

صلاة الاضلاع



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضی مالی

پایان نامه کارشناسی ارشد

ارزش اعتبار و ارزش در معرض ریسک میانگین در تحلیل ریسک فازی

نگارنده: فاطمه طالبی

استادان راهنما

دکتر علیرضا ناظمی
دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی

آذر ۱۳۹۸

تقدیم به :

روح پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی ، ایستادگی را
تجربه نمایم

به مادرم ، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و
وجودش برایم همه مهر.

سپاس‌گزاری...

نخست خداوند بزرگ و علیم را شاکرم که به من قدرت تفکر و نوشتن داد
و تلاش را در وجودم برای یافتن معاینی هر چند کوچک از علم قرار داد.
بر خود فرض می‌دانم از استاد فرهیخته و دانشمند خویش، آقای دکتر ناظمی که
همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را
بجا آورم.

و نیز از خانواده خود که مراد این کاریاری نمودند کمال تشکر را بجامی آورم.

فاطمه طالبی
آذر ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب فاطمه طالبی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان ارزش اعتبار و ارزش در معرض ریسک میانگین در تحلیل ریسک فازی، تحت راهنمایی علیرضا ناظمی و عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه طالبی

آذر ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه یک روش عددی بر مبنای شبکه‌های عصبی برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی مالی در فضای عدم قطعیت بر مبنای متوسط ارزش در معرض ریسک به عنوان اندازه ریسک ارائه می‌دهیم. برای این کار ابتدا تعاریفی از مفاهیم مالی در ریاضی و مقدماتی از بهینه‌سازی ارائه شده، سپس نظریه اعتبار و فازی را مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط بهینگی را برای مسأله بهینه‌سازی مورد نظر می‌نویسیم. سپس یک مدل شبکه عصبی متناظر با آن طراحی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که نقطه تعادل شبکه عصبی متناظر جواب بهینه مسأله اصلی است. با ارائه یک تابع لیاپانوف مناسب، پایداری همگرایی سراسری مدل ارائه شده را بیان می‌کنیم. با معرفی فضای متغیرهای نامعین، به حل مسأله بهینه‌سازی پرتفوی با بازده نامعین در فضای نامعین با در نظر گرفتن اندازه ریسک به عنوان ارزش در معرض ریسک و متوسط ارزش در معرض ریسک با استفاده از شبکه عصبی ارائه شده می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: پرتفوی، بهینه‌سازی، شبکه‌های عصبی، ارزش در معرض ریسک، متوسط ارزش در معرض ریسک.

فهرست مطالب

م	فهرست تصاویر
س	فهرست جداول
۱	۱ مفاهیم
۱	۱.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی
۲	۲.۱ سیستم‌های دینامیکی
۴	۳.۱ مفاهیم مالی
۴	۱.۳.۱ سبد سهام
۶	۲.۳.۱ بازده
۷	۳.۳.۱ مفهوم ریسک و شاخص‌های معیار
۹	۴.۳.۱ بهینه‌سازی سبد سهام
۱۰	۴.۱ انتخاب پرتفوی بهینه
۱۱	۵.۱ مسأله بهینه‌سازی پرتفوی
۱۳	۱.۵.۱ مدل‌های جایگزین
۱۴	۶.۱ تخمین AVaR از یک نمونه
۱۵	۲ نظریه اعتبار و فازی
۱۵	۱.۲ مقدمه
۱۶	۲.۲ مفاهیم فازی
۱۷	۳.۲ نظریه اعتبار
۲۰	۴.۲ امید ریاضی در محیط فازی
۲۱	۵.۲ ارزش در معرض ریسک در محیط فازی
۲۵	۶.۲ بهینه‌سازی پرتفوی با بازده فازی در فضای اعتبار
۲۵	۷.۲ مدل متوسط - ارزش در معرض ریسک
۲۶	۱.۷.۲ معادل‌های قطعی
۲۸	۸.۲ بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی
۲۸	۹.۲ مدل شبکه‌ی عصبی پیشنهادی
۲۹	۱.۹.۲ تحلیل پایداری
۳۰	۱۰.۲ مثال‌های عددی

۴۳	نظریه مجموعه نامعین	۳
۴۴	اندازه نامعین	۱.۳
۴۵	متغیر نامعین	۲.۳
۴۵	توزیع نامعین	۳.۳
۴۹	معکوس توزیع نامعین	۴.۳
۵۲	استقلال متغیرهای نامعین	۵.۳
۵۲	قانون عملیاتی	۶.۳
۵۴	امید ریاضی متغیر نامعین	۷.۳
۵۶	ارزش در معرض ریسک در فضای عدم قطعیت	۸.۳
۵۸	مدل متوسط - ارزش در معرض ریسک در فضای عدم قطعیت	۹.۳
۶۱	بهینه‌سازی پرتفوی با بازده نامعین در فضای نامعین	۴
۶۱	مدل متوسط - ارزش در معرض ریسک	۱.۴
۶۲	۱.۱.۴ معادل‌های قطعی	
۶۵	۲.۴ مثال‌های عددی	
۷۷	مراجع	

فهرست تصاویر

۱۸	تابع عضویت متغیر فازی مثلثی	۱.۲
۱۸	تابع عضویت متغیر فازی دوزنقه‌ای	۲.۲
۳۲	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۴.۲)	۳.۲
۳۲	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۶.۲)	۴.۲
۳۳	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۵.۲)	۵.۲
۳۳	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۷.۲)	۶.۲
۳۵	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۸.۲)	۷.۲
۳۶	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۰.۲)	۸.۲
۳۷	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۹.۲)	۹.۲
۳۷	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۱.۲)	۱۰.۲
۳۹	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۲.۲)	۱۱.۲
۴۰	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۴.۲)	۱۲.۲
۴۱	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۳.۲)	۱۳.۲
۴۱	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۵.۲)	۱۴.۲
۴۵	یک متغیر نامعین	۱.۳
۴۶	یک توزیع نامعین	۲.۳
۴۶	توزیع نامعین خطی	۳.۳
۴۷	توزیع نامعین زیگزاگ	۴.۳
۴۸	توزیع نامعین دوزنقه‌ای	۵.۳
۴۸	توزیع نامعین نرمال	۶.۳
۴۹	توزیع نامعین لگ نرمال	۷.۳
۵۰	معکوس توزیع نامعین خطی	۸.۳
۵۰	معکوس توزیع نامعین زیگزاگ	۹.۳
۵۱	معکوس توزیع نامعین دوزنقه‌ای	۱۰.۳
۵۱	معکوس توزیع نامعین نرمال	۱۱.۳
۵۲	معکوس توزیع نامعین لگ نرمال	۱۲.۳
۵۵	نمودار تابع توزیع متغیر نامعین	۱۳.۳
۶۷	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۳.۴)	۱.۴
۶۷	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۴.۴)	۲.۴

۶۹	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۵.۴)	۳.۴
۷۰	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۷.۴)	۴.۴
۷۱	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۶.۴)	۵.۴
۷۱	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۸.۴)	۶.۴
۷۳	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۹.۴)	۷.۴
۷۴	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۱.۴)	۸.۴
۷۵	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۰.۴)	۹.۴
۷۵	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۲.۴)	۱۰.۴

فهرست جداول

۷	محاسبه ریسک و بازده با استفاده از داده‌های مورد انتظار	۱.۱
۳۰	بازده‌های فازی مثلثی از سهام‌های مختلف	۱.۲
۳۴	بازده‌های فازی دوزنقه‌ای از سهام‌های مختلف	۲.۲
۳۸	بازده‌های فازی دوزنقه‌ای از سهام‌های مختلف	۳.۲
۶۶	بازده‌های نامعین خطی از سهام‌های مختلف	۱.۴
۶۸	بازده‌های نامعین زیگزاگ از سهام‌های مختلف	۲.۴
۷۲	بازده‌های نامعین دوزنقه‌ای از سهام‌های مختلف	۳.۴

فصل ۱

مفاهیم

در این فصل برای درک و فهم بهتر پایان نامه، مختصراً به بیان برخی مفاهیم و اصطلاحات در زمینه ریاضیات و مالی می پردازیم.

۱.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی

تعریف ۱.۱.۱. [۳] در نظریه احتمالات، امید ریاضی^۱، میانگین، مقدار مورد انتظار یا ارزش مورد انتظار یک متغیر تصادفی گسسته برابر است با مجموع حاصل ضرب احتمال وقوع هر یک از حالات ممکن در مقدار آن حالت.

امید ریاضی یک متغیر تصادفی پیوسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

که در آن $f_X(x)$ ، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X است. برای متغیرهای تصادفی گسسته تعریف بالا به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_X(x_i).$$

که در آن $p_X(x_i)$ تابع احتمال است.

^۱Expected Value

- امید ریاضی یک عدد ثابت برابر با همان عدد ثابت است، یعنی اگر c عددی ثابت باشد، آن گاه $E(c) = c$.
- اگر برای دو متغیر تصادفی X و Y داشته باشیم $X \leq Y$ ، آن گاه با احتمال قریب به یقین داریم: $E(X) \leq E(Y)$.
- عملگر امید ریاضی خطی است یعنی برای هر دو متغیر تصادفی X و Y و هر عدد حقیقی a و b داریم:

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad (1.1)$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

تعریف ۲.۱.۱. [۳] در آمار و احتمال، **گشتاور**^۲ معیاری کمی برای توصیف شکل یک توزیع احتمال است. گشتاور اول همان میانگین است. برای گشتاورهای مراتب بالاتر معمولاً گشتاور را حول میانگین حساب می کنند و آن را گشتاور مرکزی می نامند. k -امین گشتاور مرکزی متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k].$$

فرض کنید $\mu = E(X)$ ، امید ریاضی (میانگین) متغیر تصادفی X باشد.

تعریف ۳.۱.۱. [۳] در نظریه احتمالات و آمار، **واریانس**^۳ نوعی سنجش پراکندگی است، و آن عددی است که نشان می دهد چگونه یک سری داده حول مقدار میانگین پخش می شوند. واریانس X به صورت زیر تعریف می شود:

$$V(X) = E[(X - \mu)^2].$$

- اگر X یک متغیر تصادفی باشد، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$V[aX + b] = E[((aX + b) - (aE(X) + b))^2] = a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 V[X].$$

- اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$V[aX + bY] = a^2 V[X] + b^2 V[Y] + 2ab Cov(X, Y),$$

که در آن، $Cov(X, Y)$ اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی است.

۲.۱ سیستم های دینامیکی

تعریف ۱.۲.۱. [۱] سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

^۲ Moment

^۳ Variance

که در آن f یک تابع از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n است. x^* یک نقطه تعادل ^۴ (۲.۱) نامیده می‌شود اگر $f(x^*) = 0$. اگر همسایگی $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که $f(x^*) = 0$ و $\forall x \in \Omega^* \setminus \{x^*\}$ ، $f(x) \neq 0$ ، آن‌گاه x^* یک نقطه تعادل تنها ^۵ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ [۱] سیستم دینامیکی (۲.۱) همگرایی سراسری به مجموعه جواب‌های (۲.۱) که با Ω^* نمایش داده می‌شود، گفته می‌شود اگر برای هر نقطه آغازین دلخواه، مسیر $x(t)$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \Omega^*) = 0,$$

که در آن

$$\text{dist}(x, \Omega^*) = \inf_{y \in \Omega^*} \|x - y\|,$$

و $\|\cdot\|$ نرم l_2 را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه پایداری لیاپانوف [۹۹]). فرض کنید که $x = 0$ یک نقطه تعادل سیستم (۲.۱) باشد و $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به‌طور پیوسته مشتق پذیر باشد به‌طوری‌که:

$$1. \quad V(0) = 0$$

$$2. \quad \text{به ازای هر } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad V(x) > 0$$

$$3. \quad \text{به ازای هر } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \dot{V}(x) \leq 0$$

آن‌گاه $x = 0$ نقطه پایداری سیستم خواهد بود.

قضیه ۲.۲.۱ (قضیه پایداری مجانبی [۹۹]). تحت شرایط قضیه ۱.۲.۱ اگر $V(\cdot)$ در شرایط زیر صدق کند:

$$1. \quad V(0) = 0$$

$$2. \quad \text{به ازای هر } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad V(x) > 0$$

$$3. \quad \text{به ازای هر } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \dot{V}(x) < 0$$

آن‌گاه $x = 0$ پایدار مجانبی خواهد بود.

قضیه ۳.۲.۱ (قضیه پایداری مجانبی سراسری [۹۹]). تحت شرایط قضیه ۱.۲.۱ اگر $V(\cdot)$ به‌طور شعاعی بی‌کران باشد آن‌گاه نقطه $x = 0$ پایدار مجانبی سراسری است.

^۴ Equilibrium Point

^۵ Isolated Equilibrium Point

۳.۱ مفاهیم مالی

سرمایه‌گذاری^۶ به معنی گذاشتن پول در چیزی با انتظار سود از آن است. به‌طور دقیق سرمایه‌گذاری تعهد پول یا سرمایه برای خرید مالی وسائل یا دارائی‌های دیگر، به‌منظور منفعت برگشت‌های سودمند و مفید در قالب بهره، سود سهام یا قدردانی از ارزش وسائل (منافع سرمایه) است. به‌عبارت دیگر سرمایه‌گذاری یعنی به تعویق انداختن مصرف فعلی برای دستیابی به امکان مصرف بیشتر در آینده است.

در سرمایه‌گذاری دو ویژگی متفاوت و مهم وجود دارد که عبارتند از زمان و ریسک. اهمیت دو موضوع یاد شده به این علت است که در سرمایه‌گذاری صرف پول در زمان حال صورت می‌گیرد و مقدار آن معین است، در حالی که پاداش حاصل از آن در آینده به‌دست می‌آید و معمولاً با عدم اطمینان همراه است. در بعضی مواقع، ویژگی زمان غالب می‌شود (مانند اوراق قرضه دولتی) و در بعضی مواقع ریسک از نظر اهمیت مقدم است (مانند برگه اختیار خرید سهام عادی) و در مواقع دیگر هر دو دارای اهمیت هستند (مانند سهام عادی).

۱.۳.۱ سبد سهام

تعریف ۱.۳.۱. [۱] **سبد سهام** یا **پرتفوی^۷** ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آن‌ها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است؛ بدین ترتیب، سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را جبران کند. یک ضرب‌المثل معروف می‌گوید: «همه تخم‌مرغ‌ها را در یک سبد نگذارید.»، چرا که ریسک شکستن سبد، باعث نابودی همه تخم‌مرغ‌ها خواهد شد.

تعریف ۲.۳.۱. [۲] **دارایی^۸** عبارت است از کلیه اموال و حقوقی که دارای ارزش پولی هستند. به منابعی که دارای ارزش اقتصادی هستند و افراد، شرکت‌ها یا دولت‌ها مالکیت آن را در اختیار می‌گیرند و انتظار دارند آن منابع در آینده منافی را برای آن‌ها ایجاد کنند، دارایی گفته می‌شود. دو نوع دارایی داریم:

۱. **دارایی ریسکی^۹**: به دارایی گویند که در مورد بازده آن اطمینان نداریم. این عدم اطمینان را به‌وسیله واریانس (انحراف معیار و ...) بازدهی‌های مورد انتظار نشان می‌دهیم. مانند سهام، اوراق قرضه غیر دولتی، ارز و طلا و

۲. **دارایی بدون ریسک^{۱۰}**: دارایی که دارای یک بازدهی آتی است و بازده آن به‌حدی امن است که بسیار نزدیک به نرخ بهره فعلی است.

تعریف ۳.۳.۱. [۳] **تخصیص دارایی^{۱۱}**، فرآیندی که در آن تقسیم منابعی مالی انجام می‌گیرد.

^۶ Investment

^۷ Portfolio

^۸ Asset

^۹ Risky Asset

^{۱۰} Riskless Asset

^{۱۱} Asset Allocation

تعریف ۴.۳.۱. [۳] **افق سرمایه‌گذاری**،^{۱۲} چارچوب زمانی و عامل کلیدی برای اتخاذ استراتژی سرمایه‌گذاری به حساب می‌آید. میزان زمانی که باید پس‌انداز و سرمایه‌گذاری کرد را مشخص می‌کند و بر تصمیمات تخصیص دارایی موثر است.

تعریف ۵.۳.۱. [۳] **هزینه معامله**،^{۱۳} آن دسته از هزینه‌هایی است که افراد در فرآیند مبادله اقتصادی متحمل می‌شوند تا حقوق مالکیت خود را مشخص، تعریف و تضمین کنند. مانند هزینه‌های کسب اطلاعات درباره‌ی فروشنده، خریدار و کیفیت کالا یا خدمتی که مبادله می‌شود، هزینه‌های عقد قرارداد و نظارت بر عملکرد طرف مقابل و از همه مهم‌تر هزینه‌های مربوط به تعریف حقوق مالکیت و تضمین اعمال این حقوق می‌باشد.

در مسأله‌ی سبد سهام تک دوره‌ای، فرض می‌شود که سرمایه‌گذار تصمیم به تخصیص دارایی‌ها برای یک بار و برای n دارایی موجود، در ابتدای دوره‌ی مورد نظر قرار می‌گیرد. تصمیم‌گیری فقط یک بار انجام می‌شود و اجازه‌ی بازنگری تا انتهای دوره وجود ندارد و اثر تصمیمات بر دوره‌های بعدی مورد توجه قرار نمی‌گیرد.

مسائل تک دوره‌ای بر پایه سه فرض محدودکننده بنا شده‌اند:

- افق سرمایه‌گذاری کوتاه مدت است.
- هزینه معاملات در بازار در نظر گرفته نشده است.
- پارامترهای مسأله به صورت قطعی و از قبل معلوم هستند.

در حالی که مسائل سبد سهام چند دوره‌ای^{۱۴} کلی‌تر هستند به طوری که سرمایه‌گذار یک رشته تصمیم‌گیری انجام می‌دهد که هر تصمیم بر روی تصمیمات بعدی اثرگذار است. هدف پیدا کردن تصمیم‌گیری برای تخصیص در هر دوره با در نظر گرفتن یک مجموعه از فرصت‌های تغییر در آینده افق سرمایه‌گذاری باقی‌مانده، هزینه‌های معاملات نهایی و دیگر محدودیت‌ها است.

تعریف ۶.۳.۱. [۲] **تعداد مشخصی از اوراق بهادار که حجم سفارش وارده به سامانه‌ی معاملات آن باید مضرب صحیحی از آن باشد را lot** گویند.

برای معامله در بورس باید مقدار حداقل و استاندارد از تعداد واحدهای مورد معامله مورد مبادله قرار گیرد که به این مقدار استاندارد یک **lot** گفته می‌شود.

از نظر سهام، تعداد سهامی که در یک معامله خریداری می‌شود. در بازارهای مالی، **lot** نشان‌دهنده مقادیر استاندارد یک ابزار مالی است به نحوی که سازمان مقررات تنظیم کرده است.

مفهوم **lot** به بازارهای مالی برای استاندارد کردن قیمت مجوز می‌دهد.

تعریف ۷.۳.۱. [۲] **سبد خودتامین**^{۱۵}، سبد مالی است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها فقط به خرید سهام و درآمدهای ناشی از فروش سهام منحصر باشد.

^{۱۲} Investment horizon

^{۱۳} Transaction Cost

^{۱۴} Multi-period portfolio

^{۱۵} Self-financing

۲.۳.۱ بازده

معمولاً افراد مصرف کنونی را به مصرف در آینده ترجیح می‌دهند. بنابراین برای تشویق افراد در به تعویق انداختن مصرف فعلی می‌بایستی انتظار کسب پاداش از سرمایه‌گذاری را برای آنان ایجاد کرد. در واقع انتظار کسب بازده یا پاداش سرمایه‌گذاری موجب می‌شود تا سرمایه‌گذاران مصرف در آینده را به مصرف فعلی ترجیح دهند.

به بهره ناشی از سرمایه‌گذاری **بازده**^{۱۶} گفته می‌شود. این تعریف به بهره یا سود سهام دریافتی از اوراق بهادار اشاره دارد و معمولاً به صورت سالانه و به عنوان درصدی از هزینه سرمایه‌گذاری، ارزش بازاری جاری یا ارزش اسمی آن بیان می‌شود.

تعریف ۸.۳.۱. [۳] **نرخ بهره**^{۱۷} عبارت است از نرخ که بابت جلوگیری از کاهش ارزش پول پرداختی در امروز و دریافتی در آینده (به دلیل ارزش زمانی) از وام‌گیرنده دریافت می‌شود.

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید فردی امروز ۱۰۰ دلار داشته باشد و مایل باشد آن را با نرخ بهره سالانه ۵ درصد برای مدت یک سال وام دهد. او در پایان این سال، ۱۰۰ دلار اولیه را به اضافه ۵ دلار حاصل از آن (100×0.05) دریافت خواهد کرد، یعنی جمعاً ۱۰۵ دلار به دست خواهد آورد. می‌توان سوال دیگری را نیز مطرح کرد. حداکثر هزینه‌ای که این فرد پرداخت می‌کند تا در سال آینده ۱۰۵ دلار دریافت می‌نماید چه قدر است؟ اگر نرخ بهره ۵ درصد باشد، حداکثر مقداری که این فرد خواهد پرداخت کرد ۱۰۰ دلار است.

بازده مورد انتظار هر سهم

با معلوم بودن توزیع احتمال برای بازده سهام، بازده مورد انتظار برای سهام i ام با $E(R_i)$ نشان داده شده و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^m (p_k) PR_k,$$

که در آن، PR_k بازده سهم i ام و p_k احتمال وقوع آن است.

بازده مورد انتظار سبد سرمایه

در صورتی که سبد سرمایه با N دارایی داشته باشیم که وزن دارایی i ام در آن x_i باشد، بازده مورد انتظار سبد سرمایه با $E(R_p)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i E(R_i).$$

مثال ۲.۳.۱. نرخ بازده ممکن حاصل از ۵ میلیون ریال سرمایه‌گذاری در سهام شرکت A عبارتست از:

^{۱۶}Returns

^{۱۷}Interest Rate

جدول ۱.۱: محاسبه ریسک و بازده با استفاده از داده‌های مورد انتظار

بازده (PR_k)	احتمال (P_k)	$PR_k P_k$	$(PR_k - E(R_i))$	$(PR_k - E(R_i))^2 P_k$	$x_i E(R_i)$
-۵	۰/۲	-۱	-۲۴	۱۱۵/۲	-۹۵
۲۰	۰/۶	۱۲	۱	۰/۶	۳۸۰
۴۰	۰/۲	۸	۲۱	۸۸/۲	۷۶۰

با توجه به اطلاعات فوق، نرخ بازده مورد انتظار $E(R_i)$ سهم A به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^m (p_k) PR_k = (-5 \times 0.2) + (20 \times 0.6) + (40 \times 0.2) = 19$$

محاسبه ریسک به صورت زیر است:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n (PR_k - E(R_i))^2 P_k} = \sqrt{204} = 14.28$$

و محاسبه بازده مورد انتظار سبد سرمایه به صورت زیر است:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i E(R_i) = 10.45$$

۳.۳.۱ مفهوم ریسک و شاخص‌های معیار

در [۳] زیان بالقوه و قابل اندازه‌گیری یک نوع سرمایه‌گذاری را ریسک^{۱۸} می‌گویند. ریسک در بازارهای مالی مفهوم کلیدی است، از این رو می‌بایست آن را شناخت، اندازه‌گیری کرد و برای حذف ریسک‌های غیرضروری برنامه‌ریزی و ریسک‌های همراه با فرصت را مدیریت نمود.

ریسک پدیده‌ای مربوط به آینده است که نمی‌توان آن را به‌طور دقیق پیش‌بینی کرد زیرا با عدم اطمینان همراه است. هرچه عدم اطمینان^{۱۹} بیشتر باشد، ریسک نیز بیشتر خواهد بود. در بازارهای مالی به‌همراه هر فرصتی ریسکی هم وجود دارد و اصولاً نمی‌توان از همه ریسک‌ها چشم‌پوشی کرد زیرا کلیه فرصت‌ها از بین می‌روند.

