بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش بهینه سازی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه‌ی فازی شهودی

نگارنده: سمیه اسمعیلی

استاد راهنما

دکتر مهرداد غزنوی

استاد مشاور

دکتر سمیه مغاری

خرداد ۹۸

تقدیم...

پدرم، ای بزرگ معلم زندگانی‌ام،
به سخن که می‌ایستی پنجره‌ای از امید و تلاش می‌گشایی، دغدغه‌ات همواره این بوده که حیات بشر بر مدار ارزش‌های انسانی بچرخد و شناخت خدا، مکتب آدمی باشد و هیچ بیگانه‌ای را مجال دستکاری در فرهنگ غنی میهنی فراهم نگردد. شمایی که علم‌آموزی را شیرین‌ترین مشغله خود می‌دانید.
امروز ماحصل آموخته‌هایم را به استوارترین تکیه‌گاهم، دستان پر مهر شما و نیز به مقدس‌ترین واژه‌ها در لغت‌نامه دلم، مادر مهربانم که زندگی‌ام را مدیون مهر و عطوفت او می‌دانم، تقدیم می‌دارم. و از ایشان به خاطر زحماتی که در طول زندگی همواره برای موفقیت من، به جان خریدند، تشکر می‌کنم.

سپاس‌گزاری...

پروردگار را سپاسگزارم که بار دیگر به من فرصت آموختن داد. او که همواره مبهوت علم بیکرانش بوده و هستم.
از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر غزنوی که شاگردی محضرشان از بزرگترین افتخارات علمی‌ام می‌باشد، کمال تشکر را دارم. ایشان که همواره بر غفلت‌ها و اشتباهات من، قلم عفو و اصلاح کشیده و در کمال سعه‌صدر باحسن خلق از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننموده‌اند. و همواره نیک اندیشیدند و عقل و منطق را پیشه راه خویش نمودند و با نبوغ بی‌بدیل خویش جز پیشرفت و سعادت جامعه هدفی را دنبال نمی‌کنند.
و تشکر از تمامی اساتیدی که توفیق دانش‌آموزی در محضرشان را داشتم.
از اساتید محترم جناب آقای دکتر فتحعلی و جناب آقای دکتر نوری اسکندری که زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه را به عهده گرفتند بسیار سپاسگزارم.
از استاد محترم جناب آقای دکتر ناظمی نماینده تحصیلات تکمیلی که در جلسه دفاع اینجانب شرکت کردند بسیار سپاسگزارم.
و در پایان از تمامی عزیزانی که در طول انجام این پروژه مرا یاری کرده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را ابراز می‌نمایم.

سمیه اسمعیلی
خرداد ۹۸

تعهد نامه

اینجانب **سمیه اسمعیلی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه‌ی فازی شهودی** ، تحت راهنمایی **مهرداد غزنوی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سمیه اسمعیلی
خرداد ۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در شرایط واقعی ممکن است وضعیت‌هایی رخ دهد که مدل‌های ریاضی شامل تنها یک هدف، بیانگر خواسته‌های موردنظر تصمیم‌گیرنده نباشند که این امر کارایی و مطلوبیت نتایج حاصل از مدل را کاهش می‌دهد. همچنین در شرایط واقعی پارامترها و عوامل مختلف شامل ابهام و عدم‌قطعیت هستند و این امر موجب بروز پیچیدگی فراوانی در تصمیم‌گیری می‌شود. بنابراین برای برطرف کردن این مشکلات احتمالی، مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی شهودی مطرح شده است.

بهینه‌سازی چندهدفه در محدوده فازی شهودی، روند یافتن جواب بهینه پارتو است که به طور همزمان میزان رضایت از تصمیم فازی شهودی را به حداکثر و میزان نارضایتی را به حداقل می‌رساند.

در این پایان‌نامه ابتدا مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی شهودی مثلثی با استفاده از اعداد فازی شهودی مثلثی و محدودیت‌های مختلف مورد بحث قرار گرفته است و آن را به یک مسئله برنامه‌ریزی تک‌هدفه آرمانی فازی تبدیل کرده است و با استفاده از انواع مختلف توابع عضویت(خطی یا غیرخطی) مسئله را به یک مدل برنامه‌ریزی(خطی یا غیرخطی) قطعی تبدیل کرده است. و سپس با روش‌های برنامه‌ریزی قطعی مناسب آن را حل کرده است.

در ادامه ماهیت متضاد اهداف مختلف با تعریف توابع عضویت مطابق با آن‌ها در مجموعه فازی سهموی مورد بررسی قرار گرفته است. در این روش برای هر هدف یک تابع عضویت و عدم‌عضویت در نظر گرفته شده است. و هدف ارائه یک الگوریتم برای حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی در دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه است.

در نهایت، ضرایب نادقیق توابع و محدودیت‌های هدف در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی شهودی با مقدار بازه‌ای مورد انتظار آن‌ها تقریب زده شده است و یک روش برنامه‌ریزی آرمانی برای حل این مسائل مورد بررسی قرار گرفته شده است.

کلیدواژه‌ها : عدد فازی شهودی، عدد فازی شهودی مثلثی، بازه‌های مورد انتظار، دیدگاه خوش‌بینانه، دیدگاه بدبینانه

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مفهوم مجموعه‌های فازی شهودی

۱.۱ مفهوم مجموعه فازی شهودی

ایده اصلی مفهوم فازی شهودی اولین بار توسط آتاناسوف [1] معرفی شد. او تصمیم گرفت به تعریف مجموعه فازی، درجه دوم (درجه عدم‌عضویت) را نیز اضافه کند و خواص یک مجموعه را با دو درجه مطالعه کند. او می‌دانست که مجموعه جدید گسترش یک مجموعه فازی معمولی است، اما بلافاصله متوجه نشد که اساسا ویژگی‌های متفاوتی خواهد داشت. لذا، اولین کارهای تحقیقاتی آتاناسوف در این زمینه، ادامه نتایج موجود در نظریه مجموعه‌های فازی بود. البته، گسترش برخی از مفاهیم بسیار هم سخت نبود. جالب آن‌جا بود که او نشان داد توسیع مربوطه ویژگی‌های خاصی دارد که در مفهوم فازی معمولی برقرار نیست.

جورج گارگف [2] -از برجسته‌ترین ریاضیدانان بلغاری- نام " مجموعه فازی شهودی " را پیشنهاد داد، زیرا روش فازی‌سازی، ایده شهودی را حفظ می‌کند.

همواره E را یک مجموعه کلاسیک(قطعی) فرض کنید.

[1] Atanassov

[2] George Gargov

۲.۱ مثالی از مجموعه‌های فازی شهودی

می‌خواهیم با یک مثال مجموعه فازی شهودی را معرفی کنیم.
علی و فاطمه یک جعبه حاوی ۱۰ شکلات خریدند. که علی ۷ تا و فاطمه تنها ۲ تا از آن‌ها را خورند و یکی از شکلات‌ها روی زمین افتاد.
در همین حین، دوست فاطمه می‌آید و فاطمه می‌گوید: ”نمی‌توانیم با شکلات از تو پذیرایی کنیم چون علی همه آن‌ها را خورد.“
می‌خواهیم ارزش درستی این جمله را در لحظه صحبت تخمین بزنیم، یعنی قبل این که چیزی درباره حوادث بعدی بدانیم. از دیدگاه منطق کلاسیک، که برای تخمین از اعضای مجموعه $\{۰,۱\}$ استفاده می‌کند، این جمله دارای ارزش درستی صفر است، چون فاطمه نیز در خوردن شکلات‌ها مشارکت داشته است و علی تنها کسی نبوده است که آن‌ها را خورده است. از سویی دیگر، معتقدیم که این جمله درست است تا دروغ!
در سال ۱۹۲۶، جان لوکاسیویکز[۳] [۶] مفهوم منطق سه‌گانه را پیشنهاد داد که مقادیر تخمینی آن اعضای مجموعه $\{۰,\frac{۱}{۲},۱\}$ بود .

اگر جمله مفروض را با منطق سه‌گانه تخمین بزنیم ارزش درستی‌اش باید $\frac{۱}{۲}$ باشد. سی سال بعد، جان لوکاسیویکز ایده‌اش را به مفهوم منطق چندارزشی تعمیم داد[۶]. برای مثال، اگر از منطق ۱۱ ارزشی استفاده کنیم با مجموعه مقادیر تخمینی $\{۰,\frac{۱}{۱۰},\frac{۲}{۱۰},\dots,\frac{۹}{۱۰},۱\}$ حل مسئله دوباره آسان‌تر می‌شود و تخمین درستی این جمله دقیقا $\frac{۷}{۱۰}$ است. اما اگر منطق ۶-ارزشی با مجموعه مقادیر تخمینی $\{۰,\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵},۱\}$ را بکار ببریم، نمی‌توانیم به درستی ارزش حقیقی جمله بالا را ارزیابی کنیم. ما بین $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۴}{۵}$ تردید داریم اما هیچکدام از این‌ها درست نیستند، زیرا

$$\frac{۴}{۵}-\frac{۷}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰}-\frac{۳}{۵},$$

یعنی، هر دو مقادیر به یک اندازه از مقدار واقعی $\frac{۷}{۱۰}$ فاصله دارند.
البته تقریبا بی‌نهایت مجموعه ارزیابی دیگر، وجود دارد که همین مشکل را ایجاد خواهند کرد. بنابراین، با توجه به ایده مجموعه‌های فازی لطفی زاده، برای ارزیابی اعداد از بازه $[۰,۱]$ استفاده می‌کنیم [۲۸].
به مسئله برمی‌گردیم. ارزش حقیقی جمله مفروض، قطعا ۰/۷ است. گرچه، علی می‌تواند شکلاتی که روی زمین افتاده است را بردارد و آن را در جعبه قرار دهد. که در این صورت ارزش درستی جمله فاطمه ۰/۷ و ارزش نادرستی آن ۰/۳ است. البته او می‌تواند آخرین شکلات را بخورد که در این صورت ارزش درستی جمله ۰/۸ و ارزش نادرستی آن ۰/۲ خواهد بود. و این به این معنی است که

[۳] Jan Lukasiewicz

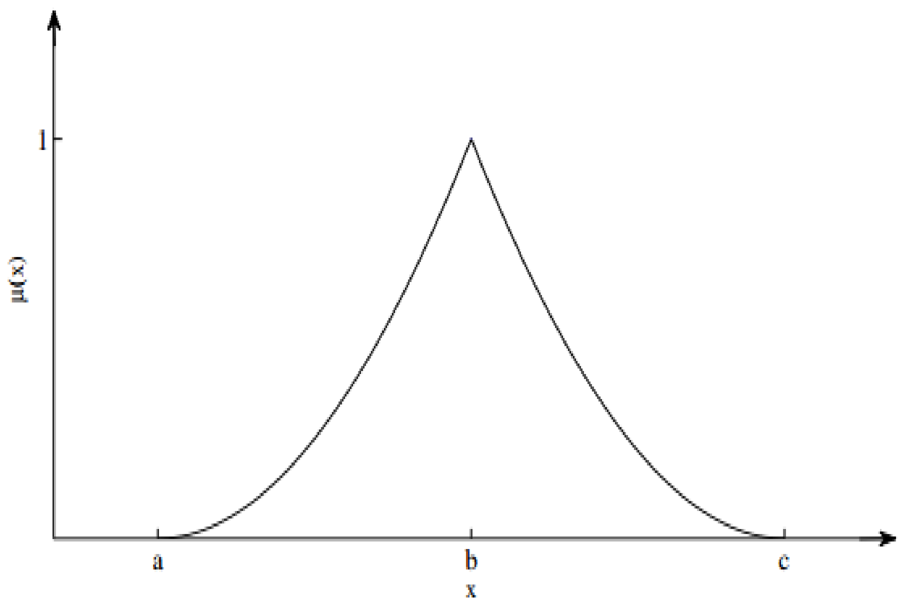
جمله فاطمه بستگی زیادی به اقدامات بعدی علی دارد و لذا مجموعه‌های فازی شهودی دقیق‌ترین پاسخ به سوال را می‌دهد: $< ۰/۲, ۰/۷ >$. درجه عدم‌اطمینان در حال حاضر ۰/۱است و آن به ناآگاهی ما از اقدامات بعدی علی مربوط می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید E مجموعه مرجع باشد. یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در E با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in E\}$ نشان داده می‌شود که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [۰, ۱]$ درجه عضویت x در $\tilde{A}$ است، و $\mu_{\tilde{A}}$ تابع عضویت $\tilde{A}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. یک عدد فازی سهموی $\tilde{A}^p = (a, b, c)$، یک مجموعه فازی با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}^p}$ است که به صورت زیر تعریف شده است :

$$\mu_{\tilde{A}^p}(x) = \begin{cases} (\frac{x-a}{b-a})^۲, & a \leq x \leq b \\ ۱, & x = b \\ (\frac{c-x}{c-b})^۲, & b \leq x \leq c \\ ۰, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

نمودار کلی آن در شکل ۱.۱ نشان داده شده است.



شکل ۱.۱: عدد فازی سهموی

تعریف ۳.۲.۱. یک عدد فازی سهموی $\tilde{A}^p = (a, b, c)$ غیرمنفی گفته می‌شود اگر $a \geq ۰$. همچنین به آن عدد فازی صفر گویند اگر $a = ۰, \ b = ۰$ و $c = ۰$.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید E یک مجموعه قطعی باشد. برای یک مجموعه قطعی $A \subseteq E$، مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ مفهومی به شکل زیر است:

$$\tilde{A}^I = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x)\rangle \mid x \in E\} \qquad (۱.۱)$$

که در آن توابع $\mu_{\tilde{A}^I} : E \to [۰, ۱]$ و $\nu_{\tilde{A}^I} : E \to [۰, ۱]$ به ترتیب درجه عضویت و درجه عدم‌عضویت عنصر x در مجموعه $\tilde{A}^I$ تعریف می‌شوند، و برای هر $x \in E$ داریم:

$$۰ \leq \mu_{\tilde{A}^I}(x) + \nu_{\tilde{A}^I}(x) \leq ۱. \qquad (۲.۱)$$

بدیهی است، هر مجموعه فازی معمولی به شکل زیر است.

$$\{\langle x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), ۱ - \mu_{\tilde{A}^I}(x)\rangle | x \in E\}.$$

اگر تعریف کنیم

$$\pi_{\tilde{A}^I}(x) = ۱ - \mu_{\tilde{A}^I}(x) - \nu_{\tilde{A}^I}(x),$$

آن‌گاه به $\pi_{\tilde{A}^I}(x)$ درجه عدم‌اطمینان عنصر $x \in E$ در مجموعه $\tilde{A}^I$ گویند. در مورد مجموعه‌های فازی معمولی، برای هر $x \in E$ داریم $\pi_{\tilde{A}^I}(x) = ۰$. لازم به یادآوری است که هر مجموعه به مفهوم نظریه مجموعه کلاسیک، یک مجموعه فازی و در نتیجه یک مجموعه فازی شهودی می‌باشد. آن‌چه که حائِز اهمیت است این است که عکس آن نیز برقرار می‌باشد، یعنی هر مجموعه فازی شهودی و در نتیجه هر مجموعه فازی، یک مجموعه به مفهوم نظریه مجموعه کلاسیک است.

فرض کنید مجموعه مرجع E ثابت باشد، برای یک مجموعه ثابت $A \subseteq E$ مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ را به صورت (۱.۱) تعریف می‌کنیم که در نامساوی (۲.۱) صدق کند.

فرض کنید $\tilde{E}^I = E \times [۰, ۱] \times [۰, ۱]$. بدیهی است $\tilde{A}^I \subseteq \tilde{E}^I$ و می‌توانیم تابع مشخصه $\Omega_{\tilde{A}^I} : \tilde{E}^I \to \{۰, ۱\}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Omega_{\tilde{A}^I}(\langle x, a, b\rangle) = \begin{cases} ۱ & , \quad \mu_{\tilde{A}^I}(x) = a,\ \nu_{\tilde{A}^I}(x) = b \text{ و } \langle x, a, b\rangle \in \tilde{A}^I \\ ۰ & , \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

یعنی، $\tilde{A}^I$ یک مجموعه به مفهوم نظریه مجموعه کلاسیک در مجموعه $\tilde{E}^I$ است. تبدیل عکس این نتیجه به مجموعه‌های فازی معمولی بدیهی است.

تعریف (۱.۱)، را می‌توانیم به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\tilde{A}^I = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x)\rangle | x \in E \ \&\ ۰ \leq \mu_{\tilde{A}^I}(x) + \nu_{\tilde{A}^I}(x) \leq ۱\}.$$

که در آن E یک مجموعه ثابت است و $A \subseteq E$. این شکل نمایش مجموعه فازی شهودی، از لحاظ نظریه مجموعه بسیار دقیق‌تر است، اما، کار کردن با آن طولانی‌تر و خسته‌کننده‌تر است.

تعریف ۵.۲.۱. یک مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ نرمال گفته می‌شود اگر حداقل یک $x_۰ \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu_{\tilde{A}^I}(x_۰) = ۱$ (بنابراین $\nu_{\tilde{A}^I}(x_۰) = ۰$)

تعریف ۶.۲.۱. پشتیبان مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ در مجموعه مرجع X با $S(\tilde{A}^I)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\tilde{A}^I) = \{x : \mu_{\tilde{A}^I}(x) > ۰ \text{ و } \nu_{\tilde{A}^I}(x) \leq ۱, x \in X\}$$

تعریف ۷.۲.۱. یک مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x)\rangle \mid x \in E \}$ را محدب گوییم اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و برای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\mu_{\tilde{A}^I}(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}^I}(x_۱), \mu_{\tilde{A}^I}(x_۲)\}$$
$$\nu_{\tilde{A}^I}(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲) \leq \max\{\nu_{\tilde{A}^I}(x_۱), \nu_{\tilde{A}^I}(x_۲)\}.$$

۳.۱ عمل‌ها و روابط پایه‌ای روی مجموعه‌های فازی شهودی

در این بخش با گسترش تعاریف، روابط و عمل‌های مجموعه‌های فازی، عمل‌ها و روابط روی مجموعه‌های فازی شهودی را معرفی می‌کنیم. باید توجه داشت که روابط و عمل‌های مجموعه‌های فازی حالت‌های خاصی از این تعاریف جدید خواهند بود.

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. برای هر دو مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ و $\tilde{B}^I$ در X روابط و عمل‌های زیر را می‌توان تعریف کرد:

$$\tilde{A}^I \subseteq \tilde{B}^I \iff (\forall x \in E)\Big(\mu_{\tilde{A}^I}(x) \leq \mu_{\tilde{B}^I}(x) \quad \& \quad \nu_{\tilde{A}^I}(x) \geq \nu_{\tilde{B}^I}(x)\Big); \tag{۳.۱}$$

$$\tilde{A}^I \supseteq \tilde{B}^I \iff \tilde{B}^I \subseteq \tilde{A}^I; \tag{۴.۱}$$

$$\tilde{A}^I = \tilde{B}^I \iff (\forall x \in E)\Big(\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \mu_{\tilde{B}^I}(x) \;\&\; \nu_{\tilde{A}^I}(x) = \nu_{\tilde{B}^I}(x)\Big); \tag{۵.۱}$$

$$\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I = \{\langle x, \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)), \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))\rangle \,|x \in E\}; \tag{۶.۱}$$

$$\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I = \{\langle x, \max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)), \min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))\rangle \,|x \in E\}; \tag{۷.۱}$$

$$\tilde{A}^I + \tilde{B}^I = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}^I}(x) + \mu_{\tilde{B}^I}(x) - \mu_{\tilde{A}^I}(x)\mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x)\nu_{\tilde{B}^I}(x)\rangle \,|x \in E\}; \tag{۸.۱}$$

$$\tilde{A}^I.\tilde{B}^I = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}^I}(x)\mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x) + \nu_{\tilde{B}^I}(x) - \nu_{\tilde{A}^I}(x)\nu_{\tilde{B}^I}(x)\rangle \,|x \in E\}. \tag{۹.۱}$$

عمل‌های ''نفی'' و ''استلزام'' به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\overline{\tilde{A}^I} = \{\langle x, \nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{A}^I}(x)\rangle \,|x \in E\}. \tag{۱۰.۱}$$

$$\tilde{A}^I \mapsto \tilde{B}^I = \{\langle x, \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))\rangle \,|x \in E\}. \tag{۱۱.۱}$$

نشان دادن صحت عمل‌ها و روابط تعریف‌شده آسان است. به عنوان مثال، برای عمل "+" کافی است نشان دهیم که نامساوی‌های زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \nu_{\tilde{A}^I}(x).\nu_{\tilde{B}^I}(x) \leq \mu_{\tilde{A}^I}(x)+\mu_{\tilde{B}^I}(x)-\mu_{\tilde{A}^I}(x).\mu_{\tilde{B}^I}(x)+\nu_{\tilde{A}^I}(x).\nu_{\tilde{B}^I}(x) \\ &\leq \mu_{\tilde{A}^I}(x)+\mu_{\tilde{B}^I}(x)-\mu_{\tilde{A}^I}(x).\mu_{\tilde{B}^I}(x)+(1-\mu_{\tilde{A}^I}(x)).(1-\mu_{\tilde{B}^I}(x))=1. \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان دید که تساوی زیر

$$\tilde{A}^I \mapsto \tilde{B}^I \approx \overline{\tilde{A}^I} \cup \tilde{B}^I$$

برقرار است. سه رابطه اول که در بالا تعریف شده‌اند، مشابه روابط شمول و برابری در نظریه مجموعه فازی معمولی هستند. همچنین برای هر دو مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ و $\tilde{B}^I$ داریم:

$$\tilde{A}^I \approx \tilde{B}^I \quad \text{اگر وتنها اگر} \quad \tilde{A}^I \subseteq \tilde{B}^I \quad \text{و} \quad \tilde{B}^I \subseteq \tilde{A}^I.$$

نخستین چهار عمل بالا در سال ۱۹۸۳ توسط آتاناسوف تعریف شد و این اولین گام برای تحقیق در خصوص خواص مجموعه فازی شهودی بود. استیفن دانچف [4] در مقاله [۷] یک عمل را به عنوان توسیعی از عمل‌های "$\cap$"، "$\cup$" تعریف کرد که به شکل زیر است:

$$\tilde{A}^I \underset{m,n}{\otimes} \tilde{B}^I = \{\langle x, f(m,\mu_{\tilde{A}^I}(x),\mu_{\tilde{B}^I}(x)), f(n,\nu_{\tilde{A}^I}(x),\nu_{\tilde{B}^I}(x))\rangle \,|x \in E\}, \qquad (۱۲.۱)$$

که در آن،

$$f(k,a,b)=\begin{cases} (\frac{1}{2}.(a^k+b^k))^{1/k}, & \text{اگر } (k<0 \text{ و } a,b>0) \text{ یا } k>0 \\ \sqrt{ab}, & \text{اگر } k=0 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

عملگر $\otimes_{0,0}$ تنها اهمیت نظری دارد. تاکنون کاربرد عملی واقعی تنها برای پنج عمل اول وجود دارد و برخی از این کاربردها در اینجا مورد بحث قرار می‌گیرند.
فرض کنید M یک مجموعه ثابت باشد، $e^* \in M$ یک عضو واحد از M باشد، و فرض کنید $*$ یک عملگر باشد.

$\langle M,*\rangle$ یک گروه‌وار است هرگاه $(\forall a,b \in M)(a*b \in M)$؛

$\langle M,*\rangle$ یک نیم‌گروه‌وار است هرگاه $\langle M,*\rangle$ یک گروه‌وار باشد و

$$(\forall a,b,c \in M)((a*b)*c=a*(b*c));$$

$\langle M,*,e_*\rangle$ یک مونوئید است هرگاه $\langle M,*\rangle$ یک نیم‌گروه‌وار باشد و

$$(\forall a \in M)(a*e_*=a=e_**a).$$

[4]Stefan Danchev

$\langle M,*,e_*\rangle$ یک مونوئید جابجایی است هرگاه $\langle M,*,e_*\rangle$ یک مونوئید باشد و

$$(\forall a,b\in M)(a*b=b*a).$$

$\langle M,*,e_*\rangle$ یک گروه است هرگاه $\langle M,*,e_*\rangle$ یک مونوئید باشد و

$$(\forall a\in M)(\exists a_*\in M)(a*a_*=e_*=a_* *a).$$

$\langle M,*,e_*\rangle$ یک گروه جابجایی است هرگاه $\langle M,*,e_*\rangle$ یک گروه باشد و

$$(\forall a,b\in M)(a*b=b*a).$$

یک اصلاح از عملگر "مجموعه توانی" برای یک مجموعه داده شده X به صورت

$$\mathcal{P}(X)=\{Y|Y\subseteq X\}, \tag{۱۳.۱}$$

تعریف می‌شود، که رابطه $\subseteq$ توسط (۳.۱) داده شده است.

فرض می‌کنیم هر $Y\subseteq X$ دارای کاردینال برابر با مجموعه X است. بنابراین، برای این عملگر $\emptyset\notin\mathcal{P}(X)$.

مجموعه‌های فازی شهودی خاص زیر را تعریف می‌کنیم:

$$O^*=\{\langle x,0,1\rangle|x\in E\}, \tag{۱۴.۱}$$

$$E^*=\{\langle x,1,0\rangle|x\in E\}, \tag{۱۵.۱}$$

$$U^*=\{\langle x,0,0\rangle|x\in E\}. \tag{۱۶.۱}$$

بدیهی است،

$$\mathcal{P}(E^*)=\{\tilde{A}^I|\tilde{A}^I=\{\langle x,\mu_{\tilde{A}^I}(x),\nu_{\tilde{A}^I}(x)\rangle|x\in E\}\},$$

$$\mathcal{P}(U^*)=\{\tilde{B}^I|\tilde{B}^I=\{\langle x,0,\nu_{\tilde{B}^I}(x)\rangle|x\in E\}\},$$

$$\mathcal{P}(O^*)=\{O^*\}.$$

بنابراین

$$\emptyset\notin\mathcal{P}(O^*)\cup\mathcal{P}(E^*)\cup\mathcal{P}(U^*).$$

قضیه ۱.۳.۱. برای یک مجموعه مرجع ثابت E،

۱. $\langle\mathcal{P}(E^*),\cap,E^*\rangle$ یک مونوئید جابجایی است؛

۲. $\langle\mathcal{P}(E^*),\cup,O^*\rangle$ یک مونوئید جابجایی است؛

۳. $\langle\mathcal{P}(E^*),+,O^*\rangle$ یک مونوئید جابجایی است؛

۴. $\langle \mathcal{P}(E^*), ., E^* \rangle$ یک مونوئید جابجایی است؛

۵. $\langle \mathcal{P}(U^*), \cap, U^* \rangle$ یک مونوئید جابجایی است؛

۶. $\langle \mathcal{P}(U^*), \cup, O^* \rangle$ یک مونوئید جابجایی است؛

۷. $\langle \mathcal{P}(U^*), +, O^* \rangle$ یک مونوئید جابجایی است؛

۸. $\langle \mathcal{P}(U^*), ., U^* \rangle$ یک مونوئید جابجایی است؛

۹. هیچ یک از این عناصر یک گروه(جابجایی) نیستند.

گزاره‌های زیر برای هر سه مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ ، $\tilde{B}^I$ و $\tilde{C}^I$ برقرار است:

۱. $(\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I) \cup \tilde{C}^I \approx (\tilde{A}^I \cup \tilde{C}^I) \cap (\tilde{B}^I \cup \tilde{C}^I)$،

۲. $(\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I) + \tilde{C}^I \approx (\tilde{A}^I + \tilde{C}^I) \cap (\tilde{B}^I + \tilde{C}^I)$،

۳. $(\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I).\tilde{C}^I \approx (\tilde{A}^I.\tilde{C}^I) \cap (\tilde{B}^I.\tilde{C}^I)$،

۴. $(\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I) \cap \tilde{C}^I \approx (\tilde{A}^I \cap \tilde{C}^I) \cup (\tilde{B}^I \cap \tilde{C}^I)$،

۵. $(\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I) + \tilde{C}^I \approx (\tilde{A}^I + \tilde{C}^I) \cup (\tilde{B}^I + \tilde{C}^I)$،

۶. $(\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I).\tilde{C}^I \approx (\tilde{A}^I.\tilde{C}^I) \cup (\tilde{B}^I.\tilde{C}^I)$،

۷. $(\tilde{A}^I + \tilde{B}^I).\tilde{C}^I \subseteq (\tilde{A}^I.\tilde{C}^I) + (\tilde{B}^I.\tilde{C}^I)$،

۸. $(\tilde{A}^I.\tilde{B}^I) + \tilde{C}^I \supseteq (\tilde{A}^I + \tilde{C}^I).(\tilde{B}^I + \tilde{C}^I)$،

۹. $(\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I) \mapsto \tilde{C}^I \supseteq (\tilde{A}^I \mapsto \tilde{C}^I) \cap (\tilde{B}^I \mapsto \tilde{C}^I)$،

۱۰. $(\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I) \mapsto \tilde{C}^I \subseteq (\tilde{A}^I \mapsto \tilde{C}^I) \cup (\tilde{B}^I \mapsto \tilde{C}^I)$،

۱۱. $(\tilde{A}^I + \tilde{B}^I) \mapsto \tilde{C}^I \supseteq (\tilde{A}^I \mapsto \tilde{C}^I) + (\tilde{B}^I \mapsto \tilde{C}^I)$،

۱۲. $(\tilde{A}^I.\tilde{B}^I) \mapsto \tilde{C}^I \subseteq (\tilde{A}^I \mapsto \tilde{C}^I).(\tilde{B}^I \mapsto \tilde{C}^I)$،

۱۳. $\tilde{A}^I \mapsto (\tilde{B}^I + \tilde{C}^I) \subseteq (\tilde{A}^I \mapsto \tilde{B}^I) + (\tilde{A}^I \mapsto \tilde{C}^I)$،

۱۴. $\tilde{A}^I \mapsto (\tilde{B}^I.\tilde{C}^I) \supseteq (\tilde{A}^I \mapsto \tilde{B}^I).(\tilde{A}^I \mapsto \tilde{C}^I)$،

۱۵. $\tilde{A}^I \cap \tilde{A}^I \approx \tilde{A}^I$،

۱۶. $\tilde{A}^I \cup \tilde{A}^I \approx \tilde{A}^I$،

۱۷. $\overline{\overline{\tilde{A}^I} \cap \overline{\tilde{B}^I}} \approx \tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I$، ۱۸. $\overline{\overline{\tilde{A}^I} \cup \overline{\tilde{B}^I}} \approx \tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I$،

۱۹. $\overline{\overline{\tilde{A}^I} + \overline{\tilde{B}^I}} \approx \tilde{A}^I.\tilde{B}^I$،

۲۰. $\overline{\overline{\tilde{A}^I}.\overline{\tilde{B}^I}} \approx \tilde{A}^I + \tilde{B}^I$،

۲۱. $E^* \mapsto \tilde{A}^I \approx \tilde{A}^I$،

۲۲. $\tilde{A}^I \mapsto O^* \approx \overline{\tilde{A}^I}$،

۲۳. $\tilde{A}^I \mapsto E^* \approx E^*$،

۲۴. $O^* \mapsto \tilde{A}^I \approx E^*$،

۲۵. $U^* \mapsto \tilde{A}^I \approx E^*$،

۲۶. $(\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I) + (\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I) \approx \tilde{A}^I + \tilde{B}^I$،

۲۷. $(\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I).(\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I) \approx \tilde{A}^I.\tilde{B}^I$،

۲۸. $(\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I) \mapsto (\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I) \approx (\tilde{A}^I \mapsto \tilde{B}^I) \cup (\tilde{B}^I \mapsto \tilde{A}^I)$،

۲۹. $(\tilde{A}^I \to \tilde{B}^I) \cup (\tilde{B}^I \to \tilde{C}^I) \cup (\tilde{C}^I \to \tilde{A}^I) \approx (\tilde{A}^I \to \tilde{C}^I) \cup (\tilde{C}^I \to \tilde{B}^I) \cup (\tilde{B}^I \to \tilde{A}^I)$،

۳۰. $(\tilde{A}^I \to \tilde{B}^I) \cap (\tilde{B}^I \to \tilde{C}^I) \cap (\tilde{C}^I \to \tilde{A}^I) \approx (\tilde{A}^I \to \tilde{C}^I) \cap (\tilde{C}^I \to \tilde{B}^I) \cap (\tilde{B}^I \to \tilde{A}^I)$.

