بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضی مالی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

مقایسه قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت چند مدل تلاطم تصادفی در بازار بورس تهران

نگارنده: حسین صاحبی فرد

استادان راهنما

دکتر الهام دسترنج
دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطاابادی

استاد مشاور

دکتر سید رضا حجازی

تیر ۱۳۹۸

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای حسین **صاحبی فرد** **با شماره** دانشجویی **۹۶۰۹۴۲۴** رشته ریاضی کاربردی گرایش مالی تحت عنوان مقایسه **قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت** چند مدل تلاطم تصادفی در بازار بورس تهران که در **تاریخ** ۹۸/۴/۱۷ **با** حضور **هیأت محترم داوران** در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام **می گردد:**

قبول (با درجه: عالی......) ☑ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱- استادراهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطاآبادی	استادیار	
۳- استاد مشاور	دکتر رضا حجازی	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	سمیه مغاری	استادیار	مغاری
۵- استاد ممتحن اول	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر محمد میرباقری جم	استادیار	محمد میرباقری جم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به همسرم
که نشانه لطف الهی در زندگی من است.

سپاس‌گزاری

سپاس خدای بزرگ را که مرا یاری رساند تا بتوانم این مقطع تحصیلی را به پایان رسانده و گامی در راستای اعتلای علم بر دارم.

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد راهنمای گرانقدرم سرکار خانم دکتر **الهام دسترنج** که وجودشان همیشه قوتی برای انجام کارهایم بوده است و بدون شک انجام این پایانامه بدون کمک و راهنمایی‌های ارزنده ایشان امکان پذیر نبوده است، تقدیر و تشکر نمایم.

همچنین از استاد راهنمای گرامیم جناب آقای دکتر **عبدالمجید عبدالباقی عطاابادی** که در تمام مراحل، با صبر و حوصله، پاسخگوی سوالات و یاری رسانم بودند، کمال تشکر را دارم.

حسین صاحبی فرد
تیر ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **حسین صاحبی فرد** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مقایسه قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت چند مدل تلاطم تصادفی در بازار بورس تهران** ، تحت راهنمایی **الهام دسترنج** و **عبدالمجید عبدالباقی عطاابادی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود ” یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حسین صاحبی فرد
تیر ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله، ابتدا چند مدل تلاطم تصادفی معرفی شده‌اند. سپس قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت این مدل‌ها روی شاخص کل بازار بورس تهران به عنوان دارایی پایه صورت گرفته و با مقایسه این مدل‌ها، بررسی وجود شرایط آربیتراژ و مشخص کردن مدل مناسب بازار صورت گرفته است. بدین منظور اطلاعات ده سال بازار بورس تهران استخراج و به دسته‌بندی به بازه‌های سه ماهه انجام گرفته است.

کلمات کلیدی: مدل‌های تلاطم تصادفی، مدل‌هایی با حافظه بلندمدت، اختیار معامله توان

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. صاحبی‌فرد، ح. و دسترنج، ا. و عبدالباقی، ع. و حجازی، ر. و معتمدنژاد، ا. (۱۳۹۹)، ''قیمت‌گذاری اختیار معاملات توانی بر مبنای مدل هستون(شواهدی از بازار بورس اوراق بهادار تهران)''، **دانش سرمایه‌گذاری**، شماره ۳۳،

۲. صاحبی‌فرد، ح. و دسترنج، ا. و حجازی، ر. (۱۳۹۷)، چهل و نهمین کنفرانس ریاضی ایران، ''قیمت‌گذاری اختیار معاملات توانی تحت مدل هستون مضاعف کسری''، ص ۳۹۱۱ـ۳۹۱۶، تهران

۳. صاحبی‌فرد، ح. و دسترنج، ا. (۱۳۹۸)، چهارمین کنفرانس ریاضی مالی و کاربردها، ''قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت مدل بیتس''

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مقدمه

در سال‌های اخیر، بازارهای مالی رشد چشمگیری داشته‌اند که سبب جذب سرمایه‌گذاران در این بازارها شده است. سرمایه‌گذاران تلاش می‌کنند، علی‌رغم افزایش بهره از دارایی خود، ریسک موجود در بازار را مدیریت کنند.