در گام نخست هر سرمایه‌گذاری می‌داند که برای کسب بازدهی بیشتر می‌بایست سطح ریسک‌پذیری خود را افزایش دهد.

ریسک در یک طبقه‌بندی کلی، به دو دسته تقسیم می‌شود:

۱. ریسک سیستماتیک

۲. ریسک غیر سیستماتیک

^{۱۸}Risk

^{۱۹}Unreliability

ریسک سیستماتیک، ریسکی است که از عوامل بازار ناشی شده و بر یک سرمایه‌گذاری (مثلاً قیمت سهام شرکت‌ها) تأثیر دارد و مدیریت آن از دست مدیران شرکت‌ها خارج است اما **ریسک غیر سیستماتیک**، به ریسکی گفته می‌شود که ناشی از عوامل کلان حاکم بر یک بازار نیست و به ساختار یک شرکت یا بنگاه اقتصادی مربوط می‌شود. برای مثال ساختار سرمایه شرکت، نوع محصول (کالا یا خدمات)، تصمیم‌گیری در شرایط مختلف و از مهم‌ترین عوامل مؤثر در انتخاب گزینه‌های سرمایه‌گذاری، میزان پذیرش ریسک سرمایه‌گذار است. به‌طور کلی می‌توان سرمایه‌گذاران را به دو گروه **ریسک‌پذیر**^{۲۰} و **ریسک‌گریز**^{۲۱} تقسیم کرد.

سرمایه‌گذار ریسک‌پذیر، سرمایه‌گذاری است که مقدار بازده معینی را انتظار دارد و هدفش کمینه‌کردن^{۲۲} ریسک است و ریسک‌گریز کسی است که با هدف بیشترین بازده، برای یک سطح مشخص از ریسک سرمایه‌گذاری می‌کند.

مهمترین مسأله در ریسک، محاسبه سنجش آن است. تاکنون معیارهای مختلفی برای تعیین ریسک معرفی شده است.

تعریف ۹.۳.۱. [۳] نیم واریانس^{۲۳} شاخصی است که در آن تنها انحرافات نامطلوب بازده مورد توجه قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر اگر ریسک را میزان ضرر تعریف کنیم، آن‌گاه تغییرات مطلوب (افزایش نرخ بازدهی دارایی مالی) به‌عنوان ریسک محسوب نمی‌شود و فقط آن دسته از مشاهداتی که کمتر از میانگین نرخ بازدهی هستند، به‌عنوان ریسک به‌حساب می‌آید. فرمول محاسبه نیم واریانس به‌صورت زیر است:

$$SV = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \{\max(0, E(r_i) - r_T)\}^2,$$

که در آن، r_T بازدهی دارایی در طول دوره، K تعداد مشاهدات و E امید ریاضی نرخ بازدهی است.

تعریف ۱۰.۳.۱. [۳] ارزش در معرض ریسک یک روش آماری است که برای اندازه‌گیری و تعیین میزان ریسک مالی در یک شرکت و یا پرتفوی سرمایه‌گذاری در یک دوره زمانی مشخص، استفاده می‌شود.

اعتقاد عمومی در مفاهیم مالی بر این موضوع اشاره دارد که ارزش در معرض ریسک (**VaR**) رویکردی جدید برای اداره و کنترل ریسک است. به‌طورکلی می‌توان گفت ارزش در معرض ریسک بیشترین مقدار زیان مورد انتظار را در یک افق زمانی (یک روز، یک هفته، یک ماه، ...) مشخص در سطح اطمینانی معین اندازه‌گیری می‌نماید. از مزایای مهم این ابزار، خلاصه‌سازی ریسک در یک عدد واحد است.

^{۲۰} Risk Taker

^{۲۱} Risk Avers

^{۲۲} Minimum

^{۲۳} Semivariance

مثال ۳.۳.۱. سبد شرکتی متشکل از ۵ میلیون دلار سهام فولاد مبارکه است نوسان پذیری روزانه سهام فولاد مبارکه، یک درصد است. و حال می‌توان نشان داد که انحراف معیار ارزش سبد در یک روز عبارت است از:

$$5000000 \times 0.01 = 50000$$

با فرض اینکه این تغییر دارای توزیع نرمال است، VaR یک روزه با سطح اطمینان ۹۹٪ عبارت است از:

$$\text{VaR} = 50000 \times 2.33 = 116500$$

و VaR ده روزه با سطح اطمینان ۹۹٪ نیز به شرح ذیل خواهد بود:

$$116500 \times \sqrt{10} = 368405$$

درجه تنوع

تنوع^{۲۴}، یک تکنیک مدیریت ریسک، آمیزه‌ای از سرمایه‌گذاری‌های مختلف در یک سبد سهام است.

منطق پشت این تکنیک معتقد است که یک سبد سهام ساخته شده از انواع مختلف سرمایه‌گذاری، به‌طور متوسط بازده بالاتر و ریسک پایین‌تری نسبت به هر سرمایه‌گذاری تکی دارد. تنوع تلاش می‌کند که حوادث ریسک غیر سیستماتیک در یک سبد سهام را کنترل کند به‌نحوی که عملکرد مثبت برخی از سرمایه‌گذاری‌ها را با عملکرد منفی سرمایه‌گذاران دیگر خنثی کند.

۴.۳.۱ بهینه‌سازی سبد سهام

بهینه‌سازی سبد سهام^{۲۵} عبارت است از تعیین نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی‌هایی که قرار است در سبد نگه‌داری شود؛ به‌شکلی که سبد انتخابی بهتر از هر سبد دیگری باشد. این بهتر بودن براساس معیارهایی مشخص می‌شود. معیارهایی که به‌صورت مستقیم یا غیرمستقیم ترکیبی از ملاحظات بازده مورد انتظار سبد، پراکندگی بازده‌ها و سایر پارامترهای ریسک مالی است. به‌عبارت دیگر سبد سهام بهینه، سبدي است که موجب بیشترین بازدهی و کمترین زیان شود. در بسیاری از رویکردهای بهینه‌سازی، این کار به‌صورت یک دوره‌ای انجام می‌گیرد اما از آنجا که سرمایه‌گذاری مفهومی بلندمدت و آینده‌نگر است، یک دوره‌ای در نظر گرفتن بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با این مفهوم همخوانی نخواهد داشت. سرمایه‌گذار به‌دنبال بهینه‌کردن تخصیص دارایی در هر دوره‌ی زمانی است به‌گونه‌ای که امید مطلوبیت ثروت در آخرین دوره‌ی زمانی بیشینه شود. در موضوعات مالی، انتخاب سبد سهام به‌منظور حداکثرسازی سود یکی از اصلی‌ترین دغدغه‌های سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی است. مسأله‌ی بهینه‌سازی مارکوویتز^{۲۶} و تعیین مرز کارا، زمانی توسط مدل‌های ریاضی قابل حل است که تعداد دارایی‌های سرمایه‌گذاری و محدودیت‌های موجود در بازار اندک است اما هنگامی که شرایط و محدودیت‌های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، مسأله‌ی بهینه‌سازی پرتفوی به‌راحتی با استفاده از شیوه‌های ریاضی قابل حل نیست.

^{۲۴} Diversification

^{۲۶} Markowitz

^{۲۵} Optimization Portfolio

۴.۱ انتخاب پرتفوی بهینه

در این بخش چند مدل برای مسأله انتخاب پرتفوی در شرایطی که بازده اوراق بهادار نامعین فرض می‌شود، بیان می‌گردد. با توجه به اینکه این مسائل به روش‌های معمول قابل حل نیستند ایده اصلی کار، جایگزینی این مدل‌ها با معادل‌های دقیق و قطعی آن‌ها در حالاتی خاص از متغیرهای نامعین (مانند متغیر نامعین خطی، زیگزاگ، ذوزنقه‌ای) و سپس حل آن‌ها است. برای نشان دادن کارایی مدل شبکه عصبی پیشنهاد شده در فصل دوم، چند مثال عددی از مسائل انتخاب پرتفوی بیان و حل می‌شود.

مسأله انتخاب مجموعه بهینه‌ای از دارایی‌ها، یکی از مسائل بازار سرمایه است که از اهمیت زیادی برخوردار است. در حوزه اقتصاد خرد، اهمیت تصمیمات سرمایه‌گذاری، ناشی از این مسأله است که در واقع فرد سرمایه‌گذار، مصرف و بازده امروز را به امید بازده بیشتر به زمانی در آینده موکول می‌کند. در واقع تصمیم بهینه سرمایه‌گذاری، میزان مطلوبیت هر فرد است که با توجه به ترجیحات شخصی وی تعیین می‌گردد و لزوماً با سایر افراد یکسان نخواهد بود، ولی می‌توان با معیارهایی، مطلوبیت فرد را از انتخاب مجموعه‌ای از دارایی‌های سرمایه‌ای، مشخص کرد. از جمله مهمترین این معیارها، ریسک و بازده کل مجموعه انتخاب شده است. هدف مدیریت مجموعه دارایی‌ها به‌طور عام و مجموعه سهام (سبد سهام) به‌طور خاص، تعیین دارایی‌های درون سبد به‌گونه‌ای که ریسک حداقل و بازده حداکثر شود.

مسأله تنوع‌بخشی در دارایی‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. طبقات مختلف دارایی شامل انواع اوراق بهادار، پول نقد، زمین، طلا و... می‌باشد.

نظریه‌های سرمایه‌گذاری در چند دهه اخیر از پیشرفت‌های زیادی برخوردار بودند و در سیر تاریخی تکاملی خود به فرمول‌های کاربردی زیادی دست یافتند. حجم تجارت و سرمایه‌گذاری طی قرن بیستم و اوایل بیست‌ویکم گسترش فراوانی داشته است. این گسترش و تغییرات حاصل از آن موجب شده است که معیارهای متفاوتی برای اخذ تصمیم سرمایه‌گذار در مقایسه با دوره‌های گذشته به‌کار گرفته شود. از عوامل موثر در انتخاب و انجام سرمایه‌گذاری دو مفهوم ریسک و بازده و رابطه این دو با یکدیگر است. در قرن ۱۸ میلادی برنولی^{۲۷} و کرامر^{۲۸} به این نتیجه رسیدند که تصمیمات تحت شرایط عدم اطمینان نباید صرفاً بر اساس بازده مورد انتظار صورت پذیرد.

تا اوایل قرن بیستم میلادی، سرمایه‌گذاران جهت اخذ تصمیم در فرآیند سرمایه‌گذاری از نسبت‌های بازده سرمایه‌گذاری استفاده می‌کردند و توجهی به مفاهیم ارزش زمانی پول و ریسک سرمایه‌گذاری نداشتند. از دهه ۱۹۲۰ مفهوم ارزش زمانی پول با روش‌های تنزیلی وارد حوزه ادبیات مالی و سرمایه‌گذاری شد. این روش‌ها، تحولی قابل توجه در انتخاب طرح‌های سرمایه‌گذاری به‌وجود آوردند. لیکن همچنان رفتار متفاوت سرمایه‌گذاران در مواجهه با ریسک نادیده گرفته می‌شد. در واقع با وجود اینکه نظریه مطلوبیت پول تا حدودی به تکامل معیارهای انتخاب کمک نموده بود، لیکن هنوز از جامعیت کافی برخوردار نبود. تا دهه ۱۹۵۰ ریسک یک عامل کیفی به‌شمار می‌رفت تا اینکه هری مارکوویتز برای نخستین بار ریسک را کمیت‌پذیر نمود و انحراف معیار جریان‌ات نقدی طرح‌های سرمایه‌گذاری را به‌عنوان کمیت سنجش ریسک

^{۲۷} Bernoulli

^{۲۸} Cramer

معرفی کرد. چندی بعد ویلیام شارپ در [۸۷] با تبیین ضریب حساسیت β به‌عنوان معیار ریسک، مدل ساده‌تر و کاربردی‌تری را به دنیای تئوری‌های سرمایه‌گذاری عرضه کرد. این روش امروز به‌عنوان مدل تک شاخصی معروف است. در ادامه این روند و در اواسط دهه ۶۰ شارپ و لینتر [۷۷] بر پایه نظریه بازار سرمایه، مدلی را توسعه دادند که امروزه تحت عنوان مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای^{۲۹} شناخته می‌شود. این مدل ریسک سیستماتیک و غیر سیستماتیک را به‌عنوان اجزای اصلی ریسک از یکدیگر تفکیک می‌کند. در دهه ۷۰، پروفیسور راس^{۳۰}، مدل آربیتراژ^{۳۱} را در [۸۶] پایه‌گذاری کرد. (برای توضیحات بیشتر به [۸۳] و [۶۲] مراجعه شود).

۵.۱ مسأله بهینه‌سازی پرتفوی

در سال ۱۹۵۲ میلادی، هری مارکوویتز مدل بنیادی پرتفوی را ارائه داد [۳] که مبنایی بر تئوری مدرن سبد سرمایه گردید. پیش از ارائه این تئوری سرمایه‌گذاران علیرغم آشنایی با مفاهیم ریسک و بازده، قادر به اندازه‌گیری آن به روش کمی نبودند. مارکوویتز نخستین کسی بود که مفهوم تنوع‌بخشی در سبد سرمایه‌گذاری به‌طور عام و سبد سهام به‌طور خاص را بسط و گسترش داد. او این موضوع که چگونه متنوع‌سازی سبد سرمایه می‌تواند منجر به کاهش ریسک سرمایه‌گذاری یک سرمایه‌گذار شود را، به‌صورت کمی بیان نمود.

نظریه مدرن سبد سرمایه MPT^{۳۲} براساس رابطه بازدهی و ریسک محاسبه شده از طریق واریانس و انحراف معیار بازدهی تعیین می‌شود. نظریه فرامدرن سبد سرمایه PMPT^{۳۳} براساس رابطه‌ی ریسک نامطلوب به تبیین رفتار سرمایه‌گذار و معیار انتخاب سبد سرمایه بهینه می‌پردازد (برای توضیحات بیشتر، مراجع [۷۰] و [۷۱] را ببینید). مارکوویتز در فرمول‌بندی مدل میانگین - واریانس^{۳۴} MV خود، به هدف سرمایه‌گذاری توجه خاصی داشت. به نظر وی، سرمایه‌گذار عاقل به دنبال سرمایه‌گذاری در طرح‌هایی است که بازدهی بیشتر و ریسک کمتر داشته باشد. وی ریسک یک سرمایه‌گذاری را تنها در انحراف معیار آن طرح جستجو نمی‌کرد، بلکه به رابطه بین دارایی‌های مختلف در سبد سرمایه و تاثیر این رابطه بر ریسک کل هم توجه داشت.

یکی دیگر از مفاهیمی که مارکوویتز مطرح نمود، سبد سرمایه کارا (سبد سهام کارا) بود، که به معنای ترکیب مطلوب اوراق بهادار است به‌نحوی که ریسک آن سبد سرمایه در ازای بازده معینی حداقل شود یا بازده سبد سرمایه در ازای ریسک معین حداکثر شود.

مدل مارکوویتز بر اساس مفروضاتی شکل گرفته است. این مفروضات عبارتند از:

۱. سرمایه‌گذار دارای رفتار عقلایی است.
۲. سرمایه‌گذاران، ریسک‌گریزند و دارای مطلوبیت مورد انتظار افزایشی هستند.
۳. سرمایه‌گذاران، سبد سرمایه خود را بر مبنای میانگین و واریانس بازده مورد انتظار انتخاب می‌کنند.

^{۲۹} Capital Asset Pricing Model (CAPM)

^{۳۰} Ross

^{۳۱} Arbitrage Pricing Theory

^{۳۲} Modern Portfolio Theory

^{۳۳} Post-modern Portfolio Theory

^{۳۴} Mean-Variance

۴. هر گزینه سرمایه‌گذاری تا بی‌نهایت قابل تقسیم است.
۵. سرمایه‌گذاران یک افق زمانی معین داشته و این برای همه مشابه است.
۶. سرمایه‌گذاران، در یک سطح مشخص از ریسک، بازده بالاتری را ترجیح می‌دهند و بالعکس برای سطح معینی از بازدهی خواهان، کمترین ریسک هستند.
۷. بازارها کامل هستند (هزینه مالیات و معاملات وجود ندارد).

در رویکرد مارکوویتز بازده دارایی‌ها به صورت متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود که احتمال آنها از تابع توزیع نرمال به دست می‌آید. میانگین به عنوان معیار کارایی سبد سرمایه و انحراف معیار هم به عنوان شاخص ریسک سبد سرمایه در نظر گرفته می‌شود. ورودی‌های اصلی مدل مارکوویتز عبارتند از بازده مورد انتظار، ماتریس واریانس-کواریانس بازدهی دارایی‌ها و ضریب همبستگی بین بازدهی‌ها. مدل کلاسیک MV به صورت زیر بیان می‌شود [۸۱].

$$\min \frac{1}{\gamma} X^T \Sigma X,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \mu^T X = R, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.1)$$

که در آن

$$\mu^T X = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i,$$

$$X^T \Sigma X = V[X] = \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j,$$

x_i و نسبت سرمایه‌گذاری در سهم i ام، ρ_{ij} ضریب همبستگی بین سهم i ام و j ام، و σ_i ریسک سهم i ام هستند و قید اول نشان‌دهنده سطح مشخصی از بازدهی مورد انتظار یعنی R است. قید دوم این اطمینان را می‌دهد که تمام بودجه سرمایه‌گذاری شود و قید آخر هم نشان‌دهنده این است که سرمایه‌گذار اجازه فروش استقراضی را ندارد. متأسفانه مدل مارکوویتز یک سری معایب و فرضیات غیر واقعی دارد که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. با افزایش تعداد دارایی، حجم محاسبات ماتریس کواریانس بیش از اندازه بزرگ می‌شود.
۲. محدودیت‌هایی که در دنیای واقعی وجود دارد، در مدل مارکوویتز در نظر گرفته نشده است، همانند محدودیت سهام ثابت در سبد سرمایه، هزینه‌های معاملاتی^{۳۵}، خرید آستانه‌ای^{۳۶}، معاملات بلوکی، معادلات سهام در دسته‌های ثابت و...، اکثر این محدودیت‌ها از توابع غیرخطی پیروی می‌کنند که مدل‌ها را برای حل دچار پیچیدگی می‌نماید.
۳. فرض نرمال بودن تابع توزیع بازده دارایی‌ها فرض قابل قبولی نیست.

^{۳۵} Cardinality Constraint

^{۳۶} Transaction Cost

۴. معیار عمومی ریسک، واریانس و یا انحراف معیار است که این معیار یک دارایی با توزیع نرمال و در بازار کارا قابل قبول است. اگر این دو خصوصیت برای دارایی وجود نداشته باشد، واریانس معیار مناسبی نیست.

۱.۵.۱ مدل‌های جایگزین

در سال ۱۹۵۹ مارکوویتز به مزایای ریسک نامطلوب اشاره کرد [۸۲]. او به این نتیجه رسید که سرمایه‌گذاران به دو علت مایل به حداقل ساختن ریسک نامطلوب هستند، نخست اینکه سرمایه‌گذاران ابتدا به امنیت اصل سرمایه می‌اندیشند و دوم وقتی که توزیع متغیرهای تصادفی (نرخ بازدهی) از نوع نرمال نباشد، آن‌گاه معیار ریسک نامطلوب مفید خواهد بود. بعدها در سال ۱۹۹۱ وی هنگام دریافت جایزه نوبل اقتصاد برای ارائه نظریه مدرن سبد سرمایه و مدل مارکوویتز نیز به این مسأله اشاره داشت.

سال ۱۹۷۳ لی و لرو [۳۷] [۷۳]، مدلی به‌منظور بهینه‌سازی سبد سرمایه با به‌کارگیری برنامه‌ریزی آرمانی ارائه نمودند. چندی بعد در سال ۱۹۸۰ لی و چیسیر [۳۸] [۷۴]، نگرش برنامه‌ریزی آرمانی چند معیاره [۳۹] را مطرح کردند. کونو و یامازاکی در سال ۱۹۹۱، مدلی از طریق برنامه‌ریزی خطی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه کردند. پس از آن در سال ۱۹۹۷، اسپرانزا و مانسینی [۴۰] [۷۹]، مدلی از برنامه‌ریزی صحیح آمیخته [۴۱] را با خصوصیات واقعی مثل هزینه‌های معاملات و حداقل واحدهای معاملات ارائه داد و برای حل آن از الگوریتم‌های ابتکاری کمک گرفتند و مدل را برای بازار سهام میلان آزمایش کردند. سال ۱۹۹۸ یونگ [۴۲] [۹۴]، مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه قابل حل توسط برنامه‌ریزی خطی را ارائه کرد که در آن ریسک بر مبنای بدترین حالت تعریف شده و آن را رویکرد "مینیماکس" [۴۳] نامید. سال ۱۹۹۹ ژیا و همکاران [۹۰] [۹۰] مدلی خاص را معرفی کردند. در فوریه همین سال چانگ [۴۴] و همکاران [۶۴]، به ارائه مدلی پارامتریک و غیرخطی جهت بهینه‌سازی سهام پرداختند. در ادامه در نوامبر همین سال، جوناس پالمکوویست [۴۵] و همکارانش [۸۴] به معرفی بهینه‌سازی سبد سرمایه با محدودیت‌ها و تابع هدف ارزش در معرض ریسک شرطی، مدلی از نوع برنامه‌ریزی خطی ارائه دادند. در سال ۲۰۰۲ لوبو [۴۶] و همکاران [۷۸] به بهینه‌سازی سبد با اعمال هزینه‌های معاملات خطی و ثابت پرداختند. در همین سال، کریستوس پاپاریستودولو [۴۷] [۸۵] به ارائه مدلی در این زمینه پرداخت و سپس با طرح مسأله‌ای متشکل از ۵ سهام در دوره زمانی ۱۲ ماهه به مقایسه سبدهای به‌دست آمده در هر مدل پرداخت. در سال ۲۰۰۳ آلکسی چخلاو [۴۸] و همکاران در مقاله‌ای تحت عنوان «بهینه‌سازی سبد سرمایه با محدودیت‌های کاهش‌دهنده» به ارائه مدلی در این زمینه پرداخت سپس در همان سال مانسینی [۴۹] و همکارانش [۸۰] به معرفی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی پرداخته‌اند. در سال ۲۰۰۴ گاندربو [۵۰] و همکاران برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی سبد سرمایه، روش نقطه درونی اولیه - دوگان را معرفی کردند.

^{۳۷} Lee and Lerro

^{۳۸} Lee and Chesser

^{۳۹} Multi-Criteria Goal Programming

^{۴۰} Mansini and Speranza

^{۴۱} Mixed Integer Programming

^{۴۲} young

^{۴۳} Minimax

^{۴۴} Chang

^{۴۵} Palmquist

^{۴۶} Lobo

^{۴۷} Papahristodoulou

^{۴۸} Alexi Chekhlov

^{۴۹} Mansini

^{۵۰} Gandryv

۶.۱ تخمین AVaR از یک نمونه

فرض کنید که یک نمونه از بازده پرتفوی مشاهده شده داده شده است که از توزیع آن‌ها آگاه نیستیم. سپس AVaR بازده پرتفوی را می‌توان تخمین زد. نمونه‌ای از بازده پرتفوی مشاهده شده، بازده سبد سهام داده شده توسط r_1, \dots, r_n به ترتیب در زمان‌های t_1, t_2, \dots, t_n را در نظر بگیرید. نمونه مرتب شده $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(n)}$ را نظر بگیرید که کوچکترین بازده مشاهده شده و $r_{(n)}$ بزرگترین بازده است. تخمین AVaR از بازده پرتفوی با احتمال ϵ طبق رابطه زیر بیان می‌شود

$$\widehat{\text{AVaR}}_{\epsilon}(r) = -\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[n\epsilon]-1} r_{(k)} + \left(\epsilon - \frac{[n\epsilon]-1}{n} \right) r_{([n\epsilon])} \right) \quad (۴.۱)$$

که در آن $[X]$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از X است.