۴.۱ عمل‌های دیگر روی مجموعه‌های فازی شهودی

در ادامه کارهای [۱۲]، دو عمل دیگر را که توسط بیلوسلاف ریکان [5] و آتاناسوف بر روی مجموعه‌های فازی شهودی تعریف شده اند و مشابه عمل‌های ''تفریق'' و ''تقسیم'' هستند را معرفی می‌کنیم. برای هر دو مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ و $\tilde{B}^I$ عمل‌های زیر را داریم:

$$\tilde{A}^I - \tilde{B}^I = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}^I - \tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I - \tilde{B}^I}(x)\rangle \,|x \in E\}, \qquad (۱۷.۱)$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{A}^I - \tilde{B}^I}(x) = \begin{cases} \frac{\mu_{\tilde{A}^I}(x) - \mu_{\tilde{B}^I}(x)}{1 - \mu_{\tilde{B}^I}(x)}, & \mu_{\tilde{A}^I}(x) \geq \mu_{\tilde{B}^I}(x) \quad \text{و} \quad \nu_{\tilde{A}^I}(x) \leq \nu_{\tilde{B}^I}(x) \\ & \nu_{\tilde{B}^I}(x) > 0 \quad \text{و} \\ & \nu_{\tilde{A}^I}(x)\pi_{\tilde{B}^I}(x) \leq \pi_{\tilde{A}^I}(x)\nu_{\tilde{B}^I}(x) \quad \text{و} \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

[5] Beloslav Riecan

و

$$\nu_{\tilde{A}^I-\tilde{B}^I}(x)=\begin{cases}\frac{\nu_{\tilde{A}^I}(x)}{\nu_{\tilde{B}^I}(x)}, & \mu_{\tilde{A}^I}(x)\geq\mu_{\tilde{B}^I}(x) \quad \text{و} \quad \nu_{\tilde{A}^I}(x)\leq\nu_{\tilde{B}^I}(x)\\ & \nu_{\tilde{B}^I}(x)>0 \quad \text{و}\\ & \nu_{\tilde{A}^I}(x)\pi_{\tilde{B}^I}(x)\leq\pi_{\tilde{A}^I}(x)\nu_{\tilde{B}^I}(x) \quad \text{و}\\ 1, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

و

$$\tilde{A}^I:\tilde{B}^I=\{\langle x,\mu_{\tilde{A}^I:\tilde{B}^I}(x),\nu_{\tilde{A}^I:\tilde{B}^I}(x)\rangle\,|x\in E\}, \tag{۱۸.۱}$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{A}^I:\tilde{B}^I}(x)=\begin{cases}\frac{\mu_{\tilde{A}^I}(x)}{\mu_{\tilde{B}^I}(x)}, & \mu_{\tilde{A}^I}(x)\leq\mu_{\tilde{B}^I}(x) \quad \text{و} \quad \nu_{\tilde{A}^I}(x)\geq\nu_{\tilde{B}^I}(x)\\ & \mu_{\tilde{B}^I}(x)>0 \quad \text{و}\\ & \mu_{\tilde{A}^I}(x)\pi_{\tilde{B}^I}(x)\leq\pi_{\tilde{A}^I}(x)\mu_{\tilde{B}^I}(x) \quad \text{و}\\ 0, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

و

$$\nu_{\tilde{A}^I:\tilde{B}^I}(x)=\begin{cases}\frac{\nu_{\tilde{A}^I}(x)-\nu_{\tilde{B}^I}(x)}{1-\nu_{\tilde{B}^I}(x)}, & \mu_{\tilde{A}^I}(x)\leq\mu_{\tilde{B}^I}(x) \quad \text{و} \quad \nu_{\tilde{A}^I}(x)\geq\nu_{\tilde{B}^I}(x)\\ & \mu_{\tilde{B}^I}(x)>0 \quad \text{و}\\ & \mu_{\tilde{A}^I}(x)\pi_{\tilde{B}^I}(x)\leq\pi_{\tilde{A}^I}(x)\mu_{\tilde{B}^I}(x) \quad \text{و}\\ 1, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که

$$0\leq\mu_{\tilde{A}^I-\tilde{B}^I}(x)+\nu_{\tilde{A}^I-\tilde{B}^I}(x)\leq 1$$
$$0\leq\mu_{\tilde{A}^I:\tilde{B}^I}(x)+\nu_{\tilde{A}^I:\tilde{B}^I}(x)\leq 1.$$

برای هر سه مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ و $\tilde{B}^I$ و $\tilde{C}^I$ داریم:

۱. $\tilde{A}^I-\tilde{A}^I\approx O^*$،

۲. $\tilde{A}^I:\tilde{A}^I\approx E^*$،

۳. $\tilde{A}^I-O^*\approx\tilde{A}^I$،

۴. $\tilde{A}^I:E^*\approx\tilde{A}^I$،

۵. $\tilde{A}^I-U^*\approx O^*$،

۶. $\tilde{A}^I : U^* \approx O^*$،

۷. $(\tilde{A}^I - \tilde{B}^I) + \tilde{B}^I \approx \tilde{A}^I$،

۸. $(\tilde{A}^I : \tilde{B}^I).\tilde{B}^I \approx \tilde{A}^I$،

۹. $(\tilde{A}^I - \tilde{B}^I) - \tilde{C}^I \approx (\tilde{A}^I - \tilde{C}^I) - \tilde{B}^I$،

۱۰. $(\tilde{A}^I : \tilde{B}^I) : \tilde{C}^I \approx (\tilde{A}^I : \tilde{C}^I) : \tilde{B}^I$،

۱۱. $\overline{\tilde{A}^I - \tilde{B}^I} \approx \overline{\tilde{A}^I} : \overline{\tilde{B}^I}$

۱۲. $\overline{\tilde{A}^I : \tilde{B}^I} \approx \overline{\tilde{A}^I} - \overline{\tilde{B}^I}$

واضح است که،

$$E^* - E^* \approx O^*,\ E^* - U^* \approx O^*,\ E^* - O^* \approx E^*,$$
$$U^* - E^* \approx O^*,\ U^* - U^* \approx O^*,\ U^* - O^* \approx U^*,$$
$$O^* - E^* \approx O^*,\ O^* - U^* \approx O^*,\ O^* - O^* \approx O^*,$$
$$E^* : E^* \approx E^*,\ E^* : U^* \approx O^*,\ E^* : O^* \approx O^*,$$
$$U^* : E^* \approx U^*,\ U^* : U^* \approx O^*,\ U^* : O^* \approx O^*,$$
$$O^* : E^* \approx O^*,\ O^* : U^* \approx O^*,\ O^* : O^* \approx O^*.$$

برای هر دو مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ و $\tilde{B}^I$،

۱. اگر $\tilde{B}^I \subseteq \tilde{A}^I$ و برای هر $x \in E$،

$$\nu_{\tilde{B}^I}(x) > ۰,$$

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x)\pi_{\tilde{B}^I}(x) \leq \pi_{\tilde{A}^I}(x)\nu_{\tilde{B}^I}(x),$$

آن‌گاه

$$\tilde{A}^I - \tilde{B}^I = \{\langle x, \frac{\mu_{\tilde{A}^I}(x) - \mu_{\tilde{B}^I}(x)}{۱ - \mu_{\tilde{B}^I}(x)}, \frac{\nu_{\tilde{A}^I}(x)}{\nu_{\tilde{B}^I}(x)}\rangle | x \in E\},$$

۲. اگر $\tilde{A}^I \subseteq \tilde{B}^I$ و برای هر $x \in E$،

$$\mu_{\tilde{B}^I}(x) > ۰,$$

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x)\pi_{\tilde{B}^I}(x) \leq \pi_{\tilde{A}^I}(x)\mu_{\tilde{B}^I}(x),$$

آن‌گاه

$$\tilde{A}^I : \tilde{B}^I = \{\langle x, \frac{\mu_{\tilde{A}^I}(x)}{\mu_{\tilde{B}^I}(x)}, \frac{\nu_{\tilde{A}^I}(x) - \nu_{\tilde{B}^I}(x)}{۱ - \nu_{\tilde{B}^I}(x)}\rangle | x \in E\}.$$

دو عملگر زیر نیز در [۲، ۳]، تعریف شده‌اند:

$$n.\tilde{A}^I = \{\langle x, 1-(1-\mu_{\tilde{A}^I}(x))^n, (\nu_{\tilde{A}^I}(x))^n\rangle \,|x \in E\}, \qquad (19.1)$$

$$A^n = \{\langle x, (\mu_{\tilde{A}^I}(x))^n, 1-(1-\nu_{\tilde{A}^I}(x))^n\rangle \,|x \in E\}, \qquad (20.1)$$

و n یک عدد طبیعی است. به عملگرهای بالا به ترتیب، ضرب یک مجموعه فازی شهودی در عدد n و توان n -ام یک مجموعه فازی شهودی گفته می‌شود.

۵.۱ تفاوت بین مجموعه‌های قطعی و فازی شهودی

می‌دانیم که برای هر دو مجموعه معمولی(قطعی) تساوی زیر برقرار است:

$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \qquad (21.1)$$

در [۴] ذکر شده است که (۲۱.۱) همواره برای مجموعه‌های فازی درست نیست. در اینجا، مواردی که (۲۱.۱) برای مجموعه‌های فازی شهودی برقرار است و مواردی که برقرار نیست را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنید برای یک مجموعه مرجع ثابت E ، $\tilde{A}^I$ و $\tilde{B}^I$ دو مجموعه فازی شهودی باشند به طوری که

$$\tilde{A}^I = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x)\rangle \,|x \in E\},$$
$$\tilde{B}^I = \{\langle x, \mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x)\rangle \,|x \in E\},$$

و توابع $\mu_{\tilde{A}^I}, \mu_{\tilde{B}^I} : E \to [0,1]$ و $\nu_{\tilde{A}^I}, \nu_{\tilde{B}^I} : E \to [0,1]$ ، به ترتیب، درجه عضویت و عدم‌عضویت عنصر $x \in E$ هستند .

فرض کنید برای هر $x \in E$,

$$0 \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) + \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le 1,$$

$$0 \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) + \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le 1.$$

آن‌گاه:

$$(\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I) \cap (\overline{\tilde{A}^I} \cup \overline{\tilde{B}^I}) = \{\langle x, \min(\max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)), \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))),$$
$$\max(\min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)))\rangle | x \in E\} \qquad (22.1)$$

و

$$(\overline{\tilde{A}^I} \cap \tilde{B}^I) \cup (\tilde{A}^I \cap \overline{\tilde{B}^I}) = \{\langle x, \max(\min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))),$$
$$\min(\max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x)), \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)))\rangle | x \in E\} \qquad (23.1)$$

اکنون، مواردی را که مجموعه‌های فازی شهودی در (۲۲.۱) و (۲۳.۱) بر هم منطبق می‌شوند و مواردی که یکی از مجموعه‌ها مشمول دیگری شده است را بررسی می‌کنیم.

بنابراین، باید رابطه بین عبارات زیر را بررسی کنیم.

$$
\begin{aligned}
Z_{1} &= \min(\max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)), \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))),\\
Z_{2} &= \max(\min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))),\\
Z_{3} &= \max(\min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x))),\\
Z_{4} &= \min(\max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x), \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x))).
\end{aligned}
$$

جدول زیر را در نظر می‌گیریم:

جدول ۱.۱:

رتبه بین $\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x)$	رابطه بین Z_2 و Z_1	رایطه بین Z_4 و Z_3
$\mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 \ge Z_2$	$Z_3 \le Z_4$
$\mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 \ge Z_2$	$Z_3 \le Z_4$
$\mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 \ge Z_2$	$Z_3 \le Z_4$
$\mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 \ge Z_2$	$Z_3 \le Z_4$
$\nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 \ge Z_2$	$Z_3 \le Z_4$
$\nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 \ge Z_2$	$Z_3 \le Z_4$
$\nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 \ge Z_2$	$Z_3 \le Z_4$
$\nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 \ge Z_2$	$Z_3 \le Z_4$
$\nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$
$\nu_{\tilde{B}^I}(x) \le \mu_{\tilde{A}^I}(x) \le \nu_{\tilde{A}^I}(x) \le \mu_{\tilde{B}^I}(x)$	$Z_1 = Z_2$	$Z_3 = Z_4$

از جدول ۱.۱ درستی شمول زیر را می‌بینیم:

$$(\overline{\tilde{A}^I} \cap \tilde{B}^I) \cup (\tilde{A}^I \cap \overline{\tilde{B}^I}) \subseteq (\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I) \cap (\overline{\tilde{A}^I} \cup \overline{\tilde{B}^I}) \qquad (۲۴.۱)$$

واضح است که شمول (۲۴.۱) برای مجموعه‌های فازی نیز معتبر است. شمول (۲۴.۱) مثالی از تفاوت بین مجموعه‌های قطعی و مجموعه‌های فازی شهودی (و نیز مجموعه‌های فازی) است.

۶.۱ مجموعه‌های افزونه فازی شهودی

یک مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I$ مجموعه افزونه فازی شهودی [6] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in E$ رابطه زیر را داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) \geq \nu_{\tilde{A}^I}(x). \qquad (۲۵.۱)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که خواص زیر برقرار هستند:

قضیه ۱.۶.۱. برای هر سه مجموعه فازی شهودی $\tilde{B}^I$ و $\tilde{A}^I$ و $\tilde{C}^I$ روابط زیر مجموعه‌های افزونه فازی شهودی هستند.

۱. $\tilde{A}^I \mapsto \tilde{A}^I$،

۲. $\tilde{A}^I \mapsto (\tilde{B}^I \mapsto \tilde{A}^I)$،

۳. $\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I \mapsto \tilde{A}^I$،

۴. $\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I \mapsto \tilde{B}^I$،

۵. $\tilde{A}^I \mapsto (\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I)$،

۶. $\tilde{B}^I \mapsto (\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I)$،

۷. $\tilde{A}^I \mapsto (\tilde{B}^I \mapsto (\tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I))$،

۸. $(\tilde{A}^I \mapsto \tilde{C}^I) \mapsto ((\tilde{B}^I \mapsto \tilde{C}^I) \mapsto ((\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I) \mapsto \tilde{C}^I))$،

۹. $\overline{\overline{\tilde{A}^I}} \mapsto \tilde{A}^I$،

۱۰. $(\tilde{A}^I \mapsto (\tilde{B}^I \mapsto \tilde{C}^I)) \mapsto ((\tilde{A}^I \mapsto \tilde{B}^I) \mapsto (\tilde{A}^I \mapsto \tilde{C}^I))$،

۱۱. $(\overline{\tilde{A}^I} \mapsto \overline{\tilde{B}^I}) \mapsto ((\overline{\tilde{A}^I} \mapsto \tilde{B}^I) \mapsto \tilde{A}^I)$.

[6] IFTS

برهان. قسمت (۸) را ثابت کنیم، موارد دیگر نیز به همین طریق ثابت می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&(\tilde{A}^I \mapsto \tilde{C}^I) \mapsto ((\tilde{B}^I \mapsto \tilde{C}^I) \mapsto ((\tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I) \mapsto \tilde{C}^I))\\
=&\{\langle x, \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{C}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x))\rangle \,|x \in E\}\\
&\mapsto (\{\langle x, \max(\nu_{\tilde{B}^I}(x), \mu_{\tilde{C}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x))\rangle \,|x \in E\}\\
&\mapsto (\{\langle x, \max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)), \min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))\rangle \,|x \in E\}\\
&\mapsto \{\langle x, \mu_{\tilde{C}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x)\rangle \,|x \in E\}))\\
=&\{\langle x, \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{C}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x))\rangle \,|x \in E\}\\
&\mapsto (\{\langle x, \max(\nu_{\tilde{B}^I}(x), \mu_{\tilde{C}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x))\rangle \,|x \in E\}\\
&\mapsto \{\langle x, \max(\mu_{\tilde{C}^I}(x), \min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x)),\\
&\min(\nu_{\tilde{C}^I}(x), \max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)))\rangle|x \in E\})\\
=&\{\langle x, \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{C}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x))\rangle|x \in E\}\\
&\mapsto \{\langle x, \max(\min(\mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x)), \mu_{\tilde{C}^I}(x),\\
&\quad \min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))), \min(\max(\nu_{\tilde{B}^I}(x), \mu_{\tilde{C}^I}(x)),\\
&\quad \nu_{\tilde{C}^I}(x), \max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)))\rangle|x \in E\}\\
&= \{\langle x, \max(\min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x)), \mu_{\tilde{C}^I}(x),\\
&\min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))), \min(\max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{C}^I}(x)),\\
&\max(\nu_{\tilde{B}^I}(x), \mu_{\tilde{C}^I}(x)), \nu_{\tilde{C}^I}(x), \max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)))\rangle|x \in E\}
\end{aligned}$$

از

$$\begin{aligned}
&\max(\min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x)), \mu_{\tilde{C}^I}(x),\\
&\min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x)))\\
&\quad \geq \max(\min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x)), \min(\mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{C}^I}(x)))\\
&\quad = \min(\nu_{\tilde{C}^I}(x), \max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)))\\
&\quad \geq \min(\max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{C}^I}(x)), \max(\nu_{\tilde{B}^I}(x), \mu_{\tilde{C}^I}(x)),\\
&\qquad \nu_{\tilde{C}^I}(x), \max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)))
\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که

$$(\tilde{A}^I \mapsto (\tilde{B}^I \mapsto \tilde{C}^I)) \mapsto ((\tilde{A}^I \mapsto \tilde{B}^I) \mapsto (\tilde{A}^I \mapsto \tilde{C}^I))$$

یک مجموعه افزونه فازی شهودی است. □

تعریف ۱.۶.۱. یک مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x)\rangle \mid x \in E\}$ از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را، عدد فازی شهودی نامیم اگر:

۱. $\tilde{A}^I$ نرمال و محدب باشد.

۲. $\mu_{\tilde{A}^I}$ نیمه پیوسته بالایی و $\nu_{\tilde{A}^I}$ نیمه پیوسته پایینی باشد.

۳. پشتیبان $\tilde{A}^I$ یعنی مجموعه $S(\tilde{A}^I) = \{x \in \mathbb{R};\ \mu_{\tilde{A}^I}(x) > 0$ و $\nu_{\tilde{A}^I}(x) \leq 1\}$ کران‌دار باشد.

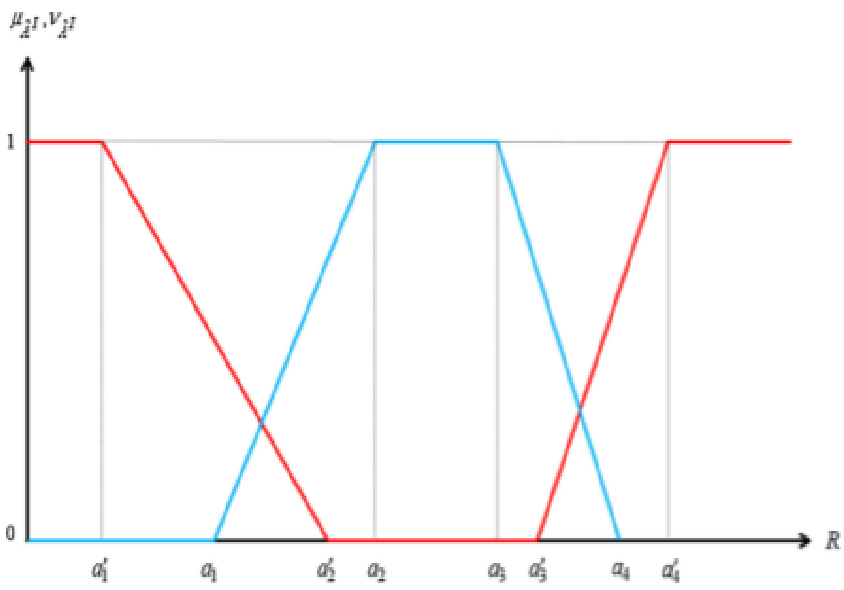
تعریف ۲.۶.۱. یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}^I$، یک عدد فازی شهودی خاص با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}^I}$ و تابع عدم‌عضویت $\nu_{\tilde{A}^I}$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 < x \leq a_2 \\ 1, & a_2 < x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3}, & a_3 \leq x < a_4 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{a'_2-x}{a'_2-a'_1}, & a'_1 < x \leq a'_2 \\ 0, & a'_1 < x \leq a'_3 \\ \frac{x-a'_3}{a'_4-a'_3}, & a'_3 \leq x < a'_4 \\ 1, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

که در آن $a'_1 \leq a_1 \leq a'_2 \leq a_2 \leq a_3 \leq a'_3 \leq a_4 \leq a'_4$. یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای با $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$ نشان داده می‌شود. (شکل ۲.۱ را ببینید).



شکل ۲.۱: عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$

تذکر ۱. اگر $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a'_1 = a'_2 = a'_3 = a'_4 = a$، آن‌گاه $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$ نشان‌دهنده عدد حقیقی a است.

تعریف ۳.۶.۱. عمل‌های ریاضی روی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای:

فرض کنید $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$ و $\tilde{B}^I = (b_1, b_2, b_3, b_4; b'_1, b'_2, b'_3, b'_4)$ دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای باشند. عمل‌های ریاضی بین $\tilde{A}^I$ و $\tilde{B}^I$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

جمع : $\tilde{A}^I \oplus \tilde{B}^I = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4; a'_1 + b'_1, a'_2 + b'_2, a'_3 + b'_3, a'_4 + b'_4)$

تفریق : $\tilde{A}^I \ominus \tilde{B}^I = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1; a'_1 - b'_4, a'_2 - b'_3, a'_3 - b'_2, a'_4 - b'_1)$

ضرب : $\tilde{A}^I \otimes \tilde{B}^I = (c_1, c_2, c_3, c_4; c'_1, c'_2, c'_3, c'_4)$

که در آن؛

$$c_1 = \min\{a_1b_1, a_1b_4, a_4b_1, a_4b_4\}, \quad c'_1 = \min\{a'_1b'_1, a'_1b'_4, a'_4b'_1, a'_4b'_4\},$$
$$c_2 = \min\{a_2b_2, a_2b_3, a_3b_2, a_3b_3\}, \quad c'_2 = \min\{a'_2b'_2, a'_2b'_3, a'_3b'_2, a'_3b'_3\},$$
$$c_3 = \max\{a_2b_2, a_2b_3, a_3b_2, a_3b_3\}, \quad c'_3 = \max\{a'_2b'_2, a'_2b'_3, a'_3b'_2, a'_3b'_3\},$$
$$c_4 = \max\{a_1b_1, a_1b_4, a_4b_1, a_4b_4\}, \quad c'_4 = \max\{a'_1b'_1, a'_1b'_4, a'_4b'_1, a'_4b'_4\}.$$

ضرب اسکالر:

۱. $k\tilde{A}^I = (ka_1, ka_2, ka_3, ka_4; ka'_1, ka'_2, ka'_3, ka'_4), \quad k > 0$

۲. $k\tilde{A}^I = (ka_4, ka_3, ka_2, ka_1; ka'_4, ka'_3, ka'_2, ka'_1), \quad k < 0.$

تعریف ۴.۶.۱. دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$ و $\tilde{B}^I = (b_1, b_2, b_3, b_4; b'_1, b'_2, b'_3, b'_4)$ را برابر گوییم و به صورت $\tilde{A}^I \approx \tilde{B}^I$ نشان می‌دهیم هرگاه،

$$a_1 = b_1 \ \& \ a_2 = b_2 \ \& \ a_3 = b_3 \ \& \ a_4 = b_4 \ \& \ a'_1 = b'_1 \ \& \ a'_2 = b'_2 \ \& \ a'_3 = b'_3 \ \& \ a'_4 = b'_4$$

تعریف ۵.۶.۱. عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$ نامنفی گفته می‌شود هرگاه $a'_1 \geq 0$

فرض کنید $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$ و $\tilde{B}^I = (b_1, b_2, b_3, b_4; b'_1, b'_2, b'_3, b'_4)$ دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای نامنفی باشند. ضرب تقریبی $\tilde{A}^I$ و $\tilde{B}^I$، چنین تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B}^I = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4; a'_1b'_1, a'_2b'_2, a'_3b'_3, a'_4b'_4)$$

اگر $a'_3 = a_3 = a_2 = a'_2$، عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3, a_4; a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$ نشان‌دهنده یک عدد فازی شهودی مثلثی است. و آن را به صورت $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3; a'_1, a_2, a'_3)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۶.۱. یک عدد فازی شهودی مثلثی $\tilde{A}^I$، یک عدد فازی شهودی با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}^I}$ و تابع عدم‌عضویت $\nu_{\tilde{A}^I}$ است که در آن

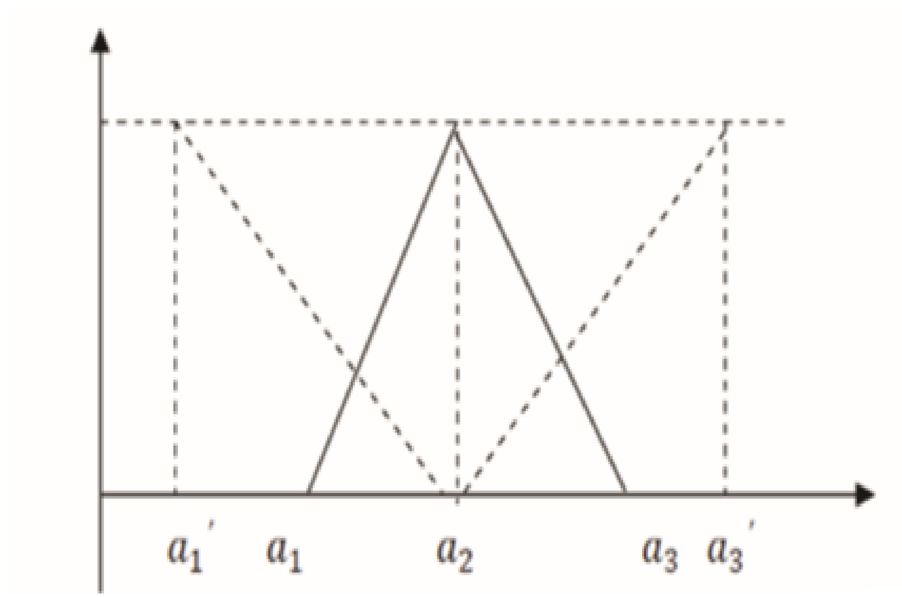
$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 < x \leq a_2 \\ 1, & x = a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2 \leq x < a_3 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a'_1}, & a'_1 < x \leq a_2 \\ 0, & x = a_2 \\ \frac{x-a_2}{a'_3-a_2}, & a_2 \leq x < a'_3 \\ 1, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و $a'_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a'_3$. این عدد فازی شهودی مثلثی با $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3, a'_1, a_2, a'_3)$ نشان داده می‌شود.

مجموعه همه اعداد فازی شهودی مثلثی با $IF(\mathbb{R})$ نشان داده می‌شود. عدد فازی شهودی مثلثی $\tilde{A}^I$ در شکل ۳.۱ نشان داده شده است.



شکل ۳.۱: عدد فازی شهودی مثلثی $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3; a'_1, a'_2, a'_3)$

تعریف ۷.۶.۱. عمل‌های ریاضی روی اعداد فازی شهودی مثلثی:

فرض کنید $\tilde{A}^I=(a_1,a_2,a_3;a'_1,a_2,a'_3)$ و $\tilde{B}^I=(b_1,b_2,b_3;b'_1,b_2,b'_3)$ دو عدد فازی شهودی مثلثی باشند، آن‌گاه تعریف می‌کنیم:

جمع : $\tilde{A}^I\oplus\tilde{B}^I=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3;a'_1+b'_1,a_2+b_2,a'_3+b'_3)$

تفریق : $\tilde{A}^I\ominus\tilde{B}^I=(a_1-b_3,a_2-b_2,a_3-b_1;a'_1-b'_3,a_2-b_2,a'_3-b'_1)$

ضرب : $\tilde{A}^I\otimes\tilde{B}^I=(l_1,l_2,l_3;l'_1,l_2,l'_3)$

که در آن، $l_1=\min\{a_1b_1,a_1b_3,a_3b_1,a_3b_3\}$، $l_3=\max\{a_1b_1,a_1b_3,a_3b_1,a_3b_3\}$، $l'_1=\min\{a'_1b'_1,a'_1b'_3,a'_3b'_1,a'_3b'_3\}$، $l'_3=\max\{a'_1b'_1,a'_1b'_3,a'_3b'_1,a'_3b'_3\}$، $l_2=a_2b_2$.

ضرب اسکالر:

$$1.\quad k\tilde{A}^I=(ka_1,ka_2,ka_3;ka'_1,ka_2,ka'_3),\ \ k>0,$$

$$2.\quad k\tilde{A}^I=(ka_3,ka_2,ka_1;ka'_3,ka_2,ka'_1),\ \ k<0.$$

تعریف ۸.۶.۱. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه تمام اعداد حقیقی باشد، عدد بازه‌ای $\bar{C}$، یک بازه بسته است که به صورت $[c_L,c_R]$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{C}=[c_L,c_R]=\{x:c_L\le x\le c_R \text{ و } c_L,c_R\in\mathbb{R}\},$$

که در آن c_L و c_R به ترتیب کران‌های پایین و بالای بازه $\bar{C}$ هستند. اگر $c_L=c_R$ آن گاه $\bar{C}$ به یک عدد حقیقی کاهش می‌یابد. یک بازه $\bar{C}$ را همچنین می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{C}=\langle c_c,c_w\rangle=\{x:c_c-c_w\le x\le c_c+c_w,x\in\mathbb{R}\},$$

c_c و c_w به ترتیب مرکز و عرض بازه $\bar{C}$ هستند و به صورت $c_c=\frac{c_L+c_R}{2}$ و $c_w=\frac{c_R-c_L}{2}$ تعریف می‌شوند. یک بازه همچنین می‌تواند به صورت یک سه‌تایی مرتب به صورت $\bar{C}=[c_L,c_c,c_R]$ نشان داده شود.

تعریف ۹.۶.۱. فرض کنید $\bar{C}=[c_L,c_R]$ و $\bar{D}=[d_L,d_R]$ دو بازه باشند. آن‌گاه جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ضرب اسکالر اعداد بازه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند:

جمع: $\bar{C}+\bar{D}=[c_L+d_L,c_R+d_R]$.

تفریق: $\bar{C}-\bar{D}=[c_L-d_R,c_R-d_L]$.

ضرب: $\bar{C}.\bar{D}=[\min(c_Ld_L,c_Ld_R,c_Rd_L,c_Rd_R),\max(c_Ld_L,c_Ld_R,c_Rd_L,c_Rd_R)]$.

تقسیم: $\bar{C}/\bar{D}=[\min(c_L/d_L,c_L/d_R,c_R/d_L,c_R/d_R),\max(c_L/d_L,c_L/d_R,c_R/d_L,c_R/d_R)]$.

که در آن $0\notin\bar{D}$.

ضرب اسکالر: برای هر k حقیقی

$$k\bar{C}=\begin{cases}[kc_L,kc_R], & k\ge 0\\ [kc_R,kc_L], & k\le 0\end{cases}$$

تعیین رابطه بین بازه‌ها: تعریف زیر را عمدتا برای مقایسه بازه‌ها در نظر می‌گیریم و کاربردهای بسیاری دارد.

تعریف ۱.۶.۱۰. رتبه $\leq_{LR}$ بین $\bar{C} = [c_L, c_R]$ و $\bar{D} = [d_L, d_R]$ با نماد $\bar{C} \leq_{LR} \bar{D}$ تعریف می‌شود هرگاه $c_L \leq d_L$ و $c_R \leq d_R$. به‌علاوه $\bar{C} <_{LR} \bar{D}$ هرگاه $\bar{C} \leq_{LR} \bar{D}$ و $\bar{C} \neq \bar{D}$.

این رابطه، اولویت تصمیم‌گیرنده برای انتخاب بهترین یا حداقل هزینه را نشان می‌دهد. به عنوان مثال اگر $\bar{C} <_{LR} \bar{D}$ پس $\bar{C}$ به $\bar{D}$ ترجیح داده می‌شود.

فصل ۲

مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی شهودی با توابع عضویت مختلف

۱.۲ مقدمه

این فصل به مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با محدودیت‌های مختلف در محیط فازی شهودی مثلثی پرداخته است. ابتدا مسئله را به یک مسئله برنامه‌ریزی تک‌هدفه آرمانی فازی تبدیل می‌کنیم. سپس با استفاده از انواع مختلف تابع عضویت (خطی و غیرخطی)، مسئله را به مسئله برنامه‌ریزی خطی/غیرخطی قطعی تبدیل می‌کنیم، و سپس با روش‌های برنامه‌ریزی قطعی مناسب آن را حل می‌کنیم. در آخر این روش را به کمک یک مثال عددی نشان می‌دهیم و فواید توابع عضویت مختلف را مورد بحث قرار خواهیم داد. مطالب این فصل از مرجع [۲۳] آمده است.

۲.۲ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۲ (تابع دقت). مفهوم یاگر [1] [۲۵] برای غیرفازی کردن یک عدد فازی می‌تواند به غیرفازی کردن یک عدد فازی شهودی مثلثی توسیع یابد. یاگر امید ریاضی تابع عضویت را با پیدا

[1] Yager

کردن بازه مورد انتظار برای یک عدد فازی مثلثی در نظر گرفت. به همین ترتیب، ما نیز امید ریاضی را برای تابع عدم عضویت در نظر می‌گیریم. در ادامه، به امید ریاضی، تابع معیار (امتیاز) می‌گوییم.

فرض کنید $\tilde{A}^I = (a_۱, a_۲, a_۳; a'_۱, a_۲, a'_۳)$ یک عدد فازی شهودی مثلثی باشد. تابع معیار برای تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}^I}$، با $S(\mu_{\tilde{A}^I})$ نشان داده می‌شود و به صورت $S(\mu_{\tilde{A}^I}) = \frac{a_۱+۲a_۲+a_۳}{۴}$ تعریف می‌شود. تابع معیار برای تابع عدم‌عضویت $\nu_{\tilde{A}^I}$، به صورت $S(\nu_{\tilde{A}^I}) = \frac{a'_۱+۲a_۲+a'_۳}{۴}$ تعریف می‌شود و با $S(\nu_{\tilde{A}^I})$ نشان داده می‌شود . اکنون تابع دقت عدد فازی شهودی $\tilde{A}^I$، که با $f(\tilde{A}^I)$ نمایش داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(\tilde{A}^I) = \frac{S(\mu_{\tilde{A}^I}) + S(\nu_{\tilde{A}^I})}{۲} = \frac{(a_۱ + ۲a_۲ + a_۳) + (a'_۱ + ۲a_۲ + a'_۳)}{۸}.$$

قضیه ۱.۲.۲. [۲۲] تابع دقت $f : IF(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ یک تابع خطی است.

