

صلاة الاضلاع



دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی مالی

مدل احتمالی چندهدفه برای انتخاب پورتفوی با هزینه معاملات

نگارنده: معصومه ساکی

استادان راهنما

دکتر علیرضا ناظمی
دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی

۱۷ دی ۱۳۹۸

تقدیم به:

روح پاک پدرم

و

مادرم دریای بی کران فداکاری و عشق

خداوند منان را سپاس می‌گوییم که توفیق انجام کاری هر چند کوچک را در راستای علم به من عطا فرمود.

« من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق »

قبل از هر چیز بر خود لازم می‌دانم از زحمات خانواده‌ی عزیزم که همیشه مشوق من در تحصیل دانش بوده‌اند سپاس‌گزاری نمایم و برایشان طول عمر با عزت و سربلندی و سلامتی آرزو نمایم.

بدون درایت، هدایت و راهنمایی‌های همیشگی استاد ارجمند جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که هم از کلاس درس ایشان بهره‌مند بوده‌ام و هم تجربیات و راهنمایی‌های ارزنده خویش را در هدایت این پایان‌نامه صادقانه در اختیار این جانب قرار داده‌اند، امکان اتمام این کار نبود. از ایزد منان، سلامت، سعادت و موفقیت روزافزون ایشان را خواستارم.

همچنین از استاد محترم آقای دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی، که از کلاس درس عالی ایشان بهره‌مند بودم و در طول دوران تحصیل همواره راهنمایی بسیار مفید و دانا بودند نهایت تشکر را دارم و از خداوند، سلامتی و توفیق ایشان را خواستارم.

معصومه ساکی

۱۷ دی ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب معصومه ساکی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان مدل احتمالی چندهدفه برای انتخاب پورتفوی با هزینه معاملاتی، تحت راهنمایی علیرضا ناظمی و عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

معصومه ساکی

۱۷ دی ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پژوهش با به کار بردن انواع اعداد فازی و استفاده از نظریه امکانی به دنبال مدل سازی امکانی هستیم که هدف این کار، تعیین الگوی بهینه سرمایه گذاری بر مبنای متدلوژی شبکه‌ی عصبی برای اعداد فازی $L - R$ ، دوزنقه‌ای و مثلثی در تشکیل پرتفوی بهینه در بورس اوراق بهادار است. که به هدف کلی به حداکثر رساندن «بازده» و کم کردن «ریسک» می‌پردازد تا پرتفوی بهینه را پیدا کند. بنابراین برای تحقق این هدف، به حل مسأله چندهدفه برنامه‌ریزی غیرخطی به روش زیمرمن با کمینه کردن توابع هدف در یک زمان و نادیده گرفتن بقیه توابع هدف پرداخته می‌شود. علاوه بر این با جایگزین کردن مدل‌های میانگین-واریانس و میانگین-انحراف معیار به جای مدل میانگین-واریانس مارکوویتز انتخاب پرتفوی بهینه در فضای امکانی، بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی:

برنامه‌ریزی غیرخطی، مدل میانگین-واریانس، پرتفوی بهینه، فضای امکانی، توابع هدف

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر
ف	فهرست جداول
۱	۱ تعاریف و مطالب مقدماتی
۱	۱.۱ مقدمه‌ای بر پرتفوی
۲	۱.۱.۱ محاسبه بازده مورد انتظار
۳	۲.۱.۱ محاسبه ریسک
۳	۲.۱ نظریه مجموعه‌های فازی
۴	۱.۲.۱ مروری بر مفاهیم نظریه مجموعه‌های فازی
۸	۲.۲.۱ اعداد فازی
۱۱	۳.۱ مروری بر مفاهیم نظریه احتمال
۱۲	۴.۱ برنامه‌ریزی امکانی
۱۳	۱.۴.۱ مروری بر مفاهیم نظریه امکان
۲۱	۲ میانگین و واریانس امکانی اعداد فازی
۲۱	۱.۲ مقدمه
۲۲	۲.۲ ارزش میانگین امکانی از اعداد فازی
۲۵	۳.۲ ارتباط بین مقادیر میانگین امکانی و احتمالی پایین و بالا
۲۷	۴.۲ واریانس اعداد فازی
۳۱	۳ مدل امکانی چندهدفه برای انتخاب پورتفوی با هزینه معامله
۳۱	۱.۳ مقدمه
۳۲	۲.۳ مسأله انتخاب پورتفوی
۳۴	۱.۲.۳ عدد فازی
۳۵	۲.۲.۳ واریانس و مقدار میانگین امکانی
۳۵	۳.۳ مدل امکانی چندهدفه

۳۶	تجزیه و تحلیل ریاضی: مسأله چندهدفه برنامه‌ریزی غیر خطی (MONLP)	۴.۳
۳۶	مسأله چندهدفه برنامه‌ریزی غیر خطی (MONLP)	۱.۴.۳
۳۷	روش برنامه‌ریزی فازی برای حل مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه	۲.۴.۳
۳۹	روش برنامه‌ریزی فازی برای حل مدل انتخابی پرتفوی سه هدفه .	۳.۴.۳
۴۲	مثال عددی	۵.۳
۴۵	روش انتخاب پرتفوی فازی بر اساس میانگین و واریانس امکانی	۴
۴۵	مقدمه	۱.۴
۴۶	میانگین و واریانس امکانی	۲.۴
۴۷	مدل میانگین-واریانس برای انتخاب پرتفوی	۳.۴
۵۱	حالت‌های خاصی از اعداد فازی $L - R$	۴.۴
۵۱	عدد فازی مثلثی	۱.۴.۴
۵۱	مدل پرتفوی بهینه امکانی	۱.۱.۴.۴
۵۳	عدد فازی دوزنقه‌ای	۲.۴.۴
۵۳	میانگین و واریانس امکانی پایین و بالا	۱.۲.۴.۴
۵۴	مدل‌های میانگین-واریانس امکانی انتخاب پرتفوی .	۲.۲.۴.۴
۵۸	مدل شبکه‌ی عصبی پیشنهادی	۵.۴
۵۹	مثال‌های عددی	۶.۴
۵۹	عدد فازی $L - R$	۱.۶.۴
۶۴	عدد فازی مثلثی	۲.۶.۴
۶۶	عدد فازی دوزنقه‌ای	۳.۶.۴
۷۱	مثال‌های عددی از شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران	۷.۴
۷۱	عدد فازی $L - R$	۱.۷.۴
۷۶	عدد فازی مثلثی	۲.۷.۴
۷۹	عدد فازی دوزنقه‌ای	۳.۷.۴
۸۶	نتیجه‌گیری	۸.۴
۸۷		مراجع

فهرست تصاویر

۴ تابع عضویت و تابع مشخصه	۱.۱
۵ زیر مجموعه $\bar{A} \subseteq \bar{B}$	۲.۱
۶ اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی	۳.۱
۶ متمم مجموعه فازی	۴.۱
۷ مجموعه نرمال \bar{A} و غیر نرمال \bar{B}	۵.۱
۱۱ تابع عضویت عدد فازی مثلثی	۶.۱
۱۱ تابع عضویت عدد فازی دوزنقه‌ای	۷.۱
۱۹ نمودار تابع عضویت مجموعه تایپ‌های سریع	۸.۱
۲۰ نمودار تابع توزیع امکان استخدام یک فرد به‌عنوان تایپیست	۹.۱
 نمودار تابع توزیع امکان استخدام یک فرد و نمودار تابع عضویت مجموعه فازی	۱۰.۱
۲۰	
۳۴ عدد فازی دوزنقه‌ای	۱.۳
۳۸ تابع هدف	۲.۳
۶۳ بازده‌های امکانی و میانگین انحراف معیار امکانی پرتفوی	۱.۴
۶۳ عدد فازی $L - R$	۲.۴
۶۵ عدد فازی مثلثی	۳.۴
۷۰ عدد فازی دوزنقه‌ای	۴.۴
۷۰ عدد فازی دوزنقه‌ای	۵.۴
۷۵ عدد فازی $L - R$	۶.۴
۷۸ عدد فازی مثلثی	۷.۴
۸۴ عدد فازی دوزنقه‌ای	۸.۴

فهرست جداول

۴۳	جواب مطلوب مدل <i>IV - Pareto</i> با استفاده از وزن‌های مختلف	۱.۳
۶۱	جواب‌های انتخاب پرتفوی به رویکرد مختلف	۱.۴
۶۲	برخی از پرتفوی بهینه امکانی	۲.۴
۶۵	برخی از پرتفوی بهینه امکانی	۳.۴
۶۸	برخی از پرتفوی بهینه امکانی پایین	۴.۴
۶۹	برخی از پرتفوی بهینه امکانی بالا	۵.۴
۷۳	برخی از پرتفوی بهینه امکانی گروه اول	۶.۴
۷۴	برخی از پرتفوی بهینه امکانی گروه دوم	۷.۴
۷۶	برخی از پرتفوی بهینه امکانی	۸.۴
۷۷	برخی از پرتفوی بهینه امکانی	۹.۴
۸۰	برخی از پرتفوی بهینه امکانی پایین گروه اول	۱۰.۴
۸۱	برخی از پرتفوی بهینه امکانی بالا گروه اول	۱۱.۴
۸۲	برخی از پرتفوی بهینه امکانی پایین گروه دوم	۱۲.۴
۸۳	برخی از پرتفوی بهینه امکانی بالا گروه دوم	۱۳.۴

فصل ۱

تعاریف و مطالب مقدماتی

۱.۱ مقدمه‌ای بر پرتفوی

در دنیای امروز، اصلی‌ترین دغدغه سرمایه‌گذاران برای مشارکت در توسعه اقتصادی، سرمایه‌گذاری در بازار سرمایه و بورس اوراق بهادار از طریق ایجاد پرتفوی^۱ است. هدف اصلی سرمایه‌گذاران از ایجاد پرتفوی، تقسیم نمودن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است، به طوری که سود یک سهم، زیان حاصل از سهم دیگر را جبران می‌کند. در واقع با این کار به دنبال کسب سود یا بازده بیشتر و در عین حال به حداقل رساندن ریسک هستند.

بازده و ریسک دو عنصر اساسی سرمایه‌گذاری در سهام به حساب می‌آیند. سرمایه‌گذاران متناسب با منابع و دارایی‌های واقعی خود مانند پول نقد، زمین، طلا، ... و دارایی‌های مالی چون انواع اوراق بهادار، در شرایط عدم اطمینان اقدام به ایجاد پرتفوی و سرمایه‌گذاری می‌کنند. مدل مارکوویتز^۲ یکی از قدیمی‌ترین مدل‌های کاربردی است که ابزار مناسبی جهت یاری سرمایه‌گذاران به منظور تشکیل پرتفوی به شمار می‌رود. پارامترهای اصلی در این مدل، بازده مورد انتظار و ریسک هستند که از توزیع نرمال پیروی می‌کنند.

مدل مارکوویتز بر این فرض‌ها استوار است که سرمایه‌گذار ریسک‌گریز است و با قبول سطح مشخصی از ریسک، بازده مورد انتظار را بالا می‌برد و یا برعکس ریسک‌پذیر است که برای سطح معینی از بازده، خواهان کم‌ترین ریسک است. همچنین، سرمایه‌گذار رفتاری عقلایی

¹Portfolio

²Markowitz

دارد، یعنی سعی می‌کند در چندین سهام سرمایه‌گذاری کند. اما روش مارکوویتز نیز ایراداتی دارد.

ایرادات مدل مارکوویتز:

- ۱- در این مدل تعداد سهام‌ها و محدودیت مربوط به کران بالا و پایین نسبت سرمایه‌گذاری در هر سهم، در نظر گرفته نشده است.
- ۲- این مدل هیچ پاسخی برای توزیع‌های غیر نرمال ندارد، چون واریانس یا انحراف معیار تنها برای یک سهم با توزیع نرمال و در بازار کارا قابل قبول است.
- ۳- این مدل تنها بر پایه دو معیار ریسک و بازده است و ویژگی چند معیاره بودن اهداف تصمیم‌گیران را مدنظر قرار نمی‌دهد.
- ۴- با افزایش تعداد سهام‌ها، حجم محاسبات زیاد و دشوار می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱. (سرمایه‌گذاری) عبارت است از تبدیل وجوه مالی به یک یا چند سهم که برای مدتی در زمان آینده نگهداری خواهد شد.

تعریف ۲.۱.۱. (پرتفوی) ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آن‌ها را خریداری کرده است.

تعریف ۳.۱.۱. (بازده واقعی) میزان سودی است که در گذشته کسب شده یا به وقوع پیوسته است.

تعریف ۴.۱.۱. (بازده مورد انتظار) سود تخمینی است که سرمایه‌گذار انتظار دارد طی یک دوره در آینده به دست آورد.

تعریف ۵.۱.۱. (ریسک) میزان اختلاف بازده واقعی یک سرمایه‌گذاری از بازده موردانتظار، ریسک نامیده می‌شود.

سرمایه‌گذاران همواره در سرمایه‌گذاری به دنبال کسب سود و بازده بیشتر هستند. به طور کلی بازده پرتفوی از دو جزء تشکیل شده است: بازده ناشی از تغییر قیمت خرید هر سهم و فروش آن و همچنین بازده ناشی از دریافت سود در هر دوره. مجموع این دو جزء، بازده کل سهام را تشکیل می‌دهد که برای هر سهم به صورت زیر است: [۲]

افزایش قیمت یا کاهش قیمت \pm سود دریافتی = بازده کل هر سهم

۱.۱.۱ محاسبه بازده مورد انتظار

بازده موردانتظار پرتفوی، میانگین وزنی از بازده موردانتظار هر یک از سهم‌هاست. برای محاسبه این مقدار، نرخ بازده در طول یک دوره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r = \frac{P_2 - P_1 + D_{ir}}{P_1} \quad (1.1)$$

که در آن:
 P_1 : قیمت ابتدای دوره،
 P_2 : قیمت انتهای دوره،
 D_{ir} : سود سهام طی دوره جاری می‌باشد.

۲.۱.۱ محاسبه ریسک

ریسک هر سهم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum (r_i - \bar{r})^2 / n - 1}$$

که در آن:
 r_i : بازده،
 \bar{r} : میانگین بازده،
و n تعداد دوره‌های مورد مطالعه است.

تعریف ۶.۱.۱. (کوواریانس) کوواریانس معیار مطلق میزان ارتباط میان بازده‌های هر جفت از اوراق بهادار است و میزان تغییرات دو سهم در طول زمان را نشان می‌دهد. در مورد کوواریانس سه حالت ممکن است رخ دهد:

- ۱- حالت مثبت، که در این حالت بازده‌های دو اوراق بهادار هم‌زمان در یک جهت حرکت می‌کنند.
 - ۲- حالت منفی، که در این حالت بازده‌های دو اوراق بهادار به صورت معکوس عمل می‌کنند.
 - ۳- حالت صفر، که در این حالت بازده‌های دو اوراق بهادار کاملاً مستقل از هم عمل می‌کنند.
- به‌دلیل نوسانات بازار و عوامل نامطمئنی که بر رفتار سرمایه‌گذار تأثیر می‌گذارد، انتخاب پرتفوی با استفاده از نظریه فازی بررسی می‌شود.

۲.۱ نظریه مجموعه‌های فازی

نظریه مجموعه‌های فازی اولین بار در سال (۱۹۶۵) توسط دکتر لطفی عسگرزاده^۳ ابداع شد. این نظریه از زمان ارائه آن تاکنون گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است [۱]. در واقع این نظریه، نظریه کار در شرایط عدم اطمینان و شرایط مبهم می‌باشد. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و دستگاه‌هایی که نادقیق هستند را صورت‌بندی ریاضی بخشیده و زمینه را برای استدلال، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان، نادقیق یا مبهم فراهم آورد.

³Zade

۱.۲.۱ مروری بر مفاهیم نظریه مجموعه های فازی

تعریف ۱.۲.۱. (تابع مشخصه) فرض کنید A یک زیرمجموعه از \mathbb{R} باشد. در این صورت تابع مشخصه مربوط به A را با $\chi_A(x)$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می کنند. [۱].

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

تعریف ۲.۲.۱. (مجموعه فازی) مجموعه ی فازی \tilde{A} به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب

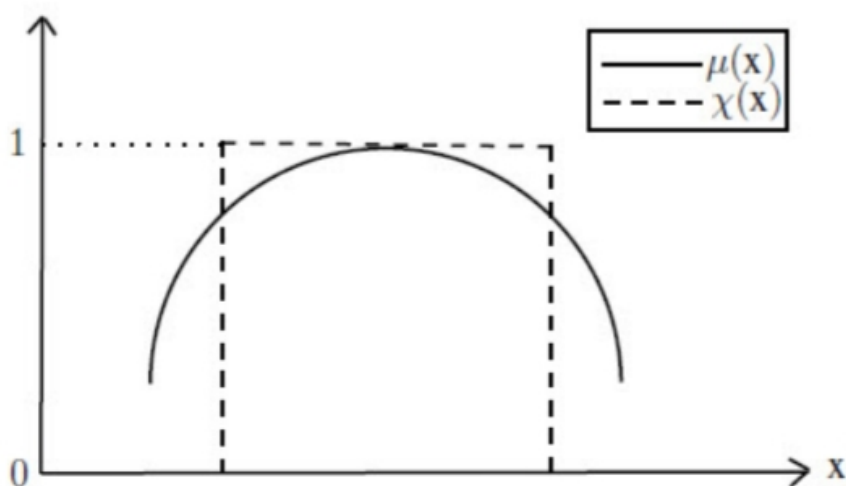
$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

تعریف می شود، که در آن $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ درجه عضویت x در \tilde{A} نامیده می شود.

تعریف ۳.۲.۱. (تابع عضویت) فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. اگر برد تابع مشخصه از مجموعه دو عضوی $\{0, 1\}$ به بازه $[0, 1]$ گسترش داده شود تابعی به وجود خواهد آمد که به هر عضو x از X عددی را در بازه $[0, 1]$ نسبت می دهد. این تابع، تابع عضویت \tilde{A} نامیده می شود. بنابراین توابع عضویت را می توان به صورت زیر تعریف نمود.

$$\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0, 1].$$

هر مجموعه فازی منحصرأ به وسیله یک تابع عضویت خاص تعریف می شود.



شکل ۱.۱: تابع عضویت و تابع مشخصه

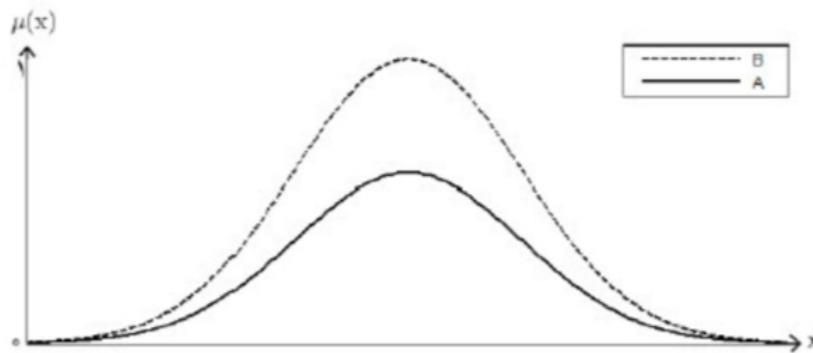
نظریه مجموعه‌های فازی ۵

تعریف ۴.۲.۱. (معادل بودن مجموعه‌های فازی) دو مجموعه فازی \tilde{A} و \tilde{B} معادل هستند اگر و تنها اگر:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \forall x \in X.$$

تعریف ۵.۲.۱. (زیرمجموعه بودن مجموعه‌های فازی) اگر $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ اگر و تنها اگر:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \forall x \in X.$$



شکل ۲.۱: زیر مجموعه $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$

تعریف ۶.۲.۱. (اجتماع مجموعه فازی) اجتماع استاندارد دو مجموعه فازی \tilde{A} و \tilde{B} یک مجموعه فازی \tilde{C} است که تابع عضویت آن به صورت

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)),$$

است و آن را با $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ نمایش می‌دهند (شکل ۳.۱).

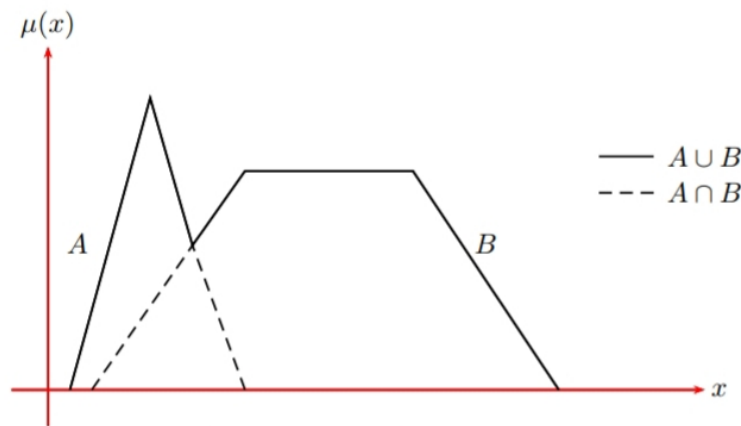
تعریف ۷.۲.۱. (اشتراک مجموعه فازی) اشتراک استاندارد دو مجموعه فازی \tilde{A} و \tilde{B} یک مجموعه فازی \tilde{D} است که تابع عضویت آن به صورت

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

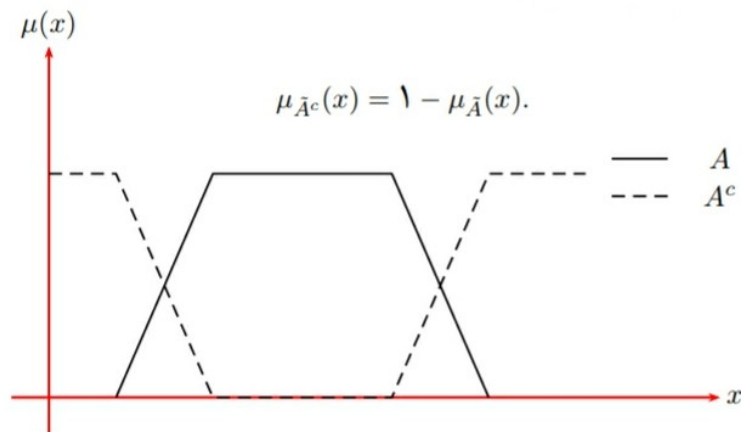
است و آن را با $\tilde{D} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ نمایش می‌دهند (شکل ۳.۱).

تعریف ۸.۲.۱. (متمم مجموعه فازی) متمم مجموعه فازی \tilde{A} ، مجموعه فازی \tilde{A}^c در X است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود: (شکل ۴.۱).

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in X.$$



شکل ۳.۱: اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی



شکل ۴.۱: متمم مجموعه فازی

در زیر به بیان مفاهیم اساسی در مجموعه‌های فازی می‌پردازیم که از [۱] آورده شده است.

تعریف ۹.۲.۱. (مرز یک مجموعه فازی) مرز یک مجموعه فازی \tilde{A} روی X ، مجموعه‌ای از نقاط در X است به‌طوری‌که:

$$Bd(\tilde{A}) = \{x: 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1, x \in X\}.$$

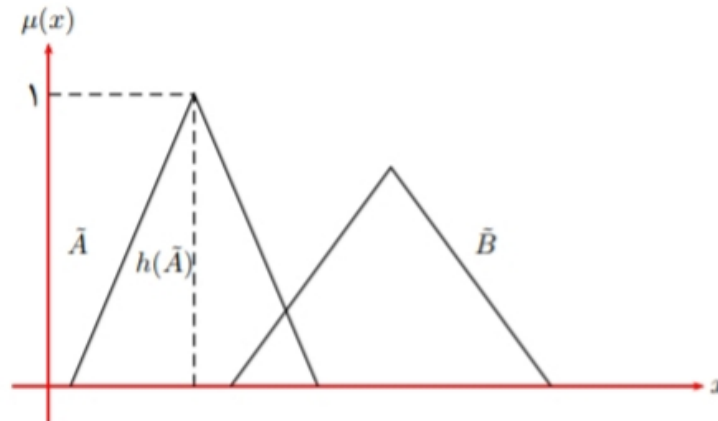
تعریف ۱۰.۲.۱. (تکیه‌گاه یک مجموعه فازی) مجموعه $\{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ را $Supp(\tilde{A})$ می‌نامیم. تکیه‌گاه مجموعه فازی \tilde{A} می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. (ارتفاع یک مجموعه فازی) ارتفاع یک مجموعه فازی برابر حداکثر درجه عضویت عناصر آن مجموعه است، یعنی

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}.$$

نظریه مجموعه‌های فازی ۷

تعریف ۱۲.۲.۱. (مجموعه فازی نرمال) مجموعه فازی \tilde{A} نرمال است، اگر ارتفاع آن برابر یک باشد، یعنی $h(\tilde{A}) = 1$.



شکل ۵.۱: مجموعه نرمال \tilde{A} و غیر نرمال \tilde{B}

تعریف ۱۳.۲.۱. (α - برش یک مجموعه فازی) α - برش یک مجموعه فازی \tilde{A} ، یک مجموعه غیرفازی A_α است که شامل تمام عضوهایی از X می‌باشد که مقادیر عضویتی بزرگ‌تر یا مساوی α دارند، یعنی:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

α - برش‌ها توصیفی از مجموعه‌های فازی با استفاده از مجموعه‌های قطعی ارائه می‌دهند. یکی از مفاهیم اساسی نظریه مجموعه‌های فازی اصل گسترش است که می‌تواند برای تعمیم مفاهیم ریاضی قطعی به مجموعه‌های فازی به کار گرفته شود. این اصل به ویژه در تعمیم عملگرهای جبری و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است. یک تابع معمولی $f: X \rightarrow Y$ را در نظر بگیرید. این تابع به هر $x \in X$ عددی مانند $y \in Y$ را نسبت می‌دهد. حال می‌خواهیم تابع f را به گونه‌ای گسترش دهیم که به جای این که بر یک نقطه از X عمل کند، بر یک زیرمجموعه فازی آن عمل کند. آن چه مهم است تعریف مقدار حاصل از عمل f بر یک زیرمجموعه فازی از X مانند \tilde{A} است. طبیعتاً انتظار داریم که $f(\tilde{A})$ دیگر یک نقطه از Y نباشد بلکه یک زیرمجموعه فازی از Y مانند \tilde{B} باشد. اصل گسترش روش این تعمیم را بیان می‌کند.