مثال ۱.۶.۱. فرض کنید نمونه مرتب شده از بازده پرتفوی برابر است با

$$-۱/۳۷, -۰/۹۸, -۰/۳۸, -۰/۲۶, ۰/۱۹, ۰/۳۱, ۱/۹۱$$

سبد سهام AVaR را با احتمال $۰/۳۰$ محاسبه کنید. در اینجا نمونه حاوی ۷ مشاهده است $[n\epsilon] = [۷ \times ۰/۳] = ۲$ طبق (۴.۱) داریم

$$\begin{aligned} \widehat{\text{AVaR}}_{۰/۳}(r) &= -\frac{1}{۰/۳} \left(\frac{1}{۷} (-۱/۳۷) + (۰/۳ - ۰/۱۴)(-۰/۹۸) \right) \\ &= ۱/۱۳ \end{aligned}$$

فصل ۲

نظریه اعتبار و فازی

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم فازی و نظریه اعتبار را بیان نموده و سپس امید ریاضی، ارزش در معرض ریسک، بهینه سازی پرتفوی با بازده فازی در فضای اعتبار، و مدل متوسط - ارزش در معرض ریسک، را در محیط فازی تعریف کرده و در حالات خاص متغیرهای فازی مثلثی، دوزنقه‌ای را بدست می‌آوریم.

عمده ابزارهای مهم برای مدل‌سازی، استدلال و محاسبات از نوع قطعی،^۱ معین^۲ و کاملاً مشخص هستند. منظور از قطعی بودن، دو بخشی بودن است: بله یا خیر، به جای بیشتر یا کمتر. در منطق دوگان مرسوم، یک عبارت می‌تواند درست یا غلط باشد. در تئوری مجموعه، یک عنصر به مجموعه تعلق دارد یا ندارد. اگر قدرت یک زبان زنده را با یک زبان منطقی^۳ مقایسه کنیم، زبان منطقی فقیرتر خواهد بود. چراکه افکار و احساسات بشری دربر گیرنده مفاهیم یا دریافتهایی است که کلمات مورد استفاده ما برای بیان آنها کافی نیست. بنابراین، یک نگاشت یک به یک از مسائل و سیستم‌ها با استفاده از زبان حسابی یا منطقی امکان‌پذیر نیست. پس از آنجا که ذهن ما با منطق دیگری کارهایش را انجام می‌دهد و تصمیماتش را اتخاذ می‌کند، ایجاد منطق‌های تازه و چندارزشی مورد نیاز است، که منطق فازی^۴ یکی از آنها می‌باشد. واژه‌ی فازی به معنای غیر دقیق، ناواضح و مبهم (شناور) است.

منطق فازی اولین بار در پی تنظیم نظریه مجموعه فازی در سال ۱۹۶۵ به وسیله پروفیسور زاده^۵ در صحنه‌ی محاسبات نو ظاهر شد. [۹۵] سپس، بر اساس این مفهوم، نظریه حل فازی

^۱Crisp

^۲Deterministic

^۳Logical Language

^۴Fuzzy Logic

^۵Zadeh

توسط بلمن و زاده در [۶۰] ارائه شد.

دانش مورد نیاز برای بسیاری از مسائل مورد مطالعه به دو صورت متمایز ظاهر می‌شود:

۱. دانش عینی^۶، مثل مدل‌ها و معادلات و فرمول‌های ریاضی که از پیش تنظیم شده و برای حل و فصل مسائل معمولی فیزیک، شیمی، یا مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲. دانش شخصی^۷، مثل دانستنی‌هایی که تا حدودی قابل توصیف و بیان زبان‌شناختی بوده، ولی امکان کمی کردن آن‌ها با کمک ریاضیات سنتی معمولاً وجود ندارد. به این نوع دانش، دانش ضمنی یا دانش تلویحی^۸ گفته می‌شود.

از آن جا که در عمل هر دو نوع دانش مورد نیاز است منطق فازی می‌کوشد آن‌ها را به صورتی منظم، منطقی، و ریاضیاتی بایکدیگر هماهنگ گرداند. منطق فازی بر نظریه مجموعه‌های فازی تکیه می‌کند.

مجموعه‌های فازی خود از تعمیم و گسترش مجموعه‌های قطعی به صورتی طبیعی حاصل می‌آیند.

۲.۲ مفاهیم فازی

تعریف ۱.۲.۲. [۱] مجموعه‌های قطعی^۹ در واقع همان مجموعه‌های عادی و معمولی هستند که در ابتدای نظریه مجموعه‌ها معرفی می‌شوند. افزودن صفت قطعی به واقع وجه تمایزی را ایجاد می‌نماید که به کمک آن می‌شود یکی از مفاهیم ابتکاری و حیاتی در منطق فازی موسوم به تابع عضویت را به آسانی در ذهن به وجود آورد. در حالت مجموعه‌های قطعی، تابع عضویت فقط دو مقدار صفر و یک را می‌گیرد.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

که در اینجا $\mu_A(x)$ تابع عضویت عنصر x در مجموعه قطعی A است.

تعریف ۲.۲.۲. [۱] مجموعه فازی^{۱۰} \tilde{A} به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

تعریف می‌شود، که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به هر عنصر از X ، یک عدد را از بازه $[0, 1]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی \tilde{A} نسبت می‌دهد. و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت مجموعه فازی \tilde{A} نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۲. [۱] برای هر عدد حقیقی $\alpha \in (0, 1]$ مجموعه $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ را مجموعه $-\alpha$ برش از مجموعه فازی \tilde{A} می‌نامیم.

^۶ Objective Knowledge

^۷ Personal Knowledge

^۸ Tacit Knowledge

^۹ Crisp Sets

^{۱۰} Fuzzy Set

تعریف ۴.۲.۲. [۱] مجموعه $\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ را پشتیبان مجموعه فازی \tilde{A} می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۲. [۱] مجموعه فازی \tilde{A} محدب است اگر برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$

یا به عبارت دیگر یک مجموعه فازی محدب است اگر کلیه مجموعه‌های $-\alpha$ برش آن محدب باشند.

تعریف ۶.۲.۲. [۱] مجموعه فازی \tilde{A} را نرمال گوئیم هر گاه $\exists x \in X$ به طوری که $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

تعریف ۷.۲.۲. [۱] عدد فازی \tilde{M} ^{۱۱} یک مجموعه فازی از خط حقیقی \mathbb{R} با شرایط سه گانه زیر است:

۱. مجموعه فازی \tilde{M} محدب باشد.

۲. نرمال باشد.

۳. شکل تابع عضویت $\mu_{\tilde{M}}(x)$ به صورت تکه خطوط پیوسته باشد.

مجموعه تمام اعداد فازی روی \mathbb{R} را با $\text{FN}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهند.

۳.۲ نظریه اعتبار

تعریف ۱.۳.۲. [۱] متغیر فازی^{۱۲} یک ابزار ریاضی اساسی و بنیادی برای توصیف عدم اطمینان فازی است که به صورت تابعی از فضای اعتبار $(\Theta, P(\Theta), \text{Pos})$ به مجموعه‌ای از اعداد حقیقی تعریف می‌شود. مانند: متغیر فازی مثلثی، متغیر فازی دوزنقه‌ای. در سه‌تایی $(\Theta, P(\Theta), \text{Pos})$ ، Θ یک مجموعه ناتهی، $P(\Theta)$ مجموعه توانی Θ و Pos اندازه اعتبار می‌باشد.

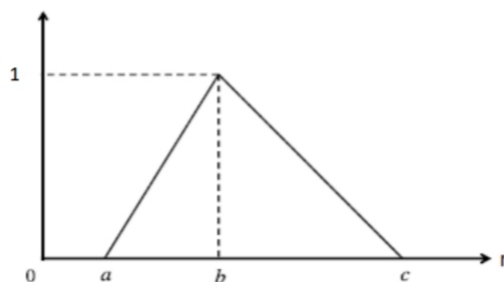
• متغیر فازی مثلثی^{۱۳} به صورت سه‌تایی $\xi = (a, b, c)$ نمایش داده می‌شود. که در آن $a < b < c$ بوده و a, b, c اعداد قطعی می‌باشند. همچنین تابع عضویت آن به صورت زیر است

$$\mu(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{r-a}{b-a} & a \leq r \leq b \\ \frac{r-c}{b-c} & b \leq r \leq c \\ 0 & r \geq c \end{cases} \quad (1.2)$$

^{۱۱}Fuzzy Number

^{۱۲}Fuzzy Variable

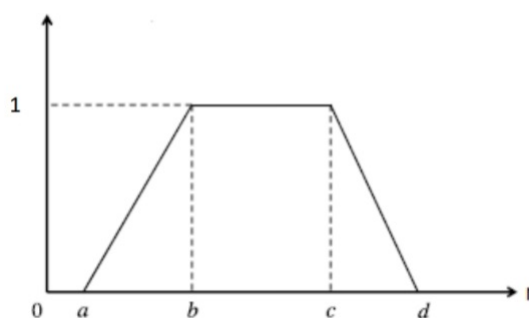
^{۱۳}Triangular Fuzzy Variable



شکل ۱.۲: تابع عضویت متغیر فازی مثلثی

- متغیر فازی دوزنقه‌ای^{۱۴} به صورت چهارتایی $\xi = (a, b, c, d)$ نمایش داده می‌شود. که در آن $a < b < c < d$ بوده و a, b, c, d اعداد قطعی می‌باشند و تابع عضویت آن به صورت زیر است

$$\mu(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{r-a}{b-a} & a \leq r \leq b \\ 1 & b \leq r \leq c \\ \frac{r-d}{c-d} & c \leq r \leq d \\ 0 & r \geq d \end{cases} \quad (2.2)$$



شکل ۲.۲: تابع عضویت متغیر فازی دوزنقه‌ای

تعریف ۲.۳.۲. [۱] فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت μ است و r یک عدد حقیقی است. در این صورت، تابع اعتبار از پیشامد $\xi \leq r$ می‌تواند به صورت زیر بیان شود

$$\text{Cr}\{\xi \leq r\} = \frac{1}{\alpha} [\text{Pos}\{\xi \leq r\} + \text{Nec}\{\xi \leq r\}] \quad (3.2)$$

^{۱۴}Trapezoidal Fuzzy Variable

که در آن $\text{Pos}\{\cdot\}$ و $\text{Nec}\{\cdot\}$ اندازه‌های احتمال و ضرورت در نظریه احتمال [۶۵] هستند، که به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\text{Pos}\{\xi \leq r\} = \sup_{x \leq r} \mu(x) \quad (۴.۲)$$

$$\text{Nec}\{\xi \leq r\} = 1 - \sup_{x > r} \mu(x) \quad (۵.۲)$$

از (۴.۲) و (۵.۲) داریم

$$\text{Cr}\{\xi \leq r\} = \frac{1}{2} \left[\sup_{x \leq r} \mu(x) + 1 - \sup_{x > r} \mu(x) \right] \quad (۶.۲)$$

همچنین با استفاده از خواص Cr در [۷۵] به طور مشابه داریم

$$\text{Cr}\{\xi \geq r\} = \frac{1}{2} \left[\sup_{x \geq r} \mu(x) + 1 - \sup_{x < r} \mu(x) \right] \quad (۷.۲)$$

تعریف ۳.۳.۲. [۱] توزیع اعتبار^{۱۵} $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ از متغیر فازی ξ توسط ليو^{۱۶} در [۷۵] به صورت زیر تعریف شده است

$$\Phi(r) = \text{Cr}\{\theta \in \Theta \mid \xi(\theta) \leq r\} \quad (۸.۲)$$

به خصوص، داریم

$$\Phi(r) = \text{Cr}\{\xi \leq r\} \quad (۹.۲)$$

قضیه ۱.۳.۲. [۱] فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت پیوسته μ است و نقطه‌ی x_0 موجود باشد به طوری که $\mu(x)$ در بازه $(-\infty, x_0)$ صعودی و در بازه (x_0, ∞) نزولی باشد در این صورت داریم

$$\Phi(r) = \text{Cr}\{\xi \leq r\} = \begin{cases} \frac{\mu(r)}{2} & r \leq x_0 \\ 1 - \frac{\mu(r)}{2} & r > x_0 \end{cases} \quad (۱۰.۲)$$

$$\text{Cr}\{\xi \geq r\} = \begin{cases} 1 - \frac{\mu(r)}{2} & r \leq x_0 \\ \frac{\mu(r)}{2} & r > x_0 \end{cases} \quad (۱۱.۲)$$

^{۱۵} Credibility Distribution

^{۱۶} Liu

برهان.

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{\xi \leq r\} &= \frac{1}{\checkmark} \left[\sup_{x \leq r} \mu(x) + 1 - \sup_{x > r} \mu(x) \right] = \begin{cases} \frac{1}{\checkmark} (\mu(r) + 1 - 1) & r \leq x_0 \\ \frac{1}{\checkmark} (1 + 1 - \mu(r)) & r > x_0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\mu(r)}{\checkmark} & r \leq x_0 \\ 1 - \frac{\mu(r)}{\checkmark} & r > x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

اثبات رابطه (۱۱.۲) نیز به صورت مشابه می باشد.

□

۴.۲ امید ریاضی در محیط فازی

تعریف ۱.۴.۲. [۱] امید ریاضی^{۱۷} متغیر فازی ξ توسط ليو در [۷۶] به صورت زیر تعریف شده است

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq r\} dr \quad (۱۲.۲)$$

قضیه ۱.۴.۲. [۱] فرض کنید که ξ یک متغیر فازی باشد که دارای تابع عضویت پیوسته μ است. اگر امید ریاضی آن وجود داشته باشد و نقطه‌ی x_0 موجود باشد به طوری که $\mu(x)$ در بازه $(-\infty, x_0)$ صعودی و در بازه (x_0, ∞) نزولی باشد در این صورت می توان امید ریاضی آن را به صورت زیر بدست آورد

$$E[\xi] = x_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{\checkmark} dr - \int_{-\infty}^{x_0} \frac{\mu(r)}{\checkmark} dr \quad (۱۳.۲)$$

برهان. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید که $x_0 \geq 0$ باشد در این صورت

$$\begin{aligned} E[\xi] &= \int_0^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq r\} dr \\ &= \int_0^{x_0} \text{Cr}\{\xi \geq r\} dr + \int_{x_0}^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq r\} dr \\ &= \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{\mu(r)}{\checkmark} \right) dr + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{\checkmark} dr - \int_{-\infty}^0 \frac{\mu(r)}{\checkmark} dr \\ &= x_0 - \int_0^{x_0} \frac{\mu(r)}{\checkmark} dr + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{\checkmark} dr - \int_{-\infty}^0 \frac{\mu(r)}{\checkmark} dr \\ &= x_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mu(r)}{\checkmark} dr - \int_{-\infty}^{x_0} \frac{\mu(r)}{\checkmark} dr \end{aligned}$$

□

^{۱۷}Expected Value

نتیجه ۱.۴.۲. [۱] فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی باشد در این صورت

$$E[\xi] = \frac{a + 2b + c}{4} \quad (14.2)$$

برهان. باتوجه به رابطه (۱.۲) μ یک تابع پیوسته است و در بازه $(-\infty, b)$ صعودی و در بازه (b, ∞) نزولی می‌باشد. پس با استفاده از قضیه (۱.۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} E[\xi] &= b + \int_b^{+\infty} \frac{\mu(r)}{4} dr - \int_{-\infty}^b \frac{\mu(r)}{4} dr \\ &= b + \frac{1}{4} \int_b^c \frac{r-c}{b-c} dr - \frac{1}{4} \int_a^b \frac{r-a}{b-a} dr \\ &= b + \frac{c-b}{4} - \frac{b-a}{4} \\ &= \frac{a + 2b + c}{4} \end{aligned}$$

□

نتیجه ۲.۴.۲. [۱] فرض کنید ξ یک متغیر فازی دوزنقه‌ای باشد در این صورت

$$E[\xi] = \frac{a + b + c + d}{4} \quad (15.2)$$

برهان. باتوجه به رابطه (۲.۲) μ یک تابع پیوسته است و در بازه $(-\infty, c)$ صعودی و در بازه (c, ∞) نزولی می‌باشد. پس با استفاده از قضیه (۱.۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} E[\xi] &= c + \int_c^{+\infty} \frac{\mu(r)}{4} dr - \int_{-\infty}^c \frac{\mu(r)}{4} dr \\ &= c + \frac{1}{4} \int_c^d \frac{r-d}{c-d} dr - \frac{1}{4} \int_a^b \frac{r-a}{b-a} dr - \frac{1}{4} \int_b^c dr \\ &= b + \frac{d-c}{4} - \frac{b-a}{4} - \frac{c-b}{4} \\ &= \frac{a + b + c + d}{4} \end{aligned}$$

□

۵.۲ ارزش در معرض ریسک در محیط فازی

با توجه به مطالب گفته شده در فصل ۱ ارزش در معرض ریسک می‌تواند به‌عنوان یک اندازه ریسک در انتخاب پرتفوی استفاده شود، بنابراین برآوردی از آن در محیط فازی ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۵.۲. [۱] فرض کنید که ξ یک متغیر فازی و $\beta \in (0, 1]$ ضریب اطمینان باشد. در این صورت ارزش در معرض ریسک از ξ تابع $\text{VaR} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$\text{VaR}(\beta) = -\sup\{x \mid \text{Cr}\{\xi \leq x\} \leq \beta\} \quad (16.2)$$

قضیه ۱.۵.۲. [۱] برای هر ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ داریم

$$\text{VaR}(\beta) = -\Phi^{-1}(\beta) \quad (17.2)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \text{VaR}(\beta) &= -\sup\{x \mid \text{Cr}\{\xi \leq x\} \leq \beta\} \\ &= \inf\{-x \mid \Phi(x) \leq \beta\} \\ &= \inf\{-x \mid x \leq \Phi^{-1}(\beta)\} \\ &= \inf\{-x \mid -x \geq -\Phi^{-1}(\beta)\} \\ &= -\Phi^{-1}(\beta) \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱.۵.۲. [۱] فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی باشد در این صورت

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2\beta(a-b) - a & 0 < \beta \leq \frac{1}{4} \\ 2\beta(b-c) + c - 2b & \frac{1}{4} \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (18.2)$$

برهان. با استفاده از (۱.۲) و قضیه (۱.۳.۲) داریم

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{r-a}{2(b-a)} & a \leq r \leq b \\ \frac{2b-r-c}{2(b-c)} & b \leq r \leq c \\ 1 & r \geq c \end{cases} \quad (19.2)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(r) = \begin{cases} 2r(b-a) + a & 0 < r \leq \frac{1}{4} \\ 2r(c-b) + 2b - c & \frac{1}{4} \leq r < 1 \end{cases} \quad (20.2)$$

□

که با استفاده از قضیه (۱.۵.۲) اثبات تمام است

نتیجه ۲.۵.۲. [۱] فرض کنید ξ یک متغیر فازی دوزنقه‌ای باشد در این صورت

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} \beta(a-b) - a & 0 < \beta \leq \frac{1}{\alpha} \\ \beta(c-d) + d - \beta c & \frac{1}{\alpha} \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (21.2)$$

برهان. با استفاده از (۲.۲) و قضیه (۱.۳.۲) داریم

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \frac{r-a}{\beta(b-a)} & a \leq r \leq b \\ \frac{1}{\alpha} & b \leq r \leq c \\ \frac{\beta(c-d-r)}{\beta(c-d)} & c \leq r \leq d \\ 1 & r \geq d \end{cases} \quad (22.2)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(r) = \begin{cases} \beta r(b-a) + a & 0 < r \leq \frac{1}{\alpha} \\ \beta r(d-c) + \beta c - d & \frac{1}{\alpha} \leq r < 1 \end{cases} \quad (23.2)$$

□

که با استفاده از قضیه (۱.۵.۲) اثبات تمام است

مدل متوسط - ارزش در معرض ریسک در فضای فازی

تعریف ۲.۵.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر فازی و $\alpha \in (0, 1]$ سطح اطمینان است. در این صورت متوسط ارزش در ریسک^{۱۸} از ξ تابع $\xi_{\text{AVaR}} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$\xi_{\text{AVaR}}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \xi_{\text{VaR}}(\beta) d\beta. \quad (24.2)$$

مدل متوسط - ارزش در معرض ریسک برخی از متغیرهای فازی

لم ۱.۵.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی مثلثی $\mathcal{Z}(a, b, c) \sim \xi$ است. در این صورت داریم:

$$\xi_{\text{AVaR}}(\alpha) = \begin{cases} (a-b)\alpha - a, & 0 < \alpha \leq \frac{1}{\alpha}, \\ c - \beta b - \frac{1}{\alpha}(a - \beta b + c) + (b-c)\alpha, & \frac{1}{\alpha} \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (25.2)$$

^{۱۸}Average Valu at Risk

برهان. با توجه به (۱۸.۲) و (۲۴.۲) برای $\frac{1}{\varphi} < \alpha \leq 1$ داریم:

$$\begin{aligned}\xi_{AVaR}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \xi_{VaR}(\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (\varphi\beta(a-b) - a) d\beta \\ &= (\alpha(a-b) - a),\end{aligned}$$

و همچنین برای $\frac{1}{\varphi} \leq \alpha < 1$ داریم:

$$\begin{aligned}\xi_{AVaR}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \xi_{VaR}(\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^{\frac{1}{\varphi}} (\varphi\beta(a-b) - a) d\beta + \int_{\frac{1}{\varphi}}^1 (\varphi\beta(b-c) + c - \varphi b) d\beta + \int_1^\alpha \varphi\beta(b-c) + c - \varphi b d\beta \right) \\ &= -\frac{1}{\varphi\alpha}(a - \varphi b + c) + \alpha(b-c) + c - \varphi b.\end{aligned}$$

□

لم ۲.۵.۲. فرض کنید ξ یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای $\mathcal{T}(a, b, c, d) \sim \xi$ است. در این صورت داریم:

$$\xi_{AVaR}(\alpha) = \begin{cases} \alpha(a-b) - a, & 0 < \alpha \leq \frac{1}{\varphi}, \\ \alpha(c-d) + d - \varphi c - \frac{1}{\varphi\alpha}(a+b - \varphi c + d), & \frac{1}{\varphi} \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (26.2)$$

برهان. با توجه به (۲۱.۲) و (۲۴.۲) برای $0 < \alpha \leq \frac{1}{\varphi}$ داریم:

$$\begin{aligned}\xi_{AVaR}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \xi_{VaR}(\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (\varphi\beta(a-b) - a) d\beta \\ &= \alpha(a-b) - a,\end{aligned}$$

و همچنین برای $\frac{1}{\varphi} \leq \alpha < 1$ داریم:

$$\begin{aligned}\xi_{AVaR}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \xi_{VaR}(\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^{\frac{1}{\varphi}} (\varphi\beta(a-b) - a) d\beta + \int_{\frac{1}{\varphi}}^1 (\varphi\beta(c-d) + d - \varphi c) d\beta + \int_1^\alpha (\varphi\beta(c-d) + d - \varphi c) d\beta \right) \\ &= \alpha(c-d) + d - \varphi c - \frac{1}{\varphi\alpha}(a+b - \varphi c + d).\end{aligned}$$

□

۶.۲ بهینه سازی پرتفوی با بازده فازی در فضای اعتبار

در مدل‌های معمولی پرتفوی همواره از بازده‌های تحقق‌یافته اوراق بهادار که مربوط به گذشته بوده و با اطلاعات دقیق تاریخی تعیین می‌شوند استفاده می‌شود. با این حال، اطلاعات دقیق همیشه در دسترس نیست و امروزه، با توسعه بازارهای سهام، پیش‌بینی بازده مورد انتظار اوراق بهادار با مقادیر تصادفی نسبتاً سخت است. بنابراین، برای رسیدگی به این قبیل از عدم اطمینان بهتر است که بازده‌های مورد انتظار را بصورت متغیرهایی با توزیع مبهم، مانند: متغیرهای فازی در مسائل پرتفوی در نظر بگیریم. در این فصل به بررسی مسأله انتخاب پرتفوی بهینه، زمانی که بازده متغیر فازی باشد می‌پردازیم.

