بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

تعمیم جدید توزیع آلفا- چوله نرمال و کاربردهای آن

نگارنده: رقیه حیدریان یوسف

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

شهریور ۱۳۹۸

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم: **رقیه حیدریان یوسف** با شماره دانشجویی **۹۵۰۵۱۲۴** رشته آمار گرایش آمار ریاضی تحت عنوان: **تعمیم جدید توزیع آلفا_چوله نرمال و کاربردهای آن** که در تاریخ **۹۸/۰۶/۱۳** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: خیلی خوب) ☑ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر احمد نزاکتی رضازاده	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم			
۳ - استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر حسین باغیشنی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر محمد آرشی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به پدر مهربانم که شادی او بهترین پاداش زندگی‌ام است

و مادر دلسوز و فداکارم که امیدش، امید من است

و تقدیم به همسر مهربانم که در این راه حامی و پشتیبان من بود.

سپاس‌گزاری...

شکر و سپاس خدا را که بزرگترین امید و یاورم در لحظه لحظه زندگیست. وظیفه خود می‌دانم که از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر احمد نزاکتی تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این پایان‌نامه به سرانجام نمی‌رسید. از اساتید گرامی، دکتر محمد آرشی و آقای دکتر محمدرضا ربیعی که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند، تشکر می‌نمایم.

رقیه حیدریان یوسف
شهریور ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **رقیه حیدریان یوسف** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمارریاضی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تعمیم جدید توزیع آلفا– چوله نرمال و کاربردهای آن** ، تحت راهنمایی **احمد نزاکتی رضازاده** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رقیه حیدریان یوسف
شهریور ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، تعمیم جدیدی از توزیع آلفا_چوله نرمال که با نماد $GASN(\alpha, \lambda)$ مشخص می‌شود را بررسی می‌کنیم. در فصل اول به مفاهیم مورد نیاز در پایان نامه اشاره کرده و به معرفی توزیع نرمال و چوله نرمال می‌پردازیم. در فصل دوم، توزیع آلفا_چوله نرمال را معرفی کرده و قضایای مربوط به آن را مطرح می‌کنیم. در فصل سوم، توزیع $GASN(\alpha, \lambda)$ را معرفی کرده و ویژگی ها، گشتاورها و برآورد ماکزیمم درست نمایی پارامترهای آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل چهارم، مثال‌هایی برای فصل‌های قبل همراه با مثال شبیه سازی توزیع $GASN(\alpha, \lambda)$ به وسیله نرم افزار R ارائه خواهد شد و نشان می‌دهیم که توزیع جدید بهترین توزیع برای داده استفاده شده در بین توزیع های نرمال، چوله نرمال و آلفا_چوله نرمال و نرمال دو مدی است.

کلمات کلیدی: چولگی و کشیدگی، توزیع چوله نرمال، توزیع آلفا_چوله نرمال، تعمیم توزیع آلفا_چوله نرمال، دو مدی بودن، تابع مولد گشتاور، برآوردگر ماکزیمم درست نمایی.

پیشگفتار

توزیع نرمال برای توصیف و مدل بندی طیف گسترده‌ای از پدیده های طبیعی به‌کار می‌رود. برای فراهم کردن انعطاف پذیری بیشتر این توزیع، تعمیم‌های جدیدی از آن با عنوان توزیع های چوله نرمال ارائه شده که این توزیع‌ها با اضافه کردن پارامتر چولگی به توزیع متقارن نرمال، به دست می‌آیند. توزیع چوله نرمال برای اولین بار در سال ۱۹۸۵ توسط آزالینی [۱] [۷] برای توصیف داده‌های چوله ارائه شد. بعد از آن خانواده های مختلفی از این توزیع ها معرفی شده‌اند.

الال الیورو [۲] [۱۵] برای ایجاد انعطاف بیشتری نسبت به توزیع‌های قبلی یک کلاس جدیدی از توزیع های چوله نرمال به نام آلفاـچوله نرمال را در سال ۲۰۱۰ معرفی کرده است که برای داده های یک مدی و دو مدی قابلیت انطباق دارد. الال الیورو در مقاله ی خود به بررسی ویژگی‌های این توزیع اعم از ضرایب چولگی و کشیدگی، تابع مولد گشتاور و گشتاورهای آن پرداخته است.

اخیراً شرفی و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۱۶ تعمیم جدیدی از توزیع آلفاـچوله نرمال را معرفی کرده‌اند که نسبت به توزیع آلفاـچوله نرمال انعطاف بیشتری دارد و حداکثر دارای دو مد است که ما آن را مورد بررسی بیشتر قرار می‌دهیم.

در این پایان‌نامه در فصل اول برخی از مفاهیم و پیش‌نیازهای لازم که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، به طور خلاصه ارائه شده است و به معرفی توزیع چوله نرمال می‌پردازیم و گشتاورها و برآورد ماکزیمم درست نمایی آن را بدست می‌آوریم. در فصل دوم توزیع آلفاـچوله نرمال را به طور کامل توضیح داده و در فصل سوم تعمیم جدیدی از توزیع آلفاـچوله نرمال را معرفی می‌کنیم که در حالت خاص توزیع آلفاـچوله نرمال، نرمال و چوله نرمال را شامل می‌شود.

[۱] Azzalini

[۲] Elal-olivero

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ مقدمه

در این بخش برخی از تعاریف و مفاهیم های لازم که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، به طور خلاصه ارائه شده است.

تعریف ۱.۱.۱ (برآورد ماکزیمم درست نمایی [۱] (MLE)). فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ ، بردار n متغیر با تابع چگالی احتمال توأم $f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$ ، $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ باشد.
برای هر مقدار مشاهده شده $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ تابع درست نمایی $\mathbf{X}$ را تابع چگالی احتمال توأم $\mathbf{X}$ یعنی $f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$ تعریف می‌کنیم که به صورت تابعی از $\boldsymbol{\theta}$ در نظر گرفته می شود و آن را با نماد $L(\boldsymbol{\theta})$ نمایش می‌دهیم:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$$

روش برآورد ماکزیمم درست نمایی (MLE) یکی از متداول‌ترین روش‌های برآوردیابی در بین آماردانان است. این روش اولین بار توسط گاوس [۲] ۱۸۲۱ به کار گرفته شد و بعد از آن به صورت گسترده‌تری در سال ۱۹۲۵ میلادی توسط فیشر در انتقاد از برآورد گشتاوری مورد استفاده قرار گرفت.
این روش مبتنی بر یک تابع آماری مهم به نام تابع درست نمایی است.

---
[۱] Maximun Likelihood Estimation
[۲] Cusse

تابع درست نمایی $L(\boldsymbol{\theta})$ لزوما نسبت به $\boldsymbol{\theta}$ مشتق‌پذیر نیست و یک تابع چگالی احتمال نمی‌باشد. بنابراین اگر $\delta(\mathbf{X})$ برآوردگری برای $\boldsymbol{\theta}$ باشد، به طوریکه:

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\delta(\mathbf{X}) \in \Theta) = ۱ \quad , \quad L(\delta(\mathbf{X})) \geq L(\boldsymbol{\theta}) \quad , \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

آنگاه $\delta(\mathbf{X})$ به عنوان یک برآوردگر ماکزیمم درست نمایی برای $\boldsymbol{\theta}$ تعریف می‌شود.
معمولا برآوردگر MLE پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ را با $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر

$$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta})$$

تعریف ۲.۱.۱ (چولگی)**.** چولگی در حقیقت معیاری از وجود یا عدم تقارن تابع توزیع است. برای یک توزیع کاملاً متقارن، چولگی صفر و برای یک توزیع نامتقارن با کشیدگی به سمت مقادیر بالاتر، چولگی مثبت و برای توزیع نامتقارن با کشیدگی به سمت مقادیر کوچکتر مقدار چولگی منفی است. در حقیقت چولگی گشتاور سوم استاندارد شده است. به عبارت دیگر اگر $\gamma_۱$ معرفی کننده چولگی باشد در این صورت:

$$\gamma_۱ = \frac{E(Y - E(Y))^۳}{\sigma_y^۳}$$

تعریف ۳.۱.۱ (کشیدگی)**.** در آمار و نظریه احتمالات، برجستگی، کشیدگی نشان دهنده قله‌مندی یک توزیع احتمالی است. به عبارت دیگر کشیدگی معیاری از تیزی منحنی در نقطه ماکزیمم است. مقدار کشیدگی برای توزیع نرمال برابر ۳ است. در حقیقت کشیدگی گشتاور چهارم استاندارد شده است.
به عبارت دیگر اگر $\gamma_۲$ معرفی کننده کشیدگی باشد در این صورت:

$$\gamma_۲ = \frac{E(Y - E(Y))^۴}{\sigma_y^۴}$$

(شرایط نظم). اگر X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانواده چگالی های $\{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ باشد و داشته باشیم:

۱) Θ یک زیر فاصله باز از اعداد حقیقی است، یعنی: $\Theta \subseteq R$

۲) مشتق تابع چگالی نسبت به θ ، یعنی $\frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)$ وجود دارد.

۳) جابجایی عملگرهای مشتق و انتگرال مجاز است، یعنی:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \int f(x;\theta)dx = \int \frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)dx$$

تعریف ۴.۱.۱ (ماتریس اطلاع فیشر)**.** فرض کنید $\mathbf{X} = (X_۱, \cdots, X_n)$ ، بردار تصادفی و $f(\mathbf{X};\boldsymbol{\theta})$ تابع چگالی احتمال توأم با بردار پارامتر $\boldsymbol{\theta} = (\theta_۱, \cdots, \theta_n)$ باشد. آنگاه تحت شرایط نظم معمول،

ماتریس اطلاع فیشر $I_n(\boldsymbol{\theta})$ از نمونه‌ای به حجم n به وسیله ماتریس متقارن $k\times k$ که i,j ـ امین عنصر آن به صورت زیر است، تعریف می‌شود.

$$I_n(\boldsymbol{\theta})_{ij} = -E\left[\frac{\partial^۲ \ln f(\mathbf{X};\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}_i\partial\boldsymbol{\theta}_j}\right]$$

اگر $I(\boldsymbol{\theta})$ ماتریس اطلاع فیشر باشد، آنگاه می‌توان آن را تحت شرایط نظم به صورت زیر نشان داد.

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{D} N(\circ, I^{-۱}(\boldsymbol{\theta}))$$

تعریف ۵.۱.۱ (روش رد و پذیرش)**.** یکی از روش‌های متداول برای شبیه‌سازی توزیع‌ها، روش رد و پذیرش است که در این روش آن چنان که از عنوانش پیداست، همه‌ی مقادیر شبیه‌سازی شده را نمی‌پذیریم؛ به عبارتی دیگر، برخی از اعداد تولید شده را رد می‌کنیم و دور می‌ریزیم. برای مشاهده جزئیات بیشتر به مرجع [۲] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب دارای تابع چگالی‌های $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند. همچنین فرض کنید مقدار ثابت $c > \circ$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$f_X(x) \leq cf_Y(y) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{۱.۱}$$

در این صورت اگر با مقدار تصادفی u از $U(\circ,۱)$ ، مقدار تصادفی x از متغیر تصادفی X تولید شود و داشته باشیم:

$$u\frac{cf_X(x)}{f_Y(x)} < ۱ \tag{۲.۱}$$

آنگاه x به عنوان یک مقدار شبیه‌سازی شده از متغیر تصادفی Y پذیرفته می‌شود.

بنابراین برای شبیه‌سازی متغیر تصادفی Y به شرط وجود متغیر تصادفی قابل شبیه‌سازی X و مقدار ثابت $c > \circ$ به گونه‌ای که در نابرابری (۱.۱) صدق کنند، می‌توان الگوریتم روش رد و پذیرش را به صورت زیر در نظر گرفت:

۱. یک مقدار تصادفی u از $U(\circ,۱)$ تولید می‌کنیم؛

۲. با مقدار u ، به طور مستقل مقدار تصادفی x را از متغیر تصادفی X با چگالی g تولید می‌کنیم؛

۳. اگر $u\frac{cf_X(x)}{f_Y(x)} < ۱$ ، آنگاه مقدار x را به عنوان یک مقدار شبیه‌سازی شده از متغیر تصادفی می‌پذیریم؛

۴. اگر $u\frac{cf_X(x)}{f_Y(x)} \geq ۱$ ، آنگاه مقدار x را به عنوان یک مقدار شبیه‌سازی شده از متغیر تصادفی نمی‌پذیریم؛

تعریف ۶.۱.۱. معیار اطلاع آکائیک (AIC [۳] .)
معیار اطلاع آکائیک، معیاری برای آزمون نیکویی برازش است. این معیار توسط آکائیک برای انتخاب بهترین مدل آماری پیشنهاد شد. برای مقایسه‌ی چند مدل رقیب، معیار AIC ، معیار مناسبی است و مدل دارای کمترین AIC بهترین است. در حالت کلی، AIC برابر است با

$$AIC = -۲ \log L + ۲k$$

که k تعداد پارامترهای مدل آماری است و L مقدار ماکزیمم تابع درست نمایی برای مدل برآورد شده است. [۴]

تعریف ۷.۱.۱. معیار اطلاع بیزی (BIC)[۴]
در آمار، اطلاع بیزی یک معیار برای انتخاب مدل در میان یک مجموعه‌ی متناهی از مدل‌ها است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$BIC = -۲ \log L + k(\log(n) - \log(۲\pi))$$

که n اندازه‌ی نمونه، k تعداد پارامترهای آزاد برآورد شده، L مقدار ماکزیمم تابع درست نمایی برای مدل به ازای پارامترهای برآورد شده است. برای n های بزرگ عبارت بالا برابر است با

$$BIC = -۲ \log L + k \log(n)$$

برای معیار اطلاع بیزی نیز مدل دارای کمترین مقدار BIC بهترین است [۱].

تعریف ۸.۱.۱. آماره‌ی کولموگروف‌ـ‌اسمیرنف (KS)[۵]
فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع پیوسته ای با تابع توزیع $F(x)$ و $X_{۱:n}, \cdots, X_{n:n}$ آماره‌های ترتیبی برای این نمونه باشد. تابع توزیع تجربی این نمونه با $F_n(x)$ نمایش داده می‌شود که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$F_n(x) = \begin{cases} ۰ & x < x_{۱:n} \\ \frac{k}{n} & x_{k:n} \leq x < x_{k+۱:n} \quad , \qquad k = ۱, ۲, \cdots, n-۱ \\ ۱ & x \geq x_{n:n} \end{cases}$$

که در آن $F_n(x)$ برآورد تابع توزیع $F(x)$ می‌باشد. در این صورت آماره‌ی کولموگروف‌ـ‌اسمیرنف به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

[۳] Akaike Information Criterion
[۴] Bayesian Information Criterion
[۵] Kolmogorov-Smirnov

۲.۱ توزیع نرمال

مهمترین توزیع در آمار و احتمال، توزیع نرمال (یا توزیع گاوس) است. توزیع نرمال در سال ۱۷۳۳ توسط آبراهام دموار ریاضیدان فرانسوی معرفی شد. وی این توزیع را برای تقریب احتمال‌های مربوط به پرتاب سکه بکار برد و آن را منحنی زنگی شکل نامید، اما به صورت گسترده توسط ریاضیدان آلمانی به نام گاوس در سال ۱۸۰۹ بکار برده شد.

تعریف ۱.۲.۱. اگر متغیر تصادفی X ، دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد،

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(x-\mu)^۲} \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad ; \quad \mu \in \mathbb{R} \quad , \quad \sigma^2 > 0 \qquad (۳.۱)$$

گوییم X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^۲$ است و آن را با نماد $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$ نشان می‌دهیم.

این توزیع هم از نظر تئوری و هم از نظر عملی دارای کاربرد فراوان است. یک مورد مهم از کاربرد این توزیع در مطالعه ی پدیده های تصادفی در حالت زیر است. فرض کنید که مقدار متغیر تحت مطالعه به عوامل متعددی بستگی دارد، به طوری که تأثیر هر یک از این عوامل را می‌توان به صورت یک کمیت تصادفی در نظر گرفت که مجموع آن ها مقدار X را تعیین می‌کند. حال اگر

الف- تعداد این عوامل زیاد باشد.

ب- تأثیر هر یک از این عوامل به تنهایی بسیار جزئی باشد.

ج- اثر هر یک از عوامل مستقل از دیگر عوامل باشد.

در آن صورت می‌توان نشان داد که توزیع X تقریباً نرمال است.
شرایط فوق در مورد بسیاری از کمیت های تصادفی پیوسته به طور تقریبی صادق است. به عنوان مثال طول قد یک شخص به عوامل ژنتیک و عوامل دیگری از قبیل تغذیه، بهداشت، شرایط محیط و $\cdots$ بستگی دارد که تأثیر هر یک از این عوامل به تنهایی نسبتاً جزئی است؛ یا در نمره ی هوش یک دانشجو عوامل زیادی موثر می‌باشند.

۱.۲.۱ ویژگی های توزیع نرمال

اگر f تابع چگالی $N(\mu, \sigma^۲)$ باشد:

۱. تابع چگالی f حول $x = \mu$ متقارن است، یعنی

$$f(x+\mu) = f(x-\mu)$$

۲. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \circ$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \circ$ یعنی $y = \circ$ مجانب افقی نمودار f است.

۳. تابع چگالی f در نقطه ی $x = \mu$ ماکزیمم بوده و مقدار ماکزیمم $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}$ می‌باشد.

۴. اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه $|X|$ را نیم نرمال [۶] استاندارد گوییم هرگاه چگالی آن به صورت زیر باشد.

$$f_{|x|}(x) = ۲f(x) \quad , \quad x > \circ$$

تقارن f حول μ نشان می‌دهد که μ نمایانگر مقدار مرکزی X است. همچنین توجه کنید که هر چقدر σ کوچکتر باشد، ماکزیمم مقدار f بیشتر بوده و چون سطح زیر نمودار f ثابت است و بالعکس هر چه σ بزرگتر باشد، مقدار ماکزیمم f کمتر بوده و نمودار f هموارتر خواهد بود. بنابراین σ نمایانگر تمرکز توزیع X حول مقدار مرکزی μ است.

۳.۱ توزیع چوله نرمال

از گذشته‌های دور، در مباحث آماری خانواده‌های پارامتری و مطالعه‌ی جزئیات آنها موضوع مورد بحث صاحب نظران بوده و در چند سال اخیر، این مبحث با موفقیت چشمگیری همراه بوده است. یک قسمت قابل توجهی از این مطالعات، خانواده توزیع چوله نرمال [۷] می‌باشد. اولین سوالی که ممکن است مطرح شود انگیزه‌ی معرفی توزیع چوله نرمال می‌باشد، که موارد زیر می‌توانند جواب قانع کننده‌ای در پاسخ به این سوال باشند.

- در بسیاری از مسائل علمی امکان دارد با جوامعی مواجه شویم که دارای توزیع نرمال نیستند ولی به توزیع نرمال بسیار نزدیک می‌باشند.
- در بیشتر اوقات انتظار داریم که داده‌های ما در شرایط استانداردی مانند استقلال یا نرمال بودن صدق کنند که گاهی ممکن است داده‌های ما فاقد این شرایط باشند.
- بسیاری از این توزیع‌های آماری به توزیع نرمال گرایش حدی دارند ولی تنها محدودی خانواده توزیع‌های پارامتری وجود دارند که توزیع نرمال را به عنوان یک حالت خاص در بر می‌گیرند و نه در حالت حدی.

نه تنها توزیع چوله نرمال در مسائل علمی کاربردهای فراوانی دارد بلکه از نظر تئوری نیز مفید می‌باشد، برای مثال توزیع آماره‌های ترتیبی آمیخته‌ای از توزیع های چوله نرمال می‌باشد که تحقیقات زیادی در این مورد به عمل آمده است.
هنگامی که اصطلاح چوله نرمال را به کار می‌بریم منظور یک کلاس از توزیع‌های پارامتری

[۶] Half Normal
[۷] skew normal

احتمال است که توزیع نرمال را با اضافه کردن پارامتری به نام پارامتر شکل [۸] که بیان کننده‌ی چولگی است، به کلاس دیگری از توزیع‌ها که توزیع نرمال یک حالت خاص از آن می‌باشد تعمیم و از نرمال بودن خارج می‌سازد. از لحاظ علمی توزیع چوله نرمال به عنوان تعمیمی از توزیع نرمال در موقعیت هایی کاربرد دارد که داده‌ها دارای مقداری چولگی یا کجی باشند و توزیع نرمال به خوبی روی داده‌ها برازش نشود. از لحاظ تئوری توزیع چوله نرمال علاوه بر حفظ کردن بسیاری از ویژگی‌های توزیع نرمال، خود دارای خصوصیاتی مهم و جالب توجه است که این توزیع را به یک توزیع پر کاربرد تبدیل کرده است. توزیع چوله نرمال ابتدا توسط آزالینی ۱۹۸۵ [۷] معرفی شد. در ادامه آزالینی و دالا واله [۹] ۱۹۹۶ [۹] حالت چند متغیره این توزیع را ارایه کردند. همچنین دالا و کاپیتانو [۱۰] ۱۹۹۹ [۸] خواص مهم و احتمالی این توزیع را به دست آوردند. در این بخش به معرفی توزیع چوله نرمال پرداخته و برخی از خواص آن مورد بررسی قرار داده و گشتاورها و برآوردگرهای ماکزیمم درست نمایی آن را به دست می‌آوریم. قبل از معرفی توزیع چوله نرمال، خانواده توزیع‌های متقارن چوله را در قضیه‌های زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم. وانگ، بویر و جنتون [۱۱] ۲۰۰۴ [۳۰] به بررسی کامل جزئیات این خانواده از توزیع‌ها پرداختند.

لم ۱.۳.۱. فرض کنید f یک تابع چگالی احتمال متقارن حول صفر باشد و G یک تابع حقیقی مقدار با خواص زیر باشد.

۱. $G : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$

۲. $G(-x) = ۱ - G(x)$

آنگاه تابع $f_g(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود یک تابع چگالی احتمال است.

$$f_g(x) = ۲f(x)G(x) \tag{۴.۱}$$

برهان. فرض کنید $X \sim f$ باشد لذا:

(۱)

$$f(x) \geq ۰ \quad , \quad G(x) \geq ۰ \Rightarrow f_g(x) \geq ۰$$

(۲) می‌دانیم اگر X و Y هم‌توزیع باشند، آنگاه برای هر G پیوسته، $G(X)$ و $G(Y)$ نیز هم توزیع هستند. در نتیجه داریم

$$X \overset{d}{=} -X \Rightarrow G(x) \overset{d}{=} G(-x) = ۱ - G(x)$$
$$\Rightarrow E[۲G(x)] = ۱ \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{۲G(x)f(x)dx}_{f_g(x)} = ۱$$

[۸] shap parameter
[۹] Dalla Valla
[۱۰] Capitianio
[۱۱] Wang, Boyer and Genton

پس $f_g(x)$ یک تابع چگالی احتمال است.

□

ملاحظه ۱.۳.۱. به توزیع معرفی شده در رابطه (۴.۱) توزیع چوله متقارن می‌گوییم.

لم ۲.۳.۱. اگر $X_g \sim f_g$ و همچنین $X \sim f$ و h یک تابع زوج باشد، آنگاه $h(X_g) \overset{d}{=} h(X)$

برهان. اگر F و F_g به ترتیب تابع توزیع متغیرهای تصادفی X و X_g باشند، آنگاه:

$$F_{|X_g|}(x) = P[|X_g| \leq x] = P[-x \leq X_g \leq x] = F_g(x) - F_g(-x)$$
$$\Rightarrow f_{|X_g|}(x) = f_g(x) + f_g(-x) = ۲f(x)G(x) + ۲f(x)G(-x)$$
$$= ۲f(x)G(x) + ۲f(x)(۱ - G(x)) = ۲f(x)$$

و چون $f_{|X|_g}(x) = ۲f(x)$ پس $|X_g| \overset{d}{=} |X|$. بنابراین برای هر تابع زوج h داریم:

$$h(X_g) \overset{d}{=} h(|X_g|) \overset{d}{=} h(|X|) \overset{d}{=} h(X)$$

□

در ادامه کار، آزالینی و کاپیتانو ۲۰۰۳ تابع چگالی چوله متقارن $g(x)$ را به شکل زیر تعریف کردند:

$$g(x) = ۲f(x)G(W(x)) \qquad (۵.۱)$$

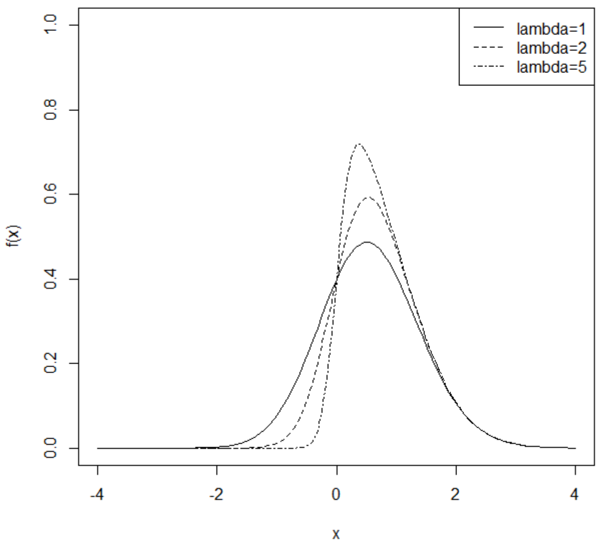
به طوریکه $f(x)$ یک تابع چگالی متقارن حول صفر است و $G : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته متقارن حول صفر و $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع فرد می‌باشد. با جایگذاری $f = \phi$ و $G = \Phi$ و $W(x) = \lambda x$ در رابطه (۵.۱) که ϕ و Φ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد می‌باشند، تعریف زیر را نتیجه می‌گیریم:

تعریف ۱.۳.۱. متغیر تصادفی Z_λ دارای توزیع چوله نرمال استاندارد می‌باشد، اگر فرم تابع چگالی آن را که با $\phi(z;\lambda)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر باشد:

$$\phi(z;\lambda) = ۲\phi(z)\Phi(\lambda z) \quad , \quad Z, \lambda \in \mathbb{R} \qquad (۶.۱)$$

اگر متغیر تصادفی Z_λ دارای توزیع چوله نرمال با پارامتر شکل یا چولگی λ باشد آن را به اختصار با نماد $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ نشان می‌دهیم. این فرم تابع چگالی برای اولین بار توسط آزالینی ۱۹۸۵ معرفی شد.

تابع چگالی فوق به ازای مقادیر مثبت λ چوله به راست، به ازای مقادیر منفی λ چوله به چپ و به ازای $\lambda = ۰$ متقارن و به چگالی نرمال استاندارد تبدیل می‌شود.



شکل ۱.۱: تابع چگالی توزیع چوله نرمال برای مقادیر مختلف λ

این شکل تابع چگالی برای اولین بار توسط آزالینی ۱۹۸۵ معرفی شد. شکل ۱۰۱ چگالی متغیر تصادفی چوله نرمال را برای مقادیر مختلف (مثبت و منفی) λ نشان می‌دهد.

ملاحظه ۲.۳.۱. اگر $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ ، $Y = \mu + \sigma Z_\lambda$ ، $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ، آنگاه تابع چگالی Y به صورت زیر است:

$$\phi(y; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{۲}{\sigma}\phi(\frac{y-\mu}{\sigma})\Phi(\frac{y-\mu}{\sigma}) \qquad (۷.۱)$$

اگر تابع چگالی Y به صورت (۷.۱) باشد، می‌نویسیم $Y \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$.

لم ۳.۳.۱. اگر $\Phi(z)$ تابع توزیع نرمال استاندارد و $\Phi(z;\lambda)$ تابع توزیع چوله نرمال استاندارد باشد، آنگاه بین تابع توزیع چوله نرمال استاندارد و تابع توزیع نرمال استاندارد رابطه $\Phi(z;\lambda) = \Phi(z) - ۲T(z;\lambda)$ برقرار است، که در آن $T(z;\lambda) = \int_z^\infty \int_۰^{\lambda t} \phi(u)\phi(t)dudt$ است.

برهان. با توجه به تعریف تابع توزیع نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\Phi(z;\lambda) &= ۲\int_{-\infty}^{z} \phi(t)\Phi(\lambda t)dt = ۱ - ۲\int_{z}^{\infty} \phi(t)\Phi(\lambda t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} ۲\phi(t)\Phi(\lambda t)dt - \int_{z}^{+\infty} ۲\phi(t)\Phi(\lambda t)dt \\
&= ۱ - ۲\left(\int_{z}^{+\infty} \phi(t)\left(\int_{-\infty}^{۰} \phi(u)du + \int_{۰}^{\lambda t} \phi(u)du\right)dt\right)
\end{aligned}$$

از آنجایی که $\int_{-\infty}^{0} \phi(u)du = \frac{1}{2}$ ، در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\Phi(z;\lambda) &= 1 - 2\left(\frac{1}{2}(1-\Phi(z)) + \int_{z}^{+\infty}\int_{0}^{\lambda t}\phi(t)\phi(u)dudt\right)\\ &= \Phi(z) - 2\int_{z}^{+\infty}\int_{0}^{\lambda t}\phi(u)\phi(t)dudt = \Phi(z) - 2T(z;\lambda) \quad , \quad \lambda > 0\end{aligned}$$

□

۴.۱ ویژگی های توزیع چوله نرمال

قضیه ۱.۴.۱. اگر $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ و $X \sim N(0,1)$ آنگاه داریم:

۱. $SN(0) = N(0,1)$

۲. $-Z_\lambda \stackrel{d}{=} SN(-\lambda)$

۳. $|Z_\lambda| \stackrel{d}{=} |X|$

۴. $X^2 \stackrel{d}{=} Z_\lambda^2 \sim \chi_1^2$

۵. هنگامی که $\lambda \to +\infty$ آنگاه $Z_\lambda \stackrel{d}{=} |X|$

۶. هنگامی که $\lambda \to -\infty$ آنگاه $Z_\lambda \stackrel{d}{=} -|X|$

برهان. ۱. با استفاده از تعریف تابع چگالی چوله نرمال (۶.۱) ، اگر $\lambda = 0$ ، آنگاه $\phi(z;0) = 2\phi(z)\Phi(0)$ و از آنجایی که $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ ، بنابراین

$$\phi(z;0) = \phi(z) \Rightarrow SN(0) = N(0,1)$$

۲. با توجه به متقارن بودن چگالی نرمال استاندارد و با استفاده از تعریف تابع چگالی چوله نرمال و زوج بودن تابع $\phi(z)$ ، $(\phi(-z) = \phi(z))$ ،

$$\phi(-z;\lambda) = 2\phi(-z)\Phi(-\lambda z) = 2\phi(z)\Phi(-\lambda z) = SN(-\lambda) \Rightarrow -Z_\lambda \stackrel{d}{=} SN(-\lambda)$$

۳. برای متغیر تصادفی Z_λ به ازای هر $x > 0$ ، داریم

$$\begin{aligned}F_{|Z_\lambda|}(x) &= P(|Z_\lambda| \le x) = P(Z_\lambda \le x) - P(-Z_\lambda \ge x)\\ &= \int_{-\infty}^{x} 2\phi(z)\Phi(\lambda z)dz - \int_{x}^{+\infty} 2\phi(z)\Phi(-\lambda z)dz\end{aligned}$$

می‌دانیم که $\Phi(-\lambda z) = ۱ - \Phi(\lambda z)$ ، داریم

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{x} ۲\phi(z)\Phi(\lambda z)dz - \int_{x}^{+\infty} ۲\phi(z)(۱ - \Phi(\lambda z))dz \\
&= \int_{-\infty}^{x} ۲\phi(z)\Phi(\lambda z)dz - \int_{x}^{+\infty} ۲\phi(z)dz + \int_{x}^{+\infty} ۲\phi(z)\Phi(\lambda z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} ۲\phi(z)\Phi(\lambda z)dz - \int_{x}^{+\infty} ۲\phi(z)dz \\
&= ۱ - ۲(۱ - \Phi(x)) = ۲\Phi(x) - ۱
\end{aligned}$$

در نتیجه $f_{|x|}(x) = ۲\phi(x), x > ۰$
از آنجایی که طبق فرض، X دارای چگالی نرمال استاندارد است، پس $|Z_\lambda|$ دارای چگالی $۲\phi(x)$ ، که همان تابع چگالی نیم نرمال است و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۴. بنابر قسمت ۳ که $|X| \stackrel{d}{=} |Z_\lambda|$ داریم

$$Z_\lambda^۲ \stackrel{d}{=} |Z_\lambda|^۲ \stackrel{d}{=} |X|^۲ \stackrel{d}{=} X^۲$$

چون $X^۲ \sim \chi_۱^۲$ ، پس $Z_\lambda^۲ \sim \chi_۱^۲$.