تعریف ۱۴.۲.۱. (اصل گسترش) فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع و \tilde{A} زیرمجموعه‌ای فازی از X باشد، در این صورت $f(\tilde{A}) = \tilde{B}$ یک زیرمجموعه فازی از Y خواهد بود به طوری که:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x, y=f(x)} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

مثال ۱.۲.۱. فرض کنید $X = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ و $f = X \rightarrow \mathbb{N}$ تابع با ضابطه $f(X) = X^2$ باشد. اگر \tilde{A} مجموعه فازی روی X باشد $f(\tilde{A})$ را به دست آورید؟

$$\tilde{A} = \frac{0/5}{-۲} + \frac{0/۷}{-۱} + \frac{۱}{0} + \frac{0/۸}{۱} + \frac{0/۶}{۲}$$

حل: ابتدا باید مقادیر y را به دست آورد، سپس میزان عضویت آن‌ها یعنی $f(A)(y)$ را محاسبه کرد.

X	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۱	۰	۱	۴

$$f(\tilde{A}) = \frac{-۲}{0} + \frac{0/۸}{۱} + \frac{0/۶}{۴}, \quad y = f(X) = \{0, 1, 4\}$$

برای $y = 1$ ، $f(A)(1)$ طبق اصل گسترش به دست می‌آید.

$$f(A)(1) = \max\{(A)(X) : f(X) = 1\} = \max\{(A)(-1), (A)(1)\} = \max\{0/۷, 0/۸\} = 0/۸$$

$$X = f^{-1}(1)$$

۲.۲.۱ اعداد فازی

مجموعه‌های فازی که روی اعداد حقیقی تعریف می‌شوند از اهمیت بالایی برخوردارند. تابع عضویت این نوع مجموعه‌های فازی به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1].$$

تعریف ۱۵.۲.۱. (مجموعه‌ی فازی محدب) مجموعه فازی \tilde{A} محدب است اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

است، به عبارت دیگر یک مجموعه فازی محدب است اگر کلیه مجموعه‌های α -برش آن محدب باشد.

تعریف ۱۶.۲.۱. (عدد فازی) فرض کنید \tilde{A} یک مجموعه فازی در \mathbb{R} باشد. \tilde{A} یک عدد فازی نامیده می‌شود اگر دارای شرایط زیر باشد:

- (۱) نرمال باشد.
- (۲) محدب باشد.
- (۳) شکل تابع عضویت آن تکه خطوط پیوسته باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. (عدد فازی $L - R$) عدد فازی \tilde{A} ، را یک عدد فازی $L - R$ گویند هرگاه:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), & x \leq m, \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), & x \geq m, \end{cases}$$

که در آن L و R توابع پیوسته غیرصعودی از \mathbb{R}^+ به $[0, 1]$ هستند و در شرط $L(0) = R(0) = 1$ صدق می‌کنند. پارامترهای α و β نیز اعداد حقیقی مثبت‌اند. در این حالت m را مقدار میانه و α و β را به ترتیب پهنای چپ و راست عدد فازی می‌نامند. در این صورت \tilde{A} به شکل $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{L-R}$ نمایش داده می‌شود.

در تعریف بالا L و R توابع مرجع نامیده می‌شوند و معمولاً یکی از حالات زیر را اختیار می‌کنند:

(۱) خطی: $L(x) = \max(0, 1 - x)$,

(۲) نمایی: $L(x) = e^{-px}, \quad p \geq 1$

(۳) توان‌دار: $L(x) = \max(0, 1 - x^p), \quad p \geq 1$

(۴) کسری: $L(x) = \frac{1}{1+x^p}, \quad p \geq 1$

(۵) نمایی توان‌دار: $L(x) = e^{-x^p}, \quad p \geq 1$

برای R نیز داریم:

(۱) خطی: $R(x) = \max(0, 1 - x)$,

(۲) نمایی: $R(x) = e^{-px}, \quad p \geq 1$

(۳) توان‌دار: $R(x) = \max(0, 1 - x^p), \quad p \geq 1$

(۴) کسری: $R(x) = \frac{1}{1+x^p}, \quad p \geq 1$

(۵) نمایی توان‌دار: $R(x) = e^{-x^p}, \quad p \geq 1$

تعریف ۱۸.۲.۱. (بازه فازی $L - R$) مانند عدد فازی $L - R$ ، بازه فازی $L - R$ نیز یک مجموعه فازی با تابع عضویتی به فرم زیر می‌باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{A^L - x}{\alpha}\right), & x \leq A^L, \\ R\left(\frac{x - A^U}{\beta}\right), & x \geq A^U, \\ 1, & A^L \leq x \leq A^U, \end{cases}$$

که در آن L و R همان توابع ارائه شده در تعریف عدد فازی $L - R$ می‌باشند. به علاوه A^L و A^U دو عدد حقیقی هستند که در رابطه $A^L \leq A^U$ صدق می‌کنند. در این حالت بازه فازی \tilde{A} را به صورت $\tilde{A} = (A^L, A^U, \alpha, \beta)_{L-R}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۹.۲.۱. (عدد فازی مثلثی) اگر در تعریف عدد فازی $L - R$ ، توابع L و R توابع خطی باشند، عدد فازی حاصل را عدد فازی مثلثی می‌نامند و آن را به صورت $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)$ نمایش می‌دهند که تابع عضویت آن به شکل زیر است:

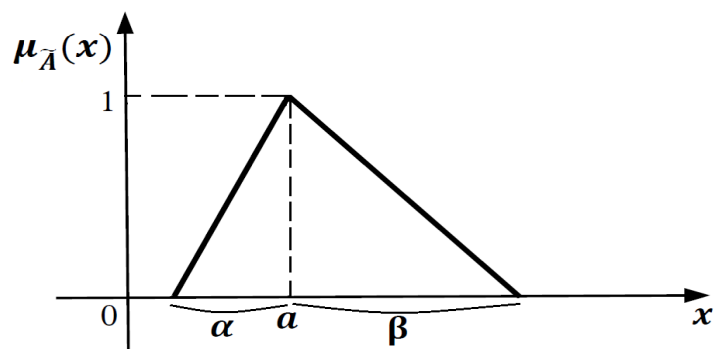
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & a - \alpha \leq x \leq a, \\ 1 - \left(\frac{x-a}{\beta}\right), & a \leq x \leq \beta + a. \end{cases}$$

شکل (۶.۱) عدد فازی مثلثی را نمایش می‌دهد.

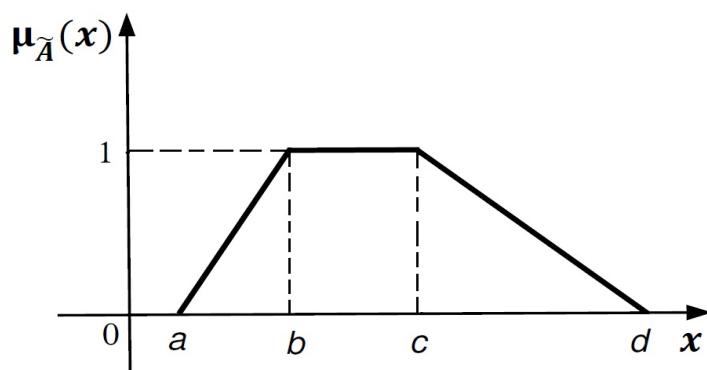
تعریف ۲۰.۲.۱. (عدد فازی دوزنقه‌ای) اگر در تعریف بازه فازی $L - R$ کلی، توابع L و R توابعی خطی باشند و اختلاف A^L و A^R ناچیز باشد، بازه فازی حاصل را عدد فازی دوزنقه‌ای می‌نامند. عدد فازی دوزنقه‌ای را به شکل $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ نشان می‌دهند و دارای تابع عضویتی به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{b-a}\right), & a \leq x \leq b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right), & c \leq x \leq d. \end{cases}$$

شکل (۷.۱) عدد فازی دوزنقه‌ای را نمایش می‌دهد.



شکل ۶.۱: تابع عضویت عدد فازی مثلی



شکل ۷.۱: تابع عضویت عدد فازی دوزنقه‌ای

۳.۱ مروری بر مفاهیم نظریه احتمال

برای معرفی فضای احتمال نیاز به تعاریف اولیه زیر داریم [۳۲].

تعریف ۱.۳.۱. $(\sigma - \text{جبر})$ گردایه m از زیرمجموعه‌های مجموعه X را یک $\sigma - \text{جبر در } X$ می‌نامیم، اگر m دارای شرایط زیر باشد:

$$(۱) \quad X \in m$$

$$(۲) \quad \text{هرگاه } A \in m \text{ آن‌گاه } A^c \in m$$

$$(۳) \quad \text{هرگاه } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ به ازای هر } n \text{ اگر } A_n \in m \text{ آن‌گاه } A \in m$$

برای ادامه بحث به تعاریف ساده ولی اساسی زیر نیاز داریم [۱۰]:

تعریف ۲.۳.۱. (فضای نمونه) هر نتیجه ممکن از یک آزمایش تصادفی مثل پرتاب سکه را نقطه نمونه می‌نامند و با ω نشان می‌دهند. مجموعه تمام نقاط نمونه‌ای (نتیجه‌های ممکن) از یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می‌نامند و با Ω نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۳.۱. (پیشامد) هر زیرمجموعه از فضای نمونه Ω پیشامد نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۳.۱. (تابع اندازه احتمال) فرض کنیم Ω یک فضای نمونه‌ای و F ، یک σ -جبر روی Ω باشد. تابع حقیقی مقدار P تعریف شده روی σ -جبر F که در شرایط زیر صدق می‌کند را تابع اندازه احتمال می‌نامند:

$$(۱) \quad 0 \leq P(A) \quad , \quad A \in \Omega$$

$$(۲) \quad P(\Omega) = 1$$

(۳) اگر دنباله‌ای از مجموعه‌های دو به دو جدا از هم در F باشند در این صورت:

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

۴.۱ برنامه‌ریزی امکانی

عدم اطمینان موجود در پیشامدها، سیستم‌ها و فرآیندها معمولاً ماهیتی ناشی از تصادف دارند و در نتیجه می‌توان با روش‌های احتمالی آن‌ها را مورد بررسی قرار داد. به علاوه از دیرباز تنها رهیافت ریاضی تکامل یافته برای اقدام در شرایط عدم اطمینان، نظریه احتمال بوده است که در بخش قبلی گفته شد. گرچه این نظریه در بسیاری از موارد مفید و موفق بوده است اما در حقیقت تنها در یک نوع خیلی خاص از عدم اطمینان کارایی دارد و محدودیت‌های آن به طور روزافزون شناخته شده است. توضیح آن که در بسیاری از وضعیت‌ها، عدم اطلاع کامل ما از یک فرآیند یا سیستم صرفاً به خاطر وجوه تصادفی حاکم بر آن‌ها نیست، بلکه ممکن است اطلاعات ما به این دلیل کامل نباشد که با اطلاعاتی ناکافی، مبهم، نادقیق، متناقض و ... سر و کار داشته باشیم. وجود انواع گوناگون اطلاعات ناقص، منجر به انواع گوناگون عدم اطمینان می‌شود که فقط یکی از انواع آن در قالب نظریه احتمال بیان شدنی است و آن عدم اطمینانی است که ناشی از وجود جنبه‌های تصادفی باشد.

یک نظریه مناسب برای الگو بندی و توصیف بسیاری از فرآیندها و سیستم‌های متضمن عدم اطمینان، نظریه امکان است. زیرا بسیاری از انواع عدم اطمینانی که در زمینه‌های مختلف با آن مواجه هستیم، اصطلاحاً جنبه امکانی دارد. ساختار ریاضی نظریه امکان بر اساس نظریه مجموعه‌های فازی است، به عبارت دیگر نقش نظریه مجموعه‌های فازی برای نظریه امکان، مانند نقش نظریه اندازه برای نظریه احتمال است.

در نظریه امکان، عدم اطمینان یک پیشامد (یا به طور معادل: اطلاع ما از هر پیشامد) توسط دو عدد مشخص می‌شود. یکی درجه امکان خود پیشامد و یکی درجه امکان پیشامد متناقض

با آن پیشامد. متمم (نسبت به یک) امکان پیشامد متناقض، درجه لزوم خود پیشامد تعریف می‌شود. این دو عدد توصیف و تبیین اطمینان و عدم اطمینان (و کلاً درجه آگاهی) نسبت به هر پیشامد را بیان می‌کنند. در بررسی امکان وقوع یک پیشامد، هم زمینه‌ها و قرائن وقوع آن پیشامد را در نظر می‌گیریم و هم زمینه‌ها و قرائن وقوع پیشامد متناقض با آن را بررسی می‌کنیم [۱].

۱.۴.۱ مروری بر مفاهیم نظریه امکان

تعریف ۱.۴.۱. (اندازه امکان) فرض کنیم X یک مجموعه مرجع باشد و $\mathcal{P}(X)$ مجموعه توانی X باشد. تابع:

$$\Pi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$$

را یک اندازه امکان می‌گویند هرگاه:

$$(۱) \quad \Pi(X) = ۱ \text{ و } \Pi(\phi) = ۰$$

$$(۲) \quad \text{برای هر } A \text{ و } B \text{ از } \mathcal{P}(X), A \subseteq B \Rightarrow \Pi(A) \leq \Pi(B)$$

$$(۳) \quad \text{برای هر دنباله } \{A_i\} \text{ از عناصر } \mathcal{P}(X) \text{ که } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Pi(A_i) = \Pi(\lim_{i \rightarrow \infty} A_i)$$

$$(۴) \quad \text{برای هر } A \text{ و } B \text{ از } \mathcal{P}(X), \Pi(A \cup B) = \max[\Pi(A), \Pi(B)].$$

در تعریف فوق معمولاً X را فضای پیشامدها و هر زیرمجموعه A از آن را به‌عنوان یک پیشامد در نظر می‌گیریم. در این صورت $\Pi(A)$ به‌عنوان (درجه) امکان رخ دادن پیشامد A تعبیر می‌شود [۱].

اگر A و A' دو پیشامد متمم باشند آن‌گاه از شرایط اول و چهارم نتیجه می‌شود که:

$$\max[\Pi(A), \Pi(A')] = ۱,$$

یعنی از دو پیشامد متمم، حداقل یکی کاملاً ممکن است.

در نظریه امکان از اندازه دیگری به نام اندازه الزام نیز استفاده می‌شود. اندازه الزام A را با $N(A)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر از اندازه امکان A به‌دست می‌آید:

$$N(A) = ۱ - \Pi(A').$$

$N(A)$ به معنی میزان حتمیت و ضرورت رخ دادن پیشامد A است.

عبارت $N(A) = ۱$ به این معنی است که لزوم رخ دادن A یک است، یعنی A لزوماً باید رخ دهد

و عبارت $\circ = N(A)$ به این معنی است که هیچ لزومی برای رخ دادن A وجود ندارد. به راحتی نشان داده می‌شود که برای هر A و B از $\mathcal{P}(X)$:

$$N(A \cap B) = \min[N(A), N(B)].$$

رابطه فوق اصل ممیزه اندازه لزوم نامیده می‌شود. همچنین نتیجه می‌شود که:

$$\Pi(A) = 1 - N(A'),$$

یعنی پیشامد A وقتی کاملاً ممکن است که هیچ لزوم و حتمیتی برای وقوع پیشامد متمم آن نباشد.

به علاوه داریم:

$$\min[N(A), N(A')] = \circ,$$

یعنی از دو پیشامد متمم حداکثر یکی، دارای لزوم مثبت است. همچنین برای هر A از $\mathcal{P}(X)$ روابط زیر برقرارند:

$$\Pi(A) + \Pi(A') \geq 1,$$

$$N(A) + N(A') \leq 1,$$

$$\Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = \circ,$$

$$N(A) > \circ \Rightarrow \Pi(A) = 1,$$

$$\Pi(A) \geq N(A).$$

رابطه آخر به این معنی است که یک پیشامد قبل از آن که لازم و حتمی باشد، باید ممکن باشد.

مثال ۱-۱. یک متخصص هواشناسی در روز دوازدهم آبان سال جاری، بر اساس آخرین گزارشات و اطلاعات هواشناسی، مقدار متوسط درجه حرارت سه شهر ایران را برای روز سیزدهم آبان به صورت اندازه‌های امکان مندرج در جدول (۱-۱) پیش‌بینی می‌کند. استنباط این متخصص در تعیین اندازه‌های امکان زیر به این صورت است که وی ملاحظه می‌کند که بر اساس اطلاعات و گزارشات موجود، می‌توان کاملاً انتظار داشت که متوسط درجه حرارت در سیزدهم آبان، به طور مثال در شهر تهران بین ۱۶ تا ۱۸ درجه باشد. و در عین حال می‌توان کاملاً انتظار داشت که این درجه حرارت بین ۱۸ تا ۲۰ درجه باشد و نیز به میزان ۰/۷ می‌توان انتظار داشت که این درجه حرارت بین ۱۴ تا ۱۶ درجه باشد و ... ، زیرا پیش‌بینی هر درجه حرارت بین ۱۶ تا ۲۰ درجه حرارت برای روز سیزدهم آبان در تهران با اطلاعات موجود کاملاً سازگار است. اما این که درجه حرارت بین ۱۴ تا ۱۶ درجه باشد تنها به میزان ۰/۷ با اطلاعات و شواهد موجود سازگاری و توافق دارد. به عبارت دیگر ۰/۷ از نشانه‌های هواشناسی حاکی از آن هستند که درجه حرارت می‌تواند بین ۱۴ تا ۱۶ درجه باشد. این نوع استنباط، استنباط

امکانی نام دارد [۱].

با توجه به جدول ارائه شده می‌توان در مورد متوسط درجه حرارت روز ۱۳ آبان استنباط‌هایی کرد و به سؤال‌هایی مانند سؤالات زیر پاسخ داد.

الف) امکان این که درجه حرارت در شهر مشهد بین ۱۶ تا ۲۰ باشد، چقدر است؟ اندازه الزام و حتمیت این پیشامد چیست؟

پاسخ: این که درجه حرارت در مشهد بین ۱۶ تا ۲۰ باشد، یعنی بین ۱۶ تا ۱۸ و یا بین ۱۸ تا ۲۰ باشد. و این معادل با این است که پیشامد $D \cup E$ رخ دهد که امکان آن چنین است:

$$\Pi_2(D \cup E) = \max[\Pi_2(D), \Pi_2(E)] = \max[0/7, 0/4] = 0/7$$

و اندازه الزام این که درجه حرارت در مشهد بین ۱۶ تا ۲۰ باشد، صفر است. زیرا امکان آن کوچکتر از یک است.

جدول ۱-۱: اندازه‌های امکان برای متوسط درجه حرارت برای سه شهر ایران در سیزدهم آبان

		A	B	C	D	E
درجه حرارت به سانتی‌گراد		۱۰ - ۱۲	۱۲ - ۱۴	۱۴ - ۱۶	۱۶ - ۱۸	۱۸ - ۲۰
شهر	اندازه امکان					
تهران	Π_1	۰	۰/۳	۰/۷	۱	۱
مشهد	Π_2	۰/۳	۰/۷۵	۱	۰/۷	۰/۴
اصفهان	Π_3	۰	۰/۳	۰/۶	۱	۱

ب) امکان این که درجه حرارت در شهر مشهد بین ۱۲ تا ۱۸ باشد، چقدر است؟ اندازه الزام و حتمیت این پیشامد چیست؟

پاسخ: امکان این که درجه حرارت در مشهد بین ۱۲ تا ۱۸ باشد، یعنی امکان رخ دادن $B \cup C \cup D$ و برای اندازه امکان داریم:

$$\Pi_2(B \cup C \cup D) = \max[\Pi_2(B), \Pi_2(C), \Pi_2(D)] = \max[0/75, 1, 0/7] = 1$$

و اندازه الزام پیشامد فوق برابر است با:

$$N_2(B \cup C \cup D) = 1 - \Pi_2[(B \cup C \cup D)'] = 1 - \Pi_2[(A \cup E)] = 1 - 0/4 = 0/6$$

ج) امکان این که درجه حرارت در شهر اصفهان یا مشهد بین ۱۲ تا ۱۶ باشد، چقدر است؟
پاسخ: در این جا درجه‌های امکان مربوط به درجه حرارت هر دو شهر اصفهان و مشهد را به

صورت درجه‌های امکان مربوط به پیشامدهای یک اندازه امکان فرض می‌کنیم. چنانچه F ، پیشامد این که درجه حرارت در اصفهان یا مشهد بین ۱۲ تا ۱۶ درجه باشد. برای اندازه امکان داریم:

$$\Pi(F) = \max\{0/3, 0/6, 0/15, 1\} = 1$$

تاکنون متوجه شده‌ایم که مفهوم اندازه امکان تعریف شده بر X ، چیزی نیست جز یک تابع عضویت برای یک زیرمجموعه فازی از X ، که به نوعی دیگر صورت‌بندی شده است. همین نکته، حلقه پیوند نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه امکان است. این نکته را با بررسی دقیق‌تر مثال فوق شرح می‌دهیم.

فرض کنیم متخصص هواشناسی برای مجموعه پیشامدهای A, B, C, D و E از X ، برای شهر اصفهان، درجه امکان مندرج در جدول را ارائه می‌دهد. به بیان ریاضی یعنی یک زیرمجموعه فازی از X در نظر می‌گیرد که این مجموعه فازی، اندازه سازگاری و تطابق هر درجه حرارت از $X = [10, 20]$ را برای سیزدهم آبان در اصفهان با اطلاعات موجود نشان می‌دهد. یعنی اندازه امکان یک زیرمجموعه فازی از X است. در این صورت، تابع عضویت این زیرمجموعه فازی را تابع توزیع امکان می‌نامیم.

تعریف ۲.۴.۱. (تابع توزیع امکان) فرض کنید X یک مجموعه مرجع و Π یک اندازه امکان بر $p(X)$ باشد. در این صورت تابع عضویت $\pi(x)$ را که متناظر با یک زیرمجموعه فازی از X است، تابع توزیع امکان متناظر با اندازه امکان Π می‌نامیم، و تعریف می‌کنیم:

$$\Pi(A) = \sup\{\pi(x) \mid x \in A\}, \quad \forall A \in p(X) \quad (2.1)$$

همچنین خود مجموعه فازی را یک توزیع امکان می‌نامیم.

مثال ۲-۱. در مثال (۱-۱) اندازه امکان مربوط به شهر اصفهان را می‌توانیم به صورت تابع توزیع امکان زیر بیان کنیم.

$$\pi(x) = \begin{cases} 0 & 10 \leq x < 12, \\ 0/3 & 12 \leq x < 14, \\ 0/6 & 14 \leq x < 16, \\ 1 & 16 \leq x < 18, \\ 1 & 18 \leq x < 20. \end{cases}$$

در این جا مثلاً امکان این که متوسط درجه حرارت در سیزدهم آبان برای اصفهان برابر $11/5$ درجه باشد، برابر با $\pi(11/5) = 0$ است و همین طور امکان این که درجه حرارت بین ۱۷ تا ۱۹ باشد، عبارت است از:

$$\sup\{\pi(x) \mid 17 \leq x \leq 19\} = 1.$$

تذکره ۱-۱. اگر Ω مجموعه مرجع و X متغیری باشد که مقادیرش را در Ω اختیار می‌کند، هنگامی که یک تابع توزیع امکان برای متغیر X در نظر می‌گیریم، گویی یک نوع تحدید فازی بر مجموعه مقادیری که X می‌تواند اختیار کند قائل شده‌ایم. مثلاً وقتی هواشناس با توجه به اطلاعات موجود، یک اندازه امکان (و یا به طور معادل، یک تابع توزیع امکان) برای درجه حرارت در سیزدهم آبان برای اصفهان در نظر می‌گیرد، گویی یک نوع تحدید فازی بر مجموعه مقادیری قائل می‌شود که متغیر درجه حرارت می‌تواند در سیزدهم آبان در اصفهان اختیار کند و آن‌گاه این نوع تحدید را در قالب یک اندازه امکان و یا یک توزیع امکان بیان می‌کند که در این صورت تابع عضویت متناظر با این تحدید همان تابع توزیع امکان خواهد بود.

مثال ۳-۱. فرض کنید $\Omega = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ و X متغیری باشد که مقادیرش را در Ω اختیار می‌کند و همچنین توزیع امکان متناظر با X « عدد صحیح نزدیک به ده » به صورت زیر باشد:

$$\pi_X(x) = \left\{ \frac{0.2}{6}, \frac{0.4}{7}, \frac{0.6}{8}, \frac{0.8}{9}, \frac{1}{10}, \frac{0.8}{11}, \frac{0.6}{12}, \frac{0.4}{13}, \frac{0.2}{14} \right\}$$

حال اگر $A = \{7, 8, 9\}$ و $B = \{6, 7, 13\}$ دو زیرمجموعه از N به‌عنوان دو پیشامد از Ω باشند، آن‌گاه بنا به تعریف داریم:

$$\Pi(A) = \sup_{X \in A} \pi_X(x) = \sup[0.4, 0.6, 0.8] = 0.8$$

$$\Pi(B) = \sup_{X \in B} \pi_X(x) = \sup[0.2, 0.4, 0.4] = 0.4$$

به عبارت دیگر امکان این که X عضو مجموعه A باشد، یعنی یکی از ارقام ۷ یا ۸ یا ۹ باشد برابر با ۰/۸ است و امکان این که X عضو مجموعه B باشد، یعنی یکی از ارقام ۶ یا ۷ یا ۱۳ باشد ۰/۴ است. در این حالات از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

$$Pos(X \in A) = \Pi(A) = 0.8$$

$$Pos(X \in B) = \Pi(B) = 0.4.$$

اکنون فرض کنید در مثال فوق A و B زیرمجموعه‌های معمولی از Ω نباشند، بلکه زیرمجموعه‌های فازی از Ω باشند، در این صورت عضویت یک مقدار از Ω در A یا در B که در رابطه (۲.۱) از آن استفاده شده، بی‌معنی است.

