم بر روی ناحیه‌ی سه‌ـ بعدی، پدیده‌ی انتقال حرارت را مورد بررسی قرار داده و معادله دیفرانسیل حاصل را به‌دست آوریم. در ضمن مدل‌سازی این پدیده بر روی ناحیه دو بعدی نیز مشابه حالت سه‌ـ بعدی است. اگر بررسی پدیده‌ی انتقال حرارت بر روی ناحیه‌ی یک‌ـ بعدی (میله‌ای که در راستای محور $x$ در نظر گرفته شده است) انجام شود، معادله‌ی گرمای یک‌ـ بعدی به‌دست می‌آید. اگر بررسی فوق بر روی یک ناحیه دو بعدی مثل یک صفحه تخت (در راستای محورهای $x$، $y$) انجام شود، معادله‌ی انتقال حرارت دو بعدی است و اگر بررسی فوق بر روی یک ناحیه سه‌ـ بعدی (در راستای محورهای $x$، $y$،$z$) انجام شود، معادله‌ی انتقال حرارت سه‌ـ بعدی است. قبل از آنکه به بررسی فرآیند مدل‌سازی پدیده‌ي انتقال حرارت بپردازیم، لازم است تا با برخی نمادها آشنا گردیم.

- $u(r,t)$ بیانگر دمای جسم در مکان $r$ و زمان $t$ است.
- $e(r,t)$ انرژی گرمایی در موقعیت $r$ و زمان $t$ (چگالی انرژی گرمایی) است.
- $\phi(r,t)$ میزان انرژی گرمایی است که در واحد زمان از یک سطح مقطع در موقعیت $r$ و زمان $t$ جریان می‌یابد (نرخ جریان حرارت).
- $Q(r,t)$ میزان انرژی گرمایی تولیدشده در موقعیت $r$ و زمان $t$ است (منبع گرمای احتمالی).
- $c(r)$ گرمای ویژه در موقعیت $r$ است. در حقیقت $c(r)$ میزان انرژی گرمایی مورد نیاز است تا دمای یک واحد از جرم یک واحد دمایی افزایش یابد.
- $\rho(r)$ چگالی جرم در موقعیت $r$ است (مقدار جرم در هر واحد از حجم).

کمیت‌ها $u(r,t)$ و $e(r,t)$ از طریق چگالی به‌صورت زیر با هم در ارتباط هستند:

$$e(r,t) = c(r)\,\rho(r)\,u(r,t)\,.$$

در مدل‌سازی پدیده‌ی مورد نظر، فرضیات فیزیکی زیر را در نظر می‌گیریم.

اگر دماهای متفاوتی در موقعیت های متفاوتی موجود باشد آن‌گاه انرژی گرمایی از جای گرم به جای سرد انتقال می‌یابد. اگر دما ثابت باشد آنگاه هیچ انرژی گرمایی جریان نمی‌یابد، یعنی $\phi = 0$ است.

جریان گرمایی به جنس خاص جسم وابسته است. بین جریان گرمایی و نرخ تغییرات دما تناسب زیر وجود دارد:

$$\phi(r,t) \propto \frac{\partial}{\partial r} u(r,t)\,.$$

فرض می‌کنیم $R$ ناحیه‌ای در فضا باشد که حرارت در آن جریان دارد و پدیده‌ی انتقال حرارت در آن مدنظر است و $u = u(x,y,z,t)$ دما در زمان $t$ در نقطه ی $r = (x,y,z)$ در $R$ باشد. به علاوه ناحیه‌ی $R$ همگن بوده و از یک ثابت گرمای ویژه $c$ و ثابت چگالی $\rho$ برخوردار است.

$\phi = \phi\left(x,y,z,t\right)$ شار حرارت بوده و میزان انرژی گرمایی است که در واحد زمان از یک واحد از سطح جریان می‌یابد. ضمناً $\phi$ یک فضای برداری است و جهت آن در جهت جریان حرارت در مکان $\left(x,y,z\right)$ در زمان $t$ نظیر می‌شود و $\hat{n}\left(x,y,z\right)$ بردار واحد قائم بر $R$ در نقطه $\left(x,y,z\right)$ از $\partial R$ است. ما فقط به مؤلفه قائم شار نیاز داریم که تصویر $\phi$ در طول $\hat{n}$ است. تصویر $\phi$ بر $\hat{n}$ با فرض اینکه $\|\hat{n}\| = 1$ توسط رابطه $\phi \cdot \hat{n}$ تعیین می‌شود. قبل از ادامه مطلب بیان قضیه‌ی مهم و اساسی زیر ضروری است. این قضیه با در نظرگرفتن شرایط همواری مد نظر روی میدان برداری $\phi$، انتگرال روی سطح را به انتگرال روی حجم مرتبط می‌نماید.

**قضیه ۶.۱.۱. ( دیورژانس، گاوس، استراسکی ).** فرض کنیم $R^3$ یک ناحیه کراندار با شرایط مرزی تکه‌ای باشد. اگر $f = \left(f_1, f_2, f_3\right) \in C^1$ بر روی یک ناحیه باز شامل $R$ باشد آن‌گاه داریم:

$$\iint_{\partial R} f\left(x,y,z\right) \cdot \hat{n}\left(x,y,z\right) ds = \iiint_R \nabla \cdot f\left(x,y,z\right) dv,$$

که طبق رابطه دیورژانس

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3 = div f$$

و $\hat{n}$ بردار واحد نرمال خارجی است که با نرخ انرژی گرمایی که از اطراف جریان می‌یابد برابر است.

اکنون براساس اصل پایستگی انرژی بر روی ناحیه‌ی $R$ امکان مدل‌سازی پدیده انتقال حرارت فراهم می‌شود. براساس این اصل، نرخ تغییر کل انرژی گرمایی در $R$ برابر است با نرخ گرمایی که از روی مرز به داخل $R$ جریان پیدا می‌کند و نرخ انرژی گرمایی که به وسیله یک منبع در $R$ تولید می‌شود. اکنون لازم است هر کدام از عبارت‌های فوق را به زبان ریاضی بیان نماییم؛ در یک جزء کوچک حجمی $dv = dxdydz$ کل انرژی برابر $cudv$ است و از این رو کل مقدار انرژی گرمایی در $R$ با انتگرال سه‌ـ بعدی $\int_R c\rho u dv$ داده می‌شود. این انتگرال به کمک انتگرال سه‌گانه نوشته می‌شود. بنابراین کل انرژی گرمایی برابر است با

$$\iiint_R e\left(x,y,z,t\right) dv = \iiint_R c\left(x,y,z\right) \rho\left(x,y,z\right) u\left(x,y,z,t\right) dv.$$

لذا نرخ تغییر انرژی گرمایی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \iiint_R e\left(x,y,z,t\right) dv = \frac{d}{dt} \iiint_R c\left(x,y,z\right) \rho\left(x,y,z\right) u\left(x,y,z,t\right) dv.$$

به طور مشابه نرخ انرژی گرمایی تولید شده در داخل $R$ عبارت است از:

$$\iiint_R Q\left(x,y,z,t\right) dv.$$

با استفاده از مؤلفه قائم شار حرارت، نرخ انرژی گرمایی را که از میان سطح مرز جریان می‌یابد به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$-\iint_{\partial R} \phi\left(x,y,z,t\right) \cdot \hat{n}\left(x,y,z\right) ds.$$

علامت منفی بخاطر این است که شار $\phi$ تبدیل به انرژی گرمایی می‌شود در حالی که جهت مثبت رو به بیرون است.

از این رو قانون پایستگی با قانون موازنه‌ی انرژی با ترکیب سه رابطه قبل به‌صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt}\iiint_R c\left(x,y,z\right)\rho\left(x,y,z\right)u\left(x,y,z,t\right)dv=\iiint_R Qdv-\iint_{\partial R}\phi\left(x,y,z,t\right)\cdot\hat{n}\left(x,y,z\right)ds, \tag{۴.۶}$$

به منظور به‌دست آوردن صورت نهایی معادله انتقال حرارت لازم است با استفاده از قضیه دیورژانس، انتگرال روی سطح را به شکل زیر به انتگرال روی حجم تبدیل نماییم.

$$\iint_{\partial R}\phi\cdot\hat{n}ds=\iiint_R\nabla\cdot\phi dv,$$

بنابراین معادله (۴.۶) به‌صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt}\iiint_R c\rho u dv=-\iiint_R\nabla\cdot\phi dv+\iiint_R Qdv,$$

که به صورت نهایی زیر نوشته می‌شود:

$$\iiint_R c\rho\frac{\partial}{\partial t}u dv=-\iiint_R\nabla\cdot\phi dv+\iiint_R Qdv,$$

درنهایت همه جملات را تحت یک انتگرال حجم به‌صورت

$$\iiint_R\left[c\rho\frac{\partial}{\partial t}u+\nabla\cdot\phi-Q\right]dv=0, \tag{۵.۶}$$

بازنویسی می‌کنیم. ازآنجا که رابطه (۵.۶) برای هر $R$ دلخواهی برقرار است لذا انتگرالده باید صفر باشد که برای هر $t$ و $(x,y,z)\in R$ به معادله‌ی دیفرانسیل جزئی زیر منجر می‌شود

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}u+\nabla\cdot\phi-Q=0.$$

درنهایت داریم:

$$c\left(x,y,z\right)\rho\left(x,y,z\right)\frac{\partial}{\partial t}u\left(x,y,z,t\right)=-\nabla\cdot\phi\left(x,y,z,t\right)+Q\left(x,y,z,t\right)=0.$$

که این معادله برای هر مقدار دلخواه $R$ صدق می‌کند.

در محیط همسانگرد، قانون فوریه برای هدایت‌کننده‌های حرارت به‌صورت زیر برقرار است

$$\phi\left(x,y,z,t\right)=-k_0\left(x,y,z\right)\nabla u\left(x,y,z,t\right).$$

یعنی جریان حرارت با نرخ تغییرات دما متناسب است. بنابراین درصورتی‌که $c$ و $\rho$ را مقادیر ثابتی در نظر بگیریم رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}u=\nabla\cdot\left(k_0\nabla u\right)+Q, \tag{۶.۶}$$

که در آن
$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}u, \frac{\partial}{\partial y}u, \frac{\partial}{\partial z}u\right).$$
زمانی که منبع گرمای احتمالی وجود نداشته باشد، یعنی $Q = 0$ باشد با درنظر گرفتن $k = k_0/(c\rho)$ معادله‌ی حرارت به‌صورت زیر ساده می‌شود
$$\frac{\partial}{\partial t}u = k\nabla^2 u = k\Delta u,$$
که $\Delta u = \partial^2/\partial x^2 u + \partial^2/\partial y^2 u + \partial^2/\partial z^2 u$ عملگر لاپلاسی است. درنهایت به طور خلاصه می‌توان معادله (۶.۶) را به‌صورت
$$u_t - k\Delta u = \frac{1}{c\rho}Q,$$
نوشت که در آن $k = k_0/(c\rho)$ ثابت پخش می باشد.

## ۲.۶ تاریخچه‌ي آنالیز لی معادله‌ی انتقال حرارت

همان‌طور که قبلا بحث شد داشتن گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل داری مزیت‌های فراوانی است که از آن جمله می‌توان به رده‌بندی جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. از دیگر استفاده‌های این گروه‌ها، امکان رده‌بندی معادلات دیفرانسیل بر اساس پارامترها یا توابع دلخواه درگیر است. در این بخش به برخی از مطالعات انجام شده پیرامون معادله انتقال حرارت با آنالیز گروه لی می‌پردازیم.

اولین آنالیز گروه لی از معادله‌ی انتقال حرارت در حالت خطی و یک‌ـ‌بعدی بود که توسط لی در سال ۱۸۸۸ انجام شد. با این‌وجود، بررسی معادلات غیرخطی حرارت با استفاده از روش تقارن‌ها اولین بار در سال ۱۹۵۹ توسط اوزیانیکوف و روی معادله‌ی زیر بود
$$u_t = (f(u)u_x)_x.$$
در سال ۱۹۸۷، ابراگیموف ، گزیزوف و آخاتوف معادله‌ی زیر را بر حسب تقارن‌هایش رده‌بندی کردند:
$$u_t = G(u_x)\, u_{xx}.$$
درودنیستین درسال ۱۹۸۲ گروه معادله‌ی زیر را رده‌بندی کرد.
$$u_t = (G(u)\, u_x)_x + g(u).$$
اورون [۱] و رزوناو [۲] در ۱۹۸۶ و ادواردز [۳] در ۱۹۹۴ در زمان خودشان بزرگ‌ترین و کامل‌ترین لیست از تقارن‌های معادله‌ی
$$u_t = (G(u)\, u_x)_x + f(u)\, u_x,$$

[1] Alexander Oron [2] Philip Rosenau [3] Maureen P. Edwards

را به‌دست آوردند. نتایج به‌دست آمده بعدها توسط چرنیها [۱] و سروو [۲] تحت عنوان معادله‌ی غیرخطی حرارت با شرط انتقال حرارت به‌صورت زیر نشان داده شد:

$$u_t = \left(G\left(u\right)u_x\right)_x + f\left(u\right)u_x + g\left(u\right).$$

روش‌های مشابه برای معادله انتقال حرارت غیرخطی $(1+2)$ـ بعدی به کاربرده شده است [۶، ۲۵، ۸۹]. همچنین درودنیستین یک رده‌بندی کاملی از جواب های معادله‌ی انتقال حرارت غیرخطی $(1+3)$ ـ بعدی (۳.۶) در [۲۸] گردآوری کرد. ابراگیموف این رده‌بندی را همراه با قوانین پایستگی در [۵۳، ۵۶] ارائه کرده است.

جدای از نقطه نظر تئوری ما برای بررسی معادله، معادلاتی به شکل فوق برای مدل‌سازی مفاهیم زیادی در فیزیک، مهندسی، شیمی و زیست شناسی به کار می‌روند.

## ۳.۶ تبدیلات هم‌ارز و رده‌بندی

گروه هم‌ارزی از خانواده‌ی معادلات (۳.۶)، تبدیلاتی به‌صورت

$$\begin{aligned} x_j^* &= a_j b x_j + d_j, \qquad t^* = b^2 t + s, \qquad u^* = cu + v, \\ k_j^*\left(u^*\right) &= \frac{a_j^2}{a}k_j\left(u\right), \quad q^*\left(u^*\right) = \frac{c}{b^2}q\left(u\right), \quad j = 1, \ldots, p, \end{aligned} \tag{۷.۶}$$

هستند که در آن ثابت‌های $a_j, b, c, d_j, s, v \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, p)$ دلخواه هستند و $a_j bc \neq 0$.

## ۴.۶ معادله‌ی انتقال حرارت سه‌ـ بعدی

معادله انتقال حرارت غیرخطی ناهمسانگرد (۳.۶) در حالت سه‌ـ بعدی ( $p = 3$ ) با جایگذاری

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)\,,\ (k_1, k_2, k_3) = (f, g, h)\,,\ q = 0$$

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_t = \left(f\left(u\right)u_x\right)_x + \left(g\left(u\right)u_y\right)_y + \left(h\left(u\right)u_z\right)_z. \tag{۸.۶}$$

ضرایب مثبت و دلخواه $f\left(u\right)$، $g\left(u\right)$ و $h\left(u\right)$ مستقل خطی هستند و هیچ یک ثابت نیستند یعنی

$$f'\left(u\right) \neq 0 \qquad g'\left(u\right) \neq 0, \qquad h'\left(u\right) \neq 0.$$

کاربردهای فیزیکی و خواص ریاضی از معادله و تعمیم آن به یک منبع خارجی $q\left(u\right)$ :

$$u_t = \left(f\left(u\right)u_x\right)_x + \left(g\left(u\right)u_y\right)_y + \left(h\left(u\right)u_z\right)_z + q\left(u\right) \tag{۹.۶}$$

[1] Roman Cherniha
[2] Mykola Serov

در [۳۶، ۵۳] به طور مفصل بیان شده است. صورت بسط داده شده‌ی معادله (۹.۶) به‌صورت

$$\Delta \equiv -u_t + f(u)\,u_{xx} + g(u)\,u_{yy} + h(u)\,u_{zz} + f'(u)\,u_x^2 + g'(u)\,u_y^2 + h'(u)\,u_z^2 + q(u) \quad (۱۰.۶)$$

است.

به‌وضوح، تبدیلات (۷.۶) هر معادله از خانواده معادلات (۹.۶) به معادله‌ای به صورت یکسان می‌نگارد:

$$u^*_{t^*} = \left(f^*(u^*)\,u^*_{x^*}\right)_{x^*} + \left(g^*(u^*)\,u^*_{y^*}\right)_{y^*} + \left(h^*(u^*)\,u^*_{z^*}\right)_{z^*} + q^*(u^*)\,. \quad (۱۱.۶)$$

بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان معادله (۱۱.۶) را به‌جای معادله (۸.۶) مطالعه نمود. با استفاده از تبدیلات هم‌ارز (۷.۶) می‌توان معادله‌ی انتقال حرارت (۱۱.۶) را به صورت ساده‌تری با کاهش توابع دلخواه درگیر تبدیل کرد.

سه حالت در نظر می‌گیریم: حالت اول: تمام ضرایب انتشار نامتناسب باشند یعنی نسبت‌های $k_1/k_2, k_2/k_3$ و $k_1/k_3$ مقادیر ثابت نباشند و مشتق نسبت به $u$ مخالف صفر باشد؛ حالت دوم: تنها دو تابع متناسب باشند یعنی $k_i \sim k_j, k_i \nsim k_l$ که $(i,j,l)$ با جایگذاری دلخواه $(1,2,3)$ به‌دست می‌آید (با به کارگیری تبدیلات هم‌ارز، حالت دوم به حالت $k_i = k_j \nsim k_l$ کاهش داد). بدون از دست دادن کلیت مسئله در نظر می‌گیریم $i=1,\, j=3,\, l=2$ یعنی در حالت دوم $k_1 = k_3 \nsim k_2$. در نهایت، حالتی که هر سه تابع $k_1, k_2, k_3$ متناسب باشند را در نظر می‌گیریم $k_1 \sim k_2 \sim k_3$ که با استفاده از تبدیلات هم‌ارز به حالت ساده‌تر $k_1 = k_2 = k_3 = k(u)$ کاهش می‌دهیم.

**حالت اول.** فرض می‌کنیم هیچ کدام از نسبت‌های $k_1/k_2, k_2/k_3$ و $k_1/k_3$ مقدار ثابت نباشد. با فرض دلخواه بودن توابع $k_j(u)$ و $q(u)$ جبرلی چهار–بعدی با مولدهای زیر داریم:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

مولدهای بیشتر برای حالات زیر محاسبه می‌شوند:

۱. ضرایب $k_j$ دلخواه و منبع $q=0$ باشد. در این‌صورت تقارن اضافی به صورت زیر داریم:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t}.$$

۲. $k_j = \exp(\alpha_j u),$ که برای $i \neq j$ داریم: $\alpha_i \neq \alpha_j$. بنابراین حالات زیر به‌دست می‌آیند:

- $q = \pm e^{\alpha u}$،

$$X = \sum_{j=1}^{3} (\alpha - \alpha_j)\, x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + 2\alpha t \frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial u}.$$

- $q=0$،

$$X=\sum_{j=1}^{3} x_j\frac{\partial}{\partial x_j}+2t\frac{\partial}{\partial t},\qquad X=\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x_j\frac{\partial}{\partial x_j}-2\frac{\partial}{\partial u}.$$

۳. $k_j=u^{\nu_j}$ که برای $i\neq j$ داریم: $\nu_i\neq\nu_j$. در این‌صورت حالات زیر را داریم:

- $q=\pm u^m, m\neq 1$،

$$X=\sum_{j=1}^{3}(m-\nu_j-1)\,x_j\frac{\partial}{\partial x_j}+2\,(m-1)\,t\frac{\partial}{\partial t}-2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

- $q=0$،

$$X=\sum_{j=1}^{3} x_j\frac{\partial}{\partial x_j}+2t\frac{\partial}{\partial t},\qquad X=\sum_{j=1}^{3}\nu_j x_j\frac{\partial}{\partial x_j}+2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

نتایج رده‌بندی فوق در جدول ۱.۶ ارائه شده است.

جدول ۱.۶: رده‌بندی گروه معادله (۱۰.۶)، حالت اول: $f\nsim h\nsim g$ $(\delta,\ \beta=\pm1,\ \gamma\in\mathbb{R},\ \omega=2\sqrt{\delta/3})$

| $f(u),\ g(u),\ h(u),$ | $q(u)$ | $X$ |
|---|---|---|
| حالت کلی | 1. $q$ دلخواه | $X_1=\frac{\partial}{\partial x},\ X_2=\frac{\partial}{\partial y},\ X_3=\frac{\partial}{\partial z},\ X_4=\frac{\partial}{\partial t}$ |
| | 2. $q=0$ | $X_1,\ldots,X_4,\ X_5=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}+2t\frac{\partial}{\partial t}$ |
| $I.$ $k_j=e^{\sigma_j u}$ $(\sigma_j\neq\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3)$ | 1. $q=0$ | $X_1,\ldots,X_4,X_5,\ X_8=\sigma_1 x\frac{\partial}{\partial x}+\sigma_2 y\frac{\partial}{\partial y}+\sigma_3 z\frac{\partial}{\partial z}-2\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q=\pm e^{\sigma u}$ | $X_1,\ldots,X_4,$ $X=(\sigma-\sigma_1)\,x\frac{\partial}{\partial x}+(\sigma-\sigma_2)\,y\frac{\partial}{\partial y}+(\sigma-\sigma_3)\,z\frac{\partial}{\partial z}+2\sigma t\frac{\partial}{\partial t}-2\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $II.$ $f=u^a,\ g=u^b,\ h=u^c$ $(a\neq b\neq c)$ | 1. $q=0$ | $X_1,\ldots,X_4,\ X_5,\ X_6=ax\frac{\partial}{\partial x}+by\frac{\partial}{\partial y}+cz\frac{\partial}{\partial z}+2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q=\pm u^{\gamma}$ $(\gamma\neq a\neq b\neq c)$ | $X_1,\ldots,X_4,$ $X_7=(\gamma-a-1)\,x\frac{\partial}{\partial x}+(\gamma-b-1)\,y\frac{\partial}{\partial y}+(\gamma-c-1)\,z\frac{\partial}{\partial z}+2\,(\gamma-1)\,t\frac{\partial}{\partial t}-2u\frac{\partial}{\partial u}$ |

**حالت دوم.** $k_1(u)=k_3(u)\neq k_2(u)$، با فرض دلخواه بودن توابع $k_1(u),k_2(u)$ و منبع $q(u)$ جبرلی پنج بعدی با مولدهای زیر داریم:

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4, X_5=z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}.$$

مولدهای بیشتر در جدول ۲.۶ برای حالت‌های خاص از عناصر دلخواه $\{f,g,q\}$ لیست شده است.

**حالت سوم.** $k_1=k_2=k_3=k(u)$، در کلی‌ترین حالت که توابع $k(u),q(u)$ دلخواه باشند، معادله (۸.۶) گروه انتقالات در امتداد $x_1,x_2,x_3$ و $t$ و گروه دوران با عملگرهای به صورت زیر می‌پذیرد

$$\begin{aligned}X_1&=\frac{\partial}{\partial x_1},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x_2},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial x_3},\quad X_4=\frac{\partial}{\partial t},\\ X_5&=x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial}{\partial x_1},\quad X_2=x_1\frac{\partial}{\partial x_3}+x_3\frac{\partial}{\partial x_1},\quad X_3=x_2\frac{\partial}{\partial x_3}+x_3\frac{\partial}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

به منظور یافتن مولدهای بیشتر، انتخاب‌های خاص از دوتایی $k(u),q(u)$ در نظر می‌گیریم. نتایج نظیر این رده‌بندی در جدول ۳.۶ ارائه شده است.