۷.۲ مدل متوسط - ارزش در معرض ریسک

این مدل در مسأله انتخاب سبد سرمایه بهینه، به گونه‌ای است که در آن، بازده سرمایه‌گذاری را امید ریاضی سبد سرمایه و متوسط ارزش در معرض ریسک را بعنوان معیار ریسک در نظر می‌گیریم.

با توجه به میزان ریسک‌پذیری افراد در سرمایه‌گذاری از این مدل به دو صورت مدل ریسک‌پذیر و مدل ریسک‌گریز به صورت زیر استفاده می‌شود.

- مدل ریسک‌پذیر که در آن سرمایه‌گذار، مقدار بازده معینی را انتظار دارد و می‌خواهد ریسک را با توجه به سطح بازده مینیمم کند، مدل بهینه‌سازی آن به صورت زیر می‌باشد

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \text{AVaR}(\beta) \\ \text{s.t.} \quad E\left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right] \geq R \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (27.2)$$

- مدل ریسک‌گریز، یک پرتفوی با ارزش مورد انتظار بهینه، برای یک سطح مشخصی از ریسک است. مدل بهینه‌سازی آن به صورت زیر می‌باشد

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad E\left[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right] \\ \text{s.t.} \quad \text{AVaR}(\beta) \leq S \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (28.2)$$

در مدل‌های فوق x_i نسبت سرمایه‌گذاری در سهام i ام و ξ_i نشان دهنده بازده فازی i امین سهام $i = 1, 2, \dots, n$ و S ماکزیمم سطح ریسک سرمایه‌گذاری که صورت می‌گیرد و R مینیمم

بازده مورد انتظار و همچنین E امید ریاضی و $AVaR(\beta)$ متوسط ارزش در معرض ریسک با ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ که مقداری ثابت می‌باشد در نظر گرفته شده است.

۱.۷.۲ معادله‌های قطعی

در روش‌های معمول نیاز به تبدیل تابع هدف و قیدها به معادله دقیق آن‌ها است. همانطور که می‌دانیم اجرا و موفق بودن این فرایند در مواردی خاص و بسیار دشوار است. با جایگزینی مدل‌های فازی با معادله‌های قطعی در حالاتی خاص به حل مسئله انتخاب سبد سرمایه مدل متوسط ارزش در معرض ریسک می‌پردازیم.

حالت فازی مثلثی

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر فازی مثلثی باشد، $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$. لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر فازی مثلثی است. با استفاده از نتیجه (۱.۴.۲) و لم (۱.۵.۲) مدل بهینه‌سازی (۲۷.۲) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n x_i (\beta(a_i - b_i) - a_i) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \geq R \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (29.2)$$

و برای $1 > \beta > \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{4\beta} (a_i - 2b_i + c_i) + \beta(b_i - c_i) + c_i - 2b_i \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \geq R \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (30.2)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۲۸.۲) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i (\beta(a_i - b_i) - a_i) \leq S \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (31.2)$$

و برای $1 > \beta > \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{\frac{1}{\beta}} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{\frac{1}{\beta}} (a_i - 2b_i + c_i) + \beta(b_i - c_i) + c_i - 2b_i \right) \leq S \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (32.2)$$

حالت فازی دوزنقه‌ای

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر فازی دوزنقه‌ای باشد،
 لذا $\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. از نتیجه (۲.۴.۲) و لم (۲.۵.۲) مدل بهینه‌سازی (۲۷.۲) برای $\frac{1}{\beta} < \beta \leq 0$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n x_i (\beta(a_i - b_i) - a_i) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{\frac{1}{\beta}} \right) \geq R \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (33.2)$$

و برای $1 < \beta < \frac{1}{\beta}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n x_i (\beta(c_i - d_i) + d_i - 2c_i - \frac{1}{\beta}(a_i + b_i - 3c_i + d_i)) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{\frac{1}{\beta}} \right) \geq R \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (34.2)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۲۸.۲) برای $\frac{1}{\beta} < \beta \leq 0$ به هم ارز قطعی خود به صورت

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{\frac{1}{\beta}} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i (\beta(a_i - b_i) - a_i) \leq S \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (35.2)$$

و برای $1 < \beta < \frac{1}{\beta}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \max & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{\frac{1}{\beta}} \right) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i (\beta(c_i - d_i) + d_i - 2c_i - \frac{1}{\beta}(a_i + b_i - 3c_i + d_i)) \leq S \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (36.2)$$

۸.۲ بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی

تا به حال تمام مسائلی که به دست آمده است به صورت برنامه ریزی خطی است. در این قسمت یک مدل شبکه عصبی کارا برای حل مسائل LP ارائه می‌شود. بحث و بررسی در مورد کاربرد شبکه‌های عصبی (شبکه‌های عصبی مصنوعی) در بهینه‌سازی از اوایل سال ۱۹۸۰ میلادی آغاز شده است. نتایج پژوهش‌های انجام شده از آن زمان تاکنون، مواردی چون برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی درجه دوم، برنامه‌ریزی هندسی و برنامه‌ریزی غیرخطی را در برمی‌گیرد. ایده‌ی اصلی در استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای مسائل بهینه‌سازی استفاده از یک تابع انرژی (نامنفی) و یک سیستم دینامیکی است که این دو بیان‌کننده‌ی مدل‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی متناظر مسائل بهینه‌سازی هستند. سیستم دینامیکی بیان شده معمولاً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه‌ی اول است. انتظار می‌رود که برای یک نقطه‌ی آغازین نقطه‌ی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به دست آمده، جواب بهینه‌ی مسأله‌ی بهینه‌سازی اصلی باشد. بنابراین برای یک مدل متناظر با مسائل بهینه‌سازی، اصل اساسی استفاده از شبکه‌های عصبی در این گونه مسائل به صورت زیر بیان می‌شود:

برای یک نقطه‌ی آغازین دلخواه، نقطه‌ی تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به دست آمده جواب بهینه‌ی مسأله‌ی اصلی است و برعکس.

۹.۲ مدل شبکه‌ی عصبی پیشنهادی

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی به صورت کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Ax = b, \\ Bx \leq d, \end{cases} \end{aligned} \quad (۳۷.۲)$$

که در آن $rank(A) = m$ ($0 < m < n$)، $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $c \in \mathbb{R}^n$ ، $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ، $b \in \mathbb{R}^m$ ، $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ، $d \in \mathbb{R}^p$ است.

می‌توان مدل شبکه عصبی زیر را برای به دست آوردن جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۳۷.۲) به صورت زیر به کار برد [۵۳]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(I - P)[c + B^T(y + Bx - d)^+] - Q(Ax - b), \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau}y + \frac{1}{\tau}(y + Bx - d)^+, \end{cases} \quad (۳۸.۲)$$

که در آن

$$P = A^T(AA^T)^{-1}A, \quad Q = A^T(AA^T)^{-1},$$

$$(y + Bx - d)^+ = ([y + Bx - d]_1^+, [y + Bx - d]_2^+, \dots, [y + Bx - d]_m^+),$$

$$[y + Bx - d]_k^+ = \max\{(y + Bx - d)_k, 0\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

لم ۱.۹.۲. [۵۳] جواب بهینه‌ی (۳۷.۲) است اگر و تنها اگر $y^* \geq 0$ موجود باشد به طوری که $(x^*, y^*)^T$ در شرایط زیر صدق کند:

$$(I - P)[c + B^T y^*] + Q(Ax^* - b) = 0, \quad (۳۹.۲)$$

$$(y^* + Bx^* - d)^+ - y^* = 0. \quad (۴۰.۲)$$

ملاحظه ۱.۹.۲. با استفاده از لم ۱.۹.۲، به آسانی می‌بینیم که x^* جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۳۷.۲) است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $y^* \geq 0$ به طوری که $(x^*, y^*)^T$ نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی ارائه شده در (۳۸.۲) باشد. بنابراین، زمانی که شبکه‌ی عصبی به نقطه‌ی تعادل همگرا است، مسیر حرکت $x(t)$ به جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۳۷.۲) همگرا می‌باشد.

۱.۹.۲ تحلیل پایداری

در این بخش نشان خواهیم داد که مدل شبکه‌ی عصبی (۳۸.۲) همگرای سراسری است.

لم ۲.۹.۲. [۵۳] فرض کنید $(x^*, y^*)^T \in \Omega^e$ یک نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی (۳۸.۲) باشد و

$$V(x, y) = -\frac{1}{\rho} (x - x^*)^T B^T y^* + \frac{1}{\rho} \|(y + Bx - d)^+\|^2 + \frac{1}{\rho} \|y^*\|^2 - y^T y^* + \frac{1}{\rho} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\rho} \|y - y^*\|^2, \quad (۴۱.۲)$$

در این صورت

$$V(x, y) \geq \frac{1}{\rho} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\rho} \|y - y^*\|^2, \quad (۴۲.۲)$$

$$\frac{dV}{dt} \leq -\|(I - P)[c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 - \frac{1}{\rho} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2. \quad (۴۳.۲)$$

ملاحظه ۲.۹.۲. $V(x, y)$ معرفی شده در (۴۱.۲) یک تابع لیاپانوف می‌باشد، بنابراین، شبکه‌ی عصبی (۳۸.۲) پایدار به مفهوم لیاپانوف می‌باشد.

قضیه ۱.۹.۲. [۵۳] برای هر نقطه‌ی اولیه‌ی $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+p}$ ، یک جواب پیوسته منحصر به فرد $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^{n+p}$ از (۳۸.۲) برای $t \geq 0$ وجود دارد.

قضیه ۲.۹.۲. [۵۳] مسیر حالت شبکه‌ی عصبی (۳۸.۲) برای هر نقطه‌ی اولیه به صورت $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+p}$ به یک نقطه‌ی تعادل همگرا است. به ویژه، شبکه‌ی عصبی (۳۸.۲) با هر نقطه‌ی اولیه‌ی $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+p}$ هنگامی که Ω^e نقطه‌ی تعادل منحصر به فرد دارد به طور سراسری پایدار مجانبی است.

۱۰.۲ مثال‌های عددی

برای نشان دادن کارایی مدل‌های ذکر شده در حل مسائل انتخاب پرتفوی در شرایط فازی مثال‌هایی مطرح و حل می‌شود. در شبیه‌سازی همه مثال‌ها از دستور ode45 در متلب و مدل (۳۸.۲) استفاده شده است که معادل روش رانگ کوتای مرتبه ۴ برای حل معادلات دیفرانسیل است.

مثال ۱.۱۰.۲. فرض کنید ۱۰ ورق بهادار با بازده مثلثی $\xi_i = Z(a_i, b_i, c_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر است.

جدول ۱.۲: بازده‌های فازی مثلثی از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$Z(-0/2, 2/1, 2/5)$	۶	$Z(-0/2, 2/5, 3/0)$
۲	$Z(-0/1, 1/9, 3/0)$	۷	$Z(-0/2, 3/0, 3/5)$
۳	$Z(-0/4, 3/0, 4/0)$	۸	$Z(-0/4, 2/5, 4/0)$
۴	$Z(-0/1, 2/0, 2/5)$	۹	$Z(-0/3, 2/8, 3/2)$
۵	$Z(-0/6, 3/0, 4/0)$	۱۰	$Z(-0/3, 2/0, 2/5)$

فرض کنید $\beta = 0/2$ ، میزان ریسک حداکثر $3/2$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل ۲ باشد. از مدل‌های (۲۹.۲) و (۳۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & -0/26x_1 - 0/3x_2 - 0/28x_3 - 0/32x_4 - 0/12x_5 - 0/34x_6 - 0/44x_7 \\ & - 0/18x_8 - 0/32x_9 - 0/16x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 \\ \quad + 2/325x_7 + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10} \geq 2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (44.2)$$

و

$$\begin{aligned} \max \quad & 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 + 2/325x_7 \\ & + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -0/26x_1 - 0/3x_2 - 0/28x_3 - 0/32x_4 - 0/12x_5 - 0/34x_6 \\ \quad - 0/44x_7 - 0/18x_8 - 0/32x_9 - 0/16x_{10} \leq 3/2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (45.2)$$

همچنین از مدل (۳۰.۲) و (۳۲.۲) و برای $\beta = 0.6$ داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & -1/148x_1 - 1/85x_2 - 1/6x_3 - 1/13x_4 - 1/5x_5 - 1/38x_6 - 1/675x_7 \\ & - 1/31x_8 - 1/515x_9 - 1/5x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 \\ \quad + 2/325x_7 + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10} \geq 2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (46.2)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 + 2/325x_7 \\ & + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -1/148x_1 - 1/85x_2 - 1/6x_3 - 1/13x_4 - 1/5x_5 - 1/38x_6 \\ \quad - 1/675x_7 - 1/31x_8 - 1/515x_9 - 1/5x_{10} \leq 3/2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (47.2)$$

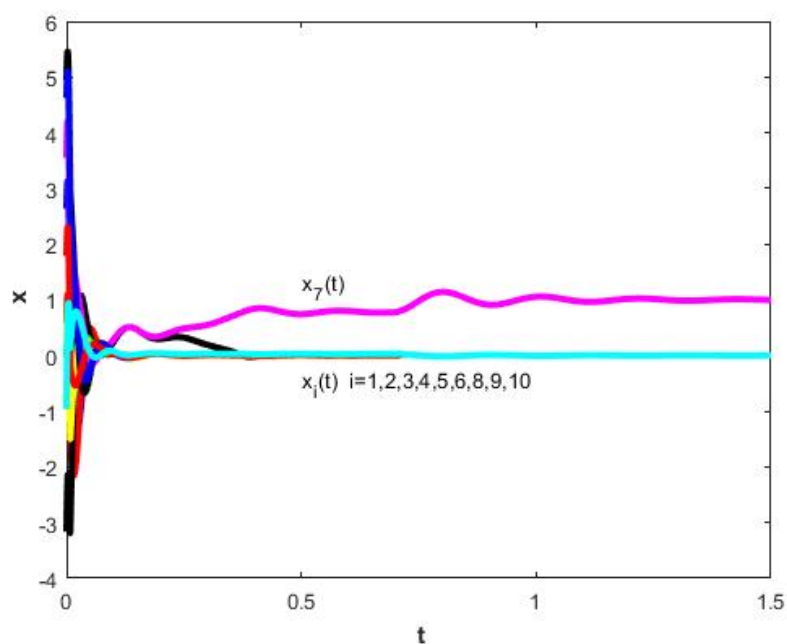
با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده جواب بهینه برای مدل (۴۴.۲) به صورت

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

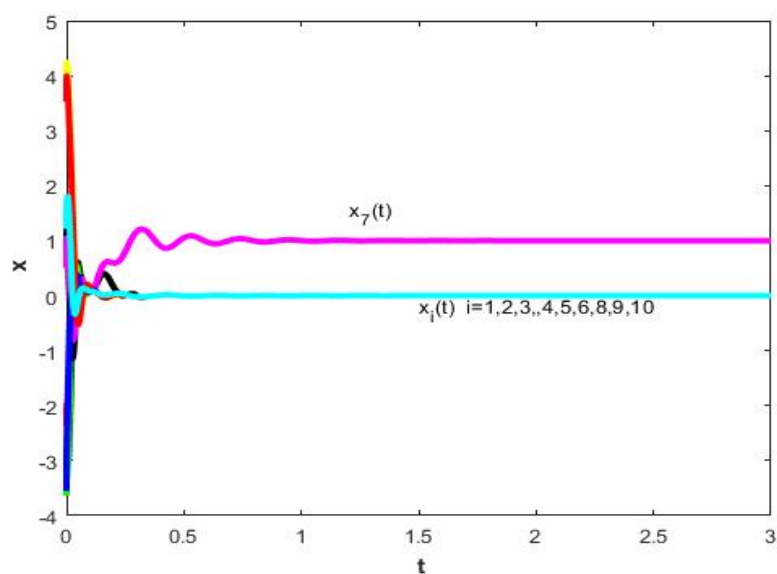
و برای (۴۶.۲) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۲ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۴۴.۲) و (۴۶.۲) در شکل‌های ۳.۲ و ۴.۲ نمایش داده شده است.



شکل ۳.۲: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۴.۲)



شکل ۴.۲: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۶.۲)

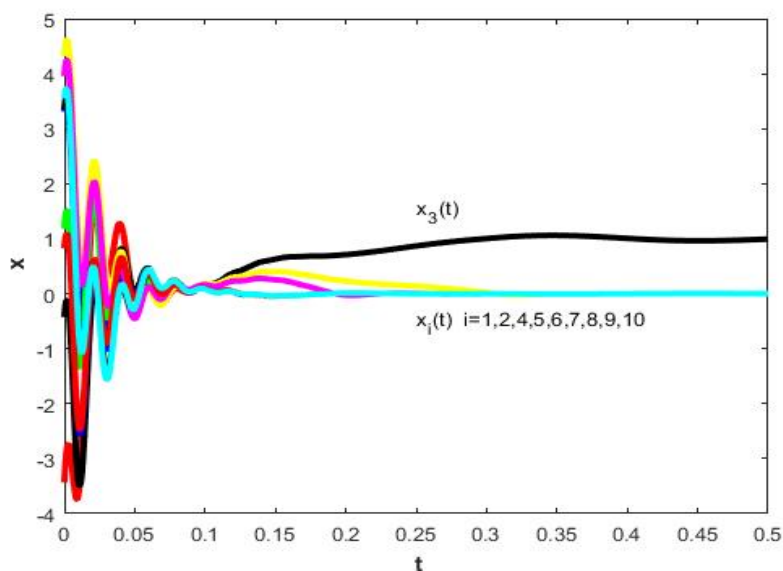
همچنین جواب بهینه برای مدل (۴۵.۲) به صورت

$$X^* = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

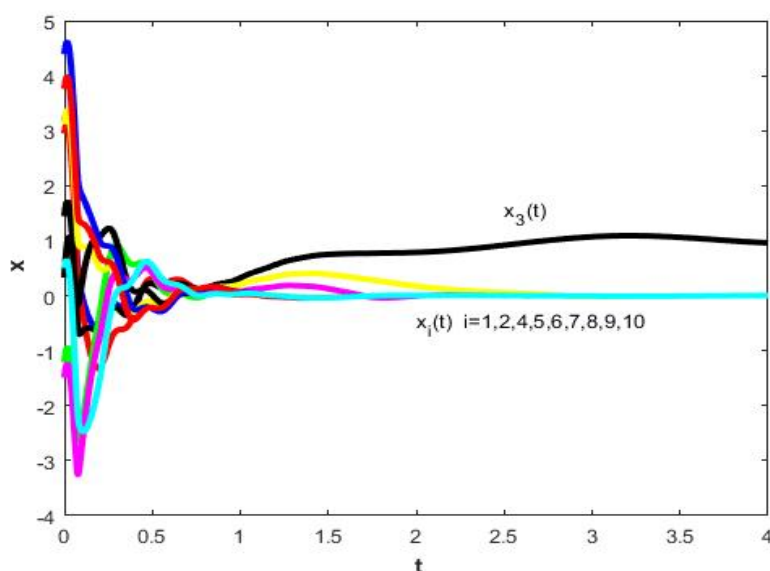
و برای مدل (۴۷.۲) به صورت زیر است:

$$X^* = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T.$$

یعنی برای به‌دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر $3/2$ سرمایه‌گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۴۵.۲) و (۴۷.۲) در شکل‌های ۵.۲ و ۶.۲ نمایش داده شده است.



شکل ۵.۲: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۵.۲)



شکل ۶.۲: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۷.۲)

مثال ۲.۱۰.۲. فرض کنید 10 ورق بهادار با بازده ذوزنقه‌ای $\xi_i = T(a_i, b_i, c_i, d_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر است.

جدول ۲.۲: بازده‌های فازی ذوزنقه‌ای از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$T(0/2, 0/4, 1/0, 1/1)$	۶	$T(-0/5, 1/7, 3/0, 3/7)$
۲	$T(0/5, 0/7, 1/3, 1/5)$	۷	$T(2/0, 2/5, 3/1, 4/0)$
۳	$T(0/2, 0/8, 2/0, 2/2)$	۸	$T(-2/0, 0/2, 1/0, 1/6)$
۴	$T(0/1, 0/3, 0/5, 0/9)$	۹	$T(-0/2, 3/0, 3/5, 4/0)$
۵	$T(-0/7, 0/7, 3/0, 3/2)$	۱۰	$T(0/1, 0/9, 2/0, 2/2)$

فرض کنید $\beta = 0/3$ ، میزان ریسک حداکثر $0/7$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل $1/5$ باشد. از مدل‌های (۳۳.۲) و (۳۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & -0/26x_1 - 0/56x_2 - 0/38x_3 - 0/16x_4 + 0/28x_5 - 0/16x_6 - 2/15x_7 \\ & + 1/34x_8 - 0/76x_9 - 0/34x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/675x_1 + x_2 + 1/3x_3 + 0/45x_4 + 1/55x_5 + 1/975x_6 \\ \quad + 2/9x_7 + 0/2x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10} \geq 1/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (48.2)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & 0/675x_1 + x_2 + 1/3x_3 + 0/45x_4 + 1/55x_5 + 1/975x_6 + 2/9x_7 \\ & + 0/2x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -0/26x_1 - 0/56x_2 - 0/38x_3 - 0/16x_4 + 0/28x_5 - 0/16x_6 \\ \quad - 2/15x_7 + 1/34x_8 - 0/76x_9 - 0/34x_{10} \leq 0/7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (49.2)$$

همچنین از مدل‌های (۳۴.۲) و (۳۶.۲) و برای $\beta = 0/7$ داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & -0/5x_1 - 0/8x_2 - 0/94x_3 - 0/3x_4 - 0/86x_5 - 1/3x_6 - 2/5x_7 \\ & + 0/32x_8 - 2/02x_9 - 0/94x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/675x_1 + x_2 + 1/3x_3 + 0/45x_4 + 1/55x_5 + 1/975x_6 \\ \quad + 2/9x_7 + 0/2x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10} \geq 1/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (50.2)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.675x_1 + x_2 + 1.3x_3 + 0.45x_4 + 1.55x_5 + 1.975x_6 + 2.9x_7 \\ & + 0.2x_8 + 2.575x_9 + 1.3x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -0.5x_1 - 0.8x_2 - 0.94x_3 - 0.3x_4 - 0.86x_5 - 1.3x_6 \\ \quad - 2.5x_7 + 0.32x_8 - 2.02x_9 - 0.94x_{10} \leq 0.7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (51.2)$$

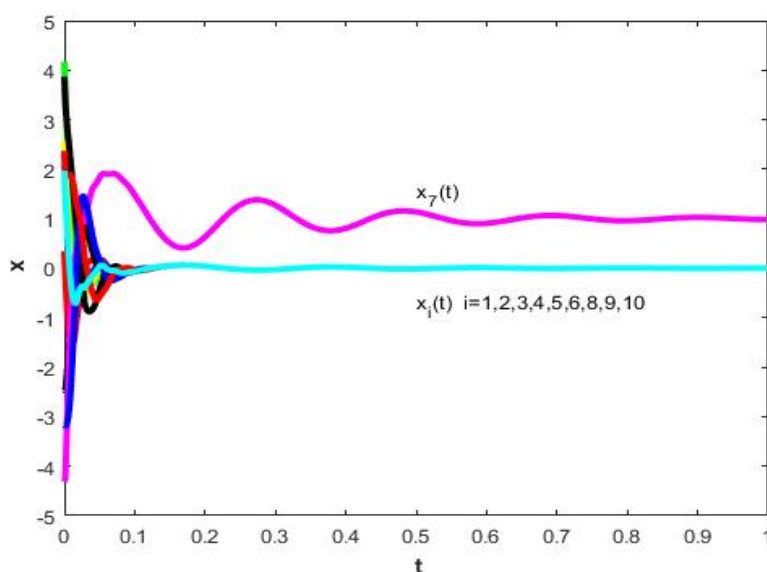
با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده جواب بهینه برای مدل (۴۸.۲) به صورت

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

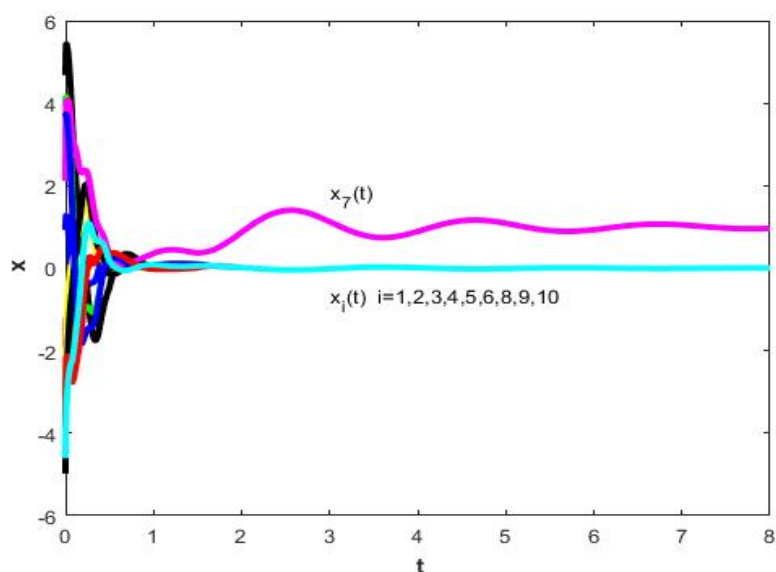
و برای (۵۰.۲) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۱/۵ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۴۸.۲) و (۵۰.۲) در شکل‌های ۷.۲ و ۸.۲ نمایش داده شده است.