۵. اگر $\lambda \to +\infty$ و $z > ۰$ در نتیجه $\lambda z \to +\infty$ و $\Phi(\lambda z) \to ۱$ ، بنابراین

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \phi(z;\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} ۲\phi(z)\Phi(\lambda z) = \begin{cases} ۲\phi(z) & z > ۰ \\ ۰ & z < ۰ \end{cases}$$

تابع چگالی فوق همان تابع چگالی نیم نرمال می‌باشد، در نتیجه $Z_\lambda \stackrel{d}{=} |X|$

۶. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $\lambda \to -\infty$ و $z < ۰$ ، خواهیم داشت

$$۲\phi(z)\Phi(\lambda z) \longrightarrow ۲\phi(z)$$

و اثبات کامل می‌شود.

□

قضیه ۲.۴.۱. تابع چگالی چوله نرمال قویاً تک مدی است اگر و تنها اگر لگاریتم آن مقعر باشد.

برهان. برای اینکه نشان دهیم $\log\phi(z;\lambda)$ ، تابعی مقعر از z است، کافیست ثابت کنیم مشتق دوم $\log\phi(z;\lambda)$ برای تمام مقادیر z، منفی است.

می‌دانیم

$$\phi(z)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{z^۲}{۲}} \quad \phi'(z)=\frac{\partial}{\partial z}\phi(z)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}(-z)e^{-\frac{z^۲}{۲}}=-z\phi(z)$$
$$\Phi(\lambda z)=\int_{-\infty}^{\lambda z}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{x^۲}{۲}}dx$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{-\infty}^{\lambda z}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{x^۲}{۲}}dx\right)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{z^۲}{۲}}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(\lambda z)=\lambda\phi(\lambda z)$$

داریم

$$\frac{\partial^۲}{\partial z^۲}\log\phi(z;\lambda)=\frac{\partial^۲}{\partial z^۲}(\log ۲+\log\phi(z)+\log\Phi(\lambda z))$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}(\frac{-z\phi(z)}{\phi(z)}+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\lambda\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)}))=-۱+\lambda(\frac{-z\lambda^۲\phi(\lambda z)\Phi(\lambda z)-\lambda\phi^۲(\lambda z)}{\Phi^۲(\lambda z)})$$
$$=-۱-\frac{\lambda^۲\phi(\lambda z)}{\Phi(z)}(\lambda z+\frac{\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)})$$

از آنجایی که $\phi(z)$ و $\Phi(z)$ برای تمام مقادیر Z مثبت هستند، برای اثبات نشان می‌دهیم که $\lambda z+\frac{\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)}$ نیز برای تمام مقادیر λz مثبت است، به عبارت دیگر با در نظر گرفتن $\lambda z=t$ خواهیم داشت:

$$\frac{\phi(t)}{\Phi(t)}+t>\circ=\frac{\phi(t)}{\Phi(t)}>-t\Rightarrow\phi(t)>-t\Phi(t)=\phi(t)+t\Phi(t)>\circ \quad , \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

حال برای نشان دادن این نامساوی داریم:

$$\phi(t)+t\Phi(t)=\phi(t)+\int_{-\infty}^{t}t\phi(x)dx$$

ازآنجایی که $x<t$ ، در نتیجه $x\phi(x)<t\phi(x)$
لذا

$$\phi(t)+\int_{-\infty}^{t}t\phi(x)dx>\phi(t)+\int_{-\infty}^{t}x\phi(x)dx$$

از طرفی $x\phi(x)=-\phi'(x)$ ، در نتیجه

$$\phi(t)+t\phi(t)>\phi(t)+\int_{-\infty}^{t}-\phi'(x)dx$$

چون انتگرال مشتق تابع خود تابع است در نتیجه $\phi(t)-\phi(t)=\circ$. بنابراین $\frac{\phi(t)}{\Phi(t)}+t>\circ$. در نتیجه $\log\phi(z;\lambda)$ ، تابعی مقعر از z است. □

۵.۱ نمایش تصادفی

قضیه زیر بیان می‌کند که متغیر تصادفی چوله نرمال را می‌توان به صورت تابعی از دو متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد نوشت که به آن نمایش تصادفی می‌گویند.

قضیه ۱.۵.۱. اگر V و U متغیرهای تصادفی مستقل نرمال استاندارد باشند و

$$V = \frac{z - a|u|}{b} \quad \text{و} \quad Z_\lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}|U| + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}V \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

آنگاه متغیر تصادفی Z_λ دارای توزیع چوله نرمال با پارامتر λ است.

برهان. ابتدا فرض کنید $a = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ و $b = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
P(Z_\lambda \leq z) &= P(a|U| + bV \leq z) = P(V \leq \frac{(z - a|U|)}{b}) \\
&= \int_0^{+\infty} P\left(V \leq \frac{(z - a|u|)}{b}\middle| |U| = u\right) \cdot f_{|u|}(u) du \\
&= \int_0^{+\infty} P(V \leq \frac{(z - au)}{b}) \cdot 2 f(u) du
\end{aligned}$$

چون u نرمال استاندارد است، $f_{|u|}(u) = 2\phi(u)$
در نتیجه

$$\begin{aligned}
P(Z_\lambda \leq z) &= \int_0^{+\infty} P(V \leq \frac{(z - au)}{b}) \cdot 2\phi(u) du \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \Phi(\frac{(z - au)}{b}) \phi(u) du
\end{aligned}$$

حال با مشتق گیری از رابطه بالا نسبت به z، به کمک رابطه $a^2 + b^2 = 1$ و $[(\frac{u-az}{b})^2 + u^2] = [(\frac{z-au}{b})^2 + z^2]$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} P(Z_\lambda \leq z) &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{b} \phi(\frac{(u - az)^2}{b}) \phi(u) du \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi b} exp\{-\frac{1}{2}[(\frac{u - az}{b})^2 + z^2]\} du \\
&= 2\phi(z) \int_0^{+\infty} (2\pi b^2)^{-\frac{1}{2}} exp(-\frac{(u - az)^2}{2b^2}) du
\end{aligned}$$

با فرض $t = \frac{u-az}{b}$ و اینکه $\frac{a}{b} = \lambda$ و $\Phi(x) = [1 - \Phi(-x)]$ داریم:

$$\begin{aligned}
2\phi(z) \int_{-\frac{a}{b}z}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= 2\phi(z)\{1 - \Phi(-\frac{a}{b}z)\} \\
&= 2\phi(z)\Phi(\lambda z)
\end{aligned}$$

که این تابع چگالی چوله نرمال است. □

قضیه ۲.۵.۱. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه داریم:

$$X|(Y < \lambda X) \sim SN(\lambda) \qquad (۸.۱)$$

برهان.

$$
\begin{aligned}
P(Y<\lambda x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(Y<\lambda x)\cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\lambda x} f(y)f(x)dydx \\
&= \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{+\infty} ۲\Phi(\lambda x)\phi(x)dx = \frac{۱}{۲} \\
f_{(X|Y<\lambda X)}(x) &= \frac{f(X,Y<\lambda x)}{P(Y<\lambda x)} = \frac{f_X(x)\cdot P(Y<\lambda x|X=x)}{\frac{۱}{۲}} \\
&= \frac{\phi(x)\cdot\Phi(\lambda x)}{\frac{۱}{۲}} = ۲\phi(x)\cdot\Phi(\lambda x)
\end{aligned}
$$

در نتیجه $X|(Y<\lambda x)\sim SN(\lambda)$ □

قضیه ۳.۵.۱. فرض کنید $(X_۱,X_۲)\overset{d}{=}N_۲(۰,۰,۱,۱,\rho)$ و همچنین $X_{(۱)}=\min(X_۱,X_۲)$ و $X_{(۲)}=\max(X_۱,X_۲)$ آنگاه داریم:

۱. اگر $|\rho|\neq ۱$ آنگاه: $X_{(۱)}\sim SN(-\sqrt{\frac{۱-\rho}{۱+\rho}})$ و $X_{(۲)}\sim SN(\sqrt{\frac{۱-\rho}{۱+\rho}})$

۲. اگر $\rho=۱$ آنگاه: $X_{(۱)}\overset{d}{=}X_{(۲)}\overset{d}{=}X_۱\overset{d}{=}X_۲$

۳. اگر $\rho=-۱$ آنگاه: $X_{(۱)}\overset{d}{=}-|X_۱|$ و $X_{(۲)}\overset{d}{=}|X_۱|$

۴. $|X_{(۱)}|\overset{d}{=}|X_{(۲)}|\overset{d}{=}|X_۱|\overset{d}{=}|X_۲|$

برهان. ۱. با توجه به خواص توزیع نرمال باید ثابت کنیم که $X_۱+X_۲$ و $X_۱-X_۲$ هم‌توزیع و مستقلند. در نتیجه چون می‌دانیم که در نرمال دو متغیره توزیع حاشیه‌ای نرمال است، بنابراین توزیع $X_۱+X_۲$ و $X_۱-X_۲$ نیز نرمال می‌باشند. دراین صورت داریم:

$$
\begin{aligned}
&E(X_۱+X_۲)=EX_۱+EX_۲=۰ \\
&Var(X_۱+X_۲)=Var(X_۱)+Var(X_۲)+۲Cov(X_۱,X_۲) \\
&=۱+۱+۲\rho=۲(۱+\rho) \\
&X_۱+X_۲\sim N(۰,۲(۱+\rho))\Rightarrow V=\frac{X_۱+X_۲}{\sqrt{۲(۱+\rho)}}\sim N(۰,۱) \\
&E(X_۱-X_۲)=EX_۱-EX_۲=۰ \\
&Var(X_۱-X_۲)=Var(X_۱)+Var(X_۲)-۲Cov(X_۱,X_۲) \\
&=۱+۱-۲\rho=۲(۱-\rho) \\
&X_۱-X_۲\sim N(۰,۲(۱-\rho))\Rightarrow U=\frac{X_۱-X_۲}{\sqrt{۲(۱-\rho)}}\sim N(۰,۱)
\end{aligned}
$$

برای مستقل بودن کافیست نشان دهیم $Cov(U,V)=۰$ می‌دانیم $Cov(aX,bY)=$

در نتیجه داریم: $abCov(X,Y)$

$$\begin{aligned}
Cov(U,V) &= Cov(\frac{X_۱}{\sqrt{۲(۱+\rho)}}+\frac{X_۲}{\sqrt{۲(۱+\rho)}}, \frac{X_۱}{\sqrt{۲(۱-\rho)}}-\frac{X_۲}{\sqrt{۲(۱-\rho)}})\\
&= Cov(\frac{X_۱}{\sqrt{۲(۱+\rho)}}, \frac{X_۱}{\sqrt{۲(۱-\rho)}}) + Cov(\frac{X_۲}{\sqrt{۲(۱+\rho)}}, \frac{X_۱}{\sqrt{۲(۱-\rho)}})\\
&- Cov(\frac{X_۱}{\sqrt{۲(۱+\rho)}}, \frac{X_۲}{\sqrt{۲(۱-\rho)}}) - Cov(\frac{X_۲}{\sqrt{۲(۱+\rho)}}, \frac{X_۲}{\sqrt{۲(۱-\rho)}})\\
&= \frac{۱}{\sqrt{۲(۱+\rho)}\sqrt{۲(۱-\rho)}}\underbrace{Cov(X_۱,X_۱)}_{=۱} + \frac{۱}{\sqrt{۲(۱+\rho)}\sqrt{۲(۱-\rho)}}Cov(X_۲,X_۱)\\
&- \frac{۱}{\sqrt{۲(۱+\rho)}\sqrt{۲(۱-\rho)}}Cov(X_۱,X_۲) - \frac{۱}{\sqrt{۲(۱+\rho)}\sqrt{۲(۱-\rho)}}\underbrace{Cov(X_۲,X_۲)}_{=۱} = ۰
\end{aligned}$$

از طرفی طبق تعریف تابع ماکزیمم می‌توان نوشت:

$$X_{(۲)} = \max(X_۱,X_۲) = \frac{X_۱+X_۲}{۲} + \frac{|X_۱-X_۲|}{۲}$$

حال با توجه به تعریف U و V بالا و قضیه ۱.۵.۱ ، اگر $\lambda = \sqrt{\frac{۱-\rho}{۱+\rho}}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
X_{(۲)} &= \frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱-\rho}{۱+\rho}}}\frac{X_۱+X_۲}{\sqrt{۲(۱+\rho)}} + \frac{\sqrt{\frac{۱-\rho}{۱+\rho}}}{\sqrt{۱+\frac{۱-\rho}{۱+\rho}}}\frac{|X_۱-X_۲|}{\sqrt{۲(۱-\rho)}}\\
&\Rightarrow X_{(۲)} = \frac{۱}{\sqrt{۱+\lambda^۲}}V + \frac{\lambda}{\sqrt{۱+\lambda^۲}}|U|
\end{aligned}$$

و اثبات کامل می‌شود. توزیع $X_{(۱)} = \min(X_۱,X_۲)$ نیز به طریق مشابه به‌دست می‌آید.

۲. اگر $\rho = ۱$ آنگاه، $X_۱ \overset{a.s}{=} X_۲$. بنابراین $X_{(۱)} \overset{d}{=} X_{(۲)} \overset{d}{=} X_۱ \overset{d}{=} X_۲$

۳. اگر $\rho = -۱$ آنگاه، $X_۱ \overset{a.s}{=} -X_۲$. بنابراین $X_{(۱)} \overset{d}{=} -|X_۱|$ و $X_{(۲)} \overset{d}{=} |X_۱|$

۴. اثبات از خاصیت ۳ قضیه نتیجه می‌شود.

□

قضیه ۴.۵.۱. اگر $Y_۱,Y_۲ \sim N(۰,۱)$ و $X = \begin{cases} Y_۱ & Y_۲ < \lambda Y_۱ \\ -Y_۱ & Y_۲ \geq \lambda Y_۱ \end{cases}$ ، آنگاه $X \sim SN(\lambda)$.

برهان.

$$f_X(x) = f_{Y_۱|(Y_۲<\lambda Y_۱)}(x)P(Y_۲<\lambda Y_۱) + f_{-Y_۱|(Y_۲\geq\lambda Y_۱)}(x)P(Y_۲\geq\lambda Y_۱)$$

مشابه قضیه ۱.۵.۱ داریم:

$$\phi(x)\Phi(\lambda x) + \phi(-x)[۱-\Phi(-\lambda x)]$$

چون $[۱-\Phi(-\lambda x)] = \Phi(\lambda x)$ و $\phi(x) = \phi(-x)$ (چون تابع ϕ زوج است) در نتیجه $X \sim SN(\lambda)$
و $f_X(x) = ۲\phi(x)\Phi(\lambda x)$ □

در اینجا تابع مولد گشتاور توزیع چوله نرمال، امید ریاضی و واریانس آن را بدست آورده و سپس چند قضیه درباره‌ی گشتاورهای این توزیع بیان می‌کنیم. برای بدست آوردن تابع مولد گشتاور توزیع چوله نرمال از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱.۵.۱. اگر $U \sim N(0,1)$ ، آنگاه برای مقادیر دلخواه و حقیقی μ و σ داریم:

$$E\{\Phi(\mu+\sigma U)\} = \Phi(\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}})$$

برهان. فرض کنیم متغیرهای تصادفی $X = \mu + \sigma U$ و $Y \sim N(0,1)$ مستقل باشد، می‌دانیم $Y - X \sim N(-\mu, 1+\sigma^2)$ بنابراین

$$\begin{aligned}
E\Big\{\Phi(\mu+\sigma U)\Big\} &= E\Big\{\Phi(X)\Big\} = E(P(Y \leq X)) \\
&= \int_R P(Y \leq x | X = x) f_X(x) dx \\
&\xrightarrow[\text{مستقلند.}]{\text{چون} X \text{و} Y} = P(Y \leq x) = P(Y - x \leq 0) \\
&= P(\frac{Y - x - (-\mu)}{\sqrt{1+\sigma^2}} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}}) = \Phi(\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}})
\end{aligned}$$

□

قضیه ۵.۵.۱. اگر $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ ، آنگاه تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Z_λ به صورت زیر است.

$$M_{Z_\lambda}(t) = 2exp(\frac{t^2}{2})\Phi(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}})$$

برهان.

$$\begin{aligned}
M_{Z_\lambda}(t) &= E(e^{tZ_\lambda}) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu}\phi(u)\Phi(\lambda u)du \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\Phi(\lambda u)du \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(u^2-2tu+t^2-t^2)}\Phi(\lambda u)du \\
&= 2e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(u-t)^2}\Phi(\lambda u)du
\end{aligned}$$

با به کار بردن تغییر متغیر $w = u - t$ و بنابر لم قبل داریم:

$$M_{Z_\lambda}(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}}E(\Phi(\lambda W + \lambda t)) = 2e^{\frac{t^2}{2}}\Phi(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}})$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا می‌توان به سادگی امید و واریانس را به صورت زیر محاسبه کرد.

می‌دانیم

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \xrightarrow{t=0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
$$\phi'(t) = \frac{-t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} M_{Z_\lambda}(t) = 2te^{-\frac{t^2}{2}} \Phi(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}}) + 2\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e^{-\frac{t^2}{2}} \phi(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}})$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{Z_\lambda}(t) = 2e^{-\frac{t^2}{2}} \Phi(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}}) + 2t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \phi(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}})$$
$$+4(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}})\phi(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}}) + 2(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}})\phi'(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}})$$

در نتیجه داریم:

$$\mu_{Z_\lambda} = E(Z_\lambda) = \frac{\partial}{\partial t} M_{Z_\lambda}(t)\Big|_{t=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$
$$E(Z_\lambda^2) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{Z_\lambda}(t)\Big|_{t=0} = 1$$
$$\sigma^2_{Z_\lambda} = Var(Z_\lambda) = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

اگر $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ باشد، $E(Z_\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta$ و $Var(Z_\lambda) = 1 - \frac{2}{\pi}\delta^2$ است. در نتیجه $E(Z_\lambda)$ تابعی صعودی از δ است و $Var(Z_\lambda)$ تابعی نزولی از $|\delta|$ است.

همچنین گشتاورهای مرکزی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$K_i = E((Z - E(Z_\lambda))^i)$$
$$K_1 = E(Z_\lambda) = \mu_{Z_\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta$$
$$K_2 = Var(Z_\lambda) = \sigma^2_{Z_\lambda} = 1 - \frac{2}{\pi}\delta^2$$
$$K_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4-\pi}{\pi}\delta^3$$
$$K_4 = 3 - \frac{12}{\pi}\delta^2 + \frac{8\pi - 12}{\pi^2}\delta^4 = 3(1 - \frac{2}{\pi}\delta^2)^2 + \frac{8\pi - 24}{\pi^2}\delta^4$$

در ادامه آزالینی ۱۹۸۵، γ_1 و γ_2 به ترتیب نشان دهنده‌ی ضریب چولگی و ضریب کشیدگی متغیر تصادفی چوله نرمال است را به صورت زیر به دست آورد.

$$\gamma_1 = \frac{K_3}{K_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{4-\pi}{2}\frac{\mu^3_{Z_\lambda}}{\sigma^3_{Z_\lambda}}$$
$$\gamma_2 = \frac{K_4}{K_2^2} = 2(\pi - 3)\frac{\mu^4_{Z_\lambda}}{\sigma^4_{Z_\lambda}}$$

آزالینی در سال ۱۹۸۵ نشان داد که مقدار ضریب چولگی در بازه‌ی (۰/۹۹۵, ۰/۹۹۵−) و مقدار ضریب کشیدگی در بازه ی (۰/۸۶۹, ۰/۸۶۹−) تغییر می‌کند. این یک محدودیت برای توزیع چوله نرمال می‌شود، زیرا تغییرات چولگی و کشیدگی آن محدود است. □

لم ۲.۵.۱. فرض کنید $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ باشد آنگاه $E(Z_\lambda^{۲k}) = ۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲k-۱)$

برهان. اگر $h(x) = x^{۲k}$ دراین صورت h یک تابع زوج می‌باشد. بنابراین با توجه به لم ۲.۳.۱ ، تمام گشتاورهای زوج چوله نرمال با گشتاورهای زوج نرمال استاندارد برابر است. در نتیجه

$$E(Z^{۲k}) = E(Z_\lambda^{۲k}) = ۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲k-۱)$$

□

گشتاورهای مرتبه فرد توزیع چوله نرمال به صورت زیر محاسبه می‌شود.

لم ۳.۵.۱. اگر متغیر تصادفی $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ آنگاه:

$$E(Z_\lambda^{۲k+۱}) = \frac{۲}{\pi}\lambda(۱+\lambda^۲)^{-(k+\frac{۱}{۲})}۲^{-k}(۲k+۱)!\sum_{r=۰}^{k}\frac{r!(۲\lambda)^{۲r}}{(۲r+۱)!(k-۱)!}$$

برهان. اگر U و V دو متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد بوده و a و b اعداد حقیقی باشند، آنگاه با استفاده از بسط دو جمله‌ای داریم:

$$E(a|U|+bV)^{۲k+۱} = E\left[\sum_{j=۰}^{۲k+۱}\binom{۲k+۱}{j}(a|U|)^j(bV)^{۲k+۱-j}\right]$$

حال اگر $b = \frac{۱}{\sqrt{۱+\lambda^۲}}$ و $a = \frac{\lambda}{\sqrt{۱+\lambda^۲}}$ در این صورت با توجه به قضیه ۱.۵.۱ می‌دانیم که $Z \overset{d}{=} (a|U|+bV)$ بنابراین:

$$\begin{aligned}
E(a|U|+bV)^{۲k+۱} &= \sum_{j=۰}^{۲k+۱}\binom{۲k+۱}{j}a^jb^{۲k+۱-j}E(|U|^j)E(V^{۲k+۱-j}) \\
&= \sum_{j=۰}^{۲k+۱}\binom{۲k+۱}{j}(\frac{\lambda}{\sqrt{۱+\lambda^۲}})^j(\frac{۱}{\sqrt{۱+\lambda^۲}})^{۲k+۱}E(|U|^j)E(V^{۲k+۱-j}) \\
&= (\frac{۱}{\sqrt{۱+\lambda^۲}})^{۲k+۱}\sum_{j=۰}^{۲k+۱}\binom{۲k+۱}{j}\lambda^jE(|U|^j)E(V^{۲k+۱-j}) \\
&= (۱+\lambda^۲)^{-\frac{۲k+۱}{۲}}(۲k+۱)!\sum_{j=۰}^{۲k+۱}\frac{\lambda^j}{j!(۲k+۱-j)!}E(|U|^j)E(V^{۲k+۱-j})
\end{aligned}$$

و از آنجایی که گشتاورهای فرد توزیع نرمال استاندارد برابر صفر است، با درنظرگرفتن $J = ۲r+۱$ رابطه فوق برابر است با:

$$E(Z_\lambda)^{۲k+۱} = (۱+\lambda^۲)^{-(k+\frac{۱}{۲})}(۲k+۱)!\sum_{r=۰}^{k}\frac{\lambda^{۲r+۱}}{(۲r+۱)!(۲k+۱-۲r-۱)!}E(|U|^{۲r+۱})E(V^{۲(k-r)})$$

(۹.۱)

برای اتمام اثبات کافیست نشان دهیم:

$$E(|U|^{2r+1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}r!2^r \qquad E(V^{2r}) = \frac{(2r)!}{2^r r!}$$

می‌دانیم تابع مولد گشتاور نرمال استاندارد $e^{\frac{t^2}{2}}$ می‌باشد. برای محاسبه $E(V^{2r})$ از بسط مک لورن $e^{\frac{t^2}{2}}$ که به صورت زیر است استفاده می‌کنیم.

$$e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

حال اگر از رابطه فوق $2r$ مرتبه مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d^{2r}} e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \left[2n(2n-1)\cdots(2n-(2r-1))t^{2n-2r} \right] \\
&= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!(2n-2r)!} t^{2n-2r} \\
&= \frac{(2r)!}{2^r r! 0!} t^0 + \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!(2n-2r)!} t^{2n-2r}
\end{aligned}$$

حال با قرار دادن t مساوی صفر $E(V^{2r})$ محاسبه می‌شود، در نتیجه:

$$E(V^{2r}) = \frac{(2r)!}{2^r r!}$$

از طرفی می‌دانیم،

$$f_{|U|}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad , \quad u > 0$$

حال اگر $|U|$ را مساوی Y اختیار کنیم، خواهیم داشت

$$E(|U|^{2r+1}) = E(Y^{2r+1}) = \int_0^{\infty} y^{2r+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

لذا با تغییر متغیر $u = \frac{y^2}{2}$ داریم:

$$\begin{aligned}
E(Y^{2r+1}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (2u)^{\frac{2r+1}{2}} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2u}} du \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^r \int_0^{\infty} u^r e^{-u} du \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^r \Gamma(r+1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^r r! \quad , \quad r = 0, 1, 2, \cdots \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

و در نتیجه با توجه به روابط بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
E(a|U|+bV)^{2k+1} &= (1+\lambda^2)^{-(k+\frac{1}{2})}(2k+1)! \times \sum_{r=0}^{k} \frac{\lambda^{2r+1}}{(2r+1)!(2k+1-2r-1)!} \\
&\times E(|U|^{2r+1})E(V^{2(k-r)}) \\
&= (1+\lambda^2)^{-(k+\frac{1}{2})}(2k+1)! \times \sum_{r=0}^{k} \frac{\lambda^{2r+1}}{(2r+1)!(2k+1-2r-1)!} \\
&\times \sqrt{\frac{2}{\pi}} r! 2^r \frac{[2(k-r)]!}{2^{k-r}(k-r)!} \\
&= (1+\lambda^2)^{-(k+\frac{1}{2})}(2k+1)! \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda 2^{-k} \sum_{r=0}^{k} \frac{\lambda^{2r}}{(2r+1)!} r! \frac{2^{2r}}{(k-r)!} \\
&= (1+\lambda^2)^{-(k+\frac{1}{2})}(2k+1)! \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda 2^{-k} \sum_{r=0}^{k} \frac{(2\lambda)^{2r} r!}{(2r+1)!(k-r)!}
\end{aligned}$$

□

۶.۱ برآورد ماکزیمم درست نمایی

فرض کنیم $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از خانواده مکانی-مقیاسی، چوله نرمال (۷.۱) با مقادیر مشاهده شده $x_1, \cdots, x_n$ باشد. لگاریتم تابع درست نمایی برای پارامترهای $\theta = (\mu, \sigma, \lambda)$ به صورت زیر است:

$$\ell(\theta) = n \ln 2 - n \ln \sigma + \sum_{i=1}^{n} \ln \phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma}) + \sum_{i=1}^{n} \ln \Phi(\lambda \frac{x_i - \mu}{\sigma})$$

معادلات درست نمایی برای پارامتر μ و σ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu}\ell(\theta) &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \frac{\lambda^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \sigma}\ell(\theta) &= \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \frac{\lambda^2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = 0
\end{aligned}$$

برای هر λ معادلات درست نمایی برای μ و σ جواب یکتا دارند، زیرا توزیع چوله نرمال قویاً تک مدی است. با کمی محاسبات به این نتیجه می‌رسیم که میان برآورد ماکزیمم درست نمایی برای پارامترهای μ و σ رابطه زیر برقرار است:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2}{n} \qquad (۱۱.۱)$$

پس یک روش قرار دادی برای بدست آوردن برآوردهای ماکزیمم درست نمایی به این صورت است که برای یک مقدار ثابت λ ، معادلات درست نمایی را برای μ و σ حل می‌کنیم تا

به معادله (۱۱.۱) برسیم.
این مراحل را برای یک دامنه قابل قبول از مقادیر λ تکرار می‌کنیم. سپس با استفاده از تابع درست نمایی زیر، λ را برآورد می‌کنیم.

$$\ell P(\lambda) = \ell(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^{۲}(\mu), \lambda) = n \ln ۲ - n \ln \hat{\sigma}(\mu) + \sum_{i=۱}^{n} \ln \phi(\frac{X_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}(\mu)}) + \sum_{i=۱}^{n} \ln \Phi(\lambda \frac{X_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}(\mu)})$$

درایه های ماتریس اطلاع فیشر برای پارامترهای (μ, σ, λ) به صورت زیر می‌باشد.

$$I_{۱۱} = \frac{۱ + \lambda^{۲} a_{۰}}{\sigma^{۲}} \quad I_{۱۲} = \frac{E(Z)\frac{۱+۲\lambda^{۲}}{۱+\lambda^{۲}} + \lambda^{۲} a_{۱}}{\sigma^{۲}} \quad I_{۱۳} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{(۱+\lambda^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} - \lambda a_{۱}}{\sigma}$$

$$I_{۲۲} = \frac{۲ + \lambda^{۲} a_{۲}}{\sigma^{۲}} \quad I_{۲۳} = -\frac{\lambda a_{۲}}{\sigma} \quad I_{۳۳} = a_{۲}$$

که در آن $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ و $k = ۰, ۱, ۲$، $a_k = ESN\left\{ Z^k (\frac{\phi(\lambda Z)}{\Phi(\lambda Z)})^{۲} \right\}$
برای مثال $I_{۱۱}$ و $I_{۲۲}$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$I_{۱۱} = -E\left(\frac{\partial^{۲}}{\partial \mu^{۲}} \ell(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial^{۲}}{\partial \mu^{۲}} \ell(\theta) = \frac{-n}{\sigma^{۲}} - \frac{n\lambda^{۲}}{\sigma^{۲}}$$

$$I_{۱۱} = -E\left(\frac{-n(۱ + \lambda^{۲})}{\sigma^{۲}}\right) = \frac{n(۱ + \lambda^{۲})}{\sigma^{۲}} = \frac{۱ + \lambda^{۲} a_{۰}}{\sigma^{۲}}$$

همچنین $I_{۲۲}$ به صورت زیر می‌باشد.

$$I_{۲۲} = -E\left(\frac{\partial^{۲}}{\partial \sigma^{۲}} \ell(\theta)\right) = \frac{۱ + \lambda^{۲} a_{۰}}{\sigma^{۲}}$$

$$\frac{\partial^{۲}}{\partial \sigma^{۲}} \ell(\theta) = \frac{n}{\sigma^{۲}} - \frac{۳}{\sigma^{۴}} \sum_{i=۱}^{n} (x_i - \mu)^{۲} - \frac{۳\lambda^{۲}}{\sigma^{۴}} \sum_{i=۱}^{n} (x_i - \mu)^{۲}$$

$$= \frac{n\sigma^{۲} - ۳(۱ + \lambda^{۲}) \sum_{i=۱}^{n} (x_i - \mu)^{۲}}{\sigma^{۴}}$$

$$I_{۲۲} = -E\left(\frac{n\sigma^{۲} - ۳(۱ + \lambda^{۲}) \sum_{i=۱}^{n} (x_i - \mu)^{۲}}{\sigma^{۴}}\right)$$

$$= \frac{-n\sigma^{۲} + ۳(۱ + \lambda^{۲}) n\sigma^{۲}}{\sigma^{۴}} = \frac{۲ + \lambda^{۲} a_{۲}}{\sigma^{۲}}$$

و درایه‌های بعدی نیز به صورت مشابه اثبات می‌شوند.