در سال ۱۹۷۳ فیشر بلک و مایرون شولز برای حل مساله‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی، راهبرد نوینی را پیشنهاد کردند که مبتنی بر تشکیل سبدی خودتامین در یک فضای بدون آربیتراژ بود. آنها قیمت سهام را با کمک یک فرایند وینر هندسی مدلسازی کردند و با پوشش کامل سبد و حذف عامل های نوسان‌ساز توانستند که رابطه معروف به فرمول بلک ــ شولز را استخراج کنند. اما با سقوط بازارهای سهام در اکتبر ۱۹۷۸، مدل بلک ــ شولز کارایی خود را از دست داد و تنها به عنوان پایه‌ای برای سایر مدل‌ها مورد استفاده قرارگرفت، چراکه در این مدل، تلاطم با استفاده از سوابق تاریخی تغییرات قیمت دارایی پایه برآورد می‌گردد در حالی که هدف اندازه‌گیری تلاطم در آینده است. یکی از راهکارهای از بین بردن این نقص آن است که تلاطم، یک فرآیند تصادفی در نظر گرفته شود. درواقع، انتخاب مدلی مناسب برای بازار، در تعیین قیمت‌های منصفانه و اتخاذ راهبردی مناسب برای پوشش ریسک، از اهمیت بالایی برخوردار است.

۱.۱ سابقه موضوع

فرض اساسی در مدل بلک_شولز این است که توزیع احتمال قیمت آتی دارایی‌هاي پایه (سهام)، لگ نرمال است. اما در بازارهاي مالی واقعی فرایند قیمت دارایی در مقایسه با توزیع لگ‌نرمال، داراي دُم سنگین‌تري است. بدین ترتیب، با توزیع‌هاي مختلفی از قیمت‌هاي اختیار خرید یا فروش مواجه خواهیم شد که تفاوت آنها در دم توزیع است. از طرف دیگر، در مدل بلک – شولز تلاطم قیمت سهام، ثابت در نظر گرفته شده است، در صورتی که نتایج تجربی غیر مسطح بودن تلاطم قیمت دارایی هاي پایه را نشان می‌دهد. هال و وایت ، اسکات ، استین و هستون ، مدل‌هایی از تلاطم تصادفی را براي قیمت‌گذاري دارایی‌هاي پایه ارائه کردند.

مدل هستون یکی از مدل‌های نوسان تصادفی است که هدف اصلی هستون غلبه بر برخی کاستی‌های موجود در مدل مشهور قیمت‌گذاری اختیار بلک_شولز بود. از جمله دلایل محبوبیت این مدل می‌توان به امکان به‌دست آوردن فرمول‌های قیمت قرارداد اختیار برای قراردادهای اختیار اروپایی با استفاده از تبدیل فوریه در سال ۱۹۹۹ اشاره کرد. همچنین درسال ۲۰۰۴ و ۲۰۰۷ از روش‌های تقسیم عملگر برای قیمت‌گذاری قراردادهای آمریکایی در مدل هستون استفاده شد. از سوی دیگر به منظور قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار از روش‌های شبیه سازی مونت کارلو در مدل هستون استفاده شده است. همچنین این مدل توانایی ترکیب با یک مدل با نرخ بهره تصادفی را دارد.