شکل ۷.۲: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۸.۲)



شکل ۸.۲: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۰.۲)

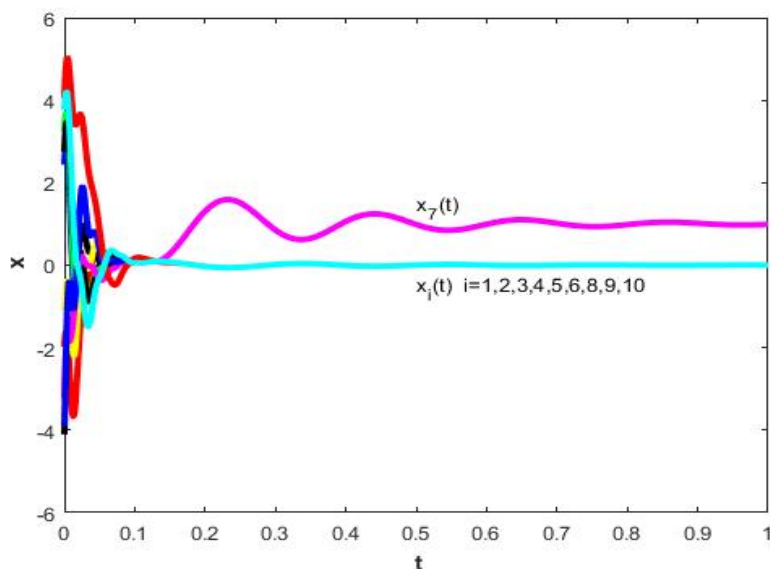
همچنین جواب بهینه برای مدل (۴۹.۲) به صورت

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

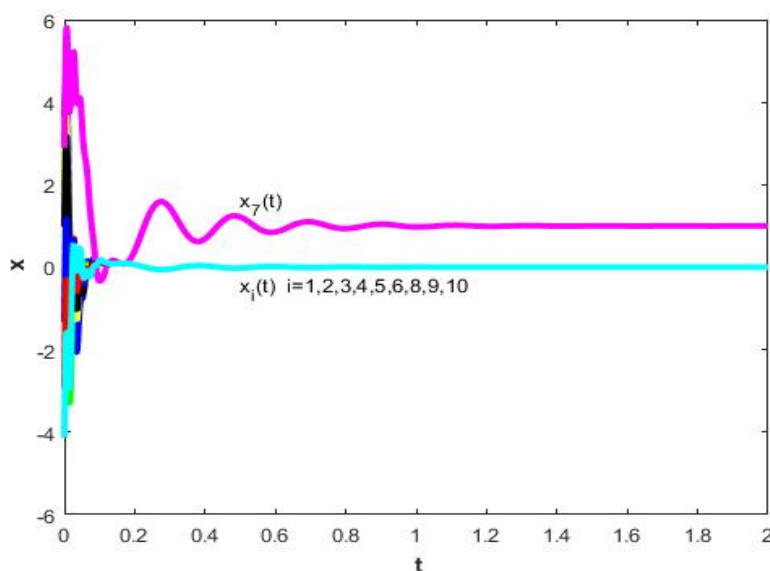
و برای مدل (۵۱.۲) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T.$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۷٪ سرمایه گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۴۹.۲) و (۵۱.۲) در شکل های ۹.۲ و ۱۰.۲ نمایش داده شده است.



شکل ۹.۲: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۹.۲)



شکل ۱۰.۲: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۱.۲)

مثال ۳.۱۰.۲. فرض کنید 1° ورق بهادار با بازده دوزنقه‌ای $\xi_i = T(a_i, b_i, c_i, d_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر است.

جدول ۳.۲: بازده‌های فازی دوزنقه‌ای از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$T(0/1, 0/3, 1/0, 1/1)$	۶	$T(-0/4, 1/6, 3/0, 3/7)$
۲	$T(0/4, 0/6, 1/3, 1/5)$	۷	$T(2/0, 2, 3/0, 4/0)$
۳	$T(0/2, 0/8, 2/0, 2/2)$	۸	$T(-0/2, 0/2, 1/0, 1/6)$
۴	$T(0/2, 2, 0/5, 0/9)$	۹	$T(-0/2, 3/0, 3/5, 4/0)$
۵	$T(-0/6, 0/6, 3/0, 3)$	۱۰	$T(0/1, 0/9, 2/0, 2/2)$

فرض کنید $\beta = 0/3$ ، میزان ریسک حداکثر $0/7$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل $1/5$ باشد. از مدل‌های (۳۳.۲) و (۳۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & -0/16x_1 - 0/46x_2 - 0/38x_3 - 0/74x_4 + 0/24x_5 - 0/2x_6 - 2x_7 \\ & + 0/08x_8 - 0/76x_9 - 0/34x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/625x_1 + 0/95x_2 + 1/3x_3 + 0/9x_4 + 1/5x_5 + 1/975x_6 \\ \quad + 2/75x_7 + 0/65x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10} \geq 1/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (52.2)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & 0/625x_1 + 0/95x_2 + 1/3x_3 + 0/9x_4 + 1/5x_5 + 1/975x_6 + 2/75x_7 \\ & + 0/65x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -0/16x_1 - 0/46x_2 - 0/38x_3 - 0/74x_4 + 0/24x_5 - 0/2x_6 \\ \quad - 2x_7 + 0/08x_8 - 0/76x_9 - 0/34x_{10} \leq 0/7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (53.2)$$

همچنین از مدل‌های (۳۴.۲) و (۳۶.۲) و برای $\beta = 0/7$ داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & -0/43x_1 - 0/74x_2 - 0/94x_3 - 0/95x_4 - 0/85x_5 - 1/3x_6 - 2/3x_7 \\ & - 0/32x_8 - 2/02x_9 - 0/94x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/625x_1 + 0/95x_2 + 1/3x_3 + 0/9x_4 + 1/5x_5 + 1/975x_6 \\ \quad + 2/75x_7 + 0/65x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10} \geq 1/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (54.2)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.625x_1 + 0.95x_2 + 1.3x_3 + 0.9x_4 + 1.5x_5 + 1.975x_6 + 2.75x_7 \\ & + 0.65x_8 + 2.575x_9 + 1.3x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -0.43x_1 - 0.74x_2 - 0.94x_3 - 0.95x_4 - 0.85x_5 - 1.3x_6 \\ \quad - 2.3x_7 - 0.32x_8 - 2.02x_9 - 0.94x_{10} \leq 0.7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (55.2)$$

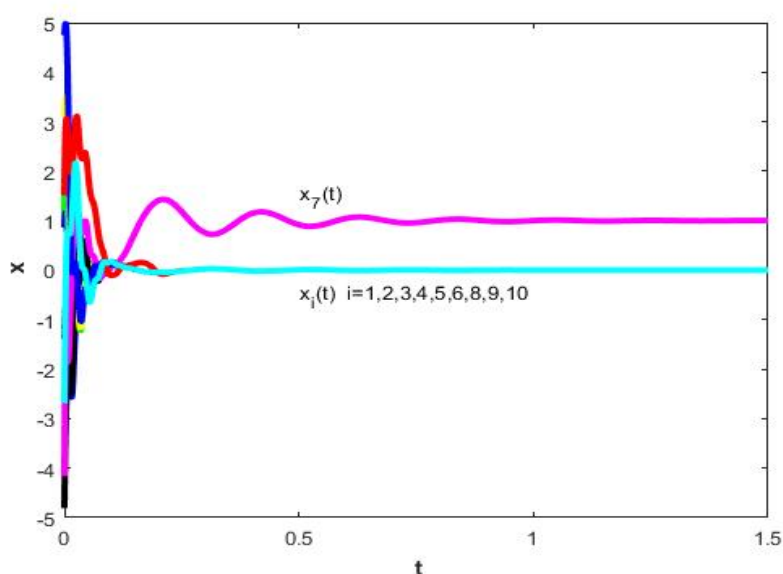
با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده جواب بهینه برای مدل (۵۲.۲) به صورت

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

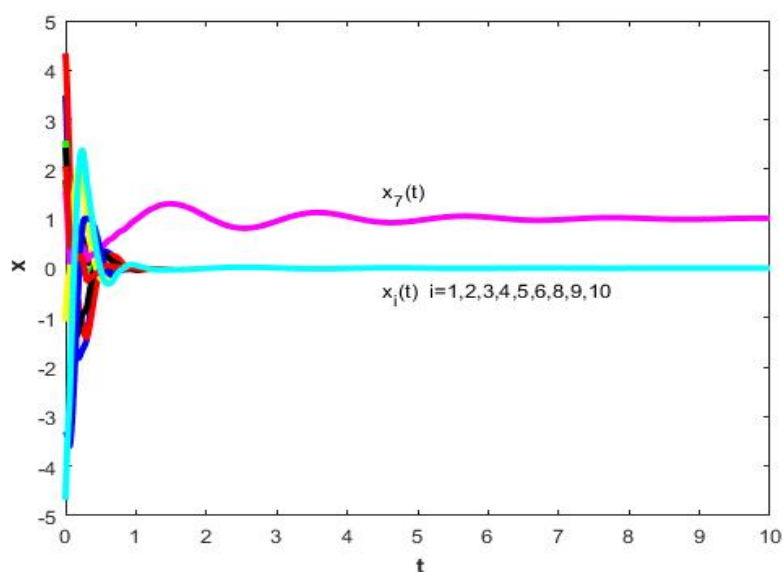
و برای (۵۴.۲) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۱/۵ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۵۲.۲) و (۵۴.۲) در شکل‌های ۱۱.۲ و ۱۲.۲ نمایش داده شده است.



شکل ۱۱.۲: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۲.۲)



شکل ۱۲.۲: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۴.۲)

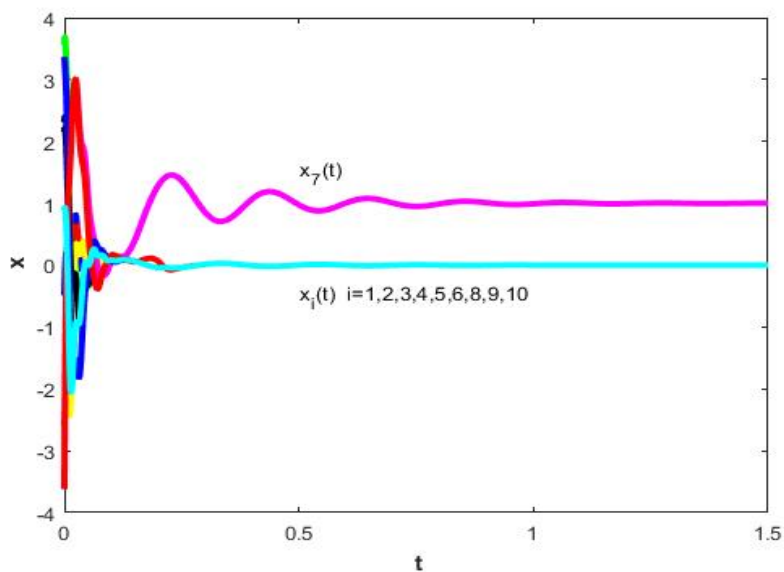
همچنین جواب بهینه برای مدل (۵۳.۲) به صورت

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

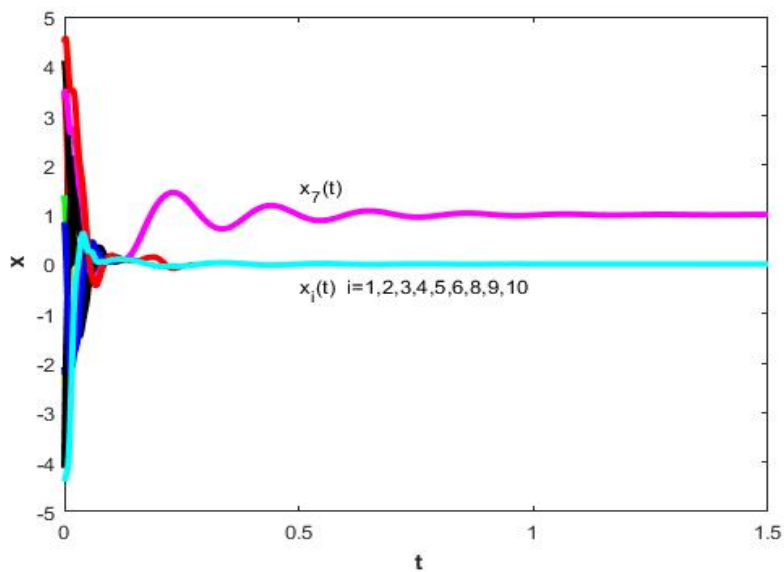
و برای مدل (۵۵.۲) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T.$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۷٪ سرمایه گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۵۳.۲) و (۵۵.۲) در شکل های ۱۳.۲ و ۱۴.۲ نمایش داده شده است.



شکل ۱۳.۲: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۳.۲)



شکل ۱۴.۲: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۵.۲)

فصل ۳

نظریه مجموعه نامعین

درجه اعتقاد^۱ برای همه ما آشناست. پیشامد نمونه‌ای از اعتقاد است، برای مثال، خورشید فردا طلوع خواهد کرد، هفته آینده آفتابی خواهد بود، آن شخص مردی جوان است، نمونه‌هایی از اعتقاد است. یک درجه اعتقاد بیانگر شدت اعتقاد ما به وقوع یک پیشامد است. اگر کاملاً معتقد باشیم یک پیشامد اتفاق خواهد افتاد آن‌گاه درجه اعتقاد ما ۱ است (اعتقاد کامل) [۲]. در خصوص پیشامد، درجه اعتقاد بسیار بستگی به دانش شخصی (حتی شامل اولویت) ما دارد. هنگامی که دانش شخصی تغییر کند درجه اعتقاد نیز تغییر می‌کند. شاید بعضی‌ها تصور کنند که درجه اعتقاد باید به وسیله احتمال غیرعینی یا نظریه مجموعه فازی مدل‌سازی شود. این تصور معمولاً نامناسب است زیرا ممکن است در این مورد هر دو آن‌ها منجر به نتایج غیر شهودی شوند.

برای بررسی منطقی درجات اعتقاد شخصی، لیو [۲۴] در سال ۲۰۰۷ اندازه نامعین^۲ را پیشنهاد داد و نظریه عدم قطعیت^۳ را معرفی کرد و پس از آن توسط پژوهشگران بسیاری مورد مطالعه قرار گرفت. با نگاهی به زندگی روزمره‌ی بشر، می‌توان دریافت که زندگی سراسر عدم قطعیت است. اکثر مردم آموخته‌اند، که برای اتخاذ تصمیمات بزرگ و کوچکی که در طی حیات آنان رخ می‌دهد، با عدم قطعیت موجود، دست به گریبان شده و از میان گزینه‌های پیش‌رویشان دست به انتخاب بهترین گزینه بزنند. آنچه در اغلب موارد، تصمیمات بشر را دچار اشتباه می‌نماید، نبود اطلاعات کافی و در نتیجه بروز عدم قطعیت در مسائل می‌باشد.

عدم قطعیت به‌عنوان یک مفهوم عمومی اصطلاحی است که عدم اطمینان انسان را در مورد برخی اشخاص یا اشیا منعکس می‌نماید.

در این فصل برخی مفاهیم پایه و قضایایی در نظریه عدم قطعیت را بازگو می‌کنیم. مطالب این

^۱Belief Degree

^۲Uncertain Measure

^۳Uncertain Theory

فصل برگرفته از مرجع [۲۶] است.

تعریف ۱.۰.۳. فرض کنید Γ مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک جبر از مجموعه‌ها روی Γ ، گردایه‌ای ناتهی چون \mathcal{L} از زیر مجموعه‌های Γ است که تحت اجتماع‌های متناهی و متمم‌گیری بسته باشد. به عبارت دیگر، اگر $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n \in \mathcal{L}$ ، آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i \in \mathcal{L}$ و اگر $\Lambda \in \mathcal{L}$ ، آن‌گاه $\Lambda^c \in \mathcal{L}$. یک σ -جبر، جبری است که تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر بسته باشد. چنان‌چه Γ یک فضای متری یا به‌طور کلی یک فضای توپولوژیک باشد، σ -جبر تولید شده به‌وسیله خانواده مجموعه‌های باز واقع در Γ ، σ -جبر بورل^۴ روی Γ نامیده می‌شود و آن را با B نشان می‌دهیم. اعضای σ -جبر بورل را مجموعه‌های بورل می‌نامیم. بنابراین B شامل مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، اشتراک‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز، اجتماع‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته و غیره است.

۱.۳ اندازه نامعین

فرض کنید (Γ, \mathcal{L}) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. هر عنصر Λ در \mathcal{L} یک مجموعه اندازه‌پذیر نامیده می‌شود. هر مجموعه اندازه‌پذیر یک پیشامد در نظریه عدم قطعیت است. M یک اندازه نامعین روی σ -جبر \mathcal{L} تعریف می‌شود. بنابراین عدد $M\{\Lambda\}$ به صورت یک تابع مجموعه‌ای به هر پیشامد Λ به منظور نشان دادن درجه اعتقاد برای اندازه‌گیری اعتقاد ما به وقوع پیشامد Λ اختصاص داده می‌شود. اندازه نامعین M باید خواص ریاضی معینی داشته باشد. به منظور ارتباط منطقی با درجه اعتقاد، لئو سه اصل موضوعه زیر را در نظریه عدم قطعیت مطرح کرد

۱. نرمال بودن؛

$$M\{\Gamma\} = 1.$$

۲. خود دوگانگی،^۵ برای هر پیشامد Λ ؛

$$M\{\Lambda\} + M\{\Lambda^c\} = 1.$$

۳. زیر افزایشی شمارا؛^۶ برای هر دنباله شمارش‌پذیر از پیشامدهای Λ

$$M\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} M\{\Lambda_i\}.$$

لیو [۲۵] اندازه نامعین حاصل ضربی و اصل حاصل ضربی را تعریف کرد.

تعریف ۱.۱.۳. (اصل حاصل ضربی) فرض کنید $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, M_k)$ یک فضای نامعین به ازای $k = 1, 2, \dots, n$ باشد. می‌نویسیم:

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots \times \mathcal{L}_n,$$

^۴ Borel
^۵ Duality

^۶ Subadditivity

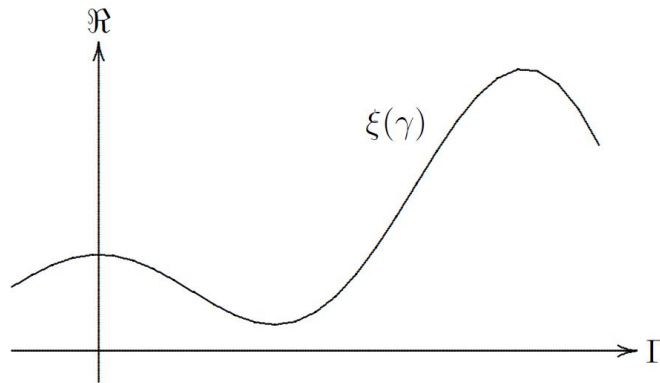
آن گاه اندازه نامعین حاصل ضربی روی Γ به ازای هر $\Lambda \in \mathcal{L}$ به صورت زیر است:

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}, \\ \text{if} \quad \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > \circ/\delta, \\ 1 - \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}, \\ \text{if} \quad \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > \circ/\delta, \\ \circ/\delta, \quad o.w, \end{cases} \quad (1.3)$$

۲.۳ متغیر نامعین

متغیر نامعین^۷ یک مفهوم اساسی در نظریه عدم قطعیت است که نشان دهنده میزان عدم قطعیت است.

تعریف ۱.۲.۳ [۲۴] یک متغیر نامعین یک تابع اندازه پذیر ξ از σ -جبر \mathcal{L} به مجموعه اعداد حقیقی است. یک متغیر نامعین ξ با یک توزیع نامعین که توسط لیو تعریف شده است مشخص می شود. شکل ۳.۱ یک نمونه متغیر نامعین را نشان می دهد.



شکل ۱.۳: یک متغیر نامعین

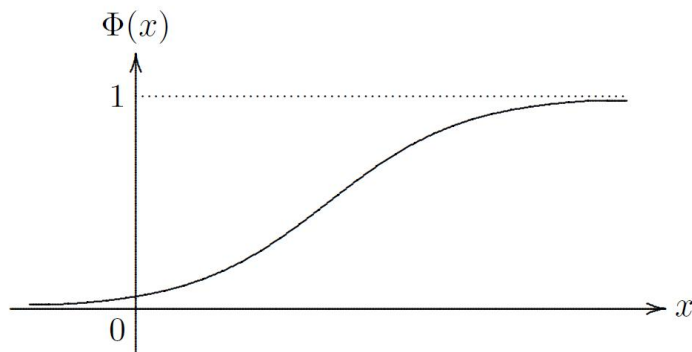
۳.۳ توزیع نامعین

تعریف ۱.۳.۳ توزیع نامعین^۸ $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ برای یک متغیر نامعین ξ به ازای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\}. \quad (2.3)$$

^۷Uncertain Variable

^۸Uncertain Distribution



شکل ۲.۳: یک توزیع نامعین

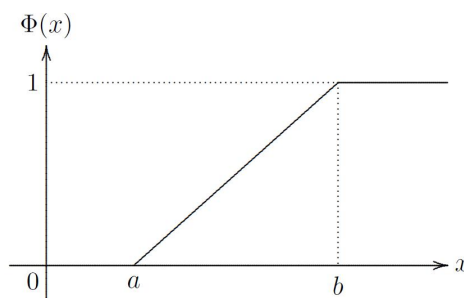
شکل ۳.۲ نمودار یک نمونه توزیع نامعین را نشان می‌دهد.