اکنون تعریف اولیه زیر و سپس یک تعریف کلی‌تر برای اندازه‌های امکان و الزام که رابطه (۲.۱) را تعمیم می‌دهند بیان می‌کنیم.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید A یک زیرمجموعه فازی از Ω و π_X یک توزیع امکان تعریف شده بر Ω (مرتبط با متغیر X) باشد. آن‌گاه اندازه الزام و اندازه امکان پیشامد A به این صورت تعریف می‌شود:

$$N(A) = \inf_{\omega \in \Omega} \max\{1 - \mu_A(\omega), \pi_X(\omega)\} \quad (3.1)$$

$$\Pi(A) = \sup_{\omega \in \Omega} \min\{\mu_A(\omega), \pi_X(\omega)\} \quad (۴.۱)$$

رابطه (۴.۱) را می‌توان برحسب مفهوم ارتفاع یک مجموعه فازی به صورت زیر نوشت:

$$\Pi(A) = h(A \cap X)$$

مثال ۴-۱. توزیع امکان مثال (۳-۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید C مجموعه فازی « اعداد صحیح مثبت نسبتاً کوچک » به صورت زیر باشد:

$$C = \left\{ \frac{0.6}{1}, \frac{0.8}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0.8}{4}, \frac{0.6}{5}, \frac{0.4}{6}, \frac{0.2}{7} \right\},$$

آن‌گاه:

$$\Pi(X) = Pos(X \text{ نسبتاً کوچک باشد}) = h\left\{ \frac{0.2}{6}, \frac{0.2}{7} \right\} = 0.2.$$

تذکر ۲-۱. در تعریف (۳.۴.۱) رابطه (۴.۱) بیانگر یک امکان شرطی است. این تعریف را می‌توان این‌گونه نیز بیان کرد: اگر A و B دو زیرمجموعه فازی از Ω و X متغیری باشد که در Ω مقدار می‌گیرد، آن‌گاه امکان پیشامد B به شرط A ، که با $\Pi_{B|A}$ نشان داده می‌شود، این‌گونه تعریف می‌شود:

$$Pos(B, X | A, X) = \sup_{\omega \in \Omega} \min\{\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)\}$$

همچنین $\Pi_A(B) = \Pi_{A|B} = \Pi_{B|A}$ و اگر $u \in \Omega$ وجود داشته باشد که $\mu_A(u) = \mu_B(u) = 1$ آن‌گاه $\Pi_{A|B} = \Pi_{B|A} = 1$.

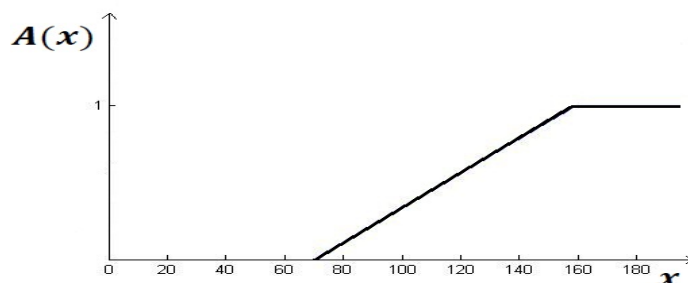
دو مثال زیر تذکر و تعریف بالا را روشن‌تر می‌کند [۱].

مثال ۵-۱. فرض کنید که میزان سرعت در تایپ توسط یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر ارزیابی شود:

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x < 70, \\ \frac{x-70}{90}, & 70 \leq x < 160, \\ 1, & 160 \leq x. \end{cases}$$

که در آن x تعداد حروف تایپ شده در دقیقه است. مثلاً اگر کسی در هر دقیقه ۱۵۰ حرف تایپ کند، میزان سرعت تایپ وی $A(150) = 0.88$ است و یا به عبارت دیگر به میزان 0.88 در مجموعه تایپیست‌های سریع قرار دارد. اکنون با فرض این که گزاره « هادی سریع تایپ می‌کند » داده شده باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که امکان این که هادی در هر دقیقه ۱۵۰

حرف تایپ کند ۰/۸۸ است.



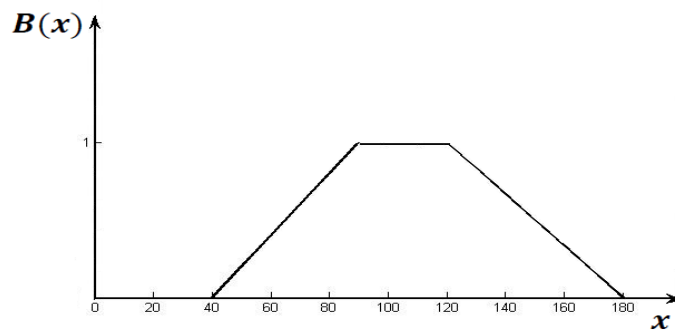
شکل ۸.۱: نمودار تابع عضویت مجموعه تایپ‌های سریع

مثال ۶-۱. یک شرکت بازرگانی می‌خواهد یک تایپیست استخدام کند. میزان مطلوبیت یک متقاضی (یعنی امکان استخدام وی) از دیدگاه مدیریت، بر حسب ساعت کار متقاضی و با تابع توزیع امکان زیر ارزیابی می‌شود.

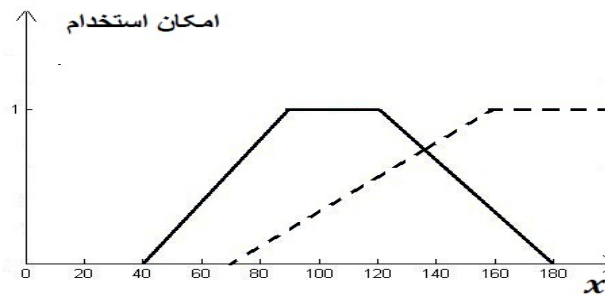
$$B(x) = \begin{cases} 0, & x < 40, \\ \frac{1}{50}(x - 40), & 40 \leq x < 90, \\ 1, & 90 \leq x < 120, \\ \frac{1}{60}(180 - x), & 120 \leq x < 180, \\ 0, & 180 \leq x. \end{cases}$$

معیار فوق این گونه توجیه می‌شود که یک متقاضی با سرعت تایپ بالا، طبیعتاً خواهان دستمزد بالایی است و این برای شرکت مطلوب نیست و از طرف دیگر متقاضی با سرعت تایپ بسیار کم، برای کار مناسب نیست. اکنون اگر با توجه به مثال قبل، هادی متقاضی استخدام در شرکت فوق باشد امکان استخدام وی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} Pos(B|A) &= Pos(B \cap A) = \Pi_{B|A} = height(B \cap A) \\ &= \sup_{x \in X} \min\{B(x), A(x)\} = 0/73. \end{aligned}$$



شکل ۹.۱: نمودار تابع توزیع امکان استخدام یک فرد به عنوان تایپیست



شکل ۱۰.۱: نمودار تابع توزیع امکان استخدام یک فرد و نمودار تابع عضویت مجموعه فازی

فصل ۲

میانگین و واریانس امکانی اعداد فازی

۱.۲ مقدمه

در سال ۱۹۸۷ دوبوئیس و پراد [۸] یک امید (مقدار مورد انتظار) بازه‌ای مقدار از اعداد فازی را معرفی کردند و آن‌ها را به عنوان مجموعه‌های تصادفی ثابت^۱ در نظر گرفتند. در این فصل ضمن معرفی علائم، مقادیر میانگین امکانی پایین و بالا، میانگین امکانی بازه‌ای مقدار و مقدار میانگین امکانی قطعی و واریانس قطعی (امکانی) توابع امکانی پیوسته را نیز معرفی می‌کنند، که با اصل گسترش و با تعاریف شناخته شده بازه موردانتظار و واریانس، در نظریه امکان سازگار است. نظریه توسعه یافته در این فصل به طور کامل برگرفته شده از اصول بیان شده در [۸] و [۳۳] است.

فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}$ اعداد فازی به صورت $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ و $B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ و $\alpha \in [0, 1]$ باشد. در سال ۱۹۸۶، گتشل و وکسمن^۲ یک روش برای رتبه‌بندی اعداد فازی را به صورت زیر معرفی کردند [۳۳].

$$\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) + a_2(\alpha))d\alpha \leq \int_0^1 \alpha(b_1(\alpha) + b_2(\alpha))d\alpha. \quad (1.2)$$

¹ Consonant Random Sets

² Goetschel and Voxman

۲.۲ ارزش میانگین امکانی از اعداد فازی

تساوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\bar{M}(\tilde{A}) := \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) + a_2(\alpha))d\alpha = \frac{\int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) + a_2(\alpha))/2 d\alpha}{\int_0^1 \alpha d\alpha}. \quad (2.2)$$

می توان $\bar{M}(\tilde{A})$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \bar{M}(\tilde{A}) &= \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) + a_2(\alpha))d\alpha = \frac{2 \int_0^1 \alpha a_1(\alpha)d\alpha + 2 \int_0^1 \alpha a_2(\alpha)d\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\int_0^1 \alpha a_1(\alpha)d\alpha}{\frac{1}{2}} + \frac{\int_0^1 \alpha a_2(\alpha)d\alpha}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\int_0^1 \alpha a_1(\alpha)d\alpha}{\int_0^1 \alpha d\alpha} + \frac{\int_0^1 \alpha a_2(\alpha)d\alpha}{\int_0^1 \alpha d\alpha} \right). \end{aligned}$$

اجازه دهید نگاه دقیق تری به سمت راست معادله ی $\bar{M}(\tilde{A})$ بیندازیم، مقدار اولی که توسط $M_*(\tilde{A})$ مشخص می شود را می توان به صورت زیر فرمول بندی کرد.

$$\begin{aligned} M_*(\tilde{A}) &= 2 \int_0^1 \alpha a_1(\alpha)d\alpha = \frac{\int_0^1 \alpha a_1(\alpha)d\alpha}{\int_0^1 \alpha d\alpha} \\ &= \frac{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)]a_1(\alpha)d\alpha}{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)]d\alpha} = \frac{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)] \times \min A_\alpha d\alpha}{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)]d\alpha}, \end{aligned}$$

که در آن Pos نشان دهنده امکان است یعنی:

$$Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)] = \prod((-\infty, a_1(\alpha))) = \sup_{u \leq a_1(\alpha)} \tilde{A}(u) = \alpha.$$

(چون \tilde{A} پیوسته است) بنابراین $M_*(\tilde{A})$ را میانگین مطلوب پایین \tilde{A} می نامند. به روش مشابه، $M^*(\tilde{A})$ ، مقدار میانگین امکانی بالا را به صورت زیر تعریف می کنند:

$$\begin{aligned} M^*(\tilde{A}) &= 2 \int_0^1 \alpha a_2(\alpha)d\alpha = \frac{\int_0^1 \alpha a_2(\alpha)d\alpha}{\int_0^1 \alpha d\alpha} \\ &= \frac{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)]a_2(\alpha)d\alpha}{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)]d\alpha} = \frac{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)] \times \max A_\alpha d\alpha}{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)]d\alpha}, \end{aligned}$$

که در آن از تساوی زیر استفاده کرده اند

$$Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)] = \prod([a_2(\alpha), \infty)) = \sup_{u \geq a_2(\alpha)} \tilde{A}(u) = \alpha.$$

اجازه دهید نماد زیر را معرفی کنیم:

$$M(\tilde{A}) = [M_*(\tilde{A}), M^*(\tilde{A})]$$

یعنی $M(\tilde{A})$ یک بازه بسته است که توسط مقادیر میانگین امکانی پایین و بالای \tilde{A} محدود می‌شود.

تعریف ۱.۲.۲. $M(\tilde{A})$ را میانگین امکانی بازه‌ای مقدار \tilde{A} می‌نامند. اگر \tilde{A} تابع مشخصی از بازه قطعی $[a, b]$ باشد آنگاه $M((a, b, \circ, \circ)) = [a, b]$ است. اکنون نشان می‌دهیم که M به عنوان یک تابع خطی از \mathcal{F} به صورت خطی عمل می‌کند.

قضیه ۱.۲.۲. [۲۸] فرض کنید \tilde{A} و \tilde{B} دو عدد فازی غیرتعاملی^۳ باشند و فرض کنید $\lambda \in \mathbb{R}$ باشد. آنگاه:

$$M(\tilde{A} + \tilde{B}) = M(\tilde{A}) + M(\tilde{B}), \quad M(\lambda\tilde{A}) = \lambda M(\tilde{A}),$$

یعنی:

$$M_*(\tilde{A} + \tilde{B}) = M_*(\tilde{A}) + M_*(\tilde{B}), \quad M^*(\tilde{A} + \tilde{B}) = M^*(\tilde{A}) + M^*(\tilde{B}),$$

و

$$[M_*(\lambda\tilde{A}), M^*(\lambda\tilde{A})] = \begin{cases} [\lambda M_*(\tilde{A}), \lambda M^*(\tilde{A})] & \lambda \geq \circ, \\ [\lambda M^*(\tilde{A}), \lambda M_*(\tilde{A})] & \lambda < \circ, \end{cases}$$

که در آن جمع و ضرب به وسیله‌ی یک اسکالر از اعداد فازی توسط اصل گسترش $sup-min$ انجام می‌شود.

برهان. از معادله

$$[A + B]_\alpha = [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)],$$

داریم:

$$\begin{aligned} M_*(\tilde{A} + \tilde{B}) &= \int_0^1 \alpha (a_1(\alpha) + b_1(\alpha)) d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha a_1(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \alpha b_1(\alpha) d\alpha \\ &= M_*(\tilde{A}) + M_*(\tilde{B}), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} M^*(\tilde{A} + \tilde{B}) &= \int_0^1 \alpha (a_2(\alpha) + b_2(\alpha)) d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha a_2(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \alpha b_2(\alpha) d\alpha \\ &= M^*(\tilde{A}) + M^*(\tilde{B}), \end{aligned}$$

³Non-interactive

علاوه بر این، از

$$[\lambda A]_{\alpha} = \lambda[A]_{\alpha} = \lambda[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = \begin{cases} [\lambda a_1(\alpha), \lambda a_2(\alpha)], & \lambda \geq 0, \\ [\lambda a_2(\alpha), \lambda a_1(\alpha)], & \lambda < 0, \end{cases}$$

برای $\lambda \geq 0$ داریم

$$M_*(\lambda \tilde{A}) = \int_0^1 \alpha(\lambda a_1(\alpha)) d\alpha = \int_0^1 \lambda \alpha a_1(\alpha) d\alpha = \lambda M_*(\tilde{A}),$$

$$M^*(\lambda \tilde{A}) = \int_0^1 \alpha(\lambda a_2(\alpha)) d\alpha = \int_0^1 \lambda \alpha a_2(\alpha) d\alpha = \lambda M^*(\tilde{A}),$$

و برای $\lambda < 0$

$$M_*(\lambda \tilde{A}) = \int_0^1 \alpha(\lambda a_2(\alpha)) d\alpha = \int_0^1 \lambda \alpha a_2(\alpha) d\alpha = \lambda M^*(\tilde{A}),$$

$$M^*(\lambda \tilde{A}) = \int_0^1 \alpha(\lambda a_1(\alpha)) d\alpha = \int_0^1 \lambda \alpha a_1(\alpha) d\alpha = \lambda M_*(\tilde{A}).$$

که اثبات را به پایان می‌رساند.

□

مقدار میانگین امکانی قطعی از \tilde{A} را به وسیله‌ی (۲.۲) که به عنوان مقادیر میانگین امکانی پایین و بالا محاسبه شده است را به دست می‌آوریم یعنی:

$$\bar{M}(\tilde{A}) = \frac{M_*(\tilde{A}) + M^*(\tilde{A})}{2}.$$

قضیه زیر دو ویژگی بسیار مهم را از $\bar{M} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ نشان می‌دهد.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $A_{\alpha} = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ و $B_{\alpha} = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ اعداد فازی و $\lambda \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی باشد. آنگاه:

$$\bar{M}(\tilde{A} + \tilde{B}) = \bar{M}(\tilde{A}) + \bar{M}(\tilde{B}),$$

و

$$\bar{M}(\lambda \tilde{A}) = \lambda \bar{M}(\tilde{A}).$$

برهان. ابتدا

$$\begin{aligned} \bar{M}(\tilde{A} + \tilde{B}) &= \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) + b_1(\alpha) + a_2(\alpha) + b_2(\alpha)) d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) + a_2(\alpha)) d\alpha + \int_0^1 \alpha(b_1(\alpha) + b_2(\alpha)) d\alpha = \bar{M}(\tilde{A}) + \bar{M}(\tilde{B}), \end{aligned}$$

و برای $\lambda \geq 0$ داریم:

$$\bar{M}(\lambda \tilde{A}) = \int_0^1 \alpha(\lambda a_1(\alpha) + \lambda a_2(\alpha)) d\alpha = \lambda \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) + a_2(\alpha)) d\alpha = \lambda \bar{M}(\tilde{A}),$$

و در نهایت، برای $\lambda < 0$ داریم:

$$\bar{M}(\lambda \tilde{A}) = \int_0^1 \alpha(\lambda a_2(\alpha) + \lambda a_1(\alpha)) d\alpha = \lambda \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) + a_2(\alpha)) d\alpha = \lambda \bar{M}(\tilde{A}).$$

□ که اثبات را به پایان می‌رساند.

مثال ۱.۲.۲. فرض کنید $\tilde{A} = (a, \gamma, \beta)$ یک عدد فازی مثلثی با مرکز a ، عرض سمت چپ $\gamma > 0$ و عرض سمت راست $\beta > 0$ باشد. آنگاه α - برش از \tilde{A} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A_\alpha = [a - (1 - \alpha)\gamma, a + (1 - \alpha)\beta], \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

که

$$M_*(\tilde{A}) = 2 \int_0^1 \alpha[a - (1 - \alpha)\gamma] d\alpha = a - \frac{\gamma}{3},$$

$$M^*(\tilde{A}) = 2 \int_0^1 \alpha[a + (1 - \alpha)\beta] d\alpha = a + \frac{\beta}{3},$$

و از این‌رو،

$$M(\tilde{A}) = \left[a - \frac{\gamma}{3}, a + \frac{\beta}{3} \right],$$

و در نهایت

$$\bar{M}(\tilde{A}) = \int_0^1 \alpha[a - (1 - \alpha)\gamma + a + (1 - \alpha)\beta] d\alpha = a + \frac{\beta - \gamma}{6}.$$

به طور خاص، وقتی $\tilde{A} = (a, \gamma)$ یک عدد فازی مثلثی متقارن است مقدار $\bar{M}(\tilde{A}) = a$ را داریم. اگر \tilde{A} عدد فازی متقارن با اوج $[q_-, q_+]$ باشد آنگاه:

$$\bar{M}(\tilde{A}) = \frac{q_- + q_+}{2}.$$

۳.۲ ارتباط بین مقادیر میانگین امکانی و احتمالی پایین و بالا

یک رابطه مهم بین مقدار مورد انتظار بازه‌ای $E(\tilde{A}) = [E_*(\tilde{A}), E^*(\tilde{A})]$ معرفی شده در [۹] و میانگین امکانی بازه‌ای $M(\tilde{A}) = [M_*(\tilde{A}), M^*(\tilde{A})]$ برای اعداد فازی $L - R$ را به صورت توابع

اکیداً نزولی نشان می‌دهیم.

یک عدد فازی $L - R$ ، $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ را می‌توان با تابع عضویت زیر توصیف کرد [۷]:

$$\tilde{A}(u) = \begin{cases} L\left(\frac{q_- - u}{\gamma}\right), & q_- - \gamma \leq u \leq q_-, \\ 1, & u \in [q_-, q_+], \\ R\left(\frac{u - q_+}{\beta}\right), & q_+ \leq u \leq q_+ + \beta, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $[q_-, q_+]$ اوج \tilde{A} و q_- و q_+ مقادیر کیفی پایین و بالا هستند،
 $L, R : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ با $L(0) = R(0) = 1$ و $L(1) = R(1) = 0$ نگاشت‌های پیوسته غیر
 صعودی هستند. از $\tilde{A} = (q_-, q_+, \gamma, \beta)_{LR}$ استفاده می‌کنیم. بستر تکیه‌گاه \tilde{A} دقیقاً همان
 $[q_- - \gamma, q_+ + \beta]$ است.
 اگر L و R توابع اکیداً نزولی باشند، آنگاه می‌توانیم مجموعه‌های α -برش از \tilde{A} را به راحتی
 محاسبه کنیم. یعنی:

$$A_\alpha = [q_- - \gamma L^{-1}(\alpha), q_+ + \beta R^{-1}(\alpha)], \quad \alpha \in [0, 1].$$

از [۸] مقادیر میانگین احتمالی پایین و بالا $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_*(\tilde{A}) = q_- - \gamma \int_0^1 L(u) du,$$

$$E^*(\tilde{A}) = q_+ + \beta \int_0^1 R(u) du,$$

و مقادیر میانگین امکانی پایین و بالا به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$M_*(\tilde{A}) = 2 \int_0^1 \alpha (q_- - \gamma L^{-1}(\alpha)) d\alpha = q_- - \gamma \int_0^1 \alpha L^{-1}(\alpha) d\alpha,$$

$$M^*(\tilde{A}) = 2 \int_0^1 \alpha (q_+ + \beta R^{-1}(\alpha)) d\alpha = q_+ + \beta \int_0^1 \alpha R^{-1}(\alpha) d\alpha.$$

بنابراین، می‌توانیم لم زیر را بیان کنیم.

لم ۱.۳.۲. اگر $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ یک عدد فازی از نوع $L - R$ با توابع اکیداً نزولی و پیوسته باشد، آنگاه
 میانگین امکانی بازه‌ای مقدار آن یک زیرمجموعه صریح از میانگین امکانی بازه‌ای مقدار آن است
 یعنی:

$$M(\tilde{A}) \subset E(\tilde{A})$$

برهان. از روابط

$$\int_0^1 L(u)du = \int_0^1 L^{-1}(\alpha)d\alpha \quad , \quad \int_0^1 R(u)du = \int_0^1 R^{-1}(\alpha)d\alpha,$$

داریم:

$$\int_0^1 \alpha L^{-1}(\alpha)d\alpha < \int_0^1 L(u)du \quad , \quad \int_0^1 \alpha R^{-1}(\alpha)d\alpha < \int_0^1 R(u)du.$$

□

که اثبات به پایان می‌رسد.

در حالت حدی، زمانی که $\tilde{A} = (q_-, q_+, \circ, \circ)$ مقادیر میانگین امکانی و احتمالی آن‌ها برابر است و این برابری به صورت زیر است:

$$E(\tilde{A}) = M(\tilde{A}) = [q_-, q_+].$$

مثال ۱.۳.۲. فرض کنید $\tilde{A} = (a, \gamma, \beta)$ یک عدد فازی مثلثی با مرکز a ، عرض-چپ $\gamma > \circ$ و عرض-راست $\beta > \circ$ باشد، آنگاه:

$$M(\tilde{A}) = \left[a - \frac{\gamma}{3}, a + \frac{\beta}{3} \right] \subset E(\tilde{A}) = \left[a - \frac{\gamma}{4}, a + \frac{\beta}{4} \right],$$

و

$$\bar{M}(\tilde{A}) = a + \frac{\beta - \gamma}{6} \neq \bar{E}(\tilde{A}) = \frac{E_*(\tilde{A}) + E^*(\tilde{A})}{2} = a + \frac{\beta - \gamma}{4}.$$

با این حال وقتی \tilde{A} یک عدد فازی متقارن است، معادله $\bar{M}(\tilde{A}) = \bar{E}(\tilde{A})$ همیشه برقرار است.

۴.۲ واریانس اعداد فازی

واریانس امکانی از $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ به صورت زیر معرفی می‌شود: [۵]

$$\begin{aligned} Var(\tilde{A}) &= \int_0^1 Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)] \left(\left[\frac{a_1(\alpha) + a_2(\alpha)}{2} - a_1(\alpha) \right]^2 \right) d\alpha \\ &+ \int_0^1 Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)] \left(\left[\frac{a_1(\alpha) + a_2(\alpha)}{2} - a_2(\alpha) \right]^2 \right) d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha \left(\left[\frac{a_1(\alpha) + a_2(\alpha)}{2} - a_1(\alpha) \right]^2 + \left[\frac{a_1(\alpha) + a_2(\alpha)}{2} - a_2(\alpha) \right]^2 \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \alpha (a_2(\alpha) - a_1(\alpha))^2 d\alpha. \end{aligned}$$

همچنین انحراف معیار از \tilde{A} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{\tilde{A}} = \sqrt{Var(\tilde{A})}.$$

برای مثال، اگر $\tilde{A} = (a, \gamma, \beta)$ عدد فازی مثلثی باشد آنگاه:

$$Var(\tilde{A}) = \frac{1}{6} \int_0^1 \alpha(a + \beta(1 - \alpha) - (a - \gamma(1 - \alpha)))^2 d\alpha = \frac{(\gamma + \beta)^2}{24},$$

به خصوص اگر $\tilde{A} = (a, \gamma)$ عدد فازی مثلثی متقارن باشد آنگاه:

$$Var(\tilde{A}) = \frac{\gamma^2}{6}.$$

در حالت حدی، وقتی $\tilde{A} = (a, \circ)$ یک نقطه فازی باشد، یعنی $a_1(\alpha) = a_2(\alpha) = a$ به ازای هر α ، مقدار ثابت باشد، به $Var(\tilde{A}) = \circ$ می‌رسیم. اگر \tilde{A} تابع مشخصه از فاصله قطعی $[a, b]$ باشد، داریم:

$$Var(\tilde{A}) = \frac{1}{6} \int_0^1 \alpha(b - a)^2 d\alpha = \left(\frac{b - a}{2}\right)^2,$$

یعنی:

$$\sigma_{\tilde{A}} = \frac{b - a}{2}, \quad \bar{M}(\tilde{A}) = \frac{a + b}{2}.$$

کوواریانس بین اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} به صورت زیر تعریف می‌شود: [۵]

$$Cov(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{6} \int_0^1 \alpha(a_2(\alpha) - a_1(\alpha))(b_2(\alpha) - b_1(\alpha)) d\alpha.$$

با در نظر گرفتن $supp(\tilde{A}) = [a_1(\circ), a_2(\circ)]$ و $supp(\tilde{B}) = [b_1(\circ), b_2(\circ)]$ متوجه می‌شویم که چه مقدار کوواریانس از حاصلضرب مجموعه‌های α - برش از دو عدد فازی \tilde{A} و \tilde{B} نزدیک به حاصلضرب مجموعه‌های α - برش از مجموعه‌های جهانی فازی در $supp(\tilde{A})$ و $supp(\tilde{B})$ هستند. از

$$(a_2(\circ) - a_1(\circ))(b_2(\circ) - b_1(\circ)) > (a_2(\alpha) - a_1(\alpha))(b_2(\alpha) - b_1(\alpha)) > \circ,$$

برای هر $\alpha \in (\circ, 1)$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{(a_2(\circ) - a_1(\circ))(b_2(\circ) - b_1(\circ))}{6} > Cov(\tilde{A}, \tilde{B}) > \circ,$$

که برای هر جفت اعداد فازی (پیوسته) \tilde{A} و \tilde{B} در $supp(\tilde{A})$ و $supp(\tilde{B})$ برقرار است. در حالت حدی، زمانی که \tilde{A} به ازای هر α ثابت باشد، یعنی $a_1(\alpha) = a_2(\alpha) = a$ داریم:

$$Cov(\tilde{A}, \tilde{B}) = \circ.$$

فرض کنید $\tilde{A} = (a, \gamma)$ و $\tilde{B} = (b, \beta)$ اعداد فازی مثلثی متقارن باشند، آنگاه:

$$Cov(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\gamma\beta}{6}.$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که واریانس ترکیب خطی اعداد فازی به راحتی می‌تواند محاسبه شود.