فصل ۲

توزیع آلفاـ چوله نرمال

۱.۲ مقدمه

در این فصل یک صورت نامتقارن از توزیع نرمال را معرفی می‌کنیم که شکل چگالی آن یک و دومدی است. همچنین برآوردگرهای ماکزیمم درست نمایی و ماتریس اطلاع فیشر این توزیع را بیان می‌کنیم.

هدف این فصل معرفی یک خانواده جدید از توزیع های چوله است که یک و دو مدی است. این خانواده جدید آلفاـ چوله نرمال [۱] (ASN) نامیده می‌شود و به صورت $\{(ASN(\alpha) : \alpha \in \mathbb{R})\}$ نمایش داده می‌شود که آلفا، پارامتر چولگی است. بنابراین $ASN(0)$ همان توزیع نرمال استاندارد است. در بخش ۲.۲ این خانواده جدید را معرفی می‌کنیم و در بخش ۳.۲ نمایش تصادفی از این خانواده را معرفی می‌کنیم. بخش ۴.۲ برآورد ماکزیمم درست نمایی و ماتریس اطلاع را بررسی می‌کنیم.

۲.۲ توزیع آلفاـ چوله نرمال

در این بخش توزیع آلفاـ چوله نرمال که به صورت $\{(ASN(\alpha) : \alpha \in \mathbb{R})\}$ نمایش داده می‌شود و آلفا، پارامتر نامتقارن است را معرفی می‌کنیم. ابتدا به ذکر چند تعریف می‌پردازیم تمامی

[۱] Alpha - Skew Normal

مطالب این فصل از منبع [۱۵] و [۳] آورده شده است.

تعریف ۱.۲.۲. اگر $T=\chi^{۲}_{(۳)}$ و $P(V=\pm ۱)=\frac{۱}{۲}$ باشند و T و V مستقل باشند، آنگاه متغیر تصادفی $Y=\sqrt{T}V$ دارای توزیع نرمال دومدی متقارن است هرگاه دارای تابع چگالی زیر باشد:

$$f(y)=y^{۲}\phi(y) \quad , \quad y\in \mathbb{R}$$

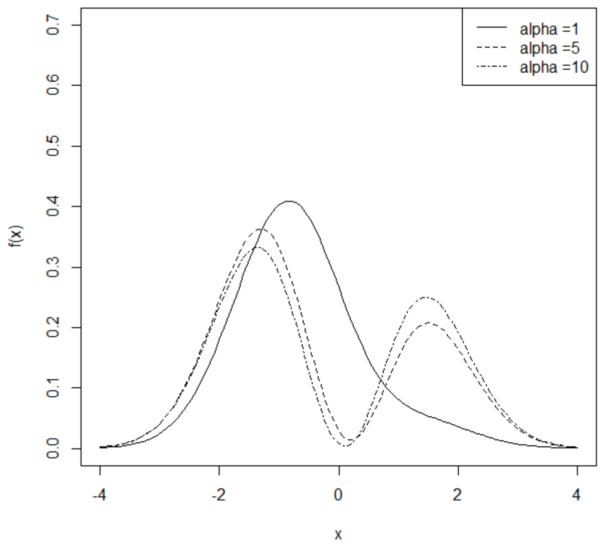
که با نماد $Y\sim BN$ نشان می‌دهیم که در آن $\phi(y)$ تابع چگالی نرمال استاندارد می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۲. متغیر تصادفی X دارای توزیع آلفا ـ چوله نرمال است هرگاه دارای تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x;\alpha)=\frac{(۱-\alpha x)^{۲}+۱}{۲+\alpha^{۲}}\phi(x) \quad , \quad x\in \mathbb{R} \quad , \quad \alpha\in \mathbb{R}$$

که به صورت $X\sim ASN(\alpha)$ نوشته می‌شود.

این توزیع به ازای مقادیر مختلف α در شکل زیر رسم شده است.



شکل ۱.۲: چگالی آلفا ـ چوله نرمال به ازای سه مقدار مختلف α

ویژگی‌های توزیع آلفا ـ چوله نرمال

قضیه ۱.۲.۲. توزیع آلفا ـ چوله نرمال دارای خواص زیر است:

۱) اگر $\alpha=۰$ باشد آنگاه $X\sim N(۰,۱)$.

۲) اگر $X \sim ASN(\alpha)$ باشد و $\alpha \to \pm\infty$ آنگاه $X \xrightarrow{d} BN$.

۳) اگر $X \sim ASN(\alpha)$ باشد، آنگاه $-X \sim ASN(-\alpha)$.

برهان. ۱) بدیهی است.

۲)

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{\alpha\to\pm\infty} \frac{۲ - ۲\alpha x + \alpha^۲ x^۲}{۲ + \alpha^۲}\phi(x) \\
&= \lim_{\alpha\to\pm\infty} \frac{\alpha^۲ x^۲}{\alpha^۲}\phi(x) \\
&= x^۲\phi(x) \sim BN
\end{aligned}$$

۳) اگر $Y = -X$ باشد آنگاه:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = p(Y \le y) &= p(-X \le y) \\
&= p(X \ge -y) \\
&= ۱ - p(X \le -y) \\
&= ۱ - F_X(-y) \\
&\Longrightarrow f_y(y) = f_x(-y) \\
&= \frac{(۱ + \alpha y)^۲ + ۱}{۲ + \alpha^۲}\phi(-y) \\
&= \frac{(۱ - (-\alpha)y)^۲ + ۱}{۲ + (-\alpha)^۲}\phi(y) \sim ASN(-\alpha)
\end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۲.۲. تابع چگالی توزیع آلفا-چوله نرمال حداکثر دو مدی است.

برهان. ابتدا از این تابع چگالی مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{[(-۲\alpha(۱ - \alpha x))\phi(x) + ((۱ - \alpha x)^۲ + ۱)(-x\phi(x))](۲ + \alpha^۲)}{(۲ + \alpha^۲)^۲} \\
&= \frac{-۲\alpha\phi(x) + ۲\alpha^۲ x\phi(x) - ۲x\phi(x) + ۲x^۲\phi(x)\alpha - \alpha^۲ x^۳\phi(x)}{۲ + \alpha^۲} \\
&= \frac{\phi(x)}{۲ + \alpha^۲}[-\alpha^۲ x^۳ + ۲\alpha x^۲ - (۲ - ۲\alpha^۲)x - ۲\alpha]
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $f'(x)$ یک معادله درجه ۳ می‌باشد، بنابراین $f(x)$ دارای حداکثر سه نقطه اکسترمم می‌باشد. یعنی یا دارای دو نقطه min و یک نقطه max و یا دو نقطه ی max و یک نقطه min می‌باشد. با توجه به اینکه سطح زیر منحنی $f(x)$ برابر با یک است، پس دارای حداکثر دو نقطه max و یک نقطه min خواهد بود.

□

ملاحظه ۱.۲.۲. به دلیل وجود چند جمله‌ای درجه سوم در عبارت $f'(x)$ برای به دست آوردن ریشه های $f'(x)$ و در نتیجه مدهای $f(x)$ نیاز به روش های عددی داریم. با استفاده از برنامه های شبیه‌سازی R در پیوست (آ.۱) نتیجه می‌گیریم که انتقال از حالت دو مدی به یک مدی حول $\alpha = \pm ۱/۳۴$ رخ می‌دهد.

قضیه ۳.۲.۲. اگر $X \sim ASN(\alpha)$ باشد در این صورت:

$$E(X^{۲k}) = \frac{۲ + \alpha^۲(۲k+۱)}{۲+\alpha^۲}\prod_{j=۱}^{k}(۲j-۱), \quad k = ۱,۲,۳,\cdots$$
$$E(X^{۲k-۱}) = \frac{-۲\alpha}{۲+\alpha^۲}\prod_{j=۱}^{k}(۲j-۱), \qquad k = ۱,۲,۳,\cdots$$

برهان. می‌دانیم که اگر $Z \sim N(۰,۱)$ باشد در این صورت

$$E(Z^{۲k}) = \prod_{j=۱}^{k}(۲j-۱), \quad E(Z^{۲k-۱}) = ۰ \quad , \quad k = ۱,۲,۳,\cdots$$

همچنین

$$\begin{aligned}
f(x) =& \frac{۲ - ۲\alpha x + \alpha^۲ x^۲}{۲+\alpha^۲}\phi(x) \\
E(X^{۲k}) =& \int_{-\infty}^{+\infty} x^{۲k} f(x)dx = \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^{۲k}(۲ - ۲\alpha x + \alpha^۲ x^۲)dx\right) \\
=& \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} ۲x^{۲k}\phi(x)dx - \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} ۲x^{۲k+۱}\phi(x)dx\right. \\
& \left. +\alpha^۲\int_{-\infty}^{+\infty} x^{۲k+۲}\phi(x)dx\right) \\
=& \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\left(۲E(Z^{۲k}) - ۲\alpha E(Z^{۲k+۱}) + \alpha^۲ E(Z^{۲k+۲})\right) \\
=& \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\left(۲\prod_{j=۱}^{k}(۲j-۱) + \alpha^۲\prod_{j=۱}^{k+۱}(۲j-۱)\right) \\
=& \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\left(۲\prod_{j=۱}^{k}(۲j-۱) + \alpha^۲(۲(k+۱)-۱)\prod_{j=۱}^{k}(۲j-۱)\right) \\
=& \frac{۲+\alpha^۲(۲k+۱)}{۲+\alpha^۲}\prod_{j=۱}^{k}(۲j-۱)
\end{aligned}$$

از طرف دیگر برای توان های فرد X به طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned}
E(X^{2k-1}) &= \frac{1}{2+\alpha^2}\Big(2E(X^{2k-1}) - 2\alpha E(X^{2k}) + \alpha^2 E(X^{2k+1})\Big)\\
&= \frac{1}{2+\alpha^2}\Big(-2\alpha E(Z^{2k})\Big)\\
&= \frac{1}{2+\alpha^2}\Big(-2\alpha \prod_{j=1}^{k}(2j-1)\Big)\\
&= \frac{-2\alpha}{2+\alpha^2}\prod_{j=1}^{k}(2j-1)
\end{aligned}$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۴.۲.۲. اگر γ_1 و γ_2 به ترتیب ضرایب چولگی و کشیدگی برای توزیع آلفا_چوله نرمال باشند، در این صورت:

$$-0/811 < \gamma_1 < 0/811 \quad \text{و} \quad -1/3 < \gamma_2 < 0/7489. \tag{1.2}$$

برهان. بنا به قضیه ۳.۲.۲ می‌دانیم که

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{-2\alpha}{2+\alpha^2} = \mu_1\\
E(X^2) &= \frac{2+\alpha^2(2+1)}{2+\alpha^2} = \frac{2+3\alpha^2}{2+\alpha^2} = \mu_2\\
E(X^3) &= \frac{-2\alpha}{2+\alpha^2}3 = \frac{-6\alpha}{2+\alpha^2} = \mu_3\\
E(X^4) &= \frac{2+\alpha^2(4+1)}{2+\alpha^2} = \frac{6+15\alpha^2}{2+\alpha^2} = \mu_4
\end{aligned}$$

در نتیجه

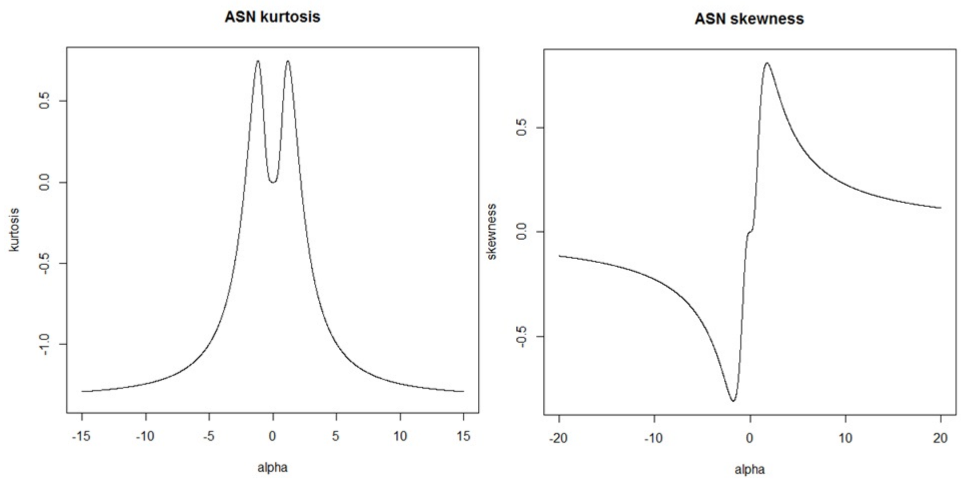
$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{E(X-\mu_x)^3}{\sigma_x^3}\\
&= \frac{E(X-\mu_1)^3}{(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{E(X^3 - 3X^2\mu_1 + 3X\mu_1^2 - \mu_1^3)}{(E(X^2)-E^2(X))^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{E(X^3) - 3\mu_1 E(X^2) + 3\mu_1^2 E(X) - \mu_1^3}{(E(X^2)-E^2(X))^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 3\mu_1^2\mu_1 - \mu_1^3}{(\mu_2 - \mu_1^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\frac{-6\alpha}{2+\alpha^2} + (\frac{3(2\alpha)}{2+\alpha^2})(\frac{2+3\alpha^2}{2+\alpha^2}) + 2(\frac{-2\alpha}{2+\alpha^2})^3}{(\frac{2+3\alpha^2}{2+\alpha^2} - (\frac{2\alpha}{2+\alpha^2})^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{12\alpha^5 + 8\alpha^3}{(4\alpha^2 + 3\alpha^4 + 4)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

همچنین γ_2 به صورت زیر می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &= \frac{E(X - \mu(x))^4}{\sigma^4 x} - 3 \\
&= \frac{E(X - \mu_1)^4}{(\sigma^2)^2} - 3 \\
&= \frac{E(X^4 - 4X^3\mu_1 + 6X^2\mu_1^2 - 4X\mu_1^3 + \mu_1^4)}{(E(X^2) - E^2(X))^2} - 3 \\
&= \frac{E(X^4) - 4\mu_1 E(X^3) + 6\mu_1 E(X^2) - 4\mu_1^3 E(X) + \mu_1^4}{(\mu_2 - \mu_1^2)^2} - 3 \\
&= \frac{\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 4\mu_1^3\mu_1 + \mu_1^4}{(\mu_2 - \mu_1^2)^2} - 3 \\
&= \frac{(\frac{6+15\alpha^2}{2+\alpha^2}) + (\frac{4(2\alpha)}{2+\alpha^2})(\frac{-6\alpha}{2+\alpha^2}) + 6(\frac{-2\alpha}{2+\alpha^2})^2(\frac{2+3\alpha^2}{2+\alpha^2}) - 3(\frac{-2\alpha}{2+\alpha^2})^4}{\frac{(4\alpha^2+3\alpha^4+4)^2}{(2+\alpha^2)^2}} - 3 \\
&= \frac{15\alpha^8 + 120\alpha^6 + 168\alpha^4 + 96\alpha^2 + 48}{(4\alpha^2 + 3\alpha^4 + 4)^2} - 3
\end{aligned}
$$

با رسم مقادیر γ_1 و γ_2 به ازای α های مختلف (شکل ۲.۲) و روش های عددی حدود γ_1 و γ_2 مقادیر (۱.۲) بدست می‌آید.



شکل ۲.۲: نمودارهای ضرایب چولگی (سمت راست) و کشیدگی (سمت چپ) توزیع آلفا_چوله نرمال براساس مقادیر مختلف پارامتر α

□

لم ۱.۲.۲. اگر $F(t)$ تابع توزیع تجمعی توزیع آلفا_چوله نرمال باشد در این صورت:

$$F(t)=\Phi(t)+\alpha(\frac{۲-\alpha t}{۲+\alpha^۲})\phi(t)$$

برهان.

$$\begin{aligned}
F(t)=p(X\leq t)&=\int_{-\infty}^{t}\frac{(۱-\alpha x)^۲+۱}{۲+\alpha^۲}\phi(x)dx\\
&=\int_{-\infty}^{t}\frac{۱+\alpha^۲x^۲-۲\alpha x+۱}{۲+\alpha^۲}\phi(x)dx\\
&=\int_{-\infty}^{t}\frac{۲\phi(x)-۲\alpha\phi(x)+\alpha^۲x^۲\phi(x)}{۲+\alpha^۲}dx\\
&=\frac{۱}{۲+\alpha^۲}\left[\int_{-\infty}^{t}۲\phi(x)dx-\int_{-\infty}^{t}۲\alpha x\phi(x)dx+\int_{-\infty}^{t}\alpha^۲x^۲\phi(x)dx\right]\\
F(t)&=\frac{۱}{۲+\alpha^۲}\left[\underbrace{۲\int_{-\infty}^{t}\phi(x)dx}_{I}\underbrace{-۲\alpha\int_{-\infty}^{t}x\phi(x)dx}_{II}+\underbrace{\alpha^۲\int_{-\infty}^{t}x^۲\phi(x)dx}_{III}\right]\\
&=\frac{۱}{۲+\alpha^۲}\left[I+II+III\right] \qquad (۲.۲)
\end{aligned}$$

$$I=۲\int_{-\infty}^{t}\phi(x)dx=۲\Phi(t)$$

همچنین

$$II=۲\alpha\int_{-\infty}^{t}x\phi(x)dx=۲\alpha\int_{-\infty}^{t}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}xe^{-\frac{x^۲}{۲}}dx=\frac{۲\alpha}{\sqrt{۲\pi}}xe^{-\frac{x^۲}{۲}}\Big|_{-\infty}^{t}=۲\alpha(-\phi(t))$$

و

$$III = \alpha^۲ \int_{-\infty}^{t} x^۲ \phi(x)dx = \alpha^۲ \int_{-\infty}^{t} x x\phi(x)dx$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = x\phi(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int x\phi(x)dx = -\phi(x) \end{cases}$$

$$III = \alpha^۲ \left(-x\phi(x) \Big|_{-\infty}^{t} + \int_{-\infty}^{t} \phi(x)dx \right) = -\alpha^۲ t\phi(t) + \alpha^۲ \Phi(t)$$

حال با جایگذاری در رابطه (۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\Big[۲\Phi(t) + ۲\alpha(-\phi(t)) + \alpha^۲(-t\phi(t) + \Phi(t)) \Big] \\ &= \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\Big[\Phi(t)(۲+\alpha^۲) + \phi(t)(۲\alpha - \alpha^۲ t) \Big] \\ &= \frac{۲+\alpha^۲}{۲+\alpha^۲}\Phi(t) + \alpha(\frac{۲-\alpha t}{۲+\alpha^۲})\phi(t) = \Phi(t) + \alpha(\frac{۲-\alpha t}{۲+\alpha^۲})\phi(t) \end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

لم ۲.۲.۲. اگر $X \sim ASN(\alpha)$ باشد، آنگاه تابع مولد گشتاور توزیع آلفا‌ـ‌چوله نرمال به صورت زیر می‌باشد:

$$M_X(t) = \left[۱ - \alpha t(\frac{۲-\alpha t}{۲+\alpha^۲}) \right] exp(\frac{t^۲}{۲})$$

برهان.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{(۱-\alpha x)^۲ + ۱}{۲+\alpha^۲}\phi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} (\frac{۲ - ۲\alpha x + \alpha^۲ x^۲}{۲+\alpha^۲})\phi(x)dx \\ &= \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}(۲ - ۲\alpha x + \alpha^۲ x^۲)\phi(x)dx \\ &= \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} ۲e^{tx}\phi(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}(۲\alpha x)\phi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\alpha^۲ x^۲\phi(x)dx \right] \\ M_X(t) &= \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\Big[\underbrace{۲\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\phi(x)dx}_{I} \underbrace{- ۲\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x\phi(x)dx}_{II} + \underbrace{\alpha^۲\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x^۲\phi(x)dx}_{III} \Big] \\ &= \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\Big[I + II + III \Big] \end{aligned} \qquad (۳.۲)$$

داریم

$$
\begin{aligned}
I &= ۲\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\phi(x)dx = ۲\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{x^۲}{۲}}dx \\
&= ۲\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(x^۲-۲tx)}dx \\
&= ۲\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(x^۲-۲tx+t^۲)}e^{\frac{t^۲}{۲}}dx \\
&= ۲\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(x-t)^۲}e^{\frac{t^۲}{۲}}dx \\
&= ۲e^{\frac{t^۲}{۲}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(x-t)^۲}dx \\
&= ۲e^{\frac{t^۲}{۲}}
\end{aligned}
$$

و همچنین

$$
\begin{aligned}
II &= -۲\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x\phi(x)dx = -۲\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{x^۲}{۲}}dx \\
&= -۲\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}xe^{-\frac{۱}{۲}(x^۲-۲tx)}dx \\
&= -۲\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}xe^{-\frac{۱}{۲}(x^۲-۲tx+t^۲)}e^{\frac{t^۲}{۲}}dx \\
&= -۲\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(x-t)^۲}xe^{\frac{t^۲}{۲}}dx \\
&= -۲\alpha e^{\frac{t^۲}{۲}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(x-t)^۲}dx
\end{aligned}
$$

چون

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(x-t)^۲}dx = EX = t
$$

در نتیجه II برابر است با $-۲\alpha te^{\frac{t^۲}{۲}}$ و

$$
III = \alpha^۲\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x^۲\phi(x)dx = \alpha^۲\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}xx\phi(x)dx
$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء داریم:

$$
\begin{cases} u = xe^{tx} \\ dv = x\phi(x)dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = (e^{tx}+te^{tx}x)dx \\ v = -\phi(x) \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha^۲\left([xe^{tx}(-\phi(x))]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)(e^{tx}+te^{tx}x)dx\right) \\
&= \alpha^۲\left([xe^{tx}(-\phi(x))]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)e^{tx}dx + t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x\phi(x)dx\right. \\
&= \alpha^۲\left(e^{\frac{t^۲}{۲}} + t^۲e^{\frac{t^۲}{۲}}\right)
\end{aligned}
$$

با جایگذاری در رابطه (۳.۲) داریم:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{۱}{۲+\alpha^۲}\left[۲e^{\frac{t^۲}{۲}} - ۲\alpha t e^{\frac{t^۲}{۲}} + \alpha^۲(e^{\frac{t^۲}{۲}} + t^۲ e^{\frac{t^۲}{۲}})\right] \\
&= \frac{(۲+\alpha^۲)e^{\frac{t^۲}{۲}}}{(۲+\alpha^۲)} - \frac{۲\alpha t - \alpha^۲ t^۲}{۲+\alpha^۲} e^{\frac{t^۲}{۲}} \\
M_X(t) &= \left[۱ - \alpha t(\frac{۲-\alpha t}{۲+\alpha^۲})\right] e^{\frac{t^۲}{۲}} = M_X(t)
\end{aligned}
$$

□

۳.۲ نمایش تصادفی

نمایش تصادفی یعنی نمایشی از رابطه بین چند توزیع که با استفاده از آن، توزیع یک متغیر تصادفی دیگر را مشخص می‌کنیم.
در این بخش قضایایی بیان می‌شود که برای نمایش تصادفی توزیع نرمال دومدی به کار می‌رود و روابط بین این توزیع و توزیع های دیگر را نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید T و V دو متغیر تصادفی مستقل باشند به طوری که $T \sim \chi^۲_{(۳)}$ باشد و $P(V = \pm ۱) = \frac{۱}{۲}$ اگر $Y = \sqrt{T}V$ باشد آنگاه متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرمال دو مدی است یعنی:

$$Y \sim BN$$

برهان. اگر $h(g)$ تابع چگالی احتمال $G = \sqrt{T}$ باشد در این صورت نشان می‌دهیم که

$$h(g) = ۲g^۲\phi(g), \quad g \geq ۰$$

می‌دانیم که $T \sim \chi^۲_{(۳)} \equiv \Gamma(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲})$ لذا $f_G(g) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} g^{\frac{۱}{۲}} e^{-\frac{g}{۲}}, \quad g \geq ۰$ در این صورت توزیع $G = \sqrt{T}$ برابر است با

$$
\begin{aligned}
F_G(g) &= p(G \leq g) = p(\sqrt{T} \leq g) \\
&= p(T \leq g^۲) = F_T(g^۲)
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
F_G(g) = \begin{cases} ۰ & g \leq ۰ \\ F_T(g^۲) & g > ۰ \end{cases}
$$

و تابع چگالی آن برابر است با

$$
\begin{aligned}
f_G(g) &= \frac{\partial}{\partial g} F_T(g^۲) \\
&= ۲g f_T(g^۲) = ۲g \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} (g^۲)^{\frac{۱}{۲}} e^{-\frac{g^۲}{۲}} \\
&= ۲g^۲ \phi(g), \qquad g \geq ۰
\end{aligned}
$$

از طرف دیگر اگر $Y = HV$ باشد به آسانی می‌توان نشان داد که تابع چگالی Y برابر با $y^۲\phi(y)$ است، زیرا

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(HV \leq y) \quad , \quad y \in \mathbb{R} \\
&= P(H \leq \frac{y}{V}) \\
&= P(H \leq \frac{y}{V} | V = -۱) \times P(V = -۱) + P(H \leq \frac{y}{V} | V = ۱) \times P(V = ۱) \\
&= P(H \leq -y | V = -۱) \times P(V = -۱) + P(H \leq y | V = ۱) \times P(V = ۱) \\
\Longrightarrow F_Y(y) &= \begin{cases} \frac{۱}{۲} F_H(-y) & y < ۰ \\ \frac{۱}{۲} F_H(y) & y > ۰ \end{cases} \Longrightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} h(-y) & y < ۰ \\ \frac{۱}{۲} h(y) & y > ۰ \end{cases} \\
\Longrightarrow f_Y(y) &= \begin{cases} y^۲ \phi(-y) & y < ۰ \\ y^۲ \phi(y) & y > ۰ \end{cases}
\end{aligned}
$$

با توجه به زوج بودن $\phi(y)$ داریم:

$$
f_Y(y) = y^۲ \phi(y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}
$$

که $y^۲\phi(y)$ تابع چگالی نرمال دومدی متقارن است. □

قضیه ۲.۳.۲. اگر Y دارای توزیع نرمال دومدی باشد، آنگاه

$$
M_Y(t) = E(e^{tY}) = (۱ + t^۲) e^{\frac{t^۲}{۲}}
$$

برهان. با توجه به اثبات III لم ۲.۲.۲ نتیجه بدست می‌آید. □

ملاحظه ۱.۳.۲. تابع چگالی $f(x) = \frac{(۱-\alpha x)^۲+۱}{۲+\alpha^۲}\phi(x)$ به صورت ترکیبی از دو چگالی $\phi(x)$ و $x\phi(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
f(x) = (\frac{۲ + \alpha^۲ x^۲}{۲ + \alpha^۲})\phi(x) + (\frac{-۲\alpha}{۲ + \alpha^۲}) x\phi(x)
$$

که در آن $\phi(x)$ تابع چگالی نرمال استاندارد است.

برهان.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(1-\alpha x)^2+1}{2+\alpha^2}\phi(x) \\
&= (\frac{2-2\alpha x+\alpha^2 x^2}{2+\alpha^2})\phi(x) \\
&= (\frac{2+\alpha^2 x^2}{2+\alpha^2}+\frac{-2\alpha x}{2+\alpha^2})\phi(x) \\
&= (\frac{2+\alpha^2 x^2}{2+\alpha^2})\phi(x)+(\frac{-2\alpha}{2+\alpha^2})x\phi(x)
\end{aligned}$$

□

تعریف ۱.۳.۲. اگر متغیر تصادفی S دارای تابع چگالی زیر باشد:

$$f_1(x)=(\frac{2+\alpha^2 x^2}{2+\alpha^2})\phi(x), \quad x\in\mathbb{R}, \quad \alpha\in\mathbb{R} \tag{۴.۲}$$

آنگاه می‌گوییم S یک متغیر تصادفی مؤلفه_متقارن [۲] از مدل آلفا_چوله نرمال است که آن را با $S\sim SCASN(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

توزیع آلفا_چوله نرمال مؤلفه_متقارن دارای خواص زیر است:

۱) اگر $\alpha=0$ باشد، آنگاه $S\sim N(0,1)$

۲) اگر $\alpha\to\pm\infty$ باشد، آنگاه $S\xrightarrow{d} BN$

برهان ۱ و ۲ بدیهی است.

