بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضی مالی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

جواب‌های تحلیلی قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هال- وایت کسری ترکیبی به روش تقارن‌های لی

نگارنده: یاسمن اژدری

استادان راهنما

دکتر الهام دسترنج
دکتر عبدالمجید عبد الباقی

استاد مشاور

دکتر سید رضا حجازی

تیر ۱۳۹۸

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم یاسمن اژدری با شماره دانشجویی ۹۶۰۲۲۹۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش مالی تحت عنوان جواب‌های تحلیلی قیمت گذاری اختیار معامله تحت مدل هال-وایت کسری ترکیبی به روش تقارن های لی که در تاریخ ۱۳۹۸/۴/۱۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: عالی خوب) ☑ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطاآبادی	استادیار	
۳- استاد مشاور	دکتر رضا حجازی	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	سمیه مغاری	استادیار	مغاری
۵- استاد ممتحن اول	دکتر علیرضا ناظمی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر محمد میرباقری جم	استادیار	میرباقری جم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به اولین معلم زندگیم پدرم که عادلانه به من تا چگونه در عرصه زندگی ایستادگی نماییم.

و به مادرم دریای بی‌کران عشق و محبت که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر.

خدا را سپاس گزارم که هنوز راه‌هایی برای پیمودن وپله‌هایی برای صعود کردن برایم باقی است...

خدا را سپاس‌گزارم که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم.
از زحمات استاد عالی‌قدر سرکار خانم دکتر الهام دسترنج کمال تشکر را دارم.
لازم است مراتب سپاس و قدردانی را از استاد گرامی جناب آقای دکتر عبدالمجید عبدالباقی بجا آورم.

یاسمن اژدری
تیر ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **یاسمن اژدری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **جوابهای تحلیلی قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هال_وایت کسری ترکیبی به روش تقارن‌های لی** ، تحت راهنمایی **الهام دسترنج** و **عبدالمجید عبد الباقی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

یاسمن اژدری
تیر ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

از آن‌جایی که در بین مدل‌های تلاطم تصادفی،مدل هال_وایت اولین و مهمترین تلاطم تصادفی است. در این پایان نامه به قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هال_وایت کسری ترکیبی پرداخته شده است. برای این منظور ابتدا قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک _شولز انجام گرفته است و پس از آن مدل هال_وایت، مدل هال_وایت کسری و سپس مدل هال_وایت کسری ترکیبی معرفی شده‌اند. در ادامه قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هال_وایت کسری ترکیبی صورت گرفته است. سپس جواب‌های تحلیلی برای قیمت‌گذاری به روش تقارن لی بدست آمده است.

کلمات کلیدی: اختیار معامله توان، مدل هال_وایت، مدل هال_وایت کسری، مدل هال_وایت کسری ترکیبی، تلاطم تصادفی، تبدیل فوریه سریع

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

پیشگفتار

با اعطای جایزه‌ی نوبل اقتصاد در سال ۱۹۹۰ میلادی به سه ریاضیدان، چشم‌انداز نوینی در مقابل چشمان پژوهشگران گشوده شد و عملا شاخه جدید از علوم متولد شد: نظریه‌ی مالی. [1] این نظریه تلاش می‌کند سازوکار حاکم بر بازار مالی و چگونگی کارآمدتر کردن آن را بررسی و مطالعه کند. این رشته‌ی نو ظهور اصولی را که بر بازارهای مالی حکم فرماست توضیح می‌دهد و آن‌ها را روزآمد می‌کند و در این راستا بیش از هر چیز از ریاضیات بهره می‌گیرد. تعامل این دو رشته (ریاضیات و نظریه‌ی مالی) تا بدان جا پیش رفته است که مسائل مالی اکنون در زمره‌ی پژوهش‌های راهبردی در ریاضیات است. ریاضیات مالی در مرز مشترک دانش‌هایی نظیر ریاضیات، آمار، اقتصاد، علوم رایانه و حتی فیزیک با سرعتی فزاینده در حال پیشروی است. این رشته رابطه‌ی نزدیکی با رشته‌ی اقتصاد مالی دارد. در اقتصاد مالی بیشتر مباحث نظری مطرح است در حالی که در این رشته به مدل‌های ریاضی و عددی در تجربه‌های علمی توجه می‌شود. مثلا در حالی که یک اقتصاددان مالی دلایل زیر ساختی این موضوع را که چرا قیمت سهام شرکتی مقداری مشخص است بررسی می‌کند، ریاضیدان مالی قیمت سهام مذکور را همان‌طور که هست می‌پذیرد و سپس تلاش می‌کند به کمک محاسبات فرآیندهای تصادفی ارزش متعارفی از موجودی‌های مشتقه به‌دست آورد.

در حقیقت ریاضیات مالی شاخه‌ای از ریاضیات است که برای جریان‌های پول و سرمایه در بازارهای مالی، مدل‌های ریاضی طراحی و مطالعه می‌نماید. به عبارت دیگر با کمک ابزارهای

[1] The theory of finance

آنالیز تصادفی به توصیف و مدل‌سازی رفتارهای مختلف بازارهای مالی می‌پردازد. بازارهای مالی محل خرید و فروش دارایی‌ها هستند و علاوه بر خرید و فروش دارایی‌های پایه نظیر سهام و اوراق قرضه، قراردادهایی تحت عنوان مشتقات مالی نیز مورد توجه قرار می‌گیرند که یکی از انواع مشتقات مالی، قرارداد اختیار معامله است. استفاده از اختیار معامله در بازارهای سرمایه به عنوان یکی از جدیدترین و مهمترین مشتقات مالی، نفش موثری در کنترل ریسک و افزایش بازده و همچنین پیدایش جذابیت برای سرمایه‌گذاران داشته است. امروزه در بیشتر کشورهای دنیا برگ اختیار نوشته شده روی سهم، از خود آن سهم بیشتر دادوستد می‌شود.
اختیار معامله قراردادی است بین خریدار و فروشنده، به نحوی که خریدار از فروشنده اختیار معامله، حق خرید یا فروش یک دارایی را در یک قیمت معین خریداری می‌کند. در قرارداد اختیار معامله هر طرف امتیازی را به طرف مقابل اعطا می‌کند، خریدار به فروشنده مبلغی تحت عنوان حق شرط پرداخت می‌کند که د واقع همان قیمت اختیار معامله می‌باشد و فروشنده نیز حق خرید یا فروش دارایی مذکور را در یک قیمت معین به خریدار اعطا می‌نماید. به عبارت دیگر برای عادلانه بودن این قرارداد باید خریدار در زمان انعقاد قرارداد، مبلغی را به عنوان قیمت اختیار، به فروشنده اختیار پرداخت نماید. از این جهت است که دادوستد اختیار معاملات، موضوع قیمت‌گذاری اختیارات تحت مدل‌های مختلف حائز اهمیت می‌باشد که در این پایان نامه به قیمت‌گذاری یکی از اختیار معاملات، تحت مدل هال–وایت می‌پردازیم.
برای این منظور در فصل دوم برخی مفاهیم فرآیند تصادفی و مفاهیم مقدماتی ریاضیات مالی برای درک بهتر فصل‌های آتی بیان می‌کنیم.
در فصل سوم مدل بلک–شولز را معرفی می‌کنیم و سپس به قیمت‌گذاری اختیار معامله خرید اروپایی این مدل می‌پردازیم.
در فصل چهارم مدل هال–وایت و مدل هال–وایت کسری را معرفی می‌کنیم.
در فصل پنجم بعد از معرفی مدل هال–وایت کسری ترکیبی، فرمول قیمت‌گذاری برای اوراق قرضه با کوپن صفر و فرمول قیمت‌گذاری اختیار اروپایی را معرفی می‌کنیم. و به روش تقارن لی جوابی برای آن بدست می‌آوریم.

فصل ۲

مفاهیم و مقدمات

۱.۲ مقدمه

در این فصل به پاره‌ای از تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در این رساله می‌پردازیم. مطالب ارائه شده در این فصل بر گرفته از مراجع [۲]،[۱۰]،[۱۲]،[۲۱]،[۲۳]،[۲۷]،[۳۱] و[۳۴] هستند.

۲.۲ مفاهیم نظریه اندازه احتمال

تعریف ۱.۲.۲. اگر Ω مجموعه‌ای ناتهی و F دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد، F را یک **نیم‌حلقه** گوییم هرگاه

۱. $\emptyset \in F$ ،

۲. اگر دنباله‌ای متناهی از مجموعه‌ها مانند $A_1, A_2, \ldots, A_n$ متعلق به F باشند، آن‌گاه

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in F.$$

۳. اگر A_1, A_2 دو مجموعه متعلق به F باشد آن‌گاه دنباله متناهی $B_1, B_2, \ldots, B_n$ از اعضای F به طوری که

$$A_1 - A_2 = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

که $B_i \cap B_j = \emptyset$ ، $i \neq j$ و $i = ۱,۲,\ldots,n$.

تعریف ۲.۲.۲. اگر Ω مجموعه‌ای ناتهی و F دسته‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های Ω باشد، F را یک σ ـ **میدان** گوییم هرگاه

۱. $\emptyset \in F$ ،

۲. اگر $A \in F$ آن‌گاه $A^c \in F$ ،

۳. اگر دنباله‌ای متناهی از مجموعه‌ها مانند $A_۱, A_۲, \ldots$ متعلق به F باشند، آن‌گاه

$$\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i \in F.$$

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنید $\Omega = R$ (یا R^n) و F دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد، σ− میدان تولید شده توسط F را σ ـ **میدان بورل** گوییم و با B نشان می‌دهیم. دسته‌ی تمام بازه‌ها به صورت $[a,b)$ یا $[a,b]$ یا (a,b) که در آن a و b اعداد گویا هستند ویا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آن‌ها اعداد گویا باشند همگی مولد بورل هستند.

تعریف ۴.۲.۲. هر دسته‌ی صعودی از σ− میدان‌ها را یک **فیلتر** گویند و با نماد $\{F_t\}_{t\in I}$ نمایش می‌دهند که در آن I مجموعه‌ی اندیس‌گذار است که می‌تواند شمارش‌پذیر یا شمارش‌ناپذیر باشد.

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنید F یک نیم‌حلقه از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی Ω باشد، تابع μ ($\mu : F \to [۰, +\infty]$) را یک **اندازه** گوییم هرگاه

۱. برای هر مجموعه $A \in F$ داشته باشیم $۰ \leq \mu(A) \leq \infty$ ،

۲. اگر $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از اعضای دو به دو مجزا از هم F باشند به طوری که

$$\bigcup_{n\geq ۱} A_n \in F$$

باشد آنگاه داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{n\geq ۱} A_n) = \sum_{n\geq ۱} \mu(A_n).$$

خاصیت دوم را σ− جمع‌پذیری برای μ گوییم.

تعریف ۶.۲.۲. اندازه $\mu : F \to [۰, +\infty]$ را σ− **متناهی** گوییم هرگاه دنباله‌ی $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ از اعضای دو به دو مجزا از هم F وجود داشته باشد به طوری که

$$X = \bigcup_{n\geq ۱} A_n$$

و برای هر $n \geq ۱$ ، داشته باشیم $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۷.۲.۲. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و F ، $\sigma-$ میدانی از زیر مجموعه‌های آن باشد، زوج مرتب (Ω, F) را یک **فضای اندازه‌پذیر** گویند.
اگر P اندازه‌ای روی F باشد آنگاه سه‌تایی (Ω, F, P) را **فضای اندازه** می‌نامیم.

تعریف ۸.۲.۲. تابع حقیقی مقدار f ، $f:(\Omega, F) \to (Y, B)$ را **اندازه‌پذیر** گوییم هرگاه برای هر b از B (بورل) داشته باشیم

$$f^{-1}(b) = \{w \in \Omega : f(w) \in b\} \in F.$$

تعریف ۹.۲.۲. اگر (X, A) یک فضای اندازه‌پذیر و μ_1 و μ_2 دو اندازه روی این فضا باشند گوییم این دو **اندازه مطلقا پیوسته** هستند (با نماد $\mu_1 \ll \mu_2$ نمایش داده می‌شود) اگر وتنها اگر برای هر a از A داشته باشیم

$$\mu_2(a) = 0 \Rightarrow \mu_1(a) = 0.$$

تعریف ۱۰.۲.۲. فرض کنید F یک $\sigma-$ میدان از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω باشد، تابع P $(P : F \to [0, 1])$ را یک **اندازه احتمال** می‌نامیم هرگاه

۱. $P(\Omega) = 1$ ،

۲. اگر $\{A_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در F باشند آن‌گاه داشته باشیم

$$P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} P(A_n).$$

سه‌تایی (Ω, F, P) را **فضای اندازه** می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۲.۲. هر تابع اندازه‌پذیر حقیقی از فضای احتمال (Ω, F, P) به فضای اندازه‌پذیر (R, B) که B مجموعه‌ی بورل، را یک **متغیر تصادفی** گوییم. با این خاصیت که برای هر زیرمجموعه b از B داشته باشیم

$$X^{-1}(b) = \{w \in \Omega : X(w) \in b\} \in F.$$

معمولا برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ لاتین مثل $X, Y, Z, \ldots$ استفاده می‌کنیم. برای هر متغیر تصادفی X می‌توان تابع $F_X : R \to [0, 1]$ به صورت

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\{w \in \Omega | X(w) \leq x\},$$

تعریف کرد که **توزیع متغیر تصادفی** نامیده می‌شود. برای توزیع F_X خواص زیر برقرار است

۱. برای $\forall a, b \in R$

$$F_X(b) - F_X(a) = P(a < X < b),$$

۲. تابع F_X غیرنزولی است و در هر نقطه از سمت راست پیوسته است،

.۳

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$$

و

$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1 .$$

قضیه ۱.۲.۲. (قضیه رادون-نیکودیم[1]) فرض کنید (X, A) یک فضای اندازه‌پذیر و μ و ν دو اندازه $\sigma-$ متناهی روی A باشند. اگر $\nu \ll \mu$ آن‌گاه تابع اندازه‌پذیر نامنفی f وجود دارد به طوری که برای هر a از A داشته باشیم

$$\mu(a) = \int_a f \mathrm{d}\nu.$$

ملاحظه ۱.۲.۲. از این پس توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی،توپولوژی استاندارد و $\sigma-$ میدان مفروض روی آن‌ها، $\sigma-$ میدان بورل است.

تعریف ۱۲.۲.۲. اگر A مجموعه‌ای دلخواه از $\sigma-$ میدان A باشد، تابع مشخصه مجموعه‌ی A را با χ_A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

۳.۲ مفاهیم فرآیند تصادفی

تعریف ۱.۳.۲. متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر X روی فضای احتمال (Ω, F, P) را در نظر می‌گیریم. **امید ریاضی** X را به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(X) = \int_\Omega X(w)\mathrm{d}P(w).$$

ملاحظه ۱.۳.۲. اگر $E|X| = \infty$ ، آن‌گاه امید ریاضی X وجود ندارد.

تعریف ۲.۳.۲. واریانس متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

تعریف ۳.۳.۲. برای متغیر تصادفی X **تابع مولد گشتاور**[2] به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad t \in R.$$

[1] Rodon-Nikodym theorem

[2] Moment gcnerating function

ملاحظه ۲.۳.۲. تابع مولد گشتاور همواره وجود ندارد چون نمی‌توان گفت که انتگرال مطلقا همگراست.

تعریف ۴.۳.۲. برای متغیر تصادفی X **تابع مشخصه**[۳] به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\varphi_X(iw) = E[e^{iwX}].$$

تعریف ۵.۳.۲. کواریانس دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

تعریف ۶.۳.۲. دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل از هم گوییم هرگاه

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

تعریف ۷.۳.۲. دنباله متغیرهای تصادفی $X_n, \ldots, X_۲, X_۱$ را مستقل گوییم هرگاه

$$F_{X_۱,\ldots,X_n}(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = F_{X_۱}(x_۱)\ldots F_{X_n}(x_n).$$

ملاحظه ۳.۳.۲. اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند آن‌گاه کواریانس دو متغیر برابر صفر خواهد شد.

تعریف ۸.۳.۲. ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho = \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

تعریف ۹.۳.۲. متغیر تصادفی X دارای **توزیع نرمال** با میانگین μ و واریانس σ است اگر وتنها اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$\forall x \in R, \quad \varphi(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} exp\Big(-\frac{۱}{۲}(\frac{x-\mu}{\sigma})^۲\Big).$$

توزیع نرمال با $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ را **توزیع نرمال استاندارد** می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۳.۲. متغیر تصادفی X **توزیع لگ‌ـ‌نرمال**[۴] دارد، هرگاه $Y = ln(X)$ توزیع نرمال داشته باشد، بدیهی است که توزیع لگ نرمال فقط مقادیر حقیقی مثبت را می‌گیرند.

تعریف ۱۱.۳.۲. (امید شرطی) فرض کنید (Ω, F, P) یک فضای احتمال و D یک زیر σـ میدان از F و Z متغیر تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. امید Z به شرط D یک متغیر تصادفی Dـ اندازه‌پذیر روی (Ω, F) است که آن را با $E(Z|D)$ نشان می‌دهیم و داریم

$$\forall d \in D, \quad \int_d E(Z|D)dP = \int_d ZdP.$$

[3] Characteristic function
[4] Log-Normal distribution

ملاحظه ۴.۳.۲. خواص امید شرطی

۱. اگر $X \geq 0$ آن‌گاه $E(X|D) \geq 0$ $a.s.$[5]

۲.

$$E(X+Y|D) = E(X|D) + E(Y|D), \quad a.s.,$$

۳. برای هر $a \in R$

$$E(aX|D) = aE(X|D), \quad a.s.,$$

۴. اگر $D = \{\Omega, \emptyset\}$ آن‌گاه

$$E(X|D) = E(X), \quad a.s.,$$

۵. اگر D_1 یک زیر $\sigma-$ میدان از D_2 باشد، آن‌گاه

$$E(E(X|D_2)|D_1) = E(X|D_1), \quad a.s.,$$

۶.

$$E(E(X|D)) = E(X), \quad a.s..$$

تعریف ۱۲.۳.۲. هر خانواده (شمارا یا ناشمارا) از متغیرهای تصادفی، یک **فرآیند تصادفی** نامیده می‌شود.