برهان. فرض کنید $\tilde{A}^I = (a_۱, a_۲, a_۳; a'_۱, a_۲, a'_۳)$ و $\tilde{B}^I = (b_۱, b_۲, b_۳; b'_۱, b_۲, b'_۳)$ دو عدد فازی شهودی مثلثی باشند. بنابر تعریف مجموع دو عدد فازی شهودی مثلثی که در فصل ۱ بیان شد:

اگر $\lambda > ۰$

$$\lambda\tilde{A}^I \oplus \tilde{B}^I = (\lambda a_۱ + b_۱, \lambda a_۲ + b_۲, \lambda a_۳ + b_۳; \lambda a'_۱ + b'_۱, \lambda a_۲ + b_۲, \lambda a'_۳ + b'_۳)$$

اکنون با توجه به تعریف تابع دقت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(\lambda\tilde{A}^I \oplus \tilde{B}^I) &= \frac{[\lambda a_۱ + b_۱ + ۲(\lambda a_۲ + b_۲) + \lambda a_۳ + b_۳] + [\lambda a'_۱ + b'_۱ + ۲(\lambda a_۲ + b_۲) + \lambda a'_۳ + b'_۳]}{۸} \\ &= \frac{\lambda[(a_۱ + ۲a_۲ + a_۳) + (a'_۱ + ۲a_۲ + a'_۳)]}{۸} + \frac{(b_۱ + ۲b_۲ + b_۳) + (b'_۱ + ۲b_۲ + b'_۳)}{۸} \\ &= \lambda f(\tilde{A}^I) + f(\tilde{B}^I) \end{aligned}$$

اگر $\lambda < ۰$

$$\lambda\tilde{A}^I \oplus \tilde{B}^I = (\lambda a_۳ + b_۱, \lambda a_۲ + b_۲, \lambda a_۱ + b_۳; \lambda a'_۳ + b'_۱, \lambda a_۲ + b_۲, \lambda a'_۱ + b'_۳)$$

و داریم؛

$$\begin{aligned} f(\lambda\tilde{A}^I \oplus \tilde{B}^I) &= \frac{[\lambda a_۳ + b_۱ + ۲(\lambda a_۲ + b_۲) + \lambda a_۱ + b_۳] + [\lambda a'_۳ + b'_۱ + ۲(\lambda a_۲ + b_۲), \lambda a'_۱ + b'_۳]}{۸} \\ &= \frac{\lambda[(a_۳ + ۲a_۲ + a_۱) + (a'_۳ + ۲a_۲ + a'_۱)]}{۸} + \frac{(b_۱ + ۲b_۲ + b_۳) + (b'_۱ + ۲b_۲ + b'_۳)}{۸} \\ &= \lambda f(\tilde{A}^I) + f(\tilde{B}^I) \end{aligned}$$

لذا f تابعی خطی است. □

تعریف ۲.۲.۲. (رتبه بندی اعداد فازی شهودی مثلثی): فرض کنید $\tilde{A}^I = (a_۱, a_۲, a_۳; a'_۱, a_۲, a'_۳)$ و $\tilde{B}^I = (b_۱, b_۲, b_۳; b'_۱, b_۲, b'_۳)$ دو عدد فازی شهودی مثلثی باشند.

۱. $\tilde{A}^I \succsim \tilde{B}^I$ اگر $f(\tilde{A}^I) \geq f(\tilde{B}^I)$

۲. $\tilde{A}^I \precsim \tilde{B}^I$ اگر $f(\tilde{A}^I) \leq f(\tilde{B}^I)$

۳. $\tilde{A}^I \approx \tilde{B}^I$ اگر $f(\tilde{A}^I) = f(\tilde{B}^I)$

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $g : \mathbb{S} \to \mathbb{R}, \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ یک تابع حقیقی مقدار باشد. اگر g محدب باشد آن‌گاه $\{x : g(x) \leq c, \forall c \in \mathbb{R}\}$ یک مجموعه محدب است و اگر g مقعر باشد، آن‌گاه $\{x : g(x) \geq c, \forall c \in \mathbb{R}\}$ یک مجموعه محدب است.

تذکر ۲. واضح است که اگر g یک تابع محدب باشد، لزومی ندارد که $\{x : g(x) \geq c, \forall c \in \mathbb{R}\}$ یک مجموعه محدب باشد و اگر g یک تابع مقعر باشد، لزومی ندارد که $\{x : g(x) \leq c, \forall c \in \mathbb{R}\}$ یک مجموعه محدب باشد.

۳.۲ فرمول‌بندی مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی

در حالت کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} & \min \ Z = [Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_K] \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \ i = 1, 2, 3, \dots, m_1, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \ i = m_1 + 1, m_1 + 2, m_1 + 3, \dots, m_2, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ i = m_2 + 1, m_2 + 2, m_2 + 3, \dots, m, \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3, \dots, n, \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

که در آن $Z_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j, \ k = 1, 2, 3, \dots, K$.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید S_F ناحیه شدنی مسئله (۱.۲) باشد. نقطه $\bar{x}$ کارا یا جواب بهینه پارتو برای (۱.۲) گفته می‌شود اگر هیچ $x \in S_F$ وجود نداشته باشد به طوری که به ازای هر $Z_k(x) \leq Z_k(\bar{x}) \ , \ k = 1, 2, \dots, K$ و برای حداقل یک $j \in \{1, 2, \dots, K\}$، $Z_j(x) < Z_j(\bar{x})$.

تعریف ۲.۳.۲. نقطه $\bar{x} \in S_F$ جواب بهینه پارتو ضعیف برای مسئله (۱.۲) گفته می‌شود اگر هیچ $x \in S_F$ وجود نداشته باشد به طوریکه $Z_k(x) < Z_k(\bar{x}), \ k = 1, 2, \dots, K$

۴.۲ مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی شهودی

اگر ضرایب توابع هدف، متغیرهای تصمیم‌گیری و سمت راست محدودیت‌ها غیرقطعی و به طور خاص توسط اعداد فازی شهودی مثلثی معرفی شده باشند آن‌گاه مسئله (۱.۲) یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه کاملا فازی شهودی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
&\min\ \tilde{Z}^I = [\tilde{Z_۱}^I, \tilde{Z_۲}^I, \tilde{Z_۳}^I, \dots, \tilde{Z_K}^I]\\
s.t.\quad &\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a_{ij}}^I x_j \gtrsim\ \tilde{b_i}^I,\ i = ۱, ۲, ۳, \dots, m_۱,\\
&\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a_{ij}}^I x_j \lesssim \tilde{b_i}^I,\ i = m_۱ + ۱, m_۱ + ۲, m_۱ + ۳, \dots, m_۲,\\
&\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a_{ij}}^I x_j \approx\ \tilde{b_i}^I,\ i = m_۲ + ۱, m_۲ + ۲, m_۲ + ۳, \dots, m,\\
&x_j \geq ۰,\ j = ۱, ۲, ۳, \dots, n,
\end{aligned} \tag{۲.۲}$$

که در آن $\tilde{Z_k}^I \approx \sum_{j=۱}^{n} \tilde{c_{kj}}^I x_j,\ k = ۱, ۲, ۳, \dots, K$.

اکنون فرض کنیم که $\tilde{b_i}^I,\ i = ۱, ۲, ۳, \dots, m$ به فرم زیر باشند:

اعداد فازی شهودی چپ: $\tilde{b_i}^I = (b_i^l, b_i, b_i; b_i^{l'}, b_i, b_i), \quad i = ۱, ۲, ۳, \dots, m_۱$ برای محدودیت‌هایی که دارای نامساوی‌های از نوع " $\gtrsim$ " هستند، فازی بودن تنها در سمت چپ است.

اعداد فازی شهودی راست: $\tilde{b_i}^I = (b_i, b_i, b_i^r; b_i, b_i, b_i^{r'}),\ i = m_۱+۱, m_۱+۲, m_۱+۳, \dots, m_۲,$ برای محدودیت‌های که دارای نامساوی‌های از نوع " $\lesssim$ " هستند، فازی بودن تنها در سمت راست است و $\tilde{b_i}^I = (b_i^l, b_i, b_i^r; b_i^{l'}, b_i, b_i^{r'}),\ i = m_۲+۱, m_۲+۲, m_۲+۳, \dots, m$، زیرا برای محدودیت‌های از نوع تساوی فازی بودن ممکن است در هر دو طرف باشد.

با استفاده از تابع دقت که خطی است، مسئله (۲.۲) به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min\quad Z = [Z_۱, Z_۲, Z_۳, \dots, Z_K]\\
s.t.\quad &\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \geq\ b_i,\ i = ۱, ۲, ۳, \dots, m_۱,\\
&\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\ x_j \leq b_i,\ i = m_۱ + ۱, m_۱ + ۲, m_۱ + ۳, \dots, m_۲,\\
&\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\ x_j =\ b_i,\ i = m_۲ + ۱, m_۲ + ۲, m_۲ + ۳, \dots, m,\\
&x_j \geq ۰,\ j = ۱, ۲, ۳, \dots, n.
\end{aligned} \tag{۳.۲}$$

که در آن $Z_k = f(\tilde{Z}_k{}^I),\ k = ۱,۲,۳,\ldots,K$ و

$$b_i = f(\tilde{b}_i{}^I),\ a_{ij} = f(\tilde{a}_{ij}{}^I),\ i = ۱,۲,۳,\ldots,m,\ j = ۱,۲,\ldots,n.$$

قضیه ۱.۴.۲. [۲۱] یک جواب کارا برای مسئله (۳.۲)، یک جواب کارا برای مسئله (۲.۲) است.

بنابراین حل مدل مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی شهودی (۲.۲) به حل مدل مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی (۳.۲) منتهی می‌شود.

۵.۲ مسئله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه فازی شهودی

توجه داشته باشید که یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی تک‌هدفه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\min\ \tilde{Z}^I \\
s.t.\quad &\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a_{ij}}^I x_j \gtrsim\ \tilde{b_i}^I,\ i = ۱,۲,۳,\ldots,m_۱, \\
&\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a_{ij}}^I x_j \lesssim \tilde{b_i}^I,\ i = m_۱+۱, m_۱+۲, m_۱+۳,\ldots,m_۲, \\
&\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a_{ij}}^I x_j \approx\ \tilde{b_i}^I,\ i = m_۲+۱, m_۲+۲, m_۲+۳,\ldots,m, \\
&x_j \geq ۰,\ j = ۱,۲,۳,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۴.۲}$$

با استفاده از تابع دقت که خطی است، مسئله (۴.۲) به مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min\ Z, \\
s.t.\quad &\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \geq\ b_i,\ i = ۱,۲,۳,\ldots,m_۱, \\
&\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = m_۱+۱, m_۱+۲, m_۱+۳,\ldots,m_۲, \\
&\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j =\ b_i,\ i = m_۲+۱, m_۲+۲, m_۲+۳,\ldots,m, \\
&x_j \geq ۰,\ j = ۱,۲,۳,\ldots,n,
\end{aligned} \tag{۵.۲}$$

که در آن $Z_k = \sum_{j=۱}^{n} c_{kj} x_j,\ k = ۱,۲,۳,\ldots,K$.

قضیه ۱.۵.۲. یک جواب بهینه برای (۵.۲)، یک جواب بهینه برای (۴.۲) است.

بنابراین جواب بهینه یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی شهودی می‌تواند با استفاده از تابع دقت، و با تبدیل مسئله به مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی به دست آید. بنابراین، در بخش بعد روی حل مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی تمرکز می‌کنیم.

۶.۲ روش‌های حل

روش‌های مختلفی برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه وجود دارد. این روش‌ها به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند: روش‌های اسکالرسازی و روش‌های غیراسکالرسازی. این روش‌ها، مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه را به یک مسئله برنامه‌ریزی تک‌هدفه، یک دنباله از مسائل برنامه‌ریزی تک هدفه یا یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه دیگر تبدیل می‌کنند. براساس برخی پیش‌فرض‌ها، مجموعه جواب‌های این مسئله‌های جدید جواب‌های مسئله اصلی را نتیجه می‌دهند. روش‌های اسکالرسازی به صراحت از یک تابع اسکالرساز برای انجام یک تبدیل استفاده می‌کنند در حالی که روش‌های غیراسکالرسازی از ابزارهای دیگر استفاده می‌کنند. حل مسئله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه معمولا یک جواب برای مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بدست می‌دهد به طوری‌که برای به دست آوردن یک زیرمجموعه از جواب‌های مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، یک فرایند جواب تکراری مورد نیاز است. یک بررسی جامع برای این روش‌ها را می‌توان در [۱۰] یافت.

در اینجا ما روش اسکالرسازی که شامل فرموله کردن یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه مرتبط با مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه است را با استفاده از یک تابع اسکالرساز حقیقی مقدار که عموما یک تابع از توابع هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه است، اعمال می‌کنیم. در ابتدا، یک آرمان مناسب برای تک تک توابع هدف اختصاص می‌دهیم. بهترین راه برای تعیین یک آرمان، تعیین مقدار بهینه هر تابع هدف با توجه به مجموعه‌ای از محدودیت‌ها است و آن را مطلوب‌ترین یا قابل قبول‌ترین سطح تعیین‌شده برای هدف pام می‌نامیم و با L_p نمایش می‌دهیم. به این ترتیب، k جواب مختلف برای k مسئله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه پیدا می‌کنیم و با $\mathbb{S} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ نشان می‌دهیم. سپس مقادیر هر هدف را برای تمام عناصر $\mathbb{S}$ پیدا می‌کنیم. و ماکزیمم هرهدف Z_p را در $\mathbb{S}$ می‌یابیم.

فرض کنید $u_k = \max\{Z_k(X);\ X \in \mathbb{S}\},\ k = 1, 2, \dots, K$. u_k بدترین سطح قابل قبول دسترسی برای تابع هدف kام است. سپس مدل (۳.۲) به یک مسئله برنامه‌ریزی آرمانی تبدیل می‌شود، جایی که آرمان بدست آوردن جواب بهینه منحصربفرد g_k برای تابع هدف kام است. با این حال، برخی آستانه مجاز وجود دارد و سطح آستانه مجاز به وسیله حداکثر مقدار u_k مشخص می‌شود. مدل برنامه‌ریزی آرمانی فازی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
& Find \quad \{x_j,\ j=1,2,3,\dots,n\}, \\
s.t. \quad & Z_k \precsim \tilde{g}_k,\ k=1,2,3,\dots,K \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq\ b_i,\ i=1,2,3,\dots,m_1, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i=m_1+1,m_1+2,m_1+3,\dots,m_2, \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j =\ b_i,\ i=m_2+1,m_2+2,m_2+3,\dots,m, \\
& x_j \geq 0,\ j=1,2,3,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۶.۲}
$$

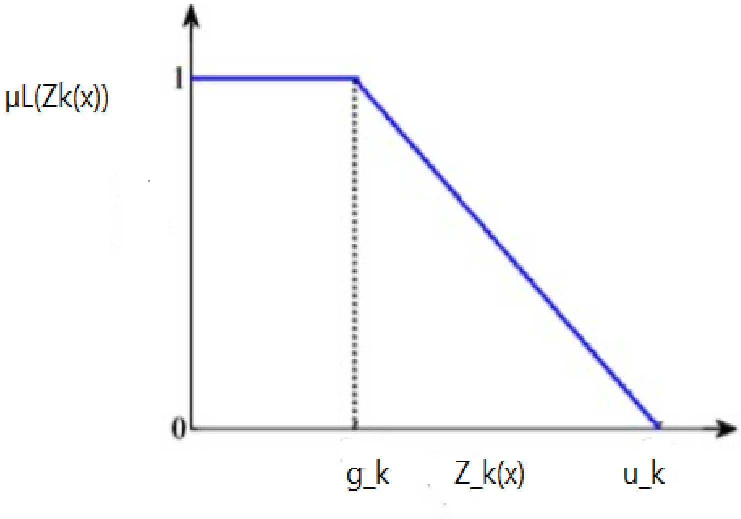
در اینجا $\tilde{g_k}$ آرمان فازی است، به این معنی که انحراف جزئی یا آستانه مجاز در آرمان اجازه داده می‌شود. برای تغییر مدل برنامه‌ریزی آرمانی فازی (۶.۲) به یک مدل برنامه‌ریزی قطعی، انواع مختلفی از توابع عضویت خطی و غیرخطی را تعریف می‌کنیم. در گذشته، یکی از پیش فرض‌های اصلی در حل مسئله برنامه‌ریزی ریاضی فازی شامل استفاده از توابع عضویت خطی برای تمام مجموعه‌های فازی استفاده شده در فرآیند تصمیم‌گیری بود. تقریب خطی بیشتر به دلیل سادگی آن استفاده می‌شود. تقریب خطی با ثابت کردن دو نقطه یعنی سطح بالا و پایین پذیرش متغیر تصمیم گیری تعریف می‌شود. اگر نظریه مجموعه فازی در نظر گرفته شود، پس چنین فرضی همیشه توجیه نمی‌شود. بنابراین یک توجیه در این فرض براساس فازی بودن داده‌ها مطلوب است. اگر نظریه مجموعه فازی برای مدل‌سازی فرایندهای تصمیم‌گیری حقیقی استفاده شود، و اگر ادعا شود که مدل‌های نتیجه مدل‌های واقعی هستند، سپس نوعی توجیه تجربی برای این فرض ضروری است. از این دیدگاه، ما چندین شکل خطی/غیرخطی را برای توابع عضویت در نظر گرفته‌ایم.

۱.۶.۲ تابع عضویت خطی

یک تابع عضویت خطی μ_L [۱۸] را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$
\mu_L(Z_k(x)) = \begin{cases} 1, & Z_k(x) \leq g_k, \\ \frac{u_k - Z_k(x)}{u_k - g_k}, & g_k \leq Z_p(x) \leq u_k, \\ 0, & Z_k(x) \geq u_k. \end{cases}
$$

این تابع یک تابع اکیدا نزولی مقعر و محدب برحسب $Z_k(x)$ در بازه $[g_k, u_k]$ است.(شکل ۱.۲ را مشاهده کنید)



شکل ۱.۲: تابع عضویت خطی

۲.۶.۲ تابع عضویت هذلولوی

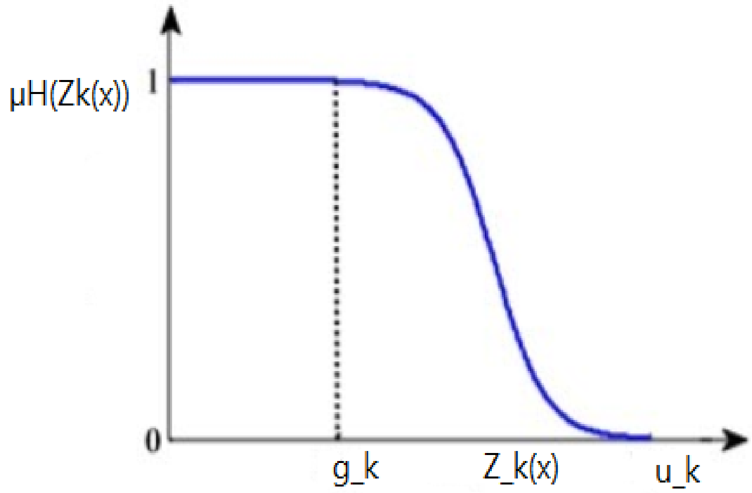
تابع عضویت هذلولوی [۱۷، ۱۸] یک تابع محدب در بخشی از مقادیر تابع هدف و مقعر روی قسمت باقیمانده است. هنگامی که تصمیم‌گیرنده در وضع بدتری نسبت به یک آرمان است، او تمایل دارد میزان رضایت بالاتری نسبت به آن هدف داشته باشد. شکل محدب این رفتار را در تابع عضویت ثبت می‌کند. از سوی دیگر، هنگامی که تصمیم‌گیرنده در وضع بهتری نسبت به یک آرمان است، او تمایل دارد رضایت کمتری نسبت به آن هدف داشته باشد. چنین رفتاری با استفاده از بخش مقعر تابع عضویت مدل‌سازی می‌شود. تابع فوق به شرح زیر است:

$$\mu_H(Z_k(x)) = \begin{cases} ۱, & Z_k(x) \leq g_k, \\ \frac{۱}{۲}\tanh\left(\left(\frac{u_k+g_k}{۲} - Z_k(x)\right)\alpha_k\right) + \frac{۱}{۲}, & g_k \leq Z_k(x) \leq u_k, \\ ۰, & Z_k(x) \geq u_k. \end{cases}$$

که در آن $\alpha_k = \frac{۶}{u_k - g_k}$. نمودار یک تابع عضویت هذلولوی را در شکل ۲.۲ مشاهده می‌کنید. این تابع عضویت دارای ویژگی‌های زیراست:

- μ_H یک تابع اکیدا نزولی نسبت به $Z_k(x)$ در بازه $[g_k, u_k]$ است؛
- $\mu_H(Z_k(x)) = \frac{۱}{۲} \Leftrightarrow Z_k(x) = \frac{۱}{۲}(u_k + g_k)$؛
- μ_H تابع اکیدا محدب نسبت به $Z_k(x)$ است برای $Z_k(x) \geq \frac{۱}{۲}(u_k + g_k)$ و تابع اکیدا مقعر نسبت به $Z_k(x)$ برای $Z_k(x) \leq \frac{۱}{۲}(u_k + g_k)$ می‌باشد.

- $\mu_H(Z_k(x))$ در شرط $1 > \mu_H(Z_k(x)) > 0$ برای $g_k < Z_k(x) < u_k$ صدق می‌کند و هنگامی که $Z_k(x) \to \infty$ و $Z_k(x) \to -\infty$، آن‌گاه به ترتیب به طور مجانبی به ۰ و ۱ میل می‌کند.



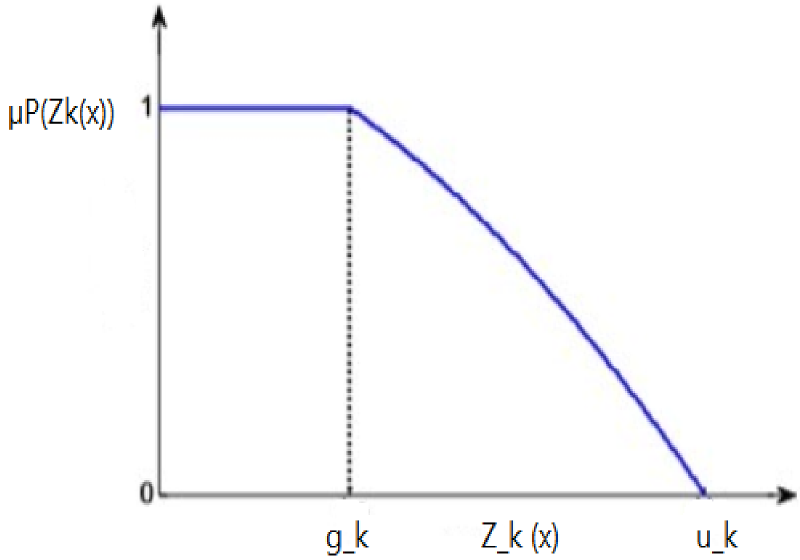
شکل ۲.۲: تابع عضویت هذلولوی

۳.۶.۲ تابع عضویت سهموی

تابع عضویت سهموی [۲۴، ۱۵] μ_P می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_P(Z_k(x)) = \begin{cases} 1, & Z_k \leq g_k \\ 1 - \frac{(Z_p - g_k)^2}{(u_k - g_k)^2}, & g_k \leq Z_k \leq u_k \\ 0, & Z_k \geq u_k \end{cases}$$

شکل یک تابع عضویت سهموی به صورت ۳.۲ می‌باشد.



شکل ۳.۲: تابع عضویت سهموی

لم ۱.۶.۲. تابع $\mu_P(Z_k(x))$ یک تابع مقعر در بازه $[g_k, u_k]$ است.

برهان. از آنجا که $Z_k(x)$ یک تابع خطی است، فرض می‌کنیم که $Z_k(x) = ax + by$ دو متغیره باشد. لذا ماتریس هسین $\mu_P(Z_k(x))$، به صورت $H(\mu_P) = \frac{-۲}{(u_k - g_k)^۲} \begin{pmatrix} a^۲ & ab \\ ab & b^۲ \end{pmatrix}$ است، که نیمه معین منفی است. این نشان می‌دهد که $\mu_P(Z_k(x))$ یک تابع مقعر است. به طور مشابه، می‌توان آن را برای تعداد بیشتری از متغیرها ثابت کرد. □

در نتیجه می‌توان تصمیم گرفت که چگونه مسئله (۶.۲) را توصیف کنیم تا تصمیم‌گیرنده بیشترین رضایت را از اهداف فازی داشته باشد. و این بدین معنی است که بالاترین میزان تعادل بین اهداف فازی وجود داشته باشد. فرض کنید $\lambda = \min\{\mu(Z_k(X)),\ k = ۱, ۲, \ldots, K\}$. لذا با توجه به [۲۹]، مدل (۶.۲) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda \\
s.t.\quad &\mu(Z_k(X)) \geq \lambda,\ k = ۱,۲,۳,\dots,K, \\
&\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \geq\ b_i,\ i = ۱,۲,۳,\dots,m_۱, \\
&\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = m_۱+۱, m_۱+۲, m_۱+۳,\dots,m_۲, \\
&\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j =\ b_i,\ i = m_۲+۱, m_۲+۲, m_۲+۳,\dots,m, \\
&x_j \geq ۰;\ j = ۱,۲,۳,\dots,n,\ ۰ \leq \lambda \leq ۱.
\end{aligned}
\tag{۷.۲}
$$

از قضیه ۲.۲.۲ ، لم ۱.۶.۲ و خواص تابع عضویت هذلولوی، نتیجه زیر را استنباط می‌کنیم.

نتیجه ۱.۶.۲. مجموعه‌های $\{X : \mu_L(Z_k(X)) \geq \lambda\}$، $\{X : \mu_P(Z_k(X)) \geq \lambda\}$ و $\{X : \mu_H(Z_k(X)) \geq \lambda, Z_k(X) \leq \frac{۱}{۲}(u_k + g_k)\}$ در بازه $[g_k, u_k]$ مجموعه‌های محدب هستند.

زیمرمن [۲۹] ثابت کرد که اگر مدل محدب (۷.۲) در یک نقطه x^* یک جواب بهینه منحصربه‌فرد داشته باشد، آن‌گاه x^* یک جواب بهینه پارتو برای (۳.۲) است. در حال حاضر، با استفاده از توابع عضویت مختلف، مسئله (۷.۲) به مسائل برنامه‌ریزی محدب قطعی زیر تبدیل می‌شود.

- با استفاده از تابع عضویت خطی:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda \\
s.t.\quad &u_k - Z_k(x) \geq \lambda(u_k - g_k),\ p = ۱,۲,۳,\dots,K, \\
&\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \geq\ b_i,\ i = ۱,۲,۳,\dots,m_۱, \\
&\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = m_۱+۱, m_۱+۲, m_۱+۳,\dots,m_۲, \\
&\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j =\ b_i,\ i = m_۲+۱, m_۲+۲, m_۲+۳,\dots,m, \\
&Z_k(x) \geq g_k,\quad k = ۱,۲,۳,\dots,K, \\
&\lambda \geq ۰,\ x_j \geq ۰,\ j = ۱,۲,۳,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{۸.۲}
$$

- با استفاده از تابع عضویت هذلولوی:

$$
\begin{aligned}
& \max \ \lambda \\
s.t. \quad & Z_k(x)\alpha_k + \beta = \frac{u_k + g_k}{۲}\alpha_k, \ k = ۱, ۲, ۳, \ldots, K, \\
& \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \geq \ b_i, \ i = ۱, ۲, ۳, \ldots, m_۱, \\
& \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \ i = m_۱ + ۱, m_۱ + ۲, m_۱ + ۳, \ldots, m_۲, \\
& \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j = \ b_i, \ i = m_۲ + ۱, m_۲ + ۲, m_۲ + ۳, \ldots, m, \\
& \tanh\beta \geq ۲\lambda - ۱, \tanh\beta \leq ۱, \\
& Z_k \leq ۱/۲(u_k + g_k), \\
& x_j \geq ۰, \ j = ۱, ۲, ۳, \ldots, n; \ \lambda \geq ۰.
\end{aligned}
\tag{۹.۲}
$$

- با استفاده از تابع عضویت سهموی:

$$
\begin{aligned}
& \max \ \lambda \\
s.t. \quad & (Z_k - g_k)^۲ + \lambda\left((u_k - g_k)^۲\right) \leq (u_k - g_k)^۲, \ k = ۱, ۲, ۳, \ldots, K, \\
& \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \geq \ b_i, \ i = ۱, ۲, ۳, \ldots, m_۱, \\
& \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \ i = m_۱ + ۱, m_۱ + ۲, m_۱ + ۳, \ldots, m_۲, \\
& \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j = \ b_i, \ i = m_۲ + ۱, m_۲ + ۲, m_۲ + ۳, \ldots, m, \\
& Z_k \leq u_k, \quad k = ۱, ۲, ۳, \ldots, K, \\
& \lambda \geq ۰, \ x_j \geq ۰, \ j = ۱, ۲, ۳, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{۱۰.۲}
$$

مدل‌های (۱۰.۲)- (۸.۲) مسائل برنامه‌ریزی محدب هستند که می‌توانند توسط الگوریتم‌های مناسب یا بسته‌های نرم‌افزاری حل شوند.

۷.۲ الگوریتم حل

تمام فرایندهای حل ارائه شده در بخش قبل در یک الگوریتم به صورت زیر خلاصه شده است:

- گام ۱: مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه را با استفاده از اعداد فازی شهودی مثلثی مدل کنید.
- گام ۲: با استفاده از تابع دقت، مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی شهودی را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه تبدیل کنید.
- گام ۳: جواب بهینه هر مسئله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه را بیابید. مجموعه جواب را با $\mathbb{S}$ نشان دهید.
- گام ۴: مقادیر تمام توابع هدف را در همه نقاط $\mathbb{S}$ پیدا کنید.
- گام ۵: مقدار بهینه g_k برای تابع هدف kام را به عنوان مقدار آرمان تابع هدف kام انتخاب کنید.
- گام ۶: u_k یا همان ماکزیمم مقدار تابع هدف kام را بر روی $\mathbb{S}$ بیابید. یعنی،
  $u_k = \max\{Z_k(X);\ X \in \mathbb{S}\},\ k = ۱, ۲, \ldots, K$.
- گام ۷: مدل برنامه‌ریزی آرمانی را به صورت (۶.۲) تعیین کنید.
- گام ۸: از تابع عضویت مناسب استفاده کنید و با استفاده از (۱۰.۲) -(۸.۲)، مدل را به مدل برنامه‌ریزی قطعی برای توابع عضویت مختلف تبدیل کنید.
- گام ۹: با استفاده از روش‌های مناسب یا بسته‌های نرم‌افزاری، مسئله برنامه‌ریزی محدب قطعی را حل کنید.