کریستفرسن در سال ۲۰۰۹ با اضافه کردن یک فرایند تصادفی دیگر به مدل هستون، این مدل را بهبود داد. مدل هستون با دو فرایند تلاطم تصادفی تحت عنوان مدل هستون مضاعف، در مقایسه با مدل هستون استاندارد انعطاف بیشتري نسبت به قیمت‌هاي پرت دارد. میخایلوف و نوگل با وابسته کردن پارامترهای مدل به زمان، مدل هستون را ارتقا بخشیدند تا اختیارهای کوتاه‌مدت، به بازار واقعی نزدیک‌تر باشد. همچنین بیتس با افزودن پرش به مدل هستون، مدلی ارائه کرد که در بازارهای پرنوسان کارایی بهتری داشته باشد و قیمت‌گذاری اختیار، از ایجاد فضای آربیتراژی جلوگیری کند.

براي حل مدل‌هاي مالی دارایی هاي پایه روشهاي گوناگونی وجود دارد. یکی از روش هاي مشهور در این زمینه، استفاده از تبدیل فوریه سریع است که در سال ۱۹۹۹ توسط کار و مادان معرفی شد. در این روش از تابع مشخصه فرایند دارایی پایه استفاده می‌شود. همچنین ابراهیم، اُهارا و مُهدزاکی به قیمت گذاری اختیار معامله توانی در مدل مرتون پرداخته و نشان داده‌اند که قیمت اختیار مدل توانی در مدل با پرش از قیمت این اختیار در مدل بلک_شولز بیشتر است [۱۷] .

۲.۱ ضرورت تحقیق

قیمت دارایی‌هاي پایه در بازارهاي مالی اغلب دستخوش تغییرات ناگهانی ناشی از عوامل گوناگون محیطی، اجتماعی، سیاسی و اقتصادي روز دنیا است که روند استاندارد قیمت‌گذاري‌ها، هرچند انعطاف پذیر، این تغییرات و نوسانات ناگهانی را پوشش نمی‌دهد. براي رفع این مشکل مدل هاي تلاطم تصادفی پرشی، توسط محققان مالی پیشنهاد شده است. مدلسازي بازارهاي مالی، تنها چالش پیش روي محققان و مهندسان مالی نیست و قدم بعدي یافتن روشی کارا و مناسب براي حل مدلهاي پیشنهادي و پیش بینی قیمت دارایی ها در زمان آتی است.

در این تحقیق به بررسی چند مدل تلاطم تصادفی (شامل مدل هستون و برخی مشتقات آن) پرداخته شده‌است. سپس با بررسی روی مقدار شاخص کل بازار بورس تهران در سال‌های اخیر، نزدیک بودن این مدل‌ها به بازار واقعی و کارایی آن‌ها مورد بحث قرار گرفته است.

فصل ۲

پیش‌نیازها

۱.۲ مفاهیم فرآیندهای تصادفی

تعریف ۱.۱.۲. اگر Ω (فضای نمونه) مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{F}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد، $\mathcal{F}$ یک **نیم‌حلقه** گفته می‌شود هرگاه

۱. $\emptyset \in \mathcal{F}$،

۲. تحت اشتراک‌های متناهی بسته باشد، یعنی اگر دنباله‌ای متناهی از مجموعه‌ها مانند $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ متعلق به $\mathcal{F}$ باشند، آن‌گاه

$$\bigcap_{i=۱}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

۳. تفاضل هر دو عضو آن را بتوان به صورت اجتماع متناهی از اعضای دوبه‌دو جدا از هم نوشت، یعنی اگر $A_۱, A_۲$ دو مجموعه متعلق به $\mathcal{F}$ باشد آن‌گاه

$$A_۱ - A_۲ = \bigcup_{i=۱}^{n} B_i, \quad B_i \in \mathcal{F},$$

که $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ و $i \neq j$ برای $i = ۱, ۲, \dots, n$.