قضیه ۱.۴.۲. فرض کنید $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و فرض کنید \tilde{A} و \tilde{B} اعداد فازی باشند. آنگاه:

$$Var(\lambda\tilde{A} + \mu\tilde{B}) = \lambda^2 Var(\tilde{A}) + \mu^2 Var(\tilde{B}) + 2|\lambda\mu|Cov(\tilde{A}, \tilde{B}),$$

که در آن جمع و ضرب با یک اسکالر از اعداد فازی توسط اصل گسترش $sup - min$ ایجاد می‌شود. برهان. فرض کنید $\lambda < 0$ و $\mu < 0$ ، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} Var(\lambda\tilde{A} + \mu\tilde{B}) &= \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(\lambda a_1(\alpha) + \mu b_1(\alpha) - \lambda a_\gamma(\alpha) - \mu b_\gamma(\alpha))^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(\lambda(a_1(\alpha) - a_\gamma(\alpha)) + \mu(b_1(\alpha) - b_\gamma(\alpha)))^2 d\alpha \\ &= \lambda^2 \times \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) - a_\gamma(\alpha))^2 d\alpha + \mu^2 \times \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(b_1(\alpha) - b_\gamma(\alpha))^2 d\alpha \\ &\quad + 2\lambda\mu \times \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) - a_\gamma(\alpha))(b_1(\alpha) - b_\gamma(\alpha)) d\alpha \\ &= \lambda^2 Var(\tilde{A}) + \mu^2 Var(\tilde{B}) + 2\lambda\mu \times \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(a_\gamma(\alpha) - a_1(\alpha))(b_\gamma(\alpha) - b_1(\alpha)) d\alpha \\ &= \lambda^2 Var(\tilde{A}) + \mu^2 Var(\tilde{B}) + 2\lambda\mu Cov(\tilde{A}, \tilde{B}) \\ &= \lambda^2 Var(\tilde{A}) + \mu^2 Var(\tilde{B}) + 2|\lambda\mu|Cov(\tilde{A}, \tilde{B}). \end{aligned}$$

استدلال مشابهی برای $\lambda > 0$ و $\mu > 0$ وجود دارد. فرض کنید که $\lambda > 0$ و $\mu < 0$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} Var(\lambda\tilde{A} + \mu\tilde{B}) &= \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(\lambda a_1(\alpha) + \mu b_\gamma(\alpha) - \lambda a_\gamma(\alpha) - \mu b_1(\alpha))^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(\lambda(a_1(\alpha) - a_\gamma(\alpha)) + \mu(b_\gamma(\alpha) - b_1(\alpha)))^2 d\alpha \\ &= \lambda^2 \times \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) - a_\gamma(\alpha))^2 d\alpha + \mu^2 \times \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(b_\gamma(\alpha) - b_1(\alpha))^2 d\alpha \\ &\quad + 2\lambda\mu \times \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(a_1(\alpha) - a_\gamma(\alpha))(b_\gamma(\alpha) - b_1(\alpha)) d\alpha \\ &= \lambda^2 Var(\tilde{A}) + \mu^2 Var(\tilde{B}) - 2\lambda\mu \times \frac{1}{\varphi} \int_0^1 \alpha(a_\gamma(\alpha) - a_1(\alpha))(b_\gamma(\alpha) - b_1(\alpha)) d\alpha \\ &= \lambda^2 Var(\tilde{A}) + \mu^2 Var(\tilde{B}) + 2|\lambda\mu|Cov(\tilde{A}, \tilde{B}). \end{aligned}$$

□

که اثبات به پایان می‌رسد.

به عنوان یک حالت خاص از قضیه (۱.۴.۲) داریم $Var(\lambda\tilde{A}) = \lambda^2 Var(\tilde{A})$ برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$

و

$$Var(\tilde{A} + \tilde{B}) = Var(\tilde{A}) + Var(\tilde{B}) + 2Cov(\tilde{A}, \tilde{B}),$$

فرض کنید $\tilde{A} = (a, \gamma)$ و $\tilde{B} = (b, \beta)$ اعداد فازی مثلثی متقارن، λ و μ اعداد حقیقی باشند. آنگاه:

$$Var(\lambda\tilde{A} + \mu\tilde{B}) = \lambda^2 \frac{\gamma^2}{\varphi} + \mu^2 \frac{\beta^2}{\varphi} + 2|\lambda\mu| \frac{\gamma\beta}{\varphi} = \frac{(|\lambda|\gamma + |\mu|\beta)^2}{\varphi}.$$

قضیه ۲.۴.۲. فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}$ اعداد فازی و $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ باشد، آنگاه $Var(\tilde{A}) \leq Var(\tilde{B})$.

برهان. از $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ داریم:

$$b_1(\alpha) \leq a_1(\alpha) \leq a_2(\alpha) \leq b_2(\alpha),$$

برای همه $\alpha \in [0, 1]$ ، یعنی:

$$a_2(\alpha) - a_1(\alpha) \leq b_2(\alpha) - b_1(\alpha),$$

برای همه $\alpha \in [0, 1]$ و از این رو

$$Var(\tilde{A}) = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 \alpha (a_2(\alpha) - a_1(\alpha))^2 d\alpha \leq \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 \alpha (b_2(\alpha) - b_1(\alpha))^2 d\alpha = Var(\tilde{B}).$$

□

اثبات به پایان می‌رسد.

فصل ۳

مدل امکانی چندهدفه برای انتخاب پورتفوی با هزینه معامله

۱.۳ مقدمه

نظریه انتخاب پورتفوی کارای میانگین-واریانس در [۱۰،۱۱] بیان شده است. که در آن‌ها روش خطی برای یافتن پورتفوی‌ها ارائه می‌شود. مارکوویتز^۱، کار خود را که پایه و اساس آن تحلیل پورتفوی مدرن است را منتشر کرد. این نظریه؛ نظریه احتمال و بهینه‌سازی را برای مدل‌سازی فرآیندهای اقتصادی تحت عدم اطمینان ترکیب می‌کند. رویکرد میانگین-واریانس نیز مورد انتقاد بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. یکی از مهم‌ترین دلایل آن، پیچیدگی محاسباتی است که در حل مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم در مقیاس بزرگ پیش می‌آید. کونو و یامازاکی^۲ [۱۲] از تابع انحراف معیار به جای تابع ریسک موجود در مدل مارکوویتز استفاده کردند.

به علت ناقص بودن اطلاعات و پیچیدگی یک بازار مالی، پیش بینی دقیق بازده آینده و ریسک واقعی پورتفوی غیرممکن است. به منظور نشان دادن ابهام در زندگی روزمره، زاده [۲۸] مفهوم مجموعه‌های فازی را در سال ۱۹۶۵ معرفی کرد. بلمن و زاده^۳ [۳۴] براساس این

¹ Markowitz

² Konno and Yamazaki

³ Bellman and Zadeh

مفهوم، تصمیم‌گیری را در یک محیط فازی با یک مجموعه تصمیم معرفی کردند که این موضوع، هدف فازی و محدودیت فازی را یکپارچه می‌کند. واتادا^۴ [۲۲] نوع دیگری از مدل انتخاب پورتنفوی را بر اساس اصل فازی ارائه کرد. در نظریه پورتنفوی سنتی یک سرمایه‌گذاری توزیعی، به عنوان یک سیاست خوب برای کاهش ریسک مورد توجه قرار گرفته است. بنابراین یک کاربرد برای برنامه‌ریزی امکانی را برای انتخاب پورتنفوی‌ها می‌توان انتظار داشت. در رویکردهای برنامه‌ریزی امکانی نرخ بازده مورد انتظار نه به عنوان متغیرهای تصادفی بلکه به عنوان متغیرهای امکانی در نظر گرفته می‌شوند. هزینه‌های معاملاتی یکی از نگرانی‌های اصلی برای مدیریت پورتنفوی‌ها است. بدیهی است که هزینه‌های معاملاتی تأثیر مستقیمی بر عملکرد آن‌ها دارد. آرنوت و واگنر^۵ [۳۵] دریافتند که نادیده گرفتن هزینه‌های معاملاتی منجر به یک پورتنفوی ناکارآمد می‌شود. سطح بازده‌ای که یک سرمایه‌گذار ممکن است انتظار داشته باشد، ریسک و نقدشوندگی پورتنفوی در یک محیط مالی معمولاً مبهم هستند. بنابراین ما در اینجا یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه را برای بازپرداخت پورتنفوی با هزینه معامله را با توجه به نقدشوندگی پیشنهاد می‌کنیم.

۲.۳ مسأله انتخاب پورتنفوی

فرض کنید که افراد موفق دارای فرصت سرمایه‌گذاری در n دارایی مختلف در اوراق قرضه و پورتنفوی هستند. علائم به شرح ذیل هستند:

x_i نسبت کل مبلغ پولی که به سهم i ام اختصاص دارد برای $i = 1, 2, \dots, n$ ،

u_i, l_i نسبت کمینه و بیشینه سرمایه‌گذاری شده به ترتیب برای سهم i ام،

R_i نرخ تصادفی از بازدهی دارایی ریسکی i ام،

σ_{ij} کوواریانس بین R_i, R_j ؛ $i, j = 1, 2, \dots, n$ ،

c_i نرخ هزینه‌های معاملاتی از دارایی ریسکی i ، $i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

هزینه‌های معاملاتی هزینه‌های ناشی از یک مبادله‌ی اقتصادی است، که عموماً به دو گروه تقسیم می‌شود:

۱. هزینه‌های مربوط به پیدا کردن طرف تجاری قابل قبول و انجام مذاکرات و نوشتن قرارداد.

⁴ Watada

⁵ Arnott and Wagner

۲. هزینه‌های مربوط به بررسی و اجرا مفاد قراردادهای توافق شده.

همانطور که در [۳] ملاحظه می‌شود، فرض می‌شود هزینه معامله یک تابعی از تفاوت بین پورتفوی جدید $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و پورتفوی موجود $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$ به دست می‌آید. بنابراین کل هزینه معامله پورتفوی $\sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^\circ|$ است. برای سرمایه‌گذاران جدید، می‌توانیم $x_i^\circ = 0$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ را در نظر بگیریم.

مدل ۱ مدل میانگین-واریانس دو هدفه با هزینه‌های معاملاتی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && M(x) = E(R) - \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^\circ|, && R = \sum_{i=1}^n R_i x_i, \\ & \text{minimize} && V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(R_i, R_j) x_i x_j, \\ & \text{subject to} && \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ & && l_i \leq x_i \leq u_i, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

میانگین-واریانس^۶ (MV) مارکوویتز به این معناست که یک سرمایه‌گذار همیشه باید پورتفوی کارا را انتخاب کند. مشکل اصلی در پورتفوی میانگین-واریانس بهینه این است که پورتفوی‌ها اغلب به شدت روی تعداد کمی از دارایی‌ها متمرکز می‌شوند که یک تناقض برای تنوع داده‌ها است. بنابراین چشم‌انداز دیگری برای معرفی یک معیار دیگر به صورت مختصر برای تنوع و به عنوان بهترین انتخاب وجود دارد. تعجب آور نیست که آنتروپی به عنوان اندازه‌گیری پراکندگی پورتفوی‌ها در ادبیات مالی استفاده می‌شود، زیرا عدم اطمینان تنوع دارایی‌ها را نشان می‌دهد. بنابراین یک معیار آنتروپی را بررسی می‌کنند تا نتیجه بگیرند که پورتفوی چقدر تنوع دارد [۲۳، ۳۷]. در این فصل، تابع آنتروپی زیر را حداکثر می‌کنیم.

$$S(x) = - \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i.$$

مدل ۲ در مسائل واقعی در قیاس با مسأله (۱.۳) مسأله انتخاب پورتفوی می‌تواند با تنوع بیشتری به صورت مدل سه هدفه زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && S(x) = - \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i), \\ & \text{maximize} && M(x) = E(R) - \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^\circ|, && R = \sum_{i=1}^n R_i x_i, \\ & \text{minimize} && V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(R_i, R_j) x_i x_j, \\ & \text{subject to} && \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ & && l_i \leq x_i \leq u_i, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

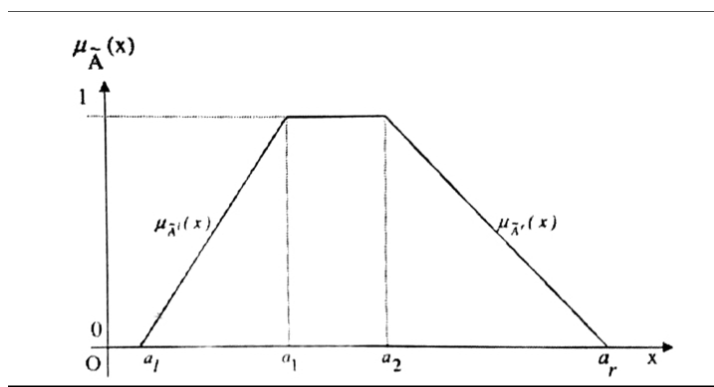
⁶Mean-Variance

۱.۲.۳ عدد فازی

عدد فازی دوزنقه‌ای (TrFN)^۷: یک عدد فازی دوزنقه‌ای $TrFN$ می‌تواند به صورت کامل به وسیله‌ی چهارتایی $\tilde{A} = (a_l, a_1, a_2, a_r)$ بیان شود که تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}^l(x) = \frac{x-a_l}{a_1-a_l}, & a_l \leq x \leq a_1, \\ 1, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ \mu_{\tilde{A}}^r(x) = \frac{a_r-x}{a_r-a_2}, & a_2 \leq x \leq a_r, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۳.۳)$$

که در آن $a_l \leq a \leq a_r$ اعداد حقیقی هستند و $\mu_{\tilde{A}}^l$ و $\mu_{\tilde{A}}^r$ به ترتیب تابع عضویت چپ و راست از عدد فازی \tilde{A} هستند. نمایش تصویری از تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ در شکل (۱.۳) آمده است.



شکل ۱.۳: عدد فازی دوزنقه‌ای

توجه داشته باشید که یک عدد فازی مثلثی (TFN)^۸ یک نوع خاص از عدد فازی دوزنقه‌ای $TrFN$ با $a_1 = a_2$ است.

دو عدد فازی دوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a_l, a_1, a_2, a_r)$ و $\tilde{B} = (b_l, b_1, b_2, b_r)$ را در نظر بگیرید مجموع دو عدد فازی دوزنقه‌ای نیز یک عدد فازی دوزنقه‌ای است و حاصلضرب در اسکالر k نیز یک عدد فازی دوزنقه‌ای است. یعنی داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B} &= (a_l + b_l, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_r + b_r), \\ k * \tilde{A} &= (ka_l, ka_1, ka_2, ka_r), \quad k \geq 0, \\ &= (ka_r, ka_2, ka_1, ka_l), \quad k < 0, \\ \tilde{A} - \tilde{B} &= (a_l - b_r, a_1 - b_2, a_2 - b_1, a_r - b_l). \end{aligned}$$

⁷ Triangular Fuzzy Number

⁸ Triangle Fuzzy Number

۲.۲.۳ واریانس و مقدار میانگین امکانی

فرض کنید $A_\alpha = [u_1(\alpha), u_2(\alpha)]$ باشد. آنگاه ارزش میانگین امکانی قطعی از $\tilde{A} = (a_l, a_1, a_2, a_r)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: [۴، ۸]

$$\begin{aligned} E(\tilde{A}) &= \int_0^1 \alpha [u_1(\alpha) + u_2(\alpha)] d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha [a_l + \alpha(a_1 - a_l) + a_r - \alpha(a_r - a_2)] d\alpha \\ &= \frac{a_1 + a_2}{3} + \frac{a_l + a_r}{6}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

واریانس امکانی \tilde{A} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} Var(\tilde{A}) &= \frac{1}{3} \int_0^1 \alpha [u_2(\alpha) - u_1(\alpha)]^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \alpha [a_r - \alpha(a_r - a_2) - a_l - \alpha(a_1 - a_l)]^2 d\alpha \\ &= \frac{(a_1 + a_r - a_l - a_2)^2}{8} + \frac{(a_r - a_l)^2}{4} - \frac{(a_1 + a_r - a_l - a_2)(a_r - a_l)}{3}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

فرض کنید $A_\alpha = [u_1(\alpha), u_2(\alpha)]$ و $B_\alpha = [v_1(\alpha), v_2(\alpha)]$ باشند. آنگاه کوواریانس امکانی بین اعداد فازی $\tilde{A} = (a_l, a_1, a_2, a_r)$ و $\tilde{B} = (b_l, b_1, b_2, b_r)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} Cov(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \frac{1}{3} \int_0^1 \alpha [[u_2(\alpha) - u_1(\alpha)][v_2(\alpha) - v_1(\alpha)]] d\alpha \\ &= \frac{(a_1 + a_r - a_l - a_2)(b_1 + b_r - b_l - b_2)}{8} + \frac{(a_r - a_l)(b_r - b_l)}{4} \\ &\quad - \frac{(a_1 + a_r - a_l - a_2)(b_r - b_l) + (b_1 + b_r - b_l - b_2)(a_r - a_l)}{6}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

۳.۳ مدل امکانی چندهدفه

بهینه‌سازی سبدهای سهام چندهدفه با دو عامل اساسی آغاز شد؛ بازده مورد انتظار و ریسک. در بعضی موارد، سرمایه‌گذاران ممکن است عوامل دیگر را نیز در نظر بگیرند، مانند نقدشوندگی که با استفاده از نرخ گردش سهام ارزیابی می‌شود.

نقدشوندگی به معنای سهولت و سرعتی است که یک ورقه‌ی بهادار در آن با حداقل هزینه به وجه نقد تبدیل می‌شود، معمولاً سرمایه‌گذاران سهام‌های با نقدشوندگی بالای بازار را بیشتر ترجیح می‌دهند. با توجه به بازار مالی نامطمئن، پیش‌بینی نرخ فروش اوراق بهادار غیر ممکن است. در بسیاری از موارد ممکن است پیش‌بینی ساده‌تر شود که توزیع امکانی نرخ بهره اوراق بهادار به جای توزیع احتمال تخمین زده شود. در اینجا ما نرخ گردش سهام اوراق بهادار i را با عدد فازی دوزنقه‌ای $(\tilde{T}_i = (T_{il}, T_{i1}, T_{i2}, T_{ir}))$ و $i = 1, 2, \dots, n$ ارزش میانگین امکانی قطعی

معاملات در نرخ پرتفوی‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$E(\tilde{T}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{i1} + T_{i2}}{3} + \frac{T_{il} + T_{ir}}{6} \right) x_i, \quad x_i \geq 0 \quad (7.3)$$

که در آن نقدشوندگی پرتفوی، معمولاً بزرگ‌تر یا مساوی با یک مقدار ثابت λ است. نرخ بازده با سهام i ام، $(i = 1, 2, \dots, n)$ توسط عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{R}_i = (R_{il}, R_{i1}, R_{i2}, R_{ir})$ تعریف می‌شود، و یک مدل پرتفوی امکانی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad S(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i), \\ &\text{maximize} \quad M(x) = E\left(\sum_{i=1}^n \tilde{R}_i x_i\right) - \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^0|, \\ &\text{minimize} \quad V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) x_i x_j, \\ &\text{subject to} \quad E\left(\sum_{i=1}^n \tilde{T}_i x_i\right) \geq \lambda, \\ &\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad l_i \leq x_i \leq u_i, \quad l_i, u_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n \tilde{R}_i x_i\right) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_{i1} + R_{i2}}{3} + \frac{R_{il} + R_{ir}}{6} \right) x_i, \\ \text{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) &= \frac{(R_{i1} + R_{ir} - R_{il} - R_{i2})(R_{j1} + R_{jr} - R_{jl} - R_{j2})}{8} + \frac{(R_{ir} - R_{il})(R_{jr} - R_{jl})}{4} \\ &\quad - \frac{(R_{i1} + R_{ir} - R_{il} - R_{i2})(R_{jr} - R_{jl}) + (R_{j1} + R_{jr} - R_{jl} - R_{j2})(R_{ir} - R_{il})}{6}. \end{aligned}$$

۴.۳ تجزیه و تحلیل ریاضی: مسأله چندهدفه برنامه‌ریزی

غیر خطی (MONLP)

در اینجا در مورد یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه^۹ و روشی برای حل این نوع مسأله بحث می‌کنیم.

۱.۴.۳ مسأله چندهدفه برنامه‌ریزی غیر خطی (MONLP)

یک مسأله کلی برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه ممکن است به صورت مسأله کمینه‌سازی برداری زیر مطرح شود:

$$\text{minimize} \quad Z(x) = [Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_k(x)] \quad (8.3)$$

⁹ Multi-objective Non-linear Programming

تحت محدودیت‌های زیر

subject to $x \in X = \{x: g_j(x) \leq b_j, (j = 1, 2, \dots, m), l_i \leq x_i \leq u_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$.

۲.۴.۳ روش برنامه‌ریزی فازی برای حل مسأله برنامه‌ریزی غیر خطی چندهدفه

زیمرمن^{۱۰} [۱۴] نشان داد که یک روش برنامه‌ریزی فازی می‌تواند به سادگی برای حل مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه استفاده شود. برای حل مسأله (۸.۳)، مراحل زیر استفاده می‌شوند:

مرحله ۱ (۸.۳) را به عنوان تنها یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی با استفاده از یک هدف در یک زمان و نادیده گرفتن بقیه توابع هدف، حل کنید. این روند را برای تمام توابع هدف انجام دهید، جواب‌های به دست آمده به عنوان جواب‌های ایده‌آل شناخته شده‌اند.

مرحله ۲ از نتایج مرحله ۱، مقادیر متناظر برای هر هدف در هر جواب را تعیین کنید و جدول پرداخت (توازن) را به صورت زیر تشکیل دهید:

	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$...	$Z_k(x)$
x^1	$Z_1^*(x^1)$	$Z_2(x^1)$...	$Z_k(x^1)$
x^2	$Z_1(x^2)$	$Z_2^*(x^2)$...	$Z_k(x^2)$
...
x^k	$Z_1(x^k)$	$Z_2(x^k)$...	$Z_k^*(x^k)$

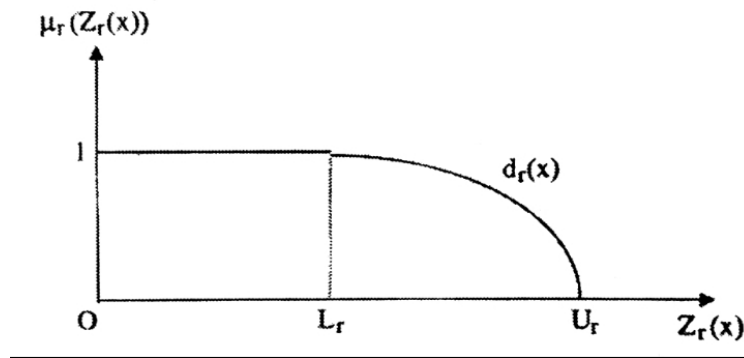
که در آن x^1, x^2, \dots, x^k جواب‌های ایده‌آل k تابع هدف هستند و تعریف کنید:

$$U_r = \max\{Z_r(x^1), Z_r(x^2), \dots, Z_r(x^k)\},$$

$$L_r = \min\{Z_r(x^1), Z_r(x^2), \dots, Z_r(x^k)\}.$$

مرحله ۳ با استفاده از سطوح موردانتظار توابع هدف از (۸.۳) مسأله زیر را در نظر بگیرید: پیدا کنید x را به طوریکه:

$$Z_r(x) \leq L_r, \quad (r = 1, 2, \dots, k) \quad x \in X. \quad (9.3)$$



شکل ۲.۳: تابع هدف

در اینجا توابع هدف در (۸.۳) به عنوان محدودیت های فازی محسوب می شوند که توسط تابع عضویت زیر محاسبه می شود:

$$\mu_r(Z_r(x)) = \begin{cases} 0, & Z_r(x) \geq U_r(x), \\ d_r(x), & L_r(x) \leq Z_r(x) \leq U_r(x), \\ 1, & Z_r(x) \leq L_r(x). \end{cases} \quad (10.3)$$

در اینجا $d_r(x)$ یک تابع اکیداً نزولی یکنواخت با در نظر گرفتن $Z_r(x)$ است. شکل (۲.۳) گراف $\mu_r(Z_r(x))$ را نشان می دهد. پس از استخراج کردن توابع عضویت $Z_r(x)$ برای هر $r = 1, 2, \dots, k$ با توجه به (۱۰.۳) یک تابع تجمعی عمومی را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\mu_{\bar{D}}(x) = G(\mu_1(Z_1(x)), \mu_2(Z_2(x)), \dots, \mu_k(Z_k(x))).$$

بنابراین یک مسأله تصمیم گیری چندهدفه فازی می تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$\text{maximize } \mu_{\bar{D}}(x), \quad (11.3)$$

subject to $x \in X$.

و در فرآیند تصمیم گیری فازی [۳۵] مسأله (۱۱.۳) به مسأله ی زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \mu_{\bar{D}}(x) = \sum_{r=1}^k w_r \mu_r(Z_r(x)), \\ &\text{subject to } 0 \leq \mu(Z_r(x)) \leq 1, \quad r = 1, 2, \dots, k, \\ &x \in X \quad \text{و} \quad w_r \geq 0, \quad \sum_{r=1}^k w_r = 1. \end{aligned} \quad (12.3)$$

مرحله ۴ برای یافتن جواب بهینه‌ی پارتو مسأله (۱۲.۳) را حل کنید. برخی از تعاریف پایه برای جواب‌های بهینه پارتو^{۱۱} در زیر معرفی می‌شوند.

تعریف ۱ (جواب بهینه کامل) $x^* \in X$ یک جواب بهینه برای مسأله (۸.۳) است هرگاه برای هر $x \in X$

$$Z_r(x^*) \leq Z_r(x), \quad r = 1, 2, \dots, k,$$

در اغلب مواقع بین توابع هدف مسأله (۸.۳) تناقضی وجود دارد لذا جواب بهینه کامل همیشه وجود ندارد. از این رو مفهوم جواب بهینه پارتو به وجود می‌آید و به شرح زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲ (جواب بهینه پارتو) x^* یک جواب بهینه پارتو برای (۸.۳) است اگر و تنها اگر $x \in X$ دیگری وجود نداشته باشد، به طوریکه

$$Z_r(x) \leq Z_r(x^*), \quad r = 1, 2, \dots, k,$$

و برای حداقل یک j ،

$$Z_j(x) \neq Z_j(x^*),$$

که $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ باشد.