برخی از توزیع‌های نامعین

تعریف ۲.۳.۳. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین خطی^۹ گوئیم اگر توزیع نامعین خطی زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b, \end{cases} \quad (۳.۳)$$

و آن را با $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ نشان می‌دهیم که a و b اعداد حقیقی‌اند و $a < b$.



شکل ۳.۳: توزیع نامعین خطی

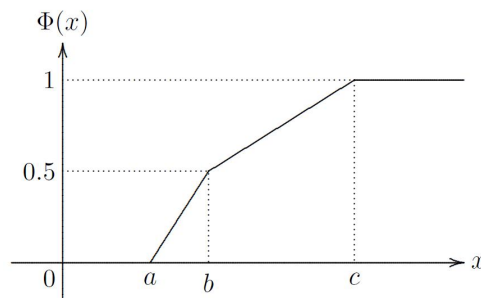
شکل ۳.۳ نمودار یک توزیع نامعین خطی را نشان می‌دهد.

^۹Linear Uncertainty Variable

تعریف ۳.۳.۳. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین زیگزاگ^{۱۰} گوئیم اگر توزیع نامعین زیگزاگ زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & a \leq x < b, \\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)}, & b \leq x < c, \\ 1, & x \geq c, \end{cases} \quad (4.3)$$

و آن را با $\xi \sim \mathcal{Z}(a, b, c)$ نشان می‌دهیم که a و b و c اعداد حقیقی اند و $a < b < c$.



شکل ۴.۳: توزیع نامعین زیگزاگ

شکل ۳.۴ نمودار یک توزیع نامعین زیگزاگ را نشان می‌دهد.

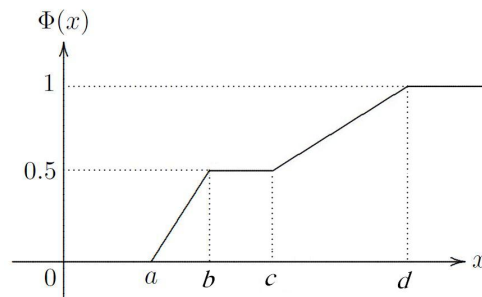
تعریف ۴.۳.۳. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین ذوزنقه‌ای^{۱۱} گوئیم اگر توزیع نامعین زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & a \leq x < b, \\ 0.5, & b \leq x < c, \\ \frac{x+d-2c}{2(d-c)}, & c \leq x < d, \\ 1, & x \geq d, \end{cases} \quad (5.3)$$

و آن را با $\xi \sim \mathcal{T}(a, b, c, d)$ نشان می‌دهیم که a و b و c و d اعداد حقیقی اند و $a < b < c < d$.

^{۱۰} Zigzag Uncertainty Variable

^{۱۱} Trapezoidal Uncertainty Variable



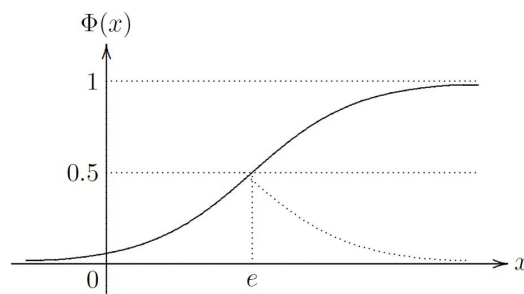
شکل ۵.۳: توزیع نامعین ذوزنقه‌ای

شکل ۳.۵ نمودار یک توزیع نامعین ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.

تعریف ۵.۳.۳. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین نرمال^{۱۲} گوییم اگر توزیع نامعین نرمال زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad (6.3)$$

که آن را با $\xi \sim \mathcal{N}(e, \sigma)$ نشان می‌دهیم که در آن e و σ اعداد حقیقی هستند.



شکل ۶.۳: توزیع نامعین نرمال

شکل ۳.۶ نمودار یک توزیع نامعین نرمال را نشان می‌دهد.

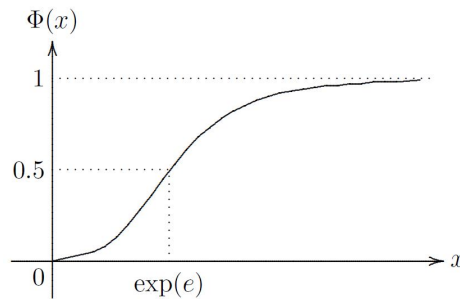
تعریف ۶.۳.۳. [۲] یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین لگ نرمال^{۱۳} گوییم اگر $\ln \xi$ یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ باشد، به عبارت دیگر توزیع نامعین زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e - \ln x)}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad (7.3)$$

که آن را با $\xi \sim \mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ نشان می‌دهیم که در آن e و σ اعداد حقیقی هستند.

^{۱۲}Normal Uncertainty Variable

^{۱۳}Lognormal Uncertainty Variable



شکل ۷.۳: توزیع نامعین لگ نرمال

شکل ۳.۷ نمودار یک توزیع نامعین لگ نرمال را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۳.۳. [۳] (قضیه وارون‌سازی اندازه [۲۶]) فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ باشد. آن‌گاه برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$M\{\xi \leq x\} = \Phi(x), \quad M\{\xi > x\} = 1 - \Phi(x). \quad (۸.۳)$$

تعریف ۷.۳.۳. [۳] توزیع نامعین $\Phi(x)$ منظم نامیده می‌شود اگر نسبت به x به ازای $<$ $\Phi(x) < 1$ تابعی پیوسته و اکیدا صعودی باشد و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1.$$

۴.۳ معکوس توزیع نامعین

واضح است که توزیع نامعین منظم $\Phi(x)$ روی برد $\Phi(x)$ که به صورت $0 < \Phi(x) < 1$ است یک تابع معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ دارد و $\Phi^{-1}(\alpha)$ در بازه $(0, 1)$ وجود دارد.

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین منظم $\Phi(x)$ باشد. تابع معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ ، معکوس توزیع نامعین ξ نامیده می‌شود.

توجه کنید که معکوس توزیع نامعین $\Phi^{-1}(\alpha)$ در بازه $(0, 1)$ خوش‌تعریف است. در صورت نیاز می‌توانیم دامنه را با تعریف زیر به بازه $[0, 1]$ گسترش دهیم.

$$\Phi^{-1}(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \Phi^{-1}(\alpha), \quad \Phi^{-1}(1) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \Phi^{-1}(\alpha). \quad (۹.۳)$$

برخی از معکوس توزیع‌های نامعین

تعریف ۲.۴.۳. [۲۶] معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)a + ab. \quad (۱۰.۳)$$

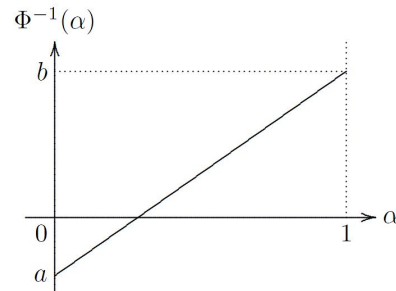
از توزیع نامعین خطی داریم:

$$\frac{x-a}{b-a} = \alpha,$$

حال

$$\alpha b - \alpha a = x - a, \quad \alpha b - \alpha a + a = x, \quad (1 - \alpha)a + \alpha b = x$$

در ابتدا قرار داریم $\Phi(x) = \alpha$ با معکوس گرفتن از طرفین داریم $\Phi^{-1}(\alpha) = x$ ، پس با جایگذاری رابطه (۱۰.۳) به دست می‌آید.

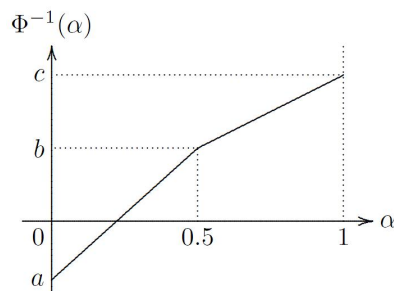


شکل ۸.۳: معکوس توزیع نامعین خطی

شکل ۳.۸ نمودار معکوس توزیع نامعین خطی را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۴.۳. [۲۶] معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین زیگزاگ $Z(a, b, c)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a + 2\alpha b, & \alpha < 0.5, \\ (2 - 2\alpha)b + (2\alpha - 1)c, & \alpha \geq 0.5. \end{cases} \quad (11.3)$$

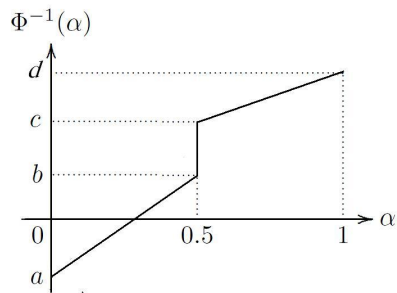


شکل ۹.۳: معکوس توزیع نامعین زیگزاگ

شکل ۳.۹ نمودار معکوس توزیع نامعین زیگزاگ را نشان می‌دهد.

تعریف ۴.۴.۳. [۲۶] معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین ذوزنقه‌ای $T(a, b, c, d)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a + 2\alpha b, & \alpha < 0.5, \\ (2 - 2\alpha)c + (2\alpha - 1)d, & \alpha \geq 0.5. \end{cases} \quad (12.3)$$

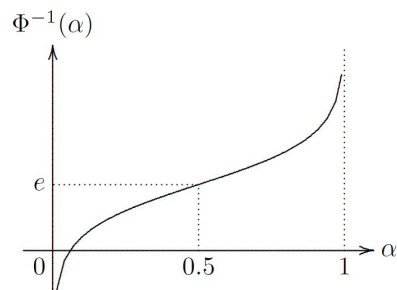


شکل ۱۰.۳: معکوس توزیع نامعین دوزنقه‌ای

شکل ۳.۱۰ نمودار معکوس توزیع نامعین دوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.

تعریف ۵.۴.۳. [۲۶] معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right). \quad (13.3)$$

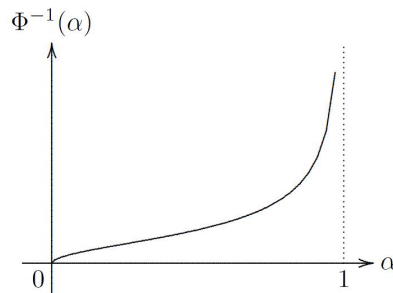


شکل ۱۱.۳: معکوس توزیع نامعین نرمال

شکل ۳.۱۱ نمودار معکوس توزیع نامعین نرمال را نشان می‌دهد.

تعریف ۶.۴.۳. [۲۶] معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین لگ‌نرمال $\text{LOGN}(e, \sigma)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right). \quad (14.3)$$



شکل ۱۲.۳: معکوس توزیع نامعین لگ نرمال

شکل ۳.۱۲ نمودار معکوس توزیع نامعین لگ نرمال را نشان می‌دهد.

۵.۳ استقلال متغیرهای نامعین

تعریف ۱.۵.۳ [۲۵]. متغیرهای نامعین $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ مستقل نامیده می‌شوند اگر برای هر مجموعه بورل B_1, B_2, \dots, B_n از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}\right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}. \quad (15.3)$$

قضیه ۱.۵.۳ [۲۶]. متغیرهای نامعین $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ مستقل هستند اگر و تنها اگر

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}\right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}. \quad (16.3)$$

۶.۳ قانون عملیاتی

قضیه ۱.۶.۳ [۲۵]. فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل و $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اندازه‌پذیر باشند. آن‌گاه $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ یک متغیر نامعین است به طوری که

$$\mathcal{M}\{\xi \in B\} = \begin{cases} \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\}, & \text{if } \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\} > \circ/\delta, \\ 1 - \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\}, & \text{if } \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\} > \circ/\delta, \\ \circ/\delta, & \text{o.w.} \end{cases} \quad (17.3)$$

که در آن B_1, B_2, \dots, B_n, B مجموعه‌های بورل از اعداد حقیقی هستند و

$$f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B,$$

یعنی $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \subset B$ به ازای هر $t_1 \in B_1, t_2 \in B_2, \dots, t_n \in B_n$.

قضیه ۲.۶.۳. [۲۶] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ و f یک تابع اکیدا صعودی باشد. آن گاه توزیع نامعین $f(\xi)$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\Psi(t) = \Phi(f^{-1}(t)), \quad (18.3)$$

که می تواند به صورت زیر نیز بیان شود:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi^{-1}(\alpha)), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (19.3)$$

قضیه ۳.۶.۳. [۴۱] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل به ترتیب با توزیع های نامعین منظم به صورت $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ و Ψ توزیع نامعین مجموع $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ هستند. اگر $\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(\alpha)$ به ازای هر $\alpha \in (0, 1)$ منحصر به فرد باشند آن گاه داریم:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) + \dots + \Phi_n^{-1}(\alpha), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (20.3)$$

قضیه ۴.۶.۳. [۲۶] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل و مثبت به ترتیب با توزیع های نامعین منظم به صورت $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ باشند، آن گاه حاصل ضرب این متغیرها یعنی $\xi = \xi_1 \times \xi_2 \times \dots \times \xi_n$ دارای معکوس تابع توزیع به صورت زیر است:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) \times \Phi_2^{-1}(\alpha) \times \dots \times \Phi_n^{-1}(\alpha). \quad (21.3)$$

قضیه ۵.۶.۳. [۲۶] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین خطی مستقل $\mathcal{L}(a_1, b_1)$ و $\mathcal{L}(a_2, b_2)$ هستند. آن گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین خطی است و داریم:

$$\mathcal{L}(a_1, b_1) + \mathcal{L}(a_2, b_2) = \mathcal{L}(a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (22.3)$$

و حاصل ضرب یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین خطی است و داریم:

$$k.\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(ka, kb). \quad (23.3)$$

قضیه ۶.۶.۳. [۲۶] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین زیگزاگ مستقل $\mathcal{Z}(a_1, b_1, c_1)$ و $\mathcal{Z}(a_2, b_2, c_2)$ باشند. آن گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین زیگزاگ به صورت زیر است:

$$\mathcal{Z}(a_1, b_1, c_1) + \mathcal{Z}(a_2, b_2, c_2) = \mathcal{Z}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \quad (24.3)$$

و حاصل ضرب یک متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a, b, c)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین زیگزاگ است و داریم:

$$k.\mathcal{Z}(a, b, c) = \mathcal{Z}(ka, kb, kc). \quad (25.3)$$

قضیه ۷.۶.۳. [۲۶] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین ذوزنقه ای مستقل به صورت $\mathcal{T}(a_1, b_1, c_1, d_1)$ و $\mathcal{T}(a_2, b_2, c_2, d_2)$ باشند. آن گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین ذوزنقه ای به صورت زیر است:

$$\mathcal{T}(a_1, b_1, c_1, d_1) + \mathcal{T}(a_2, b_2, c_2, d_2) = \mathcal{T}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2), \quad (26.3)$$

و حاصل ضرب یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای $T(a, b, c, d)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای است و داریم:

$$k.T(a, b, c, d) = T(ka, kb, kc, kd). \quad (27.3)$$

قضیه ۸.۶.۳. [۲۶] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین نرمال مستقل $\mathcal{N}(e_1, \sigma_1)$ و $\mathcal{N}(e_2, \sigma_2)$ هستند. آن گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین نرمال است و داریم:

$$\mathcal{N}(e_1, \sigma_1) + \mathcal{N}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{N}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2), \quad (28.3)$$

همچنین حاصل ضرب یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین نرمال است و داریم:

$$k.\mathcal{N}(e, \sigma) = \mathcal{N}(ke, k\sigma). \quad (29.3)$$

قضیه ۹.۶.۳. [۲۶] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین لگ نرمال مستقل به صورت $\mathcal{LOGN}(e_1, \sigma_1)$ و $\mathcal{LOGN}(e_2, \sigma_2)$ هستند. آن گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین لگ نرمال است و داریم:

$$\mathcal{LOGN}(e_1, \sigma_1) + \mathcal{LOGN}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{LOGN}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2), \quad (30.3)$$

همچنین حاصل ضرب یک متغیر نامعین لگ نرمال $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین لگ نرمال است و داریم:

$$k.\mathcal{LOGN}(e, \sigma) = \mathcal{LOGN}(ke, k\sigma). \quad (31.3)$$

۷.۳ امید ریاضی متغیر نامعین

امید ریاضی (مقدار مورد انتظار)، مقدار میانگین متغیر نامعین در راستای به دست آوردن اندازه نامعین است و نشان دهنده اندازه متغیر نامعین است. در ادامه برای اندازه گیری بازده سرمایه گذاری از امید ریاضی استفاده می کنیم.

تعریف ۱.۷.۳. [۲۶] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین است، آن گاه امید ریاضی ξ به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \leq x\} dx, \quad (32.3)$$

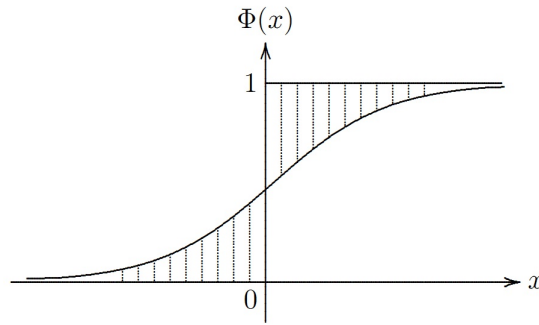
که هر دو انتگرال متناهی می باشند.

قضیه ۱.۷.۳. [۲۶] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ است. آن گاه داریم:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x)) dx - \int_{-\infty}^0 \Phi(x) dx. \quad (33.3)$$

قضیه ۲.۷.۳. [۲۶] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین منظم Φ باشد، اگر امید ریاضی موجود است آن گاه امید ریاضی آن در رابطه زیر صدق می کند:

$$E[\xi] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha. \quad (34.3)$$



شکل ۱۳.۳: نمودار تابع توزیع متغیر نامعین

امید ریاضی برخی از متغیرهای نامعین

لم ۱.۷.۳. [۲۶] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a+b}{2}.$$

لم ۲.۷.۳. [۲۶] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a, b, c)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a+2b+c}{4}.$$

لم ۳.۷.۳. [۲۶] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای $\mathcal{T}(a, b, c, d)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

لم ۴.۷.۳. [۲۶] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = e.$$

لم ۵.۷.۳. [۲۶] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین لگ‌نرمال $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \begin{cases} \sigma\sqrt{3} \exp(e) \operatorname{csc}(\sigma\sqrt{3}), & \text{if } \sigma < \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \\ +\infty, & \text{if } \sigma \geq \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{cases} \quad (35.3)$$

قضیه ۳.۷.۳. [۲۶] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 متغیرهای نامعین مستقل با امید ریاضی متناهی هستند، آن گاه برای هر عدد حقیقی a و b داریم:

$$E[a\xi_1 + b\xi_2] = aE[\xi_1] + bE[\xi_2]. \quad (36.3)$$

۸.۳ ارزش در معرض ریسک در فضای عدم قطعیت

با توجه به مطالب گفته شده در فصل ۱ ارزش در معرض ریسک می‌تواند به‌عنوان یک اندازه ریسک در انتخاب سبد سهام استفاده شود، بنابراین برآوردی از آن در فضای عدم قطعیت ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۸.۳. فرض می‌کنیم ξ یک متغیر نامعین و $\beta \in (0, 1]$ ضریب اطمینان است. در این صورت ارزش در معرض ریسک از ξ تابع $\text{VaR} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به‌طوری که

$$\text{VaR}(\beta) = \sup\{x \mid \mathcal{M}\{\xi \geq x\} \geq \beta\}. \quad (37.3)$$

قضیه ۱.۸.۳. برای هر ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \Phi^{-1}(1 - \beta). \quad (38.3)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \text{VaR}(\beta) &= \sup\{x \mid \mathcal{M}\{\xi \geq x\} \geq \beta\} \\ &= \sup\{x \mid \Phi(x) \leq 1 - \beta\} \\ &= \sup\{x \mid x \leq \Phi^{-1}(1 - \beta)\} \\ &= \Phi^{-1}(1 - \beta). \end{aligned}$$

□

ارزش در معرض ریسک برخی از متغیرهای نامعین

لم ۱.۸.۳. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین خطی $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = a\beta + b(1 - \beta), \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (39.3)$$

برهان. با استفاده از (۳.۳) و قضیه (۱.۸.۳) داریم:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a, \\ \frac{r-a}{b-a}, & a \leq r < b, \\ 1, & r \geq b, \end{cases} \quad (40.3)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1 - r) = (1 - r)b + ar, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (41.3)$$

□

لم ۲.۸.۳. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\xi \sim \mathcal{Z}(a, b, c)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2b(1-\beta) + a(2\beta - 1), & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ (1-2\beta)c + 2b\beta, & \frac{1}{2} \leq \beta < 1. \end{cases} \quad (42.3)$$

برهان. با استفاده از (۴.۳) و قضیه (۱.۸.۳) داریم:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{r-a}{2(b-a)}, & a \leq r < b, \\ \frac{r+c-2b}{2(c-b)}, & b \leq r < c, \\ 1, & r \geq c, \end{cases} \quad (43.3)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = \begin{cases} 2b(1-r) + a(2r-1), & 0 < r \leq \frac{1}{2}, \\ (1-2r)c + 2br, & \frac{1}{2} \leq r < 1. \end{cases} \quad (44.3)$$

□

لم ۳.۸.۳. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین ذوزنقه‌ای $\xi \sim \mathcal{T}(a, b, c, d)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2b(1-\beta) + a(2\beta - 1), & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ (1-2\beta)d + 2\beta c, & \frac{1}{2} \leq \beta < 1. \end{cases} \quad (45.3)$$

برهان. با استفاده از (۵.۳) و قضیه (۱.۸.۳) داریم:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{r-a}{2(b-a)}, & a \leq r < b, \\ \frac{1}{2}, & b \leq r < c, \\ \frac{r+d-2c}{2(d-c)}, & c \leq r < d, \\ 1, & r \geq d, \end{cases} \quad (46.3)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = \begin{cases} 2b(1-r) + a(2r-1), & 0 < r \leq \frac{1}{2}, \\ (1-2r)d + 2rc, & \frac{1}{2} \leq r < 1. \end{cases} \quad (47.3)$$

□

لم ۴.۸.۳. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین نرمال $\xi \sim \mathcal{N}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = e + \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) \right). \quad (48.3)$$

برهان. با استفاده از (۶.۳) و قضیه (۱.۸.۳) داریم:

$$\Phi(r) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e-r)}{\sigma\sqrt{\pi}}\right) \right)^{-1}, \quad (49.3)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = e + \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-r}{r}\right) \right). \quad (50.3)$$

□

لم ۵.۸.۳. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین لگ نرمال $\xi \sim \text{LOGN}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) \right)\right). \quad (51.3)$$

برهان. با استفاده از (۷.۳) و قضیه (۱.۸.۳) داریم:

$$\Phi(r) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e - \ln r)}{\sigma\sqrt{\pi}}\right) \right)^{-1}, \quad (52.3)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = \exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-r}{r}\right) \right)\right). \quad (53.3)$$

□

۹.۳ مدل متوسط - ارزش در معرض ریسک در فضای عدم قطعیت

تعریف ۱.۹.۳. فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین و $\alpha \in (0, 1]$ سطح اطمینان است. در این صورت متوسط ارزش در ریسک از ξ تابع $\xi_{\text{AVaR}} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$\xi_{\text{AVaR}}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \xi_{\text{VaR}}(\beta) d\beta. \quad (54.3)$$

مدل متوسط - ارزش در معرض ریسک برخی از متغیرهای نامعین

لم ۱.۹.۳. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین خطی $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ است. در این صورت داریم:

$$\xi_{\text{AVaR}}(\alpha) = \frac{a\alpha}{\frac{1}{\alpha}} + b \left(1 - \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha}}\right), \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (55.3)$$