ملاحظه ۵.۳.۲. اگر $\{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند تصادفی باشد و قرار می‌دهیم

$$F_t = \sigma(X_s, \quad 0 \leq s \leq t)$$

آن‌گاه $F = \{F_t, t \geq 0\}$ یک فیلتر است وآن را فیلتر طبیعی می‌گوییم.

تعریف ۱۳.۳.۲. فرض کنید F یک فیلتر باشد. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ را نسبت به فیلتر F **سازگار** می‌گوییم هرگاه برای هر $t \geq 0$ ، $X_t \in F_t$. به عبارتی متغیر تصادفی X_t ، F_t- اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱۴.۳.۲. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\in Z^+}$ را نسبت به فیلتر $F = \{F_t\}_{t\in Z^+}$ **مارتینگل**[6] گوییم هرگاه

۱. $\{X_n\}_{n\in Z^+}$ نسبت به فیلتر F سازگار باشد،

۲. برای هر n ، $E(|X_n|) < \infty$ یعنی برای هر n ، X_n انتگرال‌پذیر باشد،

[5] Almost surely
[6] Martingale

۳. برای هر $n \geq ۱$ داشته باشیم

$$E(X_{n+۱}|F_n) = X_n \quad a.s..$$

تعریف ۱۵.۳.۲. دو اندازه احتمال Q و P روی فضای (Ω, F) **معادل** گوییم هرگاه برای هر $A \in F$ داشته باشیم

$$P(A) = ۱ \Longleftrightarrow Q(A) = ۱.$$

تعریف ۱۶.۳.۲. فرض کنید (Ω, F, P) یک فضای احتمال باشد. $\tau : \Omega \to R$ یک متغیر تصادفی باشد که مقادیرش متعلق به مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \ldots\} \cup \{\infty\}$ است. همچنین فرض کنید $\{F_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک فیلتر در این فضای احتمال در نظر گرفته شود گوییم τ نسبت به فیلتر $\{F_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک زمان توقف است هرگاه به ازای هر $n \in N$،

$$\{\tau = n\} \in F_n$$

$$\{\tau = n\} = \{w \in \Omega | \tau(w) = n\}.$$

تعریف ۱۷.۳.۲. گوئیم فرآیند تصادفی $\{X_t : ۰ \leq t \leq T\}$ یک مارتینگل موضعی است اگر دنباله‌ای از زمان‌های توقف $T_n \uparrow T$ موجود باشد که $\{X_{t \wedge T_n}, t \geq ۰\}$ یک مارتینگل باشد.

تعریف ۱۸.۳.۲. فرآیند منظم از راست پیوسته با حد چپ، **نیم‌مارتینگل**[۷] است اگر بتوان آن را با جمع دو فرآیند نمایش داد. یک مارتینگل موضعی $M(t)$ و یک فرآیند از تغییرات متناهی $A(t)$. با $M(۰) = A(۰) = ۰$، و

$$S(t) = S(۰) + M(t) + A(t).$$

۴.۲ حرکت براونی

حرکت براونی از اساسی‌ترین فرآیندهای تصادفی و سنگ بنای نظریه‌ی احتمال مدرن، آنالیز تصادفی و معادلات دیفرانسیل است. در سال ۱۸۲۷ رابرت براون (گیاه‌شناس) هنگامی که توسط میکروسکوپ به گرده‌های گیاه معلق در آب نگاه می‌کرد، متوجه حرکت ذرات در آب شد ولی نتوانست توجیهی برای آن پیدا کند. اتم و مولکول بسیار قبل از آن شناخته شده بودند، اما این آلبرت اینشتین بود که چند دهه بعد در مقاله‌ای که در سال ۱۹۰۵ منتشر کرد توضیح داد که حرکتی که براون مشاهده کرده در نتیجه برخورد مولکول‌های آب با گرده بوده است. جهت نیروی حاصل از برخورد مولکول‌ها مرتبا تغییر می‌کند و ذره در زمان‌های مختلف ممکن است از یک سمت بیشتر مورد اصابت قرار گیرد تا از سمت دیگر که هر دو موجب

[7] **Semi martingale**

حرکت اتفاقی ذرات می‌شود. این پدیده به افتخار رابرت براون حرکت براونی نامگذاری شده است. حرکت براونی یک فرآیند تصادفی است که مسیرهای پیوسته دارد و مشتق آن در هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.

تعریف ۱.۴.۲. فرآیند تصادفی $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ را **حرکت براونی استاندارد**[8] گوییم هرگاه

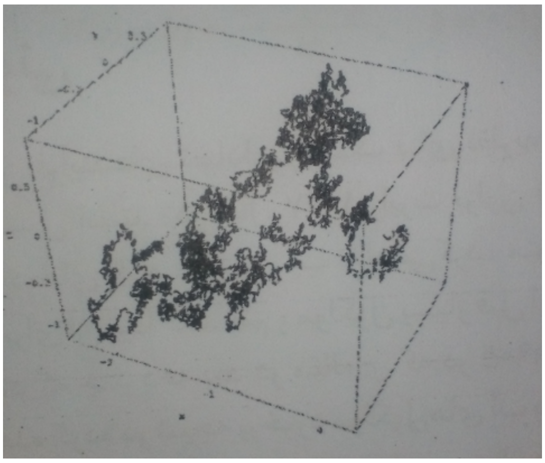
۱. $W(0)=0$ ،

۲. برای $0\leq t\leq T$ ، $W(s)-W(t)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $s-t$ باشد،

۳. متغیرهای تصادفی $W(t_n)-W(t_{n-1}),\dots,W(t_1)-W(t_2)$ برای $0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_n$، مستقل و هم‌توزیع باشند،

حرکت براونی استاندارد را **فرآیند وینر** [9] نیز می‌گوییم.

شکل ۱.۲: نمودار حاصل از حرکت براونی استاندارد در حالت سه بعدی



[8]Standard Brownian motion
[9]Wiener process

ملاحظه ۱.۴.۲. فیلتر استاندارد فرآیند براونی،

$$F_t = \sigma\{B_s, \quad s \leq t\}$$

می‌باشد.

قضیه ۱.۴.۲. اگر $\{B_t\}_{t\geq ۰}$ یک حرکت براونی و F_t فیلتر استاندارد فرآیند براونی باشد. آن‌گاه داریم

۱. برای هر $t \leq s$ ، $E(B_t.B_s) = t$

۲. $\{B_t\}_{t\geq ۰}$ یک مارتینگل است.

۳. $\{B_t^۲ - t\}$ مارتینگل است.

برهان. ۱.

$$\begin{aligned} E(B_tB_s) &= E(B_t(B_s - B_t + B_t)) \\ &= E(B_t(B_s - B_t)) + E(B_t^۲) \\ &= E(B_t)E(B_s - B_t) + E(B_t^۲) \\ &= ۰ + t = t. \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned} E(B_s|F_t) &= E(B_s - B_t + B_t|F_t) \\ &= E(B_s - B_t|F_t) + E(B_t|F_t) \\ &= ۰ + B_t = B_t. \end{aligned}$$

۳.

$$\begin{aligned} E(B_s^۲ - s|F_t) &= E(B_s^۲|F_t) - s = E((B_s - B_t + B_t)^۲|F_t) - s \\ &= E((B_s - B_t)^۲ + ۲(B_s - B_t)B_t + B_t^۲|F_t) - s \\ &= E((B_s - B_t)^۲|F_t) + E(۲(B_s - B_t)B_t|F_t) + E(B_t^۲|F_t) - s \\ &= E((B_s - B_t)^۲) + ۲B_tE(B_s - B_t|F_t) + B_t^۲ - s \\ &= s - t + ۲B_tE(B_s - B_t) + B_t^۲ - s = B_t^۲ - t. \end{aligned}$$

□

تعریف ۲.۴.۲. فرآیند تصادفی $\{W_t^H\}$ با پارامتر $H \in (۰,۱)$ را **حرکت براونی کسری**[۱۰] گوییم هرگاه

[10] Fractional Brownian motion

۱. مسیرهای W^H پیوسته هستند و $W^H_\circ = \circ$ ،

۲. $E(W^H_t) = \circ$ و $Var(W^H_t) = t^{\text{۲}}H$ ،

۳. نمو از W^H ثابت هستند،

۴. فرآیند W^H عمل تابع کواریانس را پذیرفته است

$$p_{t,s} := E[W^H_t W^H_s] = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(|t|^{\text{۲}H} + |s|^{\text{۲}H} - |t-s|^{\text{۲}H})$$

۵.۲ حسابان ایتو

۱.۵.۲ انتگرال ایتو

فرض کنید بخواهیم معادله حرکت ذره‌ای که در سطح آب جوی حرکت می‌کند را نسبت به زمان به دست آوریم. از آن‌جا که مکان ذره در لحظه t ، $t \in [\circ, T]$ و $(T > \circ)$ به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول‌های آب به آن وارد می‌کند مشخص نیست (تصادفی است)، معادله آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)(\text{نوفه}) \qquad (\text{۱.۲})$$

که در آن σ و b توابع حقیقی داده شده روی $(\circ, \infty) \times \Omega$ هستند و نوفه، با توجه به شواهد به دست آمده توسط دانشمندان، فرآیند تصادفی‌ای مانند Z_t است که در سه شرط زیر صدق می‌کند.

- برای هر $t_\text{۱}, t_\text{۲} \in [\circ, T]$ که $t_\text{۱} \neq t_\text{۲}$ ، $Z_{t_\text{۱}}$ و $Z_{t_\text{۲}}$ مستقل از هم باشند.
- توزیع توام متغیرهای تصادفی $Z_{t_\text{۱}+t}, \dots, Z_{t_n+t}$ ، $t_\text{۱} \leq t_\text{۲} \leq \dots \leq t_n \leq T$ به t بستگی نداشته باشد.
- برای هر $t \in (\circ, T]$ ، $E(Z_t) = \circ$

فرض کنید $\circ = t_\circ \leq t_\text{۱} \leq \dots \leq t_m = T$ افرازی از فاصله $[\circ, T]$ است. با گسسته‌سازی رابطه ۱.۲ داریم

$$X_{t_{k+\text{۱}}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})\Delta t_k Z_k.$$

تنها فرآیندی با این ویژگی‌ها که دارای مسیرهای پیوسته است فرآیند براونی است. لذا می‌توان نوشت

$$X_t = X_\circ + \sum_{j=\circ}^{k-\text{۱}} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=\circ}^{k-\text{۱}} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j.$$

اگر حد طرف راست عبارت بالا وقتی $\Delta t \to 0$ وجود داشته باشد خواهیم داشت

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,w)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,w)\mathrm{d}B_s.$$

بنابراین به روشنی برای پیدا کردن فرآیند $\{X_t\}$ لازم است به محاسبه انتگرال‌هایی به فرم زیر بپردازیم.

$$\int_s^T f(t,w)\mathrm{d}B_t(w)$$

که $B_t(w)$ فرآیند براونی یک بعدی استاندارد و f تابعی حقیقی روی $[0,\infty)\times\Omega$ است. برای رسیدن به این هدف گام‌های زیر را برمی‌داریم.

فرض کنید $\phi : [0,\infty)\times\Omega \to R$ تابعی ابتدایی [11] باشد یعنی

$$\phi(t,w) = X(w)\chi_{[a,b)}(t), \quad a,b \in [0,\infty)$$

در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t \phi(s,w)\mathrm{d}B_s = \int_a^t X(w)\chi_{[a,b)}\mathrm{d}B_s(w) = X(w)[B_{b\wedge t}(w) - B_{a\wedge t}(w)]$$

که در آن برای هر $x,y \in R$ ، $x\wedge y = \min\{x,y\}$.

فرض کنید f تابعی ساده [12] روی $[0,\infty)\times\Omega$ باشد. یعنی

$$f = \sum_{j=0}^{n} \phi_i,$$

که ϕ_i ها توابع ابتدایی هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t f\mathrm{d}B_s = \sum_{j=0}^{n}\int_a^t \phi_i\mathrm{d}B_s. \qquad (۲.۲)$$

رده‌ی P_2 از توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۲. رده‌ی P_2 از توابع $f(t,w)$ روی مجموعه $[0,\infty)\times\Omega$ ، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است

- تابع $(t,w)\to f(t,w)$ ، $B\times F-$ اندازه‌پذیر است،
- به ازای هر t ، تابع $f(t,0)$ ، F_t- اندازه‌پذیر باشد،
- برای هر $T\geq 0$ ، $E[\int_0^T f^2(s,w)\mathrm{d}s] < \infty$.

لم ۱.۵.۲. (لم ایزومتری ایتو) اگر تابع $\phi(t,w)$ کران‌دار و ابتدایی باشد، آن‌گاه

$$E\Big[\Big(\int_s^T \phi(t,w)\mathrm{d}B_t(w)\Big)^2\Big] = E\Big[\int_s^t \phi^2(t,w)\mathrm{d}t\Big].$$

[11] Elemintary function

[12] Simple function

برهان. به [۲۷] رجوع کنید. □

لم ۲.۵.۲. اگر $f \in P_{۲}$ ، آنگاه دنباله‌ی $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارند به طوری که

$$E\Big[\int_{\circ}^{T} |\phi(s) - f_n(s)|^{۲} \mathrm{d}s\Big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \circ.$$

برهان. به [۲۷] رجوع کنید. □

اکنون می‌توانیم $\int_s^T f(t,w)\mathrm{d}B_t$ را برای هر $f \in P_{۲}$ تعریف کنیم زیرا برای $f \in P_{۲}$، با توجه به لم قبل دنباله‌ای از توابع ابتدایی مانند $\{\phi_n\}$ موجود است که به f میل می‌کند. پس می‌توان تعریف کرد

$$\int_{\circ}^{T} f\mathrm{d}B_t = \lim_{n\to\infty} \int_{\circ}^{T} \phi_n \mathrm{d}B_t.$$

که انتگرال اخیر را **انتگرال ایتو**[۱۳] نامند.

۲.۵.۲ فرمول ایتو

تعریف ۲.۵.۲. فرض کنید $\{B_t\}_{t\geq\circ}$ یک فرآیند براونی استاندارد روی (Ω, F, P) باشد. یک انتگرال تصادفی یک بعدی، یک فرآیند تصادفی X_t روی (Ω, F, P) به صورت زیر است

$$X_t(w) = X_{\circ}(w) + \int_{\circ}^{t} u(s,w)\mathrm{d}s + \int_{\circ}^{t} v(s,w)\mathrm{d}B_s,$$

که در آن $u, v : [\circ, \infty) \times \Omega \to R$. با مشتق‌گیری داریم

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

قضیه ۱.۵.۲. (فرمول ۱ـ بعدی ایتو) اگر

$$dX_t = udt + vdB_t, \quad Y_t = g(t, X_t)$$

آن‌گاه

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{۱}{۲}\frac{\partial^{۲} g}{\partial x^{۲}}(t,X_t)(dX_t)^{۲},$$

که در این‌جا $dt.dt = dt.dB_t = dB_t.dt = \circ$ و $(dB)^{۲} = dt$.

قضیه ۲.۵.۲. (فرم کلی ایتو) فرض کنید $dX_t = udt + vdB_t$ یک انتگرال $n-$ بعدی و $g : [\circ, \infty) \times R^{۲} \to R^{۲}$ یک نگاشت $C^{۲}$ باشد. آن‌گاه $Y(t,w) = g(t, X_t)$ یک انتگرال تصادفی است و داریم

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t,X_t)dX_i + \sum_{i,j} \frac{۱}{۲}\frac{\partial^{۲} g}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)dX_i dX_j,$$

که در این‌جا $dt.dt = dt.dB_i = dB_i.dt = \circ$ و $dB_i.dB_j = \delta_{ij}dt$.

[13] Ito integral

برهان. به [۲۷] رجوع کنید. □

تعریف ۳.۵.۲. فرض کنید $\{W_t\}_{t\geq \circ}$ یک حرکت براونی استاندارد باشد. در این صورت فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq \circ}$ که در معادله دیفرانسیل معمولی زیر صدق می‌کند

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t \qquad (۳.۲)$$

و در آن α و σ مقادیر ثابت‌اند، را **حرکت براونی هندسی**[۱۴] گویند.

قضیه ۳.۵.۲. برای حرکت براونی هندسی $\{X_t\}_{t\geq \circ}$ با فرض $X_\circ = x_\circ$ داریم:

۱. $E(X_t) = x_\circ e^{\alpha t}$ ،

۲. $X_t = x_\circ exp\{(\alpha - \frac{۱}{۲}\sigma^{۲})t + \sigma W_t\}$.