جدول ۲.۶: رده‌بندی گروه معادله (۱۰.۶)، حالت دوم: $f = h \neq g$ $(\delta,\ \beta = \pm 1,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \omega = 2\sqrt{\delta/3})$

| $f(u),\ g(u),$ | $q(u)$ | $X$ |
|---|---|---|
| حالت کلی | 1. $q$ دلخواه | $X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_4 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_5 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$ |
| | 2. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_5,\ X_6 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$ |
| $II.$<br>$f = e^{\sigma_1 u},\ g = e^{\sigma_2 u}$<br>$(\sigma_1 \neq \sigma_2)$ | 1. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_6,\ X_7 = \sigma_1 x\frac{\partial}{\partial x} + \sigma_2 y\frac{\partial}{\partial y} + \sigma_1 z\frac{\partial}{\partial z} - 2\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \pm e^{\sigma u}$<br>$\sigma_1 \neq \sigma \neq \sigma_2$ | $X_1, \ldots, X_5,$<br>$X_8 = (\sigma - \sigma_1)\, x\frac{\partial}{\partial x} + (\sigma - \sigma_2)\, y\frac{\partial}{\partial y} + (\sigma - \sigma_1)\, z\frac{\partial}{\partial z} + 2\sigma t\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $III.$<br>$f = h = u^a,\ g = u^b$<br>$(a \neq b)$ | 1. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_6,\ X_9 = ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y} + az\frac{\partial}{\partial z} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta u^{\gamma}$<br>$\left(\gamma \neq \frac{-1}{3}\right)$ | $X_1, \ldots, X_5,$<br>$X_{10} = (a + 1 - \gamma)\, x\frac{\partial}{\partial x} + (b + 1 - \gamma)\, y\frac{\partial}{\partial y} + (a + 1 - \gamma)\, z\frac{\partial}{\partial z} + 2(1 - \gamma)\, t\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u^{-\frac{1}{3}}$ | $X_1, \ldots, X_5,\ X_{11} = \left(a + \frac{4}{3}\right) x\frac{\partial}{\partial x} + \left(b + \frac{4}{3}\right) y\frac{\partial}{\partial y} + \left(a + \frac{4}{3}\right) z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{8}{3}t\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $IV.$<br>$f = h = 1,\ g = u^{-\frac{4}{3}}$ | 1. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_5,\ X_{12} = x\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3}{2}\sigma u\frac{\partial}{\partial u}$<br>$X_{13} = y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{14} = y^2\frac{\partial}{\partial y} - 3yu\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta$ | $X_1, \ldots, X_5,\ X_{15} = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{3}y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_{13},\ X_{14}$ |
| | 4. $q = \delta u^{\gamma}$<br>$(\gamma \neq -\frac{1}{3}, 1)$ | $X_1, \ldots, X_5,$<br>$X_{16} = (1 - \gamma)\, x\frac{\partial}{\partial x} - \left(\gamma + \frac{1}{3}\right) y\frac{\partial}{\partial y} + (1 - \gamma)\, z\frac{\partial}{\partial z} + 2(1 - \gamma)\, t\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 5. $q = \delta u^{-\frac{1}{3}}$ | $X_1, \ldots, X_5,\ X_{12},\ X_{17} = 2e^{\omega y}\frac{\partial}{\partial y} - 3\omega e^{\omega y}u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{18} = 2e^{-\omega y}\frac{\partial}{\partial y} + 3\omega e^{-\omega y}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 6. $q = u^{-\frac{1}{3}} + \beta u$ | $X_1, \ldots, X_5,\ , X_{17}\ , X_{18}$ |
| $V.$<br>$f = h = u^{-1},\ g = 1$ | 1. $q = 0$ | $X_1,\ X_5,\ X_{19} = y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{20} = A(x,z)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,z)\frac{\partial}{\partial z} - 2A_x u\frac{\partial}{\partial u}$<br>$A(x,z)$ و $B(x,z)$ توابع دلخواه به‌طوری‌که $A_{xx} - A_{zz} = 0,\ A_x - B_z = 0,\ A_z + B_x = 0.$ |
| | 2. $q = \delta u^{\gamma}$ | $X_1, \ldots, X_5,\ X_{21} = \gamma x\frac{\partial}{\partial x} + (\gamma - 1)\, y\frac{\partial}{\partial y} + \gamma z\frac{\partial}{\partial z} + 2(\gamma - 1)\, t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u$ | $X_1, \ldots, X_5,\ X_{20},$ $A(x,z)$ و $B(x,z)$ توابع دلخواه به‌طوری‌که $A_{xx} - A_{zz} = 0,\ A_x - B_z = 0,\ A_z + B_x = 0$ |
| | 4. $q = \delta$ | $X_1, , \ldots, X_5,\ X_{19}$ |
| | 5. $q = \pm u^{\frac{-1}{3}}$ | $X_1, \ldots, X_5\ X_{22} = x\frac{\partial}{\partial x} + 4y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 8t\frac{\partial}{\partial t} + 6u\frac{\partial}{\partial u}$ |

جدول ۳.۶: رده‌بندی گروه معادله(۱۰.۶)، حالت سوم: همسانگرد $f = g = h$ $(\, \delta = \pm 1,\ \gamma \in \mathbb{R}\,)$

| $f(u)$ | $q(u)$ | $X$ |
|---|---|---|
| حالت کلی | 1. $q =$ دلخواه | $X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_4 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_5 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},\ X_6 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x},\ X_7 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$ |
| | 2. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_7,\ X_8 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$ |
| $II.$<br>$f = 1$ | 1. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_8,\ X_9 = u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{10} = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u},\ X_{11} = 2t\frac{\partial}{\partial y} - yu\frac{\partial}{\partial u},\ X_{12} = 2t\frac{\partial}{\partial z} - zu\frac{\partial}{\partial u},$<br>$X_{13} = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4ty\frac{\partial}{\partial y} + 4tz\frac{\partial}{\partial z} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - \left(6t + x^2 + y^2 + z^2\right) u\frac{\partial}{\partial u},$<br>$X_\infty = g(x, y, z, t)\frac{\partial}{\partial u}$ تابع دلخواه $g$ جوابی از معادله خطی $g_t = \Delta g$ باشد |
| | 2. $q = \delta$ | $X_1, \ldots, X_7,\ X_\infty,\ X_{14} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{15} = (u - t)\frac{\partial}{\partial u},$<br>$X_{16} = 2t\frac{\partial}{\partial x} - x(u - t)\frac{\partial}{\partial u},\ X_{17} = 2t\frac{\partial}{\partial y} - y(u - t)\frac{\partial}{\partial u},\ X_{18} = 2t\frac{\partial}{\partial z} - z(u - t)\frac{\partial}{\partial u},$<br>$X_{19} = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4ty\frac{\partial}{\partial y} + 4tz\frac{\partial}{\partial z} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} + \left[4t^2 - \left(6t + x^2 + y^2 + z^2\right)(u - t)\right]\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u$ | $X_1, \ldots, X_7,\ X_9, \ldots X_{12},\ X_{20} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2\delta tu\frac{\partial}{\partial u},$<br>$X_{21} = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4ty\frac{\partial}{\partial y} + 4tz\frac{\partial}{\partial z} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} + \left(4\delta t^2 - \left(6t + x^2 + y^2 + z^2\right)\right) u\frac{\partial}{\partial u},$<br>$X_\infty = g(x, y, z, t)\frac{\partial}{\partial u},$ تابع دلخواه $g$ جوابی از معادله خطی $g_t = \Delta g + \delta g$ باشد. |
| | 4. $q = \delta u \ln u$ | $X_1, \ldots, X_7,$<br>$X_{22} = e^{\delta t} u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{23} = 2e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial x} - \delta e^{\delta t} xu\frac{\partial}{\partial u},\ X_{24} = 2e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial y} - \delta e^{\delta t} yu\frac{\partial}{\partial u},\ X_{25} = 2e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial z} - \delta e^{\delta t} zu\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 4. $q = \delta u^\gamma$<br>$(\gamma \neq 0, 1)$ | $X_1, \ldots, X_7,$<br>$X_{26} = (1 - \gamma) x\frac{\partial}{\partial x} + (1 - \gamma) y\frac{\partial}{\partial y} + (1 - \gamma) z\frac{\partial}{\partial z} + 2(1 - \gamma) t\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 5. $q = e^u$ | $X_1, \ldots, X_7,\ X_{27} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $III$<br>$f = e^u$ | 1. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_8,\ X_{28} = t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta$ | $X_1, \ldots, X_7,\ X_{29} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial u},\ X_{30} = e^{-\delta t}\frac{\partial}{\partial t} + \delta e^{-\delta t}\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | $q = \beta e^{\sigma u}$ | $X_1, \ldots, X_7,\ X_{31} = (\sigma - 1) x\frac{\partial}{\partial x} + (\sigma - 1) y\frac{\partial}{\partial y} + (\sigma - 1) z\frac{\partial}{\partial z} + 2\sigma t\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \beta e^{\sigma u} + \delta$ | $X_1, \ldots, X_7,\ X_{30}$ |
| $IV.$<br>$f = u^a$<br>$\left(a \neq 0, \frac{-4}{5}\right)$ | 1. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_8,\ X_{32} = ax\frac{\partial}{\partial x} + ay\frac{\partial}{\partial y} + az\frac{\partial}{\partial z} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta u$ | $X_1, \ldots, X_7,\ X_{32},\ X_{33} = e^{-\delta at}\frac{\partial}{\partial t} + \delta e^{-\delta at} u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta u^\gamma$<br>$(\gamma \neq 0, 1, a + 1)$ | $X_1, \ldots, X_7,$<br>$X_{34} = (a + 1 - \gamma) x\frac{\partial}{\partial x} + (a + 1 - \gamma) y\frac{\partial}{\partial y} + (a + 1 - \gamma) z\frac{\partial}{\partial z} + 2(1 - \gamma) t\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u^{a+1} + \beta u$ | $X_1, \ldots, X_7,\ X_{33}$ |
| $V.$<br>$f = u^{-\frac{4}{5}}$ | 1. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_8,\ X_{35} = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z} - 5u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{36} = \left(x^2 - y^2 - z^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xz\frac{\partial}{\partial z} - 5xu\frac{\partial}{\partial u}$<br>$X_{37} = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + \left(y^2 - x^2 - z^2\right)\frac{\partial}{\partial y} + 2yz\frac{\partial}{\partial z} - 5yu\frac{\partial}{\partial u},\ X_{38} = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + \left(z^2 - x^2 - y^2\right)\frac{\partial}{\partial z} - 5zu\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta u$ | $X_1, \ldots, X_7,\ X_{35}, \ldots, X_{38}, X_{39} = e^{4/5\delta t}\frac{\partial}{\partial t} + \delta e^{4/5\delta t} u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u^\gamma$<br>$\left(\gamma \neq 0, -\frac{1}{5}, 1\right)$ | $X_1, \ldots, X_7,$<br>$X_{40} = (1 - \gamma) x\frac{\partial}{\partial x} + (1 - \gamma) y\frac{\partial}{\partial y} + (1 - \gamma) z\frac{\partial}{\partial z} + 10(1 - \gamma) t\frac{\partial}{\partial t} + 10u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 4. $q = \pm u^{\frac{1}{5}} + \beta u$ | $X_1, \ldots X_7,\ X_{39}$ |

### صورت‌های کاهش‌یافته نظیر معادله (۱۰.۶)

**مثال ۱.۴.۶.** معادله (۱۰.۶) به‌صورت

$$D_t^{\alpha} u = \left(\frac{u_x}{u}\right)_x + (u_y)_y + \left(\frac{u_z}{u}\right)_z \qquad (۱۲.۶)$$

با انتخاب $f(u) = h(u) = u^{-1}, g(u) = 1$ و $q(u) = 0$ درنظر بگیرید. در این‌صورت معادله (۱۲.۶) (طبق حالت $V.1$ در جدول ۲.۶) دارای تقارنی به‌صورت

$$\mathrm{X} = y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2u\frac{\partial}{\partial u},$$

است. متغیرهای متشابه نظیر آن با حل معادلات مشخصه به صورت

$$\xi = x, \quad \phi = \frac{y}{\sqrt{t}}, \quad \psi = z, \quad V(\xi, \phi, \psi) = \frac{u(x, y, z, t)}{t},$$

نتیجه می‌شود که تابع $V$ جوابی از معادله زیر است:

$$VV_{\xi\xi} + VV_{\psi\psi} + V^2 V_{\phi\phi} - V_\xi^2 - V_\psi^2 + \tfrac{1}{2} V^2 V_\phi - V^3 = 0.$$

**مثال ۲.۴.۶.** معادله انتقال حرارت (۱۰.۶) در حالت همسانگرد با انتخاب $f(u) = e^u$ و $q(u) = \beta e^u + \delta$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$u_t = e^u \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 u_{yy} + \beta\right) + \delta, \qquad (۱۳.۶)$$

و تقارن

$$\mathrm{X} = e^{-\delta t}\frac{\partial}{\partial t} + \delta e^{-\delta t} u \frac{\partial}{\partial u},$$

( طبق حالت $III.3$) در جدول ۳.۶ می‌پذیرد. در نتیجه ناورداهای متناظر به صورت زیر هستند

$$\xi = x, \; \phi = y, \; \psi = z, \;\; V(\xi, \phi, \psi) = u(x, y, z, t) + \delta t.$$

با جایگذاری ناورداهای فوق، معادله انتشار غیرخطی (۱۳.۶) به $PDE$ زیر کاهش می‌یابد

$$V_{\xi\xi} + V_{\phi\phi} + V_{\psi\psi} + V_\xi^2 + V_\phi^2 + V_\psi^2 + \beta = 0.$$

## ۵.۶ قوانین پایستگی

همان‌طور که در فصل دوم به تفصیل بحث نمودیم، مفهوم قوانین پایستگی و نیز ارتباط میان تقارن‌ها و قوانین پایستگی در طیف وسیعی از مقالات پژوهشی در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. اهمیت اساسی تقارن‌های نوتر از قضیه مشهور نوتر آشکار می‌شود. این قضیه بر پایه وجود یک لاگرانژی و تقارن‌های نوتر متناظر با انتگرال کنش استوار است.

معادله انتقال حرارت (۳.۶) را با فرض $q = 0$ می‌توان در فرم قانون پایستگی نوشت، درحالت کلی چنین فرمی برای معادله (۳.۶) وجود ندارد. در این بخش ، وجود قوانین پایستگی و خودالحاقی غیرخطی از معادله (۳.۶) برای انتخاب‌های خاص $q(u) \neq 0$ بررسی می‌کنیم.

## خودالحاقی غیرخطی

همانطور که قبلا اشاره شد هر معادله دیفرانسیل که دارای یک قانون پایستگی غیربدیهی است، خود الحاق غیرخطی است. لذا معادله (۳.۶) با فرض $q = 0$ خودالحاق غیرخطی است.
در مثال ۱.۵.۲ فصل دوم مشاهده نمودیم معادله انتقال حرارت (۳.۶) در فضای سه‌ـبعدی (۸.۶) با جایگذاری

$$v = a_1xyz + a_2xy + a_3xz + a_4yz + a_5x + a_6y + a_7z + a_8,$$

در شرط خودالحاقی غیرخطی (۴۰.۲) صادق است.
در این بخش جهت سادگی و اختصار در محاسبات، معادله انتقال حرارت (۳.۶) دوـبعدی ($p = 2$) و سه‌ـبعدی ($p = 3$) با یک منبع خطی درنظر می‌گیریم:

**مثال ۱.۵.۶.**

$$u_t = \left(f\left(u\right)u_x\right)_x + \left(g\left(u\right)u_y\right)_y + q\left(u\right). \tag{۱۴.۶}$$

لاگرانژی قراردادی معادله فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{L} = v\left[u_t - f\left(u\right)u_{xx} - f'\left(u\right)u_x^2 - g\left(u\right)u_{yy} - g'\left(u\right)u_y^2 - q\left(u\right)\right].$$

با اثر عملگر اویلرـلاگرانژ روی لاگرانژی قراردادی فوق معادله الحاقی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta^* \equiv v_t + f\left(u\right)v_{xx} + g\left(u\right)v_{yy} + q'\left(u\right)v = 0.$$

با جایگذاری $v = \varphi(x, y, t, u) \neq 0$ و مشتقات لازم

$$\begin{aligned} v_t &\equiv \mathrm{D}_t\left(\varphi\right) = \varphi_u u_t + \varphi_t, \\ v_{xx} &\equiv \mathrm{D}_x^2\left(\varphi\right) = \varphi_u u_{xx} + \varphi_{uu}u_x^2 + 2\varphi_{xu}u_x + \varphi_{xx}, \\ v_{yy} &\equiv \mathrm{D}_y^2\left(\varphi\right) = \varphi_u u_{yy} + \varphi_{uu}u_y^2 + 2\varphi_{yu}u_y + \varphi_{yy} \end{aligned}$$

در شرط خودالحاقی غیرخطی

$$\begin{aligned} & v_t + f\left(u\right)v_{xx} + g\left(u\right)v_{yy} + q'\left(u\right)v \\ = \;& \lambda\left[u_t - f\left(u\right)u_{xx} - f'\left(u\right)u_x^2 - g\left(u\right)u_{yy} - g'\left(u\right)u_y^2 - q\left(u\right)\right], \end{aligned} \tag{۱۵.۶}$$

و مقایسه ضرایب $u_t$ در هر دو طرف رابطه (۱۵.۶) داریم: $\lambda = \varphi_u$. به طور مشابه با مقایسه ضرایب $u_{xx}$ و $u_{yy}$ به روابط زیر می‌رسیم:

$$f\left(u\right)\varphi_u = -f\left(u\right)\varphi_u, \quad g\left(u\right)\varphi_u = -g\left(u\right)\varphi_u.$$

بنا به فرض، توابع $f(u), g(u)$ غیرصفر هستند از این رو $\varphi_u = 0$. در نتیجه $\varphi = \varphi(x, y, t)$ و روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\lambda = 0, \quad v_t = \varphi_t, \quad v_{xx} = \varphi_{xx}, \quad v_{yy} = \varphi_{yy}.$$

درنتیجه شرط خودالحاقی غیرخطی به صورت زیر کاهش داده می‌شود:

$$\varphi_t + f(u)\varphi_{xx} + g(u)\varphi_{yy} + q'(u)\varphi = 0. \qquad (۱۶.۶)$$

بنا به استقلال خطی و دلخواه بودن توابع $f(u)$، $g(u)$،$q(u)$ در معادله فوق داریم:

$$\varphi_t = 0, \qquad \varphi_{xx} = 0, \qquad \varphi_{yy} = 0, \qquad \varphi = 0. \qquad (۱۷.۶)$$

این معادلات ایجاب می‌کنند که جایگذاری از فرم $v = \varphi(x, y, t, u)$ وجود ندارد. به‌وضوح، آخرین معادله (۱۷.۶) تناقضی با شرط $\varphi \neq 0$ است. در نتیجه معادله (۱۴.۶) با فرض دلخواه بودن منبع $q(u)$ خود الحاق غیرخطی نیست.

با این وجود، معادله (۱۴.۶) برای انتخاب‌های خاص $q(u)$ خودالحاق غیرخطی است. برای مثال، فرض کنید

$$q'(u) = rf(u), \qquad (۱۸.۶)$$

که در آن $r$ ثابت دلخواه باشد. در این‌صورت، معادله (۱۶.۶) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\varphi_t + f(u)[\varphi_{xx} + r\varphi] + g(u)\varphi_{yy} = 0$$

و روابط زیر نتیجه می‌شود (در مقایسه با معادلات (۱۷.۶) ):

$$\varphi_t = 0, \qquad \varphi_{yy} = 0, \qquad \varphi_{xx} + r\varphi = 0.$$

ازحل معادلات بالا به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\varphi = a(x)y + b(x), \qquad (۱۹.۶)$$

که $a(x)$ و $b(x)$ جواب‌های دلخواه از معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم خطی زیر هستند

$$w'' + rw = 0. \qquad (۲۰.۶)$$

بنا به معادله (۱۸.۶) قدرت منبع حرارت با افزایش دما، افزایش می‌یابد یعنی $q'(u) > 0$ هرگاه $r = \omega^2 > 0$ و کاهش می‌یابد یعنی $r = -\delta^2 < 0$ هرگاه $q'(u) > 0$. بنابراین معادله (۱۴.۶) به دو صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$u_t = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + \omega^2\mathcal{F}(u), \qquad (۲۱.۶)$$

و

$$u_t = (f(u)\, u_x)_x + (g(u)\, u_y)_y - \delta^2 \mathcal{F}(u), \tag{۲۲.۶}$$

که در معادلات فوق $\mathcal{F}(u) = \int f(u)\, du$ و پارامترهای $\omega$، $\delta$ مقادیر ثابت هستند.
در حالت (۲۱.۶) معادله (۲۰.۶) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$w'' + \omega w = 0,$$

و جوابی به صورت

$$w = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$$

دارد. لذا

$$a(x) = A_1 \cos(\omega x) + A_2 \sin(\omega x), \quad b(x) = B_1 \cos(\omega x) + B_2 \sin(\omega x)$$

با ثابت‌های دلخواه $A_1, A_2, B_1, B_2$. بنابراین با جایگذاری روابط فوق در (۱۹.۶) به گزاره زیر می‌رسیم.

**گزاره ۱.۵.۶.** معادله (۲۱.۶) با جایگذاری

$$v = (A_1 y + B_1) \cos(\omega x) + (A_2 y + B_2) \sin(\omega x),$$

در شرط (۱۵.۶) خود الحاق غیرخطی است.

اکنون معادله (۲۰.۶) برای حالت (۲۲.۶) به شکل

$$w'' - \delta^2 \omega = 0$$

می‌نویسیم و در نتیجه داریم

$$w = C_1 e^{\delta x} + C_2 e^{-\delta x}.$$

با تکرار روند فوق گزاره زیر نتیجه می‌شود.

**گزاره ۲.۵.۶.** معادله (۲۲.۶) با جایگذاری

$$v = (A_1 y + B_1) e^{\delta x} + (A_2 y + B_2) e^{-\delta x},$$

در شرط (۱۵.۶) خود الحاق غیرخطی است.

**مثال ۲.۵.۶.** معادله‌ی انتقال حرارت سه‌ـ بعدی با یک منبع خطی به صورت زیر در نظرمی‌گیریم

$$\Delta \equiv -u_t + f(u)\, u_{xx} + g(u)\, u_{yy} + h(u)\, u_{zz} + f'(u)\, u_x^2 + g'(u)\, u_y^2 + h'(u)\, u_z^2 + su + q_0, \tag{۲۳.۶}$$

که در آن پارامترهای $s$ و $q_0$ ثابت‌های دلخواه هستند. معادله‌ی فوق خودالحاق غیرخطی است یعنی معادله‌ی الحاقی آن

$$v_t + f(u)\, v_{xx} + g(u)\, v_{yy} + h(u)\, v_{zz} + sv = 0$$

با جایگذاری

$$v = (a_1xyz + a_2xy + a_3xz + a_4yz + a_5x + a_6y + a_7z + a_8)\, e^{-st},$$

در شرط خودالحاقی غیرخطی (۴۰.۲) صادق است. با استفاده از تقارن $X = \partial/\partial x$ بردار پایستگی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} C^1 &= -uv_x, \qquad C^2 = f(u)\, u_x v_x + q_0 v, \\ C^3 &= g(u)\, u_y v_x - G(u)\, v_{xy}, \qquad C^4 = h(u)\, u_z v_x - H(u)\, v_{xz}. \end{aligned}$$

## محاسبه قوانین پایستگی معادله (۸.۶) به روش مستقیم

در این بخش، به محاسبه قوانین پایستگی نظیر معادله (۸.۶) از طریق روش مستقیم می پردازیم. روند کلی محاسبه قوانین پایستگی نظیر یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل به روش مستقیم در فصل دوم به‌طور مفصل اشاره گردید.