تعریف ۲.۱.۲. اگرΩ مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{F}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد، $\mathcal{F}$ یک σ**ـ میدان** نامیده می‌شود هرگاه

۱. $\emptyset \in \mathcal{F}$،
۲. اگر $A \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $A^c \in \mathcal{F}$،
۳. اگر دنباله‌ای نامتناهی از مجموعه‌ها مانند $A_1, A_2, \ldots$ که همگی متعلق به $\mathcal{F}$ هستند موجود باشند، آنگاه

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

به عبارت دیگر $\mathcal{F}$ تحت مکمل و اجتماع‌های شمارش‌پذیر نامتناهی بسته باشد.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید $\Omega = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و $\mathcal{F}$ دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد، σـ میدان تولید شده توسط $\mathcal{F}$ را σ**ـ میدان بورل** نامیده و با $\mathcal{B}$ نمایش داده می‌شود. دسته‌ی تمام بازه‌هایی که به صورت $[a,b)$ یا $[a,b]$ یا (a,b) که در آن a و b اعداد گویا باشند و یا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آن‌ها اعداد گویا باشند همگی مولد بورل هستند.

تعریف ۴.۱.۲. هر دسته‌ی صعودی از σـ میدان‌ها را یک **فیلتر** گویند و به صورت $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in N\cup\{0\}}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک نیم‌حلقه از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی Ω باشد، تابع μ ($\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$) یک **اندازه** گفته می‌شود اگر
۱. برای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ مقدار تابع نامنفی باشد یعنی $0 \leq \mu(A) \leq \infty$،
۲. اگر $\{A_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای از اعضای دو به دو جدا از هم $\mathcal{F}$ باشند که $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ باشد آن‌گاه

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

خاصیت دوم، خاصیت σـ جمع‌پذیری برای μ نیز گفته می‌شود.

تعریف ۶.۱.۲. اندازه $\mu : \mathcal{H} \longrightarrow [0, +\infty]$

σ**ـ متناهی** نامیده می‌شود هرگاه دنباله‌ی $\{A_n\}_{n\geq 1}$ ازاعضای دو به دو جدا از هم $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد که

$$X = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

و برای هر $n \geq 1$، $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۷.۱.۲. فرض کنید Ω یک مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{F}$ یک σـ میدان از زیرمجموعه‌های آن باشد، زوج مرتب $(\Omega, \mathcal{F})$ یک **فضای اندازه‌پذیر** نامیده میَود.
اگر P اندازه‌ای روی $\mathcal{F}$ باشد آن‌گاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **فضای اندازه** می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۲. تابع حقیقی مقدار f، $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ **اندازه‌پذیر** است اگر برای هر B از $\mathcal{B}$ (بورل) رابطه زیر برقرار باشد

$$f^{-1}(B) = \{w \in \Omega : f(w) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

تعریف ۹.۱.۲. اگر $(X,\mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و μ_1 و μ_2 دو اندازه روی این فضا باشند، این دو **اندازه مطلقاً پیوسته** گفته می‌شوند (با نماد $\mu_1 \ll \mu_2$ نمایش داده می‌شود) اگر و فقط اگر برای هر A از $\mathcal{A}$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\mu_2(A) = 0 \Longrightarrow \mu_1(A) = 0.$$

تعریف ۱۰.۱.۲. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک σـ میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω باشد، تابع P ($P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$) یک **اندازه احتمال** گفته می‌شود اگر

۱. $P(\Omega) = 1$،

۲. اگر $\{A_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{F}$ باشند آن‌گاه

$$P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} P(A_n).$$

سه‌تایی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ را **فضای احتمال** نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۱.۲. **(قضیه رادون‌ـ نیکودیم[1])** فضای اندازه‌پذیر $(X,\mathcal{A})$ را فرض کنید و μ و ν دو اندازه σـ متناهی روی $\mathcal{A}$ باشند. اگر $\nu \ll \mu$ آن‌گاه تابع اندازه‌پذیر نامنفی f وجود دارد که برای هر A از $\mathcal{A}$ رابطه‌ی زیر را ایجاب می‌کند

$$\mu(A) = \int_A f d\nu.$$

تعریف ۱۱.۱.۲. هر تابع اندازه‌پذیر از فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},P)$به فضای اندازه‌پذیر $(R,\mathcal{B})$ که $\mathcal{B}$ مجموعه‌ی بورل، یک **متغیر تصادفی** گفته می‌شود اگر رابطه زیر برای هر زیر مجموعه b از B برقرار باشد.