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

۶.۲ قضیه فاینمن_ کاک

تعریف ۱.۶.۲. عملگر دیفرانسیل جزئی $\mathcal{A}$ موسوم به عملگر بی‌نهایت کوچک X ، مربوط به معادله زیر

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

به ازای هر $h(x)$ ، $h \in C^{۲}(\mathbb{R}^n)$ به صورت

$$\mathcal{A}h(t,x) = \mu\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}\frac{\partial^{۲} h}{\partial x^{۲}}$$

این عملگر، عملگر دینکین، عملگر ایتو، یا عملگر پسرو کولموگورف نیز نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۶.۲. (قضیه فاینمن_ کاک)[۱۵] فرض کنید فرآیند تصادفی $\{X_s\}_s$ در معادله دیفرانسیلی زیر صدق کند

$$\begin{cases} dX_s = \mu(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s), \\ X_t = x, \end{cases} \qquad (۴.۲)$$

که در آن μ و σ توابعی معلوم هستند. همچنین معادله دیفرانسیل جزئی زیر

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t) + \mu(t,X_t)\frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t) + \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}(t,X_t)\frac{\partial^{۲} F}{\partial x^{۲}}(t,X_t) = \circ \qquad (۵.۲)$$

[14] Geometric Brownian motion

[15] Feynman-Kac theorem

با شرط نهایی زیر را در نظر بگیرید

$$F(t,X)=\phi(X)$$

که ϕ توابعی معلوم و T یک پارامتر و F تابع مجهول است قضیه فاینمن_کاک بیان می‌کند که جواب معادله دیفرانسیلی ۵.۲ به صورت زیر است

$$F(t,X)=E(\phi(X_T)|X(t)=x). \tag{۶.۲}$$

برهان. فرض می‌کنیم که جوابی چون F برای مسئله ۵.۲ وجود دارد. فرآیند تصادفی X را بر بازه‌ی زمانی $[t,T]$ به عنوان جواب معادله دیفرانسیل تصادفی

$$\begin{aligned} dX_s &= \mu(s,X_s)ds+\sigma(s,X_s)dW_s \\ X_t &= x \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

تعریف می‌کنیم. نکته در این است که مولد بی‌نهایت کوچک این فرآیند عبارت است از

$$\mathcal{A}=\mu(t,x)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}(t,x)\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}$$

که درست همان عملگری است که در معادله دیفرانسیل جزئی ۵.۲ ظاهر شده است. بنابراین مساله مقدار مرزی را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\mathcal{A}F(t,x) &= ۰ \\ F(T,x) &= \Phi(x) \end{aligned} \tag{۸.۲}$$

نوشت. فرمول ایتو را در مورد $F(s,X_s)$ به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} F(T,X_T)=F(t,X_t)&+\int_t^T\Big\{\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s)+\mathcal{A}F(s,X_s)\Big\}ds \\ &+\int_t^T\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)dW_s. \end{aligned} \tag{۹.۲}$$

با امید گرفتن از طرفین رابطه ۹.۲ و با توجه به مقدار اولیه‌ی $X_t=x$ و شرط مرزی $F(T,x)=\Phi(x)$ تابع $F(t,x)$ را به صورت زیر داریم

$$F(t,X_t)=E_{t,x}[\Phi(X_t)].$$

□

۷.۲ قضیه گیر سانوف

قضیه ۱.۷.۲. (قضیه گیر سانوف)[۱۶] فرض کنید $T \leq t \leq ۰$ ، $B(t)$ روی فضای احتمال (Ω,F,P) یک حرکت براونی و $\{F_t\}$ یک فیلتر برای حرکت براونی باشد. همچنین فرض کنید

[16] Girsanov theorem

$\theta(t)$ یک فرآیند سازگار باشد. تعریف می‌کنیم

$$W_t = \int_{\circ}^{t} \theta(u)du + B(t),$$

$$Z(t) = exp\Big\{ - \int_{\circ}^{t} \theta(u)dB(u) - \frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{t} \theta^{۲}(u)du \Big\},$$

اگر اندازه احتمال دیگری را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\forall A \in F, \quad Q(A) = \int_A Z(T)dP.$$

در این صورت W_t تحت اندازه احتمال Q یک فرآیند براونی است.

۸.۲ مفاهیم ریاضی مالی

۱.۸.۲ سبد سهام

تعریف ۱.۸.۲. سبد سهام یا پرتفوی [۱۷] ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آنها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است، بدین ترتیب احتمالا سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را تا حدی جبران کند.
پرتفوی به منظور کاهش ریسک و به صورتی انتخاب می‌شود تا در شرایط عادی احتمال کاهش بازده همه دارایی‌ها (شامل سهام‌های خریداری شده) نزدیک به صفر باشد.

تعریف ۲.۸.۲. پرتفوی $h = (x, y)$ را در نظر بگیرید. فرآیند ارزش پرتفوی h به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_t^h = xB_t + yS_t, \quad t = \circ, ۱$$

که S_t فرآیند قیمت هر سهم (فرآیند تصادفی) در زمان t ، B_t فرآیند قیمت یک ورق قرضه (فرآیند قطعی[۱۸]) در زمان t است.

تعریف ۳.۸.۲. استراتژی پرتفوی را خودتامین[۱۹] گوییم هرگاه برای هر $t = \circ, ۱, \dots, T - ۱$ داشته باشیم

$$x_t(۱ + R) + y_tS_t = x_{t+۱}(۱ + R) + y_{t+۱}S_t.$$

به عبارتی دیگر، با استفاده از ارزش پرتفوی قدیم $(x_t(۱ + R) + y_tS_t)$ که در زمان $t - ۱$ تشکیل شده است، می‌توان پرتفوی جدید به ارزش $(x_{t+۱}(۱ + R) + y_{t+۱}S_t)$ در لحظه t تشکیل داد.

[17] Portfolio
[18] Determinestic
[19] Self financing

در حقیقت در پرتفوی خودتامین هیچ گاه پولی وارد نمی‌شود و پولی از آن برداشت نمی‌شود و تنها تغییر در ارزش پرتفوی می‌باشد.

تعریف ۴.۸.۲. متغیر تصادفی X را یک ادعای مشروط[۲۰] با زمان سررسید T نامیم هرگاه $X \in F_T$. دارنده این ادعا در $t = T$ مقدار تصادفی X را دریافت می‌کند.
فرض کنید S_t فرآیند قیمت دارایی پایه باشد، ادعای مشروط X را یک ادعای مشروط ساده[۲۱] نامیم هرگاه به صورت $X = \phi(S_T)$ باشد که ϕ تابع قرارداد[۲۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۸.۲. اندازه احتمال Q را یک **اندازه مارتینگل** معادل با اندازه P گوییم هرگاه

۱. P و Q معادل باشند،

$$P(A) = ۱ \iff Q(A) = ۱,$$
$$P(A) = ۰ \iff Q(A) = ۰.$$

۲. اگر فرآیند قیمت به صورت $S_t = [S_t^۰, \dots, S_t^N]$ باشد فرآیند قیمت نرمال شده زیر تحت Q مارتینگل است اگر

$$Z_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^۰}.$$

تعریف ۶.۸.۲. ادعای مشروط X را قابل باسازی گوییم اگر سبد مالی خودتامین h وجود داشته باشد به طوری که $V_t^h = X$ با احتمال ۱ برقرار باشد، در این صورت سبد h را **را بازسازی‌کننده یا سبد پوشش‌دهنده** نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۸.۲. **بازار کامل** بازاری است که در آن هر ادعای مشروط، قابل بازسازی به وسیله یک سبد باشد در یک بازار کامل اندازه مارتینگل معادل یکتاست.

۲.۸.۲ اختیار معامله

اختیار معامله[۲۳] قراردادی است بین خریدار و فروشنده، بنحوی که خریدار از فروشنده اختیار معامله، حق خرید یا فروش یک دارایی را در یک قیمت معین ودر یک زمان مشخص خریداری می‌کند. در اینجا نیز همانند تمام قراردادها،هر طرف امتیازی را به طرف مقابل اعطا می‌کند، خریدار و فروشنده مبلغی تحت عنوان حق شرط پرداخت می‌کند که در واقع همان قیمت اختیار معامله می‌باشد. فروشنده نیز حق خرید یا فروش دارایی مذکور را در یک قیمت معین به خریدار اعطا می‌نماید. اختیاری که برای خرید یک دارایی داده می‌شود را اختیار خرید[۲۴] و اختیاری

[20] Contingent claim
[21] Simple contingent claim
[22] Contract function
[23] Option
[24] Call Option

که برای فروش یک دارایی داده می‌شود را اختیار فروش[۲۵] گویند. قیمت تعیین شده‌ای را که خریدار می‌تواند دارایی را خریداری نموده یا بفروشد،قیمت اعمال یا قیمت توافقی[۲۶] نامیده می‌شود و به علاوه اختیار معامله مدت معینی دارد. حق خرید یا فروش دارایی در یک قیمت معین فقط تا تاریخ انقضایی[۲۷] که قبلا مشخص شده است امکان خواهد داشت

تعریف ۸.۸.۲. کوچکترین واحد مالکیت در یک شرکت یا کارخانه را **سهم**[۲۸] می‌نامند. دارنده‌ی هر سهم یا سهامدار، به همان نسبتی که سهام در اختیار دارد در مالکیت شرکت یا بنگاه تولیدی شریک است.

تعریف ۹.۸.۲. **اختیار معامله اروپایی** قراردادی است که به دارنده‌اش این اختیار ونه اجبار را می‌دهد تا قراردادی درست در زمان T بخرد یا بفروشد.

تعریف ۱۰.۸.۲. **اختیار معامله آمریکایی** قراردادی است که به دارنده‌اش این اختیار ونه اجبار را می‌دهد تا قراردادی را در هر زمان تا رسیدن به زمان T به قیمت K بخرد یا بفروشد.

تعریف ۱۱.۸.۲. قراردادی که به دارنده‌اش این اختیار را می‌دهد تا دارایی بنیادین را فقط در زمان T در آینده به قیمت توافقی K بخرد،اختیار خرید اروپایی می‌نامند.

تعریف ۱۲.۸.۲. قراردادی که به دارنده‌اش این اختیار را می‌دهد تا دارایی بنیادین را فقط در زمان T در آینده به قیمت توافقی K بفروشد، اختیار فروش اروپایی نامند.

تعریف ۱۳.۸.۲. قراردادی که به دارنده‌اش این اختیار رامی‌دهد تا دارایی بنیادین را قبل از زمان T یا در زمان T به قیمت توافقی K بخرد، اختیار خرید آمریکایی می‌نامند.

تعریف ۱۴.۸.۲. قراردادی که به دارنده‌اش این اختیار رامی‌دهد تا دارایی بنیادین را قبل از زمان T یا در زمان T به قیمت توافقی K بفروشد، اختیار فروش آمریکایی می‌نامند.

اگر K قیمت توافقی و S_T قیمت دارایی در لحظه T باشد، به طور کلی چهار موقعیت برای یک اختیار معامله اروپایی وجود دارد:

۱. موقعیت خرید در قرارداد اختیار خرید

$$\max\{S_T - K, \circ\} = [S_T - K]^+$$

۲. موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید

$$-\max\{S_T - K, \circ\} = \min\{K - S_T, \circ\}$$

[25] Put Option
[26] Strike price
[27] Expiration price
[28] Stock

۳. موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش

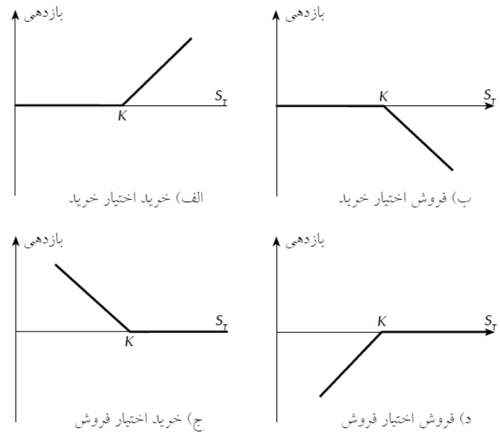
$$\max\{K - S_T, \circ\} = [K - S_T]^+$$

۴. موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش

$$-\max\{K - S_T, \circ\} = \min\{S_T - K, \circ\}$$

نمودارهای شکل ۲.۲ این حالات را نشان می‌دهد.

شکل ۲.۲: نمودار حاصل از خرید یا فروش اختیار معامله اروپایی



تعریف ۱۵.۸.۲. (رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید[29])

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

رابطه فوق را رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید برای اختیار معامله استاندارد گوییم. رابطه فوق نشان می‌دهد که می‌توان قیمت یک اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی و سررسید معین را از قیمت یک اختیار فروش اروپایی با همان قیمت توافقی و همان سررسید به دست آورد و برعکس.

تعریف ۱۶.۸.۲. دارایی که بازدهی آن در آینده نامعلوم باشد را دارایی پر خطر[30] می‌نامند.

تعریف ۱۷.۸.۲. دارایی که دارای بازدهی مشخص در آینده باشد را دارایی بی‌خطر [31] می‌نامند.

تعریف ۱۸.۸.۲. بازدهی‌ای که توسط سپرده‌گذاری حاصل می‌شود را **نرخ بهره**[32] می‌نامند. مثلا اگر شخصی دارای سرمایه‌ی اولیه‌ی W_0 باشد و این سرمایه را در یک حساب سپرده به مدت یک سال سرمایه‌گذاری کند و مقدار $W_1 > W_0$ به دست آورد، نرخ بهره به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r = \frac{W_1 - W_0}{W_0}$$

و اگر بعد از گذشت n سال سرمایه‌اش W_n شده باشد، در این صورت نرخ بهره به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r = \frac{W_n - W_0}{nW_0}.$$

۳.۸.۲ انواع معامله‌گران

عملکرد بازارهای آتی و پیمان‌های آتی و اختیار معاملات، به طور قابل توجهی موفقیت‌آمیز بوده است. مهم‌ترین دلیل آن، توانایی این بازارها برای جذب تعداد کثیری از انواع معامله‌گران و ایجاد قابلیت نقدینگی فراوان برای انجام مبادلات است، به طوری که چنانچه سرمایه‌گذاری بخواهد یک موقعیت معاملاتی را اتخاذ کند، معمولا مشکلی در یافتن طرف دوم قرارداد ندارد. سه گروه عمده معامله‌گران را می‌توان پوشش‌دهندگان ریسک، سفته‌بازان و آربیتراژگران در نظر گرفت.

پوشش‌دهندگان ریسک

پوشش‌دهندگان ریسک[33] با استفاده از قراردادهای آتی، پیمان‌های آتی و اختیار معاملات به دنبال کاهش ریسکی هستند، که از حرکت بالقوه‌ی آتی در یک متغیر ناشی می‌شود.(هزینه یا

[29] Put-Call parity
[30] Risky Asset
[31] Risk-Free Asset
[32] Interest Rate
[33] To hedge a risk

قیمت دریافتی بابت دارایی پایه، تضمین می‌شود ولی این‌که نتیجه‌ی ناشی از پوشش ریسک بهتر از حالت عدم پوشش ریسک باشد، هیچ اطمینانی وجود ندارد).

سفته‌بازان

سفته‌بازان یا سوداگران[۳۴] از پیش‌بینی، جهت حرکت آتی قیمت در یک متغیر بازار استفاده می‌کنند. (سفته‌بازان به استقبال ریسک می‌روند و موقعیت‌هایی را متناسب با نوع پیش‌بینی خود درباره‌ی تغییر قیمت‌ها، کسب می‌کنند)

آربیتراژگران

آربیتراژگران[۳۵] با اتخاذ موقعیت‌های متناسب در دو یا چند بازار مختلف به دنبال کسب سود بدون ریسک هستند. می‌گوییم بازار فرصت آربیتراژ دارد اگر

۱. $V_0^h = 0$ ،

۲. $P(V_T^h > 0) = 1$ ،

۳. $P(V_T^h > 0) > 0$.

بنابراین در صورت وجود آربیتراژ گوییم سبدی خودتامین که اجازه کسب سود بدون ریسک را بدهد وجود نداشته باشد.

قضیه ۱.۸.۲. (قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری) بازار تعریف شده با فضای احتمال (Ω, F, P) و فرآیند قیمت $\{S_t\}_{t\geq 0}$ را در نظر می‌گیریم در این صورت بازار کامل است(یعنی بازار فاقد آربیتراژ) است اگر و تنها اگر اندازه مارتینگلی Q وجود داشته باشد که S تحت Q مارتینگل باشد.

برهان. به [۳۴] رجوع کنید. □

این قضیه ارتباط بین بازار بدون آربیتراژ و وجود اندازه مارتینگلی را بیان می‌کند.

قضیه ۲.۸.۲. (قضیه اساسی دوم قیمت‌گذاری) بازار کامل است اگر و تنها اگر اندازه مارتینگلی یکتا باشد.

برهان. به [۳۴] رجوع کنید. □

[34] Speculation
[35] Arbitrage

فصل ۳

ارزش‌گذاری اختیار معامله خرید اروپایی تحت مدل بلک_شولز

۱.۳ مقدمه

در اوایل سال ۱۹۷۰ آقایان فیشر بلک، میرن شولز و رابرت مرتون گام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند. نتیجه کار آنها ارائه مدلی بود که تحت عنوان مدل بلک_شولز[۱] معروف گشت. این مدل تاثیر زیادی در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله داشته است. همچنین این مدل نقش اساسی و محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشته است. از آنجایی که ارزش‌گذاری اختیار معامله یکی از مهم‌ترین موضوعات در اقتصادهای مالی است بی‌شک مدل بلک_شولز انقلابی در شیوه قیمت‌گذاری اختیار معامله به وجود آورده است. بدین دلیل در این فصل ابتدا مدل بلک_شولز را معرفی می‌کنیم. سپس به ارزش‌گذاری اختیار معامله خرید اروپایی تحت این مدل می‌پردازیم.

[1] Black-Scholes model

۲.۳ مدل بلک_ شولز

مدل بلک_ شولز مدلی شامل دو دارایی است الف_ دارایی بدون ریسک ب_ دارایی ریسکی که به ترتیب دارای دینامیک‌های زیر هستند.

$$dB_t = rB_t dt, \qquad B(۰) = ۱, \tag{۱.۳}$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{۲.۳}$$

که در آن r ، σ و μ به ترتیب نرخ بهره، تلاطم قیمت دارایی و نرخ بازده مورد انتظار دارایی (مقادیر ثابت) می‌باشندو W_t یک فرآیند براوانی روی فضای احتمال (Ω, F, P) است.

۳.۳ ارزش‌گذاری اختیار معامله خرید اروپایی تحت مدل بلک_ شولز

در بازار مشتقات مالی مهم‌ترین مسئله قیمت‌گذاری اختیار است یعنی قیمت منصفانه‌ای برای اختیار محاسبه می‌شود.
ابتدا قضایا را مطرح می‌کنیم و با استفاده از قضایا به ارزش‌گذاری می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳.۳. جواب معادله

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{۳.۳}$$

$$X_۰ = x_۰ \tag{۴.۳}$$

عبارت است از

$$X(t) = x_۰.exp\Big\{\Big(\alpha - \frac{۱}{۲}\sigma^۲\Big)t + \sigma W_t\Big\}.$$

امید ریاضی X_t عبارت است از

$$E[X_t] = x_۰ e^{\alpha t}.$$

برهان. ابتدا قرار می‌دهیم $Z_t = f(x,t) = \ln X_t$ و با استفاده فرمول ایتو بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} dZ &= \frac{۱}{X}dX + \frac{۱}{۲}\Big\{-\frac{۱}{X^۲}\Big\}[dX]^۲ \\ &= \frac{۱}{X}\{\alpha X dt + \sigma X dW\} + \frac{۱}{۲}\Big\{-\frac{۱}{X^۲}\Big\}\sigma^۲ X^۲ dt \\ &= \{\alpha dt + \sigma dW\} - \frac{۱}{۲}\sigma^۲ dt. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$dZ_t = \Big(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)dt + \sigma dW_t,$$
$$Z_0 = \ln x_0.$$

در نتیجه با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Z_t &= \ln x_0 + \int_0^t (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)ds + \int_0^t \sigma dW_s \\ &= \ln x_0 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(W_t) \end{aligned}$$

بنابراین X به صورت زیر بدست به‌دست می‌آید

$$X_t = e^{Z_t} = x_0 exp\Big\{\Big(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)t + \sigma W_t\Big\}$$

با استفاده از فرمول ایتو قسمت دوم قضیه را به صورت زیر اثبات می‌کنیم

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_T$$

$$\begin{aligned} &F(t, X_t) - F(0, X_0) = \int_0^t \alpha X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_S \\ &E(F(t, X_t)) - E(F(0, X_0)) = \alpha \int_0^t E(X_s)ds + E(\int_0^t \sigma X_s dW_S) \\ &E(X_t) - x_0 = \alpha \int_0^t E(X_s)ds \end{aligned}$$

با حل انتگرال بالا ما به اثبات قسمت دوم قضیه که

$$E[X_t] = x_0 e^{\alpha t}$$

است می‌رسیم. □

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید F جوابی از مساله‌ی مقدار مرزی

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rF(t,x) = 0, \qquad (۵.۳)$$

$$F(T,x) = \Phi(x), \qquad (۶.۳)$$

باشد. به‌علاوه فرض کنید $e^{-rs}\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)$ متعلق به l^2 باشد که در آن X در

$$dX_s = \mu(s,X_s)ds + \sigma(s,X_s)dW_s \qquad (۷.۳)$$

$$X_t = x, \qquad (۸.۳)$$

صدق می‌کند. در این صورت نمایش F به صورت

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}E_{r,x}[\phi(X_t)], \qquad (۹.۳)$$

است.