معادله (۸.۶) به صورت کوشی‌ـ کوالسکی نسبت به $t$ با مشتق پیشرو $u_t$ است. بنابراین یک تناظر یک به یک بین مجموعه ضرایب تابعی موضعی غیربدیهی و شارهای غیربدیهی معادله (۸.۶) برقرار است. هدف یافتن تمامی ضرایب قوانین پایستگی موضعی مرتبه صفر به‌صورت

$$\Lambda = \varphi(x, y, z, t, u),$$

از (۸.۶) است. بر حسب عملگر اویلر متناظر زیر

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - D_r \frac{\partial}{\partial u_r} - D_t \frac{\partial}{\partial u_t} + D_r^2 \frac{\partial}{\partial u_{rr}}, \qquad r = x, y, z.$$

معادلات مشخصه به‌صورت زیر است:

$$\frac{\delta}{\delta u}\left[\varphi(x, y, z, t, u)\left(-u_t + (f(u)\, u_x)_x + (g(u)\, u_y)_y + (h(u)\, u_z)_z\right)\right] \equiv 0. \qquad (۲۴.۶)$$

معادلات مشخصه (۲۴.۶) جوابی به‌صورت

$$\Lambda = (C_1xyz + C_2xy + C_3xz + C_4x + C_5yz + C_6y + C_7z + C_8,$$

دارد؛ از این رو هشت ضریب قانون پایستگی زیر نتیجه می‌شوند:

$$\Lambda_1 = 1,\ \Lambda_2 = x,\ \Lambda_3 = y,\ \Lambda_4 = z,\ \Lambda_5 = xy,\ \Lambda_6 = xz,\ \Lambda_7 = yz,\ \Lambda_8 = xyz.$$

هر ضریب تعیین کننده یک قانون پایستگی موضعی غیربدیهی از مرتبه صفر با مشخصه

$$\begin{aligned} D_t\Psi^j \quad + \quad & D_x\Phi^{jx} + D_y\Phi^{jy} + D_z\Phi^{jz} \equiv \\ & \Lambda^j\left(-u_t + \left(f\left(u\right)u_x\right)_x + \left(g\left(u\right)u_y\right)_y + \left(h\left(u\right)u_z\right)_z\right), \quad j = 1, \ldots, 8, \end{aligned}$$

است. به‌ویژه پس از مساوی قرار دادن جملات مشتق مشابه از رابطه فوق، با انتگرال‌گیری از معادلات نتیجه شده، هشت قانون پایستگی موضعی مستقل خطی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} D_t\left[u\right] + D_x\left[-fu_x\right] + D_y\left[-gu_y\right] + D_z\left[-hu_z\right] &= 0, \\ D_t\left[xu\right] + D_x\left[\mathcal{F} - xfu_x\right] + D_y\left[-xgu_y\right] + D_z\left[-xhu_z\right] &= 0, \\ D_t\left[yu\right] + D_x\left[-yfu_x\right] + D_y\left[\mathcal{G} - ygu_y\right] + D_z\left[-yhu_z\right] &= 0, \\ D_t\left[zu\right] + D_x\left[-zfu_x\right] + D_y\left[-zgu_y\right] + D_z\left[\mathcal{H} - zhu_z\right] &= 0, \\ D_t\left[xyu\right] + D_x\left[y\mathcal{F} - xyfu_x\right] + D_y\left[x\mathcal{G} - xygu_y\right] + D_z\left[-xyhu_z\right] &= 0, \\ D_t\left[xzu\right] + D_x\left[z\mathcal{F} - xzfu_x\right] + D_y\left[xyhu_z - xzgu_y\right] + D_z\left[-xyhu_z - xzhu_z\right] &= 0, \\ D_t\left[yzu\right] + D_x\left[-yzfu_x\right] + D_y\left[z\int gdu + \frac{1}{2}y^2hu_z - yzgu_y\right] + D_z\left[-\frac{1}{2}y^2hu_z - yzhu_z\right] &= 0, \\ D_t\left[xyzu\right] + D_x\left[zy\mathcal{F} - xyzfu_x\right] + D_y\left[xz\mathcal{G} - xyzgu_y - \frac{1}{2}xy^2hu_z\right] & \\ + D_z\left[-xyzhu_z - \frac{1}{2}xy^2hu_y\right] &= 0, \end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{F} = \int fdu,\ \mathcal{G} = \int gdu, \mathcal{H} = \int hdu$.

# فصل ۷

# معادلات انتقال حرارت غیرخطی مرتبه کسری

معادله انتشار غیرخطی مرتبه کسری را در صورت کلی به صورت

$$D_t^{\alpha} u = \sum_{j=1}^{p} D_{x_j}^{\beta_j} \left( k_j \left( u \right) D_{x_j}^{\gamma_j} u \right) + q \left( u \right), \quad 0 < \alpha \leqslant 2,\ 0 < \beta, \gamma \leqslant 1 \tag{۱.۷}$$

درنظر می‌گیریم. که در آن $k_j\left(u\right)$ و $q\left(u\right)$ توابع دلخواه دیفرانسیل‌پذیر، $u$ تابعی از متغیرهای مستقل $\left(x^1, \ldots, x^p, t\right)$ و $D_t^{\alpha}$، $D_{x_j}^{\beta_j}$، $D_{x_j}^{\gamma_j}$ مشتقات مرتبه کسری که در اینجا از نوع ریمن–لیوویل در نظر گرفته شده است. معادلات انتشار فضا–زمان کسری در بسیاری از مدل‌های ریاضی برای توصیف فرآیند دینامیک مواد استفاده می‌شود. چنین فرآیندهایی در بسیاری از علوم مشاهده می‌شوند از قبیل: انتقال حرارت و جرم مواد، هیدرودینامیک، فیزیک پلاسما، کیهان شناسی، بررسی آب‌های سطحی، نورشناسی کوانتومی، شیمی پلیمرها، زیست شناسی، شبکه‌های رایانه‌ای و بسیاری دیگر.

این معادله با تغییر بازه $\alpha$ به معادلات کسری متفاوتی تبدیل می‌شود. برای $\alpha \in (0,1)$ در مدل‌سازی فرآیندهای زیر انتشار به کار برد، در حالی که برای $\alpha \in (1,2)$ پدیده انتشار موج را توصیف می‌کند. در حالت محدود $\alpha, \beta, \gamma = 1$، معادله (۱.۷) همان معادله انتشار (حرارت) کلاسیک است. رده‌بندی کاملی از گروه تقارنی این معادله در فصل قبل ارائه شد لذا از بیان این حالت خاص صرف‌نظر شده است.

با جایگزینی $\gamma, \delta = 1$، $0 < \alpha < 1$ و $p = 3$ در معادله (۱.۷) به معادله انتقال حرارت غیرخطی زمان کسری سه بعدی زیر می‌رسیم

$$D_t^{\alpha} u = (f(u)\, u_x)_x + (g(u)\, u_y)_y + (h(u)\, u_z)_z + q(u)\,. \qquad (۲.۷)$$

در سال ۲۰۰۷، روش گروه‌های لی برای تحلیل تقارنی معادلات دیفرانسیل کسری و صورتول توسیع برای مشتقات کسری توسط گزیزوف و همکارانش ارائه شد. در فصل سوم، تعمیمی از نظریه گروه تقارن لی به معادلات دیفرانسیل کسری به طور مفصل شرح داده شد. در این فصل کوشیدیم تا به آنالیز لی خانواده معادلات (۲.۷) بپردازیم.

## ۱.۷ تاریخچه آنالیز لی معادله انتشار کسری

مطالعه معادله انتشار با مشتقات مرتبه کسری به روش گروه لی نخستین بار در سال ۱۹۹۸ توسط لوچکو [1] و باکوار [2] [۲۰] با محاسبه گروه تقارن نظیر تبدیلات تجانس معادله

$$D_t^{\alpha} u = k u_{xx}, \qquad \alpha \in [1, 2]\,,$$

بر مبنای مشتق کسری ریمن‌ــلیوویل انجام شد. علاوه‌براین، صورت کاهش‌یافته نظیر معادله فوق برحسب عملگر کسری اردلی‌ــکوبر ارائه و جواب معادله کاهش‌یافته بر حسب تابع رایت به‌دست آورده بودند. مطالعه مشابه در همان سال توسط لوچکو و گرنفلو [3] روی معادله انتشار فضاــزمان کسری

$$D_t^{\alpha} u = k D_x^{\beta} u, \qquad 0 < \alpha \leq \beta \leq 2,$$

انجام شد.

در سال ۲۰۰۷، گزیزوف، کاساتکین و لوکشچوک، رده‌بندی از تقارن‌های معادله انتشار غیرخطی نامنظم

$$D_t^{\alpha} u = (f(u)\, u_x)_x\,, \qquad \alpha \in (0, 2]\,,$$

با هر دو مفهوم مشتقات کسری ریمن‌ــلیوویل و کاپوتو ارائه کردند [۳۷، ۳۸].

برخی جواب‌های متشابه معادله انتشار

$$D_t^{\alpha} u = k\,(f(x,t))_{xx}\,, \qquad \alpha, x > 0,$$

در [۲۷] توسط جوردجویس [4] و آتانکویک [5] محاسبه شده است.

وو [6] رده‌بندی از جواب‌های معادله انتشار فضاــزمان کسری

$$D_t^{\alpha} u = D_x^{2\beta} u, \qquad \alpha, \beta \in (0, 1]\,,\ x, t > 0,$$

---

[1] Yuri Luchko
[2] Evelyn Buckwar
[3] Rudolf Gorenflo
[4] Vladan D. Djordjevic
[5] Teodor M. Atanackovic
[6] Guo-cheng Wu

در مفهوم مشتق کسری ریمن_لیوویل اصلاح‌شده به روش مشخصه کسری ارائه کرد.
طبقه‌بندی گروه تقارن‌های معادله انتشار نامنظم با منبع (چاهک)

$$D_t^{\alpha} u = (f(u) u_x)_x + q(u), \quad f(u) > 0, \quad \alpha \in (0,2), \qquad (۳.۷)$$

توسط لوکشچوک و مکوین [1] محاسبه (در سال ۲۰۱۵، [۷۸] ) و جواب‌های ناوردا معادله فوق نظیر هر حالت طبقه‌بندی (در سال ۲۰۱۶، [۷۹] ) به‌دست آورده‌اند.
در این فصل به تجزیه و تحلیل جامع و فراگیر تقارن‌ها (۳.۷) (با اقتباس از کار [۷۸، ۷۹]) و (۲.۷) می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا تبدیلات هم‌ارز نظیر معادله را محاسبه و سپس رده‌بندی از تقارن‌های معادله ارائه می‌کنیم.
این نکته حائز اهمیت است که نتایج به‌دست‌آمده برای حالت دوبعدی به طور مشابه برقرار است. نتایج محاسبات در حالت سه بعدی (۲.۷) در مقاله [۴۳] به ثبت رسیده است.

## ۲.۷ تبدیلات هم‌ارز

در اولین گام از رده‌بندی گروه معادله (۳.۷) و (۲.۷) به محاسبه تبدیلات هم‌ارز آن‌ها می‌پردازیم.
همانطور که در فصل اول اشاره شد، تبدیلات هم‌ارز، ساختار دیفرانسیلی معادلات را حفظ می‌کنند. به عبارت دیگر معادلاتی که با این تبدیلات مرتبط می‌شوند گروه های مشابه از تبدیلات نقطه ای لی می‌پذیرند. با استفاده از رویکرد بی‌نهایت کوچک، تبدیلات هم‌ارز برای معادله (۳.۷) توسط لوکشچوک [2] [۷۸، ۷۹] محاسبه شده است.

**قضیه ۱.۲.۷.** گروه هم‌ارزی از خانواده معادلات (۳.۷) تبدیلاتی به صورت

$$x^* = B_1 x + B_2, \quad t^* = B_3^2 t, \quad u^* = B_4 u, \quad f^* = B_1^2 B_3^{-2\alpha} f, \quad q^* = B_4 B_7^{-2\alpha} q,$$

است که در آن ثابت‌های $B_1, B_2, B_3,$ دلخواه و $B_4 > 0$ هستند.

در اینجا و برای اولین بار تبدیلات هم‌ارز نظیر معادله (۲.۷) را محاسبه می‌کنیم. روند محاسبه تبدیلات هم‌ارز برای معادله انتقال حرارت دو بعدی و یک بعدی (قضیه ۲.۷ ) به طور مشابه است. مولد گروه پیوسته از تبدیلات هم‌ارز نظیر معادله (۲.۷) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \phi \frac{\partial}{\partial y} + \psi \frac{\partial}{\partial z} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \mu \frac{\partial}{\partial f} + \nu \frac{\partial}{\partial g} + \kappa \frac{\partial}{\partial h} + \chi \frac{\partial}{\partial q},$$

که در آن متغیرهای دیفرانسیلی $u$ در فضای $(x, y, z, t)$ و $f, g, h, q$ در فضای تعمیم‌یافته

$$(x, y, z, t, u, D_t^{\alpha} u, u_x, u_y, u_z)$$

[1] A. V. Makunin
[2] Stanislav Yu. Lukashchuk

در نظر گرفته می‌شوند. مختصات $\xi, \phi, \psi, \tau$ و $\eta$ به صورت توابعی از $x, y, z, t$ و $u$ و می‌یابیم درحالی که مختصات $\mu, \nu, \kappa$ و $\chi$ توابعی از $x, t, u, D_t^\alpha u, u_x, f, g, h$ و $q$ درنظرمی‌گیریم. بنابراین دستگاه معادلات متناظر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u &= f_u u_x^2 + f u_{xx} + g_u u_y^2 + g u_{yy} + h_u u_z^2 + h u_{zz} + q, \\ f_i &= 0, \quad g_i = 0, \quad h_i = 0, \quad q_i = 0, \qquad \forall i = x, y, z, t. \end{aligned} \tag{۴.۷}$$

سپس محک ناوردایی بی‌نهایت‌کوچک دستگاه (۴.۷) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} &(\eta^{\alpha,t} - 2f_u u_x \eta^x - f\eta^{xx} - 2g_u u_y \eta^y - g\eta^{yy} - 2h_u u_z \eta^z - h\eta^{zz} \\ &-\mu u_{xx} - \mu^u u_x^2 - \nu u_{yy} - \nu^u u_y^2 - \kappa u_{zz} - \kappa^u u_z^2 - \chi)|_{(۴.۷)} = 0, \end{aligned} \tag{۵.۷}$$

$$\mu^i|_{(۴.۷)} = 0,\ \nu^i|_{(۴.۷)} = 0,\ \kappa^i|_{(۴.۷)} = 0,\ \chi^i|_{(۴.۷)} = 0, \quad i = x, y, z, t, \tag{۶.۷}$$

که در آن ضرایب $\eta^{\alpha,t}, \eta^j, \eta^{jj}, \mu^s, \nu^s, \kappa^s, \chi^s\ (j = x, y, z,\ \ s = j, t, u)$ مختصات مولد امتداد یافته

$$\begin{aligned} \bar{V} &= V + \eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^y \frac{\partial}{\partial u_y} + \eta^{yy}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \eta^z \frac{\partial}{\partial u_z} + \eta^{zz}\frac{\partial}{\partial u_{zz}} \\ &\quad + \mu^x \frac{\partial}{\partial f_x} + \mu^y \frac{\partial}{\partial f_y} + \mu^z \frac{\partial}{\partial f_z} + \mu^t \frac{\partial}{\partial f_t} + \mu^u \frac{\partial}{\partial f_u} + \nu^x \frac{\partial}{\partial g_x} + \ldots + \chi^t \frac{\partial}{\partial q_t} + \chi^u \frac{\partial}{\partial q_u}, \end{aligned}$$

هستند و با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \eta^x &= D_x(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \phi u_{xy} + \psi u_{xz} + \tau u_{xt}, \\ \eta^y &= D_y(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t) + \xi u_{yx} + \phi u_{yy} + \psi u_{yz} + \tau u_{yt}, \\ \eta^z &= D_z(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t) + \xi u_{zx} + \phi u_{zy} + \psi u_{zz} + \tau u_{zt}, \\ \eta^{xx} &= D_x^2(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \phi u_{xxy} + \psi u_{xxz} + \tau u_{xxt}, \\ \eta^{yy} &= D_y^2(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t) + \xi u_{yyx} + \phi u_{yyy} + \psi u_{yyz} + \tau u_{yyt}, \\ \eta^{zz} &= D_z^2(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t) + \xi u_{zzx} + \phi u_{zzy} + \psi u_{zzz} + \tau u_{zzt}, \\ \eta^{\alpha,t} &= D_t^\alpha(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t) + \xi D_t^\alpha(u_x) + \phi D_t^\alpha(u_y) + \psi D_t^\alpha(u_z) +_t^{\alpha+1}(u), \\ \mu^s &= \tilde{D}_s \mu - \xi_s f_x - \phi_s f_y - \psi_s f_z - \tau_s f_t - \eta_s f_u, \\ \nu^s &= \tilde{D}_s \nu - \xi_s g_x - \phi_s g_y - \psi_s g_z - \tau_s g_t - \eta_s g_u, \\ \kappa^s &= \tilde{D}_s \kappa - \xi_s h_x - \phi_s h_y - \psi_s h_z - \tau_s h_t - \eta_s h_u, \\ \chi^s &= \tilde{D}_s \chi - \xi_s q_x - \phi_s q_y - \psi_s q_z - \tau_s q_t - \eta_s q_u, \quad (s = x, y, z, t, u), \end{aligned} \tag{۷.۷}$$

که در آن

$$\tilde{D}_s = \frac{\partial}{\partial s} + f_s \frac{\partial}{\partial f} + g_s \frac{\partial}{\partial g} + h_s \frac{\partial}{\partial h} + q_s \frac{\partial}{\partial q}, \quad (s = x, y, z, t, u).$$

با جایگذاری ضرایب $\mu^i, \nu^i, \kappa^i$ و $\chi^i\,(i=x,y,z,t)$ در معادلات (۶.۷) به دستگاه زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned}
\mu_x - f_u\eta_x &= 0, \quad \mu_y - f_u\eta_y = 0, \quad \mu_z - f_u\eta_z = 0, \quad \mu_t - f_u\eta_t = 0,\\
\nu_x - g_u\eta_x &= 0, \quad \nu_y - g_u\eta_y = 0, \quad \nu_z - g_u\eta_z = 0, \quad \nu_t - g_u\eta_t = 0,\\
\kappa_x - h_u\eta_x &= 0, \quad \kappa_y - h_u\eta_y = 0, \quad \kappa_z - h_u\eta_z = 0, \quad \kappa_t - h_u\eta_t = 0,\\
\chi_x - q_u\eta_x &= 0, \quad \chi_y - q_u\eta_y = 0, \quad \chi_z - q_u\eta_z = 0, \quad \chi_t - q_u\eta_t = 0.
\end{aligned}$$

با تفکیک معادلات فوق نسبت به متغیرهای $f_u, g_u, h_u$ و $q_u$ داریم

$$\eta=\eta(u),\ \mu=\mu(u,f,g,h,q),\ \nu=\nu(u,f,g,h,q),\ \kappa=\kappa(u,f,g,h,q),\ \chi=\chi(u,f,g,h,q).$$

ضرایب (۷.۷) را در محک ناوردایی (۵.۷) قرار می‌دهیم. سپس با جایگزینی $u_{xx}$ با معادله اصلی $u_{xx}=\left(D_t^\alpha u - f_u u_x^2 - g_u u_y^2 - g u_{yy} - h_u u_z^2 - h u_{zz} - q\right)/f$ و تفکیک معادلات به‌دست آمده نسبت به توان‌های مشتق‌های $u, f, g, h, q$ و مشتقات کسری $D_t^{\alpha-n}u,\ n=1,2,\dots,$ به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned}
\xi_t &= \xi_y=\xi_z=\xi_u=\xi_{xx}=0, \quad \phi_t=\phi_x=\phi_z=\phi_u=\phi_{yy}=0,\\
\psi_t &= \psi_x=\psi_y=\psi_u=\psi_{zz}=0, \quad \tau_x=\tau_y=\tau_z=\tau_u=0, \quad \eta_{uu}=0,\\
\mu_u &= \mu_g=\mu_h=\mu_q=0, \quad \nu_u=\nu_f=\nu_h=\nu_q=0, \quad \kappa_u=\kappa_f=\kappa_g=\kappa_q=0,\\
f\mu_f &- \mu=0, \quad f\left(\nu_g+2\xi_x-2\phi_y\right)-\mu=0, \quad f\left(\kappa_h+2\xi_x-2\psi_z\right)-\mu=0,\\
\mu &= f\left(2\xi_x-\alpha\tau_t\right), \quad \nu=g\left(\frac{\mu}{f}-2\xi_x+2\phi_y\right), \quad \kappa=h\left(\frac{\mu}{f}-2\xi_x+2\psi_z\right),\\
\chi &= q\left(\frac{\mu}{f}-2\xi_x+\eta_u\right)+\partial_t^\alpha\eta-u\partial_t^\alpha\eta_u, \quad (n+1)\,D_t^n\eta_u+(n-\alpha)\,D_t^{n+1}\tau=0,\ n=1,2,\dots.
\end{aligned}$$

دستگاه معادلات مشخصه فوق، جوابی به صورت زیر دارد:

$$\begin{aligned}
\xi &= C_1x+C_2, \quad \phi=C_3y+C_4, \quad \psi=C_5z+C_6, \quad \tau=C_7t+C_8, \quad \eta=C_9u+C_{10},\\
\mu &= (2C_1-C_7\alpha)\,f, \quad \nu=(2C_3-C_7\alpha)\,g, \quad \kappa=(2C_5-C_7\alpha)\,h,
\end{aligned}$$

که $C_i\,(i=1,\dots,10)$ ثابت‌های دلخواه هستند.خاطر نشان می‌کنیم که حد پایینی $t=0$ در دیفرانسیل کسری می‌بایست تحت تبدیلات هم‌ارز نظیر معادله (۲.۷) ناوردا باشد. که به موجب آن $\tau(0)=0,\ C_8=0$. در نهایت داریم

$$\chi=(C_9-C_7\alpha)\,q+\frac{C_{10}t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

از آنجایی که $\chi_t=0$ و $q_t=0$ لذا $C_{10}=0$. درنتیجه، مولدهای تبدیلات هم‌ارز خانواده

معادلات انتشار کسری (۳.۷) به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شوند.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \\ V_4 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2f\frac{\partial}{\partial f}, \quad V_5 = y\frac{\partial}{\partial y} + 2g\frac{\partial}{\partial g}, \quad V_6 = z\frac{\partial}{\partial z} + 2h\frac{\partial}{\partial h}, \\ V_7 &= t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha f\frac{\partial}{\partial f} - \alpha g\frac{\partial}{\partial g} - \alpha h\frac{\partial}{\partial h} - \alpha q\frac{\partial}{\partial q}, \quad V_8 = u\frac{\partial}{\partial u} + q\frac{\partial}{\partial q}. \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری نتیجه زیر حاصل می‌شود.