۸.۲ مثال عددی

مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی شهودی زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
\min\ & \tilde{Z}_۱^{\,I} = \tilde{۵}^I x_۱ \oplus \tilde{۳}^I x_۲ \\
\min\ & \tilde{Z}_۲^{\,I} = \tilde{۲}_a^{\,I} x_۱ \oplus \tilde{۷}^I x_۲ \\
s.t.\ & \tilde{۲}_b^{\,I} x_۱ \oplus \tilde{۴}^I x_۲ \geq \tilde{۲۵}^{\,I}, \\
& \tilde{۱}_a^{\,I} x_۱ \oplus \tilde{۱}_b^{\,I} x_۲ \geq \tilde{۱۰}^{\,I}, \\
& \tilde{۴}^I x_۱ \oplus \tilde{۵}^I x_۲ \leq \tilde{۵۰}^{\,I}, \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰.
\end{aligned}
\tag{۱۱.۲}
$$

در اینجا پارامترهای برآوردشده توسط تصمیم‌گیرنده به شرح زیر است:

$$\tilde{۲}_b^I = (۱/۵, ۲, ۲; ۱, ۲, ۲),\ \tilde{۱}_a^I = (۰/۵, ۱, ۱; ۰/۲, ۱, ۱/۵),\ \tilde{۱}_b^I = (۱, ۱, ۱; ۰/۵, ۱, ۲),$$
$$\tilde{۷}^I = (۷, ۷, ۷/۵; ۶, ۷, ۸),\ \tilde{۴}^I = (۳, ۴, ۴; ۲, ۴, ۴), \tilde{۵۰}^I = (۵۰, ۵۰, ۵۵; ۵۰, ۵۰, ۶۰),$$
$$\tilde{۵}^I = (۴, ۵, ۶; ۴, ۵, ۷),\ \tilde{۳}^I = (۳, ۳, ۴; ۳, ۳, ۴/۵),\ \tilde{۲}_a^I = (۲, ۲, ۳; ۲, ۲, ۴),$$
$$\tilde{۲۵}^I = (۲۲, ۲۵, ۲۵; ۱۸, ۲۵, ۲۵),\ \tilde{۱۰}^I = (۹, ۱۰, ۱۰; ۸, ۱۰, ۱۰).$$

با استفاده از تابع دقت ارائه شده در تعریف ۱.۲.۲، مسئله (۱۱.۲) معادل مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی زیر است:

$$\begin{aligned} & \min\ Z_۱ = ۵/۱۲۵\ x_۱ + ۳/۳۳\ x_۲ \\ & \min\ Z_۲ = ۲/۳۷\ x_۱ + ۶/۲\ x_۲ \\ s.t.\quad & ۱/۸\ x_۱ + ۳/۶۲\ x_۲ \geq ۲۳/۷۵, \\ & ۰/۹\ x_۱ + ۱/۰۶\ x_۲ \geq ۹/۶, \\ & ۳/۶۲\ x_۱ + ۵/۱۲۵\ x_۲ \leq ۵۱/۸, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

با حل مسئله (۱۲.۲) به عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفه، جواب‌های زیر را داریم:

$$X_۱ = (۰, ۹/۰۵۶),\ g_۱ = ۳۰/۱۵,\ u_۱ = ۶۷/۵۹,$$
$$X_۲ = (۱۳/۱۹, ۰),\ g_۲ = ۳۱/۲۶ \text{ و } u_۲ = ۵۶/۱۴.$$

اکنون مسئله (۱۱.۲) معادل با مدل برنامه‌ریزی آرمانی فازی زیر است:

$$\begin{aligned} & Find\ \{x_j : j = ۱, ۲\} \\ s.t.\quad & ۵/۱۲۵\ x_۱ + ۳/۳۳\ x_۲ \precsim \widetilde{۳۰/۱۵}^I, \\ & ۲/۳۷\ x_۱ + ۶/۲\ x_۲ \precsim \widetilde{۳۱/۲۶}^I, \\ & ۱/۸\ x_۱ + ۳/۶۲\ x_۲ \geq ۲۳/۷۵, \\ & ۰/۹\ x_۱ + ۱/۰۶\ x_۲ \geq ۹/۶, \\ & ۳/۶۲\ x_۱ + ۵/۱۲۵\ x_۲ \leq ۵۱/۸, \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

اکنون از توابع عضویت مختلف استفاده می‌کنیم و با استفاده از (۱۰.۲) -(۸.۲)، مدل را به مدل برنامه‌ریزی قطعی برای توابع عضویت مختلف تبدیل می‌کنیم.

• مدل برنامه‌ریزی قطعی مسئله مفروض با استفاده از تابع عضویت خطی:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda\\
s.t.\quad & ۶۷٫۵۹ - (۵٫۱۲۵x_{۱} + ۳٫۳۳x_{۲}) \geq \lambda(۶۷٫۵۹ - ۳۰٫۱۵)\\
& ۵۶٫۱۴ - (۲٫۳۷x_{۱} + ۶٫۲x_{۲}) \geq \lambda(۵۶٫۱۴ - ۳۱٫۲۶)\\
& ۱٫۸\ x_{۱} + ۳٫۶۲\ x_{۲} \geq ۲۳٫۷۵,\\
& ۰٫۹\ x_{۱} + ۱٫۰۶\ x_{۲} \geq ۹٫۶,\\
& ۳٫۶۲\ x_{۱} + ۵٫۱۲۵\ x_{۲} \leq ۵۱٫۸,\\
& ۵٫۱۲۵x_{۱} + ۳٫۳۳x_{۲} \geq ۳۰٫۱۵,\\
& ۲٫۳۷x_{۱} + ۶٫۲x_{۲} \geq ۳۱٫۲۶,\\
& x_{۱}, x_{۲} \geq ۰, \lambda \geq ۰.
\end{aligned}
\tag{۱۴.۲}
$$

• مدل برنامه‌ریزی قطعی مسئله مفروض با استفاده از تابع عضویت سهموی:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda\\
s.t.\quad & (۵٫۱۲۵x_{۱} + ۳٫۳۳x_{۲} - ۳۰٫۱۵)^{۲} + \lambda(۶۷٫۵۹ - ۳۰٫۱۵)^{۲} \leq (۶۷٫۵۹ - ۳۰٫۱۵)^{۲}\\
& (۱٫۸x_{۱} + ۳٫۶۲x_{۲} - ۳۱٫۲۶)^{۲} + \lambda(۵۶٫۱۴ - ۳۱٫۲۶)^{۲} \leq (۵۶٫۱۴ - ۳۱٫۲۶)^{۲}\\
& ۱٫۸\ x_{۱} + ۳٫۶۲\ x_{۲} \geq ۲۳٫۷۵,\\
& ۰٫۹\ x_{۱} + ۱٫۰۶\ x_{۲} \geq ۹٫۶,\\
& ۳٫۶۲\ x_{۱} + ۵٫۱۲۵\ x_{۲} \leq ۵۱٫۸,\\
& ۵٫۱۲۵x_{۱} + ۳٫۳۳x_{۲} \leq ۶۷٫۵۹,\\
& ۱٫۸\ x_{۱} + ۳٫۶۲\ x_{۲} \leq ۵۶٫۱۴,\\
& x_{۱}, x_{۲} \geq ۰, \lambda \geq ۰.
\end{aligned}
\tag{۱۵.۲}
$$

• مدل برنامه‌ریزی قطعی مسئله مفروض با استفاده از تابع عضویت هذلولوی:

$$\begin{aligned}
& \max \ \lambda \\
s.t. \quad & ۰/۱۶(۵/۱۲۵x_۱ + ۳/۳۳x_۲) + \beta = ۴۳/۱۴۵(۰/۱۶) \\
& ۰/۲۴۱(۱/۸\ x_۱ + ۳/۶۲x_۲) + \beta = ۰/۲۴۱(۴۳/۷) \\
& ۱/۸\ x_۱ + ۳/۶۲\ x_۲ \geq ۲۳/۷۵, \\
& ۰/۹\ x_۱ + ۱/۰۶\ x_۲ \geq ۹/۶, \\
& ۳/۶۲\ x_۱ + ۵/۱۲۵\ x_۲ \leq ۵۱/۸, \\
& \tanh\beta \geq ۲\lambda - ۱, \\
& \tanh\beta \leq ۱, \\
& ۵/۱۲۵x_۱ + ۳/۳۳x_۲ \leq ۴۳/۱۴۵, \\
& ۱/۸\ x_۱ + ۳/۶۲x_۲ \leq ۴۳/۷, \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰, \lambda \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

با استفاده از مدل‌های (۱۶.۲) -(۱۴.۲) و حل با نرم‌افزار Lingo ، جواب مسئله (۱۱.۲) در جدول ۱.۲ خلاصه شده است.

جدول ۱.۲: جواب‌ها

توابع عضویت	جواب‌ها	مقادیر هدف	انحراف از $(L_۱, L_۲)$	λ
خطی	$x_۱ = ۴/۹۴,\ x_۲ = ۴/۱$	$(۳۸/۹۷, ۳۷/۱۲)$	$(۸/۸۲, ۵/۸۶)$	۰/۷۶
هذلولوی	$x_۱ = ۴/۹۷,\ x_۲ = ۴/۳۱$	$(۳۹/۸۲, ۳۸/۵)$	$(۹/۶۷, ۷/۲۴)$	۱
سهموی	$x_۱ = ۵/۶۲,\ x_۲ = ۴/۲۷$	$(۴۳/۰۲, ۳۹/۷۹)$	$(۱۲/۸۷, ۸/۵۳)$	۰/۸۸

در جدول ۱.۲ مشاهده می‌کنیم که برای مسئله عددی داده شده، جواب‌ها در مورد تابع عضویت هذلولوی بهتراست. بنابراین، کارایی مدل‌ها در اصطلاح سطح رضایت‌مندی یا سطح دسترسی تصمیم‌گیرنده می‌تواند به ترتیب زیر قرار گیرد: هذلولوی >سهموی>خطی.

فصل ۳

مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه در محیط فازی شهودی

۱.۳ مقدمه

هدف این فصل، ارائه یک الگوریتم برای حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی در دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه است. ماهیت متضاد اهداف مختلف با تعریف توابع عضویت مطابق با آن در محیط مجموعه فازی شهودی سهموی مورد بررسی قرارگرفته است و لذا مسئله به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه سهموی [1] تبدیل می‌شود. در این روش برای هر هدف یک تابع عضویت و عدم‌عضویت در نظر گرفته شده است. کاربردهای این روش در حمل‌ونقل و نیز در سیستم‌های تولید ارائه می‌شود و با روش‌های معمول موجود در مراجع پیشین مقایسه می‌شود. همانطور که نشان داده شده است، جواب‌های به دست آمده از روش پیشنهاد شده برتر از بهترین جواب‌های موجودی است که در مراجع پیشین گزارش شده است. علاوه‌براین، نتایج تجربی نیز نشان می‌دهد که برای این نوع مسائل ، روش پیشنهادی می‌تواند جواب‌های بهتری نسبت به آنچه که با استفاده از الگوریتم‌های فعلی به‌دست آمده است، ارائه دهد. مطالب این فصل از مرجع [۹] آورده شده است.

[1] PMONLPP

۲.۳ مقدمات

تعریف ۱.۲.۳. مقدار نافازی یا تابع دقت: نافازی کردن مقادیر فازی منجر به ارائه مقادیر قطعی می‌شود. این موضوع در بعضی از برنامه‌های کاربردی مانند سخت‌افزار که در آن عملیات سیستم به تبادل اطلاعات قطعی بستگی دارد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای غیرفازی‌سازی، تعدادی از روش‌ها در مراجع پیشین پیشنهاد شده است (راس[۲۰].) روش‌های مرکز ثقل و ماکزیمم به طور گسترده‌تری در میان آن‌ها استفاده می‌شود. در این فصل، برای پیدا کردن مقدار نافازی اعداد فازی سهموی یا همان تابع دقت f، از روش مرکز ثقل استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f = \frac{\int_x x\mu_{\tilde{A}^p}(x)dx}{\int_x \mu_{\tilde{A}^p}(x)dx},$$

که در آن x متغیر خروجی است و $\mu_{\tilde{A}^p}$ تابع عضویت $\tilde{A}^p$ است.

$$\begin{aligned}
\int_x \mu_{\tilde{A}^p}(x)dx &= \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^۲ dx + \int_b^c \left(\frac{c-x}{c-b}\right)^۲ dx \\
&= \frac{۱}{(b-a)^۲}\left[\frac{(x-a)^۳}{۳}\right]_a^b + \frac{۱}{(c-b)^۲}\left[\frac{(c-x)^۳}{-۳}\right]_b^c \\
&= \frac{۱}{۳}[(b-a)+(c-b)] = \frac{۱}{۳}(c-a).
\end{aligned}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
\int_x x\mu_{\tilde{A}^p}(x)dx &= \int_a^b x\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^۲ dx + \int_b^c x\left(\frac{c-x}{c-b}\right)^۲ dx \\
&= \frac{(b-a)}{۱۲}(۳b+a) + \frac{(c-b)}{۱۲}(۳b+c) = \frac{(c-a)}{۱۲}(a+۲b+c).
\end{aligned}$$

لذا تابع دقت f برای عدد فازی سهموی $\tilde{A}^p = (a,b,c)$ به صورت زیر است:

$$f(\tilde{A}^p) = \frac{(a+۲b+c)}{۴}$$

قضیه ۱.۲.۳. تابع دقت یک تابع خطی است.

برهان. فرض کنید $\tilde{A}^p = (a_۱, b_۱, c_۱)$ و $\tilde{B}^p = (a_۲, b_۲, c_۲)$ دو عدد فازی سهموی باشند.

برای $\lambda > ۰ \in \mathbb{R}$ ، داریم

$$\lambda\tilde{A}^p \oplus \tilde{B}^p = (\lambda a_۱ + a_۲, \lambda b_۱ + b_۲, \lambda c_۱ + c_۲).$$

$$\begin{aligned}
f(\lambda\tilde{A}^p \oplus \tilde{B}^p) &= \frac{\lambda a_۱ + a_۲ + ۲(\lambda b_۱ + b_۲) + \lambda c_۱ + c_۲}{۴} \\
&= \frac{\lambda(a_۱ + ۲b_۱ + c_۱) + (a_۲ + ۲b_۲ + c_۲)}{۴} = \lambda f(\tilde{A}^p) + f(\tilde{B}^p)
\end{aligned}$$

برای $\lambda < ۰ \in \mathbb{R}$ ، داریم

$$\lambda\tilde{A}^p \oplus \tilde{B}^p = (\lambda c_۱ + a_۲, \lambda b_۱ + b_۲, \lambda a_۱ + c_۲).$$

به علاوه

$$f(\lambda\tilde{A}^p \oplus \tilde{B}^p) = \frac{\lambda c_۱ + a_۲ + ۲(\lambda b_۱ + b_۲) + \lambda a_۱ + c_۲}{۴}$$
$$= \frac{\lambda(c_۱ + ۲b_۱ + a_۱) + (a_۲ + ۲b_۲ + c_۲)}{۴} = \lambda f(\tilde{A}^p) + f(\tilde{B}^p)$$

از این‌رو، f یک تابع خطی است. □

تعریف ۲.۲.۳. برای هر دو عدد فازی سهموی $\tilde{B}^p$ و $\tilde{A}^p$ رتبه می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

۱. $\tilde{A}^p \succsim \tilde{B}^p$ اگر $f(\tilde{A}^p) \geq f(\tilde{B}^p)$.

۲. $\tilde{A}^p \succ \tilde{B}^p$ اگر $f(\tilde{A}^p) > f(\tilde{B}^p)$.

۳. $\tilde{A}^p \approx \tilde{B}^p$ اگر $f(\tilde{A}^p) = f(\tilde{B}^p)$.

۳.۳ مدل‌سازی

یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه قطعی می‌تواند به صورت زیر مدل شود:

$$\begin{aligned} & \min\ \phi_i(x),\ ۱ \leq i \leq l' \\ & \max\ \phi_i(x),\ l'+۱ \leq i \leq l \\ s.t. \quad & \Psi_j(x) \leq c_j,\ ۱ \leq j \leq r' \\ & \Psi_j(x) \geq c_j,\ r'+۱ \leq j \leq r'' \\ & \Psi_j(x) = c_j,\ r''+۱ \leq j \leq r \\ & x \geq ۰, \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

که در آن $\phi_i(x), ۱ \leq i \leq l$ و $\Psi_j(x), ۱ \leq j \leq r$ توابع حقیقی مقدار خطی یا غیرخطی هستند و x یک n تایی است. و فرض کنید

$$\phi_i(x) = \sum_{k=۱}^{K_i} a_{ik} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\beta_m},\ ۱ \leq i \leq l \quad \text{و} \quad \Psi_j(x) = \sum_{s=۱}^{S_j} b_{js} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m},\ ۱ \leq j \leq r.$$

تعریف ۱.۳.۳. جواب بهینه کامل: فرض کنید S مجموعه همه جواب‌های شدنی مسئله (۱.۳) باشد. $x^* \in S$ جواب بهینه کامل آن گفته می‌شود، هرگاه برای هر $x \in S$، داشته باشیم $\phi_i(x^*) \leq \phi_i(x);\ ۱ \leq i \leq l'$ و $\phi_i(x^*) \geq \phi_i(x);\ l'+۱ \leq i \leq l$.

با این حال، هنگامی که در یک مسئله بیش از یک هدف وجود دارد، جواب بهینه کامل به ندرت امکان‌پذیر است. لذا مفهوم بهینه‌سازی پارتو یا جواب توافقی مطرح می‌شود که در زیر تعریف شده‌است.

تعریف ۲.۳.۳. جواب بهینه - پارتو: برای یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه (۱.۳)، یک جواب شدنی $x^* \in S$ جواب بهینه پارتو یا بهینه توافقی گفته می‌شود اگر هیچ جواب شدنی دیگر xای موجود نباشد به طوریکه $\phi_i(x) \leq \phi_i(x^*),\ 1 \leq i \leq l'$ و $\phi_i(x) \geq \phi_i(x^*),\ l'+1 \leq i \leq l$ با حداقل یک نامساوی اکید.

براساس جواب پارتو، یک تصمیم‌گیرنده ممکن است بنابر اولویت خود انتخاب کند. همچنین به سبب پیچیدگی دنیای واقعی، در بسیاری از موقعیت‌های کاربردی تصمیم‌گیرندگان غالبا در تعیین پارامترها با عدم‌قطعیت مواجه می‌شوند. این اشتباه یاعدم‌قطعیت اجتناب‌ناپذیر است و از این‌رو داده‌ها تمام وقت دقیق نیستند و برآورد می‌شوند. این ابهامات عمدتا ناشی از اشتباهات در قضاوت ، فقدان شواهد، اطلاعات ناکافی و شرایط محیطی، دخالت همه افراد مربوط، عدم‌آگاهی بازار فعلی، عدم‌اطلاع مشتریان و غیره بوجود می‌آید. برخی از شرایط زمان واقعی که ممکن است چنین اشتباهی را در سیستم‌های مختلف حمل‌ونقل بوجود آورد به شرح زیر است:

- یک محصول برای اولین بار به یک نقطه مصرف منتقل می‌شود و تصمیم‌گیرنده در مورد هزینه حمل‌ونقل بسیار مطمئن نیست.
- تغییرات ناگهانی در شرایط محیطی مانند باران، طوفان یا شرایط بد جاده‌ای، ترافیک، تغییرات جاده‌ای و غیره، زمان بیشتری را برای حمل‌ونقل بوجود می‌آورند که باعث تغییر غیرمنتظره در هزینه حمل‌ونقل و همچنین زمان است.
- عدم‌اطمینان تصمیم‌گیرنده در خصوص سهام به علت خطای تخمین یا اطلاعات ناکافی و غیره.
- راه‌های مختلف و یا روش‌های متفاوت حمل‌ونقل باعث تغییر در هزینه و زمان می‌شود.
- تغییر در حالت بارگیری محموله.
- کمبود یک محصول با تقاضای بالا.
- تغییر غیرمنتظره در قیمت سوخت یا مواد خام وغیره.
- عدم‌اطمینان در مورد تقاضای محصول تازه راه‌اندازی شده.
- تقاضای محصولات فصلی در هر فصل متفاوت است.
- تولید با شرایط دسترسی مواد خام و کارگر، کارکرد مناسب ماشین‌آلات و غیره متفاوت است.

یک مدل بهینه‌سازی زمانی می‌تواند واقع‌گرایانه‌تر باشد، و به فرایند تصمیم‌گیری انسانی نزدیک‌تر شود که پارامترهای آن قابل انعطاف باشد. از این‌رو، مدل بهینه‌سازی با منطق فازی ارائه می‌گردد. لذا مسئله (۱.۳)، را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی فازی مطرح می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\min\ \tilde{\phi}_i(x),\ 1 \le i \le l' \\
&\max\ \tilde{\phi}_i(x),\ l'+1 \le i \le l \\
&s.t. \\
&\tilde{\Psi}_j(x) \precsim \tilde{c}_j,\ 1 \le j \le r' \\
&\tilde{\Psi}_j(x) \succsim \tilde{c}_j,\ r'+1 \le j \le r'' \\
&\tilde{\Psi}_j(x) \approx \tilde{c}_j,\ r''+1 \le j \le r \\
&x \ge 0,
\end{aligned} \tag{۲.۳}$$

که در آن $\tilde{\phi}_i(x); 1 \le i \le l$ و $\tilde{\Psi}_j(x);\ 1 \le j \le r$ و $\tilde{c}_j$ اعداد فازی در نظر گرفته شده‌اند.
در این فصل، از اعداد فازی سهموی برای نشان دادن عدم‌قطعیت استفاده می‌کنیم. و فرض کنید

$$\tilde{\phi}_i(x) = \sum_{k=1}^{K_i} \tilde{a}_{ik}^p \prod_{m=1}^n x_m^{\beta_m},\ 1 \le i \le l \quad \text{و} \quad \tilde{\Psi}_j(x) = \sum_{s=1}^{S_j} \tilde{b}_{js}^p \prod_{m=1}^n x_m^{\gamma_m},\ 1 \le j \le r.$$

لذا مدل (۲.۳) به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه‌سهموی [۲] به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min\ \tilde{\phi}_i^p(x) = \sum_{k=1}^{K_i} \tilde{a}_{ik}^p \prod_{m=1}^n x_m^{\beta_m}, \quad 1 \le i \le l' \\
&\max\ \tilde{\phi}_i^p(x) = \sum_{k=1}^{K_i} \tilde{a}_{ik}^p \prod_{m=1}^n x_m^{\beta_m}, \quad l'+1 \le i \le l \\
&s.t. \\
&\sum_{s=1}^{S_j} \tilde{b}_{js}^p \prod_{m=1}^n x_m^{\gamma_m} \precsim \tilde{c}_j^p, \quad 1 \le j \le r' \\
&\sum_{s=1}^{S_j} \tilde{b}_{js}^p \prod_{m=1}^n x_m^{\gamma_m} \succsim \tilde{c}_j^p, \quad r'+1 \le j \le r'' \\
&\sum_{s=1}^{S_j} \tilde{b}_{js}^p \prod_{m=1}^n x_m^{\gamma_m} \approx \tilde{c}_j^p, \quad r''+1 \le j \le r \\
&x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \ge 0,
\end{aligned} \tag{۳.۳}$$

که در آن α_iها و β_iها ثابت‌هایی معلومند.

[2] PMONLPP

۴.۳ الگوریتم حل

بعد از استفاده از تابع دقت، مدل قطعی اصلاح‌شده مسئله (۳.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&\min \quad \phi_i(x) = \sum_{k=1}^{K_i} a_{ik} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\beta_m}, \ 1 \leq i \leq l' \\
&\max \quad \phi_i(x) = \sum_{k=1}^{K_i} a_{ik} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\beta_m}, \ l'+1 \leq i \leq l \\
&s.t. \\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m} \leq c_j, \ 1 \leq j \leq r' \\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m} \geq c_j, \ r'+1 \leq j \leq r'' \\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m} = c_j, \ r''+1 \leq j \leq r \\
&x_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq n,
\end{aligned} \tag{۴.۳}$$

که در آن $a_{ik} = f(\tilde{a}_{ik}^p)$، $b_{js} = f(\tilde{b}_{js}^p)$ و $c_j = f(\tilde{c}_j^p)$.

قضیه ۱.۴.۳. یک جواب بهینه پارتو $X^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ برای مسئله (۴.۳)، یک جواب بهینه پارتو برای مسئله (۳.۳) است.

برهان. از آن‌جا که X^* جواب بهینه پارتو برای مسئله (۴.۳) است، لذا X^* شدنی است و در نتیجه

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\gamma_m} \leq c_j, \ 1 \leq j \leq r' \\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\gamma_m} \geq c_j, \ r'+1 \leq j \leq r'' \\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\gamma_m} = c_j, \ r''+1 \leq j \leq r \\
&x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n,
\end{aligned}$$

و این یعنی؛

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{S_j} f(\tilde{b}_{js}^p) \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\gamma_m} \leq f(\tilde{c}_j^p),\ 1 \leq j \leq r' \\
&\sum_{s=1}^{S_j} f(\tilde{b}_{js}^p) \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\gamma_m} \geq f(\tilde{c}_j^p),\ r'+1 \leq j \leq r'' \\
&\sum_{s=1}^{S_j} f(\tilde{b}_{js}^p) \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\gamma_m} = f(\tilde{c}_j^p),\ r''+1 \leq j \leq r \\
&x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0.
\end{aligned}$$

از آن‌جا که تابع دقت خطی است، داریم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{S_j} \tilde{b}_{js}^p \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\gamma_m} \precsim \tilde{c}_j^p,\ 1 \leq j \leq r' \\
&\sum_{s=1}^{S_j} \tilde{b}_{js}^p \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\gamma_m} \succsim \tilde{c}_j^p,\ r'+1 \leq j \leq r'' \\
&\sum_{s=1}^{S_j} \tilde{b}_{js}^p \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\gamma_m} \approx \tilde{c}_j^p,\ r''+1 \leq j \leq r \\
&x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0.
\end{aligned}$$

لذا X^* یک جواب شدنی برای مسئله (۳.۳) نیز است.
و از آن‌جا که X^* یک جواب بهینه-پارتو برای (۴.۳) است، بنابراین هیچ جواب شدنی دیگر $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ای وجود ندارد به طوریکه
$\phi_i(X) \leq \phi_i(X^*); 1 \leq i \leq l'$ و $\phi_i(X) \geq \phi_i(X^*); l'+1 \leq i \leq l$، با حداقل یک نامساوی به صورت اکید. یعنی هیچ X ای وجود ندارد به طوری‌که $\sum_{k=1}^{K_i} a_{ik} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\beta_m} \leq \sum_{k=1}^{K_i} a_{ik} \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\beta_m};\ 1 \leq i \leq l'$ و
$\sum_{k=1}^{K_i} a_{ik} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\beta_m} \geq \sum_{k=1}^{K_i} a_{ik} \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\beta_m};\ l'+1 \leq i \leq l$، با حداقل یک نامساوی به طور اکید. و از آن‌جا که $c_j,\ b_{js},\ a_{ik}$ مقادیر تابع دقت هستند،
و نیز $c_j = f(\tilde{c_j}^p)$، $b_{js} = f(\tilde{b_{js}}^p)$ و $a_{ik} = f(\tilde{a_{ik}}^p)$ و چون f خطی است، لذا هیچ Xای وجود ندارد به طوریکه $\sum_{k=1}^{K_i} \tilde{a}_{ik}^p \prod_{m=1}^{n} x_m^{\beta_m} \precsim \sum_{k=1}^{K_i} \tilde{a}_{ik}^p \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\beta_m};\ 1 \leq i \leq l'$ و $\sum_{k=1}^{K_i} \tilde{a}_{ik}^p \prod_{m=1}^{n} x_m^{\beta_m} \succsim \sum_{k=1}^{K_i} \tilde{a}_{ik}^p \prod_{m=1}^{n} x_m^{*\beta_m};\ l'+1 \leq i \leq l$ با حداقل یک نامساوی به طور اکید. لذا اثبات کامل می‌شود. □

به منظور بدست آوردن جواب بهینه مربوط به این مسئله برنامه‌ریزی، ترجیحات متفاوتی برای توابع هدف مختلف در نظر گرفته می‌شود. لذا، براساس نظرات تصمیم‌گیرندگان از نگاهی خوش‌بینانه یا بدبینانه، برای هر هدف یک تابع عضویت و عدم‌عضویت ساخته می‌شود که به طور خلاصه به شرح زیر است :

فرض کنید L_i و U_i به ترتیب کران‌های پایین و بالایی برای هدف i باشند و α_i آستانه مجاز مربوطه باشد. چون ϕ_iها، ($i = ۱, ۲, \cdots, l'$) باید به حداقل برسند، اگر مقدار تابع به کران پایین مربوط به آن نزدیک شود آن‌گاه میزان رضایت‌مندی تصمیم‌گیرنده افزایش می‌یابد و اگر تمام اهداف به کران پایین خود برسند، رضایت کامل پیدا می‌کند. اما کاملا معمول است که، دستیابی به این کران‌های پایین دقیق نیست. لذا، براساس تصمیم و قضاوت تصمیم‌گیرنده، درجه دسترسی ($\mu_{L_i}(\phi_i(x))$) و عدم‌دسترسی ($\nu_{L_i}(\phi_i(x))$) تابع $\phi_i(x)$ به L_i به ترتیب در دو روش مختلف - دیدگاه خوش‌بینانه و دیدگاه بدبینانه- تفسیر شده است.

دیدگاه خوش‌بینانه:

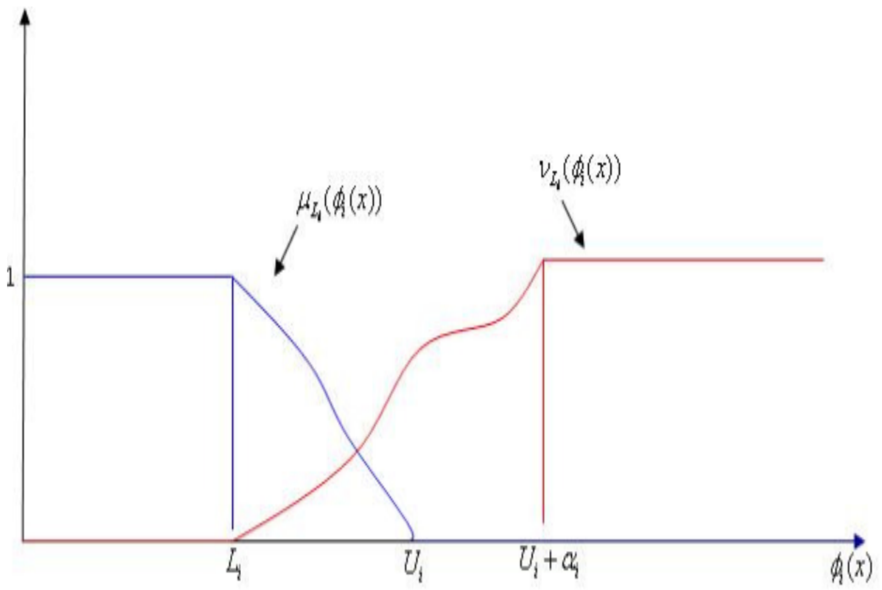
توابع عضویت ($\mu_{L_i}(\phi_i)$) و عدم‌عضویت ($\nu_{L_i}(\phi_i)$) برای هدف iام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{L_i}(\phi_i(x)) = \begin{cases} ۱, & \phi_i(x) \leq L_i \\ \frac{U_i^t - \phi_i^t(x)}{U_i^t - L_i^t}, & L_i \leq \phi_i(x) \leq U_i \\ ۰, & \phi_i(x) \geq U_i \end{cases}$$

و

$$\nu_{L_i}(\phi_i(x)) = \begin{cases} ۰, & \phi_i(x) \leq L_i \\ \frac{\phi_i^t(x) - L_i^t}{(U_i + \alpha_i)^t - L_i^t}, & L_i \leq \phi_i(x) \leq U_i + \alpha_i \\ ۱, & \phi_i(x) \geq U_i + \alpha_i \end{cases}$$

نمودار آن در شکل ۱.۳ نشان داده شده است. از این شکل مشاهده می‌شود که در بازه $[U_i, U_i+\alpha_i]$، درجه عضویت در دستیابی به آرمان موردنظر، صفر است، اما درجه عدم‌عضویت این گونه نیست. یعنی، تصمیم‌گیرنده علاقه‌مند نیست که مقادیر بیشتری از U_i را قبول کند، اما در عین‌حال، مقادیر بین U_i تا $U_i + \alpha_i$ را هم به طور کامل رد نمی‌کند. به همین دلیل است که چنین رویکردی خوش‌بینانه نامیده می‌شود.



شکل ۱.۳: توابع عضویت و عدم‌عضویت برای هدف مینیم‌سازی در دیدگاه خوش‌بینانه

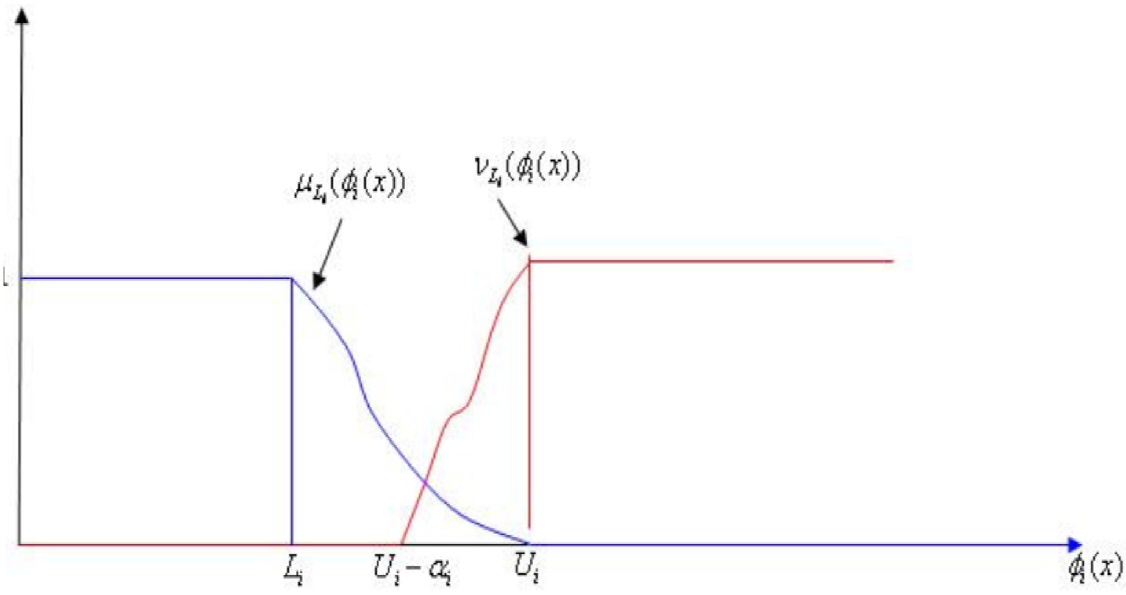
دیدگاه بدبینانه:

تابع عضویت $(\mu_{L_i}(\phi_i))$ و عدم‌عضویت $(\nu_{L_i}(\phi_i))$ برای هدف i -ام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{L_i}(\phi_i(x)) = \begin{cases} ۱, & \phi_i(x) \leq L_i \\ \frac{U_i^t - \phi_i^t(x)}{U_i^t - L_i^t}, & L_i \leq \phi_i(x) \leq U_i \\ ۰, & \phi_i(x) \geq U_i \end{cases}$$

$$\nu_{L_i}(\phi_i(x)) = \begin{cases} ۰, & \phi_i(x) \leq U_i - \alpha_i \\ \frac{\phi_i^t(x) - (U_i - \alpha_i)^t}{U_i^t - (U_i - \alpha_i)^t}, & U_i - \alpha_i \leq \phi_i(x) \leq U_i \\ ۱, & \phi_i(x) \geq U_i \end{cases}$$

نمودار آن در شکل ۲.۳ نشان داده شده است. از این شکل مشاهده می‌شود که در بازه $[L_i, U_i - \alpha_i]$ درجه عضویت در دستیابی به آرمان موردنظر یک نیست، اما درجه عدم‌عضویت صفر است، یعنی، تصمیم‌گیرنده علاقه‌مند نیست که مقادیر بین L_i و $U_i - \alpha_i$ را رد کند اما در عین حال آن‌ها را هم به طور کامل قبول نمی‌کند. به همین دلیل چنین رویکردی بدبینانه نامیده می‌شود.