بازده حاصل از اختیار خرید با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T به صورت زیر است

$$\Phi(S_T) = \max[S_T - K, ۰].$$

می‌خواهیم تحت مدل بلک_شولز که نرخ بهره و تلاطم ثابت فرض شده، به ارزش‌گذاری اختیار خرید اروپایی بپردازیم.
با توجه به این که مدل بلک_شولز به صورت زیر است

$$dB_t = rB_t dt, \qquad B(۰) = ۱, \tag{۱۰.۳}$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{۱۱.۳}$$

که در آن μ و σ اعدادثابت‌اند.از قضیه ۲.۳.۳ می‌دانیم که قیمت بدون آربیتراژ مطالبه‌ی مشروط ساده $\Phi(S(T))$ عبارت است از

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}[\Phi(S(T))]. \tag{۱۲.۳}$$

که در آن Q– دینامیک S عبارت است از

$$dS(t) = rS(u)du + \sigma S(u)dW(u) \tag{۱۳.۳}$$

$$S(t) = s. \tag{۱۴.۳}$$

در این معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت براوانی هندسی قضیه ۱.۳.۳ را مشاهده می‌کنیم.
بنابراین با استفاده از نتایج قضیه ۱.۳.۳ می‌توانیم $S(T)$ را به صورت صریح

$$S(T) = s.exp\Big\{\Big(r - \frac{۱}{۲}\sigma^۲\Big)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))\Big\} \tag{۱۵.۳}$$

بنویسیم، بنابراین فرمول قیمت‌گذاری مطالبه مشروط عبارت است از

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(se^z) f(z) dz \tag{۱۶.۳}$$

که در آن f چگالی متغیر تصادفی Z با توزیع

$$N\Big[\Big(r - \frac{۱}{۲}\sigma^۲\Big)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\Big]$$

است.
فرمول ۱۶.۳ فرمول انتگرالی است که به ازای انتخاب کلی تابع قرارداد Φ باید به صورت عددی محاسبه شود. با این حال چند حالت خاص وجود دارد که در آن‌ها می‌توان ۱۶.۳ را کمابیش به صورت تحلیلی محاسبه کرد، معروف‌ترین حالت اختیار خرید اروپایی است، که در آن $\Phi(S_T) = \max[S_T - K, ۰]$ در این حالت داریم

$$E^Q_{t,s}[\max[se^Z - K, ۰]] = ۰.Q(se^Z \leq K) + \int_{\ln \frac{K}{s}}^{\infty} (se^z - K) f(z) dz. \tag{۱۷.۳}$$

پس از محاسبه فرمول بالا به فرمول قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی که به صورت زیر است خواهیم رسید. که در آن قیمت توافقی K و سررسید این اختیار T است.

$$F(t,s) = sN[d_1(t,s)] - e^{-r(T-t)}KN[d_2(t,s)]. \tag{۱۸.۳}$$

که در آن N تابع توزیع تجمعی برای توزیع $N[0,1]$ است و

$$d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln(\frac{s}{K}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}, \tag{۱۹.۳}$$

$$d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{۲۰.۳}$$

بعد ارائه مطالب بالا به گزاره زیر می‌رسیم که اثبات آن در بالا گفته شده است.

گزاره ۱.۳.۳. قیمت اختیار خرید اروپایی با قیمت توافق K و سررسید T با فرمول $\Pi(t) = F(t, S(t))$ داده می‌شود که در آن

$$F(t,s) = sN[d_1(t,s)] - e^{-r(T-t)}KN[d_2(t,s)]. \tag{۲۱.۳}$$

در اینجا N تابع توزیع تجمعی برای توزیع $N[0,1]$ است و

$$d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln(\frac{s}{K}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}, \tag{۲۲.۳}$$

$$d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{۲۳.۳}$$

فصل ۴

مدل هال_ وایت و مدل هال_ وایت کسری

۱.۴ مقدمه

همان‌طور که در فصل قبل ذکر شد، مدل بلک_ شولز انقلابی در شیوه‌ی قیمت گذاری اختیار معامله به وجود اورده است ولی این مدل دارای نقص‌هایی می‌باشد. فرض اساسی در مدل بلک_ شولز این است که توزیع احتمال قیمت دارایی پایه (سهام) نرمال است، در صورتی که شواهد تجربی در بازارهای مالی واقعی نشان می‌دهند که فرآیند قیمت دارایی در مقایسه با توزیع نرمال، دارای دم کلفت‌تر و گشیدگی بیش‌تری نسبت به نرمال است. از طرف دیگر، در مدل بلک_ شولز تلاطم قیمت سهام ثابت انگاشته شده و این در حالی است که الگوهای تلاطم مشاهده شده در قیمت‌های اختیار مبادله شده در بازار، گواه از تصادفی بودن تلاطم دارند [۱] بعد از مدل بلک_ شولز متخصصان زیادی برای رهایی از این نقص‌ها مدل‌هایی برای دینامیک‌های تلاطم ارائه کردند یکی از این مدل‌ها مدل هال_ وایت است حال با توجه به نواقص مدل بلک_ شولز و برتری که مدل هال_ وایت نسبت به مدل بلک _ شولز دارد. وبا توجه به اینکه مدل هال_ وایت اولین و مهمترین تلاطم تصادفی است در این فصل به معرفی مدل هال_ وایت می‌پردازیم. ابتدا معادله دیفرانسیل تصادفی مدل هال_ وایت را معرفی میکنیم،سپس به کمک فرمول ایتو جوابی برای r_t مدل هال_ وایت بدست می‌آوریم. در ادامه

فصل مدل هال_وایت کسری را معرفی کرده وهمچنین یک مدل تقریبی، برای مدل هال_وایت کسری معرفی می‌کنیم.

۲.۴ مدل هال_وایت

ابتدا معادله دیفرانسیل تصادفی که در بازارهای مالی، مدل هال_وایت از آن پیروی می‌کند را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$dr_t = (b(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t \tag{۱.۴}$$

که در آن $a(t)$ ، $b(t)$ و $\sigma(t)$ توابع پیوسته بر حسب t هستند و $a(t) > 0$ ، $\sigma(t) > 0$ و W_t فرآیند براوانی استاندارد و r_t فرآیند قیمت مدل هال_وایت در بازارهای مالی است.اکنون یک جواب برای معادله دیفرانسیل تصادفی ۱.۴ به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$r_t = r_0 + \int_0^t [b(s) - a(s)r_s]ds + \sigma(t)W_t. \tag{۲.۴}$$

ملاحظه ۱.۲.۴. با توجه به اینکه W_t فرآیند براوانی استاندارد است ، $E(W_t)$ و $Var(W_t)$ فرایند براوانی استاندارد W_t را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$E(W_t) = 0 \tag{۳.۴}$$

$$Var(W_t) = t \tag{۴.۴}$$

حال با توجه به مدل هال_وایت معرفی شده در بخش ۲.۴ مدل هال_وایت کسری را معرفی می‌کنیم.

۳.۴ مدل هال_وایت کسری

در ابتدای این بخش تابع کواریانس را برای $H \in (0,1)$ به فرم زیر معرفی می‌کنیم:

$$R(t,s) = \frac{1}{2}\Big[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\Big].$$

که در آن اگر $H = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه فرآیند براوانی کسری همان فرآیند براوانی استاندارد است.
حال برای اینکه مدل هال_وایت کسری را معرفی کنیم ابتدا فرآیند براوانی کسری را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\Big[Z_t + \int_0^t (t-s)^\alpha dW_s\Big].$$

که در آن B_t^H فرآیند براوانی کسری، $\alpha = H - \frac{1}{2}$ ، $\Gamma(\circ)$ تابع گاما و $\{W_t\}_{\{t>\circ\}}$ فرآیند براوانی استاندارد است و

$$Z_t = \int_{\infty}^{\circ} [(t-s)^{\alpha} - (-s)^{\alpha}] dW_s.$$

از آنجایی که Z_t پیوسته است B_t^H اساسا توسط اصطلاح زیر بیان می‌شود:

$$B_t = \int_{\circ}^{t} (t-s)^{\alpha} dW_s.$$

اکنون ما معادله دیفرانسیل تصادفی مدل هال_وایت کسری را برای فرایند قیمت(بهره) r_t را به صورت زیر مطرح می‌کنیم:

$$dr_t = (b(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)dB_t, \tag{۵.۴}$$

که در آن B_t یک فرآیند براوانی کسری از اندیس $H(\circ < H < 1)$ تعریف شده با

$$B_t = \int_{\circ}^{t} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s \tag{۶.۴}$$

و $\sigma(t)$ یک تابع دیفرانسیل پذیر است، که در آن $t \in [\circ, T]$ و $\sigma(t) > \circ$ است. اکنون یک جواب برای معادله دیفرانسیل تصادفی (۵.۴) به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$r_t = r_\circ + \int_{\circ}^{t} [b(s) - a(s)r_s]ds + \sigma(t)B_t. \tag{۷.۴}$$

ملاحظه ۱.۳.۴. با توجه به اینکه B_t^H یک فرآیند براوانی کسری است، $E(B_t^H)$ و $Var(B_t^H)$ فرآیند براوانی کسری B_t^H را به فرم زیر خواهیم داشت:

$$E(B_t^H) = \circ \tag{۸.۴}$$

$$Var(B_t^H) = t^{2}H \tag{۹.۴}$$

ما در این بخش مدل هال_وایت کسری را معرفی کرده‌ایم. در بخش بعدی یک مدل جدید برای مدل هال_وایت کسری معرفی می‌کنیم.

۴.۴ مدل تقریبی

در این بخش ما یک مدل تقریبی جدید برای مدل هال_وایت کسری معرفی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا معادله دیفرانسیل تصادفی(۵.۴) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &dr_t = (b(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)dB_t, \qquad \circ \le t \le T, \\ &r_{t(t=\circ)} = r_\circ, \end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

که در آن

$$B_t = \int_{\circ}^{t} (t-s)^{\alpha} dW_s, \qquad -\tfrac{1}{۲} < \alpha < \tfrac{1}{۲} \tag{۱۱.۴}$$

و $r_\circ$ یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر دوگانه است.

اکنون برای هر $\varepsilon > \circ$، فرآیند براوانی کسری یعنی B_t^{ε} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_t^{\varepsilon} = \int_{\circ}^{t} (t-s+\varepsilon)^{\alpha} dW_s. \tag{۱۲.۴}$$

داریم:

$$\begin{aligned}\int_{\circ}^{t}\int_{\circ}^{s} (s-u+\varepsilon)^{\alpha-1} dW_u ds &= \int_{\circ}^{t}\int_{u}^{t} (s-u+\varepsilon)^{\alpha-1} ds dW_u \\ &= \frac{1}{\alpha}\Big[\int_{\circ}^{t}(t-u+\varepsilon)^{\alpha}dW_u - \varepsilon^{\alpha}\int_{\circ}^{t} dW_u\Big] \\ &= \frac{1}{\alpha}[B_t^{\varepsilon} - \varepsilon^{\alpha}W_t].\end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

از محاسبات بالا داریم:

$$B_t^{\varepsilon} = \alpha \int_{\circ}^{t} \varphi_s^{\varepsilon} ds + \varepsilon^{\alpha} W_t, \tag{۱۴.۴}$$

که در آن

$$\varphi_t^{\varepsilon} = \int_{\circ}^{t} (t-s+\varepsilon)^{(\alpha-1)} dW_S. \tag{۱۵.۴}$$

چون که $\alpha\int_{\circ}^{t}\varphi_s^{\varepsilon}ds$ متغیر متناهی و $\varepsilon^{\alpha}W_t$ مارتینگل، سپس B_t^{ε} یک نیم‌مارتینگل است.
اکنون ما مدل تقریبی، را برای مدل هال_وایت کسری را در نظر می‌گیریم و برای هر $\varepsilon > \circ$ معادله دیفرانسیل تصادفی مدل تقریبی هال_وایت کسری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} dr_t^{\varepsilon} &= (b(t) - a(t)r_t^{\varepsilon})dt + \sigma(t)dB_t^{\varepsilon}, \qquad \circ \le t \le T \\ r_{t(t=\circ)}^{\varepsilon} &= r_\circ, \end{aligned} \tag{۱۶.۴}$$

که در آن B_t^{ε} توسط معادله (۱۲.۴) تعریف شده است و $r_\circ$ دقیقا برابر با مقدار داده شده در شرایط اولیه (۱۰.۴) است.
از (۱۴.۴) ما داریم:

$$dB_t^{\varepsilon} = \alpha\varphi_t^{\varepsilon}dt + \varepsilon^{\alpha}dW_t. \tag{۱۷.۴}$$

از این رو، پس از جایگزینی dB_t^{ε} از(۱۷.۴) در(۱۶.۴)،فرمول (۱۶.۴) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} dr_t^{\varepsilon} &= (b(t) + \alpha\varphi_t^{\varepsilon}\sigma(t) - a(t)r_t^{\varepsilon})dt + \varepsilon^{\alpha}\sigma(t)dW_t \\ r_{t(t=\circ)}^{\varepsilon} &= r_\circ. \end{aligned} \tag{۱۸.۴}$$

در ادامه این بخش ما یک قضیه را بیان می‌کنیم که در این قضیه جوابی برای r_t فرمول (۱۸.۴) معرفی می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید $a(t)$ و $b(t)$ توابع پیوسته در $[\circ, T]$ باشند.
سپس برای هر $\varepsilon > \circ$ یک جواب منحصر به فرد r_t^ε برای(۱۸.۴) وجود دارد که به صورت زیر داده شده است:

$$r_t^\varepsilon = e^{-\int_\circ^t a(s)ds}\big[r_\circ + \varepsilon^\alpha \int_\circ^t \sigma(s) e^{\int_\circ^s a(u)du} dW_s + \int_\circ^t (b(u) + \sigma(u)\alpha\varphi_u^\varepsilon) e^{\int_\circ^u a(s)ds} du\big]. \quad (۱۹.۴)$$

فصل ۵

قیمت‌گذاری تحت مدل هال‌ـ وایت کسری ترکیبی به روش تقارن لی

۱.۵ مقدمه

با توجه به معایب مدل بلک‌ـ شولز در این فصل به قیمت‌گذاری اوراق قرضه با کوپن صفر تحت مدل هال‌ـ وایت کسری ترکیبی و اختیار اروپایی می‌پردازیم برای این منظور در بخش اول ابتدا در مورد اوراق قرضه مطالبی را بیان می‌کنیم در بخش بعدی به پاره‌ای از تعاریف و مقدمات می‌پردازیم و در آخر فرمول قیمت‌گذاری اوراق قرضه با کوپن صفر تحت مدل هال‌ـ وایت کسری ترکیبی و فرمول قیمت‌گذاری برای اختیار اروپایی را به روش تقارن لی بدست می‌آوریم.

۲.۵ اوراق قرضه

برای تعریف اوراق قرضه ابتدا اوراق بهادار را معرفی می‌کنیم سپس به تعریف اوراق قرضه و ویژگی آن می‌پردازیم.

اوراق بهادار

اوراق بهادار[1] یک ابزار مالی قابل داد و ستد است که دارای ارزش مالی می‌باشد. اوراق بهادار به طور کلی به صورت زیر دسته بندی می‌شوند:

- اوراق بدهی مانند سند بدهی بانک، اوراق قرضه و سهام قرضه
- اوراق حقوق صاحبان سهام مانند سهام عادی و...
- ابزارهای مشتقه مثل، قراردادهای آتی، اختیار معامله

شرکت یا بنگاهی که اوراق بهادار منتشر می‌کند،منتشرکننده نامیده می‌شود.
ساختار قوانین کشورها واجد شرایط بودن یک اوراق بهادار را تعیین می‌کنند. اوراق بهادار، می‌توانند به صورت گواهی صادر شوند یا به طور عام‌تر بدون گواهی باشند و تنها در مدخلی الکترونیکی ثبت شده باشند. گواهی‌ها می‌توانند در وجه حامل باشند، به این معنا که حمل‌کننده آن صاحب حقوق ورقه بهادار است یا با نام باشند که در این صورت تنها شخصی که اوراق به نام اوست صاحب حقوق است.

اوراق قرضه چیست؟ آشنایی با انواع و اصطلاحات آن

اوراق قرضه که از آن به عنوان اوراق بدهی نیز یاد می‌شود، ورقه‌ای است که قابلیت معامله داشته و بیانگر مبلغ وام با سود مشخص است که در فواصل زمانی از پیش تعیین شده پرداخت می‌شود و می‌باید در سررسید مشخصی کل مبلغ آن به خریدار اوراق بهادار پرداخت شود. این اوراق ممکن است علاوه بر سود در نظر گرفته شده، حق یا حقوق دیگری نیز برای خریدار خود به همراه داشته باشد. بنابراین در این اوراق سود، زمان پرداخت سود و زمان سررسید آن مشخص است. اوراق قرضه جز اوراق بهادار بازار سرمایه هستند که اوراق بهادار بازار سرمایه، اوراق بهادار با سررسید بیش از یکسال هستند.