**قضیه ۲.۲.۷.** گروه هم‌ارزی از خانواده معادلات (۲.۷) تبدیلاتی به صورت

$$\begin{aligned} x^* &= B_1 x + B_2, \quad y^* = B_3 y + B_4, \quad z^* = B_5 z + B_6, \quad t^* = B_7^2 t, \quad u^* = B_8 u, \\ f^* &= B_1^2 B_7^{-2\alpha} f, \quad g^* = B_3^2 B_7^{-2\alpha} g, \quad h^* = B_5^2 B_7^{-22\alpha} h, \quad q^* = B_8 B_7^{-2\alpha} q, \end{aligned} \tag{۸.۷}$$

است که در آن ثابت‌های $B_1, \ldots, B_7,$ دلخواه و $B_8 > 0$ هستند.

# ۳.۷ معادله انتقال حرارت یک بعدی

### رده‌بندی گروه

برای رده‌بندی گروه تقارن معادله (۳.۷) رویکرد شرح داده شده در فصل سوم را به کار می‌گیریم. بدین منظور، ابتدا گروه لی تک پارامتری از تبدیلات را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\xi(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \\ t^* &= t + \varepsilon\tau(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon\eta(x,t,u) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{۹.۷}$$

در اینصورت، مولد تقارنی نظیر گروه تبدیلات فوق را می توان به شکل زیر نوشت:

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u}.$$

امتداد میدان برداری فوق نظیر معادلات مفروض برابر است با:

$$X^{(\alpha,t)} = X + \eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial\left(D_t^\alpha u\right)} + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{2x}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

ضرایب امتداد از روابط زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha,t} &= D_t^\alpha(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \xi D_t^\alpha(u_x) +_t^\alpha (u_t), \\ \eta^x &= D_x(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt}, \\ \eta^{xx} &= D_x^2(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt}. \end{aligned} \tag{۱۰.۷}$$

شرط ناوردایی نظیر معادله انتقال حرارت زمان کسری (۳.۷) به منظور یافتن تقارن‌ها به صورت زیر است:

(۱۱.۷)

$$X^{\alpha,t}\left(D_t^{\alpha}u - f_u u_x^2 - f u_{xx} - q\right)|_{(۳.۷)} = \eta^{\alpha,t} - \eta\left(f_{uu}u_x^2 + f_u u_{xx} + q_u\right) - 2\eta^x f_u u_x - \eta^{xx} f = 0.$$

اکنون ضرایب (۱۰.۷) در شرط ناوردایی (۱۱.۷) جایگزین و بنا به خاصیت معادله (۳.۷)، متغیر $u_{xx}$ با $u_{xx} = \left(D_t^{\alpha}u - f_u u_x^2 - q\right)/f$ تعویض می‌کنیم. معادلات تعیین کننده زیر پس از تفکیک معادله حاصل بر حسب $u_x$، مشتقات و انتگرال‌های کسری $D_t^{\alpha-n}u, n = 0, 1, \ldots$، نتیجه خواهد شد:

$$\xi_t = \xi_u = \tau_x = \tau_u = \eta_{uu} = 0, \tag{۱۲.۷}$$

$$\left(F(u)\eta\right)_u = 0,\ 2F(u)\eta_x + 2\eta_{xu} - \xi_{xx} = 0,\ F(u)\eta - 2\xi_x + \alpha\tau_t = 0, \tag{۱۳.۷}$$

$$D_t^{\alpha}\left(\eta - u\eta_u\right) - \eta\left(q_u - F(u)q\right) - f\eta_{xx} + \eta_u q - 2\xi_x q = 0, \tag{۱۴.۷}$$

$$(n+1)D_t^n\eta_u + (n-\alpha)D_t^{n+1}\tau = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{۱۵.۷}$$

در دستگاه معادلات فوق، شرط $f(u) \neq 0$ استفاده نموده و قرار دادیم $F(u) = f_u/f$.

از پنج معادله اول دستگاه (۱۲.۷)، روابط زیر نتیجه می‌شود

$$\tau = \tau(t), \quad \xi = \xi(x), \quad \eta = \eta_0(x,t) + \eta_1(x,t)u.$$

با استفاده از زنجیره نامتناهی از معادلات (۱۵.۷) داریم:

$$\tau(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2, \quad \eta_1(x,t) = (\alpha - 1)C_2 t + a(x),$$

که در آن $C_0, C_1, C_2$ ثابت‌های دلخواه و $a(x)$ تابع دلخواه هستند. خاطر نشان می‌شود که حد پایینی $t = 0$ در دیفرانسیل کسری می‌بایست تحت تبدیلات نقطه‌ای نظیر معادله (۳.۷) ناوردا باشد. که موجب می‌شود $\tau(0) = 0$ و در نتیجه $C_0 = 0$.

در نهایت با به‌کارگیری صورت‌های به‌دست آمده برای ضرایب $\xi, \tau$ و $\eta$ و فرض دلخواه بودن توابع $f(u)$ و $q(u)$، جواب $\tau = 0, \xi = C, \eta = 0$ برای معادلات مشخصه به‌دست می‌آید. از این رو در این حالت، انتقال در مکان $x$ با مولد

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

تنها تقارن نقطه‌ای لی معادله (۳.۷) است.

در حالتی که تابع $f(u)$ دلخواه و $q(u) = 0$، دستگاه (۱۲.۷)ـ(۱۵.۷) دارای جوابی به صورت

$$\tau = 2C_1 t, \quad \xi == \alpha C_1 x + C_3, \quad \eta = 0,$$

است. بنابرین معادله همگن (۳.۷)، یک گروه تبدیل اضافی از نوع تجانس با مولد زیر می‌پذیرد

$$X_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial}{\partial x}.$$

با استفاده از معادلات (۱۳.۷) هرگاه $F(u) = 0$ یا

$$\left(\frac{1}{F(u)}\right)'' = 0, \tag{۱۶.۷}$$

می‌توان به تقارن‌های بیشتری از معادله (۳.۷) دست یافت. با توجه به تبدیلات هم‌ارز (۹.۷)، از رابطه (۱۶.۷) و دستگاه معادلات (۱۳.۷)، یک رده‌بندی اولیه از گروه تقارن‌ها مرتبط با انتخاب‌های خاص از $F(u)$ ($f(u)$) در جدول ۱.۷ نمایش داده شده است. در این جدول $A$ و $C_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ ثابت‌های دلخواه و $h(u)$ یک تابع دلخواه است. برای یک رده‌بندی کامل‌تر

جدول ۱.۷: رده‌بندی گروه اولیه

| $f(u)$ | $\tau$ | $\xi$ | $\eta_0$ | $\eta_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $C_1 t$ | $\frac{\alpha}{2}C_1 x + C_3$ | $g(x,t)$ | $C_4$ |
| $e^u$ | $C_1 t$ | $C_4 x + C_3$ | $2C_4 - \alpha C_1$ | $C_4$ |
| $(u+A)^{\sigma}$ $\left(\sigma \neq 0, -\frac{4}{3}, -\frac{2\alpha}{\alpha-1}\right)$ | $C_1 t$ | $C_4 x + C_3$ | $0$ | $\frac{1}{\sigma}(2C_4 - \alpha C_1)$ |
| $(u+A)^{\frac{-2\alpha}{\alpha-1}}$ | $C_1 t + C_2 t^2$ | $C_4 x + C_3$ | $0$ | $\frac{\alpha-1}{2\alpha}(2\alpha C_2 t - 2C_4 + \alpha C_1)$ |
| $(u+A)^{\frac{-4}{3}}$ | $C_1 t$ | $h(x)$ | $0$ | $\frac{-3}{2}h'(x) + \frac{3}{4}\alpha C_1$ |

از تقارن‌ها، معادله (۱۴.۷) شامل تابع $q(u)$ را درنظرمی‌گیریم. این معادله، برای هر انتخاب از $f(u)$ در جدول ۱.۷ روابط رده‌بندی برای $q(u)$ را به صورت زیر فراهم می‌کند:

- برای $f(u) = 1$، تابع $q(u)$ در یکی از معادلات $q_{uu} = 0$ یا
$$\left(\frac{q_u}{q_{uu}}\right) = 0,$$
صادق است؛

- برای $f(u) = e^u$، تابع $q(u)$ می‌تواند مقدار دلخواه و در نتیجه $C_1 = C_4 = 0$، یا $q(u) = 0$ و بنابراین $2C_4 = \alpha C_1$؛

- در حالتی که $f(u) = (u+A)^{\sigma}\,(\sigma \neq 0, -4/3, -(2\alpha)/(\alpha-1))$، تابع $q(u)$ می‌تواند مقدار ثابت بوده در نتیجه $2C_4 = \alpha(1+\sigma)C_1$ یا در معادله زیر صادق است
$$\left(\frac{q}{q_u}\right)_{uu} = 0;$$

- در حالتی که $f(u)=(u+A)^{-(2\alpha)/(\alpha-1)}$، دو انتخاب از تابع $q(u)$ وجود دارد: $q(u)=0$ و $q(u)=q_0u^{(\alpha+2)/(\alpha)}$ ( $q_0$ یک ثابت دلخواه است)؛
- در نهایت به ازای $f(u)=(u+A)^{-4/3}$، سه انتخاب متمایز وجود دارد:

$$u^{\frac{1}{3}}q(u)=0, \quad \left(u^{\frac{1}{3}}q(u)\right)_{uu}=0, \quad \left(\frac{q_u}{q_{uu}}\right)_{uu}=0.$$

جواب‌های روابط رده‌بندی لیست شده از تابع $q(u)$ محاسبه نموده و سپس جواب‌های به‌دست آمده را در دستگاه (۱۲.۷) جایگزین می‌کنیم و تمام جفت‌های توابع $\{f(u), q(u)\}$ جهت تعمیم جبرلی تقارن‌های نقطه، می‌یابیم. نتایج به اختصار در جدول ۲.۷ ارائه شده است.

جدول ۲.۷: رده‌بندی گروه معادله (۳.۷) ( $\delta=\pm1,\ \gamma\in\mathbb{R},\ \omega=2/\sqrt{3}$ )

| $f(u)$ | $q(u)$ | $X$ |
|---|---|---|
| $I.$ $f=1$ | 1. $q=0$ | $X_1=\frac{\partial}{\partial x},\ X_2=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2}{\alpha}t\frac{\partial}{\partial t},\ X_3=u\frac{\partial}{\partial u},\ X_\infty=g(x,t)\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q=\delta$ | $X_1,\ X_\infty,\ X_3=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2}{\alpha}t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2\delta}{\Gamma(1+\alpha)}t^\alpha\frac{\partial}{\partial u},\ X_5=\left(u-\frac{2\delta}{\Gamma(1+\alpha)}t^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q=\delta u+\chi$ | $X_1,\ X_\infty,\ X_6=[u-\chi t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\delta t^\alpha)]\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 4. $q=\delta u^\gamma$ $(\gamma\neq0,1)$ | $X_1,$ $X_7=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2}{\alpha}t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2}{1-\gamma}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $II.$ $f=u^\sigma$ $\left(\sigma\neq0,\frac{-4}{3},\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)$ | 1. $q=0$ | $X_1,\ X_2,\ X_8=\frac{\sigma}{\alpha}t\frac{\partial}{\partial t}-u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q=\delta u^\gamma$ $(\gamma\neq\sigma+1)$ | $X_1,$ $X_9=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2(1-\gamma)}{\alpha(\sigma+1-\gamma)}t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2}{\sigma+1-\gamma}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q=\delta u^{\sigma+1}$ | $X_1, X_8$ |
| $III.$ $f=u^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$ | 1. $q=0$ | $X_1,\ X_{10}=t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\alpha-1}{2}u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{11}=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\alpha-1}{\alpha}u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{12}=t^2\frac{\partial}{\partial t}+(\alpha-1)tu\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q=\delta u^\gamma$ $\left(\gamma\neq\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$ | $X_1,$ $X_{13}=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2(1-\gamma)(1-\alpha)}{\alpha[1-\gamma+\alpha(1+\gamma)]}t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2(1-\alpha)}{1-\gamma+\alpha(1+\gamma)}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q=\delta u^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ | $X_1, X_{14}=t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{(\alpha-1)}{2}u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{15}=t^2\frac{\partial}{\partial t}+(\alpha-1)tu\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $IV.$ $f=u^{-\frac{4}{3}}$ | 1. $q=0$ | $X_1,\ X_{16}=\frac{2}{\alpha}t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{17}=x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{18}=x^2\frac{\partial}{\partial x}-3xu\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q=\delta u$ | $X_1,\ X_{17},\ X_{18}$ |
| | 3. $q=\delta u^\gamma$ $(\gamma\neq-\frac{1}{3},1)$ | $X_1,$ $X_{19}=x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{6(1-\gamma)}{\alpha(1+3\gamma)}t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{6}{1+3\gamma}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 4. $q=u^{-\frac{1}{3}}$ | $X_1, X_{20}=4t\frac{\partial}{\partial t}+3\alpha u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{21}=e^{\omega x}\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{3}e^{\omega x}u\frac{\partial}{\partial u},$ $X_{22}=e^{-\omega x}\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{3}e^{-\omega x}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 5. $q=-u^{-\frac{1}{3}}$ | $X_1, X_{20},\ X_{23}=\cos(\omega x)\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{3}\sin(\omega x)u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{24}=\sin(\omega x)\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{3}\cos(\omega x)u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 6. $q=u^{-\frac{1}{3}}+\chi u$ | $X_1, X_{21},\ X_{22}$ |
| | 7. $q=-u^{-\frac{1}{3}}+\chi u$ | $X_1,\ X_{23},\ X_{24}$ |

## صورت‌های کاهش‌یافته معادله (۳.۷)

جواب ناوردا متناظر هر حالت از زیرجبرهای یک بعدی در جدول ۲.۷ را یافته و صورت‌های کاهش‌یافته معادله (۳.۷) تحت هر تقارن را به‌دست می‌آوریم. نتایج در جدول ۳.۷ گردآوری شده است.

جدول ۳.۷: صورت‌های کاهش‌یافته معادله (۳.۷) مطابق مولدهای جدول ۱۲.۷ $\left(\varepsilon,\ \delta=\pm 1,\ \gamma,\ \beta\in\mathbb{R},\ \rho,\ \lambda\geq 0,\ \omega=2/\sqrt{3}\right)$

| معادله کاهش‌یافته | ناوردا | $N_X$ | $N_q$ | $N_f$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = 0$ | $u=\varphi(t)$ | 1 | 1 | $I$ |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \varphi$ | $u=e^x\varphi(t)$ | 2 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \frac{4}{\alpha^2} z^2\varphi'' + \frac{2}{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}+1+2\beta\right) z\varphi' + \beta(\beta+1)\varphi$ | $u=x^{-\beta}\varphi(z),\ z=tx^{-\frac{2}{\alpha}}$ | 3 | | |
| $----$ | $----$ | 4 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \delta$ | $u=\varphi(t)$ | 1 | 2 | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \varphi$ | $u=e^x\varphi(t)+\frac{\delta t}{\Gamma(1+\alpha)}$ | 2 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \frac{4}{\alpha^2} z^2\varphi'' + \frac{2}{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}+1+2\beta\right) z\varphi' + \beta(\beta+1)\varphi$ | $u=x^{-\beta}\varphi(z)+\frac{\delta t}{\Gamma(1+\alpha)},\ z=tx^{-\frac{2}{\alpha}}$ | 3 | | |
| $----$ | $u=\frac{\delta t}{\Gamma(1+\alpha)}$ | 4 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \delta\varphi+\chi$ | $u=\varphi(t)$ | 1 | 3 | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \left(\beta^2+\delta\right)\varphi$ | $u=e^{-\beta x}\varphi(t)+\chi t^\alpha \mathrm{E}_{\alpha,\alpha+1}(\delta t^\alpha)\ (\beta\neq 0)$ | 2 | | |
| $----$ | $u=\chi t^\alpha \mathrm{E}_{\alpha,\alpha+1}(\delta t^\alpha)\ (\beta=0)$ | | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \delta\varphi^\gamma\ (\gamma\neq 0,1)$ | $u=\varphi(t)$ | 1 | 4 | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \frac{4}{\alpha^2} z^2\varphi'' + \frac{2}{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}+1+2\beta\right) z\varphi' + \beta(\beta+1)\varphi+\delta\varphi^\gamma$ | $u=x^{-\beta}\varphi(z),\ z=tx^{-\frac{2}{\alpha}},\ \beta=\frac{2}{1-\gamma}\ (\gamma\neq 0,1)$ | 2 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = 0$ | $u=\varphi(t)$ | 1 | 1 | $II$ |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} z^2\varphi^\sigma\varphi'' + \frac{\sigma^3}{\alpha^2} z^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2$ $+\frac{\sigma}{\alpha}\left[\frac{\sigma}{\alpha}+2(\sigma+1)\right] z\varphi^\sigma\varphi' + (\sigma+1)\varphi^{\sigma+1}$ | $u=e^{-x}\varphi(z), z=tx^{-\frac{\sigma}{\alpha}x}$ | 2 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \nu^2 z^2\varphi^\sigma\varphi'' + \sigma\nu^2 z^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2$ $+\nu\left[\nu-1-2\beta(\sigma+1)\right] z\varphi^\sigma\varphi' + \beta\left[1+\beta(\sigma+1)\right]\varphi^{\sigma+1}$ | $u=x^{-\beta}\varphi(z),\ z=tx^\nu,\ \nu=-\frac{\beta\sigma+2}{\alpha}$ | 3 | | |
| $\varphi\varphi''+\sigma(\varphi')^2-\frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)}\varphi^{2-\sigma}=0$ | $u=t^{-\frac{\alpha}{\sigma}}\varphi(x)$ | 4 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \delta\varphi^\gamma$ | $u=\varphi(t)$ | 1 | 2 | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \nu^2 z^2\varphi^\sigma\varphi'' + \sigma\nu^2 z^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2$ $+\nu\left[\nu-1-2\beta(\sigma+1)\right] z\varphi^\sigma\varphi' + \beta\left[1+\beta(\sigma+1)\right]\varphi^{\sigma+1}+\delta\varphi^\gamma$ | $u=x^{-\beta}\varphi(z),\ z=tx^\nu,$ $\nu=-\frac{\beta\sigma+2}{\alpha}, \beta=-\frac{2}{\sigma+1-\gamma}$ | 2 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \delta\varphi^{\sigma+1}$ | $u=\varphi(t)$ | 1 | 3 | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = \nu^2 z^2\varphi^\sigma\varphi'' + \sigma\nu^2 z^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2$ $+\nu\left[\nu-\frac{2(\sigma+1)}{\beta}\right] z\varphi^\sigma\varphi' + \left(\frac{(\sigma+1)}{\beta^2}+\delta\right)\varphi^{\sigma+1}$ | $u=e^{-\frac{x}{\beta}}\varphi(z),\ z=tx^\nu,$ $\nu=-\frac{\sigma}{\alpha\beta}\ (\beta\neq 0)$ | 2 | | |
| $\varphi\varphi''+\sigma(\varphi')^2-\delta\varphi^2-\frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)}\varphi^{2-\sigma}=0$ | $u=t^{-\frac{\alpha}{\sigma}}\varphi(x),\ (\beta=0)$ | | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha \varphi = 0$ | $u=\varphi(t)$ | 1 | 1 | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha \varphi = z^2\varphi^\sigma\varphi''+\sigma z^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2+(\alpha+2)z\varphi^\sigma\varphi'+\frac{1-\alpha^2}{4}\varphi^{\sigma+1}$ | $u=e^{\frac{\alpha-1}{2}x}\varphi(z),\ z=te^{-x},\ \sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ | 2 | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha \varphi = z^4\varphi^\sigma\varphi''+\sigma z^4\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2$ $+2(\alpha+2)z^3\varphi^\sigma\varphi'+(1-\alpha)(2+\alpha)z^2\varphi^{\sigma+1}$ | $u=(1+tx)^{\alpha-1}\varphi(z),\ z=\frac{t}{1+tx},\ \sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ | 3 | | |
| $\varphi\varphi''+\frac{2\alpha}{1-\alpha}(\varphi')^2-\frac{\Gamma(1/2+\alpha/2)}{\Gamma(1/2-\alpha/2)}\varphi^{\frac{4\alpha-2}{\alpha-1}}=0$ | $u=t^{\frac{\alpha-1}{2}}\varphi(x)$ | 4 | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha \varphi = \beta^2 z^2\varphi^\sigma\varphi''+\sigma\beta^2 z^2\varphi^{\sigma-1}(\varphi')^2$ $+\beta\left[\beta+1-2\gamma(\sigma+1)\right]z\varphi^\sigma\varphi'+\nu\left[\nu(\sigma+1)-1\right]\varphi^{\sigma+1}$ | $u=x^\nu\varphi(z),\ z=tx^{-\beta},$ $\nu=\frac{2-\alpha\beta}{\sigma}, \sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ | 5 | | |

ادامه دارد ...