۳.۴.۳ روش برنامه‌ریزی فازی برای حل مدل انتخابی پرتفوی سه هدفه

مدل سه هدفه می‌تواند به عنوان یک مسأله کمینه‌سازی برداری به صورت زیر فرمول بندی شود:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad [-S(x)] = \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i), \\ & \text{minimize} \quad [-M(x)] = -E \left(\sum_{i=1}^n \tilde{R}_i x_i \right) + \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^o|, \\ & \text{minimize} \quad V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) x_i x_j, \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{i1} + T_{i2}}{3} + \frac{T_{i4} + T_{i5}}{6} \right) x_i \geq \lambda, \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad l_i \leq x_i \leq u_i, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (13.3)$$

¹¹Pareto

که در آن

$$E\left(\sum_{i=1}^n \tilde{R}_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_{i1} + R_{i2}}{3} + \frac{R_{il} + R_{ir}}{6} \right) x_i,$$

$$Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) = \frac{(R_{i1} + R_{ir} - R_{il} - R_{i2})(R_{j1} + R_{jr} - R_{jl} - R_{j2})}{8} + \frac{(R_{ir} - R_{il})(R_{jr} - R_{jl})}{4} - \frac{(R_{i1} + R_{ir} - R_{il} - R_{i2})(R_{jr} - R_{jl}) + (R_{j1} + R_{jr} - R_{jl} - R_{j2})(R_{ir} - R_{il})}{6}.$$

برای حل مسأله بهینه‌سازی (۱۳.۳)، مرحله‌ی ۱ از (۲.۴.۳) استفاده می‌شود. پس از آن جدول پرداخت (توازن) به شرح زیر ساخته می‌شود:

	$S(x)$	$M(x)$	$V(x)$
x^1	$S(x^1)$	$M(x^1)$	$V(x^1)$
x^2	$S(x^2)$	$M(x^2)$	$V(x^2)$
x^3	$S(x^3)$	$M(x^3)$	$V(x^3)$

اکنون مرزهای بالایی U_M, U_S, U_V و مرزهای پایینی L_M, L_S, L_V را پیدا می‌کنیم که:

$$U_S = \max\{S(x^1), S(x^2), S(x^3)\}, \quad L_S = \min\{S(x^1), S(x^2), S(x^3)\},$$

$$U_M = \max\{M(x^1), M(x^2), M(x^3)\}, \quad L_M = \min\{M(x^1), M(x^2), M(x^3)\},$$

$$U_V = \max\{V(x^1), V(x^2), V(x^3)\}, \quad L_V = \min\{V(x^1), V(x^2), V(x^3)\}.$$

برای سادگی، توابع عضویت $\mu_{-S}(-S(x))$ و $\mu_{-M}(-M(x))$ برای توابع هدف $V(x)$ و $M(x), S(x)$ به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{-S}(-S(x)) = \begin{cases} 0, & -S(x) \geq -L_S, \\ \left(\frac{S(x) - L_S}{U_S - L_S} \right), & -U_S < -S(x) < -L_S, \\ 1, & -S(x) \leq -U_S. \end{cases}$$

$$\mu_{-M}(-M(x)) = \begin{cases} 0, & -M(x) \geq -L_M, \\ \left(\frac{M(x) - L_M}{U_M - L_M} \right), & -U_M < -M(x) < -L_M, \\ 1, & -M(x) \leq -U_M. \end{cases}$$

$$\mu_V(V(x)) = \begin{cases} 0, & V(x) \geq U_V, \\ \left(\frac{U_V - V(x)}{U_V - L_V} \right), & L_V < V(x) < U_V, \\ 1, & V(x) \leq L_V. \end{cases}$$

با توجه به مرحله ۳ توابع عضویت قطعی فوق مسأله برنامه‌ریزی غیر خطی (۱۳.۳) به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad F = w_1 \mu_{-S}(-S(x)) + w_2 \mu_{-M}(-M(x)) + w_3 \mu_V(V(x)), \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{i1} + T_{i2}}{3} + \frac{T_{il} + T_{ir}}{6} \right) x_i \geq \lambda, \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad l_i \leq x_i \leq u_i, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ & 0 \leq \mu_{-S}(-S(x)), \quad \mu_{-M}(-M(x)), \quad \mu_V(V(x)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^3 w_i = 1. \end{aligned} \quad (14.3)$$

مسأله (۱۴.۳) نیز می‌تواند به صورت به زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad F = w_1 \left(\frac{S(x) - L_S}{U_S - L_S} \right) + w_2 \left(\frac{M(x) - L_M}{U_M - L_M} \right) + w_3 \left(\frac{U_V - V(x)}{U_V - L_V} \right), \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{i1} + T_{i2}}{3} + \frac{T_{il} + T_{ir}}{6} \right) x_i \geq \lambda, \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad l_i \leq x_i \leq u_i, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \\ & 0 \leq \left(\frac{S(x) - L_S}{U_S - L_S} \right), \quad \left(\frac{M(x) - L_M}{U_M - L_M} \right), \quad \left(\frac{U_V - V(x)}{U_V - L_V} \right) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^3 w_i = 1. \end{aligned} \quad (15.3)$$

این مسأله معادل با مسأله‌ی زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad F_1 = -K_1 \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) + K_2 \left[E \left(\sum_{i=1}^n \tilde{R}_i x_i \right) - \sum_{i=1}^n c_i |x_i - x_i^0| \right] \\ & \quad - K_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) x_i x_j, \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{i1} + T_{i2}}{3} + \frac{T_{il} + T_{ir}}{6} \right) x_i \geq \lambda, \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad l_i \leq x_i \leq u_i, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \\ & K_1 = \frac{w_1}{U_S - L_S}, \quad K_2 = \frac{w_2}{U_M - L_M}, \quad K_3 = \frac{w_3}{U_V - L_V}, \\ & F(x) = F_1(x) - \frac{w_1 L_S}{U_S - L_S} - \frac{w_2 L_M}{U_M - L_M} + \frac{w_3 U_V}{U_V - L_V}, \\ & \sum_{i=1}^3 w_i = 1. \end{aligned}$$

(۱۶.۳)

که در آن

$$E\left(\sum_{i=1}^n \tilde{R}_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_{i1} + R_{i2}}{3} + \frac{R_{il} + R_{ir}}{6} \right) x_i,$$

$$Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) = \frac{(R_{i1} + R_{ir} - R_{il} - R_{i2})(R_{j1} + R_{jr} - R_{jl} - R_{j2})}{8} + \frac{(R_{ir} - R_{il})(R_{jr} - R_{jl})}{4}$$

$$\frac{(R_{i1} + R_{ir} - R_{il} - R_{i2})(R_{jr} - R_{jl}) + (R_{j1} + R_{jr} - R_{jl} - R_{j2})(R_{ir} - R_{il})}{6}$$

۵.۳ مثال عددی

در این بخش، یک مثال عددی برای نشان دادن مدل پیشنهادی چندهدفه امکانی ارائه می‌دهیم. شش ورقه بهادار با توجه به توزیع احتمال زیر را بررسی کنید.

$$0 \leq x_i \leq 0.5$$

i	$(R_{il}, R_{i1}, R_{i2}, R_{ir})$	c_i	x_i^0	$(T_{il}, \lambda T_{i1}, \lambda T_{i2}, T_{ir}), \lambda = 0.3$
۱	(۰/۰۴۶, ۰/۰۶۹, ۰/۰۷۴, ۰/۰۸۱)	۰/۰۰۳	۰.۱۵	(۰/۰۰۲, ۰/۰۱۲, ۰/۰۲۴, ۰/۰۴۲)
۲	(۰/۰۴۸, ۰/۰۷۰, ۰/۰۷۶, ۰/۰۸۴)	۰/۰۰۱	۰.۲۰	(۰/۰۰۳, ۰/۰۱۵, ۰/۰۲۷, ۰/۰۴۵)
۳	(۰/۰۴۸, ۰/۰۷۲, ۰/۰۷۸, ۰/۰۸۸)	۰/۰۰۵	۰.۱۵	(۰/۰۰۱, ۰/۰۱۲, ۰/۰۱۵, ۰/۰۲۸)
۴	(۰/۰۵۰, ۰/۰۷۶, ۰/۰۸۲, ۰/۰۹۰)	۰/۰۰۴	۰.۱۵	(۰/۰۰۲, ۰/۰۱۲, ۰/۰۴۲, ۰/۰۷۲)
۵	(۰/۰۶۰, ۰/۰۷۸, ۰/۰۸۶, ۰/۰۹۵)	۰/۰۰۳	۰.۲۰	(۰/۰۰۱, ۰/۰۰۹, ۰/۰۲۴, ۰/۰۳۹)
۶	(۰/۰۶۲, ۰/۰۸۸, ۰/۰۹۸, ۰/۱۰۰)	۰/۰۰۱	۰.۱۵	(۰/۰۰۱۵, ۰/۰۰۶, ۰/۰۳۰, ۰/۰۴۵)

در جدول (۱.۳) نتایج به دست آمده برای مقادیر مختلف اهداف ارائه شده است. در نوع III بازده مورد انتظار بالاتر از نوع I است، اما ریسک نیز افزایش می‌یابد.

فصل ۴

روش انتخاب پرتفوی فازی بر اساس میانگین و واریانس امکانی

۱.۴ مقدمه

روش میانگین-واریانس برای مسأله انتخاب پرتفوی که ابتدا توسط مارکوویتز پیشنهاد شد [۱۴، ۱۵، ۱۶]، نقش مهمی در توسعه نظریه انتخاب پرتفوی مدرن داشته است. این احتمال را با روش‌های بهینه‌سازی ترکیب می‌کند تا رفتار سرمایه‌گذار را تحت تأثیر عوامل نامطمئن بررسی کند. اصل مدل میانگین-واریانس در این است که از بازده مورد انتظار پرتفوی، به عنوان بازده سرمایه‌گذاری و از واریانس بازده مورد انتظار پرتفوی، به عنوان ریسک سرمایه‌گذاری استفاده کند. اکثر مدل‌های پرتفوی موجود بر اساس نظریه احتمال است. برخی از تحقیقات در مورد انتخاب میانگین پرتفوی عبارتند از: شارپ^۱ [۴۴]، مرتون^۲ [۳۶]، پرلد^۳ [۳]، وروس^۴ [۲۵] و بست^۵ [۳۰].

بسیاری از عوامل غیر احتمالی وجود دارند که بر بازارهای مالی تأثیر می‌گذارند، به طوری که بازده دارایی ریسکی دارای عدم قطعیت فازی است. اخیراً، تعدادی از محققان مسأله انتخاب

¹Sharpe

²Merton

³Perold

⁴Voros

⁵Best

پرتفوی فازی را مورد بررسی قرار دادند. واتادا [۲۶]، راماس وامی^۶ [۳۸] و لئون و همکاران^۷ [۴۱] انتخاب پرتفوی با استفاده از نظریه تصمیم فازی را بررسی کردند. تاناکا و گو^۸ [۱۷، ۱۸] دو نوع مدل انتخاب پرتفوی را بر اساس احتمالات فازی و توزیع احتمالی ارائه دادند. اینوگوچی و تانینو^۹ [۱۹] برنامه‌ریزی امکانی را برای مسأله انتخاب پرتفوی بر اساس معیار کمینه - بیشینه معرفی کردند. وانگ و چنگ^{۱۰} [۳۹]، لی و همکاران^{۱۱} [۲۷] و گو و همکاران^{۱۲} [۴۲] مدل‌های برنامه‌ریزی بازه‌ای مقدار از انتخاب پرتفوی را معرفی کردند. ژانگ و نی^{۱۳} [۴۵] و ژانگ و همکاران^{۱۴} [۴۶] با فرض عدم مجاز بودن فروش استقراسی، پرتفوی بهینه دارایی ریسکی را بر اساس میانگین - واریانس بیان می‌کنند.

ابتدا به مسأله انتخاب پرتفوی، زمانی که بازده دارایی‌ها مطابق توزیع امکانی $L - R$ و محدودیت‌های موجود در دارایی‌ها است، می‌پردازیم و سپس حالت‌های خاصی از آن را نیز ارائه می‌دهیم. مدل میانگین - واریانس امکانی انتخاب پرتفوی جدید بر اساس بازده امکانی و ریسک امکانی تعریف شده که می‌تواند یک محیط تصمیم‌گیری نامطمئن را با ابهام کمتری روبرو کند. از آنجا که این رویکردهای امکانی، مجهول کمتری دارند، کاربردی‌تر هستند. یک مثال عددی از مسأله انتخاب پرتفوی فازی برای نشان دادن ابزار و رویکردهای مؤثر پیشنهادی ارائه شده است.

۲.۴ میانگین و واریانس امکانی

فرض کنید \tilde{A} یک عدد فازی با α - برش $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ ، $\alpha \in [0, 1]$ باشد. کارسون و فولر^{۱۵} [۵] مقدار میانگین امکانی \tilde{A} را به صورت زیر معرفی کردند:

$$M(\tilde{A}) = \int_0^1 \alpha [a_1(\alpha) + a_2(\alpha)] d\alpha, \quad (1.4)$$

فرض کنید \tilde{A} با $A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ و \tilde{B} با $B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ ، $\alpha \in [0, 1]$ اعداد فازی هستند.

کارسون و فولر همچنین واریانس امکانی و کوواریانس اعداد فازی را به صورت زیر نشان دادند:

$$Var(\tilde{A}) = \frac{1}{4} \int_0^1 \alpha [a_2(\alpha) - a_1(\alpha)]^2 d\alpha, \quad (2.4)$$

و

$$Cov(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{4} \int_0^1 \alpha [(a_2(\alpha) - a_1(\alpha))(b_2(\alpha) - b_1(\alpha))] d\alpha. \quad (3.4)$$

⁶Ramaswamy

⁷Leon et al

⁸Tanaka and Guo

⁹Inuiguchi and Tanino

¹⁰Wang and Zhu

¹¹Lai et al

¹²Giove et al

¹³Zhang and Nie

¹⁴Zhang et al

¹⁵Carlsson and Fuller

۳.۴ مدل میانگین-واریانس برای انتخاب پرتفوی

اجازه دهید یک توضیح مختصر از مدل میانگین-واریانس مارکوویتز ارائه دهیم. فرض کنید که n دارایی ریسکی وجود دارد که نرخ بازده r_j به عنوان دارایی j ام یک متغیر تصادفی با بازده مورد انتظار $\bar{r}_j = E(r_j)$ باشد و نسبت کل سرمایه‌گذاری وجوه اختصاص یافته به این دارایی به صورت $j = 1, \dots, n$ ، x_j مشخص شود. به منظور توصیف راحت‌تر، مجموعه‌ی بازده پرتفوی $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ، $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ ، و $F = (1, 1, \dots, 1)^T$ را در نظر بگیرید. آنگاه بازده مورد انتظار و واریانس r به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$E(r) = \bar{r}^T X, \quad D(r) = X^T V X,$$

که در آن $E(r) = \bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)^T$ و $V = (\sigma_{ij})_{n \times n}$ به ترتیب بردار بازده مورد انتظار و ماتریس کوواریانس بازده هستند. مدل میانگین-واریانس انتخاب پرتفوی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && X^T V X, \\ & \text{subject to} && \begin{cases} \bar{r}^T X \geq \mu, \\ F^T X = 1, \\ X \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

برای استفاده از مدل میانگین-واریانس (۴.۴) برآورد بردار بازده مورد انتظار و ماتریس کوواریانس لازم است. این بدان معناست که همه بازده‌های مورد انتظار، واریانس، کوواریانس دارایی‌های ریسکی باید به طور دقیق توسط یک سرمایه‌گذار برآورد شود. در مدل میانگین-واریانس (۴.۴) عدم اطمینان معادل با تصادف است که در واقع، هر دو رویداد تصادفی قابل مشاهده و قابل آزمون، با قضاوت‌های ذهنی سرمایه‌گذار را با ارزیابی احتمالی ترکیب می‌کنند. نظریه‌پرداز با استفاده از نظریه احتمال برای مقابله با پیشامدهای تصادفی قابل مشاهده، بر قضاوت‌های ذهنی متمرکز می‌شود تا امکان‌ها. بازار مالی، به این که تحت تأثیر بسیاری از عوامل غیر قابل پیش‌بینی است معروف است و لحظه به لحظه تغییر می‌کند. در یک محیط اقتصادی نامعین فازی، وضعیت آینده بازده و ریسک دارایی‌ها نمی‌تواند به طور دقیق پیش‌بینی شود. بنابراین توزیع امکانی به عنوان یک جایگزین برای توزیع احتمالی شناخته می‌شود. در بسیاری از موارد، توزیع امکانی نرخ بازده دارایی‌های ریسکی را می‌توان راحت‌تر از توزیع احتمالی مربوطه به دست آورد. بنابراین، ممکن است بحث در مورد انتخاب پرتفوی امکانی ارزشمند باشد.

روش‌های برنامه‌ریزی امکانی در گذشته، مانند رهیافت کسری^{۱۶}، رهیافت بهینه‌سازی کیفی^{۱۷}،

¹⁶Fractile

¹⁷Modality

رهیافت بهینه‌سازی گسترشی^{۱۸} و رهیافت مسئولیت‌پذیری $min - max$ ^{۱۹} برای یک مسأله برنامه‌ریزی امکانی توسط اینوگوچی و تانیو [۱۹]، اینوگوچی و همکاران^{۲۰} [۲۰]، اینوگوچی و همکاران [۲۱]، به صورت زیر پیشنهاد شده‌است:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } r^T X, \\ & \text{subject to } \begin{cases} F^T X = 1, \\ X \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

که در آن $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ یک بردار فازی است که توسط یک توزیع امکانی چندمتغیره محدود شده است. مسأله (۵.۴) را می‌توان به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد. تاناکا و همکاران^{۲۱} [۴۳]، گو و همکاران [۴۰]، تاناکا و گو [۴۲] مسأله انتخاب پرتفوی که نرخ بازده توزیع امکانی آن را بر اساس تابع $f(u) = \exp\{-\frac{(u-a)^2}{D}\}$ است را در نظر گرفتند. کارسون و همکاران^{۲۲} [۵]، کارسون و ژانگ^{۲۳} [۶] رویکردهای امکانی برای انتخاب پرتفوی را مطابق این فرض در نظر گرفتند که بازده دارایی عدد فازی دوزنقه‌ای باشد. ژانگ و وانگ^{۲۴} [۴۶]، مسأله انتخاب پرتفوی را مورد بحث قرار دادند که بازده دارایی‌های آن عدد فازی مثلثی متقارن است. در بخش حاضر، یک مدل میانگین-واریانس امکانی برای انتخاب پرتفوی پیشنهاد می‌شود که در آن نرخ بازده مطابق توزیع امکانی نوع $L - R$ است که می‌تواند به عنوان توسعه روش‌های قبلی مانند مدل مارکوویتز (۴.۴)، مدل تاناکا [۴۳] در نظر گرفته شود.

فرض کنید $r_j = (a_j, b_j, \alpha_j, \beta_j)_{LR}$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ ، نوع عدد فازی $L - R$ هستند. r_j را می‌توان با تابع عضویت زیر بیان کرد:

$$r_j(u) = \begin{cases} L(\frac{a_j - u}{\alpha_j}), & a_j - \alpha_j \leq u \leq a_j, \\ 1, & u \in [a_j, b_j], \\ R(\frac{u - b_j}{\beta_j}), & b_j \leq u \leq b_j + \beta_j, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $L, R: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ با $L(0) = R(0) = 1$ و $L(1) = R(1) = 0$ توابع پیوسته غیرصعودی هستند.

اگر

$$L(\frac{a_j - u}{\alpha_j}) = R(\frac{u - b_j}{\beta_j}) = \exp\{-\frac{(u - a_j)^2}{W_j}\}, \quad a_j = b_j, \quad \alpha_j = \beta_j,$$

آنگاه $f_j(u)$ همان تابع عضویت در تاناکا و همکاران [۴۳]، تاناکا و گو [۴۲] است.

اگر

$$L(\frac{a_j - u}{\alpha_j}) = \frac{a_j - u}{\alpha_j} \quad \text{و} \quad R(\frac{u - b_j}{\beta_j}) = \frac{u - b_j}{\beta_j},$$

¹⁸Spread

¹⁹Regret

²⁰Inuiguchi et al.

²¹Tanaka et al.

²²Carlsson et al.

²³Carlsson and Zhang

²⁴Zhang and Wang

آنگاه $f_j(u)$ همان تابع عضویت در کارسون و همکاران [۵،۶] است. اگر

$$L\left(\frac{a_j - u}{\alpha_j}\right) = \frac{a_j - u}{\alpha_j} \quad \text{و} \quad R\left(\frac{u - b_j}{\beta_j}\right) = \frac{u - b_j}{\beta_j}.$$

آنگاه $f_j(u)$ همان تابع عضویت ژانگ [۴۶]، کارسون و همکاران [۵] است. بنابراین تابع عضویت در این فصل یک مدل گسترش یافته تاناکا و همکاران [۴۳]، تاناکا و گو [۴۲]، ژانگ و همکاران، ژانگ [۴۷]، کارسون و همکاران [۵] است. اگر L و R توابع اکیداً نزولی باشند آنگاه مجموعه‌های α -برش از r_i به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[r_i]_\alpha = [a_i - \alpha_i L^{-1}(\alpha), b_i + \beta_i R^{-1}(\alpha)], \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n,$$

که در آن α به عنوان درجه امکان دارایی i ام در مسأله انتخاب پرتفوی تفسیر می‌شود. با توجه به (۱.۴)، (۲.۴) و (۳.۴) به راحتی می‌توانیم مقادیر زیر را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} M(r_i) &= \int_0^1 \alpha [a_i - \alpha_i L^{-1}(\alpha) + b_i + \beta_i R^{-1}(\alpha)] d\alpha \\ &= \frac{a_i + b_i}{2} - \alpha_i E_L + \beta_i E_R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(r_i) &= \frac{1}{3} \int_0^1 \alpha [\beta_i R^{-1}(\alpha) + \alpha_i L^{-1}(\alpha) + b_i - a_i]^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{3} (\beta_i^2 F_{RR} + 2\alpha_i \beta_i F_{RL} + \alpha_i^2 F_{LL}) \\ &\quad + (b_i - a_i)(\beta_i E_R + \alpha_i E_L) + \frac{1}{6} (b_i - a_i)^2, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} Cov(r_i, r_j) &= \frac{1}{3} \int_0^1 \alpha [\beta_i R^{-1}(\alpha) + \alpha_i L^{-1}(\alpha) + b_i - a_i] [\beta_j R^{-1}(\alpha) + \alpha_j L^{-1}(\alpha) + b_j - a_j] d\alpha \\ &= \frac{1}{3} [\beta_i \beta_j F_{RR} + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) F_{RL} + \alpha_i \alpha_j F_{LL}] \\ &\quad + (b_j - a_j)(\beta_i E_R + \alpha_i E_L) + (b_i - a_i) (\beta_j E_R + \alpha_j E_L) + \frac{1}{6} (b_i - a_i)(b_j - a_j), \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} E_R &= \int_0^1 \alpha R^{-1}(\alpha) d\alpha, \quad E_L = \int_0^1 \alpha L^{-1}(\alpha) d\alpha, \\ F_{RR} &= \int_0^1 \alpha (R^{-1}(\alpha))^2 d\alpha, \quad F_{LL} = \int_0^1 \alpha (L^{-1}(\alpha))^2 d\alpha, \\ F_{RL} &= \int_0^1 \alpha R^{-1}(\alpha) L^{-1}(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

آنگاه مقدار میانگین امکانی از بازده مرتبط با پرتفوی X به صورت زیر است:

$$M(r) = \sum_{i=1}^n M(r_i) x_i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} (a_i + b_i) + \beta_i E_R - \alpha_i E_L \right] x_i.$$

واریانس امکانی از بازده دارایی‌ها با پرتفوی X به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} Var(r) = & \frac{1}{\varphi} F_{LL} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right]^2 + \frac{1}{\varphi} F_{RR} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right]^2 \\ & + F_{RL} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right] \left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right] \\ & + \left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) x_i \right] \left[\sum_{i=1}^n (\beta_i E_R + \alpha_i E_L) x_i \right] \\ & + \frac{1}{\varphi} \left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) x_i \right]^2. \end{aligned}$$

مشابه روش میانگین-واریانس مارکوویتز برای مسأله انتخاب پرتفوی، مقدار میانگین امکانی، بازده سرمایه‌گذاری و واریانس امکانی، ریسک سرمایه‌گذاری نامیده می‌شود. میانگین و واریانس امکانی مدل (۴.۴) می‌تواند با میانگین و واریانس امکانی توسط ژانگ و همکاران، کارسون و همکاران [۵] جایگزین شود. بنابراین مدل میانگین-واریانس امکانی مسأله انتخاب پرتفوی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & Var(r) = \frac{1}{\varphi} F_{LL} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right]^2 \\ & + \frac{1}{\varphi} F_{RR} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right]^2 + F_{RL} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right] \left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right] \\ & + \left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) x_i \right] \left[\sum_{i=1}^n (\beta_i E_R + \alpha_i E_L) x_i \right] \\ & + \frac{1}{\varphi} \left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) x_i \right]^2, \\ \text{subject to } & \begin{cases} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\varphi} (a_i + b_i) + \beta_i E_R - \alpha_i E_L \right] x_i \geq \mu, \\ \mu_i \geq x_i \geq l_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.4)$$

به‌خصوص، اگر $r_i, i = 1, \dots, n$ اعداد فازی نوع $L - R$ متقارن با مرکز $a_i = b_i$ و $L^{-1} = R^{-1}$ باشند آنگاه $E_R = E_L$ ، $F_{RR} = F_{LL} = F_{RL}$ است. در این صورت مدل میانگین-واریانس امکانی (۶.۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{minimize } & Var(r) = \frac{1}{\varphi} F_{RR} \left[\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) x_i \right]^2, \\ \text{subject to } & \begin{cases} \sum_{i=1}^n [a_i + E_R(\beta_i - \alpha_i)] x_i \geq \mu, \\ \mu_i \geq x_i \geq l_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.4)$$

علاوه بر این، مدل میانگین-واریانس امکانی (۷.۴) معادل برنامه‌ریزی خطی زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{F_{RR}} \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) x_i, \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n [a_i + E_R(\beta_i - \alpha_i)] x_i \geq \mu, \\ \mu_i \geq x_i \geq l_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

لازم به ذکر است که مدل‌های (۴.۴) و (۷.۴) بازده دارایی‌ها را به روش‌های مختلف توصیف می‌کنند. مدل میانگین-واریانس مارکوویتز (۴.۴) بر اساس توزیع‌های احتمالی است، در حالی که عدم اطمینان به صورت تصادفی مشخص می‌شود، که نمی‌تواند به طور کامل عدم اطمینان را تشریح کند زیرا برخی عوامل نامشخص دیگر وجود دارد که با موارد تصادفی موجود در بازارهای مالی متفاوت است. سرمایه‌گذاران معمولاً اطلاعاتی که با توصیف‌های مبهم مانند ریسک بالا، سود پایین و نرخ بهره بالا هستند را ارائه می‌دهند. در این موارد، به‌دست آوردن توزیع احتمالی دقیق که نیاز داریم، غیرممکن است. علاوه بر این، تعداد مجهولات مدل (۷.۴) از تعداد مجهولات مدل (۴.۴) کمتر است.