به لحاظ زمان سررسید، اوراق قرضه به سه دسته تقسیم می‌شوند:

- کوتاه‌مدت با سررسید یک تا پنج سال
- میان‌مدت با سررسید پنج تا ده سال
- بلندمدت با سررسید بیش از ده سال

[1] Securities

به لحاظ تعداد سررسید، اوراق قرضه به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- متداولترین نوع اوراق قرضه به شکلی است که سررسید آن مشخص و فقط یک تاریخ سررسید دارد.
- نوع دیگر این اوراق، سریالی است که تاریخ‌های سررسید متفاوت برای آن در نظر گرفته می‌شود که در هر سررسید، نسبتی از مبلغ ورقه قرضه پرداخت می‌شود.

بر اساس نرخ بهره می‌توانیم اوراق قرضه را به دو قسمت تقسیم کنیم:

- **اوراق قرضه با نرخ بهره ثابت** شامل اوراق رهنی، اوراق قرضه تضمین شده، اوراق قرضه قابل تبدیل، اوراق قرضه درآمدی
- **اوراق قرضه با نرخ شناور** در این نوع اوراق قرضه نرخ بهره در دوره‌هایی (مثلا سه ماه یکبار) مورد تجدید نظر قرار می‌گیرد. اوراق با نرخ شناور از جمله ابزارهای بدهی از نوع اوراق قرضه‌اند که ابزارهای بدهی بلند مدت سنتی را تشکیل می‌دهند.

لازم به توضیح است گواهی‌سپرده با نرخ شناور، اوراقی است که توسط بانک‌ها منتشر شده و دارای نرخ شناور است.

اوراق قرضه به طور معمول توسط دولت منتشر و ضمانت می‌شود یا از آن جا که پرداخت اصل و فرع این اوراق توسط دولت تعهد می‌شود، بدون خطر محسوب می‌شود و مورد اطمینان سرمایه‌گذار است و ریسک آن بسیار پایین است.

انواع اوراق قرضه

اوراق قرضه دولتی

برای تامین مالی برنامه‌ها، پرداخت لیست حقوق و به‌خصوص پرداخت صورت‌حساب‌ها، دولت‌ها اوراق قرضه صادر می‌کنند. اوراق قرضه‌ی کشورهای با ثباتی مثل آمریکا، جزو امن‌ترین سرمایه‌گذاری‌ها شناخته می‌شود. اما در طرف دیگر، اوراق قرضه‌ی کشورهای در حال توسعه،دارای ریسک بالاتری هستند. دولت آمریکا اوراق قرضه‌ی خود را از طریق خزانه‌داری و و چندین نهاد دولتی مختلف صادر می‌کند. در آمریکا به اوراق قرضه‌ای که موعد سررسید آنها کمتر از یکسال باشد، در اصطلاح $T-bills$ ، اوراق قرضه با سررسید بین یک تا ده سال را $T-notes$

و بیش از ده سال را اوراق خزانه‌داری می‌گویند. در برخی موارد، بهره‌ی دریافتی از این اوراق شامل مالیات بر درآمد نمی‌شود. اوراق قرضه با کوپن و بی کوپن جز اوراق قرضه دولتی هستند. اوراق بی کوپن اوراقی هستند که سود نمی‌دهند تنها سود آنها کسر فروش آنها است ولی اوراق‌های با کوپن سود می‌دهند.

اوراق قرضه‌ی شهرداری

این اوراق توسط ایالات، شهرها، کشورها و مناطق مختلف برای تامین مالی عملیات‌ها یا پرداخت هزینه‌ی پروژه‌ها صادر می‌شود. اوراق قرضه‌ی شهرداری هزینه‌های ساخت بیمارستان، مدرسه، نیروگاه‌ها، خیابان، دفاتر اداری، فرودگاه، پل و غیره را از نظر مالی تامین می‌کند. شهرداری‌ها معمولا زمانی به صدور اوراق قرضه اقدام می‌کنند که به پولی بیشتر از پول حاصل از جمع‌آوری مالیات‌ها احتیاج داشته باشند. یکی از مزیت‌های اوراق قرضه‌ی شهرداری این است که سود حاصل از آن، معاف از مالیات است.

اوراق قرضه شرکتی

اوراق قرضه‌ی شرکتی توسط کسب و کار و برای کمک به تامین هزینه‌ی آنها صادر می‌شود. با وجود اینکه ریسک این اوراق بالاتر از اوراق قرضه‌ی دولتی است، اما پول بیشتری می‌توان از آن کسب کرد. همچنین تعداد گزینه‌ها برای انتخاب از میان اوراق قرضه‌ی شرکتی بیشتر است. اما از معایب این اوراق، معاف نبودن از مالیات است.

به ویژه در خصوص سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه‌ی شرکتی، در نظر گرفتن ریسک اوراق بسیار مهم است. هیچ سرمایه‌گذاری دوست ندارد که پول خود را صرف اوراق قرضه‌ی کم‌بازدهی کند که احتمال ورشکستگی شرکت آن ۵۰ – ۵۰ باشد. برای خرید اوراق قرضه‌ی شرکتی باید درباره وضعیت مالی صادرکننده و چشم‌انداز اقتصادی آن تحقیق کرد. این تحقیقات می‌توانند شامل میزان جریان نقدی، بدهی، نقدینگی و برنامه‌ی کسب و کار شرکت باشد.
با اینکه انجام چنین تحقیقاتی ممکن است سرگرم‌کننده باشد، اما بسیاری از ما زمان و مهارت کافی برای تحلیل صحیح وضعیت مالی یک شرکت را نداریم. خوشبختانه شرکت‌هایی مانند شرکت خدمات سرمایه‌گذاری مودی و شرکت استاندارد اند پورز این کار را انجام می‌دهند. کارشناسان آنان، به بررسی وضعیت شرکت‌ها می‌پردازد و رتبه‌ی آنها را تعیین می‌کنند.

ویژگی‌های اوراق قرضه

- **سند بستانکاری** دارنده یک برگه از اوراق قرضه بستانکار شرکتی است که این برگ را منتشر کرده است. او به عنوان بستانکار حق دریافت اصل مبلغ اسمی و بهره آن را دارد و حقوق وی در سند قرارداد وام تعیین شده است، ولی دارنده اوراق قرضه هیچ نوع مالکیتی در شرکت ندارد و چیزی از بابت سود سهم (که به سهامداران پرداخت می‌شود) به او نخواهد رسید.

- **تاریخ سررسید معین** معمولا اوراق دارای سررسید مشخص هستند. برخی از اوراق قرضه در یک مقطع معین زمانی سررسید می‌شوند و برخی دیگر به تدریج سررسید می‌شوند، به گونه‌ای که اکثر آنها قبل از سررسید باز خرید خواهند شد.

- **ارزش اسمی** قیمت ثابتی است که روی ورقه نوشته شده است و در سررسید بازپرداخت می‌شود. (مانند مبلغی که روی اسکناس نوشته شده است)

- **اولویت** اگر شرکتی که اوراق قرضه منتشر کرده است ورشکست شود، دارندگان اوراق قرضه در رابطه با دریافت اصل و فرع خود بر صاحبان سهام عادی حق تقدم دارند. اگر شرکتی چند نوع اوراق قرضه منتشر کرده است، ترتیب اولویت آنها در قراردادهای مربوط قید می‌شود.

- **وثیقه** بعضی از شرکت‌ها اقدام به انتشار اوراق قرضه یا وثیقه می‌کنند، مثلا ممکن است شرکت زمین و ساختمان خود را وثیقه اوراق قرضه قرار می‌دهد. شرکت‌هایی که دارای اعتبار و شهرت هستند معمولا اوراق قرضه بدون وثیقه انتشار می‌دهند.

- **حق رای** به طور کلی، دارندگان نوع خاصی از اوراق قرضه در موارد خاصی،
در تصمیم‌گیری‌های شرکت (مثل انتشار و فروش اوراق قرضه‌های دیگر یا در مورد ادغام شرکت در شرکت‌های دیگر) دارای حق رای باشند. فراتر اینکه، اگر شرکتی شرایط مندرج در قرارداد اوراق قرضه را رعایت نکند (به اصطلاح از مفاد آن عدول کند) دارندگان اوراق قرضه می‌توانند بر بسیاری از فعالیت‌های شرکت اعمال قدرت کنند.

- **امین‌دارندگان اوراق قرضه** اگر اوراق قرضه به صورت عرضه اختصاصی به خریدار فروخته شود فقط شرکت منتشرکننده و خریدار طرف قرارداد هستند. ولی اگر اوراق قرضه به طور عمومی به تعداد زیادی از خریداران فروخته شود، غیر از طرفین قرارداد یک شخص سوم به نام امین طرف قرارداد است که به نمایندگی از طرف دارندگان اوراق قرضه به اجرا تعهدات شرکت نظارت می‌کند.

- **نرخ بهره اوراق قرضه** نرخی است که روی ورقه نوشته شده است و صادر کننده متعهد به پرداخت آن در طول دوره تا سررسید می‌باشد
در گذشته وضع به این گونه بود که اوراق قرضه دارای نرخ بهره ثابت بودند و معمولا در طول عمر آنها این نرخ تغییر نمی‌کند برای مثال، نرخ بهره سالانه اوراق قرضه بیست

ساله هفت درصد تعیین می‌گردید، شخص خریدار می‌دانست که اگر انتشاردهنده اوراق قرضه با بحران مالی مواجه نشود، بازدهی به میزان هفت درصد به دست خواهد آورد. ولی، در حال حاضر نرخ بهره اکثر اوراق قرضه‌هایی که به تازگی منتشر می‌شوند. ثابت نمی‌باشند. معمولا اینها را اوراق قرضه با نرخ شناور می‌نامند. میزان بهره آنها در آینده به نرخ بهره سایر اوراق بهادار رایج در بازار (مثل اوراق خزانه) بستگی دارد.

- **قیمت بازار** قیمتی است که در بازار ثانویه (بازار اوراق قرضه) معامله می‌شود این قیمت ممکن است از قیمت اسمی بیشتر باشد که به آن صرف و ممکن است که از قیمت اسمی کمتر باشد که به آن کسر (نخفیف) گفته می‌شود.

- **بازدهی اوراق قرضه** عبارت است از سودآوری اوراق قرضه با توجه به زمان مانده به سررسید آن و همچنین قیمت بازار آن که فرمول آن به شرح زیر می‌باشد:

  - زمانی که اوراق با صرف خریداری می‌شود:
(سال مانده به سررسید*قیمت اوراق قرضه) تقسیم بر (صرف_(نرخ بهره*ارزش اسمی X سال مانده به سررسید)) =بازدهی
  - زمانی که اوراق با کسر خریداری می‌شود:
(سال مانده به سررسید*قیمت اوراق قرضه) تقسیم بر (کسر+(نرخ بهره*ارزش اسمیXسال مانده به سررسید)) =بازدهی

رابطه قیمت اوراق قرضه و نرخ بهره اسمی

عوامل زیادی در تعیین قیمت اوراق قرضه موثر می‌باشند اما نرخ بهره نقش اصلی را در این میان بازی می‌کند بنابراین سرمایه‌گذاران در اوراق قرضه بایستی توجه ویژه‌ای نسبت به آینده نرخ بهره داشته باشند.

مثال ۱.۲.۵. *فرض کنید نرخ بهره ۱۰ درصد باشد شما ۱۰۰ دلار اوراق قرضه ده ساله خریداری می‌کنید یعنی شما سالی ده درصد سرمایه خود را سود دریافت می‌کنید حالا باز هم فرض کنید که یک سال از خرید شما می‌گذرد و شما می‌خواهید اوراق خود را بفروشید اما الان نرخ بهره رسمی به ۵ درصد کاهش رسیده است بنابراین کسی که اوراق شما را می‌خرد ۵ درصد بیشتر از بقیه سود خواهد گرفت بنابراین اوراق شما خریداران بیشتری خواهد داشت و در نتیجه قیمت آن بالا خواهد رفت و شما اوراق ۱۰۰ دلاری خود را ۱۰۵ دلار خواهید فروخت. بطور کلی زمانی که چشم‌انداز نرخ بهره بانکی رو به کاهش است خرید اوراق قرضه می‌تواند فرصت مناسبی برای سرمایه‌گذاری باشد.*

حالا فرض کنید در زمان فروش نرخ بهره ۲۰ درصد باشد حالا کسی اوراق قرضه شما را نمی‌خرد چون اوراق جدید با نرخ ۲۰ درصد عرضه می‌شود و شما مجبور می‌شوید تا قیمت را پایین بیاورید چیزی حدود ۸۵ دلار می‌توانید اوراق خود را بفروشید در اینجا شما زیان دیده‌اید.

نتیجه ۱.۲.۵. چنانچه انتظارات به بالا رفتن نرخ بهره رسمی کشور باشد نرخ بازدهی اوراق قرضه افزایش و چنانچه انتظارات به پایین آمدن نرخ بهره باشد نرخ بازدهی کاهش می‌یابد.

ارزش‌گذاری اوراق قرضه

ارزش‌گذاری اوراق قرضه[2] تعیین قیمتی منصفانه برای اوراق قرضه است. برای هر سرمایه‌گذاری سرمایه یا ورقه بهادار، قیمت تئوریک منصفانه اوراق قرضه، ارزش فعلی جریان نقدی است که انتظار تولید آن می‌رود.
بنابراین ارزش اوراق قرضه با تنزیل جریان نقد مورد انتظار اوراق قرضه به وسیله نرخ تنزیل مناسب تعیین می‌گردد.
اگر ورقه قرضه شامل گزینه‌های اختیاری باشد، ارزش‌گذاری آن مشکل‌تر است و با ترکیب کردن قیمت‌گذاری اختیارها و تنزیل بدست می‌آید. وابسته به نوع اختیار، صرف اختیار از قیمتی که به طور مستقیم محاسبه شده کسر شده یا به آن اضافه می‌گردد و نهایتا ارزش ورقه قرضه بدست می‌آید.

مفهوم هندسی منحنی بازدهی اوراق قرضه

منحنی بازدهی چیست؟

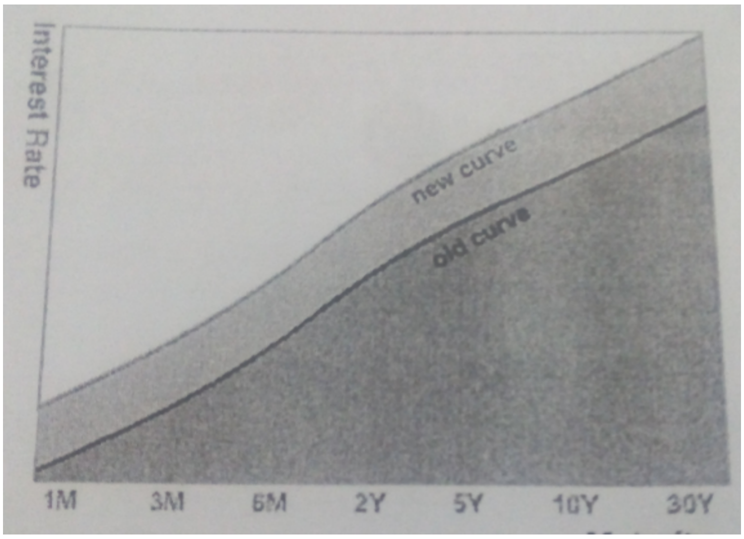
منحنی بازدهی نموداریست که رابطه بین بازدهی اوراق قرضه و سال‌های مانده به سررسید آن را نشان می‌دهد و معمولا از یک ماه تا ۳۰ سال درجه‌بندی می‌شوند. اگر چه می‌توان این منحنی را برای هر نوع اوراق قرضه رسم کرد اما این اصطلاح معمولا به اوراق قرضه خزانه داری اشاره می‌کند. شکل منحنی از تمایلات سرمایه‌گذاران در اوراق قرضه پیروی می‌کند و اطلاعاتی درباره بازدهی کوتاه‌مدت در مقایسه با بلندمدت را فراهم می‌کند. سرمایه‌گذاران می‌توانند با تحلیل وتفسیر شکل منحنی بازدهی درک بهتری برای جهت آینده نرخ‌ها و اقتصاد داشته باشند.