ادامه جدول ۳.۷

| معادله کاهش‌یافته | ناوردا | $N_X$ | $N_q$ | $N_f$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi=z^4\varphi^\sigma\varphi''+\sigma z^4\varphi^{\sigma-1}\left(\varphi'\right)^2+\frac{\alpha+2}{\alpha}\left(2\alpha z-\varepsilon\right)z^2\varphi^\sigma\varphi'$ $+\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\left[1-\alpha\left(\alpha+2\right)\varepsilon z+\alpha^2\left(\alpha+2\right)z^2\right]\varphi^{\sigma+1}$ | $u=x^{\frac{2}{\alpha}}\varphi\left(z\right)\left(1-\varepsilon z\ln\left(x\right)\right)^{1-\alpha}$, $z=\frac{t}{1+\varepsilon t\ln\left(x\right)},\sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ | 6 | | |
| $\varphi\varphi''+\frac{2\alpha}{1-\alpha}\left(\varphi'\right)^2=0$ | $u=t^{\alpha-1}\varphi\left(x\right)$ | 7 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi=\delta\varphi^\gamma$ | $u=\varphi\left(t\right)$ | 1 | | $III$ |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi=\nu^2z^2\varphi^\sigma\varphi''+\sigma\nu^2z^2\left(\varphi'\right)^2+\nu\left[\nu-1-2\beta\left(\sigma+1\right)\right]z\varphi^\sigma\varphi'$ | $u=x^{-\beta}\varphi\left(z\right),z=tx^\nu,\ \nu=-\frac{\beta\sigma+2}{\alpha}$ | 2 | 2 | |
| $+\beta\left[1+\beta\left(\sigma+1\right)\right]\varphi^{\sigma+1}+\delta\varphi^\gamma$ | $\sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}\left(\gamma\neq\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$ | | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi=\delta\varphi^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ | $u=\varphi\left(t\right)$ | 1 | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi=\nu^2z^2\varphi^\sigma\varphi''+\sigma\nu^2z^2\varphi^{\sigma-1}\left(\varphi'\right)^2$ $+\left(\alpha+2\right)\nu^2z\varphi^\sigma\varphi'+\left(\delta+\frac{1-\alpha^2}{4}\nu^2\right)\varphi^{\sigma+1}$ | $u=e^{\frac{1-\alpha}{2}\nu x}\varphi\left(z\right),\ z=te^{\nu x},\ \nu=-\frac{1}{\beta}$, $\sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}\left(\beta\neq0\right)$ | 2 | | |
| $\varphi\varphi''+\frac{2\alpha}{1-\alpha}\left(\varphi'\right)^2+\delta\varphi^2-\frac{\Gamma\left(1/2+\alpha/2\right)}{\Gamma\left(1/2-\alpha/2\right)}\varphi^{\frac{4\alpha-2}{\alpha-1}}=0$ | $u=t^{\frac{\alpha-1}{2}}\varphi\left(x\right),\ \left(\beta=0\right)$ | | 3 | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi=z^4\varphi^\sigma\varphi''+\sigma z^3\varphi^{\sigma-1}\left(\varphi'\right)^2+2\left(\alpha+2\right)z^3\varphi^\sigma\varphi'+$ $+\left[\delta+\left(1-\alpha\right)\left(2+\alpha\right)z^2\right]\varphi^{\sigma+1}$ | $u=\left(1+tx\right)^{\alpha-1}\varphi\left(z\right),\ z=\frac{t}{1+tx}$, $\sigma=\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ | 3 | | |
| $\varphi\varphi''+\frac{2\alpha}{1-\alpha}\left(\varphi'\right)^2+\delta\varphi^2=0$ | $u=t^{\alpha-1}\varphi\left(x\right)$ | 4 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi=0$ | $u=\varphi\left(t\right)$ | 1 | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi=\frac{4}{\alpha^2}z^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{16}{3\alpha^2}z^2\varphi^{-\frac{7}{3}}\left(\varphi'\right)^2+\frac{2}{\alpha^2}\left(\alpha+2\right)z\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'-$ $-\frac{3}{4}\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | $u=e^{\frac{3}{2}x}\varphi\left(z\right),\ z=te^{-\frac{2}{\alpha}x}$ | 2 | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi=\frac{4\beta^2}{\alpha^2}z^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{16\beta^2}{3\alpha^2}z^2\varphi^{-\frac{7}{3}}\left(\varphi'\right)^2+$ $+\frac{2\beta^2}{\alpha^2}\left(\alpha+2\right)z\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'-\left(3-\frac{\beta^2}{4}\right)\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | $u=\frac{\left(1+x\right)^{\frac{3}{4}\beta-\frac{3}{2}}}{\left(1-x\right)^{\frac{3}{4}\beta+\frac{3}{2}}}\varphi\left(z\right),\ z=t\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$ | 3 | 1 | |
| $\varphi\varphi''-\frac{3}{4}\left(\varphi'\right)^2-\frac{\Gamma\left(1+3\alpha/4\right)}{\Gamma\left(1-\alpha/4\right)}\varphi^{\frac{10}{3}}=0$ | $u=t^{\frac{3}{4}\alpha}\varphi\left(x\right)$ | 4 | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi=\frac{4\rho^2}{\alpha^2}z^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{16\rho^2}{3\alpha^2}z^2\varphi^{-\frac{7}{3}}\left(\varphi'\right)^2+$ $+\frac{\rho}{\alpha^2}\left(4\rho+2\alpha-\rho\alpha\right)z\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'-\frac{3}{4}\left(1+\rho\right)\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | $u=x^{\frac{3}{2}\left(\rho-1\right)}\varphi\left(z\right),\ z=tx^{-2\frac{\rho}{\alpha}}$, | 5 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi=\delta\varphi$ | $u=\varphi\left(t\right)$ | 1 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi=\frac{3}{4}\varphi^{-\frac{1}{3}}+\delta\varphi$ | $u=x^{-\frac{3}{2}}\varphi\left(t\right)$ | 2 | 2 | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi=3\varphi^{-\frac{1}{3}}+\delta\varphi$ | $u=\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\varphi\left(t\right)$ | 3 | | $IV$ |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi=\delta\varphi^\gamma$ | $u=\varphi\left(t\right)$ | 1 | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi=\nu^2z^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{4}{3}\nu^2z^2\varphi^{-\frac{7}{3}}\left(\varphi'\right)^2+$ $\nu\left(\nu-1+\frac{2}{3}\beta\right)z\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'$ | $u=x^{-\beta}\varphi\left(z\right),z=tx^\nu,\ \nu=\frac{6\left(1-\gamma\right)}{\alpha\left(1+3\gamma\right)}$ | 2 | 3 | |
| $+\left(\beta-\frac{\beta^2}{3}\right)\varphi^{-\frac{1}{3}}+\delta\varphi^\gamma$ | $\beta=\frac{6}{1+3\gamma}$ | | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi=\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | $u=\varphi\left(t\right)$ | 1 | | |
| $\varphi\varphi''-\frac{4}{3}\left(\varphi'\right)^2+\varphi^2-\frac{\Gamma\left(1+3\alpha/4\right)}{\Gamma\left(1-\alpha/4\right)}\varphi^{\frac{10}{3}}=0$ | $u=t^{\frac{3}{4}\alpha}\varphi\left(x\right),\ \left(\rho=0\right)$ | | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi=\frac{16}{\rho^2}z^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi''-\frac{64}{3\rho^2}z^2\varphi^{-\frac{7}{3}}\left(\varphi'\right)^2+\frac{8}{\rho^2}\left(\alpha+2\right)z\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'-$ | $u=e^{-\frac{3\alpha}{\rho}x}\varphi\left(z\right),\ z=te^{\frac{4}{\rho}x},\ \left(\rho>0\right)$ | 2 | | |

ادامه دارد ...

۳.۷ ادامه جدول

| معادله کاهش‌یافته | ناوردا | $N_X$ | $N_q$ | $N_f$ |
|---|---|---|---|---|
| $-\left(1-\frac{3\alpha^2}{\rho}\right)\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | | | 4 | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi = z^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'' - \frac{4}{3\alpha^2}z^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2 + (2\alpha+1)z\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi' -$ $-3\alpha^2\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | $u = e^{-\frac{3}{2}\omega x - 3\alpha\psi(x)}\varphi(z)\,,$ $z = te^{4\psi(x)},\ \psi(x) = \frac{\varepsilon}{\omega}e^{-\omega x}$ | 3 | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi = 16\beta^2 z^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'' - \frac{64}{3\alpha^2}z^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2 +$ $+8\beta^2(\alpha+2)z\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi' + \left(1-3\alpha\beta^2\right)\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | $u = \psi^{-\frac{3}{4}\alpha}\sinh^{-\frac{3}{2}}(\omega x)\varphi(z)\,,$ $z = t\psi(x)\,,\ \psi = \left[\tanh\left(\frac{\omega x}{2}\right)\right]^{-\frac{4\beta}{\omega}}$ | 4 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi = 0$ | $u = e^{-\frac{3}{2}\omega x}\varphi(t)$ | 5 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi = -\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | $u = \varphi(t)$ | 1 | 5 | |
| $\varphi\varphi'' - \frac{4}{3}(\varphi')^2 - \varphi^2 - \frac{\Gamma(1+3\alpha/4)}{\Gamma(1-\alpha/4)}\varphi^{\frac{10}{3}} = 0$ | $u = t^{\frac{3}{4}\alpha}\varphi(x)\,,\ (\rho=0)$ | 2 | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi = \frac{16}{\rho^2}z^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'' - \frac{64}{3\rho^2}z^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2 + \frac{8}{\rho^2}(\alpha+2)z\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi' -$ $-\left(1-\frac{3\alpha^2}{\rho}\right)\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | $u = e^{\frac{3\alpha}{\rho}x}\varphi(z)\,,\ z = te^{-\frac{4}{\rho}x},\ (\rho>0)$ | | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi = 4z^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'' - \frac{16}{3\alpha^2}z^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2 + 2(\alpha+2)z\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi' -$ $-\frac{3}{4}\alpha^2\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | $u = \psi^{-\frac{3}{4}\alpha}\cos^{-\frac{3}{2}}(\omega x)\varphi(z)\,,$ $z = t\psi(x)\,,\ \psi = e^{-\frac{4}{\omega}\tan(\omega x/2)}$ | 3 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi = 0$ | $u = \sin^{-3}\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\varphi(t)$ | 4 | | |
| $\mathrm{D}_z^\alpha\varphi = 16z^2\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'' - \frac{64}{3\alpha^2}z^2\varphi^{-\frac{7}{3}}(\varphi')^2 + 8\lambda^2(\alpha+2)z\varphi^{-\frac{4}{3}}\varphi'$ $+\left(1-3\alpha^2\lambda^2\right)\varphi^{-\frac{1}{3}}$ | $u = \psi^{-\frac{3}{4}\alpha}(x)\cos^{-\frac{3}{2}}(\omega x)\varphi(z)\,,$ $z = t\psi(x)\,,\ \psi(x) = \tan^{-\frac{4\lambda}{\omega}}\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ | 5 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi = \varphi^{-\frac{1}{3}} + \chi\varphi$ | $u = \varphi(t)$ | 1 | 6 | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi = \chi\varphi$ | $u = e^{-\frac{3}{2}\omega x}\varphi(t)$ | 2 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi = \varphi^{-\frac{1}{3}} + \chi\varphi$ | $u = \sinh^{-\frac{3}{2}}(\omega x)\varphi(t)$ | 3 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi = -\varphi^{-\frac{1}{3}} + \chi\varphi$ | $u = \varphi(t)$ | 1 | 7 | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi = \chi\varphi$ | $u = \sin^{-3}\varphi\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\varphi(t)$ | 2 | | |
| $\mathrm{D}_t^\alpha\varphi = \varphi^{-\frac{1}{3}} + \chi\varphi$ | $u = \cos^{-\frac{3}{2}}(\omega x)\varphi(t)$ | 3 | | |

## برخی جواب‌های ناوردا

به عنوان نتیجه‌ای از کاهش‌های تقارنی، مساله یافتن جواب ناوردا نظیر معادله (۳.۷) به مساله یافتن جواب ناوردا معادلات دیفرانسیل معمولی کسری ارائه شده در جدول ۳.۷ تقلیل می‌یابد. در این بخش، برخی جواب‌های ناوردا معادله غیرهمگن (۳.۷) با استفاده از صورت‌های کاهش‌یافته ارائه شده است.

**مثال ۱.۳.۷.** ابتدا معادله (۳.۷) را با $f(u) = u^\sigma$ و $q(u) = u^{\sigma+1}\left(\sigma \neq -\frac{4}{3}, -\frac{2\alpha}{\alpha-1}\right)$ درنظر می‌گیریم. همانطور که در بخش قبل ملاحظه شد عملگر

$$X = -\sigma t\frac{\partial}{\partial t} + \alpha u\frac{\partial}{\partial u},$$

یک تقارن معادله مذکور است. ناوردا نظیر به صورت $u(x,t) = t^{-\frac{\alpha}{\sigma}}\varphi(x)$ است که در آن $\varphi(x)$ جواب معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم زیر است

$$\varphi'' + \sigma\varphi^{-1}(\varphi')^2 + \varphi - a\varphi^{1-\sigma} = 0, \qquad a = \frac{\Gamma(1-\alpha/\sigma)}{\Gamma(1-\alpha-\alpha/\sigma)}.$$

جواب معادله فوق به صورت

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\psi(\varphi, C_1)}} = C_2 \pm x,$$

نوشته می‌شود که $C_1$ و $C_2$ ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند و تابع $\psi(\varphi, C_1)$ روی $\sigma$ برابر است با:

$$\psi(\varphi, C_1) = \begin{cases} C_1\varphi^{-2\sigma} + \dfrac{2a}{\sigma+2}\varphi^{2-\sigma} - \dfrac{1}{\sigma+1}\varphi^2, & \sigma \neq -1,\ 2; \\ C_1\varphi^2 + 2a\varphi^3 - 2\varphi^2 \ln(\varphi), & \sigma = -1; \\ C_1\varphi^4 + 2a\varphi^4 \ln(\varphi) + \varphi^2, & \sigma = 2. \end{cases}$$

**مثال ۲.۳.۷.** معادله (۳.۷) با انتخاب $f(u) = u^{-2\alpha/(\alpha-1)}$ و $q(u) = u^{-(\alpha+1)/(\alpha-1)}$ تقارنی به صورت

$$X = t^2\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha-1)\, tu\frac{\partial}{\partial u},$$

می‌پذیرد. ناوردا متناظر این تقارن به صورت $u(x,t) = t^{\alpha-1}\varphi(x)$ است که در آن $\varphi(x)$ جواب معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم زیر است:

$$\varphi'' - \frac{2\alpha}{\alpha-1}\varphi^{-1}(\varphi')^2 + \varphi = 0.$$

جواب معادله فوق به صورت

$$\varphi(x) = [C_1\omega \sin(\omega x) + C_2\omega\cos(\omega x)]^{\omega^{-2}}, \quad \omega = \frac{1+\alpha}{1-\alpha},$$

نوشته می‌شود.

## ۴.۷ معادله انتقال حرارت سه بعدی

### رده‌بندی گروه

برای رده‌بندی گروه تقارن معادله (۲.۷) رویکرد شرح داده شده در فصل سوم را به کار می‌گیریم. بدین منظور، ابتدا گروه لی تک پارامتری از تبدیلات را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\xi(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \\ y^* &= y + \varepsilon\phi(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \\ z^* &= z + \varepsilon\psi(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \\ t^* &= t + \varepsilon\tau(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon\eta(x,t,u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

در اینصورت، مولد تقارنی نظیر گروه تبدیلات فوق را می توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \phi\frac{\partial}{\partial y} + \psi\frac{\partial}{\partial z} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u}.$$

امتداد میدان برداری فوق نظیر معادلات مفروض با فرمول زیر داده می‌شود.

$$\begin{aligned} X^{(\alpha,t)} &= X + \eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial\left(D_t^{\alpha}u\right)} + \eta^{x}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{2x}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \\ &\quad + \eta^{y}\frac{\partial}{\partial u_y} + \eta^{2y}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \eta^{z}\frac{\partial}{\partial u_z} + \eta^{2z}\frac{\partial}{\partial u_{zz}}. \end{aligned}$$

ضرایب امتداد از روابط زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \eta^{x} &= D_x\left(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t\right) + \xi u_{xx} + \phi u_{xy} + \psi u_{xz} + \tau u_{xt}, \\ \eta^{y} &= D_y\left(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t\right) + \xi u_{yx} + \phi u_{yy} + \psi u_{yz} + \tau u_{yt}, \\ \eta^{z} &= D_z\left(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t\right) + \xi u_{zx} + \phi u_{zy} + \psi u_{zz} + \tau u_{zt}, \\ \eta^{xx} &= D_x^2\left(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t\right) + \xi u_{xxx} + \phi u_{xxy} + \psi u_{xxz} + \tau u_{xxt}, \\ \eta^{yy} &= D_y^2\left(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t\right) + \xi u_{yyx} + \phi u_{yyy} + \psi u_{yyz} + \tau u_{yyt}, \\ \eta^{zz} &= D_z^2\left(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t\right) + \xi u_{zzx} + \phi u_{zzy} + \psi u_{zzz} + \tau u_{zzt}, \\ \eta^{\alpha,t} &= D_t^{\alpha}\left(\eta - \xi u_x - \phi u_y - \psi u_z - \tau u_t\right) + \xi D_t^{\alpha}(u_x) + \phi D_t^{\alpha}(u_y) + \psi D_t^{\alpha}(u_z) +_t^{\alpha+1}(u). \end{aligned} \tag{۱۷.۷}$$

شرط ناوردایی نظیر معادله انتقال حرارت زمان کسری (۲.۷) به منظور یافتن تقارن‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & X^{\alpha,t}\left(D_t^{\alpha}u - f_u u_x^2 - f u_{xx} - g_u u_y^2 - g u_{yy} - h_u u_z^2 - h u_{zz} - q\right)|_{(۲.۷)} = \\ & \eta^{\alpha,t} - \eta\left(f_{uu}u_x^2 + f_u u_{xx} + g_{uu}u_y^2 + g_u u_{yy} + h_{uu}u_z^2 + h_u u_{zz} + q_u\right) \\ & -2\eta^{x} f_u u_x - \eta^{xx} f - 2\eta^{y} g_u u_y - \eta^{yy} g - 2\eta^{z} h_u u_z - \eta^{zz} h = 0. \end{aligned} \tag{۱۸.۷}$$

اکنون ضرایب (۱۷.۷) در شرط ناوردایی (۱۸.۷) جایگزین و بنا به خاصیت معادله (۲.۷)، متغیر $u_{xx}$ را با

$$\frac{\left(D_t^{\alpha}u - f_u u_x^2 - g_u u_y^2 - g u_{yy} - h_u u_z^2 - h u_{zz} - q\right)}{f}$$

تعویض می‌کنیم. پس از تفکیک معادله حاصل بر حسب مشتقات صحیح $u$ نسبت به متغیرهای $x, y, z, t$ ، مشتقات و انتگرال‌های کسری $D_t^{\alpha-n}u, n = 0, 1, \ldots$، معادلات تعیین کننده زیر

نتیجه خواهد شد:

$$\xi_t = \phi_t = \psi_t = \xi_u = \phi_u = \psi_u = \tau_x = \tau_y = \tau_z = \tau_u = \eta_{uu} = 0, \tag{۱۹.۷}$$

$$g\psi_y + h\phi_z = 0,\ f\psi_x + h\xi_z = 0,\ g\xi_x + f\phi_y = 0, \tag{۲۰.۷}$$

$$g_u\psi_y + h_u\phi_z = 0,\ f_u\psi_x + h_u\xi_z = 0,\ g_u\xi_x + f_u\phi_y = 0,$$

$$2f_u\xi_x - \alpha f_u\tau_t - f_u\eta_u - \eta f_{uu} = 0,$$

$$2g_u\phi_y - \alpha g_u\tau_t - g_u\eta_u - \eta g_{uu} = 0, \tag{۲۱.۷}$$

$$2h_u\psi_z - \alpha h_u\tau_t - h_u\eta_u - \eta h_{uu} = 0,$$

$$\xi_{xx} - 2\frac{f_u}{f}\eta_x - 2\eta_{xu} = 0,\ \phi_{yy} - 2\frac{g_u}{g}\eta_y - 2\eta_{yu} = 0,\ \psi_{zz} - 2\frac{h_u}{h}\eta_z - 2\eta_{zu} = 0, \tag{۲۲.۷}$$

$$2\xi_x - \alpha\tau_t - \eta\frac{f_u}{f} = 0,\ 2\phi_y - \alpha\tau_t - \eta\frac{g_u}{g} = 0,\ 2\psi_z - \alpha\tau_t - \eta\frac{h_u}{h} = 0, \tag{۲۳.۷}$$

$$D_t^{\alpha}(\eta - u\eta_u) - \eta\left(q_u - \frac{f_u}{f}q\right) - f\eta_{xx} - g\eta_{yy} - h\eta_{zz} + \eta_u q - 2\xi_x q = 0, \tag{۲۴.۷}$$

$$(n+1)\,D_t^n\eta_u + (n-\alpha)\,D_t^{n+1}\tau = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{۲۵.۷}$$

از معادلات (۱۹.۷) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\tau = \tau(t),\ \xi = \xi(x,y,z),\ \phi = \phi(x,y,z),\ \psi = \psi(x,y,z),\ \eta = \eta_0(x,y,z,t) + \eta_1(x,y,z,t)\,u.$$

با استفاده از زنجیره نامتناهی از معادلات (۲۵.۷) به‌دست می‌آوریم:

$$\tau(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2, \quad \eta_1(x,t) = (\alpha - 1)\,C_2 t + a(x,y,z),$$

که در آن $C_0, C_1, C_2$ ثابت‌های دلخواه و $a(x,y,z)$ تابع دلخواه هستند. لازم به ذکر است که حد پایینی $t = 0$ در دیفرانسیل کسری می‌بایست تحت تبدیلات نقطه‌ای نظیر معادله (۲.۷) ناوردا باشد. که موجب می‌شود $\tau(0) = 0$ و در نتیجه $C_0 = 0$.

در نهایت با به کارگیری صورت‌های به‌دست آمده برای ضرایب $\xi, \phi, \psi, \tau$ و $\eta$ و فرض دلخواه بودن توابع $f(u), g(u), h(u)$ و $q(u)$، جواب

$$\xi = C_3, \quad \phi = C_4, \quad \psi = C_5, \quad \tau = 0, \quad \eta = 0$$

برای معادلات مشخصه به‌دست می‌آید.

به منظور تعمیم گروه تبدیلات و یافتن یک رده‌بندی کامل از تقارن‌های معادله (۲.۷) دو حالت در نظر می‌گیریم: حالت اول، تمام ضرایب نفوذ نامتناسب باشند، یعنی نسبت‌های $f/g,\ g/h$ و $f/h$ مقادیر ثابت نباشند و مشتق نسبت به $u$ مخالف صفر باشد؛ حالت دوم: تنها دو تابع متناسب باشند، یعنی $k_1 \sim k_2, k_1 \nsim k_3$ که $(k_1, k_2, k_3)$ با جایگذاری دلخواه $(f, g, h)$ به‌دست می‌آید. با به کارگیری تبدیلات هم‌ارز (۸.۷)، حالت دوم را به حالت $k_1 = k_2 \nsim k_3$ کاهش می‌دهیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله در نظر می‌گیریم $f = h \nsim g$. در نهایت،

حالتی که هر سه تابع $f, g, h$ متناسب باشند، یعنی $f \sim g \sim h$ در نظر می‌گیریم که با استفاده از تبدیلات هم‌ارز به حالت ساده‌تر همسانگرد $f = g = h$ کاهش می‌دهیم.

۱. فرض می‌کنیم هیچ کدام از نسبت‌های $f/g, g/h$ و $f/h$ مقدار ثابت نباشد. با فرض دلخواه بودن توابع $f(u), g(u), h(u)$ و $q(u)$ جبرلی سه بعدی با مولدهای زیر داریم:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

در حالت همگن که ضرایب $f, g, h$ دلخواه و منبع $q = 0$ باشد، یک تقارن اضافی به صورت زیر داریم:

$$X_4 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha z \frac{\partial}{\partial z} + 2t \frac{\partial}{\partial t}. \qquad (۲۶.۷)$$

مولدهای بیشتر با انتخاب‌های خاصی از ضرایب $f, g, h$ و منبع $q$ در جدول ۴.۷ طبقه‌بندی شده است.

۲. حالت $f \equiv h \nsim g$.

با فرض دلخواه بودن توابع $f(u), g(u)$ و $q(u)$، جبرلی چهار بعدی با مولدهای زیر داریم:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}.$$

در حالت همگن که ضرایب $f$ و $g$ دلخواه باشند، یک تقارن تجانس به صورت (۲۶.۷) داریم. مولدهای بیشتر با انتخاب‌های خاصی از ضرایب $f, g$ و منبع $q$ در جدول ۵.۷ طبقه‌بندی شده است.

۳. حالت همسانگرد که همه ضرایب یکسان هستند. گروه تقارن‌ها در این حالت با فرض دلخواه بودن توابع $f(u)$ و $q(u)$ با عملگرهای زیر تعیین می‌شود

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_4 &= x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_5 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_6 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

مشابه دو حالت قبل، در حالت همگن تقارن تجانس (۲۶.۷) داریم. مولدهای بیشتر با انتخاب‌های خاص $f$ و منبع $q$ در جدول ۶.۷ طبقه‌بندی شده است.

## صورت‌های کاهش‌یافته نظیر معادله(۲.۷)

با استفاده از تقارن‌های گردآوری شده در جدول‌های ۴.۷ـ۶.۷ چند نمونه از ناورداها و متغیرهای متشابه را محاسبه نموده و صورت‌های تقلیل‌یافته نظیر معادله (۲.۷) را به‌دست می‌آوریم.