برهان. با توجه به (۳۹.۳) و (۵۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \xi_{\text{AVaR}}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \xi_{\text{VaR}}(\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (a\beta + b(1 - \beta)) d\beta \\ &= \frac{a\alpha}{\frac{1}{\alpha}} + b \left(1 - \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

□

لم ۲.۹.۳. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\xi \sim \mathcal{Z}(a, b, c)$ است. در این صورت داریم:

$$\xi_{\text{AVaR}}(\alpha) = \begin{cases} 2b \left(1 - \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha}}\right) + a(\alpha - 1), & 0 < \alpha \leq \frac{1}{\frac{1}{\alpha}}, \\ \frac{1}{\frac{1}{\alpha}}(2b - a) - a\alpha + b\alpha, & \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (56.3)$$

برهان. با توجه به (۴۲.۳) و (۵۴.۳) برای $0 < \alpha \leq \frac{1}{\frac{1}{\alpha}}$ داریم:

$$\begin{aligned} \xi_{\text{AVaR}}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \xi_{\text{VaR}}(\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha 2b(1 - \beta) + a(2\beta - 1) d\beta \\ &= 2b \left(1 - \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha}}\right) + a(\alpha - 1), \end{aligned}$$

و همچنین برای $\frac{1}{\frac{1}{\alpha}} \leq \alpha < 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \xi_{\text{AVaR}}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \xi_{\text{VaR}}(\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}} 2b(1 - \beta) + a(2\beta - 1) d\beta + \int_{\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}}^1 ((1 - 2\beta)c + 2b\beta) d\beta + \int_1^\alpha (1 - 2\beta)c + 2b\beta d\beta \right) \\ &= 2b \left(1 - \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha}}\right) + a(\alpha - 1). \end{aligned}$$

□

لم ۳.۹.۳. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین ذوزنقه‌ای $\xi \sim \mathcal{T}(a, b, c, d)$ است. در این صورت داریم:

$$\xi_{AVaR}(\alpha) = \begin{cases} 2b \left(1 - \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha}}\right) + a(\alpha - 1), & 0 < \alpha \leq \frac{1}{\alpha}, \\ \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} (3b - a - d - c) + (1 - \alpha)d + \alpha c, & \frac{1}{\alpha} \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (57.3)$$

برهان. با توجه به (45.3) و (54.3) برای $0 < \alpha \leq \frac{1}{\alpha}$ داریم:

$$\begin{aligned} \xi_{AVaR}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \xi_{VaR}(\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} (2b(1 - \beta) + a(2\beta - 1)) d\beta \\ &= 2b \left(1 - \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha}}\right) + a(\alpha - 1), \end{aligned}$$

و همچنین برای $\frac{1}{\alpha} \leq \alpha < 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \xi_{AVaR}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \xi_{VaR}(\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^{\frac{1}{\alpha}} 2b(1 - \beta) + a(2\beta - 1) d\beta + \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 ((1 - 2\beta)d + 2b\beta c) d\beta + \int_1^{\alpha} (1 - 2\beta)d + 2b\beta c d\beta \right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} (3b - a - d - c) + (1 - \alpha)d + \alpha c. \end{aligned}$$

□

فصل ۴

بهینه‌سازی پرتفوی با بازده نامعین در فضای نامعین

در مدل‌های معمولی پرتفوی همواره از بازده‌های تحقق‌یافته اوراق بهادار که مربوط به گذشته بوده و با اطلاعات دقیق تاریخی تعیین می‌شوند استفاده می‌شود. با این حال، اطلاعات دقیق همیشه در دسترس نیست و امروزه، با توسعه بازارهای سهام، پیش‌بینی بازده مورد انتظار اوراق بهادار با مقادیر تصادفی نسبتاً سخت است. بنابراین، برای رسیدگی به این قبیل از عدم اطمینان بهتر است که بازده‌های مورد انتظار را به صورت متغیرهایی با توزیع مبهم، مانند متغیرهای نامطمئن، در مسائل پرتفوی در نظر بگیریم. در این فصل به بررسی مسأله انتخاب پرتفوی بهینه، زمانی که بازده متغیر نامعین باشد می‌پردازیم.

۱.۴ مدل متوسط – ارزش در معرض ریسک

این مدل در مسأله انتخاب سبد سرمایه بهینه، به گونه‌ای است که در آن، بازده سرمایه‌گذاری را امید ریاضی سبد سرمایه و متوسط ارزش در معرض ریسک را به عنوان معیار ریسک در نظر می‌گیریم.

با توجه به میزان ریسک‌پذیری افراد در سرمایه‌گذاری از این مدل به دو صورت مدل ریسک‌پذیر و مدل ریسک‌گریز به صورت زیر استفاده می‌شود.

- مدل ریسک‌پذیر که در آن سرمایه‌گذار، مقدار بازده معینی را انتظار دارد و می‌خواهد

ریسک را با توجه به سطح بازده مینیمم کند، مدل بهینه‌سازی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{AVaR}(\beta), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} E[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i] \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

• مدل ریسک‌گریز، یک پرتفوی با ارزش مورد انتظار بهینه، برای یک سطح مشخصی از ریسک است. مدل بهینه‌سازی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \max \quad & E[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i], \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \text{AVaR}(\beta) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

در مدل‌های فوق x_i نسبت سرمایه‌گذاری در سهام i ام و ξ_i نشان‌دهنده بازده نامعین i امین سهام $i = 1, 2, \dots, n$ و S ماکزیمم سطح ریسک سرمایه‌گذاری که صورت می‌گیرد و R مینیمم بازده مورد انتظار و همچنین E امید ریاضی و $\text{AVaR}(\beta)$ متوسط ارزش در معرض ریسک با ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ که مقداری ثابت می‌باشد در نظر گرفته شده است.

۱.۱.۴ معادله‌های قطعی

در روش‌های معمول نیاز به تبدیل تابع هدف و قیدها به معادله دقیق آن‌ها است. همانطور که می‌دانیم اجرا و موفق بودن این فرایند در مواردی خاص و بسیار دشوار است. با جایگزینی مدل‌های نامعین با معادله‌های قطعی در حالاتی خاص به حل مسأله انتخاب سبد سرمایه‌مدل متوسط ارزش در معرض ریسک می‌پردازیم.

حالت نامعین خطی

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر نامعین خطی باشد، در این صورت داریم:

$$\xi_i = \mathcal{L}(a_i, b_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین خطی است. با استفاده از لم‌های (۱.۹.۳) و (۱.۷.۳) مدل بهینه‌سازی (۱.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i \beta}{\alpha} \right) + b_i \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i}{\alpha} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۲.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i}{\alpha} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i \beta}{\alpha} \right) + b_i \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

حالت نامعین زیگزاگ

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار a_i ، ξ_i متغیر نامعین زیگزاگ باشد، در این صورت داریم:

$$\xi_i = \mathcal{Z}(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین زیگزاگ است. با استفاده از لم‌های (۲.۹.۳) و (۲.۷.۳) مدل بهینه‌سازی (۱.۴) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{\alpha}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\alpha b_i \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) + a_i (\beta - 1) \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + \alpha b_i + c_i}{\alpha} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

و برای $\frac{1}{\alpha} \leq \beta < 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{\alpha \beta} (\alpha b_i - a_i) - \beta c_i + b_i \beta \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + \alpha b_i + c_i}{\alpha} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۲.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(2b_i \left(1 - \frac{\beta}{4} \right) + a_i(\beta - 1) \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (7.4)$$

و برای $1 < \beta \leq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{4\beta} (2b_i - a_i) - \beta c_i + b_i \beta \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.4)$$

حالت نامعین دوزنقه‌ای

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر نامعین دوزنقه‌ای باشد، در این صورت داریم:

$$\xi_i = \mathcal{T}(a_i, b_i, c_i, d_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین دوزنقه‌ای است. با استفاده از لم‌های (۳.۹.۳) و (۳.۷.۳) مدل بهینه‌سازی (۱.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(2b_i \left(1 - \frac{\beta}{4} \right) + a_i(\beta - 1) \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (9.4)$$

و برای $1 < \beta \leq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{4\beta} (3b_i - a_i - d_i - c_i) + (1 - \beta)d_i + \beta c_i \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۲.۴) برای $\frac{1}{4} < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i (2b_i(1 - \frac{\beta}{4}) + a_i(\beta - 1)) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (11.4)$$

و برای $\frac{1}{4} \leq \beta < 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{4\beta} (3b_i - a_i - d_i - c_i) + (1 - \beta)d_i + \beta c_i \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.4)$$

۲.۴ مثال‌های عددی

برای نشان دادن کارایی مدل‌های ذکر شده در حل مسائل انتخاب پرتفوی در شرایط نامعین مثال‌هایی مطرح و حل می‌شود. در شبیه‌سازی همه مثال‌ها از دستور ode45 در متلب و مدل (۳۸.۲) استفاده شده است که معادل روش رانگ کوتای مرتبه ۴ برای حل معادلات دیفرانسیل است.

مثال ۱.۲.۴. فرض کنید 10° ورق بهادار با بازده خطی $\xi_i = \mathcal{L}(a_i, b_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر است.

جدول ۱.۴: بازده‌های نامعین خطی از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$\mathcal{L}(1/0, 1/2)$	۶	$\mathcal{L}(0/5, 1/5)$
۲	$\mathcal{L}(0/8, 1/0)$	۷	$\mathcal{L}(0/1, 0/6)$
۳	$\mathcal{L}(2/1, 2/3)$	۸	$\mathcal{L}(0/3, 0/7)$
۴	$\mathcal{L}(0/9, 1/4)$	۹	$\mathcal{L}(1/7, 2/4)$
۵	$\mathcal{L}(2/0, 3/3)$	۱۰	$\mathcal{L}(0/4, 0/9)$

فرض کنید $\beta = 0/1$ ، میزان ریسک حداکثر $0/6$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل $2/5$ باشد. از مدل‌های (۳.۴) و (۴.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 1/19x_1 + 0/99x_2 + 2/29x_3 + 1/375x_4 + 3/235x_5 + 1/45x_6 + 0/575x_7 \\ & + 0/68x_8 + 2/365x_9 + 0/875x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/1x_1 + 0/9x_2 + 2/2x_3 + 1/15x_4 + 2/65x_5 + x_6 + 0/35x_7 + 0/5x_8 \\ \quad + 2/05x_9 + 0/65x_{10} \geq 2/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.4)$$

9

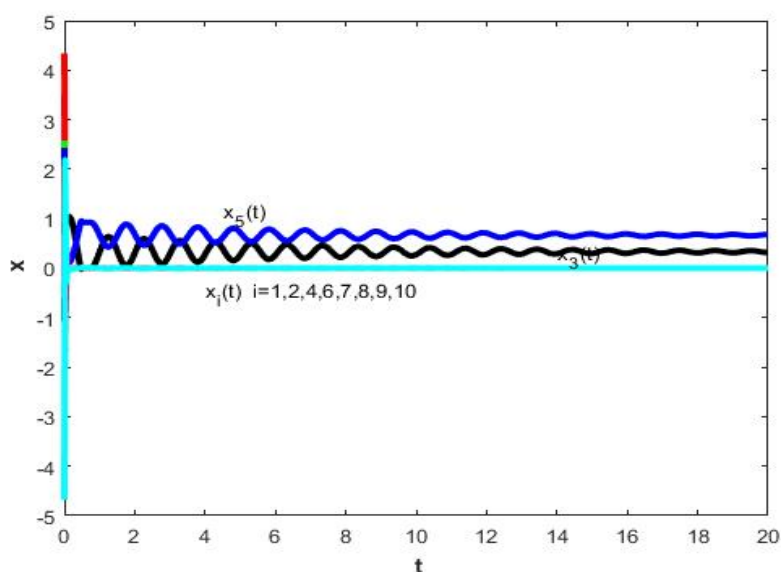
$$\begin{aligned} \max \quad & 1/1x_1 + 0/9x_2 + 2/2x_3 + 1/15x_4 + 2/65x_5 + x_6 + 0/35x_7 \\ & + 0/5x_8 + 2/05x_9 + 0/65x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/19x_1 + 0/99x_2 + 2/29x_3 + 1/375x_4 + 3/235x_5 + 1/45x_6 \\ \quad + 0/575x_7 + 0/68x_8 + 2/365x_9 + 0/875x_{10} \leq 0/6, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (14.4)$$

با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده جواب بهینه برای مدل (۱۳.۴) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^* = (0, 0, 0/33, 0, 0/67, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده $2/5$ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند.

رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسأله (۱۳.۴) در شکل ۱.۴ نمایش داده شده است.

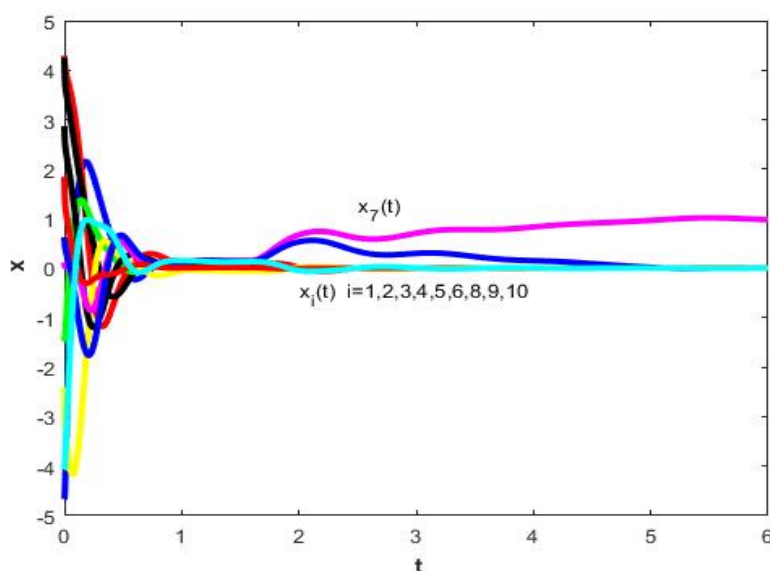


شکل ۱.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۳.۴)

همچنین جواب بهینه برای مدل (۱۴.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T.$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۰/۶ سرمایه گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مساله (۱۴.۴) در شکل ۲.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۲.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۴.۴)

مثال ۲.۲.۴. فرض کنید 1° ورق بهادار با بازده زیگزاگ $\xi_i = Z(a_i, b_i, c_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر است.

جدول ۲.۴: بازده‌های نامعین زیگزاگ از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$Z(-0/2, 2/1, 2/5)$	۶	$Z(-0/2, 2/5, 3/0)$
۲	$Z(-0/1, 1/9, 3/0)$	۷	$Z(-0/2, 3/0, 3/5)$
۳	$Z(-0/4, 3/0, 4/0)$	۸	$Z(-0/4, 2/5, 4/0)$
۴	$Z(-0/1, 2/0, 2/5)$	۹	$Z(-0/3, 2/8, 3/2)$
۵	$Z(-0/6, 3/0, 4/0)$	۱۰	$Z(-0/3, 2/0, 2/5)$

فرض کنید $\beta = 0/2$ ، میزان ریسک حداکثر $3/2$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل 2 باشد. از مدل‌های (۵.۴) و (۷.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3/94x_1 + 3/5x_2 + 5/72x_3 + 3/68x_4 + 5/88x_5 + 4/66x_6 + 5/56x_7 \\ & + 4/82x_8 + 5/28x_9 + 3/84x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 \\ \quad + 2/325x_7 + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10} \geq 2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (15.4)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 + 2/325x_7 \\ & + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3/94x_1 + 3/5x_2 + 5/72x_3 + 3/68x_4 + 5/88x_5 + 4/66x_6 \\ \quad + 5/56x_7 + 4/82x_8 + 5/28x_9 + 3/84x_{10} \leq 3/2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (16.4)$$

همچنین از مدل (۶.۴) و (۸.۴) برای $\beta = 0/6$ داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 1/59x_1 + 0/965x_2 + 2/06x_3 + 1/4x_4 + 2/15x_5 + 1/86x_6 + 2/28x_7 \\ & + 1/35x_8 + 2/21x_9 + 1/49x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 \\ \quad + 2/325x_7 + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10} \geq 2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (17.4)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 + 2/325x_7 \\ & + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/59x_1 + 0/965x_2 + 2/06x_3 + 1/4x_4 + 2/15x_5 + 1/86x_6 \\ \quad + 2/28x_7 + 1/35x_8 + 2/21x_9 + 1/49x_{10} \leq 3/2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (18.4)$$

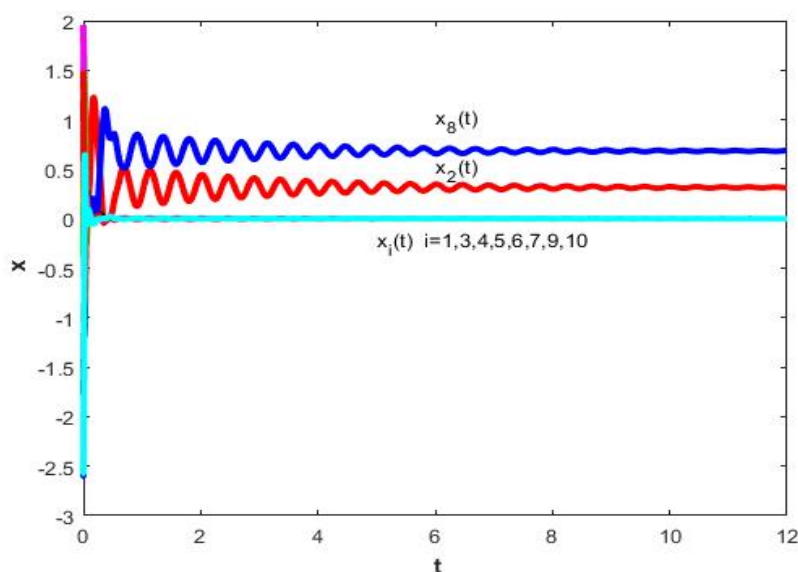
با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده جواب بهینه برای مدل (۱۵.۴) به صورت

$$x^* = (0, 0/32, 0, 0, 0, 0, 0/68, 0, 0)^T,$$

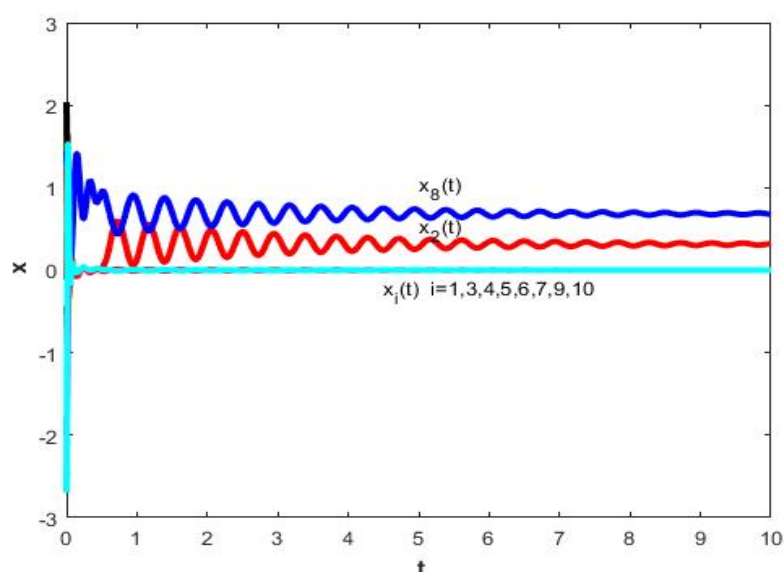
و برای (۱۷.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0/32, 0, 0, 0, 0, 0/68, 0, 0)^T,$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۲ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۱۵.۴) و (۱۷.۴) در شکل‌های ۳.۴ و ۴.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۳.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۵.۴)



شکل ۴.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۷.۴)

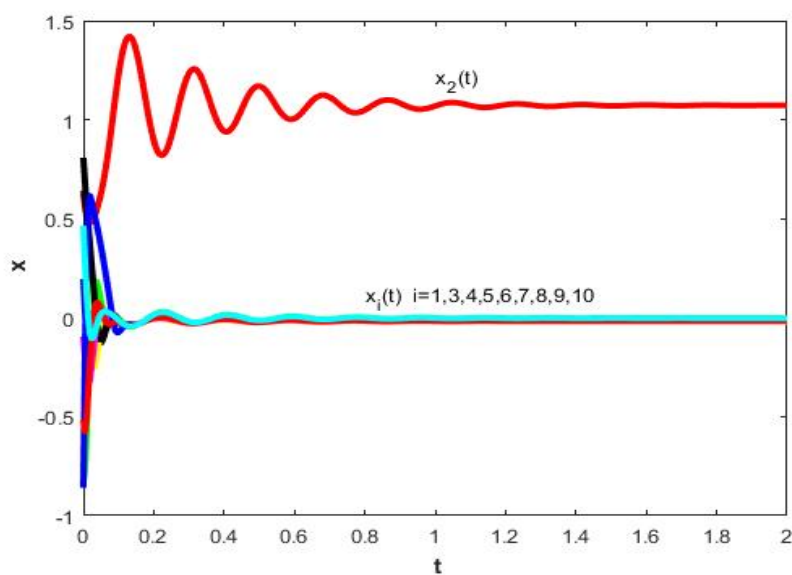
همچنین جواب بهینه برای مدل (۱۶.۴) به صورت

$$X^* = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

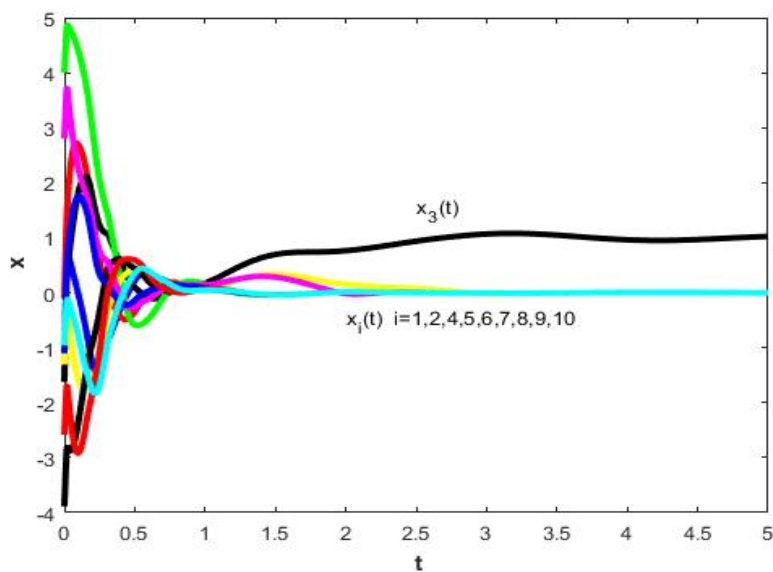
و برای مدل (۱۸.۴) به صورت زیر است:

$$X^* = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T.$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر $3/2$ سرمایه‌گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۱۶.۴) و (۱۸.۴) در شکل‌های ۵.۴ و ۶.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۵.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۶.۴)



شکل ۶.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۸.۴)

مثال ۳.۲.۴. فرض کنید 10 ورق بهادار با بازده دوزنقه‌ای $\xi_i = T(a_i, b_i, c_i, d_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر است.