به طور کلی سه نوع منحنی بازدهی وجود دارد:

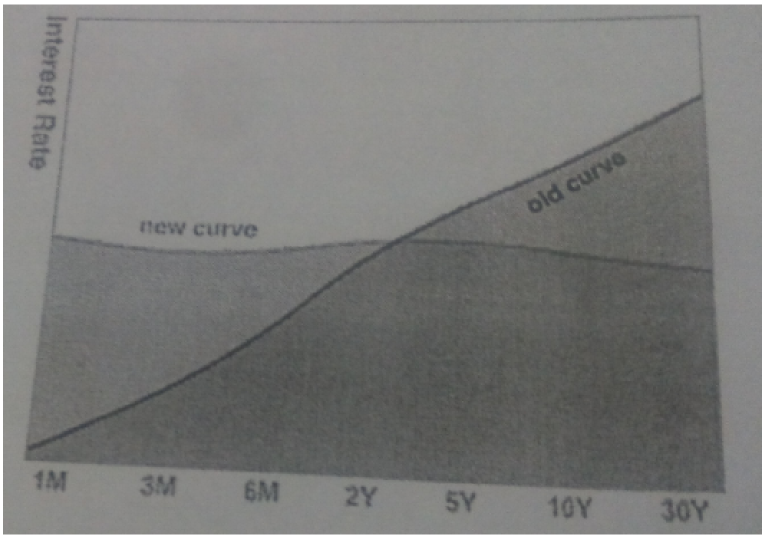
[2] Bond valuation

- عادی
- صاف
- معکوس

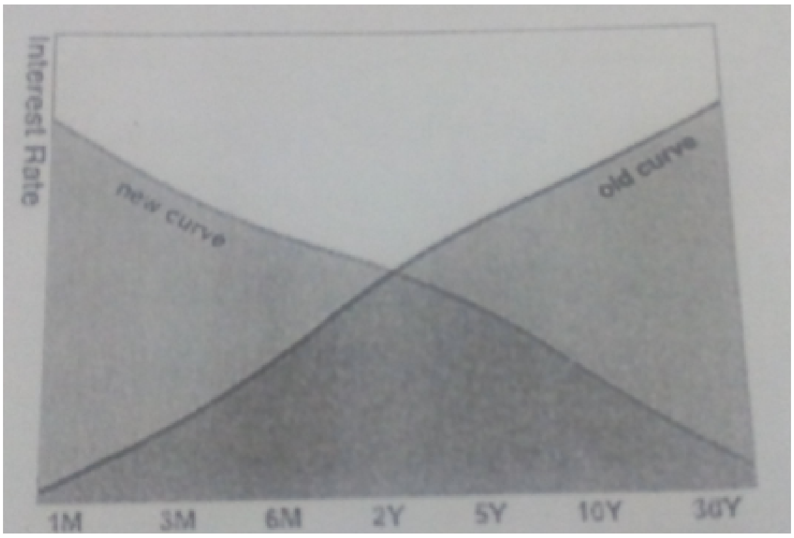
شکل ۱.۵: نمودار حاصل از منحنی بازدهی عادی



شکل ۲.۵: نمودار حاصل از منحنی بازدهی صاف



شکل ۳.۵: نمودار حاصل از منحنی بازدهی معکوس



عادی: زمانی که شما به کسی وام می‌دهید اگر این وام بلند مدت باشد بازپرداخت بیشتری را هم می‌خواهد زیرا زمان بیشتر مستلزم پذیرش ریسک بیشتر از طرف شما می‌باشد از طرفی نیز خطر تورم اوراق قرضه بلند مدت را بیشتر تهدید می‌کند.
صاف: چنانچه فدرال (یه سازمان بزرگ تعیین‌کننده نرخ ارز است.) نرخ‌های بهره کوتاه مدت را افزایش دهد اما نرخ‌های بهره اوراق قرضه بلند مدت کاهش یابد باعث به‌وجود آمدن منحنی صاف می‌گردد.
معکوس: اگر نرخ‌های کوتاه مدت افزایش یابد اما نرخ‌های بلندمدت تمایلی به افزایش نداشته باشند و یا حتی کاهش یابند منحنی بازدهی معکوس به‌وجود خواهد آمد.

تعریف ۱.۲.۵. اوراق قرضه با کوپن صفر اوراقی هستند که نرخ سود ندارد اوراقی که کوپن سود دارد اوراقی هستند که از اول نرخ سود آنها اعلام میشه اوراق با کوپن صفر اصلا سود ندارد بلکه به کسر فروخته می‌شود و به ارزش اسمی بازخرید می‌شود.

مثال ۲.۲.۵. *به عنوان مثال اوراق با ارزش اسمی ۱۰۰۰۰۰۰ ریال را ناشر یا شرکت می‌فروشد ۹۰۰۰۰۰ ریال و در سررسید ۱۰۰۰۰۰۰ ریال بازخرید میکند.*
سود آن در واقع تفاوت قیمت خرید و بازخرید است.

۳.۵ تعاریف و مقدمات

در این بخش به طور خلاصه به بررسی برخی تعاریف و خواص حرکت براوانی کسری ترکیبی می‌پردازیم

گروه‌های لی بین دو شاخه جبر و توپولوژی قرار گرفته‌اند. از سویی دارای خواص هندسی و از سویی دارای خواص جبری هستند.

تعریف ۱.۳.۵. منیفلد هموار G که دارای ساختار جبری گروه است را یک گروه لی گوییم، هرگاه نگاشت ضربی:

$$m : G \times G \to G \qquad m(g,h) = gh, \qquad g,h \in G,$$

و نگاشت وارون‌ساز:

$$i : G \times G \to G, \qquad i(g) = g^{-1}, \qquad g \in G,$$

هموار باشند.

تعریف ۲.۳.۵. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به فرم

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0,$$

که شامل p متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^q)$ است. جواب این دستگاه تابعی به صورت $u = f(x)$ است که در آن

$$u^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^p), \qquad \alpha = 1, \dots, q,$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ است.

تعریف ۳.۳.۵. دو دستگاه مختصاتی X روی $X = R^p$ و U روی $U = R^q$ در نظر می‌گیریم. فضای اقلیدسی $E = X \times U \simeq R^{p+q}$ که متشکل از متغیرهای مستقل و وابسته‌ی X و U می‌باشد، فضای کامل متناظر با دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ گفته می‌شود.

بررسی تقارن اشیا ساده می‌تواند در تفهیم تقارن معادلات دیفرانسیل مفید باشد. به طور تقریبی می‌توان گفت منظور از تقارن برای یک شی هندسی تبدیلی است که آن شی را ظاهرا بدون تغییر بگذارد. تقارن تبدیلی است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

- باید تبدیل حافظ ساختار باشد.

- باید تبدیل دیفئومورفیسم باشد.
- باید تبدیل شی مورد نظر را به خودش بنگارد.

تعریف ۴.۳.۵. یک دستگاه $l-$ معادله دیفرانسیل مرتبه $n-$ ام با $p-$ متغیر مستقل و $q-$ متغیر وابسته تابعی مانند Δ به صورت

$$\Delta : J^n \to \mathbb{R}^l, \tag{۱.۵}$$

با ضابطه

$$\Delta_\nu(x, u^n) = ۰, \qquad \nu = ۱, \dots, l, \tag{۲.۵}$$

است که می‌توان آن را به صورت

$$\Delta_\nu(x, u^n) = (\Delta^۱(x, u^n), \dots, \Delta^l(x, u^n)),$$

نوشت. دستگاه بالا یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی نام دارد، اگر $p > ۱$ باشد. اگر $p = ۱$ باشد، آنگاه دستگاه را یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی می‌گوییم.

تعریف ۵.۳.۵. **تبدیل فوریه** تابع f یک تبدیل انتگرالی به صورت زیر است

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du,$$

و تبدیل معکوس آن

$$F(u) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx,$$

که f یک تابع پیوسته و انتگرال‌پذیر است.

تعریف ۶.۳.۵. **(فرآیند نرخ تنزیل)** پایه و اساس تجزیه و تحلیل‌های مالی درک مفهوم این جمله است که هر رقم پیش بینی شده برای ارزش دارایی در سال‌های آتی برابر یک سرمایه‌گذاری با نرخ سود سالانه در زمان حال می‌باشد. در تجزیه و تحلیل‌های مالی برای حذف عامل زمان در محاسبات، ارزش دارایی را که در سال‌های آتی کسب می‌گردد با استفاده از ضریب تنزیل e^{-rt} به ارزش روز تبدیل می‌نمایند. در این حالت نرخ بهره سالانه r که در محاسبات به عنوان نرخ بهره سرمایه‌گذاری در یک بازار بورس بدون ریسک می‌باشد را به عنوان نرخ تنزیل در نظر می‌گیرند. لذا فرض کنید $R(t)$ یک فرآیند سازگار برای نرخ بهره باشد. فرآیند تنزیل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D(t) = e^{-\int_۰^t R(s) ds}.$$

اگر $J(s) = \int_{\circ}^{t} R(s)ds$ و $f(x) = e^{-x}$ از فرمول ایتو داریم

$$\begin{aligned} dD(t) =& df(J(t)) \\ =& f'(J(t))dJ(t) + \frac{۱}{۲} f''(J(t))dJ(t)dJ(t) \\ =& -R(t)D(t)dt \end{aligned}$$

موضوعی که باید به آن توجه کرد، مسئله تعیین یا محاسبه ارزش فعلی (در زمان صفر) یک سری پرداخت‌ها است که در زمان آینده صورت می‌گیرد. ارزش فعلی این پرداخت‌ها بر مبنای نرخ بهره محاسبه می‌شود.

تعریف ۷.۳.۵. اندازه احتمال Q را **اندازه ریسک خنثی**[3] گوییم، هرگاه داشته باشیم

۱. Q و P دو اندازه احتمال معادل باشند.

۲. فرایند قیمت دارایی تنزیل شده $D(t)S(t)$ تحت Q مارتینگل باشد که $D(t) = e^{-\int_{\circ}^{t} R(s)ds}$، نرخ تنزیل و $R(t)$ نرخ بهره بدون ریسک است.
در صورت ثابت بودن نرخ بهره، نرخ تنزیل e^{-rt} است.

قضیه ۱.۳.۵. فرض کنید $h(t)$ عایدی (بازدهی) یک دارایی در لحظه t باشد. در این صورت ارزش دارایی تحت اندازه ریسک خنثی در لحظه t به صورت زیر است

$$V(t) = E^Q[e^{-\int_{\circ}^{t} R(s)ds} h(T)|F], \qquad \circ \leq t \leq T,$$

که E^Q امید نسبت به اندازه ریسک خنثی Q است.

برهان. به [۳۱] رجوع کنید. □

تعریف ۸.۳.۵. فرآیند براوانی کسری ترکیبی روی فضای احتمال (Ω, F, P) برای هر $t \in R^+$ با پارامترهای α, β و H ترکیب خطی است از فرآیند براوانی و فرآیند براوانی کسری که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_t^H = \alpha B_t + \beta B_t^H, \qquad (۳.۵)$$

---

[3] **Risk neutral measure**

که در آن B_t فرآیند براوانی، B_t^H فرآیند براوانی کسری با پارامتر $H \in (0,1)$ است. α و β دو ثابت واقعی به صورت زیر هستند

$$(\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

گزاره ۱.۳.۵. فرآیند براوانی کسری B_t^H دارای خواص اصلی زیر است

- برای هر $t, s \in \mathbb{R}^+$ ، $E[B_t^H] = 0$ و

$$E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}),$$

که در آن $E[\circ]$ ، انتظارات را با توجه به اندازه احتمال P نشان می‌دهد.

- B_t^H یک فرآیند گاوسی پیوسته است.

گزاره ۲.۳.۵. فرآیند براوانی کسری ترکیبی M_t^H دارای خواص اصلی زیر است

- M_t^H یک فرآیند گاوسی است وقتی $\beta \neq 0$. علاوه بر این، $M_0^H = 0$ و $P(a.s.)$
- برای هر $t, s \in \mathbb{R}^+$ ، تابع کواریانس M_t^H و M_s^H به صورت زیر است

$$Cov(M_t^H, M_s^H) = \alpha^2 (t \wedge s) + \frac{\beta^2}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \tag{۴.۵}$$

که در آن $t \wedge s = \min\{t, s\}$.

- نموهای M_t^H ثابت و ترکیبی خود متشابه هستند. علاوه‌براین نموهای M_t^H اگر $\frac{1}{2} < H < 1$ همبستگی مثبت دارند، اگر $H = \frac{1}{2}$ همبستگی ندارد و اگر $0 < H < \frac{1}{2}$ همبستگی منفی دارد.
- برای هر $l \in \mathbb{R}$ و $t \in \mathbb{R}^+$ ، ریشه n ام زمان از M_t^H به صورت زیر داده شده است

$$E[(M_t^H)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2l+1, \\ \frac{(2l)!}{2^l l!}(\alpha^2 t + \beta^2 t^{2H})^l, & n = 2l. \end{cases} \tag{۵.۵}$$

گزاره ۳.۳.۵. برای یک ثابت $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ ، $\phi(t,s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi(t,s) = H(2H-1)|t-s|^{2H-2}, \quad t, s \in \mathbb{R}^+.$$

سپس ما انتگرال تصادفی کسری زیر و لم ایتوی کسری را داریم یعنی

- اگر یک تابع قطعی $f(t)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} f(s)f(t)\phi(t,s)dsdt < +\infty.$$

سپس انتگرال تصادفی $\int_{0}^{+\infty} f(s)dB_s^H$ برای همه $t \geq 0$ تعریف شده است.

- برای هیچ دو تابع دیفرانسیل‌پذیر پیوسته $G(0,0)$ با مشتقات متناهی، لم ایتوی کسری زیر برقرار است، یعنی

$$dG(t,\theta) = (\frac{\partial G}{\partial t} + f(t)\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}\int_{0}^{t} f(v)\phi(s,v)dv)dt + \frac{\partial G}{\partial \theta}f(t)dB_t^H. \qquad (6.5)$$

۴.۵ فرضیه‌های اساسی

در این بخش ما فرضیه‌های اساسی را معرفی می‌کنیم.

- فضای احتمال (Ω, F, P) ، را در نظر بگیرید که در آن $F = \{F_t\}_{t\geq 0}$ کامل است و تولید شده توسط $F_t = \sigma\{(B_1(t), B_2(t), B_1^H(t), B_2^H(t))\}$ و P اندازه احتمال در Q است.

- رشد (تکامل) نرخ بهره r_t تحت مدل بدون آربیتراژ هال_وایت کسری ترکیبی به صورت زیر داده شده است، یعنی

$$dr_t = [a(t) - b(t)r_t]dt + \sigma_r(t)[\alpha_1 dB_1(t) + \beta_1 dB_1^H(t)], \qquad (7.5)$$

که در آن $b(t)$,$a(t)$ و $\sigma_r(t)$ توابع پیوسته بر حسب متغیر زمان هستند و $B_1(t)$ فرآیند براونی استاندارد و $B_1^H(t)$ فرآیند براونی کسری با پارامتر $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ است.

- دینامیک قیمت سهام S_t داده شده توسط یک فرآیند براونی کسری ترکیبی به صورت زیر داده شده است:

$$dS_t = S_t\{\mu_t dt + \sigma_s(t)[\alpha_2 dB_2(t) + \beta_2 dB_2^H(t)]\}, \qquad (8.5)$$

که درآن μ_t نرخ مورد انتظار S_t ، $\sigma_s(t)$ نرخ نوسان‌پذیر S_t ، $B_2(t)$ فرآیند براوانی استاندارد و $B_2^H(t)$ یک فرآیند براوانی کسری با پارامتر $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ است.

- همبستگی فرآیند براوانی استاندارد $B_1(t)$ و $B_2(t)$ به صورت زیر است

$$Cov(dB_1(t), dB_2(t)) = \rho_1(t)dt.$$

علاوه‌براین، همبستگی فرآیند براوانی کسری $B_1^H(t)$ و $B_2^H(t)$ نیز به صورت زیر است

$$Cov(dB_1^H(t), dB_2^H(t)) = \rho_2(t)dt.$$

- سود سهام در طول عمر قرارداد اختیار معامله‌ها به‌طور مداوم پرداخت می‌شود و نرخ سود سهام $q(t)$ است.
- هزینه‌های معامله و مالیات وجود ندارد. علاوه‌براین، بازار آربیتراژ هم وجود ندارد.

ملاحظه ۱.۴.۵. معادله (۷.۵) مدل نرخ بهره هال_وایت کلاسیک است اگر $\beta_1 = 0$ و $\alpha_1 \neq 0$ ، در حالی که معادله (۷.۵) متناظر است با مدل نرخ بهره هال_وایت کسری اگر $\alpha_1 = 0$ و $\beta_1 \neq 0$.

ملاحظه ۲.۴.۵. معادله (۸.۵) فرآیند براونی هندسی کلاسیک است اگر $\beta_2 = 0$ و $\alpha_2 \neq 0$ ، در حالی که معادله (۸.۵) متناظر است با فرآیند براونی کسری اگر $\alpha_2 = 0$ و $\beta_2 \neq 0$.

۵.۵ قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هال_وایت کسری ترکیبی به روش تقارن لی

مدل هال_وایت را به صورت زیر معرفی می‌کنیم
فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمال و $\{F_t\}_t$ فیلتر استاندارد براونی باشد. همچنین فرض کنید فرآیند قیمت دارایی پایه S_t در لحظه t، تحت اندازه ریسک خنثی Q از مدل زیر تبعیت می‌کند.

$$dS_t = rS_tdt + \sigma(t)S_tdW_t \tag{۹.۵}$$

که در آن r بهره است و W_t فرآیند براونی استاندارد است.