ملاحظه ۲.۳.۲. تابع چگالی $f_1(x)=(\frac{2+\alpha^2x^2}{2+\alpha^2})\phi(x)$ یک ترکیب خطی از تابع چگالی نرمال استاندارد و تابع چگالی نرمال دو مدی است.

$$f_1(x)=(\frac{2+\alpha^2 x^2}{2+\alpha^2})\phi(x)=(\frac{2}{2+\alpha^2})\phi(x)+(\frac{\alpha^2}{2+\alpha^2})x^2\phi(x)$$

قضیه ۳.۳.۲. اگر $S\sim SCASN(\alpha)$ باشد در این صورت:

$$M_S(t)=(1+\frac{\alpha^2t^2}{2+\alpha^2})e^{\frac{t^2}{2}}$$

برهان. فرض کنید که $M_Z(t)$ و $M_Y(t)$ به ترتیب تابع مولد گشتاور $Z\sim N(0,1)$ و $Y\sim BN$

[۲] Symmetric-component

باشند با استفاده از ملاحظه قبل داریم:

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E(e^{tS}) = \int e^{tx} f_۱(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\left((\frac{۲}{۲+\alpha^۲})\phi(x) + (\frac{\alpha^۲}{۲+\alpha^۲})x^۲\phi(x)\right)dx \\
&= (\frac{۲}{۲+\alpha^۲})\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\phi(x)dx + (\frac{\alpha^۲}{۲+\alpha^۲})\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x^۲\phi(x)dx \\
M_S(t) &= (\frac{۲}{۲+\alpha^۲})M_Z(t) + (\frac{\alpha^۲}{۲+\alpha^۲})M_Y(t) \\
&= (\frac{۲}{۲+\alpha^۲})E(e^{tZ}) + (\frac{\alpha^۲}{۲+\alpha^۲})E(e^{tY}) \\
&= (\frac{۲}{۲+\alpha^۲})e^{\frac{t^۲}{۲}} + (\frac{\alpha^۲}{۲+\alpha^۲})(۱+t^۲)e^{\frac{t^۲}{۲}} \\
&= (\frac{۲}{۲+\alpha^۲} + \frac{\alpha^۲}{۲+\alpha^۲} + \frac{t^۲\alpha^۲}{۲+\alpha^۲}e^{\frac{t^۲}{۲}}) \\
&= (\frac{۲+\alpha^۲}{۲+\alpha^۲} + \frac{t^۲\alpha^۲}{۲+\alpha^۲}e^{\frac{t^۲}{۲}}) \\
&= (۱ + \frac{t^۲\alpha^۲}{۲+\alpha^۲}e^{\frac{t^۲}{۲}})
\end{aligned}$$

□

قضیه بعدی یک نمایش تصادفی برای مدل $SCASN(\alpha)$ را معرفی می‌کند.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید $Y \sim BN$ و $Z \sim N(۰,۱)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند اگر $S = \sqrt{\frac{\alpha^۲}{۲+\alpha^۲}}Y + \sqrt{\frac{۲}{۲+\alpha^۲}}Z$ باشد آنگاه:

$$S \sim SCASN(\alpha)$$

برهان. فرض کنید $a = \sqrt{\frac{\alpha^۲}{۲+\alpha^۲}}$ و $b = \sqrt{\frac{۲}{۲+\alpha^۲}}$ باشد آنگاه:

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E(e^{tS}) = E[e^{t(aY+bZ)}] = E[e^{atY+btZ}] = E[e^{atY}e^{btZ}] \\
&= E[e^{atz}]E[e^{btY}] = M_Y(at)M_Z(bt) = (۱+\alpha^۲t^۲)e^{\frac{a^۲t^۲}{۲}}e^{\frac{b^۲t^۲}{۲}} \\
&= (۱+\alpha^۲t^۲)e^{\frac{a^۲t^۲+b^۲t^۲}{۲}} \\
&= (۱+\alpha^۲t^۲)e^{(a^۲+b^۲)\frac{t^۲}{۲}}
\end{aligned}$$

چون $۱ = \frac{۲+\alpha^۲}{۲+\alpha^۲} = \frac{۲}{۲+\alpha^۲} + \frac{\alpha^۲}{۲+\alpha^۲} = a^۲+b^۲$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= (۱+\alpha^۲t^۲)e^{\frac{t^۲}{۲}} \\
&= (۱+\frac{\alpha^۲t^۲}{۲+\alpha^۲})e^{\frac{t^۲}{۲}}
\end{aligned}$$

که برابر با تابع مولد گشتاور توزیع آلفا_چوله نرمال مؤلفه_متقارن است. وقتی که $Y \sim BN$ و $Z \sim N(۰,۱)$ باشد و تعریف کنیم $S = aY + bZ$ آنگاه $S \sim SCASN(\alpha)$ است. □

نمایش های تصادفی از توزیع های BN و $SCASN(\alpha)$ در قضیه های ۱.۳.۲ و ۴.۳.۲ ارائه گردید که این قضایا امکان استفاده از روش رد و پذیرش برای تولید اعداد تصادفی از توزیع $ASN(\alpha)$ را فراهم می‌کند.

روش رد و پذیرش برای تولید یک نمونه تصادفی از $ASN(\alpha)$ در ادامه توضیح داده می‌شود.

لم ۱.۳.۲. فرض کنید که $f(x)$ تابع چگالی $X \sim ASN(\alpha)$ و $f_۱(x)$ تابع چگالی $S \sim SCASN(\alpha)$ باشد، دراین صورت

$$\sup_{x\in R}\frac{f(x)}{f_۱(x)} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲} \qquad (۵.۲)$$

برهان. اثبات کامل در پیوست (آ.۲)

$$\frac{f(x)}{f_۱(x)} = \frac{۲+\alpha^۲x^۲-۲\alpha x}{۲+\alpha^۲x^۲} = ۱+\frac{-۲\alpha x}{۲+\alpha^۲x^۲} \qquad (۶.۲)$$

برای به دست آوردن sup عبارت بالا کافیست کمترین مقدار عبارت $\frac{-۲\alpha x}{۲+\alpha^۲x^۲}$ را محاسبه کنیم. با مشتق گرفتن از این عبارت نسبت به x داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{-۲\alpha x}{۲+\alpha^۲x^۲}) = \frac{-۲\alpha(۲+\alpha^۲x^۲)-۲\alpha^۲x(-۲\alpha x)}{(۲+\alpha^۲x^۲)^۲} = \frac{-۴\alpha+۲\alpha^۳x^۲}{(۲+\alpha^۲x^۲)^۲}$$

که با مساوی صفر قرار دادن عبارت بالا نقاط اکسترمم تابع به صورت زیر بدست می‌آید.

$$x^۲ = \frac{۴\alpha}{۲\alpha^۳} \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{\alpha}$$

با قرار دادن مقادیر x در عبارت (۶.۲) متوجه می‌شویم که به ازای $x = -\frac{\sqrt{۲}}{\alpha}$ نتیجه مورد نظر حاصل می‌گردد. □

یک نمونه تصادفی از توزیع آلفا_چوله نرمال را می‌توان با گام‌های زیر تولید کرد:

۱) تولید Y از تابع چگالی نرمال دومدی، به صورت زیر انجام می‌گیرد.
تولید V از توزیع $P(v=\pm۱)=\frac{۱}{۲}$ و تولید T از توزیع $\chi^۲_{(۳)}$ و قرار دادن $Y=\sqrt{T}V$

۲) تولید Z از توزیع $N(۰,۱)$ ، مستقل از Y

۳) تولید S از توزیع $SCASN(\alpha)$ که با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$S = \sqrt{\frac{\alpha^۲}{۲+\alpha^۲}}Y + \sqrt{\frac{۲}{۲+\alpha^۲}}Z$$

۴) تولید U از توزیع $U(۰,۱)$

۵) با استفاده از روش رد و پذیرش برای تولید نمونه تصادفی X از توزیع $ASN(\alpha)$ به صورت زیر:

اگر $\frac{2[(1-\alpha S)^2+1]}{(2+\sqrt{2})(2+\alpha^2 S^2)} = \frac{1}{M}\frac{f(x)}{f_1(x)} > U$ ، قرار می‌دهیم $X = S$ و در غیر این صورت مراحل قبل تکرار می‌شود. که در آن

$$M = \sup_x \frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

تعریف ۲.۳.۲. حالت مکان ـ مقیاس توزیع آلفاـچوله نرمال برای $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x;\theta) = \left(\frac{1-\alpha(\frac{x-\mu}{\sigma})^2+1}{\sigma(2+\alpha^2)}\right)\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{7.2}$$

که در آن $\theta = (\mu, \sigma, \alpha)$. اگر $X \sim ASN(\alpha)$ باشد و تعریف کنیم $W \stackrel{d}{=} \mu + \sigma X$ در این صورت:

$$\begin{aligned}
F_W(w) &= p(W \le w) = p(\mu + \sigma X \le w)\\
&= p(X \le \frac{w-\mu}{\sigma}) = F_X(\frac{w-\mu}{\sigma})\\
&\Rightarrow f_W(w) = \frac{1}{\sigma} f_X(\frac{w-\mu}{\sigma})
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
f_W(x;\theta) &= \frac{1}{\sigma} f_X(\frac{w-\mu}{\sigma})\\
&= \left(\frac{1-\alpha(\frac{w-\mu}{\sigma})^2+1}{\sigma(2+\alpha^2)}\right)\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

آن را با نماد $W \sim ASN(\theta)$ نمایش می‌دهیم که در آن $\theta = (\mu, \sigma, \alpha)$.

تابع توزیع تجمعی $ASN(\theta)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_W(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) + \alpha\left(\frac{2\sigma - \alpha(x-\mu)}{\sigma(2+\alpha^2)}\right)\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

زیرا در لم (۱.۲.۲) نشان دادیم. اگر $X \sim ASN(\alpha)$ باشد،

$$F_X(t) = \Phi(t) + \alpha\left(\frac{2-\alpha t}{2+\alpha^2}\right)\phi(t)$$

بنابراین

$$F_W(t) = F_X\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

لم ۲.۳.۲. گشتاور مرتبه n ام توزیع $W \sim ASN(\theta)$ با استفاده از بسط دو جمله‌ای به صورت زیر است:

$$E(W^n) = E(\sigma X + \mu)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mu^{n-j}\sigma^j E(X^j) \tag{8.2}$$

که در آن $X \sim ASN(\alpha)$ می‌باشد.

۴.۲ برآورد ماکزیمم درست نمایی

در این بخش برآورد ماکزیمم درست نمایی (MLE) پارامترهای $\theta = (\mu, \sigma, \alpha)$ از خانواده مکان ـ مقیاسی تعریف شده در (۷.۲) را به دست می‌آوریم. همچنین ماتریس اطلاع فیشر برآوردگرهای حداکثر درست نمایی این پارامترها را نیز به دست می‌آوردیم.

فرض کنید $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $ASN(\theta)$ باشد بنابراین تابع درست نمایی به صورت زیر می‌باشد:

$$L(\theta; x) = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i; \theta) \tag{۹.۲}$$

که در آن $f(x_i; \theta)$ در رابطه (۷.۲) آورده شده است.

$$\begin{aligned}
L(\theta; x) &= \prod_{i=۱}^{n} f(x_i; \theta) \\
&= \prod_{i=۱}^{n} \left(\frac{(۱ - \alpha(\frac{x_i - \mu}{\sigma})^۲ + ۱)}{\sigma(۲ + \alpha^۲)} \right) \phi(\frac{x_i - \mu}{\sigma}) \\
&= \sigma^{-n}(۲ + \alpha^۲)^{-n}(۲\pi)^{-\frac{n}{۲}} e^{-\sum_{i=۱}^{n} \frac{(x_i - \mu)^۲}{۲\sigma^۲}} \prod_{i=۱}^{n} \left(۱ - \alpha(\frac{x_i - \mu}{\sigma})^۲ + ۱ \right) \\
\ell(\theta) &= -n \ln \sigma - n \ln(۲ + \alpha^۲) - \frac{n}{۲} \ln(۲\pi) - \sum_{i=۱}^{n} \frac{(x_i - \mu)^۲}{۲\sigma^۲} \\
&+ \sum_{i=۱}^{n} \ln \left(۱ - \alpha(\frac{x_i - \mu}{\sigma})^۲ + ۱ \right) \\
\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \mu} &= \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{\sigma - \alpha(x_i - \mu)} + \frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{i=۱}^{n} (x_i - \mu) = ۰ \\
\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{۱}{\sigma^۳} \sum_{i=۱}^{n} (x_i - \mu)^۲ + \frac{۱}{\sigma} \sum_{i=۱}^{n} \frac{۲\alpha(x_i - \mu)}{\sigma - \alpha(x_i - \mu)} = ۰ \\
\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} &= \frac{۲n\alpha}{۲ + \alpha^۲} + \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i - \mu}{\sigma - \alpha(x_i - \mu)} = ۰
\end{aligned}$$

با محاسبه دستگاه بالا به روش عددی برآوردگرهای ماکزیمم درست نمایی بدست می‌آید.

درایه‌های ماتریس اطلاع فیشر برای پارامتر های توزیع $ASN(\theta)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$I_{11} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\ln f(x;\theta)\right] = \frac{4\alpha^2 b_0 - \alpha^2 + 2}{\sigma^2(2+\alpha^2)}$$

$$I_{12} = I_{21} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma}\ln f(x;\theta)\right] = \frac{4\alpha^2 b_1 - 2\alpha}{\sigma^2(2+\alpha^2)}$$

$$I_{13} = I_{31} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \alpha}\ln f(x;\theta)\right] = \frac{2 + 4\alpha b_1}{\sigma(2+\alpha^2)}$$

$$I_{22} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}\ln f(x;\theta)\right] = \frac{4\alpha^2 b_2 + 2\alpha^2 + 4}{\sigma^2(2+\alpha^2)}$$

$$I_{23} = I_{32} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \alpha}\ln f(x;\theta)\right] = \frac{4\alpha(b_2 - 1)}{\sigma(2+\alpha^2)}$$

$$I_{33} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\ln f(x;\theta)\right] = \frac{4(\alpha^2 b_2 + 2b_2\alpha^2)}{2+\alpha^2}$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \cdots$, $b_k = b(k) = E[Z^k \frac{(1-\alpha Z)^2}{(1-\alpha Z)^2+1}]$ و $Z \sim N(0,1)$
به طور مثال I_{11} و I_{22} به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$I_{11} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\ln f(x;\theta)\right] =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\ell(\theta) = \frac{-n}{\sigma^2} + \frac{2\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\alpha}{\sigma}((1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1) - (\frac{2\alpha}{\sigma}(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma})))}{((1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1)^2}$$

$$= \frac{-n}{\sigma^2} + \frac{2\alpha^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{-(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1}{((1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1)^2}$$

$$I_{11} = \frac{n}{\sigma^2} + \frac{2\alpha^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}E\left(\frac{(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1}{(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1}\right) = \frac{4\alpha^2 b_0 - \alpha^2 + 2}{\sigma^2(2+\alpha^2)}$$

همچنین I_{22} برابر است با

$$I_{22} = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}\ln f(x;\theta)\right] =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}\ell(\theta) = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^4} + \frac{4\alpha}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))}{(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1} + \frac{2\alpha}{\sigma^2}$$

$$\times \sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\alpha}{\sigma^2}(x_i-\mu)^2((1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1) - (\frac{2\alpha}{\sigma^2}(x_i-\mu)(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}) \times (x_i-\mu)(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))}{((1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1)^2}$$

$$I_{22} = \frac{3+n}{\sigma^2} - \frac{4\alpha}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}E\left(\frac{((x_i-\mu)(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))}{(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1}\right) + \frac{2\alpha^2}{\sigma^2}$$

$$\times \sum_{i=1}^{n}E\left(\frac{((x_i-\mu)^2(1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1}{((1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1)^2}\right) = \frac{4\alpha^2 b_2 + 2\alpha^2 + 4}{\sigma^2(2+\alpha^2)}$$

دیگر درایه‌ها به صورت مشابه اثبات می‌شوند .

حال اگر $\alpha = ۰$ درنظرگرفته شود ماتریس اطلاع فیشر $N(\mu, \sigma)$ به دست می‌آید که به صورت زیر خواهد بود.

$$F = \begin{pmatrix} \frac{۱}{\sigma^۲} & ۰ & \frac{۱}{\sigma} \\ ۰ & \frac{۲}{\sigma^۲} & ۰ \\ \frac{۱}{\sigma} & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

و درایه‌های آن به صورت زیر به دست می‌آید.

$$I_{۱۱} = \frac{۲}{۲\sigma^۲} = \frac{۱}{\sigma^۲}$$
$$I_{۲۲} = \frac{۴}{۲\sigma^۲} = \frac{۲}{\sigma^۲}$$
$$I_{۳۳} = \frac{۸b_۲}{۴} = ۲b_۲ = ۲\frac{۱}{۲} = ۱$$

که در آن $\frac{۱}{۲} = \cdots = \left[Z^۲ \frac{(۱-\alpha Z)^۲}{(۱-\alpha z)^۲+۱}\right] b_۲ = E$.

با توجه به این که ستون‌های متناظر با پارامترهای μ و α (یعنی ستون اول و ستون سوم ماتریس) این ماتریس وابسته خطی هستند، بنابراین این ماتریس یک ماتریس منفرد بوده که دیگر معکوس آن وجود ندارد. این بی قاعدگی توسط آزالینی ۱۹۸۵ در مدل چوله نرمال مورد بحث قرار گرفت و توسط چیوگنا [3] [۱۲] در سال ۲۰۰۵ مورد مطالعه بیشتری قرار گرفت.

۵.۲ نتیجه گیری

همانطور که در این فصل مشاهده نمودیم توزیع آلفا_چوله نرمال حداکثر دو مدی می‌باشد، در حالیکه توزیع چوله نرمال تک مدی می‌باشد. بنابراین برای آن دسته از داده‌هایی که دارای چولگی و از طرفی دو مدی نیز می باشند توزیع چوله نرمال برازش مناسبی نمی‌تواند داشته باشد، برای این قبیل داده‌ها توزیع آلفا_چوله نرمال برازش بهتری نسبت به توزیع چوله نرمال دارد.

همانطور که می‌دانیم در توزیع چوله نرمال و آلفا_چوله نرمال ضرایب چولگی و کشیدگی در رابطه با هم و کاملاً وابسته به پارامتر چولگی می‌باشند. اما دامنه‌ی چولگی و کشیدگی در توزیع چوله نرمال به اندازه کافی وسیع نمی‌باشد و این نشان می‌دهد که خانواده‌ی توزیع‌های چوله نرمال مدل تصادفی مناسبی برای آن دسته از داده‌هایی که دارای چولگی یا کشیدگی بالا هستند، نمی‌باشند. یکی از خانواده‌های چوله‌ای که در این مواقع برای برازش مناسب‌تر می‌باشد، خانواده توزیع‌های آلفا_چوله نرمال می‌باشد؛ زیرا در یک مقدار معین از برآورد α ، بطور مثال $\alpha = ۱$ ، میزان چولگی توزیع آلفا_چوله نرمال از توزیع چوله نرمال بیشتر می‌باشد؛

[3] Chiogna

برای این مقدار مشخص از α ، ضریب چولگی توزیع چوله نرمال تقریباً ۱/۷ و ضریب چولگی توزیع آلفا_چوله نرمال تقریباً ۲/۲ می‌باشد.
بنابراین برای داده‌های که دارای چولگی بیشتری می‌باشند و یا دو مدی هستند، توزیع آلفا_چوله نرمال برازش بهتری نسبت به توزیع چوله نرمال دارد.

فصل ۳

تعمیم جدید از توزیع آلفا_ چوله نرمال

۱.۳ مقدمه

در این فصل تعمیم جدیدی از توزیع $ASN(\alpha)$ معرفی می‌کنیم که دارای حداکثر دو مد می‌باشد که به صورت $(GASN(\alpha, \lambda) : \alpha, \lambda \in \mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود که α و λ پارامترهای چولگی هستند. انگیزه معرفی تابع چگالی $GASN(\alpha, \lambda)$ عبارت است از:

۱. توزیع $GASN(\alpha, \lambda)$ شامل سه خانواده توزیع مهم از جمله نرمال، چوله نرمال و آلفا_ چوله نرمال است.

۲. مقادیر مطلق چولگی و کشیدگی این توزیع وقتی که تک مدی است و $-۱/۳۴ < \alpha < ۱/۳۴$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ است، ممکن است بیش تر از توزیع $SN(\lambda)$ و $ASN(\alpha)$ برای مقادیر $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ باشد.

۳. برای برخی از داده های واقعی، توزیع $GASN(\alpha, \lambda)$ بهتر از سایر توزیع ها است.

در بخش ۲.۳ ، این تعمیم جدید از توزیع $ASN(\alpha)$ را معرفی می‌کنیم و در بخش ۳.۳ برخی از ویژگی های آن را مورد بحث قرار می‌دهیم و به برخی از قضایای مهم مربوط به $GASN(\alpha, \lambda)$ پرداخته می‌شود در بخش ۴.۳ نمایش تصادفی از این خانواده را معرفی می‌کنیم.
بخش ۵.۳ برآورد ماکزیمم درست نمایی حالت مکان_ مقیاسی و ماتریس اطلاع فیشر را بررسی می‌کنیم.

۲.۳ توزیع $GASN(\alpha, \lambda)$

در این بخش تعمیم جدیدی از توزیع آلفا_چوله نرمال که به صورت $(GASN(\alpha, \lambda) : \alpha, \lambda \in \mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود را معرفی می‌کنیم. تمامی مطالب این فصل از منبع [۲۷] آورده شده است.

تعریف ۱.۲.۳. متغیر تصادفی X دارای توزیع $GASN(\alpha, \lambda)$ است هرگاه دارای تابع چگالی زیر باشد:

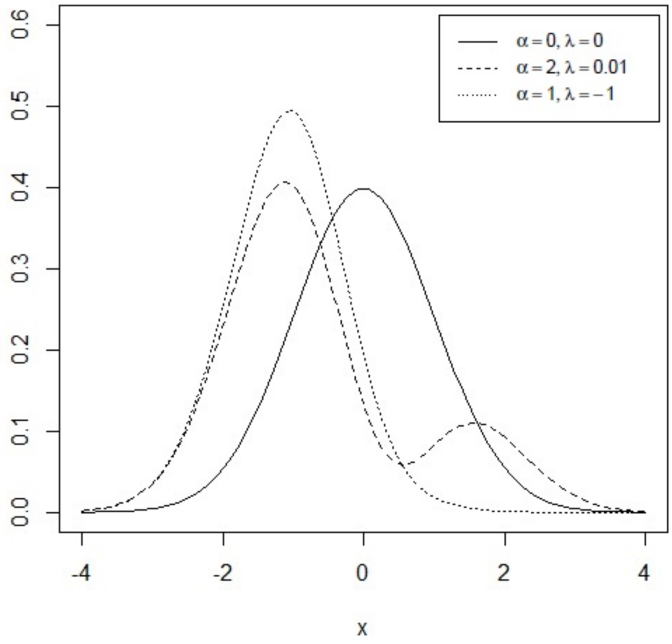
$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{(1 - \alpha x)^2 + 1}{C(\alpha, \lambda)} \phi(x)\Phi(\lambda x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \tag{۱.۳}$$

که به صورت $X \sim GASN(\alpha, \lambda)$ نوشته می‌شود.
که در آن اعداد حقیقی α و λ پارامترهای چولگی می‌باشند.
ضریب $C(\alpha, \lambda)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} C(\alpha, \lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ((1 - \alpha x)^2 + 1)\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (2 - 2\alpha x + \alpha^2 x^2)\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\phi(x)\Phi(\lambda x)dx - \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x2\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\ &+ \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, \lambda)dx - \alpha E(Z_\lambda) + \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 2\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\ &= 1 - \alpha E(Z_\lambda) + \frac{\alpha^2}{2} E(Z_\lambda^2) \\ &= 1 - \alpha b\delta + \frac{\alpha^2}{2} \end{aligned}$$

که در آن $b = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ و $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ و $\phi(x; \lambda)$ تابع چگالی $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ است. گشتاورهای $SN(\lambda)$ در فصل یک محاسبه شده است.

شکل ۱.۳ نشان می‌دهد که چگالی $GASN(\alpha, \lambda)$ ممکن است دو مد برای برخی مقادیر α و λ داشته باشند. با استفاده از روش های عددی نتیجه می‌گیریم که برای $\alpha > 1/34$ و $\lambda > 0$ یا $\alpha < -1/34$ و $\lambda < 0$ توزیع دو مدی و در غیر این صورت تک مدی است.



شکل ۱.۳: چگالی $GASN(\alpha,\lambda)$ به ازای مقادیر مختلف α و λ

۳.۳ ویژگی های توزیع $GASN(\alpha,\lambda)$

قضیه ۱.۳.۳. توزیع $GASN(\alpha,\lambda)$، دارای خواص زیر می‌باشد:

۱. اگر $\alpha = 0$ باشد، آنگاه $X \sim SN(\lambda)$

۲. اگر $\lambda = 0$ باشد، آنگاه $X \sim ASN(\alpha)$

۳. اگر $\alpha = 0$ و $\lambda = 0$ باشد، آنگاه $X \sim N(0,1)$

۴. اگر $X \sim GASN(\alpha,\lambda)$ باشد، آنگاه $-X \sim GASN(-\alpha,-\lambda)$

۵. هنگامی که $\alpha \to \pm\infty$ ، آنگاه

$$f(x;\alpha,\lambda) = 2x^2\phi(x)\Phi(\lambda x) \quad , \quad \lambda > 0$$

۶. برای $\alpha > 0$ مشخص، هنگامی که $\lambda \to +\infty$ ، آنگاه

$$f(x;\alpha,\lambda) = \frac{(1-\alpha x)^2 + 1}{1 - b\alpha + \frac{\alpha^2}{2}}\phi(x)I(X > 0)$$

و هنگامی که $\lambda \to -\infty$ ، آنگاه

$$f(x;\alpha,\lambda) \to \frac{(1-\alpha x)^2+1}{1+b\alpha+\frac{\alpha^2}{2}}\phi(x)I(X<0) \quad , \quad b=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

برهان. ۱. با استفاده از تعریف تابع چگالی $GASN(\alpha,\lambda)$

$$\frac{2-2\alpha x+\alpha^2x^2}{1-\alpha b\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}+\frac{\alpha^2}{2}}\phi(x)\Phi(\lambda x) \overset{\alpha=0}{\longrightarrow} 2\phi(x)\Phi(\lambda x) \sim SN(\lambda)$$

۲. با استفاده از تعریف تابع چگالی اگر $\lambda=0$ باشد، داریم

$$\frac{(1-\alpha x)^2+1}{1+\frac{\alpha^2}{2}}\phi(x)\Phi(0) \overset{\Phi(0)=\frac{1}{2}}{\longrightarrow} X \sim ASN(\alpha)$$

۳. اگر $\lambda=0$ و $\alpha=0$ باشد، در نتیجه داریم:

$$2\phi(x)\Phi(0)=2\phi(x)\times\frac{1}{2}=\phi(x)\sim N(0,1)$$

۴.

$$\begin{aligned}
&Y=-X \to F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-X\le y)=P(X\ge -y)\\
&=1-P(X\le -y)=1-F_X(-y) \Rightarrow f_Y(y)=f_X(-y)\\
&=\frac{(1+\alpha y)^2+1}{1-\alpha b\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}+\frac{\alpha^2}{2}}\phi(-y)\Phi(\lambda(-y))=\frac{(1-(-\alpha)y)^2+1}{1-(-\alpha)b\frac{(-\lambda)}{\sqrt{1-(-\lambda)^2}}+\frac{(-\alpha)^2}{2}}\phi(y)\Phi(-\lambda y)\\
&\Rightarrow -X\sim GASN(-\alpha,-\lambda)
\end{aligned}$$

۵.

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to\pm\infty} f(x;\alpha,\lambda) &= \lim_{\alpha\to\pm\infty}\frac{2-2\alpha x+\alpha^2x^2}{1-\alpha b\sigma+\frac{\alpha^2}{2}}\phi(x)\Phi(\lambda x)\\
&\approx \lim_{\alpha\to\pm\infty}\frac{\alpha^2x^2}{\frac{\alpha^2}{2}}\phi(x)\Phi(\lambda x)=2x^2\phi(x)\Phi(\lambda x) \quad , \quad \lambda>0
\end{aligned}$$

۶. با توجه به اینکه $\lim_{\lambda\to+\infty}\Phi(\lambda x)=1$ باشد، آنگاه داریم

$$f(x;\alpha,\lambda)=\frac{(1-\alpha x)^2+1}{1-b\delta+\frac{\alpha^2}{2}}\phi(x)I(x>0)$$

و برای $\lambda\to-\infty$ به‌طور مشابه اثبات می‌شود.

□

گزاره ۱.۳.۳. تابع توزیع $X \sim GASN(\alpha,\lambda)$ به صورت

$$F_X(t)=\frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\Big\{(1+\frac{\alpha^2}{2})\Phi(x;\lambda)+(\alpha+\frac{\alpha^2}{2}x)\phi(x;\lambda)$$
$$-\alpha b\delta\Phi(x\sqrt{1+\lambda^2})(1+\frac{\alpha}{2\sqrt{1+\lambda^2}}W(x\sqrt{1+\lambda^2}))\Big\}$$

که در آن $\phi(x;\lambda)$ و $\Phi(x;\lambda)$ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ می‌باشند و $\Phi(x)$ توزیع نرمال استاندارد است و $W(\cdot)=\frac{\phi(\cdot)}{\Phi(\cdot)}$ ، $\delta=\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ و $b=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ است.