شکل ۲.۳: توابع عضویت و عدم‌عضویت برای هدف مینیمم‌سازی در دیدگاه بدبینانه

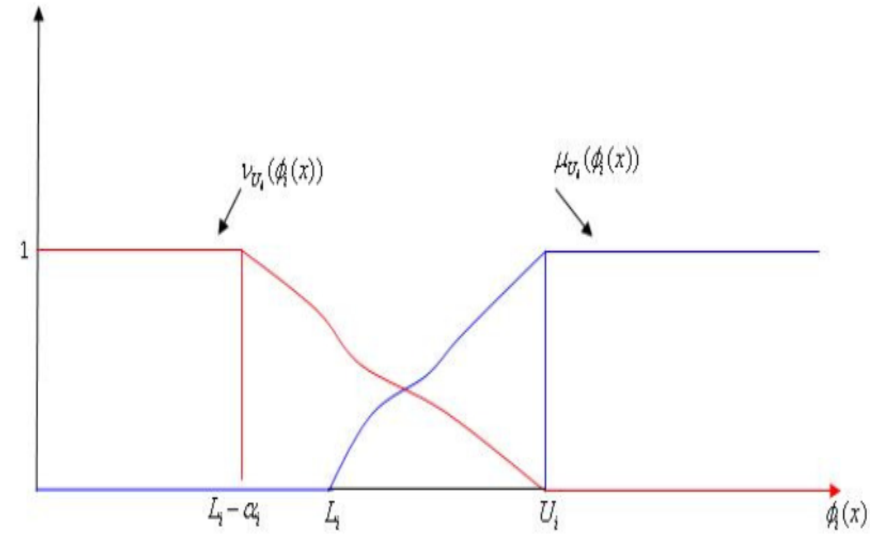
چون اهداف $\phi_i(i = l' + ۱, l' + ۲, \dots, l)$ باید ماکزیمم شود، اگر مقدار هر هدف به کران بالای خود یعنی U_i نزدیک شود رضایت تصمیم‌گیرنده افزایش می‌یابد و اگر تمام اهداف به کران بالایی خود برسند، تصمیم‌گیرنده رضایت کامل دارد. همانند مواردی که اهداف مینیمم می‌شوند، در اینجا نیز وضعیت در دو روش مختلف–دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه– خلاصه شده است:

دیدگاه خوش‌بینانه: توابع عضویت و عدم عضویت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{U_i}(\phi_i(x)) = \begin{cases} ۰, & \phi_i(x) \leq L_i \\ \frac{\phi_i^t(x) - L_i^t}{U_i^t - L_i^t}, & L_i \leq \phi_i(x) \leq U_i \\ ۱, & \phi_i(x) \geq U_i \end{cases}$$

$$\nu_{U_i}(\phi_i(x)) = \begin{cases} ۱, & \phi_i(x) \leq L_i - \alpha_i \\ \frac{U_i^t - \phi_i^t(x)}{U_i^t - (L_i - \alpha_i)^t}, & L_i - \alpha_i \leq \phi_i(x) \leq U_i \\ ۰, & \phi_i(x) \geq U_i \end{cases}$$

و نمودار مربوط به آن‌ها در شکل ۳.۳ نشان داده شده است. از این شکل مشاهده می‌شود که در بازه $[L_i - \alpha_i, L_i]$ درجه عضویت در دستیابی به هدف صفر است، اما درجه عدم‌عضویت این گونه نیست. یعنی، تصمیم‌گیرنده علاقه‌مند نیست که مقادیر کمتری از L_i را قبول کند، اما در عین‌حال، مقادیر بین $L_i - \alpha_i$ تا L_i را هم به طور کامل رد نمی‌کند.



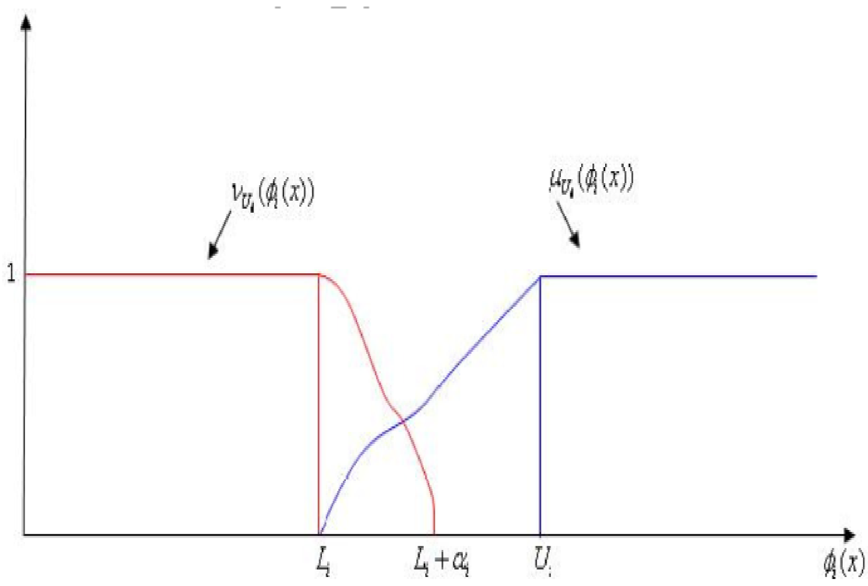
شکل ۳.۳: توابع عضویت و عدم‌عضویت برای هدف ماکزیمم‌سازی در دیدگاه خوش‌بینانه

در دیدگاه بدبینانه توابع عضویت و عدم‌عضویت به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\mu_{U_i}(\phi_i(x)) = \begin{cases} 0, & \phi_i(x) \leq L_i \\ \frac{\phi_i^t(x)-L_i^t}{U_i^t-L_i^t}, & L_i \leq \phi_i(x) \leq U_i \\ 1, & \phi_i(x) \geq U_i \end{cases}$$

$$\nu_{U_i}(\phi_i(x)) = \begin{cases} 1, & \phi_i(x) \leq L_i \\ \frac{(L_i+\alpha_i)^t-\phi_i^t(x)}{(L_i+\alpha_i)^t-L_i^t}, & L_i \leq \phi_i(x) \leq L_i+\alpha_i \\ 0, & \phi_i(x) \geq L_i+\alpha_i \end{cases}$$

نمودارهای مربوط به آنها در شکل ۴.۳ نشان داده شده است، زمانی که هدف ماکزیمم کردن هدف است.



شکل ۴.۳: توابع عضویت برای هدف ماکزیمم‌سازی در دیدگاه بدبینانه

در اینجا، در بازه $[L_i+\alpha_i, U_i]$، درجه عضویت در دستیابی به هدف، یک نیست اما درجه عدم‌عضویت صفراست، یعنی، تصمیم‌گیرنده مقادیر بین $L_i+\alpha_i$ و U_i را رد نمی‌کند اما در عین‌حال آن‌ها را نیز به طورکامل قبول نمی‌کند.

هدف اصلی افزایش سطح رضایت‌مندی تصمیم‌گیرنده و کاهش سطح نارضایتی، یعنی افزایش درجه دسترسی و کاهش درجه عدم‌دسترسی است که می‌تواند به صورت زیر انجام شود:

فرض کنید $\lambda=\min\{\mu_{L_i}(\phi_i(x)),\mu_{U_i}(\phi_i(x))\}$ و $\lambda'=\max\{\nu_{L_i}(\phi_i(x)),\nu_{U_i}(\phi_i(x))\};$. برای $i=۱,۲,\dots,l',l'+۱,\dots,l$ سپس مسئله می‌توان به صورت زیر مدل شود:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda\ ,\min\ \lambda',\\
s.t.\quad &\mu_{L_i}(\phi_i(x))\geq\lambda;\ ۱\leq i\leq l',\ \mu_{U_i}(\phi_i(x))\geq\lambda; l'+۱\leq i\leq l\\
&\nu_{L_i}(\phi_i(x))\leq\lambda';\ ۱\leq i\leq l',\ \nu_{U_i}(\phi_i(x))\leq\lambda'; l'+۱\leq i\leq l\\
&x_m\geq ۰;\ ۱\leq m\leq n,\lambda,\lambda'\geq ۰;\ \lambda+\lambda'\leq ۱\\
&\sum_{s=۱}^{S_j} b_{js}\prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m}\leq c_j,\ ۱\leq j\leq r'\\
&\sum_{s=۱}^{S_j} b_{js}\prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m}\geq c_j,\ r'+۱\leq j\leq r''\\
&\sum_{s=۱}^{S_j} b_{js}\prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m}= c_j,\ r''+۱\leq j\leq r
\end{aligned}
\tag{۵.۳}
$$

این مدل به یک مسئله برنامه‌ریزی تک‌هدفه قطعی به شرح زیر تبدیل می‌شود.

از دیدگاه تصمیم‌گیرنده خوش‌بین، مدل به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max\ (\lambda-\lambda')\\
s.t.\quad & U_i^t-\phi_i^t(x)\geq\lambda(U_i^t-L_i^t);\ 1\leq i\leq l',\\
&\phi_i^t(x)-L_i^t\geq\lambda(U_i^t-L_i^t); l'+1\leq i\leq l\\
&\phi_i^t(x)-L_i^t\leq\lambda'[(U_i+\alpha_i)^t-L_i^t];\ 1\leq i\leq l',\\
&U_i^t-\phi_i^t(x)\leq\lambda'[(U_i^t-(L_i-\alpha_i)^t]; l'+1\leq i\leq l\\
&x_m\geq 0;\ 1\leq m\leq n,\lambda,\lambda'\geq 0;\ \lambda+\lambda'\leq 1\\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js}\prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m}\leq c_j,\ 1\leq j\leq r'\\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js}\prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m}\geq c_j,\ r'+1\leq j\leq r''\\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js}\prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m}= c_j,\ r''+1\leq j\leq r
\end{aligned}$$

برای تصمیم‌گیرنده بدبین، مدل به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
&\max(\lambda-\lambda')\\
s.t.\quad & U_i^t-\phi_i^t(x)\geq\lambda(U_i^t-L_i^t);\ 1\leq i\leq l',\\
&\phi_i^t(x)-L_i^t\geq\lambda(U_i^t-L_i^t); l'+1\leq i\leq l\\
&\phi_i^t(x)-(U_i-\alpha_i)^t\leq\lambda'[U_i^t-(U_i-\alpha_i)^t];\ 1\leq i\leq l',\\
&(L_i+\alpha_i)^t-\phi_i^t(x)\leq\lambda'[(L_i+\alpha_i)^t-L_i)^t]; l'+1\leq i\leq l\\
&x_m\geq 0;\ 1\leq m\leq n,\lambda,\lambda'\geq 0;\ \lambda+\lambda'\leq 1\\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js}\prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m}\leq c_j,\ 1\leq j\leq r'\\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js}\prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m}\geq c_j,\ r'+1\leq j\leq r''\\
&\sum_{s=1}^{S_j} b_{js}\prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m}= c_j,\ r''+1\leq j\leq r
\end{aligned}$$

اما روش بالا معایب مشخصی دارد که یاگر در [۲۶] به برخی از آن‌ها اشاره کرده است. برای مثال، فرض کنید عضویت و عدم‌عضویت برای دو گزینه x و y به صورت $\mu(y) = ۰/۲, \mu(x) = ۰/۲۲$ و $v(y) = ۰, v(x) = ۰/۷۲$ باشند. بنابراین،

$$\mu(x) - v(x) = -۰/۵ \quad \text{و} \quad \mu(y) - v(y) = ۰/۲.$$

بنابراین با توجه به روش فوق، مقادیر محاسبه‌شده نشان می‌دهد علی‌رغم اینکه عضویت x بسیار بیشتر از عضویت y است اما y مطلوب تصمیم‌گیرنده خواهد بود. بنابراین با حفظ همان ترتیب مقایسه، یاگر [۲۶] مفهوم $\mu(x) - v(x)$ را با یک تابع عمومی‌تر $f(x)$ جایگزین کرد که در آن $f(x) = \mu(x) + k\pi(x); k \in (۰, ۱]$ و $\pi(x) = ۱ - \mu(x) - v(x)$. متغیر k می‌تواند هر مقدار را در بازه $(۰, ۱]$ بگیرد. مقدار بزرگتر نشان می‌دهد که عدم‌قطعیت بیشتر به نفع توابع عضویت خواهد بود. در حالی که مقدار کوچکتر آن به نفع عدم‌عضویت است. از این‌رو، برای تصمیم‌گیرنده خوش‌بین و بدبین، تابع f شکل زیر را می‌گیرد.

تابع $f(\phi_i(x))$ را برای هر i تعریف کنید. فرض کنید $f_{L_i}(\phi_i(x))$ برای $۱ \leq i \leq l'$ باشد و $f_{U_i}(\phi_i(x))$ برای $l' + ۱ \leq i \leq l$. لذا مسئله (۵.۳) می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned}
& \max \ \chi, \\
s.t. \quad & f_{L_i}(\phi_i(x)) \geq \chi; \ ۱ \leq i \leq l', \ f_{U_i}(\phi_i(x)) \geq \chi; \ l' + ۱ \leq i \leq l \\
& x_m \geq ۰; \ ۱ \leq m \leq n \\
& \sum_{s=۱}^{S_j} b_{js} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m} \leq c_j, \ ۱ \leq j \leq r' \\
& \sum_{s=۱}^{S_j} b_{js} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m} \geq c_j, \ r' + ۱ \leq j \leq r'' \\
& \sum_{s=۱}^{S_j} b_{js} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m} = c_j, \ r'' + ۱ \leq j \leq r \\
& \chi = \min\{f_{L_i}(\phi_i(x)), f_{U_i}(\phi_i(x))\}, \ \chi \in [۰, ۱].
\end{aligned} \tag{۶.۳}$$

قضیه ۲.۴.۳. جواب بهینه $x^* \in S$ برای مسئله (۶.۳) یک جواب بهینه پارتو برای مسئله چندهدفه (۴.۳) است.

برهان. فرض کنید $x^* \in S$ یک جواب بهینه پارتو برای مسئله (۴.۳) نیست. بنابراین، $x \in S$ وجود دارد به طوری‌که $\phi_i(x) \leq \phi_i(x^*); ۱ \leq i \leq l'$ و $\phi_i(x) \geq \phi_i(x^*); l' + ۱ \leq i \leq l$ با حداقل یکی از نامساوی‌ها به صورت اکید.

از آن‌جا که تابع عضویت $f_{L_i}(\phi(x))$ با افزایش مقدار هدف متناظر $\phi_i(x)$ به طور اکید کاهش می‌یابد و $f_{U_i}(\phi(x))$ با افزایش مقدار $\phi_i(x)$ مرتبط، به طور اکید افزایش می‌یابد، بنابراین داریم $f_{L_i}(\phi_i(x)) \geq f_{L_i}(\phi_i(x^*))$ برای $۱ \leq i \leq l'$ و $f_{U_i}(\phi_i(x)) \geq f_{U_i}(\phi_i(x^*))$ برای $l' + ۱ \leq i \leq l$ با حداقل یک نامساوی اکید. بنابراین

$$\chi = \min\{f_{L_i}(\phi_i(x)), f_{U_i}(\phi_i(x))\} \geq \min\{f_{L_i}(\phi_i(x^*)), f_{U_i}(\phi_i(x^*))\} = \chi^*$$

که با این واقعیت که x^* یک جواب بهینه برای مسئله (۶.۳) است، تناقض دارد. □

در دیدگاه خوش‌بینانه داریم:

$$f_{L_i}(\phi_i(x)) = \begin{cases} 1, & \phi_i(x) \leq L_i \\ (1-k)\frac{U_i^t - \phi_i^t(x)}{U_i^t - L_i^t} - k\frac{\phi_i^t(x) - L_i^t}{(U_i+\alpha_i)^t - L_i^t} + k, & L_i \leq \phi_i(x) \leq U_i \\ k - k\frac{\phi_i^t(x) - L_i^t}{(U_i+\alpha_i)^t - L_i^t}, & U_i \leq \phi_i(x) \leq U_i + \alpha_i \\ 0, & \phi_i(x) \geq U_i + \alpha_i \end{cases}$$

و

$$f_{U_i}(\phi_i(x)) = \begin{cases} 0, & \phi_i(x) \leq L_i - \alpha_i \\ k\frac{U_i^t - \phi_i^t(x)}{(L_i-\alpha_i)^t - U_i^t} + k, & L_i - \alpha_i \leq \phi_i(x) \leq L_i \\ (1-k)\frac{\phi_i^t(x) - L_i^t}{U_i^t - L_i^t} - k\frac{U_i^t - \phi_i^t(x)}{U_i^t - (L_i-\alpha_i)^t} + k, & L_i \leq \phi_i(x) \leq U_i \\ 1, & \phi_i(x) \geq U_i \end{cases}$$

لذا برای تصمیم‌گیرنده خوش‌بین، مسئله (۶.۳) به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \max \ \chi, \\ s.t. \quad & (1-k)\frac{U_i^t - \phi_i^t(x)}{U_i^t - L_i^t} - k\frac{\phi_i^t(x) - L_i^t}{(U_i+\alpha_i)^t - L_i^t} + k \geq \ \chi; \quad 1 \leq i \leq l' \\ & k - k\frac{\phi_i^t(x) - L_i^t}{(U_i+\alpha_i)^t - L_i^t} \geq \chi; \quad 1 \leq i \leq l' \\ & k\frac{U_i^t(x) - \phi_i^t(x)}{(L_i-\alpha_i)^t - U_i^t} + k \geq \chi; \quad l'+1 \leq i \leq l \\ & (1-k)\frac{\phi_i^t(x) - L_i^t}{U_i^t - L_i^t} - k\frac{U_i^t - \phi_i^t(x)}{U_i^t - (L_i-\alpha_i)^t} + k \geq \chi; \quad l'+1 \leq i \leq l \\ & x_m \geq 0; \ 1 \leq m \leq n, \ \chi \in [0,1] \\ & \sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m} \leq c_j, \ 1 \leq j \leq r' \\ & \sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m} \geq c_j, \ r'+1 \leq j \leq r'' \\ & \sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m} = c_j, \ r''+1 \leq j \leq r \end{aligned}$$

در دیدگاه بدبینانه داریم:

$$f_{L_i}(\phi_i(x))=\begin{cases}۱, & \phi_i(x)\leq L_i\\ (۱-k)\frac{U_i^t-\phi_i^t(x)}{U_i^t-L_i^t}+k, & L_i\leq\phi_i(x)\leq U_i-\alpha_i\\ (۱-k)\frac{U_i^t(x)-\phi_i^t(x)}{U_i^t-L_i^t}-k\frac{\phi_i^t(x)-(U_i-\alpha_i)^t}{U_i^t-(U_i-\alpha_i)^t}+k, & U_i-\alpha_i\leq\phi_i(x)\leq U_i\\ ۰, & \phi_i(x)\geq U_i\end{cases}$$

و

$$f_{U_i}(\phi_i(x))=\begin{cases}۰, & \phi_i(x)\leq L_i\\ (۱-k)\frac{\phi_i^t(x)-L_i^t}{U_i^t-L_i^t}-k\frac{(L_i+\alpha_i)^t-\phi_i^t(x)}{(L_i+\alpha_i)^t-L_i^t}+k, & L_i\leq\phi_i(x)\leq L_i+\alpha_i\\ (۱-k)\frac{\phi_i^t(x)-L_i^t}{U_i^t-L_i^t}+k, & L_i+\alpha_i\leq\phi_i(x)\leq U_i\\ ۱, & \phi_i(x)\geq U_i\end{cases}$$

برای تصمیم‌گیرنده بدبین، مسئله (۶.۳) به شکل زیر خواهد بود که مدل غیرخطی قطعی است:

$$\begin{aligned}
& Max\ \chi,\\
s.t.\quad & (۱-k)\frac{U_i^t-\phi_i^t(x)}{U_i^t-L_i^t}+k\geq\ \chi;\quad ۱\leq i\leq l'\\
& (۱-k)\frac{U_i^t-\phi_i^t(x)}{U_i^t-L_i^t}-k\frac{\phi_i^t(x)-(U_i-\alpha_i)^t}{U_i^t-(U_i-\alpha_i)^t}+k\geq\chi;\quad ۱\leq i\leq l'\\
& (۱-k)\frac{\phi_i^t(x)-L_i^t(x)}{U_i^t-L_i^t}-k\frac{(L_i+\alpha_i)^t-\phi_i^t(x)}{(L_i+\alpha_i)^t-L_i^t}+k\geq\chi;\quad l'+۱\leq i\leq l\\
& (۱-k)\frac{\phi_i^t(x)-L_i^t}{U_i^t-L_i^t}+k\geq\chi;\quad l'+۱\leq i\leq l\\
& x_m\geq ۰;\ ۱\leq m\leq n,\ \chi\in[۰,۱]\\
& \sum_{s=۱}^{S_j} b_{js}\prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m}\leq c_j,\ ۱\leq j\leq r'\\
& \sum_{s=۱}^{S_j} b_{js}\prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m}\geq c_j,\ r'+۱\leq j\leq r''\\
& \sum_{s=۱}^{S_j} b_{js}\prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m}= c_j,\ r''+۱\leq j\leq r
\end{aligned}$$

به طور کلی، الگوریتم حل می‌تواند به صورت زیر خلاصه شود:

۱. مسئله را به عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه مطرح کنید.

۲. با استفاده از تابع ترجیح، مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه را به یک مسئله قطعی تبدیل کنید.

۳. جواب ایده‌ال را بدست آوردید. فرض کنید $X_l, \ldots, X'_l, \ldots, X_2, X_1$ مولفه‌های جواب ایده‌ال متناظر با هر هدف باشد. جدول $pay - off$ را به صورت زیر بسازید.

۴. جدول $pay - off$ را به صورت زیر بسازید.

جدول ۱.۳: جدول $pay - off$

	$\phi_1(x)$	$\phi_2(x)$	$\ldots$	$\phi_{l'}(x)$	$\ldots$	$\phi_l(x)$
X_1	$\phi_1(X_1)$	$\phi_2(X_1)$	$\ldots$	$\phi_{l'}(X_1)$	$\ldots$	$\phi_l(X_1)$
X_2	$\phi_1(X_2)$	$\phi_2(X_2)$	$\ldots$	$\phi_{l'}(X_2)$	$\ldots$	$\phi_l(X_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	
X_l	$\phi_1(X_l)$	$\phi_2(X_l)$	$\ldots$	$\phi_{l'}(X_l)$	$\ldots$	$\phi_l(X_l)$

و برای هر هدف iام، مقادیر ایده‌ال L_i و ضدایده‌ال U_i را به صورت زیر محاسبه کنید:

$U_i = \max\{\phi_i(X_1), \phi_i(X_2), \ldots, \phi_i(X_l)\}$ و $L_i = \min\{\phi_i(X_1), \phi_i(X_2), \ldots, \phi_i(X_l)\}$

۵. اکنون برای بدست آوردن جواب، با استفاده از روش توضیح داده شده در بالا ، توابع عضویت و عدم‌عضویت را برای هر یک از اهداف تعریف کنید.

۶. الگوریتم متوقف می‌شود اگر تصمیم‌گیرنده از جواب بدست آمده راضی باشد. در غیر این صورت، پارامترهای کلیدی، مانند، ترجیحات هر تابع هدف، تولورانس برای هر هدف و غیره می‌توانند برای رسیدن به انتخاب تغییر کنند. این روند تا زمانی که تصمیم‌گیرنده از جواب‌های به دست آمده راضی نباشد تکرار می‌شود . ما فرض می‌کنیم که تصمیم‌گیرنده از نتایج به‌دست آمده راضی است لذا تنها یک اجرا از الگوریتم را نشان خواهیم داد.

۵.۳ مثال‌های عددی

مثال ۱.۵.۳. (در کارخانه) فرض کنید یک شرکت تولیدی باید سه نوع از محصولات P_3, P_2, P_1 را در یک دوره زمانی مشخص (مثلا ۱ ماه) تولید کند. تولید هر کدام از محصولات نیاز به سه نوع مواد

خام مختلف R_1, R_2 و R_3 دارد. تولید یک واحد از P_1 نیازمند استفاده از R_1, R_2 و R_3 به ترتیب حدود ۲، ۴ و ۳ واحد است. نیاز مواد خام برای تولید هر واحد P_2حدود ۳، ۲، ۲ واحد و برای محصول p_3 تقریبا ۴، ۲ و ۳ واحد می‌باشد. منابع در دسترس R_1 حدود ۳۶۰ واحد با ۱۰ واحد اضافی ذخیره شده در فروشگاه برای هدف اضطراری است که توسط مدیریت اداره می‌شود. مقدار برآورد شده R_2 برابر ۳۵۰ واحد با خطای حدود ۱۰ واحد است. برای کیفیت بهتر محصول تولید شده حدود ۳۲۵ واحد از R_3 باید با برخی از تولورانس‌های مجاز توسط هیئت مدیره مورد استفاده قرار گیرد. برای رسیدن به آرمان‌ها، فرض کنید تولید برنامه‌ریزی شده P_1, P_2 و P_3 به ترتیب x_1, x_2 و x_3 باشد. علاوه‌براین فرض کنید که هزینه واحد (UC_i) و قیمت فروش هر واحد (US_i) از P_1, P_2 و P_3 به صورت زیر باشد:

$$US_1 = \tilde{s_1}^p / x_1^{1/a_1},\ US_2 = \tilde{s_2}^p / x_2^{1/a_2},\ US_3 = \tilde{s_3}^p / x_3^{1/a_3}$$
$$UC_1 = \tilde{c_1}^p,\ UC_2 = \tilde{c_2}^p,\ UC_3 = \tilde{c_3}^p,$$

که در آن a_1, a_2, a_3 اعداد مثبت هستند.

زمان تخمینی تولید برای هر واحد از P_1, P_2 و P_3 به ترتیب حدود ۵، ۷، ۶ ساعت است. مدیریت خواستار یک برنامه تولیدی است که سودش را به حداکثر برساند و کل زمان را به حداقل برساند.

مسئله را می‌توان به صورت زیر مدل‌سازی کرد:

$$\begin{aligned}
&\min \quad \tilde{\phi}_1^p = \tilde{5}^p x_1 \oplus \tilde{7}^p x_2 \oplus \tilde{6}^p x_3 \\
&\max \ \tilde{\phi}_2^p = \tilde{s}_1^p x_1^{1-1/a_1} \ominus \tilde{c}_1^p x_1 \oplus \tilde{s}_2^p x_2^{1-1/a_2} \ominus \tilde{c}_2^p x_2 \oplus \tilde{s}_3^p x_3^{1-1/a_3} \ominus \tilde{c}_3^p x_3 \\
s.t. \quad & \tilde{2}^p x_1 \oplus \tilde{3}^p x_2 \oplus \tilde{4}^p x_3 \leq \tilde{360}^p \\
& \tilde{4}^p x_1 \oplus \tilde{2}^p x_2 \oplus \tilde{2}^p x_3 = \tilde{350}^p \\
& \tilde{3}^p x_1 \oplus \tilde{2}^p x_2 \oplus \tilde{3}^p x_3 \leq \tilde{360}^p \\
& x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

فرض کنید که تمام پارامترهای غیرقطعی که توسط تصمیم‌گیرنده تخمین زده می‌شود اعداد فازی سهموی است. همچنین فرض کنید:

$$\tilde{2}^p = (1.5, 2, 4),\ \tilde{3}^p = (2, 3, 4.5),\ \tilde{5}^p = (3, 5, 6), \tilde{6}^p = (3, 6, 7)$$
$$\tilde{7}^p = (5, 7, 10), \tilde{325}^p = (310, 325, 325), \tilde{350}^p = (340, 350, 353)$$
$$\tilde{360}^p = (355, 360, 370),\ \tilde{c}_1^p = (6, 8, 9),\ \tilde{c}_2^p = (7, 10, 12)$$
$$\tilde{c}_3^p = (7, 7, 8),\ \tilde{s}_1^p = (48, 50, 53),\ \tilde{s}_2^p = (42, 45, 46)$$
$$\tilde{s}_3^p = (60, 60, 65),\ a_1 = 2,\ a_2 = a_3 = 3.$$

با استفاده از تابع دقت ، مدل قطعی معادل با مسئله (۷.۳) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$
\begin{aligned}
& Min\ \phi_۱(x) = ۴/۷۵x_۱ + ۷/۲۵x_۲ + ۵/۵x_۳ \\
& Max\ \phi_۲(x) = ۵۰/۲۵x_۱^{۱/۲} - ۷/۷۵x_۱ + ۴۴/۵x_۲^{۲/۳} - ۹/۷۵x_۲ + ۶۱/۲۵x_۳^{۲/۳} - ۷/۲۵x_۳ \\
s.t. \quad & ۲/۳۷۵x_۱ + ۳/۱۲۵x_۲ + ۳/۵x_۳ \leq ۳۶۱/۲۵ \\
& ۳/۵x_۱ + ۲/۳۷۵x_۲ + ۲/۳۷۵x_۳ = ۳۴۸/۲۵ \\
& ۳/۱۲۵x_۱ + ۲/۳۷۵x_۳ + ۳/۱۲۵x_۳ \geq ۳۲۱/۲۵ \\
& x = x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰.
\end{aligned}
$$

(۸.۳)

با حل $\phi_۱$ و $\phi_۲$ به طور جداگانه تحت محدودیت‌ها، جواب‌های

$$X_۱ = (۹۲/۵۳, ۰, ۱۰/۲۷) \quad \text{و} \quad X_۲ = (۵۲/۵۸, ۱۵/۰۵, ۵۴/۰۹)$$

را بدست می‌آوریم. مقادیر ایده‌آل و ضدایده‌آل برای هر یک از این هدف‌ها

$$L_۲ = -۱۸/۸۱,\ U_۲ = ۵۶۵/۳۲ \quad \text{و} \quad L_۱ = ۴۹۶,\ U_۱ = ۶۵۶/۳۶$$

می‌باشند. فرض کنید که آستانه تحمل مجاز تعیین‌شده توسط تصمیم‌گیرنده $\alpha_۱ = ۶۵$ و $\alpha_۲ = ۷۰$ باشند. از آنجا که $\phi_۱$ باید به حداقل برسد و $\phi_۲$ حداکثر شود، درجه دسترسی و عدم‌دسترسی کران‌های پایین و بالایی را می‌توان به شرح زیر تعریف کرد:

دیدگاه خوش‌بینانه : با استفاده از توابع $f_{L_۲}$ و $f_{L_۱}$ مطابق با اهداف مربوطه، مدل قطعی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود :

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \chi \\
s.t. \quad & (۱-k)\frac{(۶۵۶/۳۶)^t - (۴/۷۵x_۱ + ۷/۲۵x_۲ + ۵/۵x_۳)^t}{(۶۵۶/۳۶)^t - (۴۹۶)^t} - k\frac{(۴/۷۵x_۱ + ۷/۲۵x_۲ + ۵/۵x_۳)^t - (۴۹۶)^t}{(۷۲۱/۳۶)^t - (۴۹۶)^t} + k \geq \chi \\
& k - k\frac{(۴/۷۵x_۱ + ۷/۲۵x_۲ + ۵/۵x_۳)^t - (۴۹۶)^t}{(۷۲۱/۳۶)^t - (۴۹۶)^t} \geq \chi \\
& k\frac{(۵۶۵/۳۲)^t - (۵۰/۲۵x_۱^{۱/۲} - ۷/۷۵x_۱ + ۴۴/۵x_۲^{۲/۳} - ۹/۷۵x_۲ + ۶۱/۲۵x_۳^{۲/۳} - ۷/۲۵x_۳)^t}{(-۸۸/۸۱)^t - (۵۶۵/۳۲)^t} + k \geq \chi; \\
& (۱-k)\frac{(۵۰/۲۵x_۱^{۱/۲} - ۷/۷۵x_۱ + ۴۴/۵x_۲^{۲/۳} - ۹/۷۵x_۲ + ۶۱/۲۵x_۳^{۲/۳} - ۷/۲۵x_۳)^t - (-۱۸/۸۱)^t}{(۵۶۵/۳۲)^t - (-۱۸/۸۱)^t} - \\
& k\frac{(۵۶۵/۳۲)^t - (۵۰/۲۵x_۱^{۱/۲} - ۷/۷۵x_۱ + ۴۴/۵x_۲^{۲/۳} - ۹/۷۵x_۲ + ۶۱/۲۵x_۳^{۲/۳} - ۷/۲۵x_۳)^t}{(۵۶۵/۳۲)^t - (-۸۸/۸۱)^t} + k \geq \chi \\
& \\
& ۲/۳۷۵x_۱ + ۳/۱۲۵x_۲ + ۳/۵x_۳ \leq ۳۶۱/۲۵ \\
& ۳/۵x_۱ + ۲/۳۷۵x_۲ + ۲/۳۷۵x_۳ = ۳۴۸/۲۵ \\
& ۳/۱۲۵x_۱ + ۲/۳۷۵x_۲ + ۳/۱۲۵x_۳ \geq ۳۲۱/۲۵ \\
& x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰.
\end{aligned}
$$

$t > ۰$ توسط تصمیم‌گیرنده تعریف شده است.