برای قیمت گذاری اختیار توان به روش تبدیل فوریه سریع [۴] لازم است، تابع مشخصه فرآیند قیمت دارایی پایه تحت مدل هال_وایت را بیابیم.
برای به دست آوردن تابع مشخصه به صورت زیر عمل می‌کنیم

تابع مشخصه

قرار می‌دهیم $X_t = \ln S_t$، در این صورت طبق فرمول ایتو و با استفاده از معادله (۹.۵) داریم

$$dX_t = S_t^{-1}[dS_t] - \frac{1}{2}S_t^{-2}[dS_tdS_t] \tag{۱۰.۵}$$

[4] Transform Fourier fast

که در آن

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t) S_t dW_t \tag{۱۱.۵}$$

و

$$[dS_t dS_t] = \sigma^۲(t) S_t^{۲} dt \tag{۱۲.۵}$$

حال با جایگذاری معادلات (۱۱.۵) و (۱۲.۵) در معادله (۱۰.۵) داریم

$$dX_t = rdt + \sigma(t) dW_t - \frac{۱}{۲}[\sigma^۲(t)]dt \tag{۱۳.۵}$$

تابع مشخصه فرآیند دارایی پایه را به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varphi_{\ln S_t}(u) = E^Q[exp\{iu \ln(S_t)\}]$$

حال از (۱۳.۵) تابع مشخصه به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
\varphi_{\ln S_t}(u) &= E^Q[exp\{iu \ln(S_T)\}] \\
&= E^Q[exp\{iu(\ln S_۰ + rT + \int_۰^T \sigma(t) dW_T + \int_۰^T -\frac{۱}{۲}[\sigma^۲(t)]dt)\}] \\
&= exp\{iu(\ln(S_۰) + rT)\} E^Q[exp\{+iu \int_۰^T \sigma(t) dW_T + iu \int_۰^T -\frac{۱}{۲}[\sigma^۲(t)]dt\}] \\
&= exp\{iu(\ln(S_۰) + rT)\} E^Q[exp\{+iu\, \sigma(W_T) - \frac{iu}{۲}[\sigma^۲(T)]T\}]
\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$S_۱ = iu,$$
$$S_۲ = -\frac{iu}{۲}.$$

بنابراین تابع مشخصه فرآیند قیمت دارایی تحت مدل هال_وایت به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\varphi_{\ln S_T}(u) = exp\{iu(\ln(S_۰) + rT)\} E^Q[exp\{S_۱ \sigma(W_T) + S_۲[\sigma^۲(T)]T\}]. \tag{۱۴.۵}$$

برای به دست آوردن جواب‌های تحلیلی ارزش‌گذاری اختیار به روش تقارن لی به صورت زیر عمل می‌کنیم

فرض کنیم $C_m(T,K)$ تابع قیمت اختیار خرید توان با قیمت توافقی K و زمان سررسید T باشد. در این صورت طبق تعریف قیمت‌گذاری اختیار خرید توان تحت اندازه ریسک خنثی Q به صورت زیر است

$$C_m(t,K) = e^{-r(T-t)} E^Q[(S_T^m - K^m)^+ | F_t], \tag{۱۵.۵}$$

که در آن r نرخ بهره (مقادیر ثابت) است. فرض کنید $t = ۰$، $X_t = \ln S_t$ و $k = \ln K$ در این صورت از رابطه (۱۵.۵) خواهیم داشت

$$C_m(T,k) = e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{mX_T} - e^{mk}) q_T(X_T) dX_T, \tag{۱۶.۵}$$

که در آن $q_T(X_T)$ تابع چگالی فرآیند تصادفی X_T است. توجه کنید که وقتی که k به منفی بی‌نهایت میل می‌کند آن‌گاه تابع $C_m(T,k)$ به $S_۰$ میل می‌کند.در [۹] کار و مادان قیمت اصلاح شده اختیار خرید را به صورت زیر معرفی کردند.

$$c_m(T,k) = e^{\alpha k} C_m(T,k), \qquad \forall \quad \alpha > ۰. \tag{۱۷.۵}$$

که در آن α ضریب اصلاح شده قیمت خرید و وابسته به مدل قیمت دارایی پایه S_t است. این پارامتر باید طوری انتخاب شود که

$$E(S_T^{\alpha+۱}) < \infty \Longrightarrow \varphi_{C_T}(-(\alpha+۱)i) < \infty$$

تبدیل فوریه روی $c_m(T,k)$ به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\psi_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} c_m(T,k) dk. \tag{۱۸.۵}$$

با جای‌گذاری معادله (۱۶.۵) در (۱۷.۵) و همچنین معادله (۱۷.۵) در (۱۸.۵) داریم

$$\begin{aligned}
\psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} e^{\alpha k} e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{mX_T} - e^{mk}) q_T(X_T) dX_T dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} q_T(X_T) \int_{-\infty}^{X_T} (e^{mX_T} - e^{mk}) e^{iuk} e^{\alpha k} dk dX_T \\
&= \frac{m e^{-rT} \varphi_T(u - (\alpha+m)i)}{(\alpha+iu)(m+\alpha+iu)}.
\end{aligned}$$

که در آن φ_T تابع مشخصه X_t تحت اندازه ریسک خنثی است. طبق تعریف معکوس تبدیل فوریه تابع $c_m(T,k)$ به صورت زیر است

$$c_m(T,k) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du.$$

از طرفی با توجه به (۱۷.۵) به صورت زیر حاصل می‌شود

$$C_m(T,k) = \frac{e^{-\alpha k}}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du. \tag{۱۹.۵}$$

با به کار بردن قاعده ذوزنقه‌ای[۵] (روش تقریب انتگرال) برای انتگرال سمت راست (۱۹.۵) داریم

$$C_m(T,k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi}\sum_{j=1}^{N} e^{-iu_jk}\psi_T(u_j)\triangle, \qquad (۲۰.۵)$$

که $\triangle$ طول گام انتگرال، $a = N\triangle$ حد بالای انتگرال و $u_j = \triangle(j-1)$.
روش تبدیل فوریه سریع، روشی موثر برای محاسبه مجموع

$$w(v) = \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(v-1)}x(j), \qquad (۲۱.۵)$$

برای $v = 1,2,\dots,N$ است. حال با استفاده از این روش ابتدا تعریف می‌کنیم

$$k_v = -b + \eta(v-1), \qquad (۲۲.۵)$$

که $b = \frac{N\eta}{2}$. این رابطه N مقدار را، از ارزش‌های لگاریتم قیمت توافقی در بازه $[-b,b]$ با طول گام منظم η می‌دهد. سپس قرار می‌دهیم $\eta\triangle = \frac{2\pi}{N}$ در این صورت داریم

$$C_m(k_v) \approx \frac{e^{-\alpha k_v}}{\pi}\sum_{j=1}^{N} e^{-i\eta\triangle(j-1)(v-1)}e^{ibu_j}\psi_T(u_j)\triangle.$$

از طرف دیگر، قاعده سیمپسون[۶] به ما کمک می‌کند تا فرمول قیمت‌گذاری دقیق‌تری برای $\triangle$ های بزرگ به صورت زیر بدست آید

$$C_m(T,k) = \frac{e^{-\alpha k_v}}{\pi}\sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(v-1)}e^{ibu_j}\psi_T(u_j)\frac{\triangle}{3}(3 + (-1)^j - \delta_{j=1}),$$

که در آن δ تابع دیریکله است.
فرمول فوق، **قیمت اصلاح شده اختیار خرید توان** m **ـ‌ام** با استفاده از **روش تبدیل فوریه سریع** است.

برای تعیین معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) مدل هال_وایت ابتدا ساختار مدل هال_وایت را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$dS_t = (b(t) - a(t)S_t)dt + \sigma_t dW_t.$$

[5] Trapezoidal rule
[6] Simpson"s rule

قرار می‌دهیم $X_t = \ln S_t$. با استفاده از فرمول ایتو داریم

$$dX_t = \frac{1}{S_t}[dS_t] - \frac{1}{2S_t^2}[dS_t^2], \tag{۲۳.۵}$$

که در آن

$$dS_t = (b(t) - a(t)S_t)dt + \sigma_t dW_t.$$

و

$$dS_t^2 = \sigma_t^2 dt.$$

حال dS_t و dS_t^2 را در (۲۳.۵) که همان dX_t است جایگذاری می کنیم

$$dX_t = [\frac{1}{S_t}b(t) - a(t)]dt + \frac{1}{S_t}\sigma_t dW_t - \frac{1}{2S_t^2}\sigma_t^2 dt. \tag{۲۴.۵}$$

طبق تعریف تابع مشخصه،

$$\psi(\varphi, T-t, x) = f(t, x, \sigma) = E(e^{iuX_t}|X_t = x).$$

با استفاده فرمول ایتو روی تابع f خواهیم داشت.

$$df(t, x, \sigma) = f_t dt + f_x dx + f_{xx} dx dx. \tag{۲۵.۵}$$

که در آن f_t ، f_x و f_{xx} به صورت زیر هستند

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t},$$
$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$f_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

با جایگذاری (۲۴.۵) در (۲۵.۵) داریم:

$$f_t + [\frac{1}{S_t}b(t) - a(t) - \frac{1}{2S_t^2}\sigma_t^2]f_x + \frac{1}{S_t^2}\sigma_t^2 f_{xx} - f(t, x, \sigma) = 0. \tag{۲۶.۵}$$

در ادامه دسته‌ی خاص از جواب‌های دقیق معادله بالا را به کمک تقارن‌ها بدست می‌آوریم

حات اول

حالت خاصی از (۲۶.۵) را به صورت

$$f_t + f_x + f_{xx} - f = 0, \tag{۲۷.۵}$$

در نظر می‌گیریم. این معادله عملگرهای زیر را به عنوان تقارن می‌پذیرد

$$X_1 = \partial_x,$$

$$X_۲ = \partial_t,$$

$$X_۳ = f\partial_f,$$

$$X_۴ = t\partial_x - \frac{۱}{۲}(t-x)f\partial_f,$$

$$X_۵ = \frac{x}{۲}\partial_x + t\partial_t + \frac{۱}{۴}(۵t-x)f\partial_f,$$

$$X_۶ = \frac{۱}{۲}xt\partial_x + \frac{۱}{۲}t^۲\partial_t + \frac{۱}{۸}(۵t^۲ - ۲xt - ۲t + x^۲)f\partial_f.$$

که در آن $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ، $\partial_f = \frac{\partial}{\partial f}$ و $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

حال به کمک تقارن $X_۱$ ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $f = v(r)$ ، $t = r$ و $x = q$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۲۷.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$v' - v = ۰.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت $v = ae^r$ دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب $f = ae^t$ برای (۲۷.۵) می‌رسیم.

حال به کمک تقارن $X_۲$ ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغییرهای $f = v(r)$ ، $t = q$ و $x = r$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۲۷.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$v' + v'' - v = ۰.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت

$$v = a\, exp[(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})r] + b\, exp[-(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})r]$$

دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب

$$f = a\, exp[(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})x] + b\, exp[-(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})x]$$

برای (۲۷.۵) می‌رسیم.

حال به کمک تقارن $X_۱ + X_۲$ ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $f = v$ ، $t = r + q$ و $x = q$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۲۷.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$v'' - v = ۰.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت $v = ae^r + be^{-r}$ دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب $f = ae^{t-x} + be^{x-t}$ برای (۲۷.۵) می‌رسیم.

حالت دوم

حالت خاصی از (۲۶.۵) را به صورت

$$f_t + f_{xx} - f = 0, \qquad (۲۸.۵)$$

در نظر می‌گیریم. این معادله عملگرهای زیر را به عنوان تقارن می‌پذیرد

$$X_1 = \partial_x,$$

$$X_2 = \partial_t,$$

$$X_3 = f\partial_f,$$

$$X_4 = t\partial_x + \frac{1}{2}xf\partial_f,$$

$$X_5 = \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t + ft\partial_f,$$

$$X_6 = \frac{1}{2}xt\partial_x + \frac{1}{2}t^2\partial_t + \frac{1}{8}(x^2 + 4t^2 - 2t)f\partial_f.$$

که در آن $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ، $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ و $\partial_f = \frac{\partial}{\partial f}$.

حال به کمک تقارن X_1 ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $f = v(r)$ ، $t = r$ و $x = q$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۲۸.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$v' - v = 0.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت $v = ae^r$ دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب $f = ae^t$ برای (۲۸.۵) می‌رسیم.

حال به کمک تقارن X_2 ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغییرهای $f = v(r)$ ، $t = q$ و $x = r$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۲۸.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$v'' - v = 0.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت $v = ae^r + be^{-r}$ دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب $f = ae^{t-x} + be^{x-t}$ برای (۲۸.۵) می‌رسیم.

حال به کمک تقارن $X_1 + X_2$ ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $f = v$ ، $t = r + q$ و $x = q$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۲۸.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$v' + v'' - v = 0.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت

$$v = a\,exp[(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})r] + b\,exp[-(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})r]$$

دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب

$$f = a\,exp[(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})x] + b\,exp[-(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})x]$$

برای (۲۸.۵) می‌رسیم.

حال به کمک تقارن $X_۵$ ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $f = \frac{v}{e^{-ve(\frac{q}{۴})^۲}}$ ، $t = re^q$ و $x = e^{(\frac{q}{۴})}$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۲۸.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$v' + ۶rv' + ۴rv'' = ۰.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت

$$v = a + br^{-\frac{۵}{۸}}e^{-\frac{۳}{۴}r}\Big[۶r\,whittaker\Big(\frac{۳}{۸},\frac{۷}{۸},\frac{۳r}{۲}\Big) + ۷\,whittaker\Big(\frac{۱۱}{۸},\frac{۷}{۸},\frac{۳r}{۲}\Big)\Big]$$

دارد.

حالت سوم

حالت‌های خاصی از (۲۶.۵) را به صورت

$$f_t - \sigma^۲ f_x + \sigma^۲ f_{xx} - f = ۰, \tag{۲۹.۵}$$

در نظر می‌گیریم. این معادله عملگرهای زیر را به عنوان تقارن می‌پذیرد

$$X_۱ = \partial_x,$$

$$X_۲ = \partial_t,$$

$$X_۳ = f\partial_f,$$

$$X_۴ = t\partial_t + \frac{(x+\sigma^۲ t)}{۲\sigma^۲}f\partial_f,$$

$$X_۵ = \frac{x}{۲}\partial_x + t\partial_t + \frac{۱}{۶}(\sigma^۲ t + ۶t + x)f\partial_f,$$

$$X_۶ = \frac{۱}{۲}xt\partial_x + \frac{۱}{۲}t^۲\partial_t + \frac{۱}{۸\sigma^۲}(t^۲\sigma^۴ + (۴t^۲ + ۲(x-۱)t)\sigma^۲ + x^۲)f\partial_f.$$

که در آن $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ، $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ و $\partial_f = \frac{\partial}{\partial f}$.

جواب (۲۹.۵) به کمک تقارن‌های $X_۱$ و $X_۲$ مشابه حالت‌های قبل است.

حال به کمک تقارن $X_۱ + X_۲$ ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $f = v$ ،

$t = r + q$ و $x = q$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۲۹.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$v' + \sigma^{۲} v' + \sigma^{۲} v'' - v = ۰.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت

$$v = aexp\Big[\frac{(-۱ - \sigma^{۲} + \sqrt{۱ + ۶\sigma^{۲} + \sigma^{۴}})r}{۲\sigma^{۲}}\Big] + bexp\Big[-\frac{(۱ + \sigma^{۲} + \sqrt{۱ + ۶\sigma^{۲} + \sigma^{۴}})r}{۲\sigma^{۲}}\Big]$$

دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب

$$f = aexp\Big[\frac{(-۱ - \sigma^{۲} + \sqrt{۱ + ۶\sigma^{۲} + \sigma^{۴}})t - x}{۲\sigma^{۲}}\Big] + bexp\Big[-\frac{(۱ + \sigma^{۲} + \sqrt{۱ + ۶\sigma^{۲} + \sigma^{۴}})t - x}{۲\sigma^{۲}}\Big]$$

برای (۲۹.۵) می‌رسیم.

حالت چهارم

حالت خاصی از (۲۶.۵) را به صورت

$$f_t + \frac{۱}{s} f_x - f = ۰, \qquad (۳۰.۵)$$

در نظر می‌گیریم. این معادله عملگرهای زیر را به عنوان تقارن می‌پذیرد

$$X_{۱} = \partial_x,$$

$$X_{۲} = \partial_t,$$

$$X_{۳} = f\partial_f,$$

$$X_{۴} = \frac{x}{۲}\partial_x + t\partial_t + tf\partial_f,$$

$$X_{۵} = t\partial_x + \frac{sxf}{۲}\partial_f,$$

$$X_{۶} = \frac{xt}{۲}\partial_x + \frac{t^{۲}}{۲}\partial_t + \frac{(۴t^{۲} - ۲t + sx^{۲})}{۸} f\partial_f.$$

که در آن $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ، $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ و $\partial_f = \frac{\partial}{\partial f}$.

جواب (۳۰.۵) به کمک تقارن‌های $X_{۱}$ و $X_{۲}$ مشابه حالت‌های قبل است.

حال به کمک تقارن $x_{۱} + x_{۲}$ ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $f = v$ ، $t = r + q$ و $x = q$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۳۰.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$v' + \frac{۱}{s} v'' - v = ۰.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت

$$v = a\,exp\Big[\Big(-\frac{s}{۲}+\frac{\sqrt{s^۲+۴s}}{۲}\Big)r\Big]+b\,exp\Big[-\Big(\frac{s}{۲}+\frac{\sqrt{s^۲+۴s}}{۲}\Big)r\Big]$$

دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب

$$f = a\,exp\Big[\Big(-\frac{s}{۲}+\frac{\sqrt{s^۲+۴s}}{۲}\Big)t-x\Big]+b\,exp\Big[-\Big(\frac{s}{۲}+\frac{\sqrt{s^۲+۴s}}{۲}\Big)t-x\Big]$$

برای (۳۰.۵) می‌رسیم.

حال به کمک تقارن $X_۵$ ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $f=\frac{v}{e^{-re(\frac{q}{۲})^۲}}$ ، $t=re^q$ و $x=e^{(\frac{q}{۲})}$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۳۰.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$sv'+۶v'r+۴r^۲v''=۰.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت

$$v = a+b\,erf\Big(\frac{\sqrt{-s}}{۲\sqrt{r}}\Big)$$

دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب

$$f = a+b\,erf\Big(\frac{\sqrt{-s}}{۲\sqrt{t}}x\Big)$$

برای (۳۰.۵) می‌رسیم.

در بازارهای مالی، تقریبا تمام قیمت‌های امنیتی و بازده آنها مرتبط به نرخ بهره است که به عنوان عامل مهم دیده می‌شود. اوراق قرضه در مطالعه نرخ بهره نقش مهمی ایفا می‌کند. در ادامه این بخش ما فرمول قیمت‌گذاری برای اوراق قرضه با کوپن صفر بدون ریسک تحت مدل هال_وایت کسری ترکیبی و فرمول قیمت گذاری برای اختیار اروپایی را ارائه می‌دهیم. فرض می‌کنیم $P=P(r,t)$ نشان‌دهنده قیمت اوراق قرضه با کوپن صفر بدون ریسک با ارزش اسمی ۱ در زمان t باشد. با توجه فرمول فایمن_کاک، ما فرمول قیمت‌گذاری را به صورت زیر داریم.