$$X^{-1}(b) = \omega \in \Omega : X(\omega) \in b \in F.$$

برای نشان دادن متغیرهای تصادفی معمولا از حروف بزرگ لاتین مثل $X, Y, Z, \ldots$ استفاده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد، σـ میدان تولید شده توسط X که با نماد $\sigma(X)$ یا $\mathcal{F}_X$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{F}_X = \sigma(X) = \{X^{-1}(A) \ : \ A \in \mathcal{B}\}.$$

تعریف ۱۳.۱.۲. فرض کنید X متغیری تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},P)$ باشد. تابع توزیع X که با $\mathcal{F}_X$ نشان داده می‌شود، برای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{F}_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\}$$

که در آن P_X اندازه‌ی القاشده توسط X روی $\mathcal{B}$ است که **توزیع متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.

[1] Rodon-Nikodym theorem

تعریف ۱۴.۱.۲. فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه از σـمیدان $\mathcal{A}$ باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A با χ_A نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

تعریف ۱۵.۱.۲. تابع ساده تابعی با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم ϑ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ با مقادیر متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشد. می‌توان نوشت $\vartheta = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ که در آن $A_i = \{x \in X : \vartheta(x) = a_i\}$ روشن است که A_i ها مجزا هستند. اندازه‌پذیری ϑ معادل است با این‌که بگوییم A_iها اندازه‌پذیرند. انتگرال ϑ نسبت به اندازه μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_A \vartheta d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

قرارداد می‌کنیم $0 \times \infty = 0$.

تعریف ۱۶.۱.۲. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی باشد، **انتگرال** f روی هر $A \in \mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_A f d\mu = \sup\{\int_A \vartheta d\mu : \vartheta \leq f\},$$

که در آن ϑ تابعی ساده و نامنفی است.

تعریف ۱۷.۱.۲. متغیر تصادفی X روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر می‌گیریم. **امید ریاضی** (ارزش مورد انتظار) X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(X) = \int_{\Omega} X(w)\, dP(w),$$

به‌طوری‌که $E \mid X \mid < \infty$.

ملاحظه ۱.۱.۲. اگر $E \mid X \mid = \infty$، گفته می‌شود که امید ریاضی X وجود ندارد.

تعریف ۱۸.۱.۲. واریانس متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

تعریف ۱۹.۱.۲. **تابع مولد گشتاور** [2] برای متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad t \in R.$$

[2]Moment generating function

ملاحظه ۲.۱.۲. تابع مولد گشتاور همواره وجود ندارد چراکه انتگرال همیشه مطلقاً همگرا نیست.

تعریف ۲۰.۱.۲. **تابع مشخصه** [۳] برای متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varphi_X(iw) = E[e^{iwX}].$$

تعریف ۲۱.۱.۲. کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است

$$Cov(X,Y) = E(X)E(Y).$$

تعریف ۲۲.۱.۲. دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل از هم گفته می‌شوند هرگاه

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

تعریف ۲۳.۱.۲. دنباله $X_۱, X_۲, \dots, X_n$ مستقل گفته می‌شود هر گاه

$$\mathcal{F}_{X_۱,\dots,X_n}(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = \mathcal{F}_{X_۱}(x_۱)\dots\mathcal{F}_{X_n}(x_n)$$

ملاحظه ۳.۱.۲. کوواریانس دو متغیر تصادفی مستقل، برابر صفر است.