برهان.

$$\begin{aligned}F_X(t)&=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{(1-\alpha t)^2+1}{C(\alpha,\lambda)}\phi(t)\Phi(\lambda t)dt\\&=\frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\int_{-\infty}^{x}(2-2\alpha t+\alpha^2t^2)\phi(t)\Phi(\lambda t)dt\\&=\frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{x}2\phi(t)\Phi(\lambda t)dt}_{I}-\underbrace{2\alpha\int_{-\infty}^{x}t\phi(t)\Phi(\lambda t)dt}_{II}\\&+\underbrace{\alpha^2\int_{-\infty}^{x}t^2\phi(t)\Phi(\lambda t)dt}_{III}\Bigg]=\frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\Big[I-II+III\Big]\end{aligned} \tag{۲.۳}$$

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\infty}^{x}2\phi(t)\Phi(\lambda t)dt=\Phi(x;\lambda)\\II&=-2\alpha\int_{-\infty}^{x}t\phi(t)\Phi(\lambda t)dt\end{aligned}$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء داریم:

$$=\begin{cases}u=\Phi(\lambda t)\\dv=t\phi(t)dt\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}du=\lambda\phi(t)dt\\v=-\phi(t)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}V&=\int_R t\phi(t)dt=\int_R\frac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{\frac{-t^2}{2}}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}=-\phi(t)\\II&=-2\alpha\Big[-\phi(t)\Phi(\lambda t)\Big|_{-\infty}^{x}+\int_{-\infty}^{x}\lambda\phi(t)\phi(\lambda t)dt\Big]\\&=-2\alpha\Big[-\phi(x)\Phi(\lambda x)+\int_{-\infty}^{x}\lambda\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{(\lambda t)^2}{2}}dt\Big]\\&=-2\alpha\Big[-\phi(x)\Phi(\lambda x)+\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\Phi(x\sqrt{1+\lambda^2})\Big]\\III&=\alpha^2\int_{-\infty}^{x}t^2\phi(t)\Phi(\lambda t)dt=\alpha^2\int_{-\infty}^{x}tt\phi(t)\Phi(\lambda t)dt\end{aligned}$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = t\Phi(\lambda t) \\ dv = t\phi(t)dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = \Phi(\lambda t) + \lambda t\phi(\lambda t)dt \\ v = -\phi(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
III &= \alpha^{۲}\Big[- t\phi(t)\Phi(\lambda t)\Big|_{-\infty}^{x} + \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{x} ۲\phi(t)\Phi(\lambda t)dt \\
&+ \int_{-\infty}^{x} \lambda t\phi(t)\Phi(\lambda t)dt\Big] \\
&= \alpha^{۲}\Big[- x\phi(x)\Phi(\lambda x) + \frac{۱}{۲}\Phi(x;\lambda) + \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{x} \lambda t e^{\frac{-t^{۲}}{۲}} \cdot e^{\frac{-\lambda^{۲}t^{۲}}{۲}} dt\Big] \\
&= \alpha^{۲}\Big[- x\phi(x)\Phi(\lambda x) + \frac{۱}{۲}\Phi(x;\lambda) + \frac{\lambda}{۲\pi}\int_{-\infty}^{x} t e^{\frac{-(۱+\lambda^{۲})t^{۲}}{۲}} dt\Big] \\
&= \alpha^{۲}\Big[- x\phi(x)\Phi(\lambda x) + \frac{۱}{۲}\Phi(x;\lambda) + \frac{\lambda}{۲\pi(۱+\lambda^{۲})}\int_{-\infty}^{x} (۱+\lambda^{۲}) t e^{\frac{-(۱+\lambda^{۲})t^{۲}}{۲}} dt\Big] \\
&= \alpha^{۲}\Big[- x\phi(x)\Phi(\lambda x) + \frac{۱}{۲}\Phi(x;\lambda) - \frac{\lambda}{۲\pi(۱+\lambda^{۲})} e^{\frac{-(۱+\lambda^{۲})t^{۲}}{۲}}\Big|_{-\infty}^{x}\Big] \\
&= \alpha^{۲}\Big[- x\phi(x)\Phi(\lambda x) + \frac{۱}{۲}\Phi(x;\lambda) - \frac{\lambda}{\sqrt{۲\pi}(۱+\lambda^{۲})}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{\frac{-(۱+\lambda^{۲})x^{۲}}{۲}}\Big] \\
III &= \alpha^{۲}\Big[- x\phi(x)\Phi(\lambda x) + \frac{\Phi(x;\lambda)}{۲} - \frac{b\delta}{۲(\sqrt{۱+\lambda^{۲}})}\phi(x\sqrt{۱+\lambda^{۲}})\Big]
\end{aligned}$$

با جایگذاری در رابطه (۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
F_X(t) &= \frac{۱}{C(\alpha,\lambda)}\Big[\Phi(x;\lambda) - ۲\alpha(-\phi(x)\Phi(\lambda x) + \frac{b\delta}{۲\sqrt{۱+\lambda^{۲}}}\phi(x\sqrt{۱+\lambda^{۲}}) \\
&+ \alpha^{۲}(-x\phi(x)\Phi(\lambda x) + \frac{۱}{۲}\Phi(x;\lambda) - \frac{b\delta}{۲\sqrt{۱+\lambda^{۲}}}\phi(x\sqrt{۱+\lambda^{۲}}))\Big] \\
&= \frac{۱}{C(\alpha,\lambda)}\Big\{(۱+\frac{\alpha^{۲}}{۲})\Phi(x;\lambda) + (\alpha - \frac{\alpha^{۲}}{۲}x)\phi(x;\lambda) \\
&- \alpha b\delta\Phi(x\sqrt{۱+\lambda^{۲}})(۱+\frac{\alpha}{۲\sqrt{۱+\lambda^{۲}}}W(x\sqrt{۱+\lambda^{۲}}))\Big\}
\end{aligned}$$

□

گزاره ۲.۳.۳. اگر $X \sim GASN(\alpha,\lambda)$ باشد، گشتاور k ام X به صورت

$$E(X^k) = \frac{۱}{C(\alpha,\lambda)}[E(Z_\lambda^k) - \alpha E(Z_\lambda^{k+۱}) + \frac{\alpha^{۲}}{۲}E(Z_\lambda^{k+۲})] \qquad (۳.۳)$$

می‌باشد که در آن $E(Z_\lambda^k)$ ، گشتاور k ام $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ است.

برهان.

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \frac{(1-\alpha x)^2+1}{C(\alpha,\lambda)}\Phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\
&= \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k(2-2\alpha x+\alpha^2x^2)\Phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\
&= \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\Bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} 2x^k\phi(x)\Phi(\lambda x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} 2\alpha x x^k\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty}\alpha^2x^2x^k\phi(x)\Phi(\lambda x)dx\Bigg) \\
&= \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\Bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} 2x^k\phi(x)\Phi(\lambda x)dx - \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} 2x^{k+1}\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\
&+ \frac{1}{2}\alpha^2\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+2}\phi(x)\Phi(\lambda x)dx\Bigg) \\
&= \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\left(E(Z_\lambda^k)-\alpha E(Z_\lambda^{k+1})+\frac{\alpha^2}{2}E(Z_\lambda^{k+2})\right)
\end{aligned}$$

با استفاده از گشتاورهای $SN(\lambda)$ ، گشتاورهای $GASN(\alpha,\lambda)$ قابل محاسبه می‌باشد. برای مثال معادله های زیر برای $k=1,2,3,4$ به صورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}[\frac{b\delta-\alpha+b\delta(3+2\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}\alpha^2] \\
E(X^2) &= \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}[\frac{1-b\delta(3+2\lambda^2)}{(1+\lambda^2)}\alpha+\frac{3}{2}\alpha^2] \\
E(X^3) &= \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}[\frac{b\delta(3+2\lambda^2)}{(1+\lambda^2)}-3\alpha+b\delta\frac{(15+20\lambda^2+8\lambda^4)}{2(1+\lambda^2)^2}\alpha^2] \\
E(X^4) &= \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}[3-\frac{b\delta(15+20\lambda^2+8\lambda^4)}{(1+\lambda^2)^2}\alpha+\frac{15}{2}\alpha^2]
\end{aligned}$$

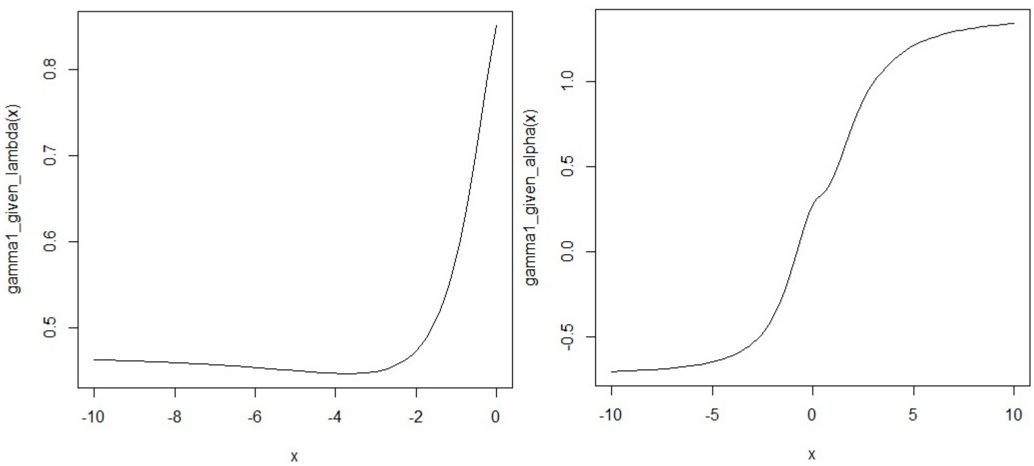
همچنین با استفاده از رابطه‌های بالا، ضرایب چولگی (γ_1) و کشیدگی (γ_2) از توزیع $GASN(\alpha,\lambda)$ ، وقتی تک مدی است، برای $-1/34 < \alpha < 1/34$ و $\lambda \in R$ محاسبه می‌شود.
چون ساختار γ_1 و γ_2 پیچیده هستند، پس γ_1 و γ_2 را برای برخی مقادیر $-1 < \alpha < 1$ و λ در جدول های ۱.۳ و ۲.۳ با استفاده از نرم افزار R محاسبه می‌کنیم. همچنین در شکل ۲.۳ و ۳.۳ ، γ_1 و γ_2 به ترتیب به عنوان تابعی از α برای $(\lambda=5)$ و تابعی از λ برای $(\alpha=0/7)$ رسم شده‌اند.

جدول ۱.۳: مقادیر γ_1 برای مقادیر مختلف α و λ

	α	-۱	$-۰/۵$	$-۰/۳$	$۰/۰$	$۰/۷$	۱
λ							
-۲	$-۰/۷۰۹$	$-۰/۵۹۹$	$-۰/۴۸۱$	$-۰/۴۵۳$	$-۰/۴۲۸$	$-۰/۳۹۰$	$-۰/۳۵۹$
-۱	$-۰/۵۱۹$	$-۰/۲۶۵$	$-۰/۱۵۷$	$-۰/۱۳۶$	$-۰/۱۲۶$	$-۰/۰۸۵$	۰/۰۲۶
-۱	$-۰/۵۴۸$	$-۰/۱۱۶$	$-۰/۰۲۷$	۰/۰۰۰	۰/۰۶۲	۰/۲۷۵	۰/۵۴۸
۱	۰/۰۲۶	۰/۱۱۵	۰/۱۳۴	۰/۱۳۶	۰/۱۹۹	۰/۴۲۶	۰/۵۱۹
۲	۰/۳۵۹	۰/۴۱۶	۰/۴۳۹	۰/۴۵۳	۰/۵۲۸	۰/۷۴۵	۰/۷۰۹
۵	۰/۵۸۱	۰/۷۰۷	۰/۷۶۸	۰/۸۵۰	۱/۰۱۰*	۱/۲۰۹*	۱/۰۲۵*
۱۰	۰/۶۲۶	۰/۷۷۳	۰/۸۴۸	۰/۹۵۵	۱/۱۵۰*	۱/۳۴۰*	۱/۱۱۰*

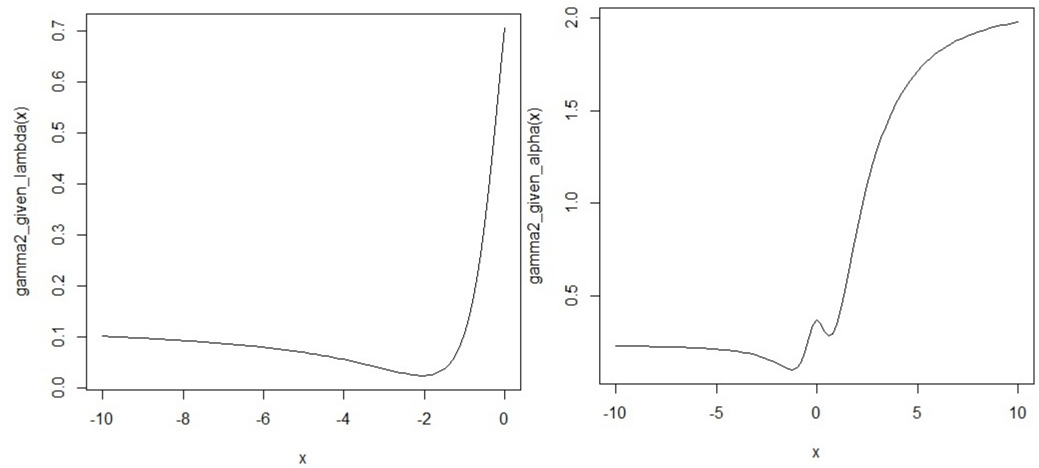
جدول ۲.۳: مقادیر γ_2 برای مقادیر مختلف α و λ

	α	-۱	$-۰/۵$	$-۰/۳$	$۰/۰$	$۰/۷$	۱
λ							
-۲	۰/۲۳۶	۰/۷۰۸	۰/۴۲۷	۰/۳۰۵	۰/۱۹۹	۰/۱۳۴	۰/۱۱۰
-۱	۰/۰۱۱	۰/۲۴۲	۰/۱۰۱	۰/۰۶۱	۰/۰۵۸	۰/۱۰۹	۰/۲۴۱
-۱	۰/۶۹۴	۰/۱۳۸	۰/۰۲۲	۰/۰۰۰	۰/۰۶۴	۰/۳۶۹	۰/۶۹۴
۱	۰/۲۴۱	۰/۰۶۶	۰/۰۵۵	۰/۰۶۱	۰/۱۵۹	۰/۳۴۷	۰/۰۱۱
۲	۰/۱۱۰	۰/۱۷۳	۰/۲۲۷	۰/۳۰۵	۰/۵۵۰	۰/۸۵۲	۰/۲۳۶
۵	۰/۱۰۷	۰/۳۲۱	۰/۴۶۵	۰/۷۰۵	۱/۲۷۹*	۱/۷۱۶*	۰/۶۵۶
۱۰	۰/۱۰۶	۰/۳۵۷	۰/۵۲۸	۰/۸۲۳	۱/۵۱۶*	۱/۹۷۹*	۰/۷۷۴



شکل ۲.۳: نمودار γ_1 به عنوان تابعی از α برای $\lambda = ۵$ و تابعی از λ برای $\alpha = ۰/۷$.

□



شکل ۳.۳: نمودار γ_2 به عنوان تابعی از α برای $\lambda = 5$ و تابعی از λ برای $\alpha = 0/7$.

گزاره ۳.۳.۳. تابع مولد گشتاور $X \sim GASN(\alpha,\lambda)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$M_X(t) = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}\Phi(\delta t)}{C(\alpha,\lambda)}\left\{(1-\alpha t)^2) - \alpha\delta W(\delta t)(2-\alpha t-\frac{\alpha t}{1+\lambda^2})+1+\alpha^2\right\} \qquad (4.3)$$

که در آن $W(\cdot) = \frac{\phi(\cdot)}{\Phi(\cdot)}$ و $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

برهان.

$$\begin{aligned}
M_X(t) = E(e^{tx}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\frac{(1-\alpha x)^2+1}{C(\alpha,\lambda)}\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\
&= \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}(2-2\alpha x+\alpha^2x^2)\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\
&= \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\Bigg\{\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}2\phi(x)\Phi(\lambda x)dx}_{I}\underbrace{-2\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x\phi(x)\Phi(\lambda x)dx}_{II} \\
&+\underbrace{\alpha^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x^2\phi(x)\Phi(\lambda x)dx}_{III}\Bigg\} = \frac{1}{C(\alpha,\lambda)}\Big\{I+II+III\Big\}
\end{aligned} \qquad (5.3)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}2\phi(x)\Phi(\lambda x)dx = M_{Z_\lambda}(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}}\Phi(\delta t)$$

که در قضیه ۵.۵.۱ محاسبه گردید.

$$II = -2\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x\phi(x)\Phi(\lambda x)dx$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = e^{tx}\Phi(\lambda x) \\ dv = x\phi(x)dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = te^{tx}\Phi(\lambda x) + \lambda e^{tx}\phi(\lambda x) \\ v = -\phi(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} II &= -۲\alpha\left[-e^{tx}\phi(x)\Phi(\lambda x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\phi(x)\Phi(\lambda x)dx + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\phi(x)\Phi(\lambda x)dx\right] \\ &= -۲\alpha\left[\circ + \frac{t}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{\lambda}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{۱}{۲}[x^۲+\lambda^۲x^۲-۲tx]}dx\right] \\ &= -۲\alpha\left[\frac{t}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{\lambda}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{۱}{۲}[((\sqrt{۱+\lambda^۲})x-\frac{t}{\sqrt{۱+\lambda^۲}})^۲-\frac{t^۲}{۱+\lambda^۲}]}dx\right] \\ &= -۲\alpha\left[\frac{t}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{\lambda}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{t^۲}{۲(۱+\lambda^۲)}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-(۱+\lambda^۲)}{۲}(x-\frac{t}{۱+\lambda^۲})^۲}}_{=۱ \qquad N(\frac{t}{۱+\lambda^۲},\frac{۱}{۱+\lambda^۲})}dx\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow II = \frac{t}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{\lambda}{\sqrt{۲\pi}\sqrt{۱+\lambda^۲}}e^{\frac{t^۲}{۲(۱+\lambda^۲)}}$$

همچنین III به صورت زیر به دست می‌آید.

$$III = \alpha^۲\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}x^۲\phi(x)\Phi(\lambda x)dx = \alpha^۲\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}xx\phi(x)\Phi(\lambda x)dx$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = xe^{tx}\Phi(\lambda x) \\ dv = x\phi(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = e^{tx}\Phi(\lambda x) + txe^{tx}\Phi(\lambda t) + \lambda xe^{tx}\phi(\lambda x) \\ v = -\phi(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} III &= \alpha^۲\left[-xe^{tx}\phi(x)\Phi(\lambda x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} txe^{tx}\phi(x)\Phi(\lambda x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\lambda xe^{tx}\phi(x)\phi(\lambda x)dx\right] \\ &= \alpha^۲\left[\circ + M_{Z_\lambda}(t) + t\left(\frac{t}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{\lambda}{\sqrt{۲\pi}\sqrt{۱+\lambda^۲}}e^{\frac{t^۲}{۲(۱+\lambda^۲)}}\right)\right. \\ &\left. + \frac{\lambda}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{۱}{۲}[x^۲+\lambda^۲x^۲-۲tx]}dx\right] \end{aligned}$$

$$= \alpha^{۲}\left[\frac{۱}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{t^{۲}}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{\lambda t}{\sqrt{۲\pi(۱+\lambda^{۲})}}e^{\frac{t^{۲}}{۲(۱+\lambda^{۲})}}\right.$$
$$\left. + \frac{\lambda}{۲\pi}e^{\frac{t^{۲}}{۲(۱+\lambda^{۲})}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{-(۱+\lambda^{۲})}{۲}(x-\frac{t}{۱+\lambda^{۲}})^{۲}}dx\right]$$
$$\Rightarrow III = \alpha^{۲}\left[\frac{۱}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{t^{۲}}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{\lambda t}{\sqrt{۲\pi(۱+\lambda^{۲})}}e^{\frac{t^{۲}}{۲(۱+\lambda^{۲})}}\right.$$
$$\left. + \frac{t}{\sqrt{۱+\lambda^{۲}}}\frac{\lambda}{\sqrt{۲\pi(۱+\lambda^{۲})}}e^{\frac{t^{۲}}{۲(۱+\lambda^{۲})}}\right]$$

با جایگذاری در رابطه (۵.۳) داریم

$$\Rightarrow M_X(t) = \frac{۱}{C(\alpha,\lambda)}\left\{M_{Z_\lambda}(t) - ۲\alpha\left(\frac{t^{۲}}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{\lambda}{\sqrt{۲\pi(۱+\lambda^{۲})}}e^{\frac{t^{۲}}{۲(۱+\lambda^{۲})}}\right)\right.$$
$$\left. + \alpha^{۲}\left(\frac{۱}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + \frac{t^{۲}}{۲}M_{Z_\lambda}(t) + (۱ + \frac{۱}{۱+\lambda^{۲}}\frac{\lambda t}{\sqrt{۲\pi(۱+\lambda^{۲})}}e^{\frac{t^{۲}}{۲(۱+\lambda^{۲})}}\right)\right\}$$
$$= \frac{e^{\frac{t^{۲}}{۲}}\Phi(\delta t)}{C(\alpha,\lambda)}\left\{(۱-\alpha t)^{۲} - \alpha\delta W(\delta t)(۲ - \alpha t - \frac{\alpha t}{۱+\lambda^{۲}}) + ۱ + \alpha^{۲}\right\}$$

□

۴.۳ نمایش تصادفی

قضیه ۱.۴.۳. اگر $W \sim ASN(\alpha)$ و $Z_\lambda \sim N(۰,۱)$ مستقل از هم باشند، آنگاه داریم:

$$W|\{\lambda W > Z_\lambda\} \sim GASN(\alpha,\lambda)$$

برهان. اگر $X = W|\{\lambda W > Z_\lambda\}$ باشد، در این صورت:

$$P(X \le x) = P(W \le x|\lambda W > Z_\lambda) = \frac{P(W \le x, \lambda W > Z_\lambda)}{P(\lambda W > Z_\lambda)}$$

بنابراین با استفاده از تابع چگالی آلفا–چوله نرمال داریم:

$$P(W \le x, Z_\lambda < \lambda W) = \int_{-\infty}^{x}\frac{(۱-\alpha u)^{۲}+۱}{۲+\alpha^{۲}}\phi(u)\Phi(\lambda u)du$$
$$P(Z_\lambda < \lambda W) = P(W \le \infty, Z_\lambda < \lambda W) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(۱-\alpha u)^{۲}+۱}{۲+\alpha^{۲}}\phi(u)\Phi(\lambda u)du$$

با توجه به تعریف (۱.۲.۳)

$$= \frac{۱}{۲+\alpha^{۲}}C(\alpha,\lambda)$$

بنابراین

$$P(X \le x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} \frac{(۱-\alpha u)^۲+۱}{۲+\alpha^۲}\phi(u)\Phi(\lambda u)du}{\frac{۱}{۲+\alpha^۲}C(\alpha,\lambda)}$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{(۱-\alpha u)^۲+۱}{C(\alpha,\lambda)}\phi(u)\Phi(\lambda u)du$$

و چگالی آن برابر است با

$$f_X(x) = \frac{(۱-\alpha x)^۲+۱}{C(\alpha,\lambda)}\phi(x)\Phi(\lambda x)$$

در نتیجه $W|\{\lambda W > Z_\lambda\} \sim GASN(\alpha,\lambda)$ □

نکته ۱.۴.۳. با استفاده از نمایش تصادفی بالا، برای توزیع $GASN(\alpha,\lambda)$ می‌توان با استفاده از روش رد و پذیرش، با مراحل زیر داده تولید کرد:

۱. تولید نمونه از $Z_\lambda \sim N(۰,۱)$ و $W \sim ASN(\alpha)$ به صورت مستقل. (تولید داده از $ASN(\alpha)$ در فصل قبل گفته شده است)

۲. اگر $\lambda W > Z_\lambda$ باشد، قرار می‌دهیم $X = W$ ، در غیر این صورت به مرحله قبل برمی‌گردیم.

تعریف ۱.۴.۳. حالت مکان_مقیاسی توزیع تعمیم آلفا_چوله نرمال به صورت توزیعی از $Y = \sigma X + \mu$ تعریف می‌شود که در آن $X \sim GASN(\alpha,\lambda)$ و چگالی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$f(y;\theta) = \frac{(۱-\alpha(\frac{y-\mu}{\sigma}))^۲+۱}{\sigma C(\alpha,\lambda)}\phi(\frac{y-\mu}{\sigma})\Phi(\lambda\frac{y-\mu}{\sigma}), \mu \in \mathbb{R}\sigma > 0 \qquad (۶.۳)$$

که در آن $\theta = (\mu,\sigma,\alpha,\lambda)$ و به صورت $Y \sim GASN(\mu,\sigma,\alpha,\lambda)$ نمایش داده می‌شود.
همچنین تابع توزیع $Y \sim GASN(\theta)$ با توجه به گزاره (۱.۳.۳) به صورت زیر می‌باشد.

$$F_Y(y;\theta) = \frac{۱}{C(\alpha,\lambda)}\Big\{(۱+\frac{\alpha^۲}{۲})\Phi(\frac{y-\mu}{\sigma};\lambda) + (\alpha - \frac{\alpha^۲}{۲}(\frac{y-\mu}{\sigma}))$$
$$\times \phi(\frac{y-\mu}{\sigma};\lambda) - \alpha b\delta\Phi(\frac{y-\mu}{\sigma}\sqrt{۱+\lambda^۲})(۱+\frac{\alpha}{۲\sqrt{۱+\lambda^۲}}W(\frac{y-\mu}{\sigma}\sqrt{۱+\lambda^۲}))\Big\} \qquad (۷.۳)$$

لم ۱.۴.۳. گشتاور مرتبه k ام از توزیع $X \sim GASN(\alpha,\lambda)$ با استفاده از بسط دو جمله‌ای به صورت زیر می‌باشد.

$$E(Y^k) = E(\sigma X + \mu)^n = \sum_{i=۰}^{k} \binom{n}{i} \mu^{k-i}\sigma^i E(X^i) \qquad (۸.۳)$$

در قضایای زیر رابطه بین توزیع‌های $GASN(\alpha,\lambda)$ و نیم نرمال و توزیع کای دو نشان داده شده است.

قضیه ۲.۴.۳. اگر $X \sim GASN(\alpha,\lambda)$ باشد، آنگاه

۱) متغیر تصادفی $U = |X|$ دارای تابع چگالی زیر است.

$$f_U(u;\alpha,\lambda) = f_{HN}(u)\cdot\frac{1+(1+\alpha u)^2-4\alpha u\Phi(\lambda u)}{2C(\alpha,\lambda)} \quad , \quad u>0 \tag{۹.۳}$$

که $f_{HN}(\cdot)$ تابع چگالی توزیع نیم نرمال استاندارد می‌باشد.

۲) تابع چگالی $T = X^2$ به صورت زیر است.

$$f_T(t;\alpha,\lambda) = f_{\chi^2_{(1)}}(t)\cdot\frac{1+(1+\alpha\sqrt{t})^2-4\alpha\sqrt{t}\Phi(\lambda\sqrt{t})}{2C(\alpha,\lambda)} \quad , \quad t>0 \tag{۱۰.۳}$$

که $f_{\chi^2_{(1)}}(\cdot)$ تابع چگالی توزیع کای دو با درجه آزادی یک می‌باشد.

برهان. ۱) اگر $u>0$ باشد، با توجه به اینکه می‌دانیم در توزیع نرمال استاندارد $\phi(u)=\phi(-u)$ و $\Phi(-\lambda u) = 1-\Phi(\lambda u)$ داریم

$$\begin{aligned}
f_U(u) = f_X(u)+f_X(-u) &= \phi(u)\left(\frac{[1+(1-\alpha u)^2]\Phi(\lambda u)+1+(1+\alpha u)^2\Phi(-\lambda u)}{C(\alpha,\lambda)}\right)\\
&= \phi(u)\left(\frac{2-2\alpha u\Phi(\lambda u)+\alpha^2u^2\Phi(\lambda u)+2+2\alpha u+\alpha^2u^2-2-2\alpha u\Phi(\lambda u)-\alpha^2u^2\Phi(\lambda u)}{C(\alpha,\lambda)}\right)\\
&= \phi(u)\cdot\frac{2+2\alpha u+\alpha^2u^2-4\alpha u\Phi(\lambda u)}{C(\alpha,\lambda)} = \underbrace{2\phi(u)}_{f_{HN}(u)}\cdot\frac{1+(1+\alpha u)^2-4\alpha u\Phi(\lambda u)}{2C(\alpha,\lambda)}
\end{aligned}$$

۲) تابع چگالی $T = X^2$ برای $t>0$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}}\left[f_X(\sqrt{t})+f_X(-\sqrt{t})\right]\\
&= \frac{1}{2\sqrt{t}}\phi(\sqrt{t})\cdot\frac{1+(1+\alpha\sqrt{t})^2-4\alpha\sqrt{t}\Phi(\lambda\sqrt{t})}{C(\alpha,\lambda)}\\
&= f_{\chi^2_{(1)}}(t)\cdot\frac{1+(1+\alpha\sqrt{t})^2-4\alpha\sqrt{t}\Phi(\lambda\sqrt{t})}{2C(\alpha,\lambda)}
\end{aligned}$$

توابع چگالی رابطه های (۹.۳) و (۱۰.۳) را نیم نرمال تعمیم یافته و کای دو تعمیم یافته با درجه آزادی یک می‌نامند و آن ها را به ترتیب با نماد $GHN(\alpha,\lambda)$ و $GCH(\alpha,\lambda)$ مشخص می کنند.