گزاره ۱.۵.۵. در مدل هال_وایت کسری ترکیبی، قیمت یک اوراق قرضه با کوپن صفر بدون ریسک در زمان t به صورت زیر است

$$P(r,t)=e^{A_۱(t)-A_۲(t)r}, \qquad (۳۱.۵)$$

که در آن

$$A_۲(t)=e^{-\int_t^T b(s)ds}\int_t^T e^{\int_s^T b(v)dv}ds$$

و

$$A_1(t) = -\int_t^T \Big[a(s)A_2(s) - (Hs^{2H-1}\beta_1^2 + \frac{\alpha_1^2}{2})\sigma_r^2(s)A_2^2(s)\Big]ds.$$

برهان. از آنجایی که نرخ بهره تصادفی است، قیمت یک اوراق قرضه با کوپن صفر بدون ریسک در زمان t به صورت زیر داده شده است

$$P(r,t) = E[e^{-\int_t^T r_s ds}|r_t = r], \qquad t < T. \tag{۳۲.۵}$$

با استفاده از فرمول فایمن_کاک، $P(r,t)$ مسئله معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) به شرح زیر است

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + [Ht^{2H-1}\beta_1^2 + \frac{\alpha_1^2}{2}]\sigma_r^2(t)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + [a(t) - b(t)r]\frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0, \\ P(r,T) = 1. \end{cases} \tag{۳۳.۵}$$

توجه داشته باشید که قیمت اوراق قرضه با کوپن صفر بدون ریسک دارای ساختار فرم نمائي تحت مدل هال_وایت کلاسیک است. همچنین، ما فرض می‌کنیم که $P(r,t)$ جوابی به صورت زیر است، یعنی

$$P(r,t) = e^{A_1(t) - A_2(t)r}, \tag{۳۴.۵}$$

که در آن $A_1(t)$ و $A_2(t)$ دو تابع قطعی با شرایط مرزی $A_1(T) = 0$ و $A_2(T) = 0$ هستند. اگر معادله (۳۴.۵) را در معادله (۳۳.۵) جایگزین کنیم، به معادله دیفرانسیل معمولی زیر می‌رسیم

$$\begin{cases} \frac{dA_1(t)}{dt} - a(t)A_2(t) + [Ht^{2H-1}\beta_1^2 + \frac{\alpha_1^2}{2}]\sigma_r^2(t)A_2^2(t) = 0, \\ A_1(T) = 0, \end{cases} \tag{۳۵.۵}$$

$$\begin{cases} \frac{dA_2(t)}{dt} - b(t)A_2(t) + 1 = 0, \\ A_2(T) = 0. \end{cases} \tag{۳۶.۵}$$

با یک محاسبه ساده، جواب مساله (۳۶.۵) به صورت زیر حاصل می‌شود

$$A_2(t) = e^{-\int_t^T b(s)ds}\int_t^T e^{\int_s^T b(v)dv}ds \tag{۳۷.۵}$$

سپس جواب مساله (۳۵.۵) را می‌توان با استفاده از $A_2(t)$ به صورت زیر به دست آورد

$$A_1(t) = -\int_t^T \Big[a(s)A_2(s) - (Hs^{2H-1}\beta_1^2 + \frac{\alpha_1^2}{2})\sigma_r^2(s)A_2^2(s)\Big]ds. \tag{۳۸.۵}$$

بنابراین فرمولی برای قیمت‌گذاری اوراق قرضه با کوپن صفر بدون ریسک بدست آوردیم. □

حال به کمک روش تقارن لی جوابی برای معادله (۳۳.۵) به دست می‌آوریم.

حالت اول

حالت خاصی از(۳۳.۵) را به صورت

$$u_t + u_{xx} + u_x - u = 0, \tag{۳۹.۵}$$

در نظر می‌گیریم.این معادله عملگرهای زیر را به عنوان تقارن می‌پذیرد

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$v_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$v_3 = u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$v_4 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}(t-x)u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$v_5 = \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{4}(5t-x)u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$v_6 = \frac{xt}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{8}(5t^2 - 2tx + x^2 - 2t)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

جواب (۳۹.۵) به کمک تقارن‌های v_1 ، v_2 و $v_1 + v_2$ مشابه حالت اول برای (۲۷.۵) است.

حالت دوم

حالت خاصی از (۳۳.۵) را به صورت

$$u_t + u_{xx} + xu_x - xu = 0, \tag{۴۰.۵}$$

در نظر می‌گیریم. این معادله عملگرهای زیر را به عنوان تقارن می‌پذیرد

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$v_2 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$v_3 = e^t\frac{\partial}{\partial x} + ue^t\frac{\partial}{\partial u},$$

$$v_4 = e^{-t}\frac{\partial}{\partial x} + \Big(\frac{-u(e^t e^{-t}x + 1)}{e^t}\Big)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$v_5 = (x+2)e^{2t}\frac{\partial}{\partial x} + e^{2t}\frac{\partial}{\partial t} + u(e^{2t}x + (e^t)^2)\frac{\partial}{\partial u}.$$

حال به کمک تقارن v_1 ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $u = v(r)$ ، $x = r$ و $t = q$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۴۰.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$-rv + rv' + v'' = 0.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت

$$v = a\,exp(-\frac{۱}{۲}r(۲+r)) + b\,exp(-\frac{۱}{۲}r(۲+r))\,erf(\frac{۱}{۲}I\sqrt{۲}(۲+r))$$

دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب

$$u = a\,exp(-\frac{۱}{۲}x(۲+x)) + b\,exp(-\frac{۱}{۲}x(۲+x))\,erf(\frac{۱}{۲}I\sqrt{۲}(۲+x))$$

برای (۴۰.۵) می‌رسیم [۱۵].

در ادامه فرمول قیمت‌گذاری برای قرارداد اختیار معامله اروپایی تحت مدل هال_وایت کسری ترکیبی به روش تقارن لی ارائه می‌دهیم.
در ادامه برای بدست آوردن قیمت‌گذاری قرارداد اختیار معامله اروپایی، ما معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) برای ارزیابی قرارداد اختیار معامله اروپایی از طریق اصل $\Delta-$ پوشش و لم ایتوی کسری می‌سازیم.
پرتفوی می‌سازیم که ترکیبی است از یک سهم از قرارداد اختیار معامله، $\Delta_۱$ یک سهم از سهام و $\Delta_۲$ یک سهم از اوراق قرضه با کوپن صفر است.قیمت یک قرارداد اختیار معامله اروپایی را با $V(S,r,t)$ و ارزش پرتفوی در زمان t را با Π_t نشان می‌دهیم. سپس داریم

$$\Pi_t = V - \Delta_۱ S_t - \Delta_۲ P_t. \quad (۴۱.۵)$$

علاوه‌براین همواره با فرض (v) ، بازده Π_t در فاصله $(t, t+dt)$ به صورت زیر است

$$d\Pi_t = dV_t - \Delta_۱ dS_t - \Delta_۱ q(t) S_t dt - \Delta_۲ dP_t. \quad (۴۲.۵)$$

بعد به‌کار بردن لم ایتوی کسری برای معادله (۴۲.۵) و همچنین انتخاب $\Delta_۱ = \frac{\partial V}{\partial S}$ و $\Delta_۲ = \frac{\frac{\partial V}{\partial r}}{\frac{\partial P}{\partial r}}$ برای حذف کردن نویز تصادفی معادله (۴۲.۵)، داریم

$$d\Pi_t = \Big\{\frac{\partial V}{\partial t} + Ht^{۲H-۱}\Big[\sigma_s^۲(t)\beta_۲^۲ S^۲\frac{\partial^۲ V}{\partial S^۲} + \sigma_r^۲(t)\beta_۱^۲\frac{\partial^۲ V}{\partial r^۲} + ۲\rho_۲(t)\sigma_s(t)\sigma_r(t)\beta_۱\beta_۲ S\frac{\partial^۲ V}{\partial r\partial S}\Big]$$

$$+ \frac{۱}{۲}\Big[\sigma_s^۲(t)\alpha_۲^۲ S^۲\frac{\partial^۲ V}{\partial S^۲} + \sigma_r^۲(t)\alpha_۱^۲\frac{\partial^۲ V}{\partial r^۲} + ۲\rho_۱(t)\sigma_s(t)\sigma_r(t)\alpha_۱\alpha_۲ S\frac{\partial^۲ V}{\partial r\partial S}\Big]\Big\}dt$$

$$- q(t)S\frac{\partial V}{\partial S}dt - \frac{\frac{\partial V}{\partial r}}{\frac{\partial P}{\partial r}}\Big[\frac{\partial P}{\partial t} + (Ht^{۲H-۱}\beta_۱^۲ + \frac{\alpha_۱^۲}{۲})\sigma_r^۲(t)\frac{\partial^۲ P}{\partial r^۲}\Big]dt.$$

(۴۳.۵)

از طرف دیگر، با فرض (vi) ، ما می‌دانیم که بازده برای هر پرتفوی بدون ریسک باید r باشد. از این رو، مقدار (ارزش) $d\Pi_t$ به صورت زیر است

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt = r\Big(V - \frac{\partial V}{\partial S}S - \frac{\frac{\partial V}{\partial r}}{\frac{\partial P}{\partial r}}P\Big)dt. \quad (۴۴.۵)$$

با جایگذاری (۳۳.۵) و (۴۳.۵) در (۴۴.۵) و همچنین با برخی محاسبات داریم

$$\frac{\partial V}{\partial t}+Ht^{2H-1}\Big[\sigma_s^2(t)\beta_2^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\sigma_r^2(t)\beta_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2\rho_2(t)\sigma_s(t)\sigma_r(t)\beta_1\beta_2S\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial S}\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\sigma_s^2(t)\alpha_2^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\sigma_r^2(t)\alpha_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2\rho_1(t)\sigma_s(t)\sigma_r(t)\alpha_1\alpha_2S\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial S}\Big]$$

$$+[r-q(t)]S\frac{\partial V}{\partial S}+[a(t)-b(t)r]\frac{\partial V}{\partial r}-rV=0,$$

که فقط معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) است که حرکت قیمت قرارداد اختیار معامله در مدل هال_وایت کسری ترکیبی را توضیح می‌دهد. علاوه‌براین، برای تعیین قیمت قرارداد اختیار معامله در زمان t ، ما نیاز به شرایط نهایی داریم. در این متن، یک قرارداد اختیار معامله خرید را به عنوان مثال می‌خواهیم. در این مورد، ما تنها نیاز به حل مسئله معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) زیر در دامنه

$$\sum=\{(S,,r,t):0<S<+\infty,-\infty<r<+\infty,0<t<T\},$$

داریم:

$$\begin{cases}\frac{\partial V}{\partial t}+Ht^{2H-1}\Big[\sigma_s^2(t)\beta_2^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\sigma_r^2(t)\beta_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2\rho_2(t)\sigma_s(t)\sigma_r(t)\beta_1\beta_2S\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial S}\Big]\\ +\frac{1}{2}\Big[\sigma_s^2(t)\alpha_2^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\sigma_r^2(t)\alpha_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2\rho_1(t)\sigma_s(t)\sigma_r(t)\alpha_1\alpha_2S\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial S}\Big]\\ +[r-q(t)]S\frac{\partial V}{\partial S}+[a(t)-b(t)r]\frac{\partial V}{\partial r}-rV=0,\\ V(S,r,T)=(S-K)^+.\end{cases}\tag{۴۵.۵}$$

اکنون معادله (۴۵.۵) را به روش تقارن لی حل می‌کنیم.

حالت خاصی از (۴۵.۵) را به صورت

$$u_t+2u_{xx}+2u_{yy}+2u_{yx}+u_x+u_y-u=0,\tag{۴۶.۵}$$

در نظر می‌گیریم. این معادله عملگرهای زیر را به عنوان تقارن می‌پذیرد

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_2=\frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_3=\frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_4=u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_5=t\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{6}(t-2x+y)u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_6=t\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{6}(t+x-2y)u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_7=\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{12}(14t-x-y)u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_8=y-\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}y-x\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{4}(x-y)u\frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_9=\frac{1}{2}xt\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}t^2\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}yt\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{12}(7t^2-tx-ty+x^2-xy+y^2-6t)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

حال به کمک تقارن X_1 ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $u=v(r,q)$ ، $y=r$ ، $x=q$ و $t=z$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذاری آنها در (۴۶.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$2v_{qq}+2v_{rr}+2v_{qr}+v_q+v_r-v(r,q)=0. \qquad (۴۷.۵)$$

اکنون به کمک (۴۷.۵)، PDE جدیدی برای (۴۵.۵) را به صورت زیر داریم

$$2u_{xx}+2u_{yy}+2u_{xy}+u_x+u_y-u=0. \qquad (۴۸.۵)$$

این معادله عملگرهای زیر را به عنوان تقارن می‌پذیرد

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_2=\frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_3=u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4=y-\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x}-x+\frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{4}ux\frac{\partial}{\partial u}.$$

حال به کمک تقارن X_1 ، معادله را کاهش می‌دهیم. این تقارن متغیرهای $u=v(r)$ ، $y=r$ و $x=q$ را به عنوان متغیرهای گروه ناوردایی می‌پذیرد. حال با جایگذای آنها در (۴۸.۵)، به معادله کاهش یافته زیر می‌رسیم

$$2v''+v'-v=0.$$

این معادله یک جواب عمومی به صورت $v(r)=ae^{-r}+be^{\frac{1}{2}r}$ دارد. حال با جایگذاری متغیرهای گروه ناوردایی فوق در این جواب به جواب $u=ae^{-y}+be^{\frac{1}{2}y}$ برای (۴۸.۵) می‌رسیم [۱۵].

مراجع

[۱] لطیفی‌ر،(۱۳۹۵)، پایان نامه ارشد: ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون، دانشکده ریاضی،دانشگاه صنعتی شاهرود.

[۲] سیاح‌س.، صالح آبادی‌ع (۱۳۸۴)، مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک، (ترجمه)، گروه رایانه تدبیرپرداز.

[3] Barros, CP, L Gil-Alana and R Matousek (2012). Mean reversion of short-run interest rates: Empirical evidence from new EU countries, European Journal of Finance, 18(3), 89-107.

[4] Bender, C (2003). Integration with respect to fractional Brownian motion and related market models, PH.D.thesis, University of Konstanz, Department of Mathematics and Statistics.

[5] Black, F and M Scholes (1973). The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81(3), 637-659.

[6] Cajueiro, DO and BM Tabak (2007). Long-range dependence and multifractality in the term structure of LIBOR interest rates, Physica A, 373(10), 603-614.

[7] Cajueiro, DO and BM Tabak (2009). Testing for long-range dependence in the Brazilian term structure of interest rates, Chaos, Solitons and Fractals, 40(4), 1559-1573.

[8] Cheridito, P (2001). Mixed fractional Brownian motion, Bernoulli, 7(6), 913-934.

[9] Carr, P., Madan, D. (1999), Option valuation using the fast Fourier transform, Journal of Computational Finance, 2(4), 61-73.

[10] Chalasani, P., and jha, S. (1997), Steven Shreve: Stochastic Calculus and Finance Lecture Notes,October.

[11] Cheridito, P (2003). Arbitrage in fractional Brownian motion models, Finance and Stochastics, 7(4), 533-553.

[12] Chung, K. L. (2001),A Course in Probability Theory, Academic Press.

[13] Duncan, TE, YZ Hu and PD Bozenna (2000). Stochastic calculus for fractional Brownian motion I: Theory, SIAM Journal on Control and Optimization, 38(2), 582-612.

[14] Elliott, RJ and JVD Hoek (2003). A general fractional white noise theory and applications to finance, Mathematical Finance, 13(2), 301-330.

[15] Easapur H., Exact solution for option pricing under mixed fractional Hull-White interest rate model, submitted.

[16] Gil-Alana, LA (2003). Long memory in the interest rates in some Asian countries, International Advances in Economic Research, 9(4), 257-267.

[17] Gil-Alana, LA (2004). Modelling the U.S. interest rate in terms of I (d) statistical models, Quarterly Review of Economics and Finance, 44(4), 475-486.

[18] Hull, JC (2015). Options, Futures, and Other Derivatives, 9th edn., USA: Prentice Hall.

[19] Mariani, MC, I Florescu, Varela MPB and E Ncheuguim (2010). Study of memory effects in international market indices, Physica A, 389(8), 1653-1664.

[20] McCarthy, J, R DiSario, H Saraoglu and H Li (2004). Tests of long-range dependence in interest rates using wavelets, Quarterly Review of Economics and Finance, 44(1), 180-189.

[21] Heynen, R. C., and Kat, H. M. (1996), Pricing and hedging power options, Financial Engineering and the Japanese Markets, 3(3), 253-261.

[22] Merton, RC (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, Journal of Financial Economics, 3(1-2), 125-144.

[23] Kim, j., Kim, B., Moon, K. S., and Wee, I. S. (2012), Valuation of power options under Hestons stochastic volatility model, Journal of Economic Dynamics and Control, 36(11), 1796-1813.

[24] Necula, C (2002). Option pricing in a fractional Brownian motion environment, Mathematical Reports, 2(3), 259-273.

[25] Rao, BLSP (2016). Pricing geometric Asian power options under mixed fractional Brownian motion environment, Physica A, 446, 92-99.

[26] Serinaldi, F (2010). Use and misuse of some Hurst parameter estimators applied to stationary and non-stationary financial time series, Physica A, 389(14), 2770-2781.

[27] Oksendal, B. (2003), Stochastic Differential Equations, In Stochastic differential equations (pp.65-84). Springer Berlin Heidelberg.

[28] Shreve, SE (2004). Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, New York: Springer-Verlag.

[29] Sun, L (2013). Pricing currency options in the mixed fractional Brownian motion, Physica A, 392(16), 3441-3458.

[30] Tabaka, BM and DO Cajueiro (2005). The long-range dependence behavior of the term structure of interest rates in Japan, Physica A, 350(2), 418-426.

[31] Sturm, A., and Bjork, T. (2001), Arbitrage Theory in Continuous Time.

[32] Xiao, WL, WG Zhang, XL Zhang and XY Chen (2014). The valuation of equity warrants under the fractional Vasicek process of the short-term interest rate,Physica A, 394(2), 320-337.

[33] Xiao, WL, WG Zhang, XL Zhang and YL Wang (2012).Pricing model for equity warrants in a mixed fractional Brownian environment and its algorithm, Physica A, 391(24), 6418-6431.

[34] Tanko P.(2003), ”Financial modeling with jump process”, .2,CRC press.

[35] T. Bjork, Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford Univ. Press, 1999.

[36] T. E.Ducan, Y. Hu, and B.P. Ducan, Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion. Theory, SIAM Control and Optimization 38 (2000) 582-612.

[37] T. H. Thao and T. T. Nguyen, Fractal Langevin Equation, Vietnam J. Math. 30 (2002) .89-96

[38] V. Goodman and G. Stampfli, An Introduction to the Mathematics of Finance: Modeling and Hedging, Brook/Cole, California, 2001.

Abstract

Among stochastic volatality models, Hall-White model is one of the most important models. In this thesis, a zero coupon bonds pricing is considered under the mixed fractional Hull-White model. To this, the European option pricing under Black-scholes model, the Hall-White model and the fractional Hall-White model, the mixed fractional are presented. In the sequel the option pricing Under the Hall-White model is driven. Finally analytical solutions for option pricing is obtained via Lie symmetry group.

key words: Power options, Hall-White model, fractional Hall-White model, Mixed fractional Hull-White model, Stochastic volatility, Fast Fourier transform

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Financial Mathematice

Analytical Solutions of Pricing for Options in a Mixed Fractional Hull-White Model via Lie Symmetries

By: Yasaman Azhdari

Supervisors

Dr. Elham Dastranj

Dr. Abdolmajid Abdolbaghi

Advisor

Seyed Reza Hejaze

July 2019