واضح است که تابع هدف (۸.۴) ساده‌تر از مدل برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم (۷.۴) است. به ویژه مدل میانگین-واریانس امکانی (۸.۴) یک برنامه‌ریزی خطی ساده است که می‌توانیم به راحتی پرتفوی بهینه امکانی را با استفاده از برخی الگوریتم‌های مرتبط برای حل مسأله برنامه‌ریزی خطی به عنوان مثال، نرم‌افزار Matlab حل کرد.

۴.۴ حالت‌های خاصی از اعداد فازی $L - R$

۱.۴.۴ عدد فازی مثلثی

۱.۱.۴.۴ مدل پرتفوی بهینه امکانی

در یک محیط اقتصادی نامعین فازی وضعیت بازار مالی لحظه به لحظه تغییر می‌کند. همچنین از عدد فازی به عنوان یک ابزار قدرتمند برای توصیف یک محیط نامطمئن با ابهام استفاده می‌شود. بر اساس این وقایع ما مسأله انتخاب پرتفوی را در نظر می‌گیریم که بازده دارایی‌ها اعداد فازی هستند. برای توصیف راحت‌تر، از علائم زیر استفاده می‌کنیم:

r_i نرخ بازده دارایی ریسکی i ام را نشان می‌دهد،

x_i نسبت کل مبلغ پولی که به سهم i ام اختصاص دارد،

u_i, l_i ($u_i \geq l_i \geq 0$) به ترتیب، کران‌های پایین و بالای x_i هستند.

فرض کنید $r_i = (a_i, \gamma_i)$ ، $i = 1, \dots, n$ ، اعداد فازی مثلثی متقارن با مرکز a_i و عرض $\gamma_i > 0$ هستند. یک مجموعه α - برش از r_i می‌تواند با

$$[r_i]_\alpha = [a_i - (1 - \alpha)\gamma_i, a_i + (1 - \alpha)\gamma_i] \quad \forall \alpha \in [0, 1], i = 1, \dots, n.$$

نشان داده شود. از (۱.۴)، (۲.۴) و (۳.۴) به سادگی داریم:

$$\bar{M}(r_i) = a_i, i = 1, \dots, n,$$

$$Var(r_i) = 2 \int_0^1 \alpha (\gamma_i - \alpha \gamma_i)^2 d\alpha = \frac{\gamma_i^2}{6}, i = 1, \dots, n,$$

$$Cov(r_i, r_j) = 2 \int_0^1 \alpha (\gamma_i - \alpha \gamma_i)(\gamma_j - \alpha \gamma_j) d\alpha = \frac{\gamma_i \gamma_j}{6}, i, j = 1, \dots, n.$$

پس مقدار میانگین امکانی از بازده مرتبط با پرتفوی (x_1, x_2, \dots, x_n) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{M}(r) = \bar{M}\left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \bar{M}(r_i) x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

علاوه بر این، واریانس امکانی از بازده مرتبط با پرتفوی (x_1, x_2, \dots, x_n) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Var(r) = \frac{(\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i)^2}{6}.$$

مشابه روش میانگین-واریانس مارکوویتز برای مسأله انتخاب پرتفوی، مقدار میانگین امکانی بازده، معیار بازده و واریانس امکانی بازده، معیار ریسک نامیده می‌شود. بنابراین مدل میانگین-واریانس امکانی از مسأله انتخاب پرتفوی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad Var(r) = \frac{(\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i)^2}{6}, \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq \mu, \\ \mu_i \geq x_i \geq l_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.4)$$

علاوه بر این، مدل میانگین-واریانس امکانی (۹.۴) معادل برنامه‌ریزی خطی زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i, \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq \mu \\ \mu_i \geq x_i \geq l_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.4)$$

مدل میانگین-واریانس (۱۰.۴) یک برنامه ساده خطی است که با استفاده از الگوریتم‌های مرتبط به راحتی می‌توان پرتفوی بهینه را به دست آورد.

۲.۴.۴ عدد فازی ذوزنقه‌ای

۱.۲.۴.۴ میانگین و واریانس امکانی پایین و بالا

کارسون و فولر [۵] مقدار میانگین امکانی پایین و بالا اعداد فازی \tilde{A} را با α - برش به وسیله

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)], \alpha \in [0, 1]$$

را به صورت زیر معرفی کردند:

$$M_*(\tilde{A}) = \frac{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)] a_1(\alpha) d\alpha}{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)] d\alpha} = \int_0^1 \alpha a_1(\alpha) d\alpha,$$

و

$$M^*(\tilde{A}) = \frac{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)] a_2(\alpha) d\alpha}{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)] d\alpha} = \int_0^1 \alpha a_2(\alpha) d\alpha,$$

که در آن Pos نشان دهنده‌ی امکان است یعنی:

$$Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)] = \prod((-\infty, a_1(\alpha))) = \alpha,$$

$$Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)] = \prod([a_2(\alpha), \infty)) = \alpha.$$

مطابق با مفاهیم امکانی پایین و بالا، ژانگ و نی [۴۵] ^{۲۵} واریانس امکانی و کوواریانس امکانی پایین و بالا اعداد فازی را معرفی کردند. واریانس امکانی پایین و بالا عدد فازی \tilde{A} با

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

به ترتیب زیر معرفی می‌شوند:

$$Var_*(\tilde{A}) = \frac{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)] (M_*(\tilde{A}) - a_1(\alpha))^2 d\alpha}{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \leq a_1(\alpha)] d\alpha} = \int_0^1 \alpha (M_*(\tilde{A}) - a_1(\alpha))^2 d\alpha$$

و

$$Var^*(\tilde{A}) = \frac{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)] (M^*(\tilde{A}) - a_2(\alpha))^2 d\alpha}{\int_0^1 Pos[\tilde{A} \geq a_2(\alpha)] d\alpha} = \int_0^1 \alpha (M^*(\tilde{A}) - a_2(\alpha))^2 d\alpha$$

کوواریانس امکانی پایین و بالا بین عدد فازی \tilde{A} با

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

و عدد فازی \tilde{B} با

$$B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$$

برای $\alpha \in [0, 1]$ به ترتیب به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$cov_*(\tilde{A}, \tilde{B}) = 2 \int_0^1 \alpha (M_*(\tilde{A}) - a_1(\alpha))(M_*(\tilde{B}) - b_1(\alpha)) d\alpha,$$

$$cov^*(\tilde{A}, \tilde{B}) = 2 \int_0^1 \alpha (M^*(\tilde{A}) - a_2(\alpha))(M^*(\tilde{B}) - b_2(\alpha)) d\alpha.$$

۲.۲.۴.۴ مدل‌های میانگین-واریانس امکانی انتخاب پرتفوی

یک بازار با دارایی‌های ریسکی را در نظر بگیرید. موقعیت سرمایه‌گذار در این بازار با یک پرتفوی $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ توصیف می‌شود، که در آن مولفه‌ی i ام از x_i نشان‌دهنده‌ی نسبت سرمایه‌گذاری شده در دارایی i ام است. بردار بازده در پرتفوی X توسط $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ بیان می‌شود، که در آن r نشان‌دهنده‌ی نرخ بازده دارایی i ام است. در روش میانگین-واریانس برای انتخاب پرتفوی، r_i به عنوان یک متغیر تصادفی برای $i = 1, 2, \dots, n$ است، فرض کنید باشند. بازده r در پرتفوی X به وسیله‌ی

$$\bar{r} = r^T X \sim N(E[r], Var[r])$$

مشخص می‌شود، که در آن $E[r] = \bar{r}^T X$ و $Var[r] = X^T V X$ به ترتیب مقدار مورد انتظار بازده و مقدار واریانس پرتفوی X را نشان می‌دهند. مدل ریاضی انتخاب پرتفوی به وسیله‌ی مارکوویتز معرفی می‌شود [۱۴، ۱۵، ۱۶] که در آن $E[r]$ و $Var[r]$ معلوم هستند. فرض کنید $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ و $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)^T$ که در آن u_i و l_i کران‌های پایین و بالا x_i هستند. همچنین فرض کنید $F = (1, 1, \dots, 1)^T$. هدف سرمایه‌گذار انتخاب یک پرتفوی با حداکثر رساندن «بازده» و محدود کردن «ریسک» است. یک مدل میانگین-واریانس پرتفوی به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \bar{r}^T X, \\ & \text{subject to} && \begin{cases} \sqrt{X^T V X} \leq \sigma, \\ F^T X = 1, \\ U \geq X \geq L, \end{cases} \end{aligned} \quad (11.4)$$

که در آن σ نشان‌دهنده‌ی میزان تحمل ریسک است. برای استفاده از مدل (۱۱.۴) برآورد \bar{r} و V لازم است. در یک محیط اقتصادی نامعین فازی، وضعیت آینده بازده و ریسک دارایی‌ها نمی‌تواند به طور دقیق پیش بینی شود. بر اساس این واقعیت، مسأله انتخاب پرتفوی با فرض r_j ، $j = 1, \dots, n$ به عنوان بازده n عدد فازی برای توضیح یک محیط سرمایه‌گذاری نامشخص (با ابهام) در نظر گرفته شده است. از سوی دیگر، پیدا کردن صورت دقیق جواب بهینه برای مدل (۱۱.۴) معمولاً دشوار است. کارسون

و همکاران [۵] رویکرد امکانی انتخاب پرتفوی را با بالاترین احتمال سود که بازده دارایی‌های اعداد فازی دوزنقه‌ای است را معرفی کردند. یک عدد فازی دوزنقه‌ای \tilde{A} روی بازه $[a, b]$ ، عرض چپ γ و عرض راست β با تابع عضویت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\tilde{A}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{a-t}{\gamma}, & a - \gamma \leq t \leq a, \\ 1, & a \leq t \leq b, \\ 1 - \frac{t-b}{\beta}, & b \leq t \leq b + \beta, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در اینجا از $\tilde{A} = (a, b, \gamma, \beta)$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$A_\alpha = [a - (1 - \alpha)\gamma, b + (1 - \alpha)\beta] \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

فرض کنید $r_j = (a_j, b_j, \gamma_j, \beta_j)$ ، $j = 1, 2, \dots, n$ ، عدد فازی دوزنقه‌ای باشند. یک α -برش از r_j به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[r_j]_\alpha = [a_j - (1 - \alpha)\gamma_j, b_j + (1 - \alpha)\beta_j] \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

با استفاده از تعاریف میانگین امکانی پایین و بالا و واریانس اعداد فازی به راحتی می‌توان نشان داد:

$$M_*(r_j) = a_j - \frac{\gamma_j}{3}, \quad M^*(r_j) = b_j + \frac{\beta_j}{3}, \\ \text{Var}_*(r_j) = \frac{1}{18}\gamma_j^2, \quad \text{Var}^*(r_j) = \frac{1}{18}\beta_j^2,$$

و

$$\text{Cov}_*(r_i, r_j) = 2 \int_0^1 \alpha [(\alpha - \alpha)\gamma_i - \frac{\gamma_i}{3}] [(\alpha - \alpha)\gamma_j - \frac{\gamma_j}{3}] d\alpha = \frac{1}{18}\gamma_i\gamma_j,$$

$$\text{Cov}^*(r_i, r_j) = 2 \int_0^1 \alpha [(\alpha - \alpha)\beta_i - \frac{\beta_i}{3}] [(\alpha - \alpha)\beta_j - \frac{\beta_j}{3}] d\alpha = \frac{1}{18}\beta_i\beta_j.$$

به ترتیب میانگین امکانی پایین و بالا از بازده دارایی با پرتفوی (x_1, x_2, \dots, x_n) را به صورت زیر داریم:

$$M_*(r) = \sum_{i=1}^n M_*(x_i r_i) = \sum_{i=1}^n (a_i - \frac{\gamma_i}{3}) x_i$$

و

$$M^*(r) = \sum_{i=1}^n M^*(x_i r_i) = \sum_{i=1}^n (b_i + \frac{\beta_i}{3}) x_i$$

برای همه $i = 1, 2, \dots, n$ ، $x_i \geq 0$

به ترتیب واریانس امکانی پایین و بالا r به صورت زیر است:

$$Var_*(r) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{1}{18} \gamma_i^2 = \frac{1}{18} \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \right)^2$$

9

$$Var^*(r) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{1}{18} \beta_i^2 = \frac{1}{18} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right)^2$$

برای همه $i = 1, 2, \dots, n$ ، $x_i \geq 0$ مدل میانگین انحراف معیار امکانی پایین از انتخاب پرتفوی را می توان به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i=1}^n (a_i - \frac{\gamma_i}{\Psi}) x_i, \\ & \text{subject to} && \begin{cases} \frac{\sqrt{\Psi}}{\phi} \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \right) \leq \sigma, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ u_i \geq x_i \geq l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (12.4)$$

و مقدار میانگین انحراف معیار امکانی بالا از انتخاب پرتفوی را می توان به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i=1}^n (b_i - \frac{\beta_i}{\Psi}) x_i, \\ & \text{subject to} && \begin{cases} \frac{\sqrt{\Psi}}{\phi} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right) \leq \sigma, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ u_i \geq x_i \geq l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ 1 \geq u_i \geq l_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n l_i < 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.4)$$

از تعریف پرتفوی کارآمد، مفاهیم پرتفوی بهینه امکانی پایین و بالا به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۱۰.۴.۴. جواب بهینه (۱۲.۴) یک پرتفوی بهینه امکانی پایین^{۲۶} نامیده می شود.

تعریف ۲۰.۴.۴. جواب بهینه (۱۳.۴) یک پرتفوی بهینه امکانی بالا^{۲۷} نامیده می شود.

²⁶Lower Possibilistic Efficient Portfolio

²⁷Upper Possibilistic Efficient Portfolio

مدل (۱۱.۴) در فضای امکانی، تبدیل به برنامه‌ریزی خطی (۱۲.۴) و (۱۳.۴) می‌شود که خیلی بهتر از مدل (۱۱.۴) است. مدل‌های (۱۲.۴) و (۱۳.۴) دو مدل ساده برنامه‌ریزی خطی هستند که با استفاده از الگوریتم‌های مربوط به حل مسأله برنامه‌ریزی خطی به راحتی می‌توان پرتفوی بهینه امکانی را به دست آورد. به خصوص، اگر $r_i = (a_i, b_i, \gamma_i)$ ، $i = 1, \dots, n$ اعداد فازی دوزنقه‌ای متقارن باشند، که $\gamma_i = \beta_i$ ، آنگاه محدودیت‌های مدل میانگین انحراف معیار امکانی پایین (۱۲.۴) با محدودیت‌های مدل میانگین انحراف معیار امکانی بالا (۱۳.۴) برابر است. اگر $r_i = [a_i, b_i]$ ، $i = 1, \dots, n$ بازه‌ی اعداد فازی باشند، سپس $\gamma_i = \beta_i = 0$ ، $i = 1, \dots, n$ آنگاه مدل (۱۲.۴) میانگین انحراف معیار امکانی پایین به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i=1}^n a_i x_i, \\ & \text{subject to} && \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ u_i \geq x_i \geq l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (14.4)$$

و مدل (۱۳.۴) میانگین انحراف معیار امکانی بالا به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i=1}^n b_i x_i, \\ & \text{subject to} && \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ u_i \geq x_i \geq l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (15.4)$$

جواب بهینه برای مدل (۱۴.۴) تنها پرتفوی بهینه امکانی پایین با حداکثر بازده است. جواب بهینه برای مدل (۱۵.۴) تنها پرتفوی بهینه امکانی بالا با حداکثر بازده است. مدل (۱۲.۴) میانگین انحراف معیار امکانی پایین به طور متوسط بر اساس وزن امکانی از حداقل α -برش در بازده دارایی ساخته شده است، بنابراین (۱۲.۴) با سرمایه‌گذاری که پرتفوی‌هایش را بدبینانه انتخاب می‌کند سازگار است. به طور مشابه، مدل میانگین انحراف معیار امکانی بالا به طور متوسط بر اساس وزن امکانی از حداکثر α -برش در بازده دارایی ساخته شده است، بنابراین (۱۳.۴) با سرمایه‌گذاری که پرتفوی‌هایش را خوش‌بینانه انتخاب می‌کند سازگار است. تا به حال تمام مسائل به‌دست آمده به صورت برنامه‌ریزی خطی بوده‌اند. در این قسمت یک مدل شبکه عصبی کارا برای حل مسائل LP ارائه می‌شود.

نتایج پژوهش‌های انجام شده در مورد کاربرد شبکه عصبی مواردی چون برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی درجه دوم، برنامه‌ریزی هندسی و برنامه‌ریزی غیرخطی را در برمی‌گیرد. ایده‌ی اصلی در استفاده از شبکه‌های مصنوعی برای مسائل بهینه‌سازی استفاده از یک تابع انرژی (نامنفی) و یک سیستم دینامیکی است که این دو بیان‌کننده‌ی مدل‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی متناظر با مسائل بهینه‌سازی هستند. سیستم دینامیکی بیان شده معمولاً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه‌ی اول است. انتظار می‌رود که برای یک نقطه‌ی

آغازین نقطه‌ی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به دست آمده، جواب بهینه‌ی مسأله‌ی بهینه‌سازی اصلی باشد. بنابراین برای یک مدل متناظر با مسائل بهینه‌سازی، اصل اساسی استفاده از شبکه‌های عصبی در این گونه مسائل به صورت زیر بیان می‌شود:

۵.۴ مدل شبکه‌ی عصبی پیشنهادی

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را به صورت کلی در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x, \\ & \text{subject to} && \begin{cases} Ax = b, \\ Bx \leq d, \end{cases} \end{aligned} \quad (۱۶.۴)$$

که در آن $\text{rank}(A) = m$ ($0 < m < n$)، $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $c \in \mathbb{R}^n$ ، $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ و $d \in \mathbb{R}^p$ و $b \in \mathbb{R}^m$ ، $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ است.

می‌توان مدل شبکه عصبی زیر را برای به دست آوردن جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۱۶.۴) به صورت زیر به کار برد [۴۹]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(I - P)[c + B^T(y + Bx - d)^+] - Q(Ax - b), \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau}y + \frac{1}{\tau}(y + Bx - d)^+, \end{cases} \quad (۱۷.۴)$$

که در آن

$$P = A^T(AA^T)^{-1}A, \quad Q = A^T(AA^T)^{-1},$$

$$(y + Bx - d)^+ = ([y + Bx - d]_1^+, [y + Bx - d]_2^+, \dots, [y + Bx - d]_m^+),$$

$$[y + Bx - d]_k^+ = \max\{(y + Bx - d)_k, 0\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

لم ۱.۵.۴ [۴۹]. x^* جواب بهینه‌ی (۱۶.۴) است اگر و تنها اگر $y^* \geq 0$ موجود باشد به طوری که $(x^*, y^*)^T$ در شرایط زیر صدق کند:

$$(I - P)[c + B^T y^*] + Q(Ax^* - b) = 0, \quad (۱۸.۴)$$

$$(y^* + Bx^* - d)^+ - y^* = 0, \quad (۱۹.۴)$$

با استفاده از لم (۱.۵.۴)، به آسانی می‌بینیم که x^* جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۱۶.۴) است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $y^* \geq 0$ به طوری که $(x^*, y^*)^T$ نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی

ارائه شده در (۱۶.۴) باشد. بنابراین، زمانی که شبکه‌ی عصبی به نقطه‌ی تعادل همگرا است، مسیر حرکت $x(t)$ به جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۱۶.۴) همگرا می‌باشد. در این مثال‌ها از شبکه‌ی عصبی استفاده می‌کنیم تا نقطه‌ی تعادل را با هدف پیدا کردن بهینه‌ترین پرتفوی ممکن به دست آوریم.

۶.۴ مثال‌های عددی

۱.۶.۴ عدد فازی $L - R$

در این بخش یک مثال عددی از اینوگوجی و تانینو [۱۹] بررسی می‌شود. برای مقایسه، نه تنها رویکرد امکانی، بلکه احتمال نیز در نظر گرفته می‌شود. در این مثال، پنج ورقه قرضه که نرخ بازده آن‌ها از نوع توزیع احتمالی زیر با مرکز c_i و یک گسترش w_i است، به صورت زیر مطرح می‌شود:

$$\pi_{c_i}(q) = \exp\left(-\frac{(q - c_i)^2}{w_i}\right). \quad (20.4)$$

به عنوان توزیع احتمال متناظر p_{c_i} ، توزیع نرمال $N(c_i, \sqrt{\frac{w_i}{\pi}})$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$p_{c_i}(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi w_i}} \exp\left(-\frac{(q - c_i)^2}{w_i}\right). \quad (21.4)$$

پارامترهای c_i و w_i به صورت

$$c_1 = 0.25, c_2 = 0.22, c_3 = 0.2, c_4 = 0.15, c_5 = 0.05,$$

$$w_1 = 0.225, w_2 = 0.15, w_3 = 0.15, w_4 = 0.1, w_5 = 0.05,$$

هستند. جدول (۱.۴) جواب‌های بهینه به دست آمده توسط مدل مارکوویتز، مدل کسری، مدل گسترشی، مدل کیفی، مدل کمینه-بیشینه را نشان می‌دهد. در این مثال از مدل میانگین-واریانس امکانی (۸.۴) با در نظر گرفتن

از $\frac{1}{4}$ استفاده می‌شود. به این ترتیب مدل میانگین-واریانس امکانی به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (0.15x_1 + \sqrt{0.15}x_2 + \sqrt{0.15}x_3 \\ & \quad + 0.1x_4 + \sqrt{0.05}x_5) \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} 0.25x_1 + 0.22x_2 + 0.2x_3 + 0.15x_4 + 0.05x_5 \geq \mu, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ u_i \geq x_i \geq l_i, i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases} \end{aligned} \quad (22.4)$$

با $l_i = 0$, $u_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) و $\mu = 0/18$ ، جواب بهینه مدل میانگین-واریانس امکانی (۲۲.۴) در جدول (۱.۴) نشان داده شده است.

در جدول (۱.۴) پرتفوی، با بازده امکانی بیشتر، ریسک بیشتری نیز دارند. جواب بهینه برای رویکردهای میانگین-واریانس امکانی همان است که یکی از رویکردها را با به حداقل رساندن ریسک گسترش دهند و به نظر می‌رسد از مدل (۴.۴) مارکوویتز بهتر است چون ریسک در آن از جواب مدل مارکوویتز کمتر است.

در ادامه جواب‌های مسأله بهینه (۲۲.۴) با محدودیت‌های کران‌های پایین در x_i ، ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) برای تمام مقادیر ممکن μ را در نظر می‌گیریم. در اینجا فرض کنید کران پایین x_i توسط $l_i = 0/1$ ، $i = 1, 2, 3, 4, 5$ داده شده است. سرمایه‌گذاران چگونه ارزش μ را انتخاب می‌کنند؟ ابتدا سرمایه‌گذاران باید مقادیر حداکثر و حداقل مقدار بازده مورد انتظار μ را تعیین کنند، یعنی:

$$\mu_{max} = \max\{0/25x_1 + 0/22x_2 + 0/2x_3 + 0/15x_4 + 0/5x_5\}$$

و

$$\mu_{min} = \min\{0/25x_1 + 0/22x_2 + 0/2x_3 + 0/15x_4 + 0/5x_5\}$$

با محدودیت‌های $0/1 \leq x_i$ ، $i = 1, 2, 3, 4, 5$ و $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$ ، سپس سرمایه‌گذاران مقدار μ مناسب را از $0/112 = \mu_{min}$ تا $0/212 = \mu_{max}$ انتخاب می‌کنند. تا زمانی که $\mu > 0/212$ جواب مسأله (۲۲.۴) امکان‌پذیر نیست. بنابراین جواب بهینه مسأله (۲۲.۴) وجود ندارد. مسأله برنامه‌ریزی خطی بالا با نرم‌افزار *Matlab* برای

$$\mu = 0/112, 0/12, 0/14, 0/16, 0/18, 0/20, 0/212$$

حل شده است. نتایج محاسباتی مربوطه در جدول (۲.۴) ذکر شده است.

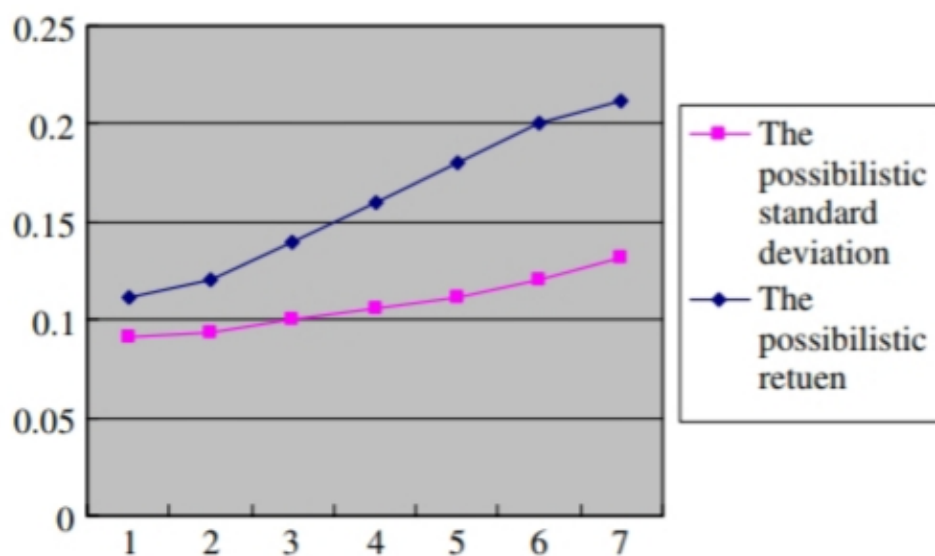
جدول (۲.۴): پرتفوی بهینه موجود نشان‌دهنده‌ی این است، از آنجایی که سرمایه‌گذار برای بازده $\mu = 0/18$ دارای محدودیت دارایی‌هاست، نیاز به سرمایه‌گذاری کل سرمایه در پنج سهام را دارد. هرچه نسبت سرمایه‌گذاری سهام ۱ بیشتر باشد، بازده امکانی μ حداکثر بازده می‌شود و هرچه نسبت سرمایه‌گذاری سهام ۵ بیشتر باشد، بازده امکانی μ حداقل بازده را شامل می‌شود. بازده و واریانس امکانی (۷.۴) پرتفوی بهینه امکانی در شکل (۱.۴) نشان داده شده است.