جدول ۴.۷: رده‌بندی گروه معادله (۲.۷)، حالت اول: $f \nsim h \nsim g$ $(\delta,\ \beta = \pm 1,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \omega = 2\sqrt{\delta/3})$

| $f(u)$ | $q(u)$ | $X$ |
|---|---|---|
| $I.$ $f = u^a,\ g = u^b,\ h = u^c$ $\left(a \neq 0, \pm 1, \frac{-4}{3}, \frac{2\alpha}{1-\alpha}, b,\ c; b \neq c\right)$ | 1. $q = 0$ | $X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_4 = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t},\ X_5 = ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y} + cz\frac{\partial}{\partial z} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta u^\gamma$ $\left(\gamma \neq a+1, , \frac{-1}{3}\right)$ | $X_1, \ldots, X_4,$ $X_6 = \alpha(a+1-\gamma)x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(b+1-\gamma)y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha(c+1-\gamma)z\frac{\partial}{\partial z} + 2(1-\gamma)t\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_7 = \alpha(a+1)x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(b+1)y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha(c+1)z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |

جدول ۵.۷: رده‌بندی گروه معادله (۲.۷)، حالت دوم: $f = h \neq g$ $(\delta,\ \beta = \pm 1,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \omega = 2\sqrt{\delta/3})$

| $f(u)$ | $q(u)$ | $X$ |
|---|---|---|
| $I.$ $f = h = 1,\ g = u^{-\frac{4}{3}}$ | 1. $q = 0$ | $X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x},\ X_5 = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3}{2}\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ $X_6 = y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial u},\ X_7 = y^2\frac{\partial}{\partial y} - 3yu\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_8 = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\alpha}{3}y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_6,\ X_7$ |
| | 4. $q = \delta u^\gamma$ $(\gamma \neq -\frac{1}{3}, 1)$ | $X_1, \ldots, X_4,$ $X_9 = \alpha(1-\gamma)x\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\left(\gamma + \frac{1}{3}\right)y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha(1-\gamma)z\frac{\partial}{\partial z} + 2(1-\gamma)t\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 5. $q = u^{-\frac{1}{3}}$ | $X_1, \ldots, X_5,\ X_{10} = 2e^{\omega y}\frac{\partial}{\partial y} - 3\omega e^{\omega y}u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{11} = 2e^{-\omega y}\frac{\partial}{\partial y} + 3\omega e^{-\omega y}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 6. $q = u^{-\frac{1}{3}} + \beta u$ | $X_1, \ldots, X_4,\ , X_{10}\ , X_{11}$ |
| | 7. $q = -u^{-\frac{1}{3}}$ | $X_1, \ldots, X_5,\ X_{12} = \cos(\omega y)\frac{\partial}{\partial y} - 3\omega\sin(\omega y)u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{13} = 2\sin(\omega y)\frac{\partial}{\partial y} - \cos(\omega y)u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 8. $q = -u^{-\frac{1}{3}} + \beta u$ | $X_1, \ldots, X_4,\ , X_{12}\ , X_{13}$ |
| $II.$ $f = h = 1,\ g = u^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}$ | 1. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_{14} = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t},\ X_{15} = \alpha y\frac{\partial}{\partial y} - (\alpha - 1)u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta u^\gamma$ $\left(\gamma \neq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$ | $X_1, \ldots, X_4,$ $X_{16} = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{[1-\gamma+\alpha(1+\gamma)]}{(1-\gamma)(1-\alpha)}\alpha y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\alpha}{1-\gamma}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_{17} = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha - 1)u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $III.$ $f = h = u^a,\ g = u^b$ $\left(a \neq 0, \pm 1, \frac{-4}{3}, \frac{2\alpha}{1-\alpha}, b\right)$ | 1. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_{14},\ X_{18} = ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y} + az\frac{\partial}{\partial z} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta u^\gamma$ $\left(\gamma \neq a+1, , \frac{-1}{3}\right)$ | $X_1, \ldots, X_4,$ $X_{19} = \alpha(a+1-\gamma)x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(b+1-\gamma)y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha(a+1-\gamma)z\frac{\partial}{\partial z} + 2(1-\gamma)t\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u^{a+1}$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_{20} = \alpha(a-b)y\frac{\partial}{\partial y} + 2at\frac{\partial}{\partial t} - 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 4. $q = \delta u^{b+1}$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X'_{20} = \alpha(b-a)x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(b-a)z\frac{\partial}{\partial z} + 2at\frac{\partial}{\partial t} - 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 5. $q = \delta u^{-\frac{1}{3}}$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_{21} = \alpha\left(a + \frac{4}{3}\right)x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\left(b + \frac{4}{3}\right)y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha\left(a + \frac{4}{3}\right)z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{8}{3}t\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $IV.$ $f = h = u^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}},\ g = 1$ | 1. $q = 0$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_{14},\ X_{22} = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + (1-\alpha)u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 2. $q = \delta u^\gamma$ $\left(\gamma \neq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$ | $X_1, \ldots, X_4,$ $X_{23} = \frac{[1-\gamma+\alpha(1+\gamma)]}{(1-\gamma)(1-\alpha)}\alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{[1-\gamma+\alpha(1+\gamma)]}{(1-\gamma)(1-\alpha)}\alpha z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\alpha}{1-\gamma}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ | $X_1, \ldots, X_4,\ X_{24} = \alpha y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha - 1)u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $V.$ $f = h = u^{-1},\ g = 1$ | 1. $q = 0$ | $X_2,\ X_{25} = \alpha y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{26} = A(x,z)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,z)\frac{\partial}{\partial z} - 2A_x u\frac{\partial}{\partial u}$ $A(x,z)$ و $B(x,z)$ توابع دلخواه به‌طوری‌که $A_{xx} - A_{zz} = 0,\ A_x - B_z = 0,\ A_z + B_x = 0.$ |
| | 2. $q = \delta u^\gamma$ | $X_1, \ldots, X_4\,; X_{27} = \alpha\gamma x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(\gamma - 1)y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha\gamma z\frac{\partial}{\partial z} + 2(\gamma - 1)t\frac{\partial}{\partial t} - 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | 3. $q = \delta u$ | $X_2,\ X_{26},$ $A(x,z)$ و $B(x,z)$ توابع دلخواه به‌طوری‌که $A_{xx} - A_{zz} = 0,\ A_x - B_z = 0,\ A_z + B_x = 0$ |
| | 3. $q = \delta$ | $X_2,\ X_{25},\ X_{26},$ $A(x,z)$ و $B(x,z)$ توابع دلخواه به‌طوری‌که $A_{xx} + A_{zz} - \delta A_x = 0,\ A_x - B_z = 0,\ A_z + B_x = 0$ |
| | 4. $q = \pm u^{\frac{-1}{3}}$ | $X_1, \ldots, X_4\ X_{28} = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 4\alpha y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + 8t\frac{\partial}{\partial t} + 6\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |

جدول ۶.۷: رده‌بندی گروه معادله (۲.۷)، حالت سوم: همسانگرد $f = g = h$ $(\delta = \pm 1,\ \gamma \in \mathbb{R})$

| $f(u)$ | $q(u)$ | $X$ |
|---|---|---|
| $I.$ $f=1$ | $1.\ q=0$ | $X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},\ X_5 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x},\ X_6 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y},$ $X_7 = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t},\ X_8 = u\frac{\partial}{\partial u},\ X_\infty = g(x,y,z,t)\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | $2.\ q=\delta$ | $X_1,\dots,X_6,\ X_\infty,$ $X_9 = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\delta}{\Gamma(1+\alpha)}t^\alpha\frac{\partial}{\partial u},\ X_{10} = \left(u - \frac{2\delta}{\Gamma(1+\alpha)}t^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | $3.\ q=\delta u+\chi$ $\chi=\pm 1$ | $X_1,\dots,X_6,\ X_\infty,$ $X_{11} = \left[u - \chi t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\delta t^\alpha)\right]\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | $4.\ q=\delta u^\gamma$ $(\gamma\neq 0,1)$ | $X_1,\dots,X_6,$ $X_{12} = \alpha(1-\gamma)x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(1-\gamma)y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha(1-\gamma)z\frac{\partial}{\partial z} + 2(1-\gamma)t\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $II.$ $f=u^\sigma$ $\left(\sigma\neq 0, \frac{-4}{5}, \frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)$ | $1.\ q=0$ | $X_1,\dots,X_6,\ X_{13} = \sigma x\frac{\partial}{\partial x} + \sigma y\frac{\partial}{\partial y} + \sigma z\frac{\partial}{\partial z} + 2u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{14} = \sigma t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | $2.\ q=\delta u^\gamma$ $(\gamma\neq\sigma+1)$ | $X_1,\dots,X_6,$ $X_{15} = \alpha(\sigma+1-\gamma)x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(\sigma+1-\gamma)y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha(\sigma+1-\gamma)z\frac{\partial}{\partial z} + 2(1-\gamma)t\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | $3.\ q=\delta u^{\sigma+1}$ | $X_1,\dots,X_6,\ X_{14}$ |
| $III.$ $f=u^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$ | $1.\ q=0$ | $X_1,\dots,X_7,\ X_{16} = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} - (\alpha-1)u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{17} = t^2\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha-1)tu\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | $2.\ q=\delta u^\gamma$ $\left(\gamma\neq\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$ | $X_1,\dots,X_6,$ $X_{18} = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2(1-\gamma)(1-\alpha)}{[1-\gamma+\alpha(1+\gamma)]}t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\alpha(1-\alpha)}{1-\gamma+\alpha(1+\gamma)}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | $3.\ q=\delta u^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ | $X_1,\dots,X_6,\ X_{17},\ X_{19} = 2t\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha-1)u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| $IV.$ $f=u^{-\frac{4}{5}}$ | $1.\ q=0$ | $X_1,\dots,X_6,\ X_{20} = 4t\frac{\partial}{\partial t} + 5\alpha u\frac{\partial}{\partial u},\ X_{21} = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z} - 5u\frac{\partial}{\partial u},$ $X_{22} = (x^2-y^2-z^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xz\frac{\partial}{\partial z} - 5xu\frac{\partial}{\partial u}$ $X_{23} = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2-x^2-z^2)\frac{\partial}{\partial y} + 2yz\frac{\partial}{\partial z} - 5yu\frac{\partial}{\partial u},\ X_{24} = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2-x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial z} - 5zu\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | $2.\ q=\delta u$ | $X_1,\dots,X_6,\ X_{22},\ X_{23}, X_{24}$ |
| | $3.\ q=\delta u^\gamma$ $(\gamma\neq -\frac{1}{3},1)$ | $X_1,\dots,X_6,$ $X_{25} = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{10(1-\gamma)}{(1-5\gamma)}t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{10\alpha}{1-5\gamma}u\frac{\partial}{\partial u}$ |
| | $4.\ q=\pm u^{\frac{1}{5}}+\chi u$ | $X_1,\dots X_6$ |

**مثال ۱.۴.۷.** معادله (۲.۷) با ضرایب توانی $q(u)=\delta u^{\gamma}$ و $f(u)=u^{a},\ g(u)=u^{b},\ h(u)=u^{c}$ در نظر بگیرید. از بخش (I.۲) در جدول ۶.۷ مشاهده می‌شود که معادله (۲.۷) تحت فرضیات فوق، تقارن تجانس به صورت

$$\begin{aligned}\mathrm{X}&=\alpha\left(a+1-\gamma\right)x\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\left(b+1-\gamma\right)y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha\left(c+1-\gamma\right)z\frac{\partial}{\partial z}\\&+2\left(1-\gamma\right)t\frac{\partial}{\partial t}+2\alpha u\frac{\partial}{\partial u},\end{aligned}$$

می‌پذیرد. معادلات مشخصه نظیر X به صورت

$$\frac{dx}{(a+1-\gamma)\,x}=\frac{dy}{(b+1-\gamma)\,y}=\frac{dz}{(c+1-\gamma)\,z}=\frac{\alpha dt}{2\,(1-\gamma)\,t}=\frac{du}{2u},$$

می‌باشند. با انتگرال‌گیری از معادلات مذکور، جواب‌های ناوردای زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}&\xi=xt^{-\frac{\alpha(a+1-\gamma)}{2(1-\gamma)}},\quad \phi=yt^{-\frac{\alpha(b+1-\gamma)}{2(1-\gamma)}},\quad \psi=zt^{-\frac{\alpha(c+1-\gamma)}{2(1-\gamma)}},\\&V\left(\xi,\phi,\psi\right)=u\left(x,y,z\right)t^{-\frac{\alpha}{1-\gamma}}.\end{aligned}\tag{۲۷.۷}$$

قضیه زیر صورت کاهش‌یافته معادله انتقال حرارت مرتبه کسری (۲ + ۱)ـ بعدی را فراهم می‌کند.

**قضیه ۱.۴.۷.** تبدیلات متشابه (۲۷.۷) معادله (۲.۷) به معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری (۲ + ۱)ـ بعدی زیر کاهش می‌دهد:

$$\begin{aligned}&\left(P^{1+\alpha\gamma/1-\gamma,\alpha}_{-\frac{1}{\sigma_1},-\frac{1}{\sigma_2},-\frac{1}{\sigma_3}}V\right)(\xi,\phi,\psi)-aV^{a-1}V_{\xi}^{2}-bV^{b-1}V_{\phi}^{2}-cV^{c-1}V_{\psi}^{2}-V^{a}V_{\xi\xi}\\&-V^{b}V_{\phi\phi}-V^{c}V_{\psi\psi}-\delta V^{\gamma}=0,\end{aligned}\tag{۲۸.۷}$$

که در آن $\left(P^{1+\alpha\gamma/1-\gamma,\alpha}_{-1/\sigma_1,-1/\sigma_2,-1/\sigma_3}V\right)$ عملگر مشتق کسری اردلی‌ـ کوبر چپ تعمیم‌یافته (۶.۴.۱) با پارامترهای

$$\sigma_1=\frac{\alpha\left(a+1-\gamma\right)}{2\left(1-\gamma\right)},\quad \sigma_2=\frac{\alpha\left(b+1-\gamma\right)}{2\left(1-\gamma\right)},\quad \sigma_3=\frac{\alpha\left(c+1-\gamma\right)}{2\left(1-\gamma\right)}.$$

است.

***برهان.*** فرض بگیرید $n-1<\alpha<n,(n=1,2,3,\ldots)$، در این‌صورت، مشتق کسری ریمن‌ـ لیوویل برای تبدیل متشابه (۲۷.۷) نسبت به متغیر $t$ به‌صورت زیر است

$$D_t^{\alpha}u=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{\tau^{\alpha/(1-\gamma)}V\left(x\tau^{\sigma_1},y\tau^{\sigma_2},z\tau^{\sigma_3}\right)}{(t-\tau)^{-\alpha}}d\tau\right].$$

فرض بگیرید $s=t/\tau$، در نتیجه $d\tau=-(t/s^2)ds$. از این رو معادله فوق به‌صورت زیر نیز قابل بیان است

$$\begin{aligned}D_t^{\alpha}u&=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{t^{1-\alpha+\alpha/(1-\gamma)}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_1^{\infty}s^{\alpha-2-\alpha/(1-\gamma)}\frac{V\left(\xi s^{-\sigma_1},\phi s^{-\sigma_2},\psi s^{-\sigma_3}\right)}{(s-1)^{\alpha}}ds\right],\\&=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{\alpha\gamma/(1-\gamma)}\left(K^{1+\alpha/(1-\gamma),n-\alpha}_{-1/\sigma_1,-1/\sigma_2,-1/\sigma_3}V\right)(\xi,\phi,\psi)\right].\end{aligned}\tag{۲۹.۷}$$

به‌منظور ساده کردن سمت راست از معادله‌ی (۲۹.۷)، از ناوردا $(\xi = xt^{-\sigma_1}, \phi = yt^{-\sigma_2}, \psi = zt^{-\sigma_3})$ داریم

$$t\frac{\partial}{\partial t}V(\xi,\phi,\psi) = \sigma_1\xi V_\xi + \sigma_2\phi V_\phi + \sigma_3\psi V_\psi.$$

بنابراین تساوی زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha u &= t^{\frac{\alpha\gamma}{(1-\gamma)}}\left(1-\frac{\alpha\gamma}{(1-\gamma)}+\sigma_1\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\sigma_2\phi\frac{\partial}{\partial\phi}+\sigma_3\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\\
&\times\left(K^{1+\frac{\alpha}{(1-\gamma)},n-\alpha}_{-\frac{1}{\sigma_1},-\frac{1}{\sigma_2},-\frac{1}{\sigma_3}}V\right)(\xi,\phi,\psi),\\
&\vdots\\
&= t^{\frac{\alpha\gamma}{(1-\gamma)}}\left(P^{1+\frac{\alpha\gamma}{1-\gamma},\alpha}_{-\frac{1}{\sigma_1},-\frac{1}{\sigma_2},-\frac{1}{\sigma_3}}V\right)(\xi,\phi,\psi).
\end{aligned} \tag{۳۰.۷}$$

لذا عبارت (۳۰.۷) به ازای $n-1<\alpha\leq n$ برقرار است. اکنون جایگذاری (۳۰.۷) در معادله انتشار ناهمسانگرد غیرخطی (۲.۷) با فرضیات مذکور، اثبات را کامل می‌کند. □

**مثال ۲.۴.۷.** معادله انتشار (۲.۷) با انتخاب $f(u) = u^\sigma\ (\sigma\neq 0, -4/5, 2\alpha/(1-\alpha))$ و $q(u) = \delta u^{\sigma+1}$ داری تقارن

$$\mathrm{X} = \sigma t\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha-1)u\frac{\partial}{\partial u},$$

است (بخش $III.4$ در جدول ۶.۷). ناورداهای نظیر این تقارن به صورت $u = t^{-\alpha/\sigma}V(x,y,z)$، معادله (۲.۷) را به $PDE$ غیرکسری زیر کاهش می‌دهند

$$(V_{xx}+V_{yy}+V_{zz})V^\sigma + \sigma\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right)V^{\sigma-1} + \delta V^{\sigma+1} - \lambda V = 0,$$

که در آن

$$\lambda = \frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\sigma}-\alpha\right)}.$$

**مثال ۳.۴.۷.** معادله انتشار (۲.۷) در حالتی که $f(u) = u^{2\alpha/(1-\alpha)}$ و $q(u) = 0$ اختیار شود، تقارن

$$\mathrm{X} = t^2\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha-1)tu\frac{\partial}{\partial u},$$

می‌پذیرد ( بخش $III.4$ در جدول ۶.۷ ). جواب ناوردا تحت گروه تبدیلات با مولد فوق به صورت زیر است

$$u = t^{\alpha-1}V(x,y,z),$$

که تابع $V(x,y,z)$ در $PDE$

$$(V_{xx}+V_{yy}+V_{zz})V + \frac{2\alpha}{1-\alpha}\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right) = 0,$$

صدق می‌کند.

**مثال ۴.۴.۷.** یک صورت کاهش‌یافته معادله (۲.۷) توسط گروه نامتناهی صورت می‌پذیرد. بدین منظور، معادله (۲.۷) به‌صورت

$$D_t^{\alpha} u = \left(\frac{u_x}{u}\right)_x + (u_y)_y + \left(\frac{u_z}{u}\right)_z + \delta u \tag{۳۱.۷}$$

با انتخاب $f(u) = h(u) = u^{-1}, g(u) = 1$ و $q(u) = \delta u$ درنظر بگیرید. در این‌صورت معادله (۳۱.۷) (طبق حالت $V.3$ در جدول ۵.۷) دارای تقارنی به‌صورت

$$\mathrm{X}_{\infty} = A(x,z)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,z)\frac{\partial}{\partial z} - 2A_x u \frac{\partial}{\partial u}$$

است که توابع دلخواه $A(x,z)$ و $B(x,z)$ جواب‌هایی از دستگاه کوشی–ریمن

$$A_{xx} + A_{zz} = 0,\ \ A_x - B_z = 0,\ \ A_z + B_x = 0,$$

هستند. یک جواب این دستگاه به صورت زیر است:

$$A(x,z) = e^x \cos z, \qquad B(x,z) = e^x \sin z.$$

بنابراین متغیرهای متشابه نظیر مولد بی‌نهایت کوچک نامتناهی $\mathrm{X}_{\infty}$ با حل معادلات مشخصه

$$\frac{dx}{e^x \cos z} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{e^x \sin z} = \frac{\alpha dt}{0} = \frac{du}{-2ue^x \cos z},$$

به صورت

$$\xi = e^{-x}\sin z, \qquad \varphi = y, \qquad \tau = t, \qquad V(\varphi, \xi, \tau) = e^{2x} u(x,y,z,t),$$

نتیجه می‌شود که تابع $V$ جوابی از معادله زیر است:

$$D_{\tau}^{\alpha} V = \frac{V_{\xi\xi}}{V} - \frac{V_{\xi}^2}{V^2} + V_{\varphi\varphi} + \delta V.$$

**مثال ۵.۴.۷.** معادله انتشار (۲.۷) با انتخاب $f(u) = h(u) = 1, g(u) = u^{-4/3}$ و $q(u) = \delta u^{-1/3}$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$D_t^{\alpha} u = u_{xx} - \frac{-4}{3} u^{-\frac{7}{3}} u_y^2 + u^{-\frac{4}{3}} u_{yy} + u_{zz} + \delta u^{-\frac{1}{3}}, \tag{۳۲.۷}$$

و تقارن

$$\mathrm{X} = 2e^{\omega y}\frac{\partial}{\partial y} - 3\omega e^{\omega y} u \frac{\partial}{\partial u},$$

( طبق حالت $I.5$) در جدول ۵.۷ می‌پذیرد فرض می‌کنیم $\delta = 1$ و در نتیجه $\omega = 2/\sqrt{3}$. ناورداهای متناظر به صورت زیر هستند

$$u = e^{-\frac{3}{2}\omega y} V(x,z,t).$$

با جایگذاری ناورداهای فوق، معادله انتشار غیرخطی (۳۲.۷) برای $\delta = 1$ به $PDE$ کسری خطی زیر کاهش می‌یابد

$$D_t^{\alpha} V = V_{xx} + V_{zz}.$$

## ۵.۷ قوانین پایستگی

در فصل پنج روشی مؤثر برای ساختن قوانین پایستگی نظیر انواع معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه کسری ارائه دادیم. برای یافتن مؤلفه‌های پایستگی با استفاده از تقارن‌ها کافیست عملگرهای نوتری که در این فصل فرمول صریح آن محاسبه شد را بر روی لاگرانژی اعمال می‌کنیم در این بخش جهت سادگی و اختصار در محاسبات، معادله انتقال حرارت کسری در حالت یک‌ـبعدی و همگن درنظر می‌گیریم. معادله انتشار زمان‌ـکسری (۳.۷) در حالت همگن $q = 0$ به صورت

$$D_t^{\alpha}u = (f(u)u_x)_x, \qquad \alpha \in (0,2), \quad t \in (0,T]. \tag{۳۳.۷}$$

است. این معادله با در نظر گرفتن مشتق کسری ریمن‌ـلیوویل می‌تواند به صورت قانون پایستگی (۹.۴) به صورت:

$$C^t = D_t^{n-1}(I_t^{n-\alpha}u), \qquad C^x = -f(u)u_x, \quad n = 1, 2, \tag{۳۴.۷}$$