□

قضیه ۳.۴.۳. اگر $X \sim GASN(\alpha,\lambda)$ و $H \sim HN(0,1)$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه $V = \frac{X}{H}$ ، دارای تابع چگالی زیر است:

$$f_V(v) = f_{cauchy}(v)\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{C(\alpha,\lambda)}A(\alpha',\lambda') \tag{۱۱.۳}$$

که $f_{cauchy}(\cdot)$ تابع چگالی توزیع کوشی استاندارد است.

$$A(\alpha',\lambda')=\frac{b}{۲}(۱+\alpha'^{۲}+\alpha'^{۲}\sigma')-\alpha'(\frac{۱}{۲}+\frac{\tan^{-۱}(\lambda')}{\pi}) + \frac{b\sigma'(۲+\alpha^{\star ۲})}{۴}-\frac{b^{۲}\alpha^{\star}\sigma'}{۲} \quad (۱۲.۳)$$

که در آن

$$\lambda'=\frac{\lambda v}{\sqrt{۱+v^{۲}}} \quad , \quad \sigma'=\frac{\lambda'}{\sqrt{۱+\lambda'^{۲}}} \quad , \quad \alpha'=\frac{\alpha v}{\sqrt{۱+v^{۲}}} \quad , \quad \alpha^{\star}=\frac{\alpha'}{\sqrt{۱+\lambda'^{۲}}}$$

برهان. با استفاده از روش تبدیل، تابع چگالی v به صورت زیر بدست می‌آید.

$$f_{X,H}(x,h)=\frac{۱+(۱-\alpha x)^{۲}}{C(\alpha,\lambda)}\phi(x)\Phi(\lambda x)\cdot ۲\phi(h)$$

$$\begin{cases} v=\frac{X}{H} \\ w=H \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X=vw \\ H=w \end{cases}, |J|=\begin{vmatrix} w & v \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=w$$

$$f(v,w)=\frac{۱+(۱-\alpha vw)^{۲}}{C(\alpha,\lambda)}۲w\phi(w)\phi(vw)\Phi(\lambda vw)$$

$$\begin{aligned}
f_V(v)&=\int_{۰}^{\infty}f(v,w)dw=\int_{۰}^{\infty}۲w\frac{۱+(۱-\alpha vw)^{۲}}{C(\alpha,\lambda)}\phi(w)\phi(vw)\Phi(\lambda vw)dw\\
&=\frac{۲}{C(\alpha,\lambda)}\int_{۰}^{\infty}w(۱+(۱-\alpha vw)^{۲})\cdot\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-w^{۲}}{۲}}\cdot e^{\frac{-(vw)^{۲}}{۲}}\Phi(\lambda vw)dw\\
&=\frac{۲}{C(\alpha,\lambda)}\int_{۰}^{\infty}w(۱+(۱-\alpha vw)^{۲})\cdot\frac{۱}{۲\pi}e^{\frac{-۱}{۲}(w^{۲}+(vw)^{۲}}\Phi(\lambda vw)dw\\
&=\frac{۲}{C(\alpha,\lambda)}\int_{۰}^{\infty}w(۱+(۱-\alpha vw)^{۲})\cdot\frac{۱}{۲\pi}e^{\frac{-۱}{۲}(۱+v^{۲})w^{۲}}\Phi(\lambda vw)dw\\
&=\frac{۱}{\pi(۱+v^{۲})}\frac{\sqrt{۲\pi}}{C(\alpha,\lambda)}\int_{۰}^{\infty}t[۱+(۱-\frac{\alpha v}{\sqrt{۱+v^{۲}}}t)^{۲}]\phi(t)\Phi(\frac{\alpha v}{\sqrt{۱+v^{۲}}}t)dt\\
&=f_{cauchy}(u)\cdot\frac{\sqrt{۲\pi}}{C(\alpha,\lambda)}\int_{۰}^{\infty}t[۱+(۱-\alpha't)^{۲}]\phi(t)\Phi(\lambda't)dt
\end{aligned}$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء می‌توان نشان داد که انتگرال قبل در معادله بالا برابر است با $A(\alpha',\lambda')$.

$$\begin{aligned}
I&=\int_{۰}^{\infty}t[۱+(۱-\alpha't)^{۲}]\phi(t)\Phi(\lambda't)dt\\
&=\int_{۰}^{\infty}t[۲-۲\alpha't+\alpha'^{۲}t^{۲}]\phi(t)\Phi(\lambda't)dt\\
&=۲\underbrace{\int_{۰}^{\infty}t\phi(t)\Phi(\lambda't)dt}_{I_۱}-۲\alpha'\underbrace{\int_{۰}^{\infty}t^{۲}\phi(t)\Phi(\lambda't)dt}_{I_۲}\\
&+\alpha'^{۲}\underbrace{\int_{۰}^{\infty}t^{۳}\phi(t)\Phi(\lambda't)dt}_{I_۳}=[۲I_۱-۲\alpha'I_۲+\alpha'^{۲}I_۳] \quad (۱۳.۳)
\end{aligned}$$

$$I_{۱}=\int_{۰}^{\infty} t\phi(t)\Phi(\lambda' t)dt$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء داریم:

$$\begin{cases} u=\Phi(\lambda' t) \\ dv=t\phi(t)dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=\lambda'\phi(t)dt \\ v=-\phi(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_{۱}&=-\phi(t)\Phi(\lambda' t)\Big|_{۰}^{\infty}+\lambda'\int_{۰}^{\infty}\phi(t)\Phi(\lambda' t)dt \\ &=-\frac{۱}{۲\pi}+\frac{\lambda'}{۲\pi}\left[\int_{۰}^{\infty}e^{-\frac{۱}{۲}(t^{۲}+\lambda'^{۲}t^{۲})}dt\right] \\ &=-\frac{۱}{۲\pi}+\frac{\lambda'}{۲\pi}\left[\int_{۰}^{\infty}e^{-\frac{۱}{۲}(۱+\lambda'^{۲})t^{۲}}dt\right] \\ &=-\frac{۱}{۲\pi}+\frac{\lambda'}{۲\pi}\frac{\sqrt{۲\pi}}{\sqrt{۱+\lambda'^{۲}}}\times\frac{۱}{۲}\times\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{۱+\lambda'^{۲}}}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-۱+\lambda'^{۲}}{۲}t^{۲}}dt}_{=۱} \end{aligned}$$

$$I_{۱}=-\frac{۱}{۲\pi}+\frac{\lambda'}{\sqrt{۲\pi}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+\lambda'^{۲}}}\times\frac{۱}{۲}$$

همچنین $I_{۲}$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$I_{۲}=\int_{۰}^{\infty} t^{۲}\phi(t)\Phi(\lambda' t)dt$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء داریم:

$$\begin{cases} u=t\Phi(\lambda' t) \\ dv=t\phi(t)dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du=\Phi(\lambda' t)+\lambda' t\phi(\lambda' t) \\ v=-\phi(t) \end{cases}$$

$$I_{۲}=-t\phi(t)\Phi(\lambda' t)\Big|_{۰}^{\infty}+\underbrace{\int_{۰}^{\infty}\phi(t)\Phi(\lambda' t)dt}_{I_{۲۱}}+\lambda'\underbrace{\int_{۰}^{\infty}t\phi(t)\Phi(\lambda' t)dt}_{I_{۲۲}}$$

$$I_{۲۱}=\int_{۰}^{\infty}\phi(t)\Phi(\lambda' t)dt=\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{۲\pi}e^{-\frac{۱}{۲}t^{۲}}e^{-\frac{\lambda'^{۲}}{۲}t^{۲}}dt$$

$$I_{۲}=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\infty}e^{-\frac{۱}{۲}t^{۲}(۱+\lambda'^{۲})}dt=\frac{۱}{۲\pi}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+\lambda'^{۲}}}\times\frac{\sqrt{۲\pi}}{۲}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}}{\sqrt{۱+\lambda'^{۲}}}e^{\frac{-۱+\lambda'}{۲}dt}}_{=۱}$$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+\lambda'^{۲}}}$$

$$I_{۲}=۰+\frac{۱}{۲\sqrt{۲\pi}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+\lambda'^{۲}}}+\lambda'(-\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\frac{\lambda'}{\sqrt{۲\pi}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+\lambda'^{۲}}}\cdot\frac{۱}{۲})$$

و داریم

$$I_3 = \int_0^\infty t^3 \phi(t)\Phi(\lambda' t)dt$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جز به جزء داریم:

$$\begin{cases} u = t^2\Phi(\lambda' x) \\ dv = t\phi(t)dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = 2t\Phi(\lambda' t) + t^2\Phi(\lambda' t) \\ v = -\phi(t) \end{cases}$$

$$I_3 = -t^2\phi(t)\Phi(\lambda' t)\Big|_0^\infty + 2\underbrace{\int_0^\infty t\phi(t)\Phi(\lambda' t)dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\infty t^2\phi(t)\Phi(\lambda' t)dt}_{I_2}$$

$$I_3 = 0 - \frac{1}{\pi} + \frac{\lambda'}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+\lambda'^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+\lambda'^2}} + \lambda'(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\lambda'}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1+\lambda'^2}})$$

با جایگذاری در رابطه (۱۳.۳) داریم

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= -\frac{1}{\pi} + \frac{\lambda'}{\sqrt{2\pi(1+\lambda'^2)}} - \frac{\alpha'}{\sqrt{2\pi(1+\lambda'^2)}} + \frac{\lambda'\alpha'}{\pi} - \frac{\lambda'^2\alpha'}{\sqrt{2\pi(1+\lambda'^2)}} - \frac{\alpha'^2}{\pi} \\ &+ \frac{\lambda'\alpha'^2}{\sqrt{2\pi(1+\lambda'^2)}} + \frac{\alpha'^2}{2\sqrt{2\pi(1+\lambda'^2)}} - \frac{\alpha'^2\lambda'}{2\pi} + \frac{\lambda'^2\alpha'^2}{2\sqrt{2\pi(1+\lambda'^2)}} \\ &= \frac{b}{2}(1+\alpha'^2+\alpha'^2\delta') - \alpha'(\frac{1}{2} + \frac{\tan^{-1}(\lambda')}{\pi} + \frac{b\delta'(2+\alpha^{*^2})}{4} - \frac{b^2\alpha^*\delta'}{2} \\ &\Rightarrow f_v(v) = f_{couchy}(v)\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{C(\alpha,\lambda)}A(\alpha',\lambda') \end{aligned}$$

□

۵.۳ برآورد ماکزیمم درست نمایی

در این بخش ابتدا برآورد ماکزیمم درست نمایی (MLE) پارامترهای $\theta = (\mu,\sigma,\alpha,\lambda)^T$ از خانواده مکان ـ مقیاسی تعریف شده در رابطه (۶.۳) را به دست می‌آوریم.

همچنین ماتریس اطلاع فیشر برآوردگرهای حداکثر درست نمایی این پارامترها را به دست می‌آوریم.

فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونه تصادفی از $GASN(\theta)$ باشد بنابراین تابع درست نمایی

به صورت زیر می‌باشد:

$$L(\theta;y)=\prod_{i=1}^{n}f(y_i;\theta)$$

$$L(\theta;y)=\sigma^{-n}(C(\alpha,\lambda))^{-n}\prod_{i=1}^{n}(1+(1-\alpha\frac{y_i-\mu}{\sigma})^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2)$$
$$\times\sum_{i=1}^{n}\Phi(\lambda\frac{y_i-\mu}{\sigma})$$

$$\ell(\theta)=-n\ln\sigma-n\ln C(\alpha,\lambda)+\sum_{i=1}^{n}\ln(1+(1-\alpha\frac{y_i-\mu}{\sigma})^2)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i-\mu}{\sigma})^2)+\sum_{i=1}^{n}\ln\Phi(\lambda(\frac{y_i-\mu}{\sigma})) \qquad (۱۴.۳)$$

مشتقات جزئی از رابطه ی بالا با پارامترهای نسبت از معادله های نرمال به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\mu}=\frac{2\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\alpha\frac{y_i-\mu}{\sigma}}{1+(1-\alpha\frac{y_i-\mu}{\sigma})^2}+\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i-\mu}{\sigma})+\frac{\lambda^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)=0$$

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\sigma}=\frac{-n}{\sigma}+\frac{2\alpha}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)(1-\alpha\frac{y_i-\mu}{\sigma})}{1+(1-\alpha\frac{y_i-\mu}{\sigma})^2+1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{\lambda^2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2=0$$

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\alpha}=\frac{n\sigma(\alpha-b\sigma)}{C(\alpha,\lambda)}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)(1-\alpha\frac{y_i-\mu}{\sigma})}{1+(1-\alpha\frac{y_i-\mu}{\sigma})^2}=0$$

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\lambda}=\frac{n\alpha b\sigma}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}C(\alpha,\lambda)}+\frac{\lambda}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2=0$$

حل معادلات بالا، برآوردهای ماکزیمم درست نمایی را به ما می‌دهد که می‌توان با استفاده از روش عددی آن ها را محاسبه کرد. درایه های ماتریس اطلاع فیشر، برای پارامتر $\theta=$

$(\mu, \sigma, \alpha, \lambda)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{n}{\sigma^2 C(\alpha,\lambda)}\left[C(\alpha,\lambda) - \alpha^2 + 2\alpha^2 a_0(\alpha,\lambda) - b\alpha\sigma^3 + \frac{b^2\sigma^2}{4\sqrt{1-\sigma^4}} d_0(\alpha,\lambda)\right] \\
I_{12} &= \frac{n}{\sigma^2 C(\alpha,\lambda)}[b\sigma + \frac{3}{2}\alpha^2 b\sigma - \alpha - \frac{3}{2}\alpha^2 b\sigma^3 + 2\alpha^2 a_1(\alpha,\lambda) - \alpha b\sigma\sqrt{1-\sigma^2} \\
&\quad + \alpha b\sigma^3\sqrt{1-\sigma^2} + \frac{b^2(1-\sigma^2)}{4(1+\sigma^2)} d_1(\alpha,\lambda)] \\
I_{13} &= \frac{n}{\sigma C(\alpha,\lambda)}[2b\alpha\sigma - 2\alpha^2 a_1(\alpha,\lambda) - 1] \\
I_{14} &= \frac{nb\sqrt{1-\sigma^2}}{2\sigma C(\alpha,\lambda)}[(1-\sigma^2)(2+\alpha^2-3\alpha^2\sigma^2) - \frac{b\sigma}{2(1+\sigma^2)} d_1(\alpha,\lambda)] \\
I_{22} &= \frac{n}{\sigma^2 C(\alpha,\lambda)}\left[3 + \frac{3}{2}\alpha^2 - 5b\alpha\sigma + 2\alpha^2 a_2(\alpha,\lambda) - C(\alpha,\lambda) - 2\alpha b\sigma^3\right. \\
&\quad \left. + 3\alpha b\sigma^5 + \frac{b^2\sigma^2\sqrt{1-\sigma^2}}{4(1-\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} d_2(\alpha,\lambda)\right] \\
I_{23} &= \frac{n}{\sigma C(\alpha,\lambda)}[2\alpha - b\sigma - \alpha - 2\alpha a_2(\alpha,\lambda)] \\
I_{24} &= \frac{nb(1-\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sigma C(\alpha,\lambda)}[6\alpha\sigma^2 - 2\alpha - \frac{b\sigma}{2\sqrt{1-\sigma^2}(1-\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} d_2(\alpha,\lambda)] \\
I_{33} &= \frac{n}{C(\alpha,\lambda)}[2a_2(\alpha,\lambda) - \frac{(\alpha-b\sigma)^2}{C(\alpha,\lambda)}] \\
I_{34} &= \frac{nb(1-\sigma^2)^{\frac{3}{4}}}{2C^2(\alpha,\lambda)}[\alpha^2 - 2] \\
I_{44} &= \frac{nb^2(1-\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{C(\alpha,\lambda)}[\frac{1}{4(1+\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} d_2(\alpha,\lambda) - \frac{\alpha^2(1-\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{C(\alpha,\lambda)}]
\end{aligned}
$$

که در آن $k = 0, 1, 2$ و $a_k(\alpha,\lambda) = E(Z_\lambda^k \frac{(1-\alpha Z_\lambda^2}{1+(1-\alpha Z_\lambda^2}), k = 0, 1, 2$ و $d_k(\alpha,\lambda) = E\left(Z^k \frac{1+(1-\alpha\sqrt{\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}}Z^2}{\Phi(\frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}Z)}\right)$ و $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ و $Z \sim N(0,1)$ می‌باشد. به طور مثال I_{11} و I_{22} به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ell(\theta)\right] = \\
\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ell(\theta) &= \frac{2\alpha^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{-(1-\alpha(\frac{y_i-\mu}{\sigma}))^2+1}{((1-\alpha(\frac{y_i-\mu}{\sigma}))^2+1)^2} - \frac{n}{\sigma^2} - \frac{n\lambda^2}{\sigma^2} \\
I_{11} &= \frac{2\alpha^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{(1-\alpha(\frac{y_i-\mu}{\sigma}))^2-1}{((1-\alpha(\frac{y_i-\mu}{\sigma}))^2+1)^2}\right) + \frac{n}{\sigma^2} + \frac{n\lambda^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{n}{\sigma^2 C(\alpha,\lambda)}\left[C(\alpha,\lambda) - \alpha^2 + 2\alpha^2 a_0(\alpha,\lambda) - b\alpha\sigma^3 + \frac{b^2\sigma^2}{4\sqrt{1-\sigma^4}} d_0(\alpha,\lambda)\right]
\end{aligned}
$$

و همچنین

$$
\begin{aligned}
I_{22} &= -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\ell(\theta)\right] = \\
\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\ell(\theta) &= \frac{n}{\sigma^2} + \frac{4\alpha}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)(1-\alpha(\frac{y_i-\mu}{\sigma}))}{(1-\alpha(\frac{y_i-\mu}{\sigma}))^2+1} \\
&+ \frac{2\alpha^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-(y_i-\mu)^2(1-\alpha(\frac{y_i-\mu}{\sigma}))^2+1)}{((1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1)^2} - \frac{3\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}{\sigma^4} - \frac{3\lambda^2}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2 \\
I_{22} &= -\frac{n}{\sigma^2} - \frac{4\alpha}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}E\left(\frac{(y_i-\mu)(1-\alpha(\frac{y_i-\mu}{\sigma}))}{(1-\alpha(\frac{y_i-\mu}{\sigma}))^2+1}\right) \\
&+ \frac{2\alpha^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}E\left(\frac{(y_i-\mu)^2(1-\alpha(\frac{y_i-\mu}{\sigma}))^2+1)}{((1-\alpha(\frac{x_i-\mu}{\sigma}))^2+1)^2}\right) + \frac{3n}{\sigma^2} + \frac{3n\lambda^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{n}{\sigma^2 C(\alpha,\lambda)}\Bigg[3 + \frac{3}{2}\alpha^2 - 5b\alpha\sigma + 2\alpha^2 a_2(\alpha,\lambda) - C(\alpha,\lambda) - 2\alpha b\sigma^3 \\
&+ 3\alpha b\sigma^5 + \frac{b^2\sigma^2\sqrt{1-\sigma^2}}{4(1-\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}d_2(\alpha,\lambda)\Bigg]
\end{aligned}
$$

و دیگر درایه ها به صورت مشابه به دست می‌آیند.

فصل ۴
مثال‌های عددی

در این فصل قصد داریم، مثال‌های عددی مختلف از توزیع‌های تعریف شده فصول قبل را ارایه داده و در مثال واقعی این مدل‌ها را با هم مقایسه کنیم.

۱.۴ مثال عددی اول

متغیر مورد بررسی میانگین طول عمر بیمارانی است که در بیمارستان به دلیل مشکلات کبدی و لوزوالمعده تحت مراقبت هستند و به خاطر همین بیماری فوت می‌کنند. نمونه‌ی تحت مطالعه از ۱۰۸۲ بیمارستان از ۱۰ استان ایالت متحده جمع‌آوری شده است. برای اطلاعات بیشتر می‌توانید ستون چهارم در وب سایت زیر را مشاهده کنید:

$$http://lip.state.cmu.edu/data-expo/۱۹۹۷/ascii/p۰۷.data$$

جدول زیر آماره‌های توصیفی را برای این مجموعه از داده‌ها بیان می‌کند.

جدول ۱.۴: آماره‌های توصیفی، ضریب چولگی و کشیدگی $(\gamma_۱, \gamma_۲)$

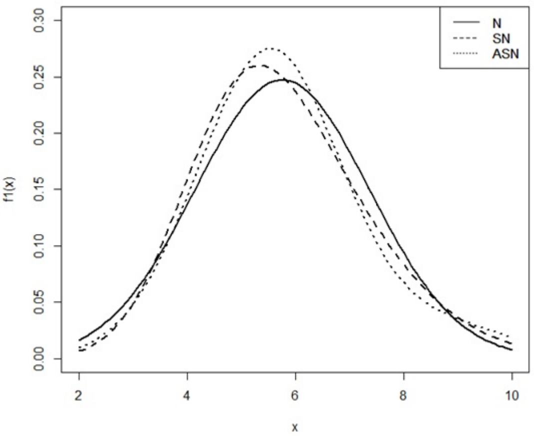
n	$\bar{x}$	s	$\gamma_۱$	$\gamma_۲$
۱۰۸۲	۵/۷۵۹۳	۱/۶۱۴	۰/۶۷۲۳	۱/۴۲۰۵

توزیع‌های N، SN و ASN و $GASN$ بر روی این داده‌ها با استفاده از روش ماکزیمم درست نمایی برازش داده شده است.
در جدول ۲.۴ برآوردگرها ارائه شده است. شکل ۱.۴ مقایسه سه منحنی نرمال، چوله

جدول ۲.۴: پارامترهای برآورد شده و تابع لگاریتم درست نمایی و ماکزیمم شده برای توزیع‌های N ، SN ، ASN و $GASN$.

$Distribution$	N	SN	ASN	SBN	$GASN$
$\hat{\mu}$	۶/۷۵۹۳	۴/۱۱۹۲	۶/۷۵۷۸	۴/۱۱۹۲	۷/۳۰۰۸
$\hat{\sigma}$	۲/۶۰۲۸	۲/۳۰۰۶	۱/۴۸۷۳	۲/۳۰۰۵	۱/۵۷۴
$\hat{\alpha}$	...	...	۰/۹۵۵۹	۶/۴۲۶۸	۱/۲۲۲
$\hat{\lambda}$	...	۲/۰۶۰۸	...	۲/۶۰۸	−۰/۳۲۴
$log - likelihood$	−۲۰۵۲/۸۲۴	−۲۰۲۳/۶۵۳	−۲۰۱۸/۴۱	−۲۰۲۳/۶۵۳	−۲۰۱۶/۰۱۷
AIC	۴۱۰۹/۶۴۸	۴۰۵۳/۳۰۶	۴۰۴۲/۸۲	۴۰۵۵/۳۰۶	۴۰۴۰/۰۲۳
BIC	۴۰۹۱/۶۷۵	۴۰۲۶/۳۴۶	۴۰۱۵/۸۶۱	۴۰۱۹/۳۶	۴۰۰۴/۰۸۷

نرمال و آلفا–چوله نرمال را با پارامترهای برآورد شده نشان می‌دهد.



شکل ۱.۴: تابع چگالی توزیع آلفا_چوله نرمال، چوله نرمال و نرمال

همچنین آزمون نیکویی برازش کولموگروف اسمیرنف و نتایج آن ها در جدول زیر آمده است.

جدول ۳.۴: آزمون نیکویی برازش کولموگروف

$Distribution$	SN	ASN	SBN	$GASN$
$Statistics$	۰/۱۳۸۵	۰/۱۳۸۵۶	۰/۱۳۸۵	۰/۰۲۹۸
$P-value$	۰/۷۵۳۵	۰/۸۲۸۴	۰/۷۵۳۸	۰/۹۳۰۰

با توجه به مقدار شاخص (AIC) و (BIC) و $P-value$ برای توزیع های $GASN$ و ASN و SN و N، مشاهده می‌کنیم توزیع $GASN$ دارای کمترین مقدار (AIC) و (BIC) و بیشترین مقدار $P-value$ می‌باشد و نسبت به سه توزیع قبل روی این داده‌ها بهتر برازش می‌شود.

۲.۴ مثال عددی دوم

داده‌های جدول ۱.۴ مربوط به تعداد گلبول‌های سفید (WCC) ، ۲۰۲ ورزشکار استرالیایی می‌باشد، که توسط کوک و ویزبرگ ۱۹۹۴ ارائه شده است.

جدول ۴.۴: داده‌های مربوط به گلبول‌های سفید ورزشکاران استرالیایی

۷/۳۰	۵/۳۰	۴/۴۰	۸/۹۰	۵/۷۰	۵/۳۰	۴/۴۰	۶/۸۰	۵/۳۰	۵/۰۰	۸/۳۰	۷/۵۰
۶/۴۰	۹/۵۰	۳/۳۰	۵/۷۰	۶/۹۰	۸/۱۰	۸/۳۰	۷/۳۰	۵/۸۰	۶/۰۰	۶/۲۰	۷/۸۰
۱۳/۳۰	۷/۳۰	۵/۹۰	۶/۶۰	۱۰/۱۰	۶/۴۰	۶/۶۰	۷/۵۰	۷/۶۰	۵/۸۰	۵/۶۰	۵/۸۰
۹/۱۰	۶/۳۰	۱۰/۶۰	۹/۷۰	۵/۵۰	۶/۶۰	۵/۰۰	۶/۱۰	۵/۸۰	۶/۴۰	۷/۶۰	۶/۰۰
۵/۹۰	۵/۵۰	۸/۵۰	۶/۶۰	۸/۴۰	۶/۹۰	۸/۴۰	۹/۳۰	۱۰/۹۰	۱۰/۷۰	۵/۱۰	۹/۶۰
۹/۰۰	۶/۸۰	۵/۸۰	۹/۵۰	۹/۵۰	۷/۰۰	۵/۱۰	۵/۳۰	۵/۸۰	۸/۳۰	۸/۱۰	۴/۹۰
۶/۰۰	۶/۶۰	۶/۴۰	۶/۹۰	۶/۵۰	۶/۱۰	۶/۹۰	۷/۶۰	۷/۳۰	۷/۵۰	۹/۳۰	۷/۱۰
۶/۴۰	۷/۲۰	۶/۴۰	۶/۶۰	۷/۹۰	۴/۰۰	۴/۲۰	۷/۸۰	۸/۲۰	۷/۲۰	۶/۸۰	۷/۶۰
۸/۶۰	۶/۰۰	۷/۱۰	۶/۷۰	۴/۱۰	۴/۷۰	۷/۶۰	۷/۱۰	۶/۴۰	۴/۹۰	۵/۰۰	۹/۰۰
۸/۴۰	۶/۸۰	۹/۳۰	۵/۹۰	۵/۳۰	۷/۱۰	۸/۲۰	۴/۳۰	۶/۲۰	۵/۲۰	۴/۸۰	۶/۶۰
۶/۷۰	۵/۸۰	۵/۹۰	۷/۲۰	۸/۰۰	۶/۰۰	۵/۰۰	۱۰/۱۰	۷/۵۰	۵/۴۰	۶/۸۰	۶/۵۰
۷/۵۰	۷/۳۰	۷/۲۰	۵/۵۵	۶/۷	۶/۴۰	۷/۴۰	۸/۹۰	۸/۳۰	۹/۲۰	۷/۵۰	۸/۰۰
۵/۸۰	۶/۱۰	۶/۱۰	۴/۵۰	۷/۳۰	۹/۰۰	۳/۹۰	۴/۵۰	۶/۳۰	۶/۳۰	۹/۶۰	۸/۹۰
۷/۶۰	۶/۶۰	۷/۱۰	۹/۰۰	۸/۴۰	۶/۲۰	۸/۹۰	۶/۴۰	۴/۶۰	۸/۲۰	۴/۳۰	۴/۰۰
۸/۷۰	۸/۹۰	۸/۳۰	۹/۳۰	۶/۴۰	۶/۶۰	۷/۹۰	۵/۹۰	۷/۲۰	۵/۲۰	۴/۸۰	۴/۶۰
۸/۵۰	۷/۴۰	۷/۵۰	۹/۸۰	۶/۱۰	۱۲/۷۰	۱۲/۹۰	۱۰/۰۰	۷/۵۰	۱۰/۲۰	۹/۱۰	۱۰/۸۰
۶/۳۰	۸/۸۰	۶/۴۰	۸/۳۰	۷/۶۰	۸/۹۰	۶/۲۰	۷/۰۰	۱۴/۳۰	۶/۰۰		

جدول زیر آماره‌های توصیفی را برای این مجموعه از داده‌ها (WCC) بیان می‌کند.

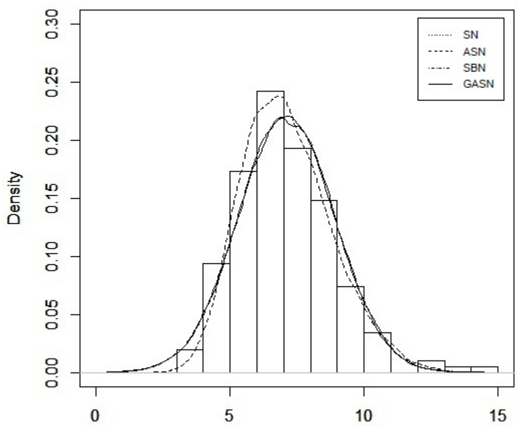
جدول ۵.۴: آماره‌های توصیفی داده‌های WCC

n	$\bar{x}$	s	$\gamma_۱$	$\gamma_۲$
۲۰۲	۷/۱۰۸	۱/۸۰	۰/۸۲۸	۱/۴۰۴

توزیع‌های SN و ASN و SBN و $GASN$ که توسط Rocha et.al.(2013) مطرح شده است را بر روی این داده‌ها با استفاده از روش ماکزیمم درست نمایی برازش داده شده است. در جدول ۶.۴ برآورد پارامترها برای هر کدام از توزیع‌ها ارائه شده است و نمودار توزیع‌ها روی هیستوگرام داده‌ها در شکل ۲.۴ رسم شده است.

جدول ۶.۴: برآورد ماکزیمم درست نمایی پارامترها برای داده‌های WCC

$Distribution$	N	SN	ASN	SBN	$GASN$
$\hat{\mu}$	۷/۱۰۸۶	۷/۱۰۲۸	۷/۱۰۷۶	۷/۱۰۲۵	۵/۵/۶۳
$\hat{\sigma}$	۳/۲۲۵۹	۱/۷۹۶۱	۱/۷۹۶۰	۱/۷۹۶۰	۲/۶۸۹۲
$\hat{\alpha}$	$\cdots$	$\cdots$	−۰/۰۰۲۳	−۱/۳۳۶۵	۰/۵۱۱۵
$\hat{\lambda}$	$\cdots$	۰/۰۰۳۳	$\cdots$	۳/۳۳۷۲	۲/۲۴۲۰
$log-likelihood$	−۴۰۴/۹۱۸۹	−۴۰۴/۹۱۸۹	−۴۰۴/۹۱۸۹	−۴۰۴/۹۱۸۹	−۳۹۵/۵۴۴۵
AIC	۸۱۳/۸۳۷۷	۸۱۵/۸۳۷۷	۸۱۵/۸۳۷۷	۸۱۷/۸۳۷۷	۷۹۹/۰۸۸۹
BIC	۷۹۹/۲۲۱۲	۷۹۳/۹۱۲۹	۷۹۳/۹۱۲۹	۷۸۸/۶۰۴۶	۷۶۹/۸۵۵۸



شکل ۲.۴: چگالی های برازش داده شده روی داده‌های WCC

همچنین آزمون نیکویی برازش کولموگروف اسمیرنف و نتایج آن ها در جدول زیر آمده است. .

جدول ۷.۴: آزمون نیکویی برازش کولموگروف روی داده‌های WCC

$Distribution$	SN	ASN	SBN	$GASN$
$Statistics$	۰/۰۸۵۲۸	۰/۰۸۵۲۸۱	۰/۰۸۵۲۸۱	۰/۰۴۳۱۱۹
$P-value$	۰/۱۰۵۹	۰/۱۰۵۹	۰/۱۰۵۹	۰/۸۴۶۸

با توجه به نتایج این جدول‌ها مشاهده می‌شود که توزیع $GASN$ نسبت به سه توزیع N و SN و ASN و SBN روی این داده‌ها بهتر برازش می‌شود. زیرا این توزیع دارای کمترین مقدار شاخص (AIC) و (BIC) و بیشترین مقدار $P-value$ می‌باشد.

۳.۴ مثال واقعی

در این بخش با استفاده از داده های واقعی کارایی توزیع $GASN$ را مورد بررسی قرار خواهیم داد. متغیر مورد بررسی، درصد چربی بدن $(Bfat)$ ، ۲۰۲ ورزشکار استرالیایی می‌باشد، که توسط کوک و ویزبرگ [۱۳] در سال ۱۹۹۴ مورد بررسی قرار گرفته است.
جدول زیر آماره‌های توصیفی را برای مجموعه از داده‌ها بیان می‌کند.

جدول ۸.۴: آماره‌های توصیفی داده‌های $(Bfat)$

n	$\bar{x}$	S	γ_1	γ_2
۲۰۲	۱۳/۵۰۷	۶/۱۸۹	۰/۷۵۳	−۰/۲۰۱

در جدول زیر برآورد پارامترها برای هر یک از توزیع‌ها ارائه شده است.