جدول ۱.۴: جواب‌های انتخاب پرتفوی به رویکرد مختلف

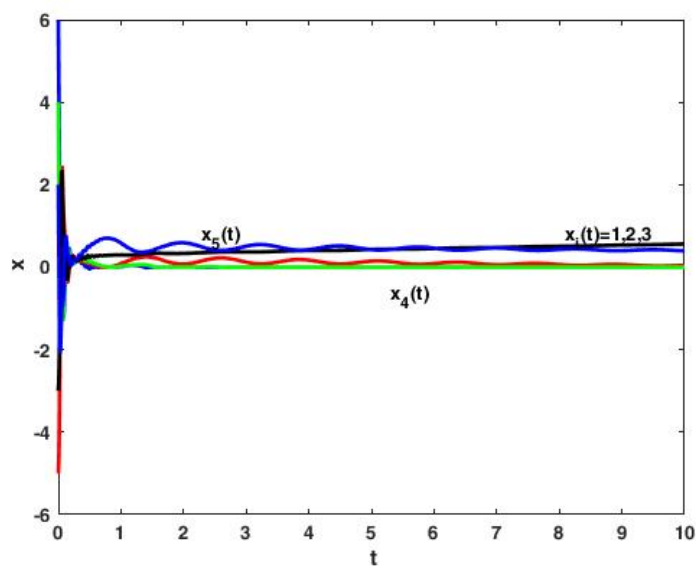
رویکرد	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	بازده مکانی $\sum_{i=1}^5 \alpha_i x_i$	ریسک مکانی $\sum_{i=1}^5 \sqrt{F_{RR}}(\alpha_i + \beta_i) x_i$
مارکوویتز	۰/۱۹۲۷۸	۰/۲۵۵۱۷	۰/۳۳۲۵۱	۰/۱۳۱۸۹	۰/۱۸۷۶۵	۰/۱۸	۰/۱۱۵۱۰۳
کسری	۰	۱	۰	۰	۰	۰/۲۲	۰/۱۲۲۴۷۴
کیفی	۱	۰	۰	۰	۰	۰/۲۵	۰/۱۵
گسترشی	۰	۰/۴۲۸۵۷	۰	۰/۵۷۱۴۳	۰	۰/۱۸	۰/۱۰۹۶۳۲
$min - max$	۰/۴۰۸۰۲	۰/۳۰۶۶۳	۰/۲۵۲۸۳	۰/۰۳۲۵۲	۰	۰/۲۲۴۹۰۷	۰/۱۳۲۹۷۴
میانگین-واریانس مکانی	۰	۰/۴۲۸۵۷	۰	۰/۵۷۱۴۳	۰	۰/۱۸	۰/۱۰۹۶۳۲

جدول ۲.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی

μ	۰/۱۱۲	۰/۱۲	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۱۸	۰/۲۰	۰/۲۱۲
$\sum_{i=1}^5 \sqrt{F_{RR}}(\alpha_i + \beta_i)x_i$	۰/۰۹۱۹	۰/۰۹۴۲	۰/۱۰۰۱	۰/۱۰۵۹	۰/۱۱۲۳	۰/۱۲۰۶	۰/۱۳۱۶
x_1	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۶
x_2	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۳۵۷	۰/۵	۰/۱
x_3	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
x_4	۰/۱	۰/۱۱۸	۰/۳۸	۰/۵۸	۰/۳۴۳	۰/۱	۰/۱
x_5	۰/۶	۰/۵۲	۰/۳۲	۰/۱۲	۰/۱	۰/۱	۰/۱
پرتفوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷



شکل ۱.۴: بازده‌های امکانی و میانگین انحراف معیار امکانی پرتفوی



شکل ۲.۴: عدد فازی $L - R$

جواب بهینه برای مدل (۲۲.۴) به صورت

$$x^* = (0, 0, 0, 0/62, 0/38)^T$$

است.

۲.۶.۴ عدد فازی مثلثی

به منظور نشان دادن رویکردهای مؤثر از کارآمدی اوراق بهادار در این فصل، نمونه‌ای واقعی از انتخاب پرتفوی در نظر گرفته می‌شود. در این مثال، پنج سهم از سهام بورس شانگهای انتخاب شده است. بازدهی آن‌ها r_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ به عنوان اعداد فازی مثلثی متقارن در نظر گرفته می‌شوند. بر اساس اطلاعات گذشته و اطلاعات آینده، یک مجموعه α - برش از r_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ به صورت زیر داده شده است:

$$[r_1]_\alpha = (0.04 + 0.021\alpha, 0.10 - 0.021\alpha),$$

$$[r_2]_\alpha = (0.07 + 0.03\alpha, 0.16 - 0.03\alpha),$$

$$[r_3]_\alpha = (0.08 + 0.042\alpha, 0.21 - 0.042\alpha),$$

$$[r_4]_\alpha = (0.10 + 0.06\alpha, 0.28 - 0.06\alpha),$$

$$[r_5]_\alpha = (0.11 + 0.081\alpha, 0.36 - 0.081\alpha).$$

به ترتیب، کران‌های پایین و بالا از کل بودجه سرمایه‌گذاری اختصاص یافته به دارایی i ام، $i = 1, \dots, 5$ به صورت زیر هستند:

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad l_i = 0.1, \quad u_1 = 0.4, u_2 = 0.4, u_3 = 0.5, u_4 = 0.6, u_5 = 0.7.$$

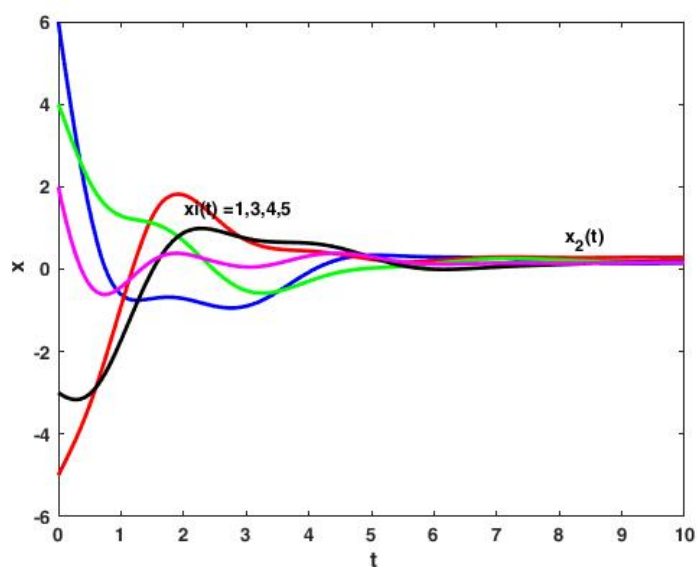
به این ترتیب، مدل میانگین-واریانس امکانی به صورت زیر فرمول بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad 0.021x_1 + 0.03x_2 + 0.042x_3 + 0.06x_4 + 0.081x_5 \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} 0.07x_1 + 0.115x_2 + 0.145x_3 + 0.19x_4 + 0.235x_5 \geq \mu, \\ 0.1 \leq x_1 \leq 0.4, \\ 0.1 \leq x_2 \leq 0.4, \\ 0.1 \leq x_3 \leq 0.5, \\ 0.1 \leq x_4 \leq 0.6, \\ 0.1 \leq x_5 \leq 0.7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (23.4)$$

پرتفوی بهینه امکانی با $\mu = 0.10, 0.15, 0.17, 0.19$ در جدول (۳.۴) محاسبه شده است.

جدول ۳.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی

μ	۰/۱۰	۰/۱۵	۰/۱۷	۰/۱۹
x_1	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
x_2	۰/۳۱۳۰۴۳	۰/۳۷۳۳۳۳	۰/۱۰۶۶۶۷	۰/۱
x_3	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
x_4	۰/۱	۰/۳۲۶۶۶۷	۰/۵۹۳۳۳۳	۰/۱۶۶۶۶۷
x_5	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۵۳۳۳۳۳



شکل ۳.۴: عدد فازی مثلثی

جواب بهینه برای مدل (۲۳.۴) به صورت

$$x^* = (0/18, 0/25, 0/18, 0/19, 0/2)^T$$

است.

۳.۶.۴ عدد فازی ذوزنقه‌ای

برای نشان دادن رویکردهای مؤثر پیشنهاد شده و رویکردهای پرتفوی بهینه، نمونه‌ای از انتخاب پرتفوی واقعی در نظر گرفته می‌شود. در این مثال ۵ سهم از سهام بورس شانگهای انتخاب شده است. داده‌های اصلی قیمت، قیمت ماهانه از آوریل ۲۰۰۲ تا ژانویه ۲۰۰۴ است. بر اساس داده‌های تاریخی و گزارش‌های مالی شرکت‌ها و اطلاعات آینده، می‌توان آن‌ها را با توزیع امکانی زیر تخمین زد:

$$r_1 = (0/073, 0/073, 0/054, 0/087), \quad r_2 = (0/105, 0/105, 0/075, 0/102),$$

$$r_3 = (0/138, 0/138, 0/096, 0/123), \quad r_4 = (0/168, 0/168, 0/126, 0/162),$$

$$r_5 = (0/208, 0/208, 0/168, 0/213)$$

و بنابراین، یک مجموعه α -برش از r_i ، $i = 1, \dots, 5$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$(r_1)_\alpha = [0/019 + 0/054\alpha, 0/160 - 0/087\alpha], \quad (r_2)_\alpha = [0/030 + 0/075\alpha, 0/207 - 0/102\alpha],$$

$$(r_3)_\alpha = [0/042 + 0/096\alpha, 0/261 - 0/123\alpha], \quad (r_4)_\alpha = [0/042 + 0/126\alpha, 0/330 - 0/162\alpha],$$

$$(r_5)_\alpha = [0/040 + 0/168\alpha, 0/421 - 0/213\alpha].$$

به ترتیب، کران‌های پایین و بالا از x_i را داریم:

$$(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = (0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1),$$

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (0/4, 0/4, 0/4, 0/5, 0/6)$$

به این ترتیب، مدل پرتفوی بهینه امکانی پایین به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad 0/559x_1 + 0/105x_2 + 0/138x_3 + 0/168x_4 + 0/208x_5 \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} 0/4 \geq x_1 \geq 0/1, \\ 0/4 \geq x_2 \geq 0/1, \\ 0/4 \geq x_3 \geq 0/1, \\ 0/5 \geq x_4 \geq 0/1, \\ 0/6 \geq x_5 \geq 0/1, \\ i = 1, 2, \dots, n, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (24.4)$$

و مدل پرتفوی بهینه امکانی بالا به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad 0.073x_1 + 0.309x_2 + 0.384x_3 + 0.492x_4 + 0.634x_5 \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} 0.4 \geq x_1 \geq 0.1, \\ 0.4 \geq x_2 \geq 0.1, \\ 0.4 \geq x_3 \geq 0.1, \\ 0.5 \geq x_4 \geq 0.1, \\ 0.6 \geq x_5 \geq 0.1, \\ i = 1, 2, \dots, n, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (25.4)$$

با استفاده از مدل‌های (۱۴.۴) و (۱۵.۴)، پرتفوی بهینه امکانی پایین و بالا تحت برخی سطوح مختلف ریسک پذیر به ترتیب در جدول‌های (۴.۴) و (۵.۴) نشان داده شده است. اگر سرمایه‌گذار از هر یک از پرتفوی‌های به دست آمده رضایت نداشته باشد، می‌توان ارزش معاملات را با تغییر ارزش ریسک σ به دست آورد.

جدول (۴.۴): پرتفوی بهینه امکانی پایین را نشان می‌دهد، که سرمایه‌گذار نیازی به سرمایه‌گذاری کل سرمایه در پنج دارایی ریسکی را ندارد آن چنان که $\sigma \leq 2.2\%$.
جدول (۵.۴): پرتفوی بهینه امکانی بالا را نشان می‌دهد که سرمایه‌گذار نیازی به سرمایه‌گذاری کل سرمایه در پنج دارایی ریسکی را ندارد آن چنان که $\sigma \leq 3\%$.

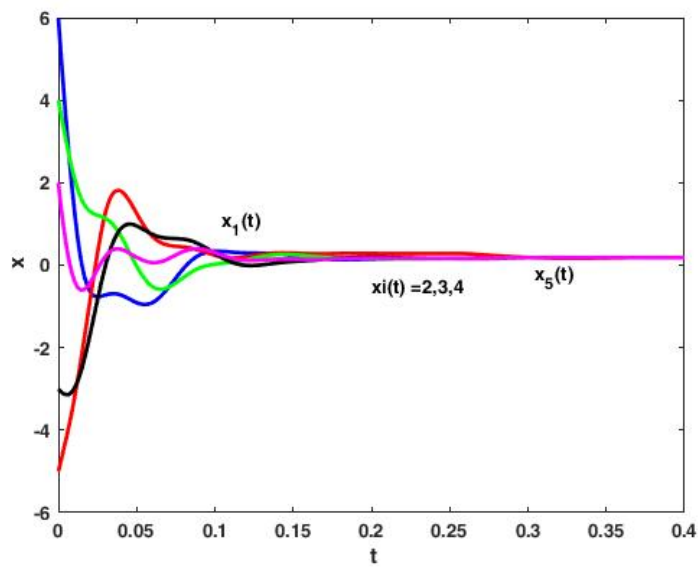
برای همه، پرتفوی بهینه امکانی پایین حداقل بازدهی امکانی 5.19% است و حداکثر بازده امکانی 12.79% است. برای همه پرتفوی بهینه امکانی بالا، حداقل بازده امکانی 9.21% و حداکثر بازده امکانی 23.16% . پرتفوی با حداقل بازده امکانی $X = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)^T$ و پرتفوی با حداکثر بازده امکانی $X = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.6)^T$ است. مرز بهینه امکانی بالا، بالاتر از مرز بهینه امکانی پایین است.

جدول ۴.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی پایین

maximize	$M_*(r)(i.)$	۵/۱۹	۶/۰۲	۶/۹۵	۷/۷۳	۷/۸۹	۸/۸۲	۹/۷۵	۱۰/۶	۱۱/۱۸	۱۱/۷۳	۱۲/۲۶	۱۲/۷۹
$\sigma(i.)$		۱/۲۳	۱/۴	۱/۶	۱/۶۲	۱/۸	۲/۰	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳/۰	۳/۲
x_1		۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
x_2		۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱۴	۰/۱۲۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
x_3		۰/۱	۰/۱۷۸	۰/۲۶۶	۰/۲۷۵	۰/۳۵۵	۰/۴۴۳	۰/۵	۰/۵	۰/۲۵۴	۰/۱	۰/۱	۰/۱
x_4		۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱۷۹	۰/۴۴۶	۰/۵۰۸	۰/۳۰۶	۰/۱
x_5		۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱۹۲	۰/۳۹۴	۰/۶
$\sum_{i=1}^5 x_i$		۰/۵	۰/۴۲۲	۰/۳۳۴	۰/۳۲۵	۰/۷۵۵	۰/۸۴۳	۰/۹۴	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۵.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی بالا

<i>maximize</i> $M^*(r)(\%)$	۹/۲۱	۱۰/۳۲	۱۱/۵۶	۱۲/۷۹	۱۴/۰۳	۱۵/۳	۱۶/۴۹	۱۷/۶۵	۱۸/۷۷	۱۹/۷۲	۲۰/۶۶	۲۱/۶	۲۳/۱۶
$\sigma(\%)$	۱/۶۲	۱/۸	۲/۰	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳/۰	۳/۲	۳/۴	۳/۶	۳/۸	۴/۱۳
x_1	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
x_2	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
x_3	۰/۱	۰/۱۶۲	۰/۳۳۱	۰/۳	۰/۳۶۹	۰/۴۳۸	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۴۴۴	۰/۳۵	۰/۲۵۶	۰/۱
x_4	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱۰۵	۰/۱۵۸	۰/۱۶۸	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
x_5	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱۳۲	۰/۲۵۶	۰/۳۵	۰/۴۴۴	۰/۶
$\sum_{i=1}^5 x_i$	۰/۵	۰/۵۶۲	۰/۶۳۱	۰/۷	۰/۷۶۹	۰/۸۳۸	۰/۹۰۵	۰/۹۵۸	۱	۱	۱	۱	۱

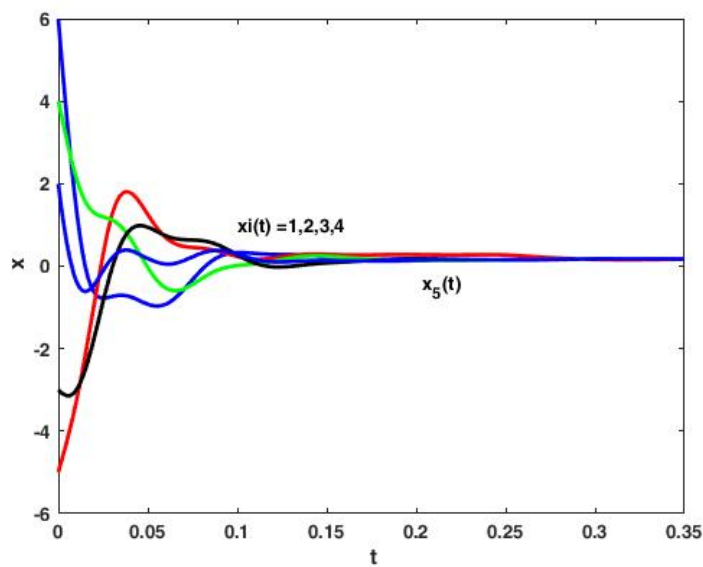


شکل ۴.۴: عدد فازی دوزنقه‌ای

جواب بهینه برای مدل (۲۴.۴) به صورت

$$x^* = (0/4, 0/1, 0/1, 0/1, 0/3)^T$$

است.



شکل ۵.۴: عدد فازی دوزنقه‌ای

جواب بهینه برای مدل (۲۵.۴) به صورت

$$x^* = (0/1, 0/1, 0/15, 0/15, 0/5)^T$$

است.

۷.۴ مثال های عددی از شرکت های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران

۱.۷.۴ عدد فازی $L - R$

در این بخش دو مثال عددی از بورس کشور ایران را در نظر می گیریم که پرتفوی بهینه را برای مدل های عدد فازی $L - R$ ، مثلثی و ذوزنقه ای بررسی می کنیم. مثال اول شامل پنج سهم فولاد، پتروشیمی شازند، سیمان فارس نو، معدنی و صنعتی چادرملو و کشت و صنعت پیاذر از سهام بورس ایران است.

سهم	پیاذر	چادرملو	فارس نو	شازند	فولاد
بازده ماهانه	۰/۰۳	۰/۰۶	۰/۰۷	۰/۰۴	۰/۰۱۶
ریسک ماهانه	۰/۲	۰/۱۶	۰/۱۷	۰/۱۵	۰/۲۱

مثال دوم شامل پنج سهم دارویی لقمان، سرمایه گذاری مسکن، الکتریک خودرو شرق، صنایع آذرباب و پالایش نفت تهران است.

سهم	نفت	آذرباب	خودرو	مسکن	لقمان
بازده ماهانه	۰/۰۳۱	۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۲۱	۰/۰۱۵
ریسک ماهانه	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۱۷	۰/۱۳	۰/۱۷

به این ترتیب مدل میانگین-واریانس امکانی (۸.۴) برای گروه اول را به شرح زیر به دست

می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (\circ/21x_1 + \circ/15x_2 + \circ/17x_3 + \circ/16x_4 + \circ/2x_5) \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} \circ/16x_1 + \circ/4x_2 + \circ/7x_3 + \circ/6x_4 + \circ/3x_5 \geq \mu, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ u_i \geq x_i \geq l_i, i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases} \end{aligned} \quad (26.4)$$

همچنین مدل میانگین-واریانس امکانی (۸.۴) برای گروه دوم به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (\circ/17x_1 + \circ/13x_2 + \circ/17x_3 + \circ/22x_4 + \circ/22x_5) \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} \circ/15x_1 + \circ/21x_2 + \circ/7x_3 + \circ/3x_4 + \circ/31x_5 \geq \mu, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ u_i \geq x_i \geq l_i, i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases} \end{aligned} \quad (27.4)$$

با مقادیر بازده مورد انتظار

$$\mu = \circ/112, \circ/12, \circ/14, \circ/16, \circ/18, \circ/20, \circ/212$$

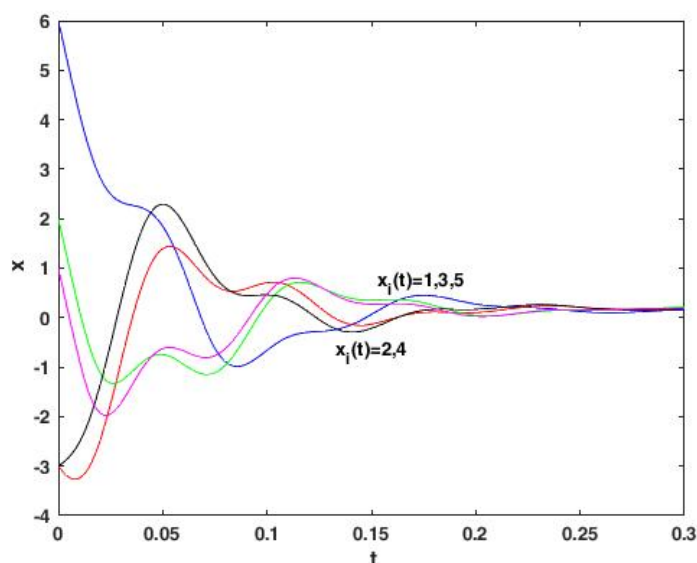
محاسبه می‌شود، نتایج محاسباتی مربوطه در جدول‌های (۶.۴) و (۷.۴) ذکر شده است.

جدول ۶.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی گروه اول

μ	۰/۱۱۲	۰/۱۲	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۱۸	۰/۲۰	۰/۲۱۲
minimize $\sum_{i=1}^5 \sqrt{FRR}(\alpha_i + \beta_i)x_i$	۰/۰۹۱۹	۰/۰۹۴۲	۰/۱۰۰۱	۰/۱۰۵۹	۰/۱۱۳۳	۰/۱۲۰۶	۰/۱۳۱۶
x_1	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
x_2	۰/۲۳	۰/۲۴	۰/۲۴	۰/۲	۰/۲۳	۰/۲	۰/۲۵
x_3	۰/۲۷	۰/۲۸	۰/۲۵	۰/۳	۰/۳	۰/۳۲	۰/۳۱
x_4	۰/۲۵	۰/۲۴	۰/۲۵	۰/۲۳	۰/۲	۰/۲۱	۰/۲۴
x_5	۰/۱۵	۰/۱۴	۰/۱۵	۰/۱۷	۰/۱۶	۰/۱۶	۰/۱
پرتفوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

جدول ۷.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی گروه دوم

μ	۰/۱۱۲	۰/۱۲	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۱۸	۰/۲۰	۰/۲۱۲
$\sum_{i=1}^5 \sqrt{F_{RR}}(\alpha_i + \beta_i)x_i$	۰/۰۹۱۹	۰/۰۹۴۲	۰/۱۰۰۱	۰/۱۰۵۹	۰/۱۱۲۳	۰/۱۲۰۶	۰/۱۳۱۶
x_1	۰/۲	۰/۲۳	۰/۲۲	۰/۲۱	۰/۲۱	۰/۱۲	۰/۱
x_2	۰/۵۲	۰/۳۱	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۳۳	۰/۴۹	۰/۴۹
x_3	۰	۰/۰۵	۰	۰/۱۵	۰/۱۵	۰	۰
x_4	۰/۱۴	۰/۱۸	۰/۲۵	۰/۱۸	۰/۱۹	۰/۲۴	۰/۲۶
x_5	۰/۱۴	۰/۲۳	۰/۲	۰/۲۳	۰/۲۲	۰/۱۴	۰/۱۵
پرتفوی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷



شکل ۶.۴: عدد فازی $L - R$

جواب بهینه گروه اول (۲۶.۴) به صورت

$$x^* = (0/1, 0/2, 0/3, 0/3, 0/1)^T$$

و جواب بهینه گروه دوم (۲۷.۴) به صورت

$$x^* = (0/1, 0/2, 0/1, 0/4, 0/2)^T$$

است. با توجه به جدول‌های (۶.۴) و (۷.۴) مشاهده می‌شود که در گروه اول مثال ۵ سهمی هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام سیمان فارس نو بیشتر باشد، سرمایه‌گذاری بازدهی بیشتری خواهد داشت. و هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام کشت و صنعت پیادر بیشتر باشد کمترین بازدهی ممکن را خواهیم داشت. همچنین برای گروه دوم هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام صنایع آذراب بیشتر باشد، سرمایه‌گذاری بازدهی بیشتری خواهد داشت. و هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام سرمایه‌گذاری مسکن بیشتر باشد کمترین بازدهی ممکن را خواهیم داشت.

۲.۷.۴ عدد فازی مثلثی

علاوه بر در نظر گرفتن مفروضات قبلی هر دو گروه سهام، کران‌های پایین و بالا از کل بودجه سرمایه‌گذاری اختصاص یافته به دارایی i ام، $i = 1, \dots, 5$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad l_i = 0.1, \quad u_1 = 0.4, u_2 = 0.4, u_3 = 0.5, u_4 = 0.6, u_5 = 0.7.$$

به این ترتیب، مدل میانگین-واریانس امکانی (۱۰.۴) برای گروه اول به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad 0.21x_1 + 0.15x_2 + 0.172x_3 + 0.16x_4 + 0.2x_5 \\ &\text{subject to} \quad \begin{cases} 0.16x_1 + 0.04x_2 + 0.07x_3 + 0.06x_4 + 0.03x_5 \geq \mu, \\ 0.1 \leq x_1 \leq 0.4, \\ 0.1 \leq x_2 \leq 0.4, \\ 0.1 \leq x_3 \leq 0.5, \\ 0.1 \leq x_4 \leq 0.6, \\ 0.1 \leq x_5 \leq 0.7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (28.4)$$

پرتفوی بهینه امکانی را برای $\mu = 0.10, 0.15, 0.17, 0.19$ در جدول (۸.۴) به دست می‌آوریم.