جدول ۳.۴: بازده‌های نامعین ذوزنقه‌ای از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$T(0/2, 0/4, 1/0, 1/1)$	۶	$T(-0/5, 1/7, 3/0, 3/7)$
۲	$T(0/5, 0/7, 1/3, 1/5)$	۷	$T(2/0, 2/5, 3/1, 4/0)$
۳	$T(0/2, 0/8, 2/0, 2/2)$	۸	$T(-2, 0/2, 1/0, 1/6)$
۴	$T(0/1, 0/3, 0/5, 0/9)$	۹	$T(-0/2, 3/0, 3/5, 4/0)$
۵	$T(-0/7, 0/7, 3/0, 3/2)$	۱۰	$T(0/1, 0/9, 2/0, 2/2)$

فرض کنید $\beta = 0/3$ ، میزان ریسک حداکثر $0/7$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل $1/5$ باشد. از مدل‌های (۹.۴) و (۱۱.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0/54x_1 + 0/84x_2 + 1/22x_3 + 0/44x_4 + 1/68x_5 + 3/24x_6 + 2/85x_7 \\ & + 0/48x_8 + 5/24x_9 + 1/46x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/675x_1 + x_2 + 1/3x_3 + 0/45x_4 + 1/55x_5 + 1/975x_6 \\ \quad + 2/9x_7 + 0/2x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10} \geq 1/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (19.4)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & 0/675x_1 + x_2 + 1/3x_3 + 0/45x_4 + 1/55x_5 + 1/975x_6 + 2/9x_7 \\ & + 0/2x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/54x_1 + 0/84x_2 + 1/22x_3 + 0/44x_4 + 1/68x_5 + 3/24x_6 \\ \quad + 2/85x_7 + 0/48x_8 + 5/24x_9 + 1/46x_{10} \leq 0/7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (20.4)$$

همچنین از مدل‌های (۱۰.۴) و (۱۲.۴) و برای $\beta = 0/7$ داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0/63x_1 + 0/93x_2 + 1/34x_3 + 0/4x_4 + 1/84x_5 + 2/81x_6 + 2/79x_7 \\ & 1/18x_8 + 3/18x_9 + 1/16x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/675x_1 + x_2 + 1/3x_3 + 0/45x_4 + 1/55x_5 + 1/975x_6 \\ \quad + 2/9x_7 + 0/2x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10} \geq 1/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (21.4)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.675x_1 + x_2 + 1.3x_3 + 0.45x_4 + 1.55x_5 + 1.975x_6 + 2.9x_7 \\ & + 0.2x_8 + 2.575x_9 + 1.3x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0.63x_1 + 0.93x_2 + 1.34x_3 + 0.4x_4 + 1.84x_5 + 2.81x_6 \\ \quad 2.79x_7 + 1.18x_8 + 3.18x_9 + 1.16x_{10} \leq 0.7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (22.4)$$

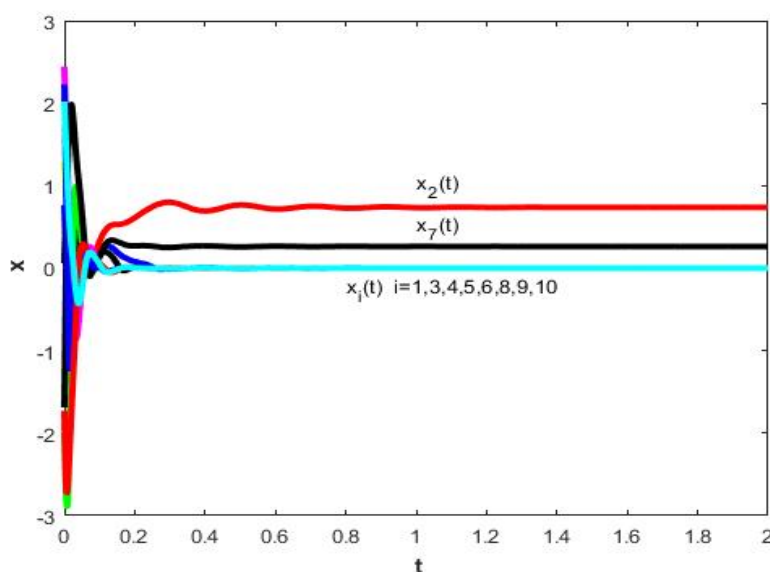
با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده جواب بهینه برای مدل (۱۹.۴) به صورت

$$x^* = (0, 0.74, 0, 0, 0, 0, 0.26, 0, 0, 0)^T,$$

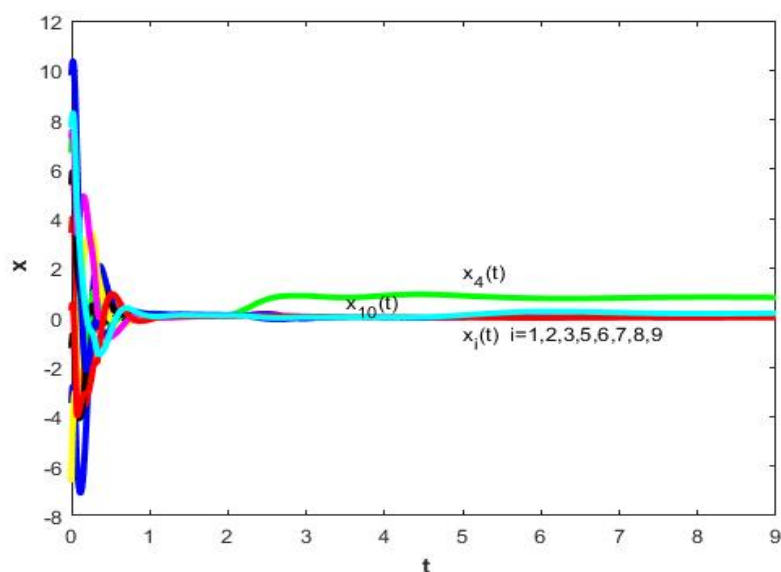
و برای (۲۱.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0.83, 0, 0, 0, 0, 0, 0.17)^T,$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۱/۵ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۱۹.۴) و (۲۱.۴) در شکل‌های ۷.۴ و ۸.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۷.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۹.۴)



شکل ۸.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۱.۴)

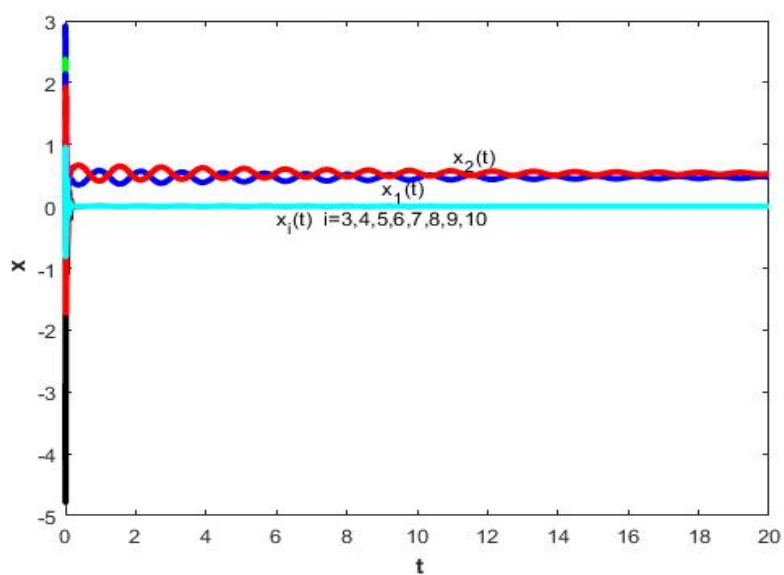
همچنین جواب بهینه برای مدل (۲۰.۴) به صورت

$$x^* = (0/47, 0/53, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

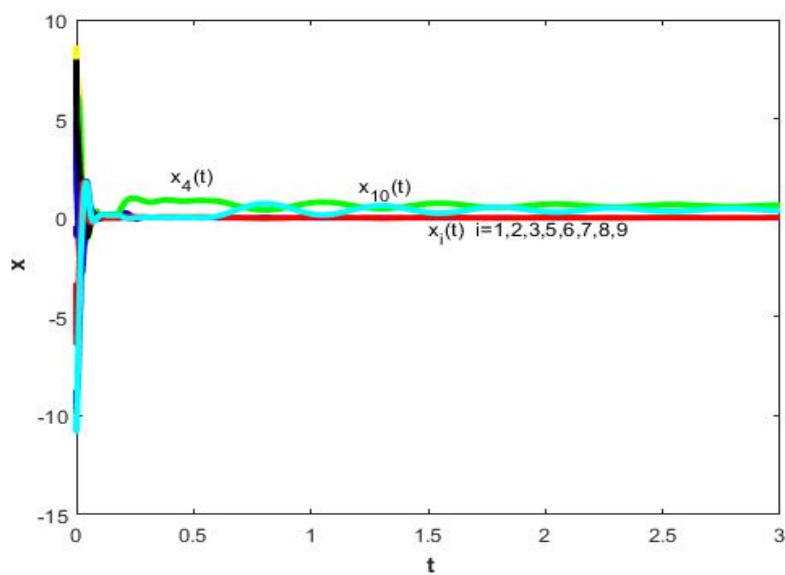
و برای مدل (۲۲.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0/64, 0, 0, 0, 0, 0, 0/36)^T.$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۷٪ سرمایه‌گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۲۰.۴) و (۲۲.۴) در شکل‌های ۹.۴ و ۱۰.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۹.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۰.۴)



شکل ۱۰.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۲.۴)

مراجع

- [۱] رضایی م ، (۱۳۹۴)، پایان نامه ارشد: ” یک مدل شبکه عصبی کارا برای حل مسئله انتخاب پرتفوی فازی ”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۲] نوری س ، (۱۳۹۵)، پایان نامه ارشد: ”بهینه سازی سبد سهام با استفاده از میانگین-نیم واریانس هدف با بازده های نامعین ”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۳] محمدی س ، (۱۳۹۷)، پایان نامه ارشد: ” بررسی رده های از مسائل بهینه سازی سبد سرمایه در فضای عدم قطعیت ”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [4] Bazaraa M.S. and Sherali H.D. and Shetty C.M. (1993), ”Nonlinear Programming Theory and Algorithm”, 2nd ed., Wiley, New York.
- [5] Black F. and Litterman R. (1990), Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium, Goldman Sachs Fixed Income Research.
- [6] Chang T. and Meade T. and Beasley J.E. and Sharaihan Y.M. (2000), Heuristics for cardinaly constrained portfolio optimization, Computers and Operations Research, Vol. 27, pp. 1271-1302.
- [7] Chen Y. and Jiao Y. and Gao X. and Leung K. (2001), ”A new gradient-based neural network for solving linear and quadratic programming problems”, IEEE Transactions on Neural Networks, No. 12(5), 1074–1083.
- [8] Cheng L. and Hou Z. and Tan M. (2009), ”A delayed projection neural network for solving linear variational inequalities”, IEEE Transactions on Neural Networks, No. 20(6), 915–925.
- [9] Effati S. and Baymani M. (2005), ”A new nonlinear neural network for solving convex nonlinear programming problems”, Applied Mathematics and Computation, 168, 1370 - 1379.
- [10] Effati S. and Nazemi A.R. (2006), Neural network models and its application for solving linear and quadratic programming problems, Applied Mathematics and Computation, 172(1), 305-331.

-
- [11] Effati S. and Ranjbar M. (2011), "A novel neural network for solving quadratic programming problems", Applied Mathematics and Computation, Model, No. 35(4), 1688–1695.
- [12] Gao X.B. (2004), A novel neural network for nonlinear convex programming. IEEE Transactions on Neural Networks, 15(3), 613-621.
- [13] Gao X. and Liao L.Z. (2010), A new one-layer neural network for linear and quadratic programming. IEEE Transactions on Neural Networks, 21(6), 918-929.
- [14] Ghasabi-Oskoei H. and Mahdavi-Amiri N. (2006), An efficient simplified neural network for solving linear and quadratic programming problems. Applied Mathematics and Computation, 175(1), 452-464.
- [15] Ghasabi-Oskoei H. and Malek A. and Ahmadi A. (2007), Novel artificial neural network with simulation aspects for solving linear and quadratic programming problems. Computers and Mathematics with Applications, 53(9), 1439-1454.
- [16] Hopfield J.J. and Tank D.W. (1985), "Neural computation of decisions in optimization problems", Biological Cybernetics, 533-541.
- [17] Hu X.L. (2009), "Applications of the general projection neural network in solving extended linear-quadratic programming problems with linear constraints", Neurocomputing, No. 72, 1131–1137.
- [18] Hu X. and Wang J. (2008), An improved dual neural network for solving a class of quadratic programming problems and its k -winners-take-all application. IEEE Transactions on Neural Networks, 19(12), 2022-2031.
- [19] Hull J.C. (2006), Options, Futures, and Other Derivatives, 6th Edition, Prentice Hall, New Jersey.
- [20] Jones C.P. (2001), Investments: Analysis and Management, John Wiley and Sons, New York.
- [21] Kennedy M.P. and Chua L.O. (1988), neural networks for nonlinear programming. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 35(5), 554-562.
- [22] Lee S.M. and Chesser D.L. (1980), Goal Programming for Portfolio, The Journal of Portfolio Management, pp. 22-26.
- [23] Lee S.M. and Lerro A.J. (1973), Optimization the Portfolio Selection for Mutual Funds, The Journal of finance, Vol. 28, pp. 1087-1099, 1973.
- [24] Liu B. (2007), "Uncertainty theory". In Uncertainty Theory (pp. 205-234). Springer Berlin Heidelberg.

- [25] Liu B. (2009), "Some research problems in uncertainty theory". *Journal of Uncertain Systems*, 3(1), 3-10.
- [26] Liu B. (2015), *Uncertainty Theory*, 5th Edition, Springer-Verlag, Berlin. <http://orsc.edu.cn/liu/ut.pdf>.
- [27] Liu S. and Wang J. (2006), A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(6), 1500-1510.
- [28] Liu Q. and Wang J. (2008, November), A one-layer recurrent neural network for non-smooth convex optimization subject to linear equality constraints. In *International Conference on Neural Information Processing* (1003-1010). Springer Berlin Heidelberg.
- [29] Liu Q. and Wang J. (2008), A one-layer recurrent neural network with a discontinuous hard-limiting activation function for quadratic programming. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 19(4), 558-570.
- [30] Lintner J. (1965), The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risky Investments in Stock: Portfolio and Capital Budgets, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, pp. 22-26.
- [31] Lobo S.M. and Fazel M. and Boyd S. (2002), *Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs*, California Institute of Technology.
- [32] Malek A. and Alipour M. (2007), Numerical solution for linear and quadratic programming problems using a recurrent neural network. *Applied Mathematics and Computation*, 192(1), 27-39.
- [33] Mansini R. and Oryczak W. and Speranza M.G. (2003), LP Solvable Models for Portfolio Optimization: A Classification and Computational Comparison, *IMA Journal of Management Mathematics*, Vol. 14, pp. 187-220.
- [34] Mansini R. and Speranza M.G. (1997), Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction Costs, *European Journal of Operational Research*, Vol. 114, pp. 219-233.
- [35] Markovitz H. (1952), Portfolio Selection, *Journal of Finance*, Vol. 7, pp. 77-91.
- [36] Markovitz H. (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, John Wiley and Sons, New York.
- [37] Miller R.K. and Michel A.N. (1981), "Ordinary Differential Equations", Academic Press, New York.
- [38] Mossin J. (1966), Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica*, Vol. 34, pp. 14-16.

-
- [39] Palmquist J. and Uryaser S. and Krokhmal P. (1999), Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints, *Journal of Risk*.
- [40] Papahristodoulou C. and Dotzauer E. (2004), Optimal portfolios using linear programming models, *Journal of Operations Research Society*, Vol. 55, pp. 1169-1177.
- [41] Peng Z. and Iwamura K. (2010), "Uncertainty distribution of functions of uncertain variables". *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 13(3), 277-285.
- [42] Ross S.A. (1976), The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, PP. 341-360.
- [43] Sharpe W.F. (1964), Capital Asset Price: A theory of market equilibrium under conditions of Risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 16-18.
- [44] Tank D. and Hopfield J.J. (1986), Simple 'neural' optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 33(5), 533-541.
- [45] Tao Q. and Cao J. and Xue M. and Qiao H. (2001), A high performance neural network for solving nonlinear programming problems with hybrid constraints. *Physics Letters A*, 288(2), 88-94.
- [46] Wu X. and Xia Y. and Li J. and Chen W. (1996), "A high-performance neural network for solving linear and quadratic programming problems", *IEEE Transactions on Neural Networks*, No. 7(3), 643-651.
- [47] Xia Y. (1996), A new neural network for solving linear and quadratic programming problems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 7(6), 1544-1548.
- [48] Xia Y. (2004), An extended projection neural network for constrained optimization. *Neural Computation*, 16(4), 863-883.
- [49] Xia Y. and Feng G. and Wang J. (2004), A recurrent neural network with exponential convergence for solving convex quadratic program and related linear piecewise equations. *Neural Networks*, 17(7), 1003-1015.
- [50] Xia Y. and Liu B. and Shoayang W. and Lai K. (1999), A model for portfolio selection with order of expected returns, *Computers and Operations Research*, Vol. 27, ,pp. 409-424.
- [51] Yang Y. and Cao J. (2006), Solving quadratic programming problems by delayed projection neural network. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(6), 1630-1634.
- [52] Yang Y. and Cao J. (2008), A feedback neural network for solving convex constraint optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, 201(1), 340-350.

- [53] Yang Y. and Cao J. and Xu X. and Hu M. and Gao Y. (2014), A new neural network for solving quadratic programming problems with equality and inequality constraints. *Mathematics and Computers in Simulation* 101, 103-112.
- [54] Young M.R. (1998), A minimax portfolio selection rule with linear programming solution, *Management Science*, Vol. 44, pp. 673-683.
- [55] Zhang S. and Constantinides A.G. (1992), Lagrange programming neural networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 39(7), 441-452.
- [56] Zhang Y. and Li Z. (2009), Zhang neural network for online solution of time-varying convex quadratic program subject to time-varying linear-equality constraints. *Physics Letters A*, 373(18), 1639-1643.
- [57] Zhang Y. and Wang J. (2002), A dual neural network for convex quadratic programming subject to linear equality and inequality constraints. *Physics Letters A*, 298(4), 271-278.
- [58] H. Amann, *Ordinary Differential Equations: An introduction to nonlinear analysis*, Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [59] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali and C.M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley and Sons, New York, 1993.
- [60] R.E. Bellman, L.A. Zadeh, *Decision-Making in a Fuzzy Environment*, *Management Science*, Vol. 17, pp. 141-164, 1970.
- [61] M. Berry, G. Linoff, *Data Mining Techniques*, John Wiley and Sons, New York, 1997.
- [62] F. Black, R. Litterman, *Asset Allocation: Combing Investor Views with Market Equilibrium*, Goldman Sachs Fixed Income Research, 1990.
- [63] A. Bouzerdoum, T.R. Pattison, *Neural Network for Quadratic Optimization with Bound Constraints*, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 4, pp. 293-304, 1993.
- [64] T. Chang, T. Meade, j.E. Beasley and Y.M. Sharaihan, *Heuristics for Cardinay Constrained Portfolio Optimization*, *Computers and Opeartionals Resarch*, Vol. 27, pp. 1271-1302, 2000.
- [65] D. Dubois, H. Prade, *Possibility Theory*, Plenum, New York, 1988.
- [66] S. Effati, A.R. Nazemi, *Neural Network Models and its Application for Solving Linear and Quadratic Programming Problems*, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 172, pp. 305-331, 2006.
- [67] S. Haykin, *Neural Network: A comprehensive Foundation*, prentice hall, 1999.

- [68] J.J. Hopfield, D.W. Tank, Simple Neural Optimization Network: An A/D Converter, Signal Decision Circuit, and a Linear Programming Circuit, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 33, pp. 533-541, 1986.
- [69] D.L. Hudson, M.E. Cohen, Neural Network and Artificial Intelligence for Biomedical Engineering, IEEE Press, 2000.
- [70] J.C. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives, 6th Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2006.
- [71] C.P. Jones, Investments: Analysis and Management, John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [72] M.P. Kennedy, L.O. Chua, Neural Networks for Nonlinear Programming, IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 35, pp. 554-562, 1998.
- [73] S.M. Lee, A.J. Lerro, Optimization the Portfolio Selection for Mutual Funds, The Journal of Finance, Vol. 28, pp. 1087-1099, 1973.
- [74] S.M. Lee, D.L. Chesser, Goal Programming for Portfolio, The Journal of Portfolio Management, pp. 22-26, 1980.
- [75] B. Liu, Uncertainty Theory, Springer, 2004.
- [76] B. Liu, Theory and Practice of Uncertain Programming, Heidelberg, Germany: Physica-Verlag, 2008.
- [77] J. Lintner, The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risky Investments in Stock: Portfolio and Capital Budgets, Review of Economics and Statistics, Vol. 47, pp. 22-26, 1965.
- [78] S.M. Lobo, M. Fazel, and S. Boyd, Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs, California Institute of Technology, 2002.
- [79] R. Mansini, M.G. Speranza, Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction Lots, European Journal of Operational Research, Vol. 114, pp. 219-233, 1997.
- [80] R. Mansini, W. Oryczak and M.G. Speranza, LP Solvable Models for Portfolio Optimization: A Classification and Computational Comparison, IMA Journal of Management Mathematics, Vol. 14, pp. 187-220, 2003.
- [81] H. Markovitz, Portfolio Selection, Journal of Finance, Vol. 7, pp. 77-91, 1952.
- [82] H. Markovitz, Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment, John Wiley and Sons, New York, 1959.
- [83] J. Mossin, Equilibrium in a Capital Asset Market, Econometrica, Vol. 34, pp. 14-16, 1966.

- [84] J. Palmquist, S. Uryaser, and P. Krokmal, Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints, *Journal of Risk*, 1999.
- [85] C. Papahristodoulou and E. Dotzauer, Optimal Portfolios Using Linear Programming Models, *Journal of Operations Research Society*, Vol. 55, pp. 1169-1177, 2004.
- [86] S.A. Ross, The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, PP. 341-360, 1976.
- [87] W.F. Sharpe, Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 16-18, 1964.
- [88] G. Simmons, *Differential Equations: Theory, Technique, and Practice*, McGraw-Hill, India, 2006.
- [89] Y. Xia, A Neural Network for Solving Linear and Quadratic Programming Problems, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 7, pp. 1544-1547, 1996.
- [90] Y. Xia, B. Liu, W. Shoayang, and K. Lai, A Model for Portfolio Selection with Order of Expected Returns, *Computers and Operations Research*, Vol. 27, pp. 409-424, 1999.
- [91] Y. Xia, J. Wang, A Recurrent Neural Network for Solving Linear Projection Equation, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 13, No. 3, pp. 337-350, 2000.
- [92] Xing-Bao Gao, Exponential Stability of Globally Projected Dynamic Systems, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 14, No. 2, pp. 426-431, 2003.
- [93] Y. Yang, J. Cao, X. Xu, M. Hu and Y. Gao, A New Neural Network for Solving Quadratic Programming Problems with Equality and Inequality Constraints, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 101, pp. 103-112, 2014.
- [94] M.R. Young, A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution, *Management Science*, Vol. 44, pp. 673-683, 1998.
- [95] L.D. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [96] Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [97] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 3rd ed. , 2001.
- [98] Zabczyk, J. *Mathematical control theory: an introduction*. Systems control. Birkhäuser, 1992.
- [99] Khalil, H. K. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall PTR, 3rd ed. , 2002.

Abstract

In this thesis, a numerical method based on neural networks is presented to solve a class of the financial optimization problems in uncertain space with average value at risk to title risk measure. To do this, we first write the optimality conditions for the optimization problem. Then we design a neural network model related it. We prove that the equilibrium point of the corresponded is equivalent to the optimal solution. The global convergence of the proposed model is studied by constructing a suitable Lyapunov function.

Keywords: portfolio, optimization, neural networks, Value at Risk, Average Value at Risk



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Financial Math

**Credibilistic Value and Average Value at
Risk in Fuzzy Risk Analysis**

By: Fatemeh Talebi

Supervisors

Dr. Alireza Nazemi

Dr. Abdolmajid Abdolbaghi Ata Abadi

December 2019