جدول ۹.۴: برآورد ماکزیمم درست نمایی پارامترها برای داده‌های $(Bfat)$

$Distribution$	N	SN	ASN	$GASN$
$\hat{\mu}$	۱۳/۵۰۷۴	۱/۳۵۰۵	۱/۳۵۰۹	۵/۸۰۷۴
$\hat{\delta}$	۳۸/۱۲۴۲	۶/۱۷۴۴	۶/۱۷۴۴	۷/۵۱۷۴
$\hat{\alpha}$	$\cdots$	۴/۰۱۷	۲/۶۵	۱/۲۵۱۹
$\hat{\lambda}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	۴۹/۵۷۷
$log-likelihood$	−۶۵۴/۳۵	−۶۵۴/۳۵	−۶۵۴/۳۵	−۶۰۷/۲۳
AIC	۱۳۱۴/۷۰۳	۱۳۱۴/۷۰۳	۱۳۱۴/۷۰۳	۱۲۲۲/۴۷۸
BIC	۱۲۹۸/۰۸۷	۱۲۹۲/۷۷۸	۱۲۹۲/۷۷۸	۱۱۹۳/۲۴۵

همچنین آزمون نیکویی برازش کولموگروف اسمیرنف و نتایج آن ها در جدول زیر آمده است.

جدول ۱۰.۴: آزمون نیکویی برازش کولموگروف روی داده‌های $Bfat$

$Distribution$	SN	ASN	SBN	$GASN$
$Statistics$	۰/۰۷۵۳۸	۰/۰۷۵۳۸۱	۰/۰۷۵۳۸	۰/۰۳۳۱۱۵
$P-value$	۰/۱۰۳۴	۰/۱۰۳۴	۰/۱۰۳۴	۰/۷۴۶۸

با توجه به مقادیر (ALC) و (BLC) و مقدار $P-value$ توزیع‌های برازش داده شده، می‌توان نتیجه گرفت که توزیع $GASN$ دارای کمترین مقدار (ALC) و (BLC) بیشترین مقدار $P-value$ است. بنابراین داده ها را به صورت بهتری برازش می‌دهد و از انعطاف پذیری بیشتری برخوردار است.

۴.۴ نتیجه گیری

در این پایان نامه تعمیم جدیدی از توزیع آلفا_چوله نرمال معرفی شد. که این توزیع می‌تواند برای برازش داده‌هایی با حداکثر دو مد مناسب باشد و این توزیع در حالت خاص، توزیع آلفا_چوله نرمال و چوله نرمال را در بر می‌گیرد.

برای سه توزیع چوله نرمال و آلفا_چوله نرمال و تعمیم آلفا_چوله نرمال برخی ویژگی‌ها بررسی شد. همچنین نمایش تصادفی، ضرایب چولگی و کشیدگی و تابع مولد گشتاور استخراج شد. برخی از جنبه‌های استنباطی مربوط به برآوردهای ماکزیمم

درست نمایی مورد بحث قرار گرفت و در پایان، انعطاف‌پذیری این سه توزیع با به کار گرفتن آن ها در برازش دادن به مجموعه داده های واقعی مطالعه شد. با توجه به نتایج حاصل از مقایسه این سه توزیع، می‌توان نتیجه گرفت که تعمیم توزیع آلفا ـ چوله نرمال توانمندتر از توزیع آلفا ـ چوله نرمال و چوله نرمال و نرمال می‌باشد.

پیوست آ

پیوست

آ.۱ کدهای نرم افزار R

در این جا کارهای عددی مربوط به فصل‌های قبل را ارائه می‌دهیم که با استفاده از برنامه R انجام شده‌اند.

دستورات برنامه نویسی مربوط به فصل یک.

$$###Figure(۱\cdot۱)###$$
$$lambda = ۱$$
$$f = function(x)\{$$
$$(۲ * dnorm(x) * pnorm(lambda * x)$$
$$\}$$
$$curve(f, xlim = c(-۴, ۴), ylim = c(۰, ۱), lwd = ۱, lty = ۱, col = ۱)$$
$$lambda = ۲$$
$$curve(f, xlim = c(-۴, ۴), lwd = ۱, lty = ۲, col = ۱, add = TRUE)$$
$$lambda = ۵$$
$$curve(f, xlim = c(-۴, ۴), lwd = ۱, lty = ۴, col = ۱, add = TRUE)$$
$$legend(“topright”, “(x, y)”, legend = c(“lambda = ۱”, “lambda = ۲”,$$
$$“lambda = ۵”), lty = c(۱, ۲, ۴), col = ۱)$$

$\#\#\#Figure(۱\cdot۲)\#\#\#$

$alpha = ۱$

$f = function\ (x)\{$

$((۱ - alpha * x)^۲ + ۱)/(۲ + alpha^۲) * dnorm(x)$

$* dnorm((x - mu)/sigma)$

$\}$

$curve(f, xlim = c(-۴, ۴), ylim = c(۰, ۰/۷), lwd = ۱, lty = ۱, col = ۱)$

$alpha = ۵$

$curve(f, xlim = c(-۴, ۴), lwd = ۱, lty = ۲, col = ۱, add = TRUE)$

$alpha = ۱۰$

$curve(f, xlim = c(-۴, ۴), lwd = ۱, lty = ۴, col = ۱, add = TRUE)$

$legend(``topright", ``(x, y)", legend = c(``alpha = ۱",$

$``alpha = ۵", ``alpha = ۱۰"), lty = c(۱, ۲, ۴), col = ۱)$

کار عددی مربوط به ملاحظه ی ۱۰۲۰۲

به دست آوردن ریشه‌های $f'(x)$ و مدهای $f(x)$ (تابع چگالی توزیع آلفا ــ چوله نرمال)

$library(rootSolve)$

$mu = ۰; sigma = ۱; alpha = ۱۰$

$f = function(x)\{$

$(((۱ - alpha * ((x - mu)/sigma))^۲ + ۱)/(sigma * (۲ + alpha^۲)))$

$* dnorm((x - mu)/sigma)$

$\}$

$g = function(x)\{$

$(-alpha^۲ * x^۳ + ۲ * alpha * x^۲ - ۲ * x + ۲ * alpha^۲ * x - ۲ * alpha)$

$\}$

$uniroot, all(g, c(-۱۰, ۱۰))$

$curve(f, lty = ۱, xlim = c(-۴, ۴), ylim = c(۰, ۰/۵), col = ۱)$

کار عددی مربوط به قضیه ۳.۲.۲:

به دست آوردن کران بالا و پایین برای ضرایب چولگی و کشیدگی به ازای آلفاهای متفاوت:

$gamma1 = function(alpha)\{$

$(12 * alpha^5 + 8 * alpha^3)/(sqrt(3 * alpha^4 + 4 * alpha^2 + 4))^3$

$\}$

$gamma1 = optimize(gamma1, c(-10000, 10000), tol = 0/0000001)\$objective$

$gamma2 = optimize(gamma1, c(-10000, 10000), tol = 0/0000001,$

$maximum = TRUE)\$objective$

$c(gamma1, gamma2)$

$gamma2 = function(alpha)\{$

$(15 * alpha^8 + 120 * alpha^6 + 168 * alpha^4 + 96 alpha^2 + 48)$

$/(3 * alpha^4 + 4 * alpha^2 + 4)^2 - 3$

$\}$

$gamma1 = optimize(gamma2, c(-10000, 10000), tol = 0/0000001)\$objective$

$gamma2 = optimize(gamma2, c(-10000, 10000), tol = 0/0000001,$

$maximum = TRUE)\$objective$

$c(gamma1, gamma2)$

$\#\#\#Figure(۲\cdot۲)\#\#\#$

$------$ *distribution ASN of kurtosis of Plot* $------$

$a < seq(-۲۰,۲۰,/۰۱)$

$f < -function(a)(۱۲ * a \wedge ۵ + ۸ * a \wedge ۳)/(۳ * a \wedge ۴ + ۴ * a \wedge ۲ + ۴) \wedge (۳/۲)$

$Plot(a, f(a), type ='' ۱'', ylime = C(-۰/۸۱۱, ۰/۸۱۱), xlab ='' alpha''$

$, ylab ='' skewness'', main ='' ASNskewess'', lty = ۱, co۱ = ۱)$

$-----$ *distribution ASN of skewness of Plot* $-----$

$a < seq(-۱۵,۱۵,/۰۱)$

$f < -function(a) \quad (۱۵ * a \wedge ۸ + ۱۲۰ * a \wedge ۶ + ۱۶۸ * a \wedge ۴$

$+ ۹۶ * a \wedge ۲ + ۴۸)/(۳ * a \wedge ۴ + ۴ * a \wedge ۲ + ۴) \wedge ۲ - ۳$

$Plot(a, f(a), type ='' ۱'', ylime = C(-۱/۳۴, ۰/۷۴۸۹), xlab ='' alpha'', ylab ='' kurtosis'',$

$main ='' ASNkurtosis'', lty = ۱, co۱ = ۱)$

کار عددی مربوط به روش رد و پذیرش:

انجام گام ۳ و ۴ و ۵ برای تولید متغیر تصادفی $ASN(\alpha)$

$alpha = 1; j = 0; n = 20; X = numeric(n)$

$M = (2 + sqrt(2))/2$

$x = c(-1, 1)$

$p = c(0/5, 0/5)$

$while(j < n + 1)\{$

$u = runif(1); z = rnorm(1); t = rchisq(1, df = 3, ncp = 0);$

$v = sample(x, 1, replace = TRUE, prob = p); y = sqrt(t) * v$

$s = sqrt(alpha^2/(2 + alpha^2)) * y + sqrt(2/(2 + alpha^2)) * z$

$if(u < ((1 + (1 + alpha * s)^2)/(2 + alpha^2 * s^2))/M)\{$

$X[j] = s$

$j = j + 1\}$

$if(u >= ((1 + (1 + alpha * s)^2)/(2 + alpha^2 * s^2))/M\{$

$j = j\}$

$\}$

X

دستورات برنامه نویسی مربوط به فصل سه

به دست آوردن جدول ۱۰۳ و ۲۰۳ :

$library(functional)$

$\#fx <-D(expression(((((۱$

$-alpha*x)^۲)+۱)/(۲+alpha^۲))*dnorm(x)),"x")$

$f=function(x,alpha)\{$

$f=((((۱-alpha*x)^۲)+۱)/(۲+alpha^۲))*dnorm(x)$

$return(f)$

$\}$

$fprime=function(x,alpha)\{$

$fprime=-(((((۱-alpha*x)^۲)+۱)/(۲+alpha^۲))*(x*dnorm(x))+$

$۲*(alpha*(۱-alpha*x))/(۲+alpha^۲)*dnorm(x))$

$return(fprime)$

$\}$

$b=sqrt(۲/pi)$

$C=function(alpha,lambda)\{$

$delta=lambda/(sqrt(۱+lambda^۲))$

$c=۱-alpha*b*delta+((alpha^۲)/۲)$

$return(c)$

$\}$

$F۱=function(x)\{$

$F۱=((۲+alpha^۲)/(C(alpha,lambda)))*fprime(x,alpha)*pnorm(lambda*x)$

$\}$

$F۲=function(x)\{$

$F۲=(-(۲+alpha^۲)/(C(alpha,lambda)))*lambda*f(x,alpha)*dnorm(lambda*x)$

$\}$

$f-GASN=function(x,alpha,lambda)\{$

$ff=((۱+(۱-alpha*x)^۲)/C(alpha,lambda))*dnorm(x)*pnorm(lambda*x)$

$return(ff)$

$\}$

$Ex = function(alpha, lambda)\{$

$delta = lambda/(sqrt(۱ + lambda^۲))$

$Ex = (۱/C(alpha, lambda)) * (b * delta - alpha + (((b * delta * (۳ + ۲ * lambda^۲))$

$/(۲ * (۱ + lambda^۲))) * alpha^۲))$

$return(Ex)$

$\}$

$Ex۲ = function(alpha, lambda)\{$

$delta = lambda/(sqrt(۱ + lambda^۲))$

$Ex۲ = (۱/C(alpha, lambda)) * (۱ - ((b * delta * (۳ + ۲ * lambda^۲))/$

$(۱ + lambda^۲)) * alpha + (۳/۲) * alpha^۲)$

$return(Ex۲)$

$\}$

$Ex۳ = function(alpha, lambda)\{$

$delta = lambda/(sqrt(۱ + lambda^۲))$

$Ex۳ = (۱/C(alpha, lambda)) * (((b * delta * (۳ + ۲ * lambda^۲))/(۱ + lambda^۲)) -$

$۳ * alpha + ((b * delta * (۱۵ + (۲۰ * lambda^۲) + ۸ * lambda^۴))/(۲ * (۱ + lambda^۲)^۲)) * alpha^۲)$

$return(Ex۳)\}$

$Ex۴ = function(alpha, lambda)\{$

$delta = lambda/(sqrt(۱ + lambda^۲))$

$Ex۴ = (۱/C(alpha, lambda)) * (۳ - ((b * delta * (۱۵ + (۲۰ * lambda^۲)$

$+ ۸ * lambda^۴))/(۱ + lambda^۲)^۲) * alpha + (۱۵/۲) * alpha^۲)$

$return(Ex۴)$

$\}$

$gamma۱ = function(alpha, lambda)\{$

$Varx = Ex۲(alpha, lambda) - (Ex(alpha, lambda))^۲$

$gamma۱ = (Ex۳(alpha, lambda) - ۳ * Ex(alpha, lambda) * Ex۲(alpha, lambda)$

$+ ۲ * (Ex(alpha, lambda))^۳)/(Varx^(۳/۲))$

$return(gamma۱)\}$

$gamma۲ = function(alpha, lambda)\{$

$Varx = Ex۲(alpha, lambda) - (Ex(alpha, lambda))^{۲}$

$gamma۲ = ((Ex۴(alpha, lambda) - ۴ * Ex(alpha, lambda) * Ex۳(alpha, lambda)$

$+۶ * (Ex(alpha, lambda)^{۲}) * Ex۲(alpha, lambda) - ۳ * Ex(alpha, lambda)^{۴})/(Varx^{۲})) - ۳$

$return(gamma۲)\}$

$gamma۱(-۰/۵, -۱)$

$gamma۲(-۰/۵, -۱)$

دستور رسم شکل تابع چگالی توزیع $GASN(\alpha, \lambda)$

$\#\#\#Figure \quad ۲\#\#\#$

$f - GASN - set۱ < -Curry(f - GASN, alpha = ۰, lambda = ۰)$

$f - GASN - set۲ < -Curry(f - GASN, alpha = ۲, lambda = ۰/۰۱)$

$f - GASN - set۳ < -Curry(f - GASN, alpha = ۱, lambda = -۱)$

$curve(f - GASN - set۱, -۴, ۴, ylim = c(۰, ۰/۶), ylab = "")$

$curve(f - GASN - set۲, -۴, ۴, lty = ۲, add = TRUE)$

$curve(f - GASN - set۳, -۴, ۴, lty = ۳, add = TRUE)$

دستور رسم شکل ۲۰۳

$\#\#\#Figure \quad ۳\#\#\#$

$gamma۱ - given - lambda < -Curry(gamma۱, lambda = ۵)$

$curve(gamma۱ - given - lambda, -۱۰, ۰)$

$gamma۱ - given - alpha < -Curry(gamma۱, alpha = ۰/۷)$

$curve(gamma۱ - given - alpha, -۱۰, ۱۰)$

۳.۰۳ دستور رسم شکل

$\#\#\#Figure \quad ۴\#\#\#$

$gamma۲ - given - lambda < -Curry(gamma۲, lambda = ۵)$

$curve(gamma۲ - given - lambda, -۱۰, ۰)$

$gamma۲ - given - alpha < -Curry(gamma۲, alpha = ۰/۷)$

$curve(gamma۲ - given - alpha, -۱۰, ۱۰)$

دستورات برنامه نویسی مربوط به فصل چهار

دستور رسم شکل (۴.۲)

$x = scan("http://lib.stat.cmu.edu/data-expo/۱۹۹۷/ascii/p۰۷.dat")$

$n = length(x)$

$mu = ۵/۷۵۹۳$

$sigma = ۱/۶۱۴$

$f۱ = function(x)\{$

$dnorm(x, mu, sigma)$

$\}$

$curve(f۱, lwd = ۱, lty = ۱, col = ۱, xlim = c(۲, ۱۰), ylim = c(۰, ۰/۳))$

$mu = ۴/۱۱۹۲$

$sigma = ۲/۳۰۰۶$

$lambda = ۲/۰۶۰۸$

$f۲ < -function(x)\{$

$۲ * sigma^-۱ * dnorm((x - mu)/sigma) * pnorm(lambda * ((x - mu)/sigma))$

$\}$

$curve(f۲, lwd = ۱, lty = ۲, col = ۱, add = TRUE)$

$mu = ۶/۷۵۷۸$

$sigma = ۱/۴۸۷۳$

$alpha = /۹۵۵۹$

$f۳ = function(x)\{$

$(((۱ - alpha * ((x - mu)/sigma))^۲ + ۱)/(sigma * (۲ + alpha^۲))) * dnorm((x - mu)/sigma)$

$\}$

$curve(f۳, xlim = c(۲, ۱۰), lwd = ۱, lty = ۳, col = ۱, add = TRUE)$

$legend("topright", "(x, y)", legend = c("N", "SN", "ASN"), lty = c(۱, ۲, ۳), col = ۱)$

دستور رسم شکل (۴.۳) مربوط به بخش آ.۳

$$\#\#\#Figure \quad ۱\#\#\#$$

$$alpha = ۱/۸۵; lambda = ۰/۸$$

$$alpha = -۰/۹; lambda = ۱$$

$$curve(F - ۱, -۴, ۴, ylim = c(-۰/۴, ۰/۴))$$

$$curve(F - ۲, -۴, ۴, add = TRUE, lty = ۲)$$

به‌دست آوردن جدول ۳٫۴

$$n = length(y - ۴)$$

$$c(n, mean(y - ۴), sd(y - ۴), skewness(y - ۴), kurtosis(y - ۴))$$

به دست آوردن جدول ۴٫۴ از بخش ۲٫۴

$$require(graphics)$$

$$require(stats۴)$$

$$require(sn)$$

$$B = ۵۰۰۰۰۰$$

$$y = scan("http://lib.stat.cmu.edu/data-expo/۱۹۹۷/ascii/p۰۷.dat",$$

$$what = list("x۱", "x۲", "x۳", "x۴", "x۵", "x۶"), sep = "", nlines = ۱۰۸۲)$$

$$y۱ = as.numeric((y[[۱]]))$$

$$y۲ = as.numeric((y[[۲]]))$$

$$y۳ = as.numeric((y[[۳]]))$$

$$y۴ = as.numeric((y[[۴]]))$$

$$y۵ = as.numeric((y[[۵]]))$$

$$y۶ = as.numeric((y[[۶]]))$$

$$n = length(y۴)$$

$$c(n, mean(y۴), sd(y۴))$$

$$Mu = mean(y۴); Sd = sd(y۴)$$

$$Mu$$

$$Sd$$

$xx = (y۴ - mu)/var$

$gamma۱ = mean((xx - mean(xx))^{۳})/(var(xx)^{(۳/۲)})$

$gamma۱$

$gamma۲ = (mean(xx - mean(xx)^{۴})/(var(xx)^{۲})) - ۳$

$gamma۲$

$\#\#\#ASN \quad random \quad number \quad generator\#\#\#$

$SCASN = function(I, alpha)\{$

$V = sample(c(-۱, ۱), I, replace = TRUE)$

$T = rchisq(I, ۳)$

$Y = sqrt(T) * V$

$Z = rnorm(I)$

$rr = sqrt((alpha^{۲})/(۲ + alpha^{۲})) * Y + sqrt(۲/(۲ + alpha^{۲})) * Z$

$return(rr)$

$\}$

$ASN = function(B, alpha)\{$

$r - ASN = numeric(B)$

$for(iin۱ : B)\{$

$u = runif(۱)$

$s = SCASN(۱, alpha)$

if

$(u < ((۲ * ((۱ + alpha * s)^{۲} + ۱))/((۲ + sqrt(۲)) * (۲ + (alpha^{۲}) * s^{۲}))))\{r - ASN[i] = s\}$

$\}$

$id = which(r - ASN == ۰)$

$r - asn = r - ASN[-id]$

$return(r - asn)$

$\}$

```
###GASN random number generator###
GASN = function(B, alpha, lambda){
w = ASN(B, alpha); lenw = length(w)
r − GASN = numeric(lenw)
for(iin۱ : lenw){
z = rnorm(۱)
#w = ASN(۵۰, alpha)[۱]
if(z < lambda ∗ w[i]){r − GASN[i] = w[i]}
}
id = which(r − GASN == ۰)
return(r − GASN[−id])}
#####################
b = sqrt(۲/pi)
C = function(alpha, lambda){
delta = lambda/(sqrt(۱ + lambda^۲))
c = ۱ − alpha ∗ b ∗ delta + ((alpha^۲)/۲)
return(c)
}
GASN − theta = function(theta){
mu = theta[۱]; sigma = theta[۲]; alpha = theta[۳]; lambda = theta[۴]
logl = sum(log(۱ + (۱ − alpha ∗ ((y۴ − mu)/sigma))^۲)) + sum(log(dnorm((y۴ − mu)/sigma)))
 + sum(log(pnorm((lambda ∗ (y۴ − mu))/sigma))) − n ∗ log(sigma) − n ∗ log(C(alpha, lambda)
return(−logl)
}
SN − theta = function(theta){
mu = theta[۱]; sigma = theta[۲]; alpha = ۰; lambda = theta[۳]
logl = sum(log(۱ + (۱ − alpha ∗ ((y۴ − mu)/sigma))^۲)) + sum(log(dnorm((y۴ − mu)/sigma)))
 + sum(log(pnorm((lambda ∗ (y۴ − mu))/sigma))) − n ∗ log(sigma) − n ∗ log(C(alpha, lambda)
return(−logl)
}
```

$ASN-theta=function(theta)\{$

$mu=theta[۱];sigma=theta[۲];alpha=theta[۳];lambda=۰$

$logl=sum(log(۱+(۱-alpha*((y۴-mu)/sigma))^{۲}))+sum(log(dnorm((y۴-mu)/sigma)))$

$+sum(log(pnorm((lambda*(y۴-mu))/sigma)))-n*log(sigma)-n*log(C(alpha,lambda))$

$return(-logl)$

$\}$

$SBN-theta=function(theta)\{$

$mu=theta[۱];sigma=theta[۲];alpha=theta[۳];lambda=theta[۴]$

$logl<-n*log(۲)-n*log(sigma)-n*log(۱+alpha)+sum(log(۱+alpha*((y۴-mu)/sigma)^{۲})$

$+sum(dnorm((y۴-mu)/sigma,log=TRUE))$

$+sum(pnorm((lambda*(y۴-mu))/sigma,log.p=TRUE))$

$return(-logl)$

$\}$

$N-logLike=function(mu,sigma۲)\{$

$logl=(-n/۲)*log(۲*pi)-(n/۲)*log(sigma۲)-(۱/(۲*sigma۲))*sum((y۴-mu)^{۲})$

$return(-logl)\}$

$\#$

$MLE-GASN=nlminb(c(Mu,Sd,۰/۰۱,۰/۰۱),GASN-theta)$

$Mle-GASN=MLE-GASN\$par;Mle-GASN$

$AIC-GASN=-۲*(-MLE-GASN\$objective)+۲*۴;AIC-GASN$

$LogLikeGASN=-MLE-GASN\$objective;LogLikeGASN$

$BIC-GASN=۴*log(n)-۲*(-LogLikeGASN);BIC-GASN$

$Mle-mu-N=mean(y۴);Mle-mu-N$

$Mle-sigma۲-N=(۱/n)*sum((y۴-Mle-mu-N)^{۲});Mle-sigma۲-N$

$NormalLikelihood=N-logLike(Mle-mu-N,Mle-sigma۲-N);-NormalLikelihood$

$AIC-N=-۲*(-NormalLikelihood)+۲*۲;AIC-N$

$BIC-N=۲*log(n)-۲*N-logLike(Mle-mu-N,Mle-sigma۲-N);BIC-N$

$MLE-SN=nlminb(c(Mu,Sd,۰/۰۱),SN-theta)$

$Mle-SN=MLE-SN\$par;Mle-SN$

$AIC-SN=-۲*(-MLE-SN\$objective)+۲*۳; AIC-SN$

$LogLikeSN=-MLE-SN\$objective; LogLikeSN$

$BIC-SN=۳*log(n)-۲*(-LogLikeSN); BIC-SN$

$MLE-ASN=nlminb(c(Mu, Sd, ۰/۰۱), ASN-theta)$

$Mle-ASN=MLE-ASN\$par; Mle-ASN$

$AIC-ASN=-۲*(-MLE-ASN\$objective)+۲*۳; AIC-ASN$

$LogLikeASN=-MLE-ASN\$objective; LogLikeASN$

$BIC-ASN=۳*log(n)-۲*(-LogLikeASN); BIC-ASN$

$MLE-SBN=nlminb(c(Mu, Sd, ۰/۰۱, ۰/۰۱), SBN-theta)$

$Mle-SBN=MLE-SBN\$par; Mle-SBN$

$AIC-SBN=-۲*(-MLE-SBN\$objective)+۲*۴; AIC-SBN$

$LogLikeSBN=-MLE-SBN\$objective; LogLikeSBN$

$BIC-SBN=۴*log(n)-۲*(-LogLikeSBN); BIC-SBN$

به دست آوردن جدول ۴.۶ از بخش ۴.۳

$\#\#\#Table \quad ۳\#\#\#$

$y=read.table(\text{"}C:/WCC.txt\text{"})[,۱]$

$mu=mean(y); varr=sd(y)$

$xx'=(y-mu)/varr$

$gamma۱=mean((xx-mean(xx))^{۳})/(var(xx)^{(۳/۲)})$

$gamma۲=(mean((xx-mean(xx))^{۴})/(var(xx)^{۲}))-۳$

به دست آوردن جدول ۴.۷

$\#\#\#mle.R\#\#\#$

$n=۲۰۲$

$y=read\cdot table(\text{"}C:/WCC.txt\text{"})[,۱]$

$b=sqrt(۲/pi)$

$C = function(alpha, lambda)\{$

$delta = lambda/(sqrt(۱ + lambda^۲))$

$c = ۱ - alpha * b * delta + ((alpha^۲)/۲)$

$return(c)$

$\}$

$GASN - theta = function(theta)\{$

$mu = theta[۱]; sigma = theta[۲]; alpha = theta[۳]; lambda = theta[۴]$

$logl = sum(log(۱ + (۱ - alpha * ((y - mu)/sigma))^۲)) + sum(log(dnorm((y - mu)/sigma)))$

$+ sum(log(pnorm((lambda * (y - mu))/sigma))) - n * log(sigma) - n * log(C(alpha, lambda))$

$return(-logl)$

$\}$

$SN - theta = function(theta)\{$

$mu = theta[۱]; sigma = theta[۲]; alpha = ۰; lambda = theta[۳]$

$logl = sum(log(۱ + (۱ - alpha * ((y - mu)/sigma))^۲)) + sum(log(dnorm((y - mu)/sigma)))$

$+ sum(log(pnorm((lambda * (y - mu))/sigma))) - n * log(sigma) - n * log(C(alpha, lambda))$

$return(-logl)$

$\}$

$ASN - theta = function(theta)\{$

$mu = theta[۱]; sigma = theta[۲]; alpha = theta[۳]; lambda = ۰$

$logl = sum(log(۱ + (۱ - alpha * ((y - mu)/sigma))^۲)) + sum(log(dnorm((y - mu)/sigma)))$

$+ sum(log(pnorm((lambda * (y - mu))/sigma))) - n * log(sigma) - n * log(C(alpha, lambda))$

$return(-logl)$

$\}$

$SBN - theta = function(theta)\{$

$mu = theta[۱]; sigma = theta[۲]; alpha = theta[۳]; lambda = theta[۴]$

$logl < -n * log(۲) - n * log(sigma) - n * log(۱ + alpha)$

$+ sum(log(۱ + alpha * ((y - mu)/sigma)^{۲})) + sum(dnorm((y - mu)/sigma, log = TRUE))$

$+ sum(pnorm((lambda * (y - mu))/sigma, log \cdot p = TRUE))$

$return(-logl)$

$\}$

$MLE - GASN = nlminb(c(۷/۱۰۸, ۱/۸, ۲, ۳), GASN - theta)$

$Mle - GASN = MLE - GASN\$par$

$AIC - GASN = -۲ * (-MLE - GASN\$objective) + ۲ * ۴$

$MLE - SN = nlminb(c(۷/۱۰۸, ۱/۸, ۰/۰۱), SN - theta)$

$Mle - SN = MLE - SN\$par$

$AIC - SN = -۲ * (-MLE - SN\$objective) + ۲ * ۳$

$MLE - ASN = nlminb(c(۷/۱۰۸, ۱/۸, ۰), ASN - theta)$

$Mle - ASN = MLE - ASN\$par$

$AIC - ASN = -۲ * (-MLE - ASNobjective) + ۲ * ۳$

$MLE - SBN = nlminb(c(۷/۱۰۸, ۱/۸, ۰, ۰), SBN - theta)$

$Mle - SBN = MLE - SBN\$par$

$AIC - SBN = -۲ * (-MLE - SBN\$objective) + ۲ * ۴$

$\#$

$random \quad generator.R$

$require(graphics)$

$require(stats۴)$

$require(sn)$

$y = read.table("C:/WCC.txt")[,۱]$

$B = ۱۰۰۰۰۰$

$alpha = ۰/۵۱۱۵$

$lambda = ۲/۲۴۰$

$\#\#\#ASN \quad random \quad number \quad generator\#\#\#$

$SCASN = function(I, alpha)\{$

$V = sample(c(-۱, ۱), I, replace = TRUE)$

$T = rchisq(I, ۳)$

$Y = sqrt(T) * V$

$Z = rnorm(I)$

$rr = sqrt((alpha^۲)/(۲ + alpha^۲)) * Y + sqrt(۲/(۲ + alpha^۲)) * Z$

$return(rr)$

$\}$

$ASN = function(B, alpha)\{$

$r - ASN = numeric(B)$

$for(iin۱ : B)\{$

$u = runif(۱)$

$s = SCASN(۱, alpha)$

if

$(u < ((۲ * ((۱ + alpha * s)^۲ + ۱))/((۲ + sqrt(۲)) * (۲ + (alpha^۲) * s^۲)))))\{r - ASN[i] = s\}$