جدول ۸.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی

μ	0.10	0.15	0.17	0.19
x_1	0.19	0.2	0.28	0.34
x_2	0.29	0.29	0.23	0.19
x_3	0.19	0.19	0.17	0.17
x_4	0.14	0.18	0.18	0.1
x_5	0.19	0.14	0.14	0.2

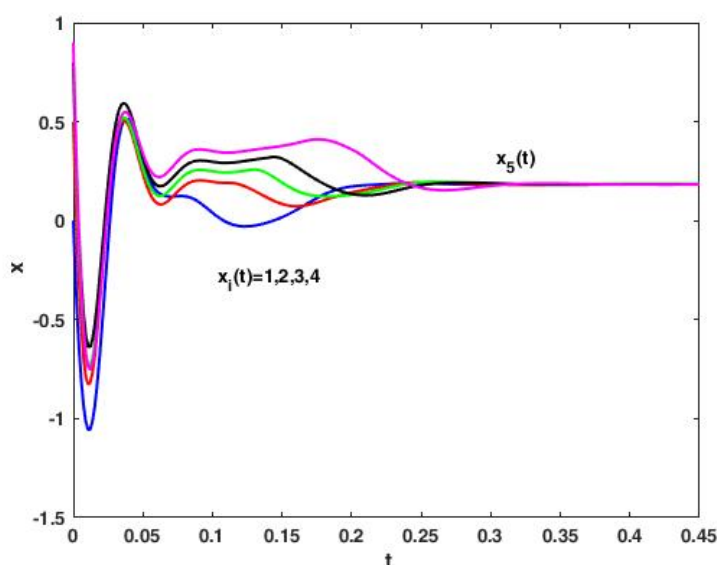
برای پنج سهم دیگر نیز با همان مفروضات قبل داریم:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && 0.17x_1 + 0.13x_2 + 0.17x_3 + 0.22x_4 + 0.22x_5 \\ &\text{subject to} && \begin{cases} 0.15x_1 + 0.21x_2 + 0.07x_3 + 0.03x_4 + 0.31x_5 \geq \mu, \\ 0.1 \leq x_1 \leq 0.4, \\ 0.1 \leq x_2 \leq 0.4, \\ 0.1 \leq x_3 \leq 0.5, \\ 0.1 \leq x_4 \leq 0.6, \\ 0.1 \leq x_5 \leq 0.7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (29.4)$$

پرتفوی بهینه امکانی برای $\mu = 0.10, 0.15, 0.17, 0.19$ در جدول (۹.۴) به دست می‌آید.

جدول ۹.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی

μ	۰/۱۰	۰/۱۵	۰/۱۷	۰/۱۹
x_1	۰/۲۸	۰/۲۵	۰/۲۴	۰/۲۳
x_2	۰/۱۴	۰/۱۷	۰/۱۴	۰/۱۵
x_3	۰	۰	۰/۰۲	۰/۰۳
x_4	۰/۲۶	۰/۲۵	۰/۲۶	۰/۲۳
x_5	۰/۳۲	۰/۳۳	۰/۳۴	۰/۳۶



شکل ۷.۴: عدد فازی مثلثی

جواب بهینه (۲۸.۴) به صورت

$$x^* = (0/21, 0/18, 0/13, 0/18, 0/3)^T$$

و جواب بهینه (۲۹.۴) به صورت

$$x^* = (0/2, 0/05, 0/15, 0/22, 0/38)^T$$

است.

با توجه به جداول (۸.۴) و (۹.۴) مشاهده می‌شود که در گروه اول مثال ۵ سهمی هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام فولاد بیشتر باشد، سرمایه‌گذاری بازدهی بیشتری خواهد داشت. و هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام پتروشیمی شازند بیشتر باشد کمترین بازدهی ممکن را خواهیم داشت. همچنین برای گروه دوم هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام پالایش نفت تهران بیشتر باشد، سرمایه‌گذاری بازدهی بیشتری خواهد داشت. و هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام سرمایه‌گذاری مسکن بیشتر باشد کمترین بازدهی ممکن را خواهیم داشت.

۳.۷.۴ عدد فازی دوزنقه‌ای

با در نظر گرفتن مفروضات قبلی و کران‌های پایین و بالا از x_i که به صورت زیر است:

$$(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5) = (0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1),$$

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (0/4, 0/4, 0/4, 0/5, 0/6),$$

با استفاده از مدل‌های (۱۴.۴) و (۱۵.۴)، پرتفوی بهینه امکانی پایین و بالا به ترتیب در جدول‌های (۱۰.۴)، (۱۱.۴)، (۱۲.۴)، (۱۳.۴) نشان داده شده است. به این ترتیب، مدل پرتفوی بهینه امکانی گروه اول به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && 0/016x_1 + 0/04x_2 + 0/07x_3 + 0/06x_4 + 0/03x_5 \\ & \text{subject to} && \begin{cases} 0/4 \geq x_1 \geq 0/1, \\ 0/4 \geq x_2 \geq 0/1, \\ 0/4 \geq x_3 \geq 0/1, \\ 0/5 \geq x_4 \geq 0/1, \\ 0/6 \geq x_5 \geq 0/1, \\ i = 1, 2, \dots, n, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (30.4)$$

و مدل پرتفوی بهینه امکانی گروه دوم نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && 0/015x_1 + 0/021x_2 + 0/07x_3 + 0/03x_4 + 0/031x_5 \\ & \text{subject to} && \begin{cases} 0/4 \geq x_1 \geq 0/1, \\ 0/4 \geq x_2 \geq 0/1, \\ 0/4 \geq x_3 \geq 0/1, \\ 0/5 \geq x_4 \geq 0/1, \\ 0/6 \geq x_5 \geq 0/1, \\ i = 1, 2, \dots, n, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (31.4)$$

جدول ۱۰.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی پایین گروه اول

<i>maximize</i>	$M_*(r)(\%)$	۵/۱۹	۶/۰۲	۶/۹۵	۷/۷۳	۷/۸۹	۸/۸۲	۹/۷۵	۱۰/۶	۱۱/۱۸	۱۱/۷۳	۱۲/۲۶	۱۲/۷۹
$\sigma(\%)$	۱/۲۳	۱/۴	۱/۶	۱/۶۲	۱/۸	۲/۰	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳/۰	۳/۲	۳/۲
x_1	۰/۰۴	۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۰۲۵	۰/۱۵	۰/۱۸	۰/۲۸	۰/۲۸	۰/۱۶	۰/۱۸	۰/۱۵	۰/۱۶	۰/۱۸
x_2	۰/۲	۰/۲۲	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۱۸	۰/۱۵	۰/۱۶	۰/۱۸	۰/۱۸
x_3	۰/۰۵	۰/۰۸	۰/۰۸	۰/۰۸	۰/۰۱۵	۰/۱۷۳	۰	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۰۴	۰/۰۱	۰/۰۱
x_4	۰/۰۱	۰/۰۳۲	۰/۰۳۲	۰/۰۱	۰/۱۸	۰/۱۷	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۳	۰/۲۲	۰/۲۳	۰/۲۳	۰/۲۴
x_5	۰/۲	۰/۰۶	۰/۰۳۲	۰/۰۴	۰/۲۷	۰/۱۸	۰/۳	۰/۳۲	۰/۲۹	۰/۳۵	۰/۳۳	۰/۳۵	۰/۳۵
$\sum_{i=1}^5 x_i$	۰/۵	۰/۴۲۲	۰/۳۳۴	۰/۳۲۵	۰/۷۵۵	۰/۸۴۳	۰/۹۴	۱	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۱۱.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی بالا گروه اول

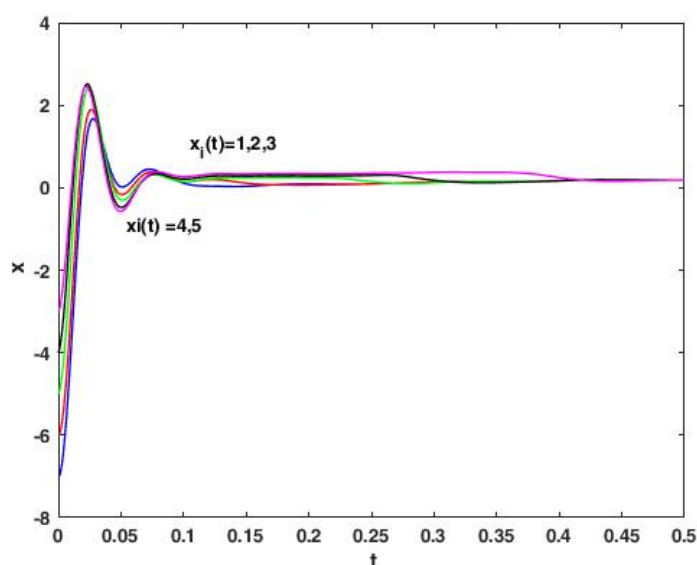
$maximize$	$M^*(r)(\%)$	۹/۲۱	۱۰/۳۲	۱۱/۵۶	۱۲/۷۹	۱۴/۰۳	۱۵/۳	۱۶/۴۹	۱۷/۶۵	۱۸/۷۷	۱۹/۷۲	۲۰/۶۶	۲۱/۶	۲۳/۱۶
$\sigma(\%)$		۱/۶۲	۱/۸	۲/۰	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳/۰	۳/۲	۳/۴	۳/۶	۳/۸	۴/۱۳
x_1		۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۸	۰/۱۲	۰/۰۵	۰/۱۷۸	۰/۱۱	۰/۱۶	۰/۱۵	۰/۱۶	۰/۱۹	۰/۲۱	۰/۱۳
x_2		۰/۲۱	۰/۲۴	۰/۱۸	۰/۱۶	۰/۲۴	۰/۱۶	۰/۲۱۵	۰/۱۹۸	۰/۲۱	۰/۲۸	۰/۱۸	۰/۱۷	۰/۳۵
x_3		۰/۰۵	۰/۱۱	۰/۰۳	۰/۰۲۲	۰/۱۱۹	۰/۰۴	۰/۰۸	۰/۰۷	۰/۰۹	۰/۱۷	۰/۰۸	۰/۰۵	۰/۰۸
x_4		۰/۰۱	۰/۰۴۲	۰/۰۷	۰/۱۲	۰/۰۸	۰/۱۸	۰/۱۸	۰/۲۲	۰/۲۳	۰/۱۵	۰/۲۳	۰/۲۳	۰/۲۵
x_5		۰/۲	۰/۱۳	۰/۲۷۱	۰/۲۷۸	۰/۲۸	۰/۲۸	۰/۳۲	۰/۳۱	۰/۳۲	۰/۲۴	۰/۳۳	۰/۳۴	۰/۱۹
$\sum_{i=1}^5 x_i$		۰/۵	۰/۵۶۲	۰/۶۳۱	۰/۷	۰/۷۶۹	۰/۸۳۸	۰/۹۰۵	۰/۹۵۸	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۱۲.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی پایین گروه دوم

$maximize$	$M_*(\sigma)(\%)$	۵/۱۹	۶/۰۲	۶/۹۵	۷/۷۳	۷/۸۹	۸/۸۲	۹/۷۵	۱۰/۶	۱۱/۱۸	۱۱/۷۳	۱۲/۲۶	۱۲/۷۹
$\sigma(\%)$		۱/۲۳	۱/۴	۱/۶	۱/۶۲	۱/۸	۲/۰	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳/۰	۳/۲
x_1		۰/۰۷	۰/۰۲۱	۰/۰۲	۰/۰۴	۰/۱	۰/۱۶۳	۰/۱۱	۰/۲۸	۰/۲۱	۰/۰۹	۰/۰۸	۰/۰۹
x_2		۰/۱۶	۰/۲۲	۰/۱۶۴	۰/۱۱	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۲۲	۰/۱۵	۰/۱۷	۰/۲۹	۰/۲۵	۰/۳
x_3		۰/۰۱	۰/۰۸۱	۰/۰۸	۰/۰۹	۰	۰/۰۴	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۶	۰/۱۸	۰/۱۳	۰/۱۶
x_5		۰/۰۱	۰	۰/۰۲	۰/۰۵	۰/۱۶۵	۰/۱۹	۰/۱۶	۰/۲۳	۰/۲۲	۰/۱۶	۰/۱۷	۰/۱۳
x_4		۰/۲۵	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۳۵	۰/۳۵	۰/۲۹	۰/۳۵	۰/۳۳	۰/۳۴	۰/۲۸	۰/۳۷	۰/۳۲
$\sum_{i=1}^5 x_i$		۰/۵	۰/۴۲۲	۰/۳۳۴	۰/۳۲۵	۰/۷۵۵	۰/۸۴۳	۰/۹۴	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۱۳.۴: برخی از پرتفوی بهینه امکانی بالا گروه دوم

<i>maximize</i>	$M^*(r)(\%)$	۹/۲۱	۱۰/۳۲	۱۱/۵۶	۱۲/۷۹	۱۴/۰۳	۱۵/۳	۱۶/۴۹	۱۷/۶۵	۱۸/۷۷	۱۹/۷۲	۲۰/۶۶	۲۱/۶	۲۳/۱۶
$\sigma(\%)$		۱/۶۲	۱/۸	۲/۰	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳/۰	۳/۲	۳/۴	۳/۶	۳/۸	۴/۱۳
x_1		۰/۰۷	۰/۰۹	۰/۱۱	۰/۱۲	۰/۱۷۹	۰/۱۵	۰/۲	۰/۱۶	۰/۲۴	۰/۲۸	۰/۲۹	۰/۲۷	۰/۲۶
x_2		۰/۱۸	۰/۱۷۲	۰/۱۶	۰/۱۷	۰/۱۴	۰/۲	۰/۱۶	۰/۱۹	۰/۱۸	۰/۱۶	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۵
x_3		۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۰۲۱	۰/۰۲۶	۰	۰/۰۴	۰/۰۳۵	۰/۰۷۸	۰/۰۳	۰/۰۲	۰	۰/۰۲	۰/۰۱
x_4		۰/۰۱	۰/۰۴	۰/۰۷	۰/۰۹۸	۰/۱۸	۰/۱۵۸	۰/۱۹	۰/۱۹	۰/۲۶	۰/۲۳	۰/۲۴	۰/۲۴	۰/۳۲
x_5		۰/۲۱	۰/۲۵	۰/۲۷	۰/۲۸۶	۰/۲۷	۰/۲۹	۰/۳۲	۰/۳۴	۰/۲۹	۰/۳۱	۰/۳	۰/۳	۰/۲۶
$\sum_{i=1}^5 x_i$		۰/۵	۰/۵۶۲	۰/۶۳۱	۰/۷	۰/۷۶۹	۰/۸۳۸	۰/۹۰۵	۰/۹۵۸	۱	۱	۱	۱	۱



شکل ۸.۴: عدد فازی دوزنقه‌ای

جواب بهینه امکانی پایین (۳۰.۴) به صورت

$$x^* = (0/28, 0/16, 0/02, 0/22, 0/32)^T$$

و جواب بهینه امکانی بالا (۳۰.۴) به صورت

$$x^* = (0/1, 0/4, 0/02, 0/18, 0/3)^T$$

است.

با توجه به جداول (۱۰.۴) و (۱۱.۴) مشاهده می‌شود که پرتفوی امکانی پایین برای گروه اول مثال ۵ سهمی، هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام کشت و صنعت پیادر بیشتر و هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام سیمان فارس نو کمتر باشد، بیشترین بازدهی ممکن را خواهیم داشت. همچنین برای پرتفوی امکانی بالا گروه اول هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام پتروشیمی شازند بیشتر و سرمایه‌گذاری در سهام سیمان فارس نو کمتر باشد، بیشترین بازدهی ممکن را خواهیم داشت.

جواب بهینه امکانی پایین (۳۱.۴) به صورت

$$x^* = (0/04, 0/26, 0/12, 0/18, 0/4)^T$$

و جواب بهینه امکانی بالا (۳۱.۴) به صورت

$$x^* = (0/24, 0/17, 0/01, 0/2, 0/38)^T$$

است.

با توجه به جداول (۱۲.۴) و (۱۳.۴) مشاهده می‌شود که پرتفوی امکانی پایین برای گروه دوم مثال ۵ سهمی، هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام لقمان کمتر و هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام سرمایه‌گذاری مسکن بیشتر باشد، بیشترین بازدهی ممکن را خواهیم داشت. همچنین برای پرتفوی امکانی بالا گروه دوم هر چه میزان سرمایه‌گذاری در سهام الکتریک خودرو شرق کمتر و پالایش نفت تهران و سرمایه‌گذاری در سهام صنایع آذراب بیشتر باشد بیشترین بازدهی ممکن را خواهیم داشت.

۸.۴ نتیجه‌گیری

انتخاب پرتفوی یک مسأله چندهدفه معمولی است. در این پژوهش یک پرتفوی بهینه برای یک سرمایه‌گذار با توجه به چند معیار: بازده، ریسک، نقدشوندگی و اضافه کردن آنتروپی به عنوان تابع هدف برای تولید دارایی‌های متنوع در نظر گرفته می‌شود. این اهداف، به طور کلی، از دیدگاه سرمایه‌گذار واضح نیستند، بنابراین با شرایط فازی با آن‌ها برخورد خواهد شد. در این مطالعه، یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه با هزینه معامله پیشنهاد شده، و برای حل مسأله از روش برنامه‌ریزی غیر خطی فازی استفاده می‌شود.

از اعداد فازی، به عنوان ابزار قدرتمندی برای توصیف ابهام فضای نامعین استفاده می‌شود، در این پایان‌نامه، مدل الگوهای میانگین و واریانس امکانی برای انتخاب پرتفوی‌ها بر اساس میانگین و واریانس امکانی پایین و بالا اعداد فازی ارائه شده و مفاهیم پرتفوی بهینه امکانی پایین و بالا معرفی شده‌اند. همچنین مدل‌های ساده برنامه‌ریزی خطی برای انتخاب پرتفوی بهینه با فرض این که بازده دارایی‌های اعداد فازی دوزنقه‌ای، اعداد فازی مثلثی و اعداد فازی از نوع $L - R$ باشند به دست می‌آیند. که به ترتیب میانگین، واریانس و کوواریانس امکانی جایگزین میانگین، واریانس و کوواریانس مارکوویتز می‌شود که یک مدل میانگین-واریانس امکانی جدید برای انتخاب پرتفوی بهینه به دست می‌آید، که نه تنها دارای مجهولات کمتری است بلکه پارامترهای آن می‌تواند نظر کارشناسان را در مقایسه با روش میانگین-واریانس مارکوویتز بهتر بررسی کند. علاوه بر این می‌تواند میزان بازده و ریسک مسأله انتخاب پرتفوی را بهتر شرح دهد. و با خطی شدن مدل میانگین-واریانس و استفاده از شبکه‌ی عصبی به بهینه‌ترین پرتفوی ممکن رسید.

به دلیل تنوع در بازار مالی و ترجیحات سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک، بیشتر برنامه‌های بهینه‌سازی پرتفوی براساس تجدید نظر در پرتفوی موجود است. علاوه بر این سرمایه‌گذاران نه تنها می‌توانند دارایی‌های ریسکی را خریداری کنند، بلکه می‌توانند دارایی‌های بدون ریسک را با فروش استقراضی به فروش برسانند.

مراجع

- [۱] طاهري، م.، ”آشنایی با نظریه مجموعه های فازی،” جهاد دانشگاهی، مشهد، ۱۳۷۵.
- [۲] نوری س، پایان نامه ارشد ”: بهینه سازی سبد سهام با استفاده از میانگین – نیم واریانس هدف با بازده های نامعین”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [3] A.Yoshimoto, The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction cost, Journal of Operation research Society of Japan 39 (1996) 99-17
- [4] A.F. Perold, Large-scale portfolio optimization, Management Science 30 (1984) 1143–1160.
- [5] C. Carlsson, R. Fuller, P. Majlender, Possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score Fuzzy Sets and Systems, 13 (2002), pp. 13-21
- [6] C. Carlsson, R. Fuller, On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001) 315–326.
- [7] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.
- [8] D. Dubois, H. Prade, Possibility Theory, Plenum Press, New York, 1988.
- [9] FREUND, J. E., ”Mathematical statistics,” Prentice Hall, 1992.
- [10] H.Markowitz, Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, John Wiley , Sons, New York,1959.
- [11] H.Markowitz, Portfolio Selection, Journal of finance 7 (1952) 77-91.
- [12] H.Konno, H. Yamazaki, Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock exchange, Management Science 37 (1991) 519-531.
- [13] H.J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several Objective Functions, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 45-55.

- [14] H. Markowitz, Portfolio selection, *Journal of Finance* 7 (1952) 77–91.
- [15] H. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Wiley, New York, 1959.
- [16] H. Markowitz, *Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Basil Blackwell, Oxford, 1987.
- [17] H. Tanaka, P. Guo, Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions, *European Journal of Operational Research* 114 (1999) 115–126.
- [18] H. Tanaka, P. Guo, I.B. Turksen, Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions, *Fuzzy Sets and systems* 111 (2000) 387–397.
- [19] Inuiguchi M, Tanino T (2000) Portfolio selection under independent possibilistic information. *Fuzzy Sets Syst* 115:83–92.
- [20] Inuiguchi M, Ichihashi H, Kume Y (1992) Relationships between modality constrained programming problems and various fuzzy mathematical programming problems. *Fuzzy Sets Syst* 49: 243–259.
- [21] Inuiguchi M, Ichihashi H, Kume Y (1993) Modality constrained programming problems: A unified approach to fuzzy mathematical programming problems in the setting of possibility theory. *Inf Sci* 67:93–126.
- [22] J.Watada, Fuzzy portfolio model for decision making in investment, in: Y.Yoshida(Ed.) , *Dynamical Aspects in Fuzzy Decision making*, Physica verlag, Heidelberg, 2001, PP. 141-162.
- [23] J.N. Kapur, *Maximum Entropy Models in Science and Engineering*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1990.
- [24] J.S. Pang, A new efficient algorithm for a class of portfolio selection problems, *Operational Research* 28 (1980) 754–767.
- [25] J. Vořoň s, Portfolio analysis-An analytic derivation of the efficient portfolio frontier, *European Journal of Operational Research* 203 (1986) 294–300.
- [26] J. Watada, *Fuzzy Portfolio Selection and Its Applications to Decision Making*, 13, Tatra Mountains Mathematical Publication, 1997, pp. 219–248.

- [27] K.K. Lai, S.Y. Wang, et al., A class of linear interval programming problems and its application to portfolio selection, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 10 (2002) 698–704.
- [28] L.A. Zadeh, *Fuzzy Sets, Inform. and Control* 8 (1965) 338–353.
- [29] Lai KK, Wang SY, Xu JP, Zhu SS, Fang Y (2002) A class of linear interval programming problems and its application to portfolio selection. *IEEE Trans Fuzzy Syst* 10:698–704.
- [30] M.J. Best, R.R. Grauer, The efficient set mathematics when mean–variance problems are subject to general linear constraints, *Journal of Economics and Business* 42 (1990) 105–120.
- [31] M.J. Best, J. Hlouskova, The efficient frontier for bounded assets, *Mathematical Methods of Operations Research* 52 (2000) 195–212.
- [32] RUDIN, W., *Real and complex analysis*, Tata McGraw-Hill, India, 1987.
- [33] R. Goetschel, W. Voxman, Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems* 18 (1986) 31–43.
- [34] R.E. Bellman, L.A. Zadeh, Decision making in a fuzzy environment, *Management Science* 17(4)(1970) 141-164.
- [35] R.D. Arnott, W.H. Wanger, the measurement and control of trading costs, *Financial Analysis Journal* 46(6) (1990) 73-80.
- [36] R.C. Merton, An analytic derivation of the efficient frontier, *Journal of Finance and Quantitative Analysis* September (1972) 1851– 1872.
- [37] S.C. Fng, J.R. Rajasekera, H.S.J. Tsao, *Entropy Optimization and Mathematical programming*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [38] S. Ramaswamy, *Portfolio Selection Using Fuzzy Decision Theory*, Working Paper of Bank for International Settlements, No. 59, 1998.
- [39] S.Y. Wang, S.S. Zhu, On fuzzy portfolio selection problems, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 1 (2002) 361–377.
- [40] S. Giove, S. Funari, C. Nardelli, An interval portfolio selection problems based on regret function, *European Journal of Operational Research* 170 (2006) 253–264.
- [41] T. Leo´n, V. Liem, E. Vercher, Viability of infeasible portfolio selection problems: A fuzzy approach, *European Journal of Operational Research* 139 (2002) 178–189.

-
- [42] Tanaka H, Guo P (1999) Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions. *Eur J Oper Res* 114:115–126.
- [43] Tanaka H, Guo P, Türksen IB (2000) Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions. *Fuzzy Sets Syst* 111:387–397.
- [44] W.F. Sharpe, *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [45] W.G. Zhang, Z.K. Nie, On possibilistic variance of fuzzy numbers, *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 2639 (2003) 398–402.
- [46] W.G. Zhang, Y.L. Wang, Using fuzzy possibilistic mean and variance in portfolio selection model, *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 3801 (2005) 291–296.
- [47] W.G. Zhang, W.A. Liu, Y.L. Wang, On admissible efficient portfolio selection: models and algorithms, *Applied Mathematics and Computation* 176 (2006) 208–218.
- [48] Zadeh, L.A.: *Fuzzy Sets Inform and Control* 8 (1965) 338-353.
- [49] Yang Y. and Cao J. and Xu X. and Hu M. and Gao Y. (2014), A new network for solving quadratic programming problems with equality and inequality constraints. *mathematices and Computers in Simulation* 101, 103-112.

Aabstract

In this research, we apply the feasibility modeling by applying a variety of fuzzy numbers and using the possibility theory to determine the optimal investment model based on neural network methodology for fuzzy $L - R$, trapezoidal and triangular numbers in optimal portfolio formation. Securities. The overall goal is to maximize "return" and reduce "risk" to find the optimal portfolio. So, to achieve this goal, solve the multi-objective nonlinear programming problem using the Zimmerman method by minimizing the objective functions. Furthermore, by replacing the mean-variance and standard deviation models by the Markovits mean-variance model, consider the optimal portfolio selection in the Possibilistic space.

Keywords: Nonlinear Programming, Mean-variance Model, Optimal Portfolio, Possibilistic Space, Objective Functions.



Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Financial Mathematical

Multi-objective Probability Model For Portfolio Selection With Transaction Cost

By: Masoomeh Saki

Supervisors:

Dr. Alireza Nazemi

Dr. Abdulmajid Abdulbaghi Ata Abadi

January 2019