نوشته شود. در حالتی‌که مشتق معادله از نوع کاپوتو است می‌تواند به فرم پایستگی زیر نوشته شود:

$$C^t = I^{n+1-\alpha}(D_t^n u), \qquad C^x = -f(u)u_x, \quad n = 1, 2.$$

معادله انتشار زمان کسری (۳۳.۷) درست همانند معادله انتشار کلاسیک یک معادله اویلرـ لاگرانژ نیست. این بدان معناست که معادله (۳۳.۷) نمی‌تواند از اصل تغییراتی با مینیمم سازی لاگرانژی وابسته به متغیرهای $x$ ، $t$ ، $u$ و هر مشتق و انتگرال مرتبه صحیح و یا کسری وابسته به $u$، نتیجه شود. پس معادله (۳۳.۷) دارای لاگرانژی به مفهوم کلاسیک آن نیست. لاگرانژی قراردادی برای معادله (۳۳.۷) به صورت زیراست:

$$L = v(x,t)[D_t^{\alpha}u - f'(u)u_x^2 - f(u)u_{xx}],$$

که در آن $v$ یک متغیر جدید است. عملگر اویلرـلاگرانژ $\frac{\delta}{\delta u}$ به صورت زیر است:

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (D_t^{\alpha})^* \frac{\partial}{\partial(D_t^{\alpha}u)} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

در رابطه فوق $(D_t^{\alpha})^*$ عملگر الحاقی از $(D_t^{\alpha}u)$ است. عملگر الحاقی برای هریک از عملگرهای مشتق ریمن‌ـلیوویل و کاپوتو به طور مجزا تعریف می‌شود. با این مقدمات، عملگر الحاقی برای حالت‌های مختلف مشتق در این معادله به صورت زیر هستند:

$$(D_t^{\alpha})^* = (-1)^n {}_tI_T^{n-\alpha}\left(D_t^n\right) \equiv {}_t^C D_T^{\alpha}, \quad \left({}_t^C D^{\alpha}\right)^* = (-1)^n D_t^n\left({}_tI_T^{n-\alpha}\right) \equiv {}_tD_T^{\alpha},$$

که در آن $n = [\alpha] + 1$ و ${}_tI_T^{n-\alpha}$ عملگر انتگرال کسری راست از مرتبه $n - \alpha$، عملگرهای ${}_t^C D_T^{\alpha}$ و ${}_tD_T^{\alpha}$ مشتق‌های کسری راست کاپوتو و ریمن‌ـلیوویل هستند. معادله الحاقی برای معادله

انتشار زمان‌ـ کسری به صورت زیر است:

$$(D_t^{\alpha})^* v - f(u)v_{xx} = 0, \quad n = [\alpha]+1, \quad \alpha \in (0,2). \tag{۳۵.۷}$$

همانطور که در فصل‌های قبل اشاره شد، معادله کسری (۳۳.۷) خودالحاق غیرخطی به شمار می‌رود هرگاه معادله الحاقی نظیر آن با جایگذاری $v = \varphi(x,t,u) \neq 0$ هم‌ارز با معادله کسری اولیه (۳۳.۷) شود. اگر چنین جایگذاری وجود داشته باشد، مؤلفه‌های بردار پایستگی نظیر تقارن

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

با فرمول صریح زیر داده می‌شوند

$$C^t = \mathcal{N}^t(\mathcal{L}), \quad C^x = \mathcal{N}^x(\mathcal{L}),$$

که عملگرهای نوتر $\mathcal{N}^x$ و $\mathcal{N}^t$ برای مشتق کسری ریمن‌ـ لیوویل به صورت

$$\mathcal{N}^x = \xi\mathcal{I} + W\left(\frac{\partial}{\partial u_x} - D_x\frac{\partial}{\partial u_{xx}}\right) + D_x(W)\frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \tag{۳۶.۷}$$

$$\mathcal{N}^t = \tau\mathcal{I} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k D_t^{\alpha-1-k}(W)\, D_t^k\frac{\partial}{\partial(D_t^{\alpha}u)} - (-1)^n J\left\{W, D_t^n\frac{\partial}{\partial(D_t^{\alpha}u)}\right\}; \tag{۳۷.۷}$$

برای مشتق کسری کاپوتو، عملگر $\mathcal{N}^t$ به صورت

$$\mathcal{N}^t = \tau\mathcal{I} + \sum_{k=0}^{n-1} D_t^k(W)_t\, D_T^{\alpha-1-k}\frac{\partial}{\partial({}^C D_t^{\alpha}u)} - J\left\{D_t^n(W), \frac{\partial}{\partial({}^C D_t^{\alpha}u)}\right\} \tag{۳۸.۷}$$

با انتگرال

$$J\{f,g\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\int_t^T \frac{f(s,x)\,g(r,x)}{(r-s)^{\alpha+1-n}}drds,$$

تعریف می‌شود و در رابطه زیر صادق است

$$D_t J\{f,g\} = f_t I_T^{n-\alpha}g - g I_t^{n-\alpha}f.$$

اکنون محاسبات را با کلی‌ترین حالت معادله (۳۳.۷) برای تابع دلخواه $f(u)$ با مشتق کسری ریمن‌ـ لیوویل و کاپوتو آغاز می‌کنیم. برای $\alpha \in (0,2)$ معادله (۳۳.۷) یک جبرلی دوبعدی از تقارن‌های زیر می‌پذیرد:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}. \tag{۳۹.۷}$$

تعمیمی از جبر در حالات زیر پدیدار می‌شود.

هرگاه $f(u) = u^{\beta}\,(\beta \neq 0)$ و $\alpha \in (0,2)$ تقارن اضافی زیر حاصل می‌شود

$$X_3^{(1)} = \beta x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

در حالتی که $\beta=-4/3\left(f\left(u\right)=u^{-4/3}\right)$ تقارن افزوده زیر وجود خواهد داشت

$$X_4^{(1)}=x^2\frac{\partial}{\partial x}-3xu\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (۴۰.۷)$$

همچنین، برای مشتق کسری ریمن–لیوویل با انتخاب $\beta=-2\alpha/\left(\alpha-1\right)$ و $\alpha\in\left(0,2\right)$ معادله (۳۳.۷) عملگر زیر را می‌پذیرد

$$X_4^{(2)}=t^2\frac{\partial}{\partial t}+\left(\alpha-1\right)tu\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (۴۱.۷)$$

در نهایت برای مشتق کسری کاپوتو و $f\left(u\right)=e^u,\ \alpha\in\left(0,2\right)$ معادله (۳۳.۷) تقارن زیر را خواهد داشت

$$X_3^{(2)}=x\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (۴۲.۷)$$

در حالتی که $f=f\left(u\right)$، معادله الحاقی (۳۵.۷) وابسته به متغیر $u$ است. اگرچه، این معادله جوابی مستقل از $u$ خواهد داشت به عبارت دیگر شرط خودالحاقی غیرخطی از معادله (۳۳.۷) برقرار است. در صورتی که مشتق کسری ریمن–لیوویل را به کار می‌بریم، معادله الحاقی متناظر (۳۵.۷) شامل مشتق کسری کاپوتو راست است و جواب معادله الحاقی مستقل از متغیر $u$ دارای صورت زیر است:

$$v\left(x,t\right)=\begin{cases} c_1+c_2x, & \alpha\in\left(0,1\right); \\ c_1+c_2x+\left(c_3+c_4x\right)t, & \alpha\in\left(1,2\right) \end{cases} \qquad (۴۳.۷)$$

که ثابت‌های $c_i\left(i=1,2,3,4\right)$ دلخواه هستند.

برای مشتق کسری کاپوتو، معادله الحاقی (۳۵.۷) شامل مشتق کسری ریمن–لیوویل راست است. در این‌صورت جواب معادله الحاقی مستقل از متغیر $u$ دارای صورت زیر است:

$$v\left(x,t\right)=\begin{cases} \left(T-t\right)^{\alpha-1}\left(c_1+c_2x\right), & \alpha\in\left(0,1\right); \\ \left(T-t\right)^{\alpha-1}\left[c_1+c_2x+\left(c_3+c_4x\right)t\right], & \alpha\in\left(1,2\right) \end{cases} \qquad (۴۴.۷)$$

ثابت‌های $c_i\left(i=1,2,3,4\right)$ دلخواه هستند.

وجود جواب‌های (۴۳.۷) و (۴۴.۷) به این معنی است که معادله انتشار (۳۳.۷) خودالحاق غیرخطی است. اکنون با جایگذاری این جواب‌ها در لاگرانژی قراردادی، قوانین پایستگی مربوطه را محاسبه می‌کنیم. بدین منظور، معادله (۳۳.۷) را با مشتق کسری ریمن – لیوویل در نظر می‌گیریم. مؤلفه‌های پایستگی غیربدیهی جدید را با به کارگیری عملگرهای نوتری (۳۶.۷) با تابع $v\left(x,t\right)$ از (۴۳.۷) و تقارن‌های (۳۹.۷)–(۴۱.۷) برای حالت زیرانتشار ($\alpha\in\left(0,1\right)$) می‌یابیم، تنها بردار پایستگی غیربدیهی جدید نظیر معادله (۳۳.۷) دارای مؤلفه‌های زیر است

$$C^t=xI_t^{1-\alpha}u,\qquad C^x=F\left(u\right)-xf\left(u\right)u_x, \qquad (۴۵.۷)$$

به قسمی‌که $F'(u) = f(u)$. لازم به ذکر است که عملگر $X_1$ بردار پایستگی بدیهی نظیر $c_1$ ایجاد می‌کند. عملگرهای $X_2$ و $X_3$ نظیر ثابت $c_1$ بردار پایستگی به صورت (۳۴.۷) و برای ثابت $c_2$ به صورت (۴۵.۷) را نتیجه می‌دهند. عملگر $X_4^{(1)}$ برای ثابت $c_1$ بردار پایستگی (۴۵.۷) و نظیر $c_2$ بردارپایستگی بدیهی می‌سازد.

در حالتی که $f(u) = u^{2\alpha/1-\alpha}$ دو بردار پایستگی جدید نظیر تقارن (۴۰.۷) برای ثابت‌های $c_1$ (۴۶.۷) و $c_2$ (۴۷.۷) یافت می‌شود

$$C^t = tI_t^{1-\alpha}u - I_t^{2-\alpha}u, \qquad C^x = -tu^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}u_x, \tag{۴۶.۷}$$

$$C^t = x\left(tI_t^{1-\alpha}u - I_t^{2-\alpha}u\right), \qquad C^x = -tu^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}u - xu_x\right). \tag{۴۷.۷}$$

مؤلفه‌های بردار پایستگی برای معادله انتشار موج با مشتق کسری ریمن‌ـلیوویل در جدول ۷.۷ حاضر شده است. خاطر نشان می‌کنیم که اولین بردار پایستگی در جدول ۷.۷ همان بردار پایستگی (۳۴.۷) است. اکنون معادله (۳۳.۷) را با مشتق کسری کاپوتو در نظر می‌گیریم. به

جدول ۷.۷: بردارهای پایستگی نظیر معادله انتشار موج با مشتق کسری ریمن‌ـلیوویل

| شماره | شار | چگالی |
|---|---|---|
| 1. | $C^x = -k(u)u_x$ | $C^t = D_t^{\alpha-1}u$ |
| 2. | $C^x = -tk(u)u_x$ | $C^t = tD_t^{\alpha-1}u - I_t^{2-\alpha}u$ |
| 3. | $C^x = K(u) - xk(u)u_x$ | $C^t = xD_t^{\alpha-1}u$ |
| 4. | $C^x = -tK(u) - txk(u)u_x$ | $C^t = txD_t^{\alpha-1}u - xI_t^{2-\alpha}u$ |
| 5. | $C^x = -t^2k(u)u_x$ | $C^t = t^2D_t^{\alpha-1}u - 2tI_t^{2-\alpha}u + 2xI_t^{3-\alpha}u$ |
| 6. | $C^x = t^2K(u) - t^2xk(u)u_x$ | $C^t = t^2xD_t^{\alpha-1}u - 2txI_t^{2-\alpha}u + 2xI_t^{2-\alpha}u$ |

طور مشابه، مؤلفه‌های پایستگی غیربدیهی جدید را با به کارگیری عملگرهای نوتری (۳۸.۷) با تابع $v(x,t)$ از (۴۴.۷) و تقارن‌های (۳۹.۷)ـ(۴۲.۷) می‌یابیم. چهار قانون پایستگی جدید برای معادله زیر انتشار با مشتق کسری کاپوتو یافت می‌شود که در جدول ۸.۷ آورده شده است. تابع $\Phi(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi(t) = \frac{1}{\alpha\Gamma(1-\alpha)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha}{}_2F_1\left(\alpha, \alpha; \alpha+1; 1-\frac{t}{T}\right),$$

که در آن ${}_2F_1(,;;)$ تابع فوق هندسی گاوس است و برحسب سری‌های توانی

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, \qquad |z|<1,$$

نوشته می‌شود. در فرمول فوق منظور از $(q)_n$ نماد پاچهمر یا فاکتوریل صعودی است و بدین

صورت تعریف می‌شود:

$$(q)_n = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ \dfrac{\Gamma(q+n)}{\Gamma(n)} & n > 0. \end{cases}$$

شش قانون پایستگی جدید برای معادله انتشار موج غیرخطی با مشتق کسری کاپوتو یافت

جدول ۸.۷: بردارهای پایستگی نظیر معادله زیر انتشار با مشتق کسری کاپوتو

| شماره | شار | چگالی |
|---|---|---|
| 1. | $C^x = -(T-t)^{\alpha-1} k(u) u_x$ | $C^t = u(0,x)\Phi(t) + (T-t)^{\alpha} I_t^{1-\alpha}\left(\frac{u}{T-t}\right)$ |
| 2. | $C^x = -(T-t)^{\alpha-2} k(u) u_x$ | $C^t = (T-t)^{\alpha-1} I_t^{2-\alpha}\left(\frac{u_t}{T-t}\right)$ |
| 3. | $C^x = (T-t)^{\alpha-1}[K(u) - xk(u)u_x]$ | $C^t = xu(0,x)\Phi(t) + x(T-t)^{\alpha} I_t^{1-\alpha}\left(\frac{u}{T-t}\right)$ |
| 4. | $C^x = (T-t)^{\alpha-2}[K(u) - xk(u)u_x]$ | $C^t = x(T-t)^{\alpha-1} I_t^{2-\alpha}\left(\frac{u_t}{T-t}\right)$ |

شده که در جدول ۹.۷ ارائه شده است. همچنین مفاهیم زیر در جدول ۹.۷ استفاده شده است.

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(2-\alpha)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha-1,\alpha-1;\alpha;1-\frac{t}{T}\right), \\
\Psi(t) &= \frac{1}{\alpha\Gamma(2-\alpha)}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha} {}_2F_1\left(\alpha-1,\alpha;\alpha+1;1-\frac{t}{T}\right), \\
\left({}^F I_t^{2-\alpha} f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t \frac{f(t)}{(t-s)^{\alpha-1}} {}_2F_1\left(1,1;2-\alpha;\frac{t-s}{T-s}\right) ds,
\end{aligned}$$

جدول ۹.۷: بردارهای پایستگی نظیر معادله انتشار موج با مشتق کسری کاپوتو

| شماره | شار | چگالی |
|---|---|---|
| 1. | $C^x = -(T-t)^{\alpha-3} k(u) u_x$ | $C^t = (T-t)^{\alpha-2} I_t^{3-\alpha}\left(\frac{u_{tt}}{T-t}\right)$ |
| 2. | $C^x = -(T-t)^{\alpha-2} k(u) u_x$ | $C^t = \Phi(t) u_t(0,x) + (T-t)^{\alpha-1} I_t^{2-\alpha}\left(\frac{u_t}{T-t}\right)$ |
| 3. | $C^x = -(T-t)^{\alpha-1} k(u) u_x$ | $C^t = \Psi(t) u_t(0,x) + (T-t)^{\alpha}\, {}^F I_t^{2-\alpha}\left(\frac{u_t}{T-t}\right)$ |
| 4. | $C^x = (T-t)^{\alpha-3}[K(u) - xk(u)u_x]$ | $C^t = x(T-t)^{\alpha-2} I_t^{3-\alpha}\left(\frac{u_{tt}}{T-t}\right)$ |
| 5. | $C^x = (T-t)^{\alpha-2}[K(u) - xk(u)u_x]$ | $C^t = \Phi(t) u_t(0,x) + x(T-t)^{\alpha-1} I_t^{2-\alpha}\left(\frac{u_t}{T-t}\right)$ |
| 6. | $C^x = (T-t)^{\alpha-1}[K(u) - xk(u)u_x]$ | $C^t = x\Psi(t) u_t(0,x) + x(T-t)^{\alpha}\, {}^F I_t^{2-\alpha}\left(\frac{u_t}{T-t}\right)$ |

# مراجع


[۱] حجازی سید رضا، (۱۳۹۰)، رساله دکتری "هندسهٔ برخوردی و تحلیل تقارنی معادلات دیفرانسیل"، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران.

[۲] رشیدی سعیده، (۱۳۹۷)، رساله دکتری "مطالعه هندسی معادلات دیفرانسیل انتگرال کسری"، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[3] Agrawal O. P. (2002), "Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems" **J. Math. Anal. Appl.**, 272(1), pp. 368-379.

[4] Agrawal O. P. (2010), "Generalized Variational Problems and Euler-Lagrange equations" **Comput. Math. Appl**, 59(5), pp. 1852-1864.

[5] Agrawal O. P., Muslih S. I. and Baleanu D. (2011), "Generalized variational calculus in terms of multiparameters fractional derivatives", **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat**, 16(12), pp. 4756–4767.

[6] Ahmad A., Ashfaque H. Bokhari, Kara A. H. and Zaman F. D. (2008), "Symmetry classifications and reductions of some classes of (2+1)-nonlinear heat equation" **J. Math. Annal. Appl.**, 339, pp. 175-181.

[7] Akhatov I. S., Gazizov R. K. and Ibragimov N. K. (1987), "Group classification of the equations of nonlinear filtration" **Soviet Math. Dokl**, 35(2), pp. 384-386.

[8] Atanackovic T. M., Konjik S., Pilipovic S. and Simic S. (2009), "Variational problems with fractional derivatives: Invariance conditions and N¨others theorem" **Nonlinear Anal.**, 71(5-6), pp. 1504-1517.

[9] Allen S. M. and Cahn J. W. (1979), "A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening",**Acta Metall**, 27, pp. 1085-1095.

[10] Anco S. C. and Bluman G. W. (1997), "Direct construction of conservation laws" **Phys. Rev. Lett.**, 78, pp. 2869-2873.

[11] Anco S. C. and Bluman G. W. (2002), "Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part I: Examples of conservation law classifications" **Eur. J. Appl. Math.**, 13, pp. 545-566.

[12] Baleanu D., Diethelm K., Scalas E. and Trujillo J. (2012), "**Fractional Calculus: Models and Numerical Methods**" World Scientific Publishing, Singapore, pp. 400.

[13] Bessel-Hagen E. (1921), "Uber die erhaltungssatze der elektrodynamik", **Math. Ann.**, 84, pp. 258-276.

[14] Bluman G. W. and Kumei S. (1989), " **Symmetry and Differential Equations**", Vol. 81, Applied Mathematical Sciences, Spriger-Verlag, New York. 1, pp. 413.

[15] Bluman G. W., Cheviakov A. F. and Anco S. C. (2010), " **Application of symmetry methods to partial differential equations**", Vol. 168, Springer, New York, Dordrecht Heudelberg London.

[16] Bluman G. W., Kumei S. and Reid G. J. (1988), "New classes of symmetries for partial differential equations", **J. Math. Phys.**, 29, pp. 806-811.

[17] Boussinesq J. (1872), "Thorie des Ondes et Des Remous Qui se Propagent le Long d'un Canal Rectangulaire Horizontal, en Communiquant au Liquidecontenudansce Canal des Uitessessensiblementpareilles de la Surface au Fond" **Journal deMathématiques Pures et Appliquées**, 17, pp. 55-158 .

[18] Bourdin L., Cresson, J. and Greff I. (2013), "A continuous/ discrete fractional Noethers theorem" **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.**, 18(4), pp. 878-887.

[19] Boyer T. H. (1967), "Continuous symmetries and conserved currents" **Ann. Phys**, 42, pp. 445-466.

[20] Buckwar E. and Luchko Y. (1998), "Invariance of a Partial Differential Equation of Fractional Order under the Lie Group of Scaling Transformations", **J. Math. Anal. Appl.**, 227, pp. 81-97.

[21] Caponetto R. (2010), ”Fractional order systems (Modelling and control applications)”, **World Scientific**.

[22] Caviglia G. (1986), ”Symmetry transformations, isovectors, and conservation laws”, **J. Math. Phys.**, 27, pp. 972-978.

[23] Cheviakov A. F. (2010), ”Computation of fluxes of conservation laws”, **Engineering Mathematics**, 66, pp. 153-173.

[24] Cheviakov A. F., Lee C. and Naz R. (2019). ”Radial waves in fiber-reinforced axially symmetric hyperelastic media” **arXiv preprint arXiv:1909.05627**.

[25] Cimpoiasu R. and Constantinescu R. (2008), ”Lie symmetries and invariants for 2D nonlinear heat equation” **Nonlinear Analysis**, 68, pp. 2261-2268.

[26] Diethelm k. (2010), ”**The analysis of fractional differential equations**”, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

[27] Djordjevic V. D. and Atanackovic T.M. (2008), ”Similarity solutions to nonlinear heat conduction and Burgers/Korteweg-deVries fractional equations”, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 222(2), pp. 701-714.

[28] Dorodnitsyn V. (1982), ”On invariant solutions of the equation of non-linear heat conduction with a source” **Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki**, 22(6), pp. 115-122.

[29] Erdélyi A. and Kober H. (1940), ”Some remarks on Hankel transforms” **The Quarterly Journal of Mathematics**, 11(1), pp. 212-221.

[30] Eslami M., Fathi Vajargah B., Mirzazadeh M. and Biswas A. (2014) ,”Application of first integral method to fractional partial differential equations” **Indian J. Phys.**, 88(2), pp. 177-184.

[31] Frederico G. S. F. and Torres D. F. M. (2007), ”A formulation of Noether’s theorem for fractional problems of the calculus of variations” **J. Math. Anal. Appl.**, 334(2), pp. 834-846.

[32] Freire I. L. (2013), ”New classes of nonlinearly self-adjoint evolution equations of third- and fifth-order” **Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.** 18, pp. 493-499.

[33] FitzHugh R. (1955), ”Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane” **Bullet. Math. Biol.**, 17, pp. 257-278.

[34] Gandarias M. L. (2015), ”Conservation laws for some equations that admit compacton solutions induced by a non-convex convection” **J. Math. Anal. Appl.**, 420, pp. 695-702.

[35] Galaktionov V. A. (1995), ”Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities” **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics**, 125(2), pp. 225-246.

[36] Galaktionov V. and Svirshchevskii S. ( 2007), ”**Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics**”, Chapman and Hall/CRC applied mathematics and nonlinearscience series.

[37] Gazizov R. K., Kasatkin A. A. and Lukashchuk S. Yu. (2007), ”Continuous transformation groups of fractional differential equations” **Vestnik Usatu**, 9(3), p. 21.

[38] Gazizov R. K., Kasatkin A. A. and Lukashchuk S. Yu. (2009), ” Symmetry properties of fractional diffusion equations” **Phys. Scr.**, 2009(T136), pp. 014016.

[39] Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. (2011), ”Group invariant solutions of fractional differential equations” **Nonlinear Science and Complexity**, pp. 51-58. Springer, Dordrecht.

[40] He. J. H. (1999), ”Homotopy perturbation technique” **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, 178(3), pp. 257-262.

[41] Hejazi S. R., Saberi E. and Mahdavi P. (2015), ”Lie Symmetry Method for Solutions of Differential Equations with Applications in Physics”. **Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi**, 36(3), pp. 2223-2233.