(۹.۳)

دیدگاه بدبینانه :

$$
\begin{aligned}
& Max\ \chi \\
s.t. \quad & (1-k)\frac{(656.36)^t - (4.75x_1 + 7.25x_2 + 5/5x_3)^t}{(656.36)^t - (496)^t} + k \geq \chi \\
& (1-k)\frac{(656.36)^t - (4.75x_1 + 7.25x_2 + 5.5x_3)^t}{(656.36)^t - (496)^t} - k\frac{(4.75x_1 + 7.25x_2 + 5.5x_3)^t - (591.36)^t}{(656.36)^t - (591.36)^t} + k \geq \chi \\
& (1-k)\frac{(50.25x_1^{1/2} - 7.75x_1 + 44.5x_2^{2/3} - 9.75x_2 + 61.25x_3^{2/3} - 7.25x_3)^t - (-18.81)^t}{(565.32)^t - (-18.81)^t} - \\
& k\frac{(51.19)^t - (50.25x_1^{1/2} - 7.75x_1 + 44.5x_2^{2/3} - 9.75x_2 + 61.25x_3^{2/3} - 7/25x_3)^t}{(51.19)^t - (-18.81)^t} + k \geq \chi \\
& (1-k)\frac{(50.25x_1^{1/2} - 7.75x_1 + 44.5x_2^{2/3} - 9.75x_2 + 61.25x_3^{2/3} - 7.25x_3)^t - (-18.81)^t}{(565.32)^t - (-18.81)^t} + k \geq \chi \\
& 2.375x_1 + 3.125x_2 + 3.5x_3 \leq 361.25 \\
& 3.5x_1 + 2.375x_2 + 2.375x_3 = 348.25 \\
& 3.125x_1 + 2.375x_2 + 3.125x_3 \geq 321.25 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

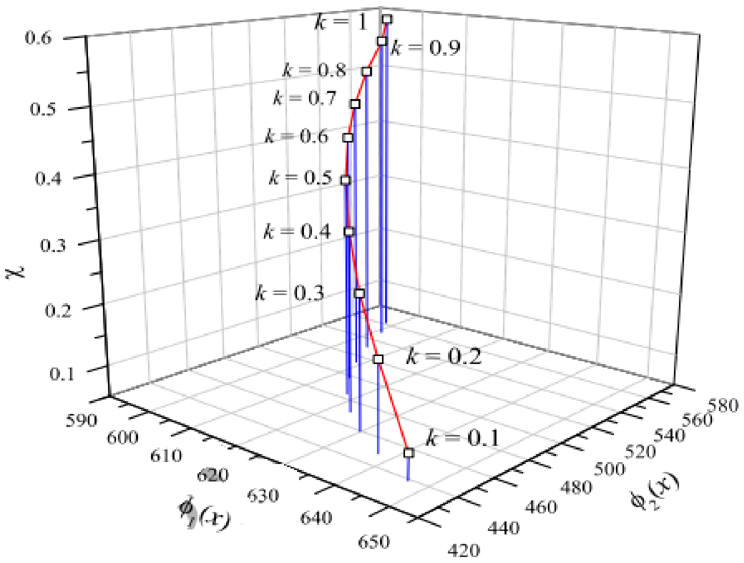
$t > 0$ توسط تصمیم‌گیرنده تعریف شده است.

(۱۰.۳)

هر دو مدل خوش‌بینانه و بدبینانه برای مقادیر مختلف k و $t = 2$ با کمک نرم‌افزار $Lingo$۱۵ حل می‌شوند. برای تصمیم‌گیرنده خوش‌بین، جواب در شکل جدولی و گرافیکی به ترتیب در جدول ۲.۳ و شکل ۵.۳ آمده است. از سوی دیگر، برای تصمیم‌گیرنده بدبین، جواب به صورت

$$x_1 = 68.01,\ x_2 = 3.28,\ x_3 = 43.12,\ \phi_1 = 583.99,\ \phi_2 = 394.13$$

است و χ با افزایش k از ۰٫۱ به ۱ از ۰٫۵۴ به ۰٫۹۶ افزایش یافت. مشاهده می‌شود که جواب‌های به دست آمده و همچنین سطح رضایت با افزایش مقدار k افزایش می‌یابد. مقدار بزرگتر χ از گزینه‌هایی با عضویت بیشتر پیروی می‌کند و مقدار کمتر از گزینه‌هایی با عدم‌عضویت پیروی می‌کنند.



شکل ۵.۳: از دیدگاه خوش‌بینانه

جدول ۲.۳: جواب‌های دیدگاه خوش‌بینانه برای $t = ۲$

k	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$\phi_۱(x)$	$\phi_۲(x)$	χ
۰٫۱	۵۳٫۱۷	۱۰٫۶۳	۵۷٫۶۴	۶۴۶٫۶۵	۴۳۹٫۰۷	۰٫۰۹
۰٫۲	۵۳٫۷۴	۶٫۴۴	۶۰٫۹۹	۶۳۷٫۴۰	۴۴۸٫۹۱	۰٫۱۹
۰٫۳	۵۵٫۱۳	۴٫۷۹	۶۰٫۵۹	۶۲۹٫۸۴	۴۵۹٫۵۱	۰٫۲۶
۰٫۴	۵۶٫۹۳	۴٫۵۷	۵۸٫۱۶	۶۲۳٫۴۳	۴۷۱٫۱۶	۰٫۳۳
۰٫۵	۵۸٫۴۹	۴٫۳۸	۵۶٫۰۴	۶۱۷٫۸۰	۴۸۳٫۹۹	۰٫۳۹
۰٫۶	۵۹٫۸۸	۴٫۲۲	۵۴٫۱۷	۶۱۲٫۹۶	۴۹۸٫۰۹	۰٫۴۴
۰٫۷	۶۱٫۱۱	۴٫۰۷	۵۲٫۵۱	۶۰۸٫۵۹	۵۱۳٫۷۱	۰٫۴۸
۰٫۸	۶۲٫۲۰	۳٫۹۴	۵۱٫۰۲	۶۰۴٫۶۳	۵۳۱٫۱۹	۰٫۵۲
۰٫۹	۶۳٫۱۹	۳٫۸۳	۴۹٫۶۹	۶۰۱٫۲۲	۵۴۹٫۹۸	۰٫۵۶
۱	۶۴٫۰۸	۳٫۷۲	۴۸٫۴۸	۵۹۷٫۹۹	۵۶۱٫۸۹	۰٫۵۹

مثال ۲.۵.۳. (در حمل‌ونقل): حدود ۷۰۰۰ متر مکعب از یک محصول باید در یک رودخانه با استفاده از یک قایق حمل شود. بدون در نظر گرفتن میزان حمل‌ونقل، هزینه حمل‌ونقل در هر سفر حدود ۲۷۵RS است. هزینه مخزن (مکعب مستطیل) که برای حمل‌ونقل استفاده می‌شود بستگی به ابعاد آن دارد و به صورت زیر است:

هزینه پایین و بالای مخزن حدود $۲۵RS$در هر متر مربع است .
هزینه‌های جلو و عقب حدود $۳۰RS$در هر متر مربع
هزینه‌های انتهایی حدود $۲۰RS$در هر متر مربع است.

با توجه به محدودیت‌های فضا و وزن، در قایق تنها یک مخزن در طول سفر می‌تواند در نظر گرفته شود و حجم آن مخزن نباید بیش از ۶۰۰ مترمکعب باشد. هدف تصمیم‌گیرنده این است که ابعاد مخزن را به گونه‌ای پیدا کنید که کل محصول از یک مخزن به دیگری با حداقل هزینه و حداقل تعداد سفرهای ممکن انتقال یابد. برای نشان دادن عدم‌اطمینان در تعیین مقادیر دقیق پارامترها، فرض می‌کنیم که آنها با کمک اعداد فازی سهموی ارائه شده‌اند. فرض کنید $x_۱, x_۲$ و $x_۳$ طول، عرض و ارتفاع مخزن را نشان دهند. لذا داریم:

حجم مخزن = $x_۱x_۲x_۳$
تعداد سفرها = $\tilde{۷۰۰۰}^p/x_۱x_۲x_۳$
هزینه حمل‌ونقل محصول = $\tilde{۲۷۵}^p(\tilde{۷۰۰۰}^p/x_۱x_۲x_۳)$
هزینه مخزن = $\tilde{۵۰}^p x_۱x_۲ + \tilde{۶۰}^p x_۱x_۳ + \tilde{۴۰} x_۲x_۳$

مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه سهموی می‌تواند به صورت زیر مدل شود:

$$
\begin{aligned}
&\min\ \tilde{\phi}_۱(x)^p = (\tilde{۷۰۰۰}^p/x_۱x_۲x_۳)\tilde{۲۷۵}^p \oplus \tilde{۵۰}^p x_۱x_۲ \oplus \tilde{۶۰} x_۱x_۳ \oplus \tilde{۴۰}^p x_۲x_۳\\
&\min\ \tilde{\phi}_۲(x)^p = \tilde{۷۰۰۰}^p/x_۱x_۲x_۳\\
&s.t.\\
&x_۱x_۲x_۳ \geq \tilde{۰}^p\\
&x_۱x_۲x_۳ \leq \tilde{۶۰۰}^p\\
&x = (x_۱, x_۲, x_۳) \geq ۰.
\end{aligned}
\tag{۱۱.۳}
$$

فرض کنید پارامترهای تعیین‌شده توسط تصمیم‌گیرنده، اعداد فازی سهموی زیر باشند:

$$
\tilde{۷۰۰۰}^p = (۶۹۶۵, ۷۰۰۰, ۷۰۳۵),\ \tilde{۶۰۰}^p = (۵۹۰, ۶۰۰, ۶۱۰),\ \tilde{۲۰}^p = (۱۷, ۲۰, ۲۳),
$$
$$
\tilde{۲۷۵}^p = (۲۶۴, ۲۷۵, ۲۸۰),\ \tilde{۲۵}^p = (۲۲, ۲۵, ۳۰),\ \tilde{۳۰}^p = (۲۵, ۳۰, ۳۸)
$$

با استفاده از تابع دقت برای اعداد فازی سهموی، مدل قطعی مسئله (۱۱.۳) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$
\begin{aligned}
&\min\ \phi_1(x) = 1910375.01/x_1x_2x_3 + 51.5x_1x_2 + 62.26x_1x_3 + 40x_2x_3\\
&\min\ \phi_2(x) = 7000/x_1x_2x_3\\
&s.t.\\
&x_1x_2x_3 \geq 0\\
&x_1x_2x_3 \leq 600\\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{12.3}
$$

با حل هر تابع هدف با توجه به مجموعه‌ای از محدودیت‌ها و با استفاده از نرم‌افزار Lingo جواب‌ها و ماتریس $pay-off$ زیر بدست می‌آید:

$X_1 = (5.69, 8.85, 7.32)$ و $X_2 = (12.74, 7.72, 6.10)$

جدول ۳.۳: جدول $pay-off$

	$\phi_1(x)$	$\phi_2(x)$
X_1	۱۲۹۶۰/۴۷	۱۹/۰۶
X_2	۱۴۹۷۱/۵۴	۱۱/۶۷

فرض کنید آستانه مجاز توسط تصمیم‌گیرنده برای $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ به ترتیب $\alpha_1 = 1000$ و $\alpha_2 = 5$ تعریف شوند. با استفاده از این مقادیر، و با توجه به تعریف توابع عضویت و عدم‌عضویت مدل‌های خوش‌بینانه و بدبینانه به صورت زیر خواهند بود:

دیدگاه خوش‌بینانه:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \chi \\
s.t. \quad & (1-k)\frac{(14971.54)^t-(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^t}{(14971.54)^t-(12960.47)^t}- \\
& \quad k\frac{(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^t-(12960.47)^t}{(15971.54)^t-(12960.47)^t}+k\geq\chi \\
& \frac{(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^t-(12960.47)^t}{(15971.54)^t-(12960.47)^t}\leq 1-\frac{\chi}{k} \\
& (1-k)\frac{(19.06)^t-(7000/x_1x_2x_3)^t}{(19.06)^t-(11.67)^t}-k\frac{(7000/x_1x_2x_3)^t-(11.67)^t}{(24.06)^t-(11.67)^t}+k\geq\chi \\
& \frac{(7000/x_1x_2x_3)^t-(11.67)^t}{(24.06)^t-(11.67)^t}\leq 1-\frac{\chi}{k} \\
& x_1x_2x_3\geq 0,\ x_1x_2x_3\leq 600 \\
& x_1,x_2,x_3\geq 0. \\
& t>0 \text{ توسط تصمیم‌گیرنده تعریف شده است}
\end{aligned}$$

دیدگاه بدبینانه:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \chi \\
s.t. \quad & (1-k)\frac{(14971.54)^t-(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^t}{(14971.54)^t-(12960.47)^t}+k\geq\chi \\
& (1-k)\frac{(14971.54)^t-(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^t}{(14971.54)^t-(12960.47)^t}- \\
& \quad k\frac{(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^t-(13971.54)^t}{(14971.54)^t-(13971.54)^t}+k\geq\chi \\
& (1-k)\frac{(19.06)^t-(7000/x_1x_2x_3)^t}{(19.06)^t-(11.67)^t}+k\geq\chi \\
& (1-k)\frac{(19.06)^t-(7000/x_1x_2x_3)^t}{(19.06)^t-(11.67)^t}-k\frac{(7000/x_1x_2x_3)^t-(14.06)^t}{(19.06)^t-(14.06)^t}+k\geq\chi \\
& x_1x_2x_3\geq 0,\ x_1x_2x_3\leq 600 \\
& x_1,x_2,x_3\geq 0. \\
& t>0 \text{ توسط تصمیم‌گیرنده تعریف شده است}
\end{aligned}$$

برای $t=2$ و $k=\frac{1}{2}$، جواب به‌دست آمده برای تصمیم‌گیرنده خوش‌بین به صورت زیر است:

$$\chi=0.5,\ x_1=11.21,\ x_2=7.63,\ x_3=7.02,\phi_1=14628.56,\ \phi_2=11.66$$

و برای تصمیم‌گیرنده بدبین ، جواب به صورت زیر است:

$$\chi=1,\ x_1=9.75,\ x_2=6.57,\ x_3=9.36,\ \phi_1=14629.81,\ \phi_2=11.68$$

۱.۵.۳ مقایسه با روش‌های دیگر

در این بخش مثال‌های فوق را با برخی روش‌های دیگر موجود مانند روش زیمرمن، عملگر ماکزیمم مجموع و عملگر ماکزیمم حاصل‌ضرب [۲۹] و با در نظرگرفتن تابع عضویت غیرخطی برای ($t = ۲$) حل می‌کنیم.

در این روش‌ها تابع عدم‌عضویت مورد بررسی قرار نمی‌گیرد. مدل‌های کلی این روش‌ها به صورت زیر ارائه شده است و مقایسه نتایج بدست آمده در جدول ۴.۳ ارائه شده است.

- روش زیمرمن

$$
\begin{aligned}
& \max\ \lambda, \\
s.t.\quad & \mu_{L_i}(\phi_i(x)) \geq \lambda, \quad ۱ \leq i \leq l' \\
& \mu_{U_i}(\phi_i(x)) \geq \lambda, \quad l'+۱ \leq i \leq l \\
& \sum_{s=۱}^{S_j} b_{js} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m} \leq c_j, \quad ۱ \leq j \leq r' \\
& \sum_{s=۱}^{S_j} b_{js} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m} \geq c_j, \quad r'+۱ \leq j \leq r'' \\
& \sum_{s=۱}^{S_j} b_{js} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m} = c_j, \quad r''+۱ \leq j \leq r
\end{aligned}
$$

که در آن

$$.\lambda = \min\{\mu_{L_i}(\phi_i(x), \mu_{U_i}(\phi_i(x))\};\ ۱ \leq i \leq l,\ \lambda \in [۰, ۱],\ x_i \geq ۰.$$

  - مدل زیمرمن برای مثال اول

$$
\begin{aligned}
& \max\ \lambda \\
s.t.\quad & \frac{(۶۵۶/۳۶)^۲ - (۴/۷۵x_۱ + ۷/۲۵x_۲ + ۵/۵x_۳)^۲}{(۶۵۶/۳۶)^۲ - (۴۹۶)^۲} \geq \lambda \\
& \frac{(۵۰/۲۵{x_۱}^{۱/۲} - ۷/۷۵x_۱ + ۴۴/۵x_۲^{۲/۳} - ۹/۷۵x_۲ + ۶۱/۲۵x_۳^{۲/۳} - ۷/۲۵x_۳)^۲ - (۱۸/۸۱)^۲}{(۵۶۵/۳۲)^۲ - (-۱۸/۸۱)^۲} \geq \lambda \\
& ۲/۳۷۵x_۱ + ۳/۱۲۵x_۲ + ۳/۵x_۳ \leq ۳۶۱/۲۵ \\
& ۳/۵x_۱ + ۲/۳۷۵x_۲ + ۲/۳۷۵x_۳ = ۳۴۸/۲۵ \\
& ۳/۱۲۵x_۱ + ۲/۳۷۵x_۲ + ۳/۱۲۵x_۳ \geq ۳۲۱/۲۵ \\
& x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰. \\
& x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰, \quad ۰ \leq \lambda \leq ۱.
\end{aligned}
$$

و در آن

$$\lambda = \min\{\frac{(656.36)^2-(4.75x_1+7.25x_2+5.5x_3)^2}{(656.36)^2-(496)^2}, \frac{(50.25{x_1}^{1/2}-7.75x_1+44.5x_2^{2/3}-9.75x_2+61.25x_3^{2/3}-7.25x_3)^2-(18.81)^2}{(565.32)^2-(18.81)^2}\}$$

- مدل زیمرمن برای مثال دوم

$$\begin{aligned}
& \max\ \lambda \\
s.t.\quad & \frac{(14971.54)^2-(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^2}{(14971.54)^2-(12960.47)^2} \geq \lambda \\
& \frac{(19.06)^2-(7000/x_1x_2x_3)^2}{(19.06)^2-(11.67)^2} \geq \lambda \\
& x_1x_2x_3 \geq 0, \\
& x_1x_2x_3 \leq 600, \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.
\end{aligned}$$

و در آن

$$\lambda = \min\{\frac{(14971.54)^2-(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^2}{(14971.54)^2-(12960.47)^2}, \frac{(19.06)^2-(7000/x_1x_2x_3)^2}{(19.06)^2-(11.67)^2}\}$$

- عملگر ماکزیمم حاصل‌جمع

$$\begin{aligned}
& \max\{\mu_{L_i}(\phi_i(x))+\mu_{U_j}(\phi_j(x))\};\ 1 \leq i \leq l',\ l'+1 \leq j \leq l \\
& s.t. \\
& \mu_{L_i}(\phi_i(x)), \mu_{U_j}(\phi_j(x)) \in [0, 1],\ x_i \geq 0. \\
& \sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m} \leq c_j, \quad 1 \leq j \leq r' \\
& \sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m} \geq c_j, \quad r'+1 \leq j \leq r'' \\
& \sum_{s=1}^{S_j} b_{js} \prod_{m=1}^{n} x_m^{\gamma_m} = c_j, \quad r''+1 \leq j \leq r
\end{aligned}$$

- عملگر ماکزیمم حاصل‌جمع برای مثال اول

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda\\
s.t.\quad & 0 \le \frac{(656.36)^2 - (4.75x_1 + 7.25x_2 + 5.5x_3)^2}{(656.36)^2 - (496)^2} \le 1\\
& 0 \le \frac{(50.25{x_1}^{1/2} - 7.75x_1 + 44.5x_2^{2/3} - 9.75x_2 + 61.25x_3^{2/3} - 7.25x_3)^2 - (18.81)^2}{(565.32)^2 - (-18.81)^2} \le 1\\
& 2.375x_1 + 3.125x_2 + 3.5x_3 \le 361.25\\
& 3.5x_1 + 2.375x_2 + 2.375x_3 = 348.25\\
& 3.125x_1 + 2.375x_2 + 3.125x_3 \ge 321.25\\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0.\\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

و در آن

$$
\lambda = \{\tfrac{(656.36)^2-(4.75x_1+7.25x_2+5.5x_3)^2}{(656.36)^2-(496)^2} + \tfrac{(50.25{x_1}^{1/2}-7.75x_1+44.5x_2^{2/3}-9.75x_2+61.25x_3^{2/3}-7.25x_3)^2-(18.81)^2}{(565.32)^2-(18.81)^2}\}
$$

- عملگر ماکزیمم حاصل‌جمع برای مثال دوم

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda\\
s.t.\quad & 0 \le \frac{(14971.54)^2 - (1910375.01/x_1x_2x_3 + 51.5x_1x_2 + 62.26x_1x_3 + 40x_2x_3)^2}{(14971.54)^2 - (12960.47)^2} \le 1\\
& 0 \le \frac{(19.06)^2 - (7000/x_1x_2x_3)^2}{(19.06)^2 - (11.67)^2} \le 1\\
& x_1x_2x_3 \ge 0,\\
& x_1x_2x_3 \le 600,\\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

و در آن

$$
\lambda = \{\tfrac{(14971.54)^2-(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^2}{(14971.54)^2-(12960.47)^2} + \tfrac{(19.06)^2-(7000/x_1x_2x_3)^2}{(19.06)^2-(11.67)^2}\}
$$

• عملگر ماکزیمم حاصل‌ضرب

$$\begin{aligned}
&\max\{\mu_{L_i}(\phi_i(x)) \ * \ \mu_{U_j}(\phi_j(x))\}; \quad ۱ \le i \le l', l'+۱ \le j \le l \\
&s.t. \\
&\mu_{L_i}(\phi_i(x)), \mu_{U_j}(\phi_j(x)) \in [۰, ۱], \ x_i \ge ۰. \\
&\sum_{s=۱}^{S_j} b_{js} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m} \le c_j, \quad ۱ \le j \le r' \\
&\sum_{s=۱}^{S_j} b_{js} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m} \ge c_j, \quad r'+۱ \le j \le r'' \\
&\sum_{s=۱}^{S_j} b_{js} \prod_{m=۱}^{n} x_m^{\gamma_m} = c_j, \quad r''+۱ \le j \le r
\end{aligned}$$

• عملگر ماکزیمم حاصل‌ضرب برای مثال اول

$$\begin{aligned}
&\max \ \lambda \\
s.t. \quad &۰ \le \frac{(۶۵۶/۳۶)^۲ - (۴/۷۵x_۱ + ۷/۲۵x_۲ + ۵/۵x_۳)^۲}{(۶۵۶/۳۶)^۲ - (۴۹۶)^۲} \le ۱ \\
&۰ \le \frac{(۵۰/۲۵x_۱{}^{۱/۲} - ۷/۷۵x_۱ + ۴۴/۵x_۲^{۲/۳} - ۹/۷۵x_۲ + ۶۱/۲۵x_۳^{۲/۳} - ۷/۲۵x_۳)^۲ - (۱۸/۸۱)^۲}{(۵۶۵/۳۲)^۲ - (-۱۸/۸۱)^۲} \le ۱ \\
&۲/۳۷۵x_۱ + ۳/۱۲۵x_۲ + ۳/۵x_۳ \le ۳۶۱/۲۵ \\
&۳/۵x_۱ + ۲/۳۷۵x_۲ + ۲/۳۷۵x_۳ = ۳۴۸/۲۵ \\
&۳/۱۲۵x_۱ + ۲/۳۷۵x_۲ + ۳/۱۲۵x_۳ \ge ۳۲۱/۲۵ \\
&x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰. \\
&x_۱, x_۲, x_۳ \ge ۰.
\end{aligned}$$

و در آن

$$\lambda = \{\frac{(۶۵۶/۳۶)^۲-(۴/۷۵x_۱+۷/۲۵x_۲+۵/۵x_۳)^۲}{(۶۵۶/۳۶)^۲-(۴۹۶)^۲} \times \frac{(۵۰/۲۵x_۱{}^{۱/۲}-۷/۷۵x_۱+۴۴/۵x_۲^{۲/۳}-۹/۷۵x_۲+۶۱/۲۵x_۳^{۲/۳}-۷/۲۵x_۳)^۲-(۱۸/۸۱)^۲}{(۵۶۵/۳۲)^۲-(۱۸/۸۱)^۲}\}$$

• عملگر ماکزیمم حاصل‌ضرب برای مثال دوم

$$\begin{aligned}
&\max\ \lambda\\
s.t.\quad &0 \leq \frac{(14971.54)^2-(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^2}{(14971.54)^2-(12960.47)^2} \leq 1\\
&0 \leq \frac{(19.06)^2-(7000/x_1x_2x_3)^2}{(19.06)^2-(11.67)^2} \leq 1\\
&x_1x_2x_3 \geq 0,\\
&x_1x_2x_3 \leq 600,\\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

و در آن

$$\lambda = \{\frac{(14971.54)^2-(1910375.01/x_1x_2x_3+51.5x_1x_2+62.26x_1x_3+40x_2x_3)^2}{(14971.54)^2-(12960.47)^2} \times \frac{(19.06)^2-(7000/x_1x_2x_3)^2}{(19.06)^2-(11.67)^2}\}$$

جدول ۴.۳: نتایج مقایسه ها

مثال	روش زیمرمن	عملگر ماکزیمم حاصل‌جمع	عملگر ماکزیمم حاصل‌ضرب
مثال ۱	$\phi_1 = 583.92$	$\phi_1 = 637.05$	$\phi_1 = 593.20$
	$\phi_2 = 394.12$	$\phi_2 = 549.29$	$\phi_2 = 422.33$
مثال ۲	$\phi_1 = 16427.23$	$\phi_1 = 16423.93$	جواب بی‌کران
	$\phi_2 = 11.67$	$\phi_2 = 11.68$	جواب بی‌کران

از این نتایج محاسباتی، نتیجه می‌شود که در مورد مثال ۱ با افزایش مقادیر k، مقادیر به دست آمده از f_1 و f_2 به ترتیب از ۶۴۶٫۶۵ به ۵۹۷٫۹۹ کاهش و از ۴۳۹٫۰۷ به ۵۶۱٫۸۹ افزایش می‌یابند و از این رو سطح رضایت آنها نیز افزایش می‌یابد. علاوه‌براین، همان گونه که در جدول ۴.۳ مشاهده می‌شود این مقادیر هدف از آن‌چه که توسط هر یک از روش‌های موجود به دست آمده بهتر است. لذا براساس روش پیشنهادی، تصمیم‌گیرندگان ممکن است سطح مورد نظر خود را با توجه به سطوح رضایت خود انتخاب کنند و از این‌رو برای مسائل بهینه‌سازی دنیای واقعی مفید و سودمند باشد. به طور مشابه، نتایج مربوط به مسئله حمل‌ونقل مفروض را می‌توان مقایسه کرد.

فصل ۴

حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفه در محیط فازی شهودی

۱.۴ مقدمه

در مدل‌سازی یک مسئله بهینه‌سازی، بعضی مواقع اطلاعات مربوط به توابع هدف و یا محدودیت‌ها نادقیق هستند. یکی از رویکردهای کارآمد برای مواجهه با چنین مسائلی، بررسی جواب این چنین مسائل بهینه‌سازی در محیط فازی شهودی است. در اینجا، ضرایب نادقیق توابع و محدودیت‌های هدف را به عنوان اعداد فازی شهودی در نظر می‌گیریم و با مقدار بازه‌ای مورد انتظار آن تقریب می‌زنیم. علاوه‌براین، یک روش برنامه‌ریزی آرمانی برای حل این مسائل مورد بررسی قرار می‌گیرد. این روش توسعه‌یافته، با اجرا روی یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه سیستم مدیریت تولید محصولات کشاورزی، نشان داده می‌شود. کلیه مطالب این فصل در مرجع [۳۰] آمده است.

۲.۴ اعداد فازی شهودی و تقریب آن‌ها

تعریف ۱.۲.۴. یک مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}^I = \{(x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x)), x \in X\}$ از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، یک عدد فازی شهودی گفته می‌شود اگر $\mu_{\tilde{A}^I}$ و $\nu_{\tilde{A}^I}$ به ترتیب توابع عضویت و عدم‌عضویت باشند و $\nu_{\tilde{A}^I} \leq \mu^c_{\tilde{A}^I}$ که در آن $\mu^c_{\tilde{A}^I}$ متمم $\mu_{\tilde{A}^I}$ است.

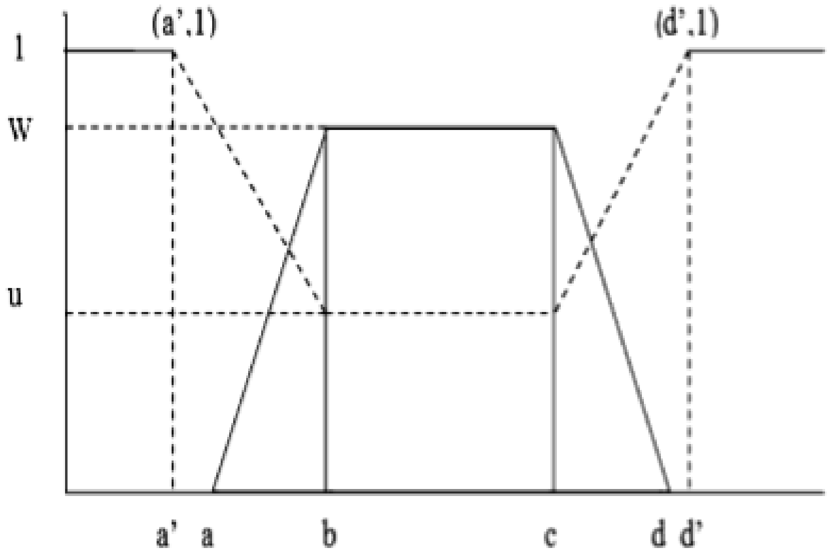
تعریف ۲.۲.۴. یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای که با پارامترهای $a' \le a \le b \le c \le d \le d'$ به صورت $< (a, b, c, d, \mu_{\tilde{A}^I}), (a', b, c, d', \nu_{\tilde{A}^I}) >$ نشان داده می‌شود، یک مجموعه فازی شهودی روی مجموعه $\mathbb{R}$ است و توابع عضویت و عدم‌عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)w}{(b-a)}, & a \le x < b \\ w, & b \le x < c \\ \frac{(d-x)w}{(d-c)}, & c \le x < d. \end{cases} \tag{۱.۴}$$

و

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{(x-a')u+(b-x)}{(b-a')}, & a' \le x < b \\ u, & b \le x < c \\ \frac{(x-d')u+(c-x)}{(c-d')}, & c \le x < d' \end{cases} \tag{۲.۴}$$

در اینجا مقادیر w و u به ترتیب بیانگر حداکثر درجه تابع عضویت و حداقل درجه تابع عدم‌عضویت هستند، به طوری‌که $\mu_{\tilde{A}^I} : X \to [0, 1]$ و $\nu_{\tilde{A}^I} : X \to [0, 1]$ و $0 \le w + u \le 1$. توابع عضویت و عدم‌عضویت یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای در شکل ۱.۴ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱.۴: توابع عضویت و عدم‌عضویت یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای

تعریف ۳.۲.۴. در یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای اگر قرار دهیم $(b = c)$ آن‌گاه آن به یک عدد فازی شهودی مثلثی با پارامترهای $a' \le a \le b \le d \le d'$ تبدیل می‌شود و آن را به صورت زیر

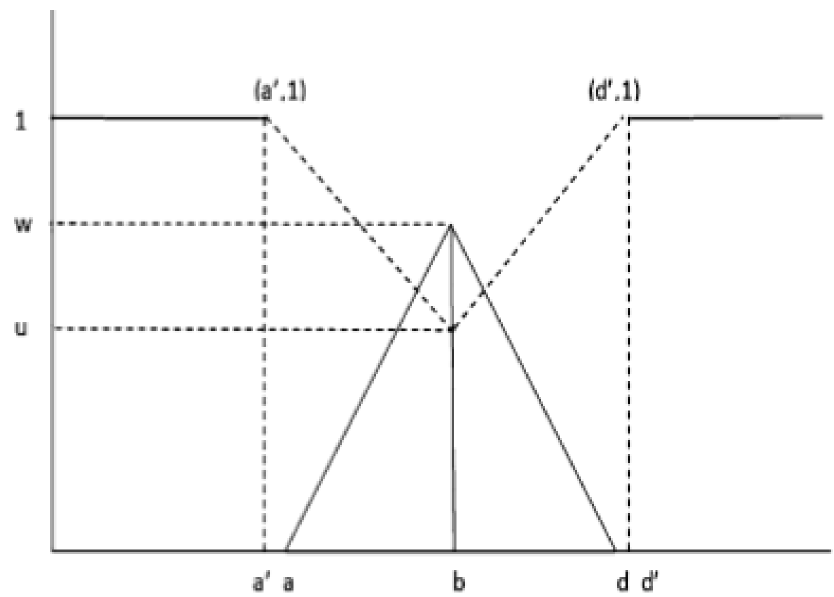
$\tilde{A}^I =< (a, b, d, \mu_{\tilde{A}^I}), (a', b, d', \nu_{\tilde{A}^I}) >$ نمایش می‌دهیم و توابع عضویت و عدم‌عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)w}{(b-a)}, & a \le x < b \\ w, & x = b \\ \frac{(d-x)w}{(d-b)}, & b \le x < d \end{cases} \tag{۳.۴}$$

و

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{(x-a')u+(b-x)}{(b-a')}, & a' \le x < b \\ u, & x = b \\ \frac{(x-d')u+(b-x)}{(b-d')}, & b \le x < d'. \end{cases} \tag{۴.۴}$$

توابع عضویت و عدم‌عضویت یک عدد فازی شهودی مثلثی در شکل ۲.۴ نشان داده شده‌اند.