$\}$

$id = which(r - ASN == ۰)$

$r - asn = r - ASN[-id]$

$return(r - asn)$

$\}$

$\#\#\#GASN \quad random \quad number \quad generator\#\#\#$

$GASN = function(B, alpha, lambda)\{$

$w = ASN(B, alpha); lenw = length(w)$

$r - GASN = numeric(lenw)$

$for(i\$in\$۱ : lenw)\{$

$z = rnorm(۱)$

$\#w = ASN(۵۰, alpha)[۱]$

$if(z < lambda * w[i])\{r - GASN[i] = w[i]\}$

$\}$

$id = which(r - GASN == ۰)$

$return(r - GASN[-id])$

$\}$

$alpha = ۰/۵۱۱۵; s = ۲/۶۸۹۲$

$lambda = ۲/۲۴۰; barx = ۵/۵۶۹۳$

$r - GASN = GASN(B, alpha, lambda)$

$r - ASN = ASN(B, -۰/۰۰۰۵)$

$r - SN < -rsn(B, x - i = ۰, omega = ۱, alpha = ۰/۰۰۴۱)$

$yy = (y - mean(y))/sd(y)$

$r - GASN = r - GASN * ۲/۳ + ۴/۹$

$r - ASN = r - ASN * ۱/۷۹۶۰ + ۷/۱۰۷۶$

$r - SN = r - SN * ۱/۷۹۶۱ + ۷/۱۰۲۸$

$ks.test(y, r - GASN)\#, alternative = "l")$

$ks.test(y, r - ASN)$

$ks.test(y, r - SN)$

$plot(density(r - GASN), xlim = c(۰, ۱۵), ylim = c(۰, ۰/۳), main = "", xlab = "", lty = ۲)$

$\#plot(density(r - GASN * s + barx), xlim = c(۰, ۱۵), ylim = c(۰, ۰/۳),$

$main = "", xlab = "", lty = ۲)$

$hist(y, prob = TRUE, add = TRUE)$

$par(new = TRUE)$

$plot(density(rASN), xlim = c(۰, ۱۵), ylim = c(۰, ۰/۳), main = "", xlab = "")$

$par(new = TRUE)$

$plot(density(r - SN), xlim = c(۰, ۱۵), ylim = c(۰, ۰/۳), main = "", xlab = "")$

به دست آوردن جدول ۸.۴

$ks.test(y, r-GASN)$

$Two-sample\$kolmogorov-smirnov\$test$

$data:\$y\$and\$r-GASN$

$D=۰/۵۳۷۰۱, p-value=۰/۶۰۸۲$

$alternative\$hypothesis: two-sided$

$ks.test(y, r-ASN)$

$Two-sample\$kolmogorov-smirnov\$test$

$data:\$y\$and\$r-ASN$

$D=۰/۰۸۶۰۹۴, p-value=۰/۱۰۱۱$

$alternative\$hypothesis: two-sided$

$ks.test(y, r-SN)$

$Two-sample\$kolmogorov-smirnov\$test$

$data:\$y\$and\$r-SN$

$D=۰/۰۸۵۸۳۹, p-value=۰/۱۰۲۵$

$alternative\$hypothesis: two-sided$

دستورات برنامه نویسی مربوط به بخش ۴.۴ :

$\#\#\#New \quad data۲.R\#\#\#$

$require(graphics)$

$require(stats۴)$

$require(sn)$

$B=۵۰۰۰۰۰$

$deta(ais)$

$attach(ais)$

$y=log(Bfat)$

$n=length(y)$

$mu=mean(y); Sd=sd(y)$

$\#\#\#ASN \quad random \quad number \quad generator\#\#\#$

$SCASN = function(I, alpha)\{$

$V = sample(c(-۱, ۱), I, replace = TRUE)$

$T = rchisq(I, ۳)$

$Y = sqrt(T) * V$

$Z = rnorm(I)$

$rr = sqrt((alpha^{۲})/(۲ + alpha^{۲})) * Y + sqrt(۲/(۲ + alpha^{۲})) * Z$

$return(rr)$

$\}$

$ASN = function(B, alpha)\{$

$r - ASN = numeric(B)$

$for(i\$in\$۱ : B)\{$

$u = runif(۱)$

$s = SCASN(۱, alpha)$

$if(u < ((۲ * ((۱ + alpha * s)^{۲} + ۱))/((۲ + sqrt(۲))$

$* (۲ + (alpha^{۲}) * s^{۲})))) \{r - ASN[i] = s\}$

$\}$

$id = which(r - ASN == ۰)$

$r - asn = r - asn[-id]$

$return(r - asn)$

$\}$

$\#\#\#GASN \quad random \quad number \quad generator\#\#\#$

$GASN = function(B, alpha, lambda)\{$

$w = ASN(B, alpha); lenw = length(w)$

$r - GASN = numeric(lenw)$

$for(i\$in\$۱ : lenw)\{$

$z = rnorm(۱)$

$\#w = ASN(۵۰, alpha)[۱]$

$if(z < lambda * w[i])\{r - GASN[i] = w[i]\}$

$\}$

$id = which(r - GASN == ۰)$

$return(r - GASN[-id])$

$\}$

$b = sqrt(۲/pi)$

$C = function(alpha, lambda)\{$

$delta = lambda/(sqrt(۱ + lambda^{۲}))$

$c = ۱ - alpha * b * delta + ((alpha^{۲})/۲)$

$return(c)$

$\}$

$GASN - theta = function(theta)\{$

$mu = theta[۱]; sigma = theta[۲]; alpha = theta[۳]; lambda = theta[۴]$

$logl = sum(log(۱ + (۱ - alpha * ((y - mu)/sigma))^{۲})) + sum(log(dnorm((y - mu)/sigma)))$

$+ sum(log(pnorm((lambda * (y - mu))/sigma))) - n * log(sigma) - n * log(C(alpha, lambda))$

$return(-logl)\}$

$SN - theta = function(theta)\{$

$mu = theta[۱]; sigma = theta[۲]; alpha = ۰; lambda = theta[۳]$

$logl = sum(log(۱ + (۱ - alpha * ((y - mu)/sigma))^{۲})) + sum(log(dnorm((y - mu)/sigma)))$

$+ sum(log(pnorm((lambda * (y - mu))/sigma))) - n * log(sigma) - n * log(C(alpha, lambda))$

$return(-logl)$

$\}$

$ASN - theta = function(theta)\{$

$mu = theta[۱]; sigma = theta[۲]; alpha = theta[۳]; lambda = ۰$

$logl = sum(log(۱ + (۱ - alpha * ((y - mu)/sigma))^{۲})) + sum(log(dnorm((y - mu)/sigma)))$

$+ sum(log(pnorm((lambda * (y - mu))/sigma))) - n * log(sigma) - n * log(C(alpha, lambda))$

$return(-logl)$

$\}$

$SBN - theta = function(theta)\{$

$mu = theta[۱]; sigma = theta[۲]; alpha = theta[۳]; lambda = theta[۴]$

$logl < -n * log(۲) - n * log(sigma) - n * log(۱ + alpha)$

$+ sum(log(1 + alpha * ((y - mu)/sigma)^2))$

$+ sum(dnorm((y - mu)/sigma, log = TRUE))$

$+ sum(pnorm((lambda * (y - mu))/sigma, log.p = TRUE))$

$return(-logl)$

$\}$

$N - logLike = function(mu, sigma2)\{$

$logl = (-n/2) * log(2 * pi) - (n/2) * log(sigma2) - (1/(2 * sigma2)) * sum((y - mu)^2)$

$return(-logl)$

$\}$

$MLE - GASN = nlminb(c(mu, Sd, 0/01, 0/01), GASN - theta)$

$Mle - GASN = MLE - GASN\$par; Mle - GASN$

$AIC - GASN = -2 * (-MLE - GASN\$objective) + 2 * 4; AIC - GASN$

$LogLikeGASN = -MLE - GASN\$objective; LogLikeGASN$

$BIC - GASN = 4 * log(n) - 2 * (-LogLikeGASN); BIC - GASN$

$Mle - mu - N = mean(y); Mle - mu - N$

$Mle - Sigma2 - N = (1/n) * sum((y - Mle - mu - N)^2); Mle - Sigma2 - N$

$NormalLikelihood = N - logLike(Mle - mu - N, Mle - Sigma2 - N); -NormalLikelihood$

$AIC - N = -2 * (-NormalLikelihood) + 2 * 2; AIC - N$

$BIC - N = 2 * log(n) - 2 * N - logLike(Mle - mu - N, Mle - Sigma2 - N); BIC - N$

$MLE - SN = nlminb(c(mu, Sd, 0/01), SN - theta)$

$Mle - SN = MLE - SN\$par; Mle - SN$

$AIC - SN = -2 * (-MLE - SN\$objective) + 2 * 3; AIC - SN$

$LogLikeSN = -MLE - SN\$objective; LogLikeSN$

$BIC - SN = 3 * log(n) - 2 * (-LogLikeSN); BIC - SN$

$MLE - asn = nlminb(c(mu, Sd, 0/01), ASN - theta)$

$Mle - asn = MLE - asn\$par; Mle - asn$

$AIC - asn = -2 * (-MLE - asn\$objective) + 2 * 3; AIC - asn$

$LogLikeASN = -MLE - asn\$objective; LogLikeASN$

$BIC - asn = 3 * log(n) - 2 * (-LogLikeASN); BIC - asn$

$MLE - SBN = nlminb(c(mu, Sd, 0/01, 0/01), SBN - theta)$

$Mle-SBN=MLE-SBN\$par; Mle-SBN$

$AIC-SBN=-۲*(-MLE-SBN\$objective)+۲*۴; AIC-SBN$

$LogLikeSBN=-MLE-SBN\$objective; LogLikeSBN$

$BIC-SBN=۴*log(n)-۲*(-LogLikeSBN); BIC-SBN$

$\#\#\#Simulation\quad Results\cdot R\#\#\#$

$\#\#\#GASN\quad Results\#\#\#$

$Mle-GASN=MLE-GASN\$par; Mle-GASN$

$AIC-GASN=-۲*(-MLE-GASN\$objective)+۲*۴; AIC-GASN$

$LogLikeGASN=-MLE-GASN\$objective; LogLikeGASN$

$BIC-GASN=۴*log(n)-۲*(-LogLikeGASN); BIC-GASN$

$\#\#\#Normal\quad Reults\#\#\#$

$Mle-mu-N=mean(y); Mle-mu-N$

$Mle-Sigma۲-N=(۱/n)*sum((y-Mle-mu-N)^{۲}); Mle-Sigma۲-N$

$NormalLikelihood=N-logLike(Mle-mu-N, Mle-Sigma۲-N); -NormalLikelihood$

$AIC-N=-۲*(-NormalLikelihood)+۲*۲; AIC-N$

$BIC-N=۲*log(n)-۲*N-logLike(Mle-mu-N, Mle-Sigma۲-N); BIC-N$

$\#\#\#Skew\quad Normal\quad Results\#\#\#$

$Mle-SN=MLE-SN\$par; Mle-SN$

$AIC-SN=-۲*(-MLE-SN\$objective)+۲*۳; AIC-SN$

$LogLikeSN=-MLE-SN\$objective; LogLikeSN$

$BIC-SN=۳*log(n)-۲*(-LogLikeSN); BIC-SN$

$\#\#\#\#alpha\quad Skew\quad Normal\#\#\#$

$Mle-asn=MLE-asn\$par; Mle-asn$

$AIC-asn=-۲*(-MLE-asn\$objective)+۲*۳; AIC-asn$

$LogLikeASN=-MLE-asn\$objective; LogLikeASN$

$BIC-asn=۳*log(n)-۲*(-LogLikeASN); BIC-asn$

$\#\#\#Skew\quad Bivariate\quad Normal\#\#\#$

$Mle-SBN=MLE-SBN\$par; Mle-SBN$

$AIC-SBN=-۲*(-MLE-SBN\$objective)+۲*۴; AIC-SBN$

$LogLikeSBN=-MLE-SBN\$objective; LogLikeSBN$

$BIC-SBN=۴*log(n)-۲*(-LogLikeSBN); BIC-SBN$

آ.۲ روش رد و پذیرش مربوط به فصل دوم

فرض کنید که

$$f(x) = \frac{(1-\alpha x)^2 + 1}{2+\alpha^2}\phi(x)$$
$$f_1(x) = (\frac{2+\alpha^2 x^2}{2+\alpha^2})\phi(x)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که:

$$M = \sup_x \frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

و بنابراین

$$\frac{1}{M}\frac{f(S)}{f_1(S)} = \frac{2 + [(1+\alpha S)^2 + 1]}{(2+\sqrt{2})(2+\alpha^2 S^2)}$$

از طرف دیگر داریم:

$$p[U < \frac{1}{M}\frac{f(S)}{f_1(S)}] = \frac{1}{M} = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

برهان. $M = \underset{x}{sup}\frac{f(x)}{f_1(x)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$:

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{f(x)}{f_1(x)} &= \frac{\frac{(1-\alpha x)^2+1}{2+\alpha^2}}{\frac{2+\alpha^2 x^2}{2+\alpha^2}} \\ &= \frac{2+\alpha^2 x^2 - 2\alpha x}{2+\alpha^2 x^2} \leq 1 \\ &= \frac{2+\alpha^2 x^2}{2+\alpha^2 x^2} - \frac{2\alpha x}{2+\alpha^2 x^2} \\ &= 1 - \frac{2\alpha x}{2+\alpha^2 x^2} \leq 1 \end{aligned}$$

□

حال می‌خواهیم بررسی کنیم به ازای چه مقادیری از x، $g(x) = \frac{f(x)}{f_1(x)}$ ماکزیمم

می‌شود.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{۲\alpha(۲+\alpha^۲x^۲)-(۲\alpha^۲x)(۲\alpha x)}{(۲+\alpha^۲x^۲)^۲}\\
&= -\frac{۴\alpha+۲\alpha^۳x^۲-۴\alpha^۳x^۲}{(۲+\alpha^۲x^۲)^۲}=۰\\
&= -(۴\alpha-۲\alpha^۳x^۲)=۰\\
&= -۲\alpha(۲-\alpha^۲x^۲)=۰\\
&= ۲-\alpha^۲x^۲=۰\\
&= \alpha^۲x^۲=۲\\
&\Rightarrow\ x^۲=\frac{۲}{\alpha^۲}\Rightarrow\ x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{\alpha}
\end{aligned}$$

اگر $x=\frac{\sqrt{۲}}{\alpha}$ باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
\sup_x g(x)=\sup_x\frac{f(x)}{f_۱(x)}&=۱-\frac{۲\alpha(\frac{\sqrt{۲}}{\alpha})}{۲+\alpha^۲\frac{۲}{\alpha^۲}}\\
&=۱-\frac{۲\sqrt{۲}}{۴}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}
\end{aligned}$$

این جواب غیرقابل قبول است چون $g(x)=۱-\frac{۲\alpha x}{۲+\alpha^۲x^۲}\le ۱$ همواره کمتر مساوی یک است یعنی ممکن است $g(x)$ برابر با ۱ شود یعنی $\frac{f(x)}{f_۱(x)}=۱$ شود و چون $۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}<۱$ است بنابراین نمی تواند سوپریمم باشد، زیرا سوپریمم باید عددی باشد که هیچ مقداری از $\frac{f(x)}{f_۱(x)}$ پیدا نشود که از آن بیشتر شود.

پس برای $x=-\frac{\sqrt{۲}}{\alpha}$ مقدار سوپریمم را پیدا می‌کنیم:

اگر $x=-\frac{\sqrt{۲}}{\alpha}$ باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
\sup_x\frac{f(x)}{f_۱(x)}&=۱-\frac{۲\alpha(-\frac{\sqrt{۲}}{\alpha})}{۲\alpha^۲(\frac{۲}{\alpha^۲})}\\
&=۱-\frac{-۲\sqrt{۲}}{۴}\\
&=۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}
\end{aligned}$$

و چون $۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}>۱$ است بنابراین می‌تواند سوپریمم باشد یعنی:

$$M=\sup_x\frac{f(x)}{f_۱(x)}=۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\frac{f(S)}{f_1(S)} &= \frac{2[(1-\alpha S)^2+1]}{(2+\sqrt{2})(2+\alpha^2 S^2)} \\ &= \frac{2[2+\alpha^2 S^2-2\alpha S]}{(2+\sqrt{2})(2+\alpha^2 S^2)}\end{aligned}$$

می‌دانیم که

$$M=\frac{2+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \ \frac{1}{M}=\frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

لذا

$$\begin{aligned}\frac{f(S)}{f_1(S)} &= \frac{2+\alpha^2 S^2-2\alpha S}{2+\alpha^2 S^2} \\ \frac{1}{M}\frac{f(S)}{f_1(S)} &= \frac{2(2+\alpha^2 S^2-2\alpha S)}{(2+\sqrt{2})(2+\alpha^2 S^2)} \\ &= \frac{2[(1-\alpha S)^2+1]}{(2+\sqrt{2})(2+\alpha^2 S^2)}\end{aligned}$$

حال می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$p[U<\frac{1}{M}\frac{f(S)}{f_1(S)}]=\frac{1}{M}=\frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

به طوری که $U\sim U(0,1)$ و $S\sim SCASN(0,1)$ است.
بنابراین

$$\begin{aligned}p[U<\frac{1}{M}\frac{f(S)}{f_1(S)}] &= p[U<\frac{2[(1-\alpha S)^2+1]}{(2+\sqrt{2})(2+\alpha^2 S^2)}] \\ &= p[U<\frac{2(2+\alpha^2 S^2-2\alpha S)}{(2+\sqrt{2})(2+\alpha^2 S^2)}] \\ &= E[F_U(\frac{2(2+\alpha^2 S^2-2\alpha S)}{(2+\sqrt{2})(2+\alpha^2 S^2)})] \\ &= E[\frac{2(2+\alpha^2 S^2-2\alpha S)}{(2+\sqrt{2})(2+\alpha^2 S^2)}] \\ &= \frac{2}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2+\alpha^2 E(S^2)-2\alpha E(S)}{2+\alpha^2 E(S^2)}\end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= (۱ + \frac{\alpha^۲ t^۲}{۲+\alpha^۲}) e^{\frac{t^۲}{۲}} \\
&\Rightarrow \ E(S) = \frac{\partial}{\partial t} M_S(t)|_{t=۰} \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} M_s(t) = (\frac{۲\alpha^۲ t}{۲+\alpha^۲}) e^{\frac{t^۲}{۲}} + t e^{\frac{t^۲}{۲}} (۱ + \frac{\alpha^۲ t^۲}{۲+\alpha^۲})|_{t=۰} \\
&= ۰ + ۰ = ۰ \Rightarrow E(S) = ۰
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p[U < \frac{۱}{M}\frac{f(S)}{f_۱(S)}] = \frac{۱}{M} &= \frac{۲}{۲+\sqrt{۲}} \frac{۲ + \alpha^۲ E(S^۲) - ۲\alpha E(S)}{۲ + \alpha^۲ E(S^۲)} \\
&= \frac{۲}{۲+\sqrt{۲}} \frac{۲ + \alpha^۲ E(S^۲)}{۲ + \alpha^۲ E(S^۲)} \\
&= \frac{۲}{۲+\sqrt{۲}} = \frac{۱}{M}
\end{aligned}$$

بنابراین تعداد دفعات انجام آزمایش‌های لازم دارای متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $p = \frac{۱}{M}$ است و چون امید ریاضی متغیر تصادفی هندسی برابر با $M = \frac{۱}{p}$ است بنابراین $M = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۲} = ۱/۷۰۷$ مقدار مورد انتظار تعداد دفعات انجام آزمایش است.

۳.آ اثبات مربوط به فصل سوم

در این بخش با استفاده از یک روش گرافیکی ثابت می‌کنیم که چگالی $GASN$ حداکثر دو مد دارد. براساس بهبودیان ۱۹۷۰.

برهان. فرض کنید متغیر X دارای توزیع $X \sim GASN(\alpha, \lambda)$ باشد. آنگاه با استفاده از تعاریف توزیع آلفا و توزیع $GASN(\alpha, \lambda)$ داریم

$$f(X;\alpha,\lambda) = \frac{۲+\alpha^۲}{C(\alpha,\lambda)} f(X;\alpha)\Phi(\lambda x) \qquad (۱.آ)$$

در نتیجه :

$$f'(X;\alpha,\lambda) = \frac{۲+\alpha^۲}{C(\alpha,\lambda)} [f'(X;\alpha)\Phi(\lambda x) + \lambda f(X;\alpha)\phi(\lambda x)] \qquad (۲.آ)$$

همچنین نشان می‌دهیم که رابطه (۱.آ) حداکثر دو مد دارد که باید ثابت شود که رابطه (۲.آ) یک یا سه جواب دارد. با استفاده از یک روش گرافیکی داریم:

$$f'(X;\alpha,\lambda) = F_۱(X) - F_۲(X) \qquad (۳.آ)$$

که در آن

$$F_{۱}(X) = \frac{۲ + \alpha^{۲}}{C(\alpha, \lambda)} f'(X; \alpha)\Phi(\lambda x) \qquad (\text{آ.۴})$$

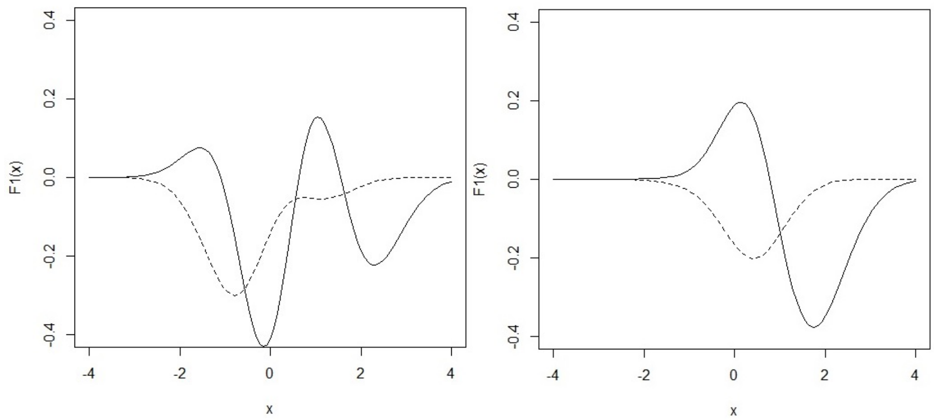
و

$$F_{۲}(X) = -\frac{۲ + \alpha^{۲}}{C(\alpha, \lambda)} f'(X; \alpha)\phi(\lambda x) \qquad (\text{آ.۵})$$

لذا $f'(X; \alpha, \lambda) = ۰$ بنابراین

$$F_{۱}(X) = F_{۲}(X) \qquad (\text{آ.۶})$$

از آنجایی که تعریف (۲.۲.۲) همه جا بیرون از بازه‌ی $(-۴, ۴)$ است، منحنی‌های $c_{۱} : y = F_{۱}(x)$ و $c_{۲} : y = F_{۲}(x)$ را برای $x \in (-۴, ۴)$ به ازای $\alpha = ۱/۸۵$ و $\lambda = ۰/۸$ و $\alpha = -۰/۹$ و $\lambda = ۱$ رسم می‌کنیم.



شکل آ.۱: نمودار $C_{۱}$ و $C_{۲}$ برای α و λ های مختلف .

بنابراین در شکل (۴.۲) می‌توان دید که این دو منحنی حداقل یک و حداکثر سه نقطه مشترک دارند و مقادیر x از این نقاط، ریشه‌های رابطه (آ.۶) هستند.
از آنجایی که $\lim_{x\to\pm\infty} f(x; \alpha, \lambda) = ۰$ ، آنگاه اگر رابطه (آ.۶) یک پاسخ داشته باشد، آن باید مد رابطه (آ.۱) باشد و اگر رابطه‌ی (آ.۶) سه پاسخ داشته باشد، آنگاه رابطه (آ.۱) باید دو مد داشته باشد. پس بنابراین چگالی $GASN$ حداقل یک و حداکثر دو مد دارد. □

مراجع

[۱] بهبودیان. ج، (۱۳۸۱). ''روش‌های ناپارامتری: (رشته آمار)''، چاپ ششم، انتشارات دانشگاه پیام نور، تهران.

[۲] ترابی. ا، (۱۳۸۱). ''شبیه‌سازی''، چاپ اول، انتشارات یزد، یزد.

[۳] جعفری. ح، (۱۳۹۵)، ''بررسی چند توزیع آلفا-چوله نرمال و تعمیم آن‌ها: نظریه و کاربرد''، چاپ اول، انتشارات دانشگاه یزد، یزد.

[4] Akaike H. (1974), 'A new look at the statistical model identification **IEEE Transctions on Automatic Contral** , 19. pp. 716-723.

[5] Arellano−Valle R. B. Gomez H. W. and Quintana, F. A. (2004), A new class of skew-normal distributions. **Communications in Statistics, Theory and Methods** 33(7): 1465-1480.

[6] Amold B. C. and Beaver R. J. (2002), Skewed multivariate models related to hidden truncation and /or selective reporting (with discussion). **Test** 11.1 (2002): 7-54.

[7] Azzalini A. (1985), A class of distributions which includes the normal ones **Scandinavian journal of statistics**. pp. 171-178.

[8] Azzalini A. and Capitanio A. (2003), Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew distribution. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)**, 65(2). pp. 367-389.

[9] Azzalini A. and Dalla Valle A. (1996), The multivariate skew-normal distribution , **Biometrika** 83. pp. 715-726.

[10] Azzalini A. (2013), "**The Skew-Normal and Related Families**". Cambridge: Cambridge University Press.

[11] Behboodian J. (1970), On the modes of a Mixture of two normal distribution. **Technomet-rics** 12(1): 131-139.

[12] Chiogna M. (2005), A note on the asymptotic istribution of the maximun likelihood estimator for the scalar skew normal distribution **Statistical Methods and Applications**, 14. pp. 331-341.

[13] Cook and Weisberg (1994), " **An Introduction to Regression Graphics.**" John Wilry and Sone, New York.

[14] DiCiccio T. J. and Monti A. C. (2004), Inferencial aspect of the skew exponcial power distribution. **Journal of the American Statistical Association**, 99(466). pp. 439-450.

[15] Elal-Olivero D. (2010), Alpha-skew-normal distribution. **Proyecciones Journal of Mathematics**, 29(3). pp. 224-240.

[16] Rotnitzky A. Cox D. R. Bottai M. and Robins J. (2000), Likelihood based inference with singular information matrix **Bernoulli**, 6 . pp. 243-284.

[17] Gupta R. C. Gupta R. D. (2004), Generalized skew-normal model. **Test** 13(2):501-524.

[18] Handam A. H. (2012), A note on generalized alpha-skew-normal distribution. **International Journal of Pure and Applied Mathematics** 74(4):491-496.

[19] Harandi S. S. Alamatsaz, M. H. (2013), Alpha skew Laplace distribution. **Statistics and Probability Letters** 83(3):774-782.

[20] Hasanalipour P. Sharafi M. (2010), A New generalized Balakrishan skew-normal distribution. **Statistics Papers** 53:219-228.

[21] Henze N. (1986), A probabilistic representation of skew-normal distribution. **Scandinavian Journal of Statistics** 13:271-275.

[22] Kim H. J. (2005), On a class of two-piece skew-normal distribution. **Statistics** 39(6):537-553.

[23] Mudholkar G.S and Hutson A.D. (2000), The epsilon skew normal distribution for analyzing near-normal data. **Journal of Statistical Planning and Inference** , 83(2), pp. 291-309.

[24] Ma Y. Genton M. G. (2004), Flexible class of skew- symmetric distributions. **Scandinavian Journal of Statistics** 31: 459-468.

[25] Pewsey A. (2000), Problems of inference for Azzalini's skew-normal distribution. **Journal of Applied Statistics**, Vol. 27, N° 7, pp. 859-870.

[26] Salinas H. S. Arellano-Valle, R. B. and Gomez, H. W. (2000), The extended skew-exponencial power distribution and its derivations. **Communications in Statistics: Theory and Methods**,36(9), pp. 1673-1689.

[27] Sharafi M. Sajjadinia Z. and Behboodian J. (2016), A new generalization of Alpha-skew-Normal Distribution. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, 46:12 , pp. 6098-6111.

[28] Sharafi M. Behboodian J. (2008),The balakrishnan skew-Normal density. **Statistical Papers** 47:1184-1206.

[29] Salinas H. S. Arellano Valle R.B. and Gomez H.W. (2007), The extended skew exponencial power distribution and its derivations. **Communications in Statistics Theory and Methods**, 36(9). pp. 1673-1689.

[30] Wang J. Boyer J. and Genton M. (2004), A skew-symmetric representation of multivariat distribution. **Statistical Sinica** 14(2004) . pp 1259-1270.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آکاییک	Akaike
آلفا_چوله نرمال	Alpha-Skew Normal
احتمال	Probaility
برآورد ماکزیمم درست نمایی	Maximum Likelihood Estimation
پارامتر شکل	Shap parameter
تابع چگالی احتمال	Probaility Density Function
تصادفی	Random
تعمیم	Generalization
توزیع	Distribution
توزیع نرمال	Normal Distribution
چگالی	Density
چولگی	Skewness
چوله نرمال	Skew Normal
دومدی	Bimodal
کشیدگی	Kurtosis
گشتاور	Moment
مؤلفه_متقارن	Symmetric-componcnt
متقارن	Symmetric
مستقل	Independent
مؤلفه	Component
نیم نرمال	Half Normal

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

آکاییک	Akaike
آلفا_ چوله نرمال	Alpha-Skew Normal
دومدی	Bimodal
مؤلفه	Component
چگالی	Density
توزیع	Distribution
تعمیم	Generalization
نیم نرمال	Half Normal
مستقل	Independent
کشیدگی	Kurtosis
برآورد ماکزیمم درست نمایی	Maximum Likelihood Estimation
گشتاور	Moment
توزیع نرمال	Normal Distribution
احتمال	Probaility
تابع چگالی احتمال	Probaility Density Function
تصادفی	Random
چولگی	Skewness
چوله نرمال	Skew Normal
پارامتر شکل	Shap parameter
مؤلفه_ متقارن	Symmetric-componcnt
متقارن	Symmetric

Aabstract

In this thesis, we have studied a new generalization of Alpha-Skew Normal distribution, which is denoted by $GASN(\alpha, \lambda)$. in the chapter one, we have introduced the conceptes required in this thesis and then we illustrated normal and skew normal distributions.

In the chapter two, we have introuced Alpha-Skew Normal distribution and som theorem about it.

In the chapter tree, $GASN(\alpha, \lambda)$ distribution have been introduced and we have studied its properties, moments and maximun likelihood estimation of parameters. finally in chapter four by using R statistical software some features of previous theoretical problems will be explored. we show that our new distribution is the best fitted distribution for the used data among Normal, Skew Normal, Alpha -Skew Normal and Skew Bimodal Normal distributions.

keywords: Skewness and kurtosis, Skew Normal distribution, Alpha-Skew Normal distribution, Generalization of Alpha-Skew Normal distribution, Bimodality, Moment generating function, Maximum likelihood estimation.

Statistics and applications, Mathematical Statistics Tendency

MSc Thesis in Mathematical Statistics

A new generalization of Alpha-Skew Normal Distribution and its Applications

By: Roghayeh Heidarian Yusof

Supervisor:

Dr. Ahmad Nezakati Rezazadeh

June 2019