[42] Hejazi S. R., Saberi E. and Lashkarian E. (2019), ”Symmetry group, Hamiltonian equations and conservation laws of general three-dimensional anisotropic non-linear sourceless heat transfer equation” **Computational Methods for Differential Equations**, 7(1), pp. 54-68.

[43] Hejazi S. R. and Saberi E. (2019), ”Classification of the anisotropic non-linear time-fractional diffusion equations with a source term via Lie point symmetries” **Submitted to Communications in nonlinear science and numerical simulation**.

[44] Hereman W., Colagrosso M. , Sayers R. , Ringler A., Deconinck B. , Nivala M. and Hickman M. S. (2005), ” **Continuous and discrete homotopy operators and the computation of conservation laws.**”, Differential Equations with Symbolic Computation, Vol. 106, Springer, pp. 249-285 .

[45] Hereman W. (2006), ”Symbolic computation of conservation laws of non-linear partial differential equations in multi-dimensions” **Int. J. Quant. Chem.**, 106, pp. 278-299.

[46] Herzallah M. A. E. and Baleanu D. (2012), ”Fractional Euler- Lagrange equations revisited” **Nonlinear Dyn.** 69(3), pp. 977-982.

[47] Hirota R. and Satsuma J. (1981), ”Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation” **Phys. Lett, A**, 85, pp. 407-408.

[48] Ibragimov N.H., Torrisi M. and Valenti A. (1991), ”Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$” **Journal of Mathematical Physics**, 32(11), pp. 2988-2995.

[49] Ibragimov N. H. (1994), editor. ” **CRC Handbook of Lie group analysis ofdifferential equations: Symmetries, Exact solutions, and Conservation laws**”, Vol. 1, CRC Press Inc., Boca Raton.

[50] Ibragimov N. H. (1996), editor. ” **CRC Handbook of Lie group analysis ofdifferential equations**”, Vol. 3, CRC Press Inc., Boca Raton.

[51] Ibragimov N. H. (1999), ”**Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations**”, John Wiley & Sons, Chichester.

[52] Ibragimov N. H. (2004), ” Equivalence groups and invariants of linear and non-linear equations, **Archives of ALGA**, 1, pp. 9-96.

[53] Ibragimov N. H. (2007), ”A new conservation theorem” **J. Math. Anal. Appl.**, 333, pp. 311-328.

[54] Ibragimov N. H. (2010), ” **Archives of ALGA Volume 7/8**, ALGA Publications Karlskrona, Sweden.

[55] Ibragimov N. H.(2011), ”Nonlinear self-adjointness and conservation laws” **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, 44(43), p. 432002.

[56] Ibragimov N. kh and Avdonina E. D. (2013), ”Nonlinear self-adjointness, conservation laws, and the construction of solutions of partial differential equations using conservation laws” **Russ. Math. Surv.**, 68(5), pp. 889-921.

[57] Jefferson G. F. and Carminati J. (2014), ”FracSym: automated symbolic computation of Lie symmetries of fractional differential equations” **Comput. Phys. Commun**, 185, pp. 430-441.

[58] Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J. (2006) ”**Theory and applications of fractional differential equations**”, Vol. 204, Elsevier Science Limited.

[59] Kiryakova V. (1994), ”**Generalized Fractional Calculus and Applications**,” CRC press.

[60] Klafter J., Lim S. C. and Metzler R. (2011),” **Fractional Dynamics: Recent Advances.**” World Scientific, Singapore.

[61] Klages R., Radons G. and Sokolov I. M. eds. (2008), ”**Anomalous Transport: Foundations and Applications.**”, Wiley-VCH, Weinheim, Berlin.

[62] Kochubei A. N. (1989), ” The Cauchy problem for evolution equations of fractional order.” **Differentsial’nye Uravneniya**, 25(8), pp. 1359-1368.

[63] Kochubei A. N. (1990), ”Fractional-order diffusion” **Differential Equations**, 26(4), pp. 485-492.

[64] Kunzinger M. and Popovych R. O.(2008), ”Potential conservation laws”, **Journal of Mathematical Physics**, 49(10), pp. 103506.

[65] Landy A. (2009), PhD Thesis, ”Fractional differential equations and numerical methods”, University of Chester.

[66] Lashkarian E., Saberi E. and Hejazi S. R. (2016), ”Symmetry reductions and exact solutions for a class of nonlinear PDEs” **Asian-European Journal of Mathematics**, 9(3), pp. 1650061.

[67] Lashkarian E., Hejazi S. R. and Dastranj E. (2018), ”Conservation laws of $(3+\alpha)$-dimensional time-fractional diffusion equation”, **Computers & Mathematics with Applications**, 75(3), pp. 740-754.

[68] Lazo M. J. and Torres D. F. M. (2013), "The DuBois–Reymond fundamental lemma of the fractional calculus of variations and an Euler–Lagrange equation involving only derivatives of Caputo" **J. Optimiz. Theory and Appl.**, 156(1), pp. 56-67.

[69] Lee J. M. (2002), "**Introduction to Smooth Manifolds**", Springer, New York.

[70] Leo R. A., Sicuro G. and Tempesta P. (2014), "A theorem on the existence of symmetries of fractional PDEs" **Comptes Rendus Mathematique**, 352(3), pp. 219-222.

[71] Li Z. B. and Ji H.H. (2010), "Fractional complex transform for fractional differential equations" **Mathematical and Computational Applications**, 15.5, pp. 970-973.

[72] Lie S. (1884), "Über differentialinvarianten", **Mathematische Annalen**, 24 (4), pp. 537-578.

[73] Lisle I. (1992), PhD thesis, "Equivalence transformations for classes of differential equations" University of British Columbia.

[74] Long Z. X. and Zhang Y. (2014), "Fractional Noether Theorem Based on Extended Exponentially Fractional Integral" **Int. J. Theor. Phys**, 53(3), pp. 841-855.

[75] Luchko Yu. and Goreno Ru. (1998)," Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order," **Fractional Calculus & Applied Analysis**, 1(1), pp. 63-78.

[76] Luchko Yu. (2010), "Fractional diffusion and wave propagation", **Handbook of Geomathematics**, pp. 1-36.

[77] Luchko Yu. (2012), "Anomalous diffusion: models, their analysis, and interpretation" **Advances in Applied Analysis**, Birkhauser, Basel, pp. 115-145.

[78] Lukashchuk S. Y. and Makunin A. V. (2015), "Group classification of non- linear time-fractional diffusion equation with a source term" A**pplied Mathematics and Computation**, 257, pp. 335-343.

[79] Lukashchuk S. Y. (2016), "Symmetry reduction and invariant solutions for nonlinear fractional diffusion equation with a source term", **Ufa Mathematical Journal**, 8(4), pp. 111-122.

[80] Lunev F. A. (1990), ”An analogue of the Noether theorem for non-Noether and nonlocal symmetries” **translation in Theoret. and Math. Phys.**, 84(2), pp. 816-820.

[81] Ma W. X. (2012), ”A refined invariant subspace method and applications to evolution equations.” **Science China Mathematics**, 55, pp. 1769-1778.

[82] Mainardi F. (1996), ”The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation” **Appl. Math. Lett.**, 9(6), pp.23-28.

[83] Malinowska A.B. (2012), ”A formulation of the fractional Noether-type theorem for multidimensional Lagrangians” **Appl. Math. Lett.** , 25(11), pp. 1941-1946.

[84] Meerschaert M. and Sikorskii A. (2011) , ”**Stochastic Models for Fractional Calculus**”, Vol. 43, Walter de Gruyter.

[85] Metzler R. and Klafter J. (2000), ”The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach” **Phys. Rep.** 339 (1), pp. 1-77.

[86] Miller K. S and Ross B. (1993), ” **An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations**”, Wiley.

[87] Momani S. and Odibat Z. (2006), ”Analytical solution of a time-fractional Navier-Stokes equation by Adomian decomposition method”, **Applied Mathematics and Computation**, pp. 488-494.

[88] Momoniat E., Mason D. P. and Mahomed F. M. (2001), ”Non-linear diffusion of an axisymmetric thin liquid drop: group invariant solution and conservation law” **Int. J. Non-linear Mech.**, 36, pp. 879-885.

[89] Nadjafikhah M. and Bakhshandeh-Chamazkoti R. (2010), ”Preliminarily group classification of a class of 2D nonlinear heat equations”, **Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica B**, 125(12), pp. 1594-9982.

[90] Nagumo J., Arimoto S. and Yoshizawa S. (1962), ”An active pulse transmission line simulating nerve axon”, **Proc. IRE.**, 50(10), pp. 2061-2070.

[91] Newell A. C. and Whitehead J. A. (1969), ”Finite bandwidth, finite amplitude convection” **J. Fluid Meek**, 38, pp. 279-303.

[92] Noether E. (1918), "Invariante variationsproblem, Nachr. KoÈnig. Gesell. Wissen. GoÈttingen" **Math.-Phys Kl-1**.

[93] Odibat Z. and Momani S. (2008) "A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order" **Appl. Math. Lett.**, 21, pp. 194-199.

[94] Odzijewicz T., Malinowska A. B. and Torres D. F. M. (2013), "Noether's theorem for fractional variational problems of variable order" **Cent. Eur. J. Phys.**, 11(6), pp 691-701.

[95] Oldham K. and Spanier J. (1974), " **The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order**", Vol. 111, Elsevier, New York.

[96] Olver P. J. (1995), " **Equivalence, Invariant and Symmetry**", Cambridge University Press, Cambridge.

[97] Olver P. J. (2000)," **Applications of Lie Groups to Differential equations**", Vol. 107, Springer Science & Business Media, New York.

[98] Ovsiannikov L. V. (1958), "Groups and group invariant solutions of differential equations", **Dokl, Akad. Nauk**. USSR, 118, pp. 439-442.

[99] Ovsiannikov L. V. (1959), "The group properties of nonlinear heat conduction equations", **Dokl. Akad. Nauk.** SSSR 125(3), pp. 492-495 (in Russian).

[100] Ovsiannikov L. V. (1982), "**Group Analysis of Differential Equations**", Academic Press, New York.

[101] Ovsiannikov L. V. (2013)," **Lectures on the Theory of Group Properties of Differential Equations**", World Scientific.

[102] Podlubny I. (1999) " **Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications**", Vol. 198, Elsevier.

[103] Poole D. (2009), Ph.D thesis, " Symbolic computation of conservation laws of nonlinear partial differential equations using homotopy operators", Colorado School of Mines. Arthur Lakes Library, Golden, Colorado.

[104] Popovych R.O. and Ivanova N.M. (2004), "New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations" **J. Phys. A:Math. Gen.**, 37 (30), pp. 7547-7565.

[105] Riewe F. (1996), "Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics" **Phys. Rev. E.**, 53(2), pp. 1890-1899.

[106] Ross. B. editor ( 2006), "**Fractional Calculus and Its Applications: Proceedings of the International Conference Held at the University of New Haven, June 1974**", Vol. 457, Springer.

[107] Saberi E. and Hejazi S. R. (2018), "Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the time-fractional generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system" **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, 492, pp. 296-307.

[108] Saberi E., Hejazi S. R. and Dastranj E. (2018), "A new method for option pricing via time-fractional PDE" **Asian-European Journal of Mathematics**, 11(5), pp. 1850074.

[109] Saberi E., Hejazi S. R. and Motamednezhad A. (2019), "Lie symmetry analysis, conservation laws and similarity reductions of Newell-Whitehead-Segel equation of fractional order." **Journal of Geometry and Physics**, 135, pp. 116-128.

[110] Saberi, E. and Hejazi S. R. (2019), "A comparison of conservation laws of the Boussinesq system". **Kragujevac Journal of Mathematics**, 43(2), pp. 173-200.

[111] Sahadevan R. and Bakkyaraj T. (2012), "Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg-de Vries equations", **J. Math. Anal. Appl.**, 393, pp. 341-347.

[112] Samko S. G., Kilbas A. A. and Marichev O. I (1993), " **Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications**", Gordon and Breach, Longhorne, Pennsylvania.

[113] Schneider W.R. and Wyss W. (1989). "Fractional diffusion and wave equations." **Journal of Mathematical Physics**, 30(1), pp. 134-144.

[114] Svirshchevskii S. R. (1996), "Invariant linear spaces and exact solutions of nonlinear evolution equations.", **Journal of Nonlinear Mathematical Physics**, 3, pp. 164-169.

[115] Uchaikin V. and Sibatov R. (2013) "**Fractional kinetics in solids: Anomalous charge transport in semiconductors, dielectrics and nanosystems**", World Scientific, Singapore.

[116] Voigt A. (2001), "Asymptotic behavior of solutions to the Allen–Cahn equation in spherically symmetric domains", **Caesar Preprints**, pp. 1-8.

[117] Wang Q. (2007), "Homotopy perturbation method for fractional KdV equation", **Applied Mathematics and Computation**, 190, pp. 1795-1802.

[118] Wazwaz A. M. and Gorguis A. (2004), "An analytic study of Fisher's equation by using Adomian decomposition method", **Applied Mathematics and Computation** 154(3), pp. 609-620.

[119] Wu G. C. and Lee E. W. M. (2010), "Fractional variational iteration method and its application." **Phys. Lett. A** 374, pp. 2506-2509.

[120] Zhang Z.-Y. and Xie L. (2016) "Adjoint symmetry and conservation law of nonlinear diffusion equations with convection and source terms", **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, 32, pp. 301-313.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| اتحاد | identity |
| اساسی | fundamental |
| اکیدا خودالحاق | strictly self-adjoint |
| الاستیک | elastic |
| امتداد | prolongation |
| انتشار | diffusion |
| انتگرالده | integrand |
| انتگرال کسری | fractional integral |
| انتقال | translation |
| اندیس چندگانه | multi indices |
| اویلر– لاگرانژ | Euler-Lagrange |
| بدیهی | trivial |
| برخوردی | contact |
| بعد | dimension |
| پارامترهای مادی | material parameters |
| پایسته | conserved |
| پایه | basis |
| پتانسیل | potential |
| پوچ دیورژانس | null divergence |
| لاگرانژی پوچ | null Lagrangian |
| پیشرو | leading |
| پیوسته | continuos |
| تابعک | functional |
| تار | fiber |
| تبدیل | transformation |

تبدیل خودگردان ........ autonomous transformation
تبدیل هم‌ارز ........ equivalenc transformation
ترکیب خطی ........ linear combination
تقارن بی‌نهایت کوچک تعمیم‌یافته ........ generalized infinitesimal symmetry
تقارن پتانسیل ........ potential symmetry
تقارن تجانس ........ scaling symmetry
تقارن چندپارامتری ........ multi-parameter symmetry
تقارن غیرموضعی ........ nonlocal symmetry
تقارن لی ........ Lie symmetry
تقارن نقطه‌ای ........ point symmetry
تکاملی ........ evolution
توزیع کننده ........ diffusivity
جابجاگر ........ commutator
جبر لی ........ Lie algebra
جداسازی متغیرها ........ separation of variables
جرم ........ mass
جنبشی ........ kinetic
جواب‌های موج سیار ........ traveling wave solutions
جواب‌های متشابه ........ similarity solutions
چاهک ........ absorption
چگالی ........ density
حقیقی مقدار ........ real-valued
حل‌پذیر ........ solvable
خود الحاق ........ self-adjoint
درایه ........ entity
دستگاه فرامعین ........ overdetermined system
دو خطی ........ billinear
دیفرانسیل کامل ........ total differential
دلخواه ........ arbitrary
رتبه ماکسیمال ........ maximal rank
روش تجزیه آدومین ........ Adomian’s decomposition method
روش مستقیم ........ direct method

زیردستگاه ........ subsystem
ضریب ........ multiplier
سری تیلور ........ Taylor's series
سیال ........ fluid
شار ........ flow
شار ........ flux
شبه خود الحاق ........ quasi self-adjoint
شرایط ........ conditions
عامل انتگرال ........ integrating factor
عبارت دیورژانسی ........ divergence expression
عملگر الحاقی ........ adjoint operator
عملگر اویلر ........ Euler operator
عملگر خطی ........ linear operator
عملگر هموتوپی ........ homotopy operator
غیربدیهی ........ nontrivial
فراگیر ........ global
فرم ........ form
فضای برداری ........ vector space
فضای کل ........ total space
فضای جت ........ jet space
قراردادی ........ formal
قوانین پایستگی ........ conservation laws
کروشه لی ........ Lie bracket
گروه تقارن ........ symmetry group
گروه لی ........ Lie group
گروه موضعی ........ local group
لاگرانژی ........ Lagrangian
مسائل تغییراتی ........ variational problems
مستقل ........ independent
مشتق ........ dertivative
مشتقات جزیی ........ partial derivatives
مشتق کامل ........ total dertivative

| | |
|---|---|
| مشتق کسری | frctional dertivative |
| مشتق لی | Lie dertivative |
| مشخصه | characteristic |
| مراتب بالاتر | higer order |
| مرتبط | associated |
| مشخصه | characteristic |
| معادلات تعیین‌کننده | determining equations |
| معادله دیفرانسیل | differential equation |
| معادله دیفرانسیل کسری | fractional differential equation |
| معادل | equivalent |
| معمولی | ordinary |
| مکانیک کلاسیک | classic mechanics |
| منبع | source |
| منظم | regular |
| موج‌های آب سطحی | shallow water waves |
| موج برشی | shear wave |
| مولد بی‌نهایت کوچک | infinitesimal generator |
| مؤلفه | component |
| اندازه حرکت | momentum |
| میدان برداری | vector field |
| ناوردا | invariavt |
| ناهمسانگرد | anisotropic |
| نگاشت خطی | linear mapping |
| نگاشت وارون‌ساز | inversion map |
| نوسانگر | oscillator |
| وابسته | dependent |
| هایپرالاستیک | hyperelastic |
| همبند | connect |
| همسانگرد | isotropic |
| هموار | smooth |

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

چاهک ........ absorption
عملگر الحاقی ........ adjoint operator
روش تجزیه آدومین ........ Adomian's decomposition method
ناهمسانگرد ........ anisotropic
دلخواه ........ arbitrary
مرتبط ........ associated
تبدیل خودگردان ........ autonomous transformation
پایه ........ basis
دو خطی ........ billinear
مشخصه ........ characteristic
مکانیک کلاسیک ........ classic mechanics
جابجاگر ........ commutator
مؤلفه ........ component
شرایط ........ conditions
همبند ........ connect
برخوردی ........ contact
پیوسته ........ continuos
قوانین پایستگی ........ conservation laws
پایسته ........ conserved
چگالی ........ density
وابسته ........ dependent
مشتق ........ dertivative
معادله تعیین‌کننده ........ determining equations
معادله دیفرانسیل ........ differential equation
انتشار ........ diffusion

diffusivity ........ توزیع کننده
dimension ........ بعد
direct method ........ روش مستقیم
divergence expression ........ عبارت دیورژانسی
elastic ........ الاستیک
equivalenc transformation ........ تبدیل هم‌ارز
equivalent ........ معادل
Euler operator ........ عملگر اویلر
Euler-Lagrange ........ اویلرـ لاگرانژ
evolution ........ تکاملی
fiber ........ تار، الیاف
flow ........ شار
fluid ........ شاره، سیال
flux ........ شار
form ........ فرم
formal ........ قراردادی
functional ........ تابعک
fundamental ........ اساسی
fractional differential equation ........ معادله دیفرانسیل کسری
fractional derivative ........ مشتق کسری
Frechet derivative ........ مشتق فرشه
generalized infinitesimal symmetry ........ تقارن بی‌نهایت کوچک تعمیم‌یافته
global ........ فراگیر
higer order ........ مراتب بالاتر
homotopy operator ........ عملگر هموتوپی
hyperelastic ........ هایپرالاستیک
identify ........ اتحاد
independent ........ مستقل
infinitesimal generator ........ مولد بی‌نهایت کوچک
invariant ........ ناوردا
inversion map ........ نگاشت وارون‌ساز
isotropic ........ همسانگرد

jet space ........ فضای جت
kinetic ........ جنبشی
Lagrangian ........ لاگرانژی
leading ........ پیشرو
Lie algebra ........ جبر لی
Lie bracket ........ کروشه لی
Lie dertivative ........ مشتق لی
Lie group ........ گروه لی
Lie symmetry ........ تقارن لی
linear combination ........ ترکیب خطی
linear mapping ........ نگاشت خطی
linear operator ........ عملگر خطی
local group ........ گروه موضعی
mass ........ جرم
material parameters ........ پارامترهای مادی
maximal rank ........ رتبه ماکسیمال
momentum ........ اندازه حرکت
multi indices ........ اندیس چندگانه
multi-parameter symmetry ........ تقارن چندپارامتری
multiplier ........ ضریب
Noether theorem ........ قضیه نوتر
nonlocal symmetry ........ تقارن غیرموضعی
nontrivial ........ غیربدیهی
null divergence ........ پوچ دیورژانس
null Lagrangian ........ لاگرانژی پوچ
ordinary ........ معمولی
oscillator ........ نوسانگر
overdetermined system ........ دستگاه فرامعین
partial derivatives ........ مشتقات جزیی
point symmetry ........ تقارن نقطه‌ای
potential symmetry ........ تقارن پتانسیل
prolongation ........ امتداد

quasi self-adjoint ........ شبه خود الحاق
rank ........ رتبه
reduction of order ........ کاهش مرتبه
real-valued ........ حقیقی مقدار
regular ........ منظم
scaling symmetry ........ تقارن تجانس
self-adjoint ........ خودالحاقی
separation of variables ........ جداسازی متغیرها
shallow water waves ........ موج‌های آب سطحی
shear wave ........ موج برشی
similarity solutions ........ جواب‌های متشابه
smooth ........ هموار
solvable ........ حل‌پذیر
source ........ منبع
strictly self-adjoint ........ اکیدا خودالحاق
subsystem ........ زیردستگاه
symmetry group ........ گروه تقارن
tangent vector ........ بردار مماس
Taylor's series ........ سری تیلور
total dertivative ........ مشتق کامل
total differential ........ دیفرانسیل کامل
total space ........ فضای کل
translation ........ انتقال
transformation ........ تبدیل
traveling wave solutions ........ جواب‌های موج سیار
trivial ........ بدیهی
variational problems ........ مسائل تغییراتی
vector field ........ میدان برداری
vector space ........ فضای برداری

# نمایه

**Aabstract**

The scope of this thesis is to analysis geometric aspects of Lie theory of differential equations in order to study solutions and conservation laws of general non-linear heat transfer equation including its extension to fractional form. The thesis is written in seven chapters.

The first chapter contains the basic notations and definitions of geometric concepts, such as jet space, prolongation, Lie symmetries, equivalence transformations, etc. Also, some basic concepts of fractional calculus are given in this chapter.

The second chapter is devoted to studying the conservation laws, their methods of calculations and potential symmetries. In Chapter 3 a thorough analysis of the equivalence transformations, symmetries and conservations laws of the nonlinear wave equations are presented.The generalization of the Lie group analysis to fractional partial differential equations and the computation of the conservation laws is included in Chapters 4 and 5.

In Chapter 6, all discussed methods and concepts are implemented for the anisotropic nonlinear heat transfer equation. The complete classification of admitted point symmetries is presented. In the last part of the thesis, we present the equivalence transformations of the time-fractional anisotropic nonlinear heat transfer equation. Then, a classification of symmetries and conservation laws for one and three-dimensional cases is presented.

**Keywords:**

Nonlinear heat transfer equations of fractional order, Lie symmetries, Invariant solutions, Conservation law.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Geometry and Topology

# Geometric study of the fractional and nonlinear heat transfer equations

By: Elaheh Saberi Mohammadiyeh

Supervisor:

Dr. Seyed Reza Hejazi

January 2020