شکل ۲.۴: توابع عضویت و عدم‌عضویت یک عدد فازی شهودی مثلثی

تعریف ۴.۲.۴ (بازه انتظار عدد فازی). بازه انتظار یک عدد فازی $\tilde{A}$، که با $EI(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود، یک روش برای تقریب یک عدد فازی در قالب یک بازه قطعی است. قضیه بازه انتظار یک عدد فازی توسط دوبویس و پراد [۸] معرفی شد. آن‌ها تقریب یک عدد فازی را به عنوان مقدار میانگین عدد فازی در نظر گرفتند و تعریف دقیقی برای مقدار میانگین یک بازه فازی ارائه دادند تا نشان دهند که جمع کردن مقدار میانگین در قالب کار امکان‌پذیر است. بعدها، هیلپرن [۱۶] مقدار مورد انتظار یک عدد فازی را با یک مجموعه تصادفی تعریف کرد و دو نماد، بازه انتظار و مقدار

مورد انتظار عدد فازی را معرفی کرد. او مقدار مورد انتظار یک عدد فازی را به عنوان مرکز بازه انتظار آن عدد تعریف کرد. فرض کنید $\tilde{A} =< (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴) >$ یک عدد فازی باشد، آنگاه عدد بازه‌ای فازی $\tilde{A}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EI(\tilde{A}) = [E_*(\tilde{A}), E^*(\tilde{A})] \tag{۵.۴}$$

که در آن،

$$E_*(\tilde{A}) = a_۲ - \int_{a_۱}^{a_۲} f_{\tilde{A}}(x)dx \tag{۶.۴}$$

$$E^*(\tilde{A}) = a_۳ + \int_{a_۳}^{a_۴} g_{\tilde{A}}(x)dx \tag{۷.۴}$$

در اینجا، دو تابع $f_{\tilde{A}}(x)$ و $g_{\tilde{A}}(x)$ به صورت $f_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a_۱}{a_۲-a_۱}$ و $g_{\tilde{A}}(x) = \frac{a_۴-x}{a_۴-a_۳}$ تعریف شده‌اند.

تعریف ۵.۲.۴ (بازه انتظار عدد فازی شهودی). فرض کنید اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, b_۱, b_۲, b_۳, b_۴$ که $a_۱ \leq a_۲ \leq a_۳ \leq a_۴ \leq b_۱ \leq b_۲ \leq b_۳ \leq b_۴$ و توابع $f_{\tilde{A}^I}, g_{\tilde{A}^I}, h_{\tilde{A}^I}$ و $k_{\tilde{A}^I} : \mathbb{R} \to [۰, ۱]$ موجود باشند و نیز توابع $f_{\tilde{A}^I}$ و $k_{\tilde{A}^I}$ غیرکاهشی و توابع $h_{\tilde{A}^I}$ و $g_{\tilde{A}^I}$ غیرافزایشی باشند، آنگاه عدد فازی شهودی $\tilde{A}^I = \{(x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x)), x \in X\}$ به وسیله تابع عضویت و تابع عدم‌عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} f_{\tilde{A}^I}(x), & a_۱ \leq x < a_۲ \\ ۱, & a_۲ \leq x < a_۳ \\ g_{\tilde{A}^I}(x), & a_۳ \leq x < a_۴ \\ ۰, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \tag{۸.۴}$$

و

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} h_{\tilde{A}^I}(x), & b_۱ \leq x < b_۲ \\ ۰, & b_۲ \leq x < b_۳ \\ k_{\tilde{A}^I}(x), & b_۳ \leq x < b_۴ \\ ۱, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \tag{۹.۴}$$

لذا بازه انتظار عدد فازی شهودی $\tilde{A}^I = \langle (a_۱, a_۲, a_۳, a_۴), (b_۱, b_۲, b_۳, b_۴) \rangle$ که توسط [۱۱] ارائه شده است، یک بازه قطعی است و به صورت $EI(\tilde{A}^I) = [E_*(\tilde{A}^I), E^*(\tilde{A}^I)]$ تعریف می‌شود که در آن

$$E_*(\tilde{A}^I) = \frac{a_۲ + b_۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\int_{b_۱}^{b_۲} h_{\tilde{A}^I}(x)dx - \frac{۱}{۲}\int_{a_۱}^{a_۲} f_{\tilde{A}^I}(x)dx \tag{۱۰.۴}$$

$$E^*(\tilde{A}^I) = \frac{a_۳ + b_۴}{۲} + \frac{۱}{۲}\int_{a_۳}^{a_۴} g_{\tilde{A}^I}(x)dx - \frac{۱}{۲}\int_{b_۳}^{b_۴} k_{\tilde{A}^I}(x)dx \tag{۱۱.۴}$$

و

$$h_{\tilde{A}^I}(x) = \frac{b_2 - x}{b_2 - b_1}, \quad f_{\tilde{A}^I}(x) = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$
$$g_{\tilde{A}^I}(x) = \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, \quad k_{\tilde{A}^I}(x) = \frac{x - b_3}{b_4 - b_3}$$

تعریف ۶.۲.۴. فرض کنید $\tilde{A}^I =< (a,b,d;\mu_{\tilde{A}}),(a',b,d';\nu_{\tilde{A}}) >$ یک عدد فازی شهودی مثلثی باشد، آن‌گاه به کمک تعریف بالا، بازه انتظار عدد فازی شهودی مثلثی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EI(\tilde{A}^I) = [E_*(\tilde{A}^I), E^*(\tilde{A}^I)] \tag{۱۲.۴}$$

که در آن

$$\begin{aligned} E_*(\tilde{A}^I) &= \frac{b+b'}{2} + \frac{1}{2}\int_{b_1}^{a} h_{\tilde{A}^I}(x)dx - \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a} f_{\tilde{A}^I}(x)dx \\ &= \frac{3b + a' + (b-a')u - (b-a)w}{4} \end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

و

$$\begin{aligned} E^*(\tilde{A}^I) &= \frac{b+d'}{2} + \frac{1}{2}\int_{a}^{a_2} g_{\tilde{A}^I}(x)dx - \frac{1}{2}\int_{a}^{b_2} k_{\tilde{A}^I}(x)dx \\ &= \frac{3b + d' + (d-b)w + (b-d')u}{4} \end{aligned} \tag{۱۴.۴}$$

۳.۴ فرمول‌بندی مسئله

یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با k هدف و m محدودیت و n متغیر تصمیم‌گیری که به صورت زیر داده شده است، را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} Optimize \quad & Z(X) = [C_1(X), C_2(X), \ldots, C_k(X)] \\ s.t. \quad & AX \ (\geq, =, \leq) \ b \\ & X \ \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۵.۴}$$

که در آن $X \in \mathbb{R}^n, b^T \in \mathbb{R}^m, {C_k}^T \in \mathbb{R}^n$ و A یک ماتریس $m \times n$ از ضرایب است. و فرض می‌کنیم $Z(X) = [Z_1(X), Z_2(X), \ldots, Z_k(X)]$.

در اینجا $(\geq, =, \leq)$ نشان‌دهنده نابرابری است که ممکن است به طور کلی هر یک از سه نوع $\leq$ یا $=$ یا $\geq$ باشد.

۱.۳.۴ فرمول برنامه‌ریزی آرمانی

برنامه‌ریزی آرمانی [1] خطی یکی از جمله روش‌های اساسی برای مدل‌هایی است که تصمیم‌گیرنده هم‌زمان درصدد دست‌یابی به چندین هدف می‌باشد. به منظور ایجاد درکی روشن از برنامه‌ریزی

[1] Goal Programming

آرمانی، آشنایی با مفاهیم زیر ضروری است:
هدف: عبارتی کلی است که نشان‌دهنده علایق تصمیم‌گیرنده در مواردی مانند مینیمم‌سازی هزینه یا ماکزیمم‌سازی سهم بازار است.
سطح مطلوب عددی (سطح تمایل): سطح مطلوب عبارت است از یک مقدار عددی خاص همراه با یک سطح توفیق قابل قبول یا مطلوب برای هدف معین.
آرمان: هدف مرتبط با یک سطح تمایل را آرمان می‌نامند. به عنوان مثال آرزوی "کسب سودی معادل x ریال" یا "کاهش هزینه‌ای معادل yریال"، یک آرمان می‌باشد.
متغیرهای انحراف از آرمان: دست‌یابی به سطح تمایل تعیین‌شده در یک هدف وابسته به امکانات، منابع، محدودیت‌ها و ... می‌باشد که در عمل ممکن است تصمیم‌گیرنده به سطح تمایل تعیین‌شده دست یابد یا نیابد. در بسیاری از موارد ممکن است بین آرزوها، تمایلات و خواسته‌های تصمیم‌گیرنده و آن‌چه که در عمل به آن می‌توان دست یافت، تفاوت و اختلاف وجود داشته باشد. این میزان تفاوت در مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی توسط متغیرهایی که به آن متغیرهای انحراف از آرمان گفته می‌شود، اندازه‌گیری می‌شود. متغیرهای انحراف از آرمان را با d_k^- و d_k^+ نشان می‌دهیم. d_k^+ میزان پیشی گرفتن از آرمان تعیین‌شده را نشان می‌دهد و d_k^+ میزان عدم دست‌یابی به آرمان تعیین شده است.
فرض کنید $Z_k(X);\ k = ۱, ۲, \dots, K$ تمامی توابع هدف مسئله باشند. و $\tilde{g_k}$ آرمان موردنظر تابع هدف kام باشد. در این روش به جای اینکه هریک از توبع هدف را بهینه کنیم از تصمیم‌گیرنده خواسته می‌شود که برای هریک از توابع هدف، آرمانی را در نظر بگیرد که این مقدار بهترین مقداری است که آن تابع هدف می‌تواند اختیار کند. سپس باید در جستجوی جوابی باشیم که جمع موزون انحراف اهداف از آرمان‌های مربوطه را کمینه سازد. در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
Z_۱(X) &= g_۱, && (\text{آرمان اول}) \\
Z_۲(X) &= g_۲, && (\text{آرمان دوم}) \\
&\vdots && \quad\vdots \\
Z_K(X) &= g_K. && (\text{آرمان } K\text{ام})
\end{aligned}
$$

از آن‌جا که دست‌یابی هم‌زمان به کلیه آرمان‌ها امکان‌پذیر نمی‌باشد، تابع هدف تلفیقی [۲] برای برنامه‌ریزی آرمانی تعیین می‌شود. با این فرض که انحرافات مثبت و منفی از آرمان‌ها از اهمیت یکسانی برخوردار باشند، تابع هدف تلفیقی برای مدل برنامه‌ریزی آرمانی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & X = \sum_{k=۱}^{K} |Z_k(X) - g_k| \\
s.t. \quad & AX(\geq, =, \leq)\ b \\
& X\ \geq ۰.
\end{aligned}
$$

[2]Combination

حال اگر عبارت داخل قدرمطلق را برابر با d_k قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\min \quad & X = \sum_{k=1}^{K} |d_k| \\
s.t. \quad & d_k = Z_k(X) - g_k \\
& AX(\geq, =, \leq)\ b \\
& X \ \geq 0.
\end{aligned}$$

و چون d_k می‌تواند مقدار مثبت یا منفی باشد می‌توان آن را با تفاضل دو متغیر غیرمنفی جدید d_k^+ و d_k^- جایگزین کرد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& d_k = d_k^+ - d_k^- \qquad d_k^+ \geq 0, d_k^- \geq 0, \\
& d_k = d_k^+ - d_k^- = d_k^- - d_k^+, \qquad k = 1, 2, \ldots, K.
\end{aligned}$$

لذا مدل برنامه‌ریزی آرمانی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\min \quad & X = \sum_{k=1}^{K} d_k^+ + d_k^- \\
s.t. \quad & Z_k(X) + d_k^- - d_k^+ = g_k \\
& AX(\geq, =, \leq)\ b \\
& X, d_k^+, d_k^- \ \geq 0.
\end{aligned} \tag{۱۶.۴}$$

مدل برنامه‌ریزی آرمانی ۱۶.۴ را می‌توانیم با استفاده از روش سیمپلکس حل کنیم.
در اکثر موارد محدودیت هدف، شامل متغیرهای d_k^+ و d_k^- می‌باشد اما در شرایطی ممکن است یکی از این دو متغیر در محدودیت هدف ظاهر نشوند.
اگر d_k^+ در محدودیت هدف ظاهر نشود بیانگر این واقعیت است که موفقیت بیش از حد این سطح از آرمان امکان‌پذیر نیست. و این نمونه‌ای از آرمان کران بالا است و مشابه نامعادله $\leq$ در مدل برنامه‌ریزی خطی است. در این حالت محدودیت هدف به صورت زیر خواهد بود:

$$g_k = Z_k(X) + d_k^- \Longrightarrow Z_k(X) \leq g_k.$$

حال اگر d_k^- در محدودیت هدف ظاهر نشود بیانگر این واقعیت است که موفقیت کمتر از حد این سطح از آرمان امکان‌پذیر نیست. و این نمونه‌ای از آرمان کران پایین است و مشابه نامعادله $\geq$ در مدل برنامه‌ریزی خطی است. در این حالت محدودیت هدف به صورت زیر خواهد بود:

$$g_k = Z_k(X) - d_k^+ \Longrightarrow Z_k(X) \geq g_k.$$

همچنین ممکن است انحراف از برخی از آرمان‌ها مهمتر از انحراف از سایر آرمان‌ها باشد و یا برای یک آرمان مشخص، انحراف در یک جهت اهمیت بیشتری نسبت به جهت مخالف آن داشته باشد که در این‌صورت مدل برنامه‌ریزی آرمانی ۱۶.۴ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\min \quad & X = \sum_{k=۱}^{K} w_k^+ d_k^+ + w_k^- d_k^- \\
s.t. \quad & Z_k(X) + d_k^- - d_k^+ = g_k \\
& AX(\geq, =, \leq)\ b \\
& X, d_k^+, d_k^- \ \geq ۰.
\end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

۲.۳.۴ روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی آرمانی

برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی آرمانی روش‌هایی از جمله روش وزن‌دهی و روش اولویت وجود دارد که در ادامه به بیان این روش‌ها می‌پردازیم.

روش وزن‌دهی

در روش وزن‌دهی [۳] یک تابع تک‌هدفه تشکیل می‌شود که مجموع وزین توابع مورد علاقه (توابع آرمانی)، هدف مسئله می‌باشد. فرض کنید برنامه‌ریزی آرمانی دارای K هدف باشد به‌طوری‌که kامین هدف به صورت زیر باشد:

$$\min\ g_k, \quad k = ۱, ۲, \ldots, K.$$

تابع هدف، ترکیبی از تمام این هدف‌ها است که در آن w_kها وزن‌های هر کدام از اهداف‌اند که تصمیم‌گیرنده آن را مشخص می‌کند.

روش اولویت

در روش اولویت [۴] تصمیم‌گیرنده باید آرمان‌هایش(اهدافش) را اولویت‌بندی کند. فرض کنید K هدف مسئله به صورت زیر مشخص شده باشند:

$$\begin{aligned}
&\min g_۱ = \rho_۱, && \text{(بالاترین اولویت)} \\
&\quad \vdots && \quad \vdots \\
&\min g_K = \rho_K. && \text{(پایین‌ترین اولویت)}
\end{aligned}$$

که در آن ρ_k یکی از متغیرهای d_k^+ یا d_k^- است که آرمان k را نشان می‌دهد.
روش حل به‌طوری است که ابتدا تابع هدف با بالاترین اولویت یعنی $g_۱$ را انتخاب و تحت محدودیت‌های مسئله حل می‌کنیم. فرض کنید x^* جواب بهینه مسئله حل شده باشد. سپس محدودیت جدید $g_۱(x) = g_۱(x^*)$ را به مسئله اضافه می‌کنیم و تابع هدف اولویت بعدی را در نظر می‌گیریم. این روند را تا تابع هدف باکمترین اولویت یعنی g_K ادامه می‌دهیم.

[3] Weights method
[4] Preemptire method

۳.۳.۴ فرمول برنامه‌ریزی آرمانی فازی

در بسیاری از مسائل زندگی واقعی، یک تصمیم‌گیرنده ممکن است با اطلاعات نادقیقی برای تنظیم سطح آرمانی که باید توسط تابع هدف به دست آید مواجه شود. بنابراین، اگر یک سطح آرمانی نادقیق برای هر یک از توابع هدف معرفی کنیم، آنگاه اهداف مسئله (۱۵.۴) را می‌توان به صورت آرمان‌های فازی در نظر گرفت. بنابراین اگر $\tilde{g_k}$ سطح آرمانی تخصیص داده شده به تابع هدف kام، یعنی $Z_k(X)$ باشد، آنگاه آرمان‌های فازی به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

۱. $Z_k(X) \gtrsim \tilde{g_k}$، برای ماکزیمم کردن $Z_k(X)$ و

۲. $Z_k(X) \lesssim \tilde{g_k}$، برای مینیمم کرددن $Z_k(X)$

از این‌رو، مسئله (۱۵.۴) را می‌توان به عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی آرمانی چندهدفه فازی زیر بیان کرد:

$$
\begin{aligned}
Find \quad & X \\
s.t. \quad & Z_k(X) \gtrsim \tilde{g_k}, \quad k = 1, 2, \cdots k_1 \\
& Z_k(X) \lesssim \tilde{g_k}, \qquad k = k_1 + 1, \cdots k \\
& AX \ (\geq, =, \leq) \ b, \\
& X \ \geq 0.
\end{aligned}
\tag{۱۸.۴}
$$

۴.۳.۴ ساختن تابع عضویت

اگر l_k کران پایین تولورانس برای آرمان فازی kام باشد، آنگاه تابع عضویت برای آرمان فازی kام $Z_k(X) \gtrsim \tilde{g_k}$ می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$
\mu_{Z_k}(X) = \begin{cases} 1, & Z_k(X) \geq g_k \\ \frac{Z_k(X) - l_k}{g_k - l_k}, & l_k \leq Z_k(X) \leq g_k \\ 0, & Z_k(X) \leq l_k \end{cases}
\tag{۱۹.۴}
$$

و اگر u_k کران بالای تولورانس برای آرمان فازی kام باشد، آنگاه تابع عضویت برای آرمان فازی kام $Z_k(X) \lesssim \tilde{g_k}$ می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$
\mu_{Z_k}(X) = \begin{cases} 1, & Z_k(X) \leq g_k \\ \frac{u_k - Z_k(X)}{u_k - g_k}, & g_k \leq Z_k(X) \leq u_k \\ 0, & Z_k(X) \geq u_k \end{cases}
\tag{۲۰.۴}
$$

چون بیشترین مقدار این توابع عضویت یک است، لذا این توابع عضویت می‌توانند برحسب انحراف پایین و انحراف بالایی به صورت زیر نوشته شوند:

$$\frac{Z_k(X)-l_k}{g_k-l_k}+d_k^- - d_k^+ = ۱ \qquad (۲۱.۴)$$

$$\frac{u_k-Z_k(X)}{u_k-g_k}+d_k^- - d_k^+ = ۱ \qquad (۲۲.۴)$$

که در آن $d_k^-, d_k^+ \geq ۰, \quad d_k^- d_k^+ = ۰$. اکنون این ایده مربوط به مسائل برنامه‌ریزی آرمانی چندهدفه فازی را به مسائل برنامه‌ریزی آرمانی فازی شهودی چندهدفه تعمیم می‌دهیم.

۴.۴ مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه با پارامترهای فازی شهودی

اکنون یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه با n متغیر تصمیم‌گیری، m محدودیت و k تابع هدف را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} Max \quad & \tilde{Z}^I(X) = [\tilde{C_۱}^I X, \tilde{C_۲}^I X, \tilde{C_۳}^I X, \cdots, \tilde{C_k}^I X] \\ s.t. \quad & \tilde{A}_{ij}^I X_j (\gtrsim, \approx, \lesssim) \tilde{b_i}^I, \quad i = ۱, ۲, ۳, \cdots, m \\ & X_j \geq ۰ \qquad j = ۱, ۲, ۳, \cdots, n, \end{aligned} \qquad (۲۳.۴)$$

که در آن $X = \{X_۱, X_۲, X_۳, \cdots, X_n\}$، $\tilde{C_k}^I (k = ۱, ۲, \cdots, K)$ و $\tilde{b_i}^I (i = ۱, ۲, ۳, \cdots, m)$. X و $\tilde{b_i}^I$ به ترتیب بردارهای n بعدی و m بعدی هستند. $\tilde{A}^I$ یک ماتریس $m \times n$ با پارامترهای فازی شهودی است و $\tilde{b_i}^I$ و $\tilde{C_k}^I$ اعداد فازی شهودی هستند. از آنجا که مسئله (۲۳.۴) ضرایب فازی شهودی با توزیع احتمالی در بازه‌های نامشخص دارد لذا برحسب بازه‌های انتظار آن تقریب می‌شود. فرض کنید $EI(\tilde{A}^I)$ بازه انتظار عدد فازی شهودی $\tilde{A}^I$ باشد که توسط تعریف ۵.۲.۴ توصیف شده است. یعنی، $EI(\tilde{A}^I) = [E_*(\tilde{A}^I), E^*(\tilde{A}^I)]$ که در آن $E_*(\tilde{A}^I)$ و $E^*(\tilde{A}^I)$ به ترتیب کران پایین و بالایی بازه انتظار $EI(\tilde{A}^I)$ از عدد فازی شهودی $\tilde{A}^I$ است. از آنجا که ضرایب تابع هدف، $\tilde{C_k}^I$ اعداد فازی شهودی هستند، بازه انتظار $\tilde{C_k}^I$ به صورت زیر تعریف می‌شود: $EI(\tilde{C_k}^I) = [E_*(\tilde{C_k}^I), E^*(\tilde{C_k}^I)]$. که در آن $E_*(\tilde{C_k}^I)$ و $E^*(\tilde{C_k}^I)$ در تعریف بازه مورد انتظار داده شده‌اند. به این ترتیب $EI(\tilde{C_k}^I)$ می‌تواند به عنوان یک بازه بسته به صورت $[E_*(\tilde{C_k}^I), E^*(\tilde{C_k}^I)]$ باشد، به طوری که $\tilde{C_k}^I \in [E_*(\tilde{C_k}^I), E^*(\tilde{C_k}^I)]$.

اکنون کران پایین و بالا برای بازه‌های انتظار مربوط به تابع هدف به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$[\tilde{Z}^I(X)]^L = \sum_{j=۱}^{n} E_*(\tilde{C_{kj}}^I) X_j \qquad (۲۴.۴)$$

و

$$[\tilde{Z}^I(X)]^U = \sum_{j=۱}^{n} E^*(\tilde{C_{kj}}^I) X_j \qquad (۲۵.۴)$$

در مرحله بعد، ما یک تابع عضویت برای تابع هدف ماکزیمم‌سازی $Z_k(x)$ ایجاد می‌کنیم که می‌تواند توسط کران بالای بازه انتظار آن بیان شود، یعنی

$$[\tilde{Z}^I(X)]^U = \sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{C_{kj}}^I)X_j \tag{۲۶.۴}$$

به طور مشابه، برای ساختن یک تابع عضویت برای تابع هدف مینیم‌سازی $Z_k(x)$ که توسط کران پایین بازه انتظار آن بیان می‌شود داریم:

$$[\tilde{Z}^I(X)]^L = \sum_{j=1}^{n} E_*(\tilde{C_{kj}}^I)X_j \tag{۲۷.۴}$$

و نامساوی‌های قیدی

$$\sum_{j=1}^{n}(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \gtrsim \tilde{B_i}^I \qquad (i = 1, 2, \cdots, m_1) \tag{۲۸.۴}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \lesssim \tilde{B_i}^I \qquad (i = m_1 + 1, m_1 + 2, \cdots, m_2) \tag{۲۹.۴}$$

برحسب مقادیر انتظار می‌توانند به صورت زیر بیان شوند:

$$\sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \geq E_*(\tilde{B_i}^I) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m_1) \tag{۳۰.۴}$$

$$\sum_{j=1}^{n} E_*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \leq E^*(\tilde{B_i}^I) \qquad (i = m_1 + 1, m_2 + 2, \cdots, m_2) \tag{۳۱.۴}$$

و محدودیت‌های تساوی فازی شهودی

$$\sum_{j=1}^{n}(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \approx \tilde{B_i}^I \qquad (i = m_2 + 1, m_2 + 2, \cdots, m) \tag{۳۲.۴}$$

می‌توانند به دو نامساوی به صورت زیر تبدیل شوند.

$$\sum_{j=1}^{n} E_*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \leq E^*(\tilde{B_i}^I) \qquad (i = m_2 + 1, m_2 + 2, \cdots, m) \tag{۳۳.۴}$$

$$\sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \geq E_*(\tilde{B_i}^I) \qquad (i = m_2 + 1, m_2 + 2, \cdots, m) \tag{۳۴.۴}$$

بنابراین مسأله ماکزیمم‌سازی مورد نظر به مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Max[\tilde{Z}^I(X)]^U = \sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{C_{kj}}^I)X_j && k = 1,2,3,\cdots,K\\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \geq E_*(\tilde{B_i}^I), && i = 1,2,\cdots,m_1\\
&\sum_{j=1}^{n} E_*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \leq E^*(\tilde{B_i}^I), && i = m_1+1, m_1+2,\cdots,m_2\\
&\sum_{j=1}^{n} E_*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \leq E^*(\tilde{B_i}^I), && i = m_2+1, m_2+2,\cdots,m\\
&\sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \geq E_*(\tilde{B_i}^I), && i = m_2+1, m_2+2,\cdots,m\\
&X_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{۳۵.۴}$$

۵.۴ فرمول‌بندی برنامه‌ریزی آرمانی فازی شهودی

اکنون با اختصاص یک سطح آرمانی به هر یک از اهداف، آن‌ها را به آرمان‌های فازی تبدیل می‌کنیم. بنابراین با استفاده از روش برنامه‌ریزی آرمانی، مسئله (۳۵.۴) می‌تواند با در نظر گرفتن سطوح آرمانی خاص و معرفی متغیرهای انحراف پایینی و بالایی برای هر یک از توابع هدف به آرمان‌های فازی تبدیل شود. در روش پیشنهادی تابع هدف ماکزیمم‌سازی بالا، به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{C_{kj}}^I)X_j - l_k}{g_k - l_k} + d_k^- - d_k^+ = 1 \tag{۳۶.۴}$$

که در آن، $d_k^-, d_k^+ \geq 0$ و $d_k^- d_k^+ = 0$ متغیرهای انحراف پایین و بالایی هستند. و g_k، سطح آرمانی kامین هدف است و بیشترین سطح قابل قبول u_k و کمترین سطح قابل قبول l_k برای kامین آرمان به ترتیب جواب های ایده‌آل و ضدایده‌آل هستند و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$g_k = \max \sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{C_{kj}}^I)X_j, \qquad (k = 1,2,3,\cdots K) \tag{۳۷.۴}$$

$$l_k = \min \sum_{j=1}^{n} E_*(\tilde{C_{kj}}^I)X_j, \qquad (k = 1,2,3,\cdots K) \tag{۳۸.۴}$$

با استفاده از روش مینیمم مجموع برنامه‌ریزی آرمانی، مسئله برنامه‌ریزی آرمانی فازی شهودی فوق به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Find \qquad x \in X \\
&s.t. \quad \min \quad Z = \sum_{k=1}^{K} w_k d_k^- \\
&\qquad s.t. \\
&\qquad \frac{\sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{C_{kj}}^I)X_j - l_k}{g_k - l_k} + d_k^- - d_k^+ = 1, \qquad k = 1,2,3,\ldots,K \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \geq E_*(\tilde{B_i}^I), \quad i = 1,2,\cdots,m_1 \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} E_*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \leq E^*(\tilde{B_i}^I), \qquad i = m_1+1, m_1+2,\cdots,m_2 \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} E_*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \leq E^*(\tilde{B_i}^I), \qquad i = m_2+1, m_2+2,\cdots,m \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} E^*(\tilde{A_{ij}}^I)X_j \geq E_*(\tilde{B_i}^I), \qquad i = m_2+1, m_2+2,\cdots,m \\
&\qquad X_j \geq 0, \qquad j = 1,2,3,\cdots,n, \quad d_k^-, d_k^+ \geq 0 \text{ و } d_k^- d_k^+ = 0.
\end{aligned} \tag{۳۹.۴}$$

در اینجا Z نشان‌دهنده تابع دستیابی است. وزن‌های w_k متناظر با متغیرهای انحراف پایینی d_k^- به صورت زیر داده می‌شوند:

$$w_k = \begin{cases} \frac{1}{g_k - l_k}, & \text{برای ماکزیمم‌سازی} \\ \frac{1}{u_k - g_k}, & \text{برای مینیمم‌سازی} \end{cases} \tag{۴۰.۴}$$

۶.۴ مسئله برنامه‌ریزی کسری در محیط فازی شهودی

مسئله‌ای را در نظر بگیرید که می‌بایست کارایی یک سیستم را بهینه کند. با در نظر گرفتن یک مسئله کلی‌تر، فرض کنید باید نسبت دو تابع هدف، از K تابع هدف را به عنوان هسته مسئله بهینه‌سازی کنیم. فرض کنید دو هدف خطی $\tilde{C_p}^I Z_p(X) > 0$ و $\tilde{C_q}^I Z_q(X) > 0$ با پارامترهای فازی شهودی در ضرایب آن‌ها، موجود باشند، بنابراین به یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\tilde{C_p}^I Z_p(X)}{\tilde{C_q}^I Z_q(X)} \\ & \tilde{C_k}^I Z_k(X) \succsim \tilde{b_k}^I \\ & \tilde{C_s}^I Z_s(X) \precsim \tilde{b_s}^I \\ & \tilde{C_t}^I Z_t(X) \approx \tilde{b_t}^I \\ & X_j \geq 0 \end{aligned} \tag{۴۱.۴}$$

که در آن، $\tilde{C_p}^I Z_p(X) > 0$ و $\tilde{C_q}^I Z_q(X) > 0$. این مسئله معادل مسئله زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{C_p}^I Z_p(X) - \tilde{C_q}^I Z_q(X) \\ s.t. \quad & \tilde{C_p}^I Z_p(X) - r\tilde{C_q}^I Z_q(X) > 0 \\ & \tilde{C_k}^I Z_k(X) \succsim \tilde{b_k}^I \\ & \tilde{C_s}^I Z_s(X) \precsim \tilde{b_s}^I \\ & \tilde{C_t}^I Z_t(X) \approx \tilde{b_t}^I \\ & X_j \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن r یک عدد حقیقی مثبت است و نشان‌دهنده محدودیتی است که در آن نسبت باید همواره بزرگتر از یک سطح r باشد. بنابراین مسئله (۴۱.۴) می‌تواند به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی آرمانی فازی شهودی به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{C_p}^I Z_p(X) - \tilde{C_q}^I Z_q(X) \\ s.t. \quad & \tilde{C_p}^I Z_p(X) - r\tilde{C_q}^I Z_q(X) > 0 \\ & \tilde{C_k}^I Z_k(X) \succsim \tilde{b_k}^I \\ & \tilde{C_s}^I Z_s(X) \precsim \tilde{b_s}^I \\ & \tilde{C_t}^I Z_t(X) \approx \tilde{b_t}^I \\ & X_j \geq 0 \end{aligned} \tag{۴۲.۴}$$

که در آن $k,s,t \in \{(1,2,\ldots,K)-(p,q)\}$, $(j=1,2,3,\ldots,n)$؛ $\tilde{C_k}^I, \tilde{C_s}^I, \tilde{C_t}^I$ و $\tilde{b_k}^I, \tilde{b_s}^I, \tilde{b_t}^I$ اعداد فازی شهودی هستند. اکنون مسئله بالا را می‌توان با تقریب روش پیش‌بینی‌شده مورد انتظار حل کرد. بنابراین این روش در بخش بعدی بر روی یک مسئله زندگی واقعی اجرا می‌شود تا مناسب بودن آن نشان داده شود.

۱.۶.۴ مثال عددی

با توجه به مثالی از روش توسعه یافته برای مدل‌سازی یک مسئله زندگی واقعی، یک مسئله برنامه‌ریزی محصول را به عنوان انجام‌شده توسط بیسواس و پال [۵] در نظر می‌گیریم که در آن انواع مختلف

محصولات فصلی و متغیرهای تصمیم‌گیری در مدل‌سازی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به مدل‌سازی در محیط فازی شهودی و اینکه کدام فاکتورها اعداد فازی شهودی هستند، مسئله انجام‌شده را با شیوه‌ای واقعی‌تر، در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب، فرمول ریاضی برای تمام آرمان‌های فازی شهودی از مسئله برداشت سیستم تولید محصولات کشاورزی به شرح زیر است (جدول۱.۴ در نظر بگیرید).

شرح آرمان فازی:

آرمان‌های فازی مدل مفروض به شرح زیر است:

۱. آرمان‌های بهره‌برداری از زمین: آرمان‌های فازی برای بهره‌برداری از کل زمین‌های قابل کشت در فصول مختلف سال به شرح زیر است:

$$Z_۱ : x_{۱۱} + x_{۲۱} + x_{۳۱} \precsim \widetilde{۲۷۲/۱۳۵}^I$$
$$Z_۲ : x_{۲۱} + x_{۴۲} \precsim \widetilde{۲۷۲/۱۳۵}^I$$
$$Z_۳ : x_{۲۱} + x_{۵۳} + x_{۶۳} + x_{۷۳} + x_{۸۳} \precsim \widetilde{۲۷۲/۱۳۵}^I$$

۲. آرمان‌های منابع تولیدی

- آرمان ماشین به ساعت : اعداد برآوردشده ساعت‌های ماشین در زمین که طی فصول مختلف سال ارائه می‌گردد، دارای آرمان فازی به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} &Z_۴ : ۶۱/۰۲(x_{۱۱} + x_{۳۱}) + ۴۰/۵۲(x_{۲۱} + x_{۴۲}) \\ &+ ۳۸/۵۱x_{۵۳} + ۳۶/۶(x_{۶۳} + x_{۷۳} + x_{۸۳}) \\ &\succsim \widetilde{۳۷۸۴۳/۷۵}^I \end{aligned}$$

- آرمان نیروی انسانی موردنیاز: تعدادی کارگر باید در طول سال استخدام شوند تا از دخالت هزینه‌های اضافی و مشکل استخدام کارگران بیشتر در زمان پیک جلوگیری شود لذا آرمان‌های فازی آن به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} &Z_۵ : ۱۲۴x_{۱۱} + ۲۴۷x_{۲۱} + ۸۴x_{۳۱} + ۸۹x_{۴۲} \\ &+ ۱۱۱x_{۵۳} + ۷۴x_{۶۳} + ۴۷x_{۷۳} + ۱۱۹x_{۸۳} \\ &\succsim \widetilde{۴۶۵۱۰/۶۶}^I \end{aligned}$$

- آرمان‌های آب مصرفی: آب برای تولید محصولات ضروری است. لذا حداقل سطح عرضه آبی که در هر فصل مورد نیاز است دارای آرمان‌های فازی به شرح زیر است:

$$Z_۶ : ۶۰x_{۱۱} + ۳۰x_{۲۱} + ۲۵x_{۳۱} \succsim \widetilde{۲۷۲۷/۸۴}^I$$
$$Z_۷ : ۱۲x_{۴۲} \succsim \widetilde{۱۴۹۰/۴۰}^I$$
$$Z_۸ : ۴۸x_{۵۳} + ۱۲x_{۶۳} + ۶x_{۷۳} + ۲۰x_{۸۳} \succsim \widetilde{۵۶۷۵}^I$$

- آرمان‌های کود موردنیاز: برای حفظ بهره‌وری از خاک انواع مختلف کود در فصول مختلف سال استفاده می‌شود که آرمان‌های فازی آن به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
&Z_{9}: 20(x_{11}+x_{42})+200x_{21}+40x_{31}\\
&+100(x_{53}+x_{63})+80x_{73}+150x_{83}\lesssim \widetilde{44500}^{I}\\
&Z_{10}: 20(x_{11}+x_{31}+x_{42})+100x_{21}\\
&+50(x_{53}+x_{63})+40x_{73}+75x_{83}\lesssim \widetilde{23000}^{I}\\
&Z_{11}: 20(x_{11}+x_{31}+x_{42})+100x_{21}\\
&+50(x_{53}+x_{63})+40x_{73}+75x_{83}\lesssim \widetilde{19000}^{I}
\end{aligned}$$

۳. آرمان هزینه‌های نقدی: مقدار تخمینی پول نقدی (Rs) که برای خرید دانه، کود و دیگر منابع تولیدی موردنیاز است دارای آرمان‌های فازی به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
&Z_{12}: 8577.98x_{11}+23031.57x_{21}+6700.94x_{31}\\
&+6811.57x_{42}+10508.44x_{53}+7685.76x_{63}\\
&+5093.10x_{73}+22527.05x_{83}\lesssim \widetilde{6441015.80}^{I}
\end{aligned}$$

۴. آرمان‌های دستیابی تولید : برای پاسخ‌گویی به تقاضای محصولات کشاورزی در جامعه، حداقل سطح دستاورد تولید برای هر کدام از محصولات موردنیاز است که آرمان‌های آن به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
&Z_{13}: 2538x_{11}\gtrsim \widetilde{306000}^{I} \quad \text{(کنف)}\\
&Z_{14}: 59283x_{21}\gtrsim \widetilde{259000}^{I} \quad \text{(چغندرقند)}\\
&Z_{15}: 2076x_{31}+1885x_{42}+3401x_{53}\gtrsim \widetilde{870000}^{I} \quad \text{(برنج)}\\
&Z_{16}: 2301x_{63}\gtrsim \widetilde{136260}^{I} \quad \text{(گندم)}\\
&Z_{17}: 795x_{73}\gtrsim \widetilde{60540}^{I} \quad \text{(خردل)}\\
&Z_{18}: 17779x_{83}\gtrsim \widetilde{110000}^{I} \quad \text{(سیب زمینی)}
\end{aligned}$$

۵. آرمان سود: به واسطه مدیریت مزرعه یک سطح معینی از سود موردانتظار است، که آرمان آن به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
&Z_{19}: 24872.4x_{11}+889245x_{21}+13410.96x_{31}\\
&+10179x_{42}+19198.64x_{53}+16107x_{63}\\
&+9142.5x_{73}+33780.1x_{83}\gtrsim \widetilde{12500000}^{I}
\end{aligned}\tag{4.43}$$

فرض می‌کنیم آرمان‌های منابع اعداد فازی شهودی مثلثی هستند و از این‌رو بازه‌های انتظار مربوط به آن‌ها را محاسبه می‌کنیم. در اینجا هدف ماکزیمم کردن کارایی سیستم است که در واقع ماکزیمم کردن نسبت سود به هزینه است $\frac{Z_{19}(X)}{Z_{12}(X)}$، بنابراین این مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی کسری (۴۲.۴) تبدیل می‌شود. برای سادگی، فرض کنیم $r = 1$. بنابراین این مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی آرمانی چندهدفه با اهداف فازی شهودی تبدیل می‌شود. آرمان‌های Z_{12} و Z_{19} به یک آرمان و یک محدودیت تبدیل می‌شوند.

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = Z_{19}(X) - Z_{12}(X) \\ s.t. \quad & Z_{19}(X) - Z_{12}(X) \geq 0. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی شهودي توصیف‌شده در بخش قبل، مسئله (۴۳.۴) را حل می‌کنیم. و پارامترهای مختلف مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم. ابتدا کران بالایی (بیشترین جواب قابل قبول) $g = 51976000$ و کران پایین $L = 23962000$ برای تابع هدف Z محاسبه می‌شود و کران بالاتر و پایین‌تر مقدار مورد انتظار آرمان‌های فازی شهودی محاسبه می‌شود. همچنین W و $w_i(i = 1, 2, 3, \ldots, 11, 13, \ldots, 18)$ را به صورت تعریف‌شده در (۴۰.۴) محاسبه می‌کنیم و به همین ترتیب مسئله (۴۳.۴) به مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
\min\ Z_* = {} & ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۳۵D^- + ۰٫۰۵۸d_{۱}^- + ۰٫۰۵۸d_{۲}^- + ۰٫۰۵۸d_{۳}^- \\
& + ۰٫۰۰۰۲d_{۴}^- + ۰٫۰۰۰۸d_{۵}^- + ۰٫۰۱۱d_{۶}^- + ۰٫۰۴۲d_{۷}^- \\
& + ۰٫۰۳۲d_{۸}^- + ۰٫۰۰۰۲d_{۹}^- + ۰٫۰۰۰۶d_{۱۰}^- + ۰٫۰۰۰۳d_{۱۱}^- \\
& + ۰٫۰۰۰۶d_{۱۳}^- + ۰٫۰۰۰۰۱d_{۱۴}^- + ۰٫۰۰۰۰۷d_{۱۵}^- \\
& + ۰٫۰۰۰۰۸d_{۱۶}^- + ۰٫۰۰۰۳d_{۱۷}^- + ۰٫۰۰۰۱d_{۱۸}^- \\
s.t. \quad & \\
& ۰٫۰۰۰۵۸x_{۱۱} + ۰٫۰۳۹۰x_{۲۱} + ۰٫۰۰۰۲۳x_{۳۱} + ۰٫۰۰۰۱۲x_{۴۲} \\
& + ۰٫۰۰۰۳۱x_{۵۳} + ۰٫۰۰۰۳۰x_{۶۳} + ۰٫۰۰۰۱۴۴x_{۷۳} + ۰٫۰۰۰۴۰x_{۸۳} \\
& + D^- - D^+ = ۱٫۸۵۳ \\
& - ۰٫۰۵۸x_{۱۱} - ۰٫۰۵۸x_{۲۱} - ۰٫۰۵۸x_{۳۱} + d_{۱}^- - d_{۱}^+ = -۱۷٫۲۴۷ \\
& - ۰٫۰۵۸x_{۲۱} - ۰٫۰۵۸x_{۴۲} + d_{۲}^- - d_{۲}^+ = -۱۷۲۴۷ \\
& - ۰٫۰۵۸x_{۲۱} - ۰٫۰۵۸x_{۵۳} - ۰٫۰۵۸x_{۶۳} - ۰٫۰۵۸x_{۷۳} \\
& - ۰٫۰۵۸x_{۸۳} + d_{۳}^- - d_{۳}^+ = -۱۷٫۲۴۷ \\
& ۰٫۰۱۷x_{۱۱} + ۰٫۰۱۱x_{۲۱} + ۰٫۰۱۷x_{۳۱} + ۰٫۰۱۱x_{۴۲} + ۰٫۰۱x_{۵۳} \\
& + ۰٫۰۱x_{۶۳} + ۰٫۰۱x_{۷۳} + ۰٫۰۱x_{۸۳} + d_{۴}^- - d_{۴}^+ = ۱۰٫۶۰۵ \\
& ۰٫۱۰۶x_{۱۱} + ۰٫۲۱۱x_{۲۱} + ۰٫۰۷۱x_{۳۱} + ۰٫۰۷۶x_{۴۲} + ۰٫۰۹۵x_{۵۳} \\
& + ۰٫۰۶۳x_{۶۳} + ۰٫۰۴۰x_{۷۳} + ۰٫۱۰۱x_{۸۳} + d_{۵}^- - d_{۵}^+ = ۳۹٫۸۳۳ \\
& ۰٫۰۶۹۰x_{۱۱} + ۰٫۳۴۵x_{۲۱} + ۰٫۲۸۷x_{۳۱} + d_{۶}^- - d_{۶}^+ = ۳۱٫۴۰۵ \\
& ۰٫۵۱۱x_{۴۲} + d_{۷}^- - d_{۷}^+ = ۶۳٫۵۳۲ \\
& ۱٫۵۵۸x_{۵۳} + ۰٫۳۸۹x_{۶۳} + ۰٫۱۹۴x_{۷۳} + ۰٫۶۴۹x_{۸۳} \\
& + d_{۸}^- - d_{۸}^+ = ۱۸۴٫۳۴۰ \\
& ۰٫۰۰۵x_{۱۱} + ۰٫۰۵۷x_{۲۱} + ۰٫۰۱۱x_{۳۱} + ۰٫۰۰۵x_{۴۲} + ۰٫۰۲۸x_{۵۳} \\
& + ۰٫۰۲۸x_{۶۳} + ۰٫۰۲۳x_{۷۳} + ۰٫۰۴۳x_{۸۳} + d_{۹}^- - d_{۹}^+ = ۱۲٫۸۱۶ \\
& ۰٫۰۱۳x_{۱۱} + ۰٫۰۶۵x_{۲۱} + ۰٫۰۱۳x_{۳۱} + ۰٫۰۱۳x_{۴۲} + ۰٫۰۳۲x_{۵۳} \\
& + ۰٫۰۳۲x_{۶۳} + ۰٫۰۲۶x_{۷۳} + ۰٫۰۴۸x_{۸۳} + d_{۱۰}^- - d_{۱۰}^+ = ۱۵٫۰۱۶ \\
& ۰٫۰۰۶x_{۱۱} + ۰٫۰۳۴x_{۲۱} + ۰٫۰۰۶x_{۳۱} + ۰٫۰۰۶x_{۴۲} + ۰٫۰۱۷x_{۵۳} \\
& + ۰٫۰۱۷x_{۶۳} + ۰٫۰۱۳x_{۷۳} + ۰٫۰۲۶x_{۸۳} + d_{۱۱}^- - d_{۱۱}^+ = ۶٫۶۴۱ \\
& ۱٫۶۸۲x_{۱۱} + d_{۱۳}^- - d_{۱۳}^+ = ۶٫۶۴۱ \\
& ۰٫۷۰۳x_{۲۱} + d_{۱۴}^- - d_{۱۴}^+ = ۳٫۰۷۱ \\
& ۰٫۱۶۵x_{۳۱} + ۰٫۱۵۰x_{۴۲} + ۰٫۲۷۱x_{۵۳} + d_{۱۵}^- - d_{۱۵}^+ = ۶۹٫۵۰۴ \\
& ۰٫۲۰۳x_{۶۳} + d_{۱۶}^- - d_{۱۶}^+ = ۱۲٫۰۷
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&0.272x_{73} + d^-_{17} - d^+_{17} = 20.74\\
&3.281x_{83} + d^-_{18} - d^+_{18} = 20.305\\
&16294.42x_{11} + 866213.4x_{21} + 6710.02x_{31} + 3367.43x_{42}\\
&+8690.21x_{53} + 8421.24x_{63} + 4049.4x_{73} + 11253.05x_{83} \geq 0.
\end{aligned}
$$
(۴۴.۴)

مسئله برنامه‌ریزی خطی بالا (۴۴.۴) با متلب حل می‌شود ، و جواب‌های بهینه بدست آمده به صورت زیر می‌باشند:

$$
\begin{aligned}
&x_{11} = 196.8763,\ x_{21} = 25.6309,\ x_{31} = 74.7563,\\
&x_{42} = 271.7307,\ x_{53} = 64.1802,\ x_{63} = 60.1030,\\
&x_{73} = 76.2531,\ x_{83} = 71.1695,\ z_{19}/z_{12} = 4.73.
\end{aligned}
$$

بدین ترتیب برای مسئله مفروض، نتیجه به دست آمده با روش شهودی پیشنهادشده در مقایسه با کار موجود درگذشته در جدول ۲.۴ قرار داده شده است.

جدول ۱.۴: محصولات فصلی و متغیرهای مرتبط با آن

فصل (s)	محصول (c)	متغیر (x_{cs})
تابستان(۱)	کنف(۱)	x_{11}
	چغندرقند(۲)	x_{21}
	روغن چای(۳)	x_{31}
پاییز(۲)	برنج(۴)	x_{42}
بهار(۳)	لوبیا چیتی(۵)	x_{53}
	گندم (۶)	x_{63}
	خردل (۷)	x_{73}
	سیب‌زمینی(۸)	x_{83}

جدول ۲.۴: جواب بهینه

اهداف	آرمان‌های بدست آمده توسط تصمیم‌گیرنده			آرمان‌های بدست‌آمده توسط پال و بیسواس	آرمان‌های بدست آمده با روش‌های پیشنهادی
	سطح آرمانی	کران تولورانس			
		پایین	بالا		
فصل(Z_1)	۲۷۲/۱۳۵	–	۳۰۹/۳۳	۲۲۳/۳۹	۲۹۷/۲۶۳
فصل(Z_2)	۲۷۲/۱۳۵	–	۳۰۹/۳۳	۱۲۸/۵۹۶	۲۹۷/۳۶۱
فصل(Z_3)	۲۷۲/۱۳۵	–	۳۰۹/۳۳	۲۷۲/۱۶۳	۲۹۷/۳۳۶
ماشین(Z_4)	۳۷۸۴۳/۷۵	۲۹۹۱۲/۸۰	–	۲۸۵۸۲/۴۸	۳۸۶۴۱/۳۲
نیروی انسانی در روز (Z_5)	۴۶۵۱۰/۶۶	۴۳۵۹۶/۱۸	–	۵۸۱۰۸/۰۶	۸۴۸۳۱/۷۴
فصل(Z_6)	۲۷۲۷/۸۴	۲۵۲۴/۳۴	–	۹۸۲۶/۵۵	۱۴۴۵۰/۴۱
فصل(Z_7)	۱۴۹۰/۴۰	۱۴۳۷/۶۰	–	۱۴۹۰/۴	۳۲۶۰/۷۶
فصل(Z_8)	۵۶۷۵/۰۰	۵۶۰۵/۲۰	–	۷۳۷۷/۹۱	۵۶۸۲/۷۹
نیتروژن(Z_9)	۴۴۵۰۰/۰۰	۳۷۲۰۰/۰۰	–	۳۵۲۸۸/۱۹	۴۶۶۹۲/۵۶
فسفات(Z_{10})	۲۳۰۰۰/۰۰	۱۹۸۰۰/۰۰	–	۲۰۰۹۱/۷۷	۲۸۰۳۲/۳۵
پتاس(Z_{11})	۱۴۹۰/۴۰	۱۴۳۷/۶۰	–	۱۴۹۰/۴	۳۲۶۰/۷۶
هزینه‌های نقدی(Z_{12})	۶۴۴۱۰۱۵/۸۰	–	۹۴۰۰۱۱۳/۹	۴۹۵۲۸۵۰/۸۸	۷۷۵۸۹۴۵/۵۵
کنف(Z_{13})	۳۰۶۰۰۰	۳۰۲۸۵۰	–	۳۰۵۹۹۹	۴۹۹۶۷۲
چغندر(Z_{14})	۲۵۹۰۰۰	۸۱۵۰۰	–	۲۶۰۶۰۸	۱۵۱۹۴۷۶
برنج(Z_{15})	۸۷۰۰۰۰	۸۴۳۷۰۰	–	۸۷۰۰۰۲	۸۸۵۶۸۳
گندم(Z_{16})	۱۳۶۲۶۰	۱۱۲۵۰۰	–	۱۳۶۲۶۰	۱۳۸۲۹۷
خردل(Z_{17})	۶۰۵۴۰	۵۴۴۰۰	–	۶۰۰۰۰	۶۰۶۲۱
سیب‌زمینی(Z_{18})	۱۱۰۰۰۰	۹۸۶۰۰	–	۱۰۹۹۹۸	۱۲۶۵۳۲۲
سود(Z_{19})	۱۲۵۰۰۰۰۰	۱۱۰۸۶۶۲۱	–	۱۳۷۵۸۱۹۴	۳۶۷۵۸۹۴۴
نسبت	۱/۹۴	۱/۱۸	–	۲/۷۸	۴/۷۳

مدل‌سازی این مسئله با روش بهینه‌سازی فازی شهودی، بهره‌برداری بهتر از زمین را در تمام سه فصل بهار، تابستان و پاییز فراهم می‌کند. نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی با روش فازی بدست آمده توسط بیسواس و پال در جدول ۲.۴ مقایسه شده است. واضح است که در بیشتر پارامترها، با استفاده از روش پیشنهادی، آرمان‌ها بهتر به دست می‌آیند. علاوه‌براین، اثربخشی سیستم برداشت یعنی نسبت سود به هزینه حاصل از روش پیشنهادی، بسیار بیشتر است نسبت به روش بهینه‌سازی فازی، که ۴/۷۳ در مقایسه با ۲/۷۸ است.

فصل ۵

نتیجه‌گیری و کارهای آینده

در فصل دوم، مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی شهودی را مطرح کردیم و یک روش برای حل آن پیشنهاد دادیم. مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی شهودی را با استفاده از تابع دقت به مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی تبدیل کردیم و آن را به کمک روش اسکالرسازی به مسئله برنامه‌ریزی آرمانی فازی تبدیل کردیم. پس از آن، توابع عضویت مختلف را برای حل مدل برنامه‌ریزی آرمانی فازی معرفی کردیم. معرفی توابع عضویت مختلف انعطاف پذیری تصمیم‌گیرنده برای انتخاب تابع عضویتی که برای مسئله مناسب است را فراهم می‌کند. در اینجا، انعطاف‌پذیری دیگر این است که جواب را می‌توان با توجه به اولویت اهداف انتخاب کرد. بدین معنی که تصمیم‌گیرنده می‌تواند تابع عضویتی را اتخاذ کند، که جواب بهتر برای تابع هدف با داشتن اولویت بالاتراست. جانا و روی [۱۶] این مسئله را به هشت زیر اهداف تقسیم کردند، که ابعاد مسئله را ۸ برابر افزایش می‌دهد و پیچیدگی مسئله را زیاد می‌کند. در جانا و روی [۱۷]، گوبتا و مهلاوات [۱۳]، زنگی‌آبادی و ملکی [۱۸]، نویسندگان توابع عضویت هذلولوی و نمایی را اعمال کردند، که در کل دامنه مقعر نیستند. بنابراین، مسئله ناشی از آن نباید محدب باشد و بنابراین هیچ تضمینی که جواب بدست آمده کلی است وجود ندارد. رویکرد پیشنهادی این نقایص را برطرف می‌کند و جواب سراسری را نتیجه می‌دهد. و راه‌های ممکن بسیاری را برای تحقیقات آینده باز می‌کند. ابتدا از یک نقطه‌نظر عملی، رویکرد توسعه‌یافته در این فصل ارزش پیاده‌سازی بر روی یک مسئله واقعی صنعت مانند تولید، برنامه‌ریزی، طراحی و حمل‌ونقل وغیره را دارد و می‌تواند یک کار چالش برانگیز باشد. دوم، از دیدگاه متخصصین، ارزش توسعه سریع‌تر روش‌های ابتکاری برای حل مسائل در مقیاس بزرگ وجود دارد.

فصل سوم، به حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه غیرخطی در محیط فازی پرداخته است. و با حل دو مثال عددی، یکی در سیستم تولید و دیگری در حمل‌ونقل روش ارائه شده نشان داده شد. تابع عضویت نقش کلیدی و مهمی در طراحی یک مدل به معنای فازی ایفا می‌کند. بیشتر روش‌های قبلی، تنها براساس ساختار توابع عضویت خطی برای هدف یا محدودیت‌ها فازی هستند. اما، در این فصل طبیعت متقابل متضاد اهداف را با ایجاد منطقه رضایت‌مندی با پذیرش توابع عضویت و همچنین عدم‌عضویت حل کردیم. علاوه‌براین، تابع عضویت خطی همیشه برای مدل‌سازی زندگی واقعی درست نیست. بنابراین، توابع عضویت غیرخطی کلی در نگاهی خوش‌بینانه و نیز بدبینانه مدنظر گرفته شد و نتایج بدست‌آمده بهتر از آنهایی است که تنها با در نظر گرفتن توابع عضویت به دست می‌آیند. وقتی مدل‌های خوش‌بینانه و بدبینانه ساختیم، برای توابع عضویت و عدم‌عضویت، مقدار یکسان t را انتخاب کردیم. برای دستیابی به نتایج موردعلاقه خود، تصمیم‌گیرنده می‌تواند براساس آستانه مجاز این مقدار را در انتخابش تغییر دهد. فرض می‌کنیم که تصمیم‌گیرنده از نتایجی که در یک اجرا از الگوریتم بدست می‌آید رضایت دارد. در صورت عدم‌رضایت، مقادیر آستانه مجاز را می‌توان تغییر داد و جهت آنالیز میزان حساسیت می‌توان با تغییر در این پارامترها، تغییر در نتایج را مشاهده کرد. این روش به طور موثری با ابهام و ذهنیت تصمیم‌گیرنده مواجه می‌شود و ممکن است در حل مسائل تصمیم‌گیری در زمینه تولید، برنامه‌ریزی، ساخت و حمل‌ونقل مفید باشد. در آینده، این رویکرد را می‌توان با انواع دیگری از توابع عضویت و عدم‌عضویت غیرخطی مانند نمایی، هذلولی و غیره، مورد مطالعه قرار داد و از اعداد مثلثی به جای سهموی استفاده کرد.

در فصل چهارم، روشی برای مدل‌سازي مسئله سیستم مدیریت برداشت محصولات کشاورزی، پیشنهاد شده و مورد آزمایش قرارگرفته است. در اینجا، مسئله تولید کشاورزی را با شیوه‌ای واقعی‌تر با استفاده از ضرایب فزاینده به عنوان اعداد فازی شهودی محاسبه می‌کنیم. دلیل چنین فرضی کاملا واضح است، زیرا نیازهای منابع برای برداشت یک سیستم وابسته به شرایط و شامل برخی از ابهامات به دلیل پارامترهای طبیعی کنترل نشده است. مطالعات متعدد نشان می‌دهد که قیمت محصولات و منابع مورد نیاز در سیستم برداشت نامشخص و بسیار مبهم هستند، بنابراین در مدل‌سازی واقع‌گرایانه این مقادیر را نمی‌توان به عنوان یک مقدار قطعی و از پیش تعیین‌شده مورد توجه قرار داد. برتری عمده روش مفروض در مدل‌سازی مسئله برنامه‌ریزی تولید کشاورزی به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی خطی کسری است. همانطور که مطالعات مختلف پیشنهاد کرده‌اند برای مدل‌سازی مسئله تولید کشاورزی با پارامترهای مبهم و نامشخص، ضرایب را به عنوان اعداد فازی شهودی به شیوه خوش‌بینانه در نظر می‌گیریم. روش پیشنهادي مي‌تواند به منظور مدل‌سازی مسئله مدیریت کشاورزي در سیستم برداشت در یک روش بهتر براي بهبود کارايي سیستم مورداستفاده قرار گیرد. چنین مطالعاتی ممکن است قابل‌اعتمادتر باشند و بتوانند مدل‌سازی مسائل برنامه‌ریزی تولید کشاورزی را با شیوه‌ای واقع‌بینانه انجام دهند.

مراجع

[1] Atanassov K.T. (2012) ”On the Concept of Intuitionistic Fuzzy Sets. In: On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory.” Studies in Fuzziness and Soft Computing, 283

[2] Atanassov, K. and Riecan, B. (2006) ”n-extraction operation over intuitionistic fuzzy sets” Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets 12(4). , 9–11 .

[3] Atanassov, K. and Rieˇcan, B.(2010)” Operation division by n over intuitionistic fuzzy sets.” Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets 16(4), 1–4 .

[4] Atanassov, K. and Todorova, L.(2002)” An example for a difference between ordinary (crisp), fuzzy and intuitionistic fuzzy sets.” In: Kacprzyk, J., Atanassov, K. (eds.) Proceedings of the Sixth International Conference on Intuitionistic Fuzzy Sets, Varna, September 13-14. Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 8(3), 31–33 .

[5] Biswas., A. and Pal., B. B.(2005) ”Application of fuzzy goal programming technique to land use planning in agricultural system”Omega,33(5),391-398.

[6] Bolk, L. A. and Borowik, P. (1992)” Many-Valued Logics.”

[7] Danchev, S.(1996)” A generalization of some operations defined over the intuitionistic fuzzy sets.” Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets. 2(1), 1–3.

[8] Dubois, D. and Prade, H.(1987)”The mean value of a fuzzy number.” Fuzzy Sets and systems. 24(3)279–300.

[9] Rani.D., Gulati, TR., Garg.H.(2016) ”Multi-objective non-linear programming problem in intuitionistic fuzzy environment: Optimistic and pessimistic view point” Expert systems with applications.64.,228-238.

[10] Ehrgott, M., Engau, A., Wiecek, M. M. (2016)” Continuous multi-objective programming.” Multiple Criteria Decision Analysis,739-815.

[11] Grzegorzewski, P.(2003) ”Distances and orderings in a family of intuitionistic fuzzy numbers.” Proceedings of the third conference on fuzzy logic and technology.,223–227. booktitle=EUSFLAT Conf.,

[12] Gupta, M. M. and Kaufmann, A.(1991)”Introduction to fuzzy Arithmetic.” Van Nostrand, New York, NY.

[13] Gupta, P. and Mehlawat, M. K.(2009)”Bector–Chandra type duality in fuzzy linear programming with exponential membership functions.” Fuzzy Sets and Systems, 160, 3290–3308.

[14] Heilpern, S.(1992) ”The expected value of a fuzzy number”. Fuzzy Sets and Systems. 47(1),81–86.

[15] Jana, B. and Roy, T. K. (2007)” Multi-objective intuitionistic fuzzy linear programming and its application in transportation model.” Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 13(1), 34–51.

[16] Jana, B. and Roy, T. K.(2005) ” Multi-objective fuzzy linear programming and its application in transportation model.” Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 21(2), 243–268 .

[17] Jana, B. and Roy, T. K.(2007)” Multi-objective intuitionistic fuzzy linear programming and its application in transportation model.” Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 13(1), 34–51 .

[18] Maleki, H. R. and Zangiabadi, M.(2013)” Fuzzy goal programming technique to solve multi-objective transportation problems with some non-linear membership functions.” Iranian Journal of Fuzzy Systems, 10(1), 61–74.

[19] Tiwari, A. K., Tiwari, A., Smuel, C., Pandey, S. K. (2013)” Flexibility in assisgnment problem using fuzzy numbers with non-linear membership functions.” International Journal of Industrial Engineering and Technology,3(2), 1–10.

[20] Ross, T. J. (2004)”Fuzzy Logic with Engineering Applications.”Wiley Online Library.2

[21] Singh, S. K. and Yadav, S. P.(2015) ” Modeling and optimization of multi objective non-linear programming problem in intuitionistic fuzzy environment.” Applied Mathematical Modelling, 39, 4617–4629 .

[22] Singh, S. K. and Yadav, S. P.(2016)”A new approach for solving intuitionistic fuzzy transportation problem of type-2.” Annals of Operations Research,243, 349–363 .

[23] Singh, S. K. and Yadav, S.P.(2018)”Intuitionistic fuzzy multi-objective linear programming problem with various membership functions”Annals of operations research,269(1-2),693-707

[24] Pandey, S. K., Smuel, C., Tiwari, A. K., Tiwari, A.(2013)”Flexibility in assisgnment problem using fuzzy numbers with non-linear membership functions.” International Journal of Industrial Engineering and Technology,3(2),1–10 .

[25] Yager, R. R.(1981) ” A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval.” Information Sciences, 24(2),143–161.

[26] Yager, R. R.(2009)”Some aspects of intuitionistic fuzzy sets.” Fuzzy Optimization and Decision Making.8(1), 67–90.

[27] Zadeh, L. A. (1965)” Fuzzy sets. Information and Control 8, 338–353 .

[28] Zadeh, L. (1965) ”Fuzzy sets.” Information and Control. 8, 338–353.

[29] Zimmermann, H. J.(1978)”Fuzzy programming and linear programming with several objective functions.”Fuzzy Sets and System,1(1), 45–55.

[30] Nishad., A. K. and Singh., S. R. (2015) ”Solving multi-objective decision making problem in intuitionistic fuzzy environment”International Journal of System Assurance Engineering and Management.6,206-215.

Abstract

In real conditions some situations may happen that single objective mathematical models can not express the demands of decision maker, and it reduces the effectiveness and desirability of the model's results. Also in real conditions,various parameters and factors are uncertain with cause great complexity in decision maxing. So, for solving these problems, intuitionistic fuzzy multi-objective optimization problems have been proposed.

Multi-objective optimization in the intuitionistic fuzzy environment is the process of finding a Pareto-optimal solution that simultaneously maximizes the degree of satisfaction and minimizes the degree of dissatisfaction of an intuitionistic fuzzy decision.

This thesis, first, addresses intuitionistic fuzzy multi-objective linear programming problems using triangular intuitionistic fuzzy numbers with mixed constraints. We convert the problem into single objective fuzzy goal programming problem. Then using different types of membership functions (linear and non-linear), we transform the problem into a crisp linear/nonlinear programming problem, which is solved by suitable crisp programming approaches.

Next, The conflicting natures of the different objective have been handled by defining the membership functions corresponding to it in parabolic fuzzy set environment. A linear and non-linear membership functions corresponding to each objective has been taken in account.The objective is to present an algorithm for solving multi-objective optimization problem under the optimistic and pessimistic view point.

finally, we have considered the imprecise coefficients of objective functions and constraints as intuitionistic fuzzy numbers and approximated them by their expected interval values. Further, a goal programming approach is applied to solve such problems.

Key words: Intuitionistic fuzzy number, Triangular Intuitionistic fuzzy number, Expected intervals, Optimistic view, Pessimistic view.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Optimization

Solving Intuitionistic Fuzzy Multi-Objective Optimization Problems

By: Somaye Esmaili

Supervisor

Dr. Mehrdad Ghaznavi

Advisor

Dr. Somaye Moghari

June 2019