تعریف ۲۴.۱.۲. ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی X و Y با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\rho = \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(y)}}$$

تعریف ۲۵.۱.۲. متغیر تصادفی X دارای **توزیع نرمال** با میانگین μ و واریانس σ است اگر و تنها اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$\varphi(X) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} exp\left(-\frac{۱}{۲}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^۲\right), \quad -\infty < X < \infty.$$

توزیع نرمال با $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ را **توزیع نرمال استاندارد** می‌نامند.

تعریف ۲۶.۱.۲. **(امید شرطی)** فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال و $\mathcal{D}$ یک زیر σـ میدان از $\mathcal{F}$ و Z متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. امید Z به شرط $\mathcal{D}$ یک متغیر تصادفی $\mathcal{D}$ـ اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است که آن را با $E(Z \mid \mathcal{D})$ نشان داده می‌شود به صورت زیر است.

$$\forall D \in \mathcal{D}, \quad \int_D E(Z \mid \mathcal{D})\, dP = \int_D Z\, dP.$$

ملاحظه ۴.۱.۲. **خواص امید شرطی**

[3] Characteristic function

۱. اگر $X \geq 0$ آن‌گاه $E(X \mid \mathcal{D}) \geq 0$، a.s.[۴] .

۲. $E(X+Y \mid \mathcal{D}) = E(X \mid \mathcal{D}) + E(Y \mid \mathcal{D}) \quad a.s.$.

۳. برای هر $a \in \mathbb{R}$

$$E(aX \mid \mathcal{D}) = aE(X \mid \mathcal{D}) \quad a.s.$$

۴. اگر $\mathcal{D} = \{\Omega, \emptyset\}$ آن‌گاه

$$E(X \mid \mathcal{D}) = E(X) \quad a.s.$$

۵. اگر $\mathcal{D}_1$ یک زیر σـ میدان از $\mathcal{D}_2$ باشد، آن‌گاه

$$E(E(X \mid \mathcal{D}_2) \mid \mathcal{D}_1) = E(X \mid \mathcal{D}_1) \quad a.s.$$

۶. $E(E(X \mid \mathcal{D})) = E(X) \quad a.s.$.

تعریف ۲.۱.۲۷. هر خانواده از متغیرهای تصادفی(شمارا یا ناشمارا)، یک **فرآیند تصادفی** نامیده می‌شود.

ملاحظه ۲.۱.۵. اگر $\{X_t\}_{t \geq 0}$ یک فرآیند تصادفی باشد و

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, \ \ 0 \leq s \leq t)$$

آن‌گاه $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ یک فیلتر است که به آن فیلتر طبیعی گفته می‌شود.

تعریف ۲.۱.۲۸. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک فیلتر باشد. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ **سازگار** گفته می‌شود هرگاه برای هر $t \geq 0$، $X_t \in \mathcal{F}_t$ یا با بیانی دیگر متغیر تصادفی X_t، $\mathcal{F}_t$ـ اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۲۹. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \in Z^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in Z^+}$، **مارتینگل**[۵] گفته می‌شود اگر

۱. $\{X_n\}_{n \in Z^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشد،

۲. برای هر n، $E(\mid X_n \mid) < \infty$ یعنی برای هر n، X_n انتگرال‌پذیر باشد،

۳. برای هر $n \geq 1$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \quad a.s.$$

تعریف ۲.۱.۳۰. اندازه احتمال‌های Q و P را روی فضای $(\Omega, \mathcal{F})$ **معادل** گویند هر گاه برای هر $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = 1 \Longleftrightarrow Q(A) = 1$$

[4] Almost surely
[5] Martingale

۲.۲ چند فرآیند تصادفی مهم

در این بخش به معرفی دو فرآیند تصادفی مهم پرداخته شده است

۱.۲.۲ حرکت براونی

حرکت براونی از اساسی‌ترین فرآیندهای تصادفی و سنگ بنای نظریه‌ی احتمال مدرن، آنالیز تصادفی و معادلات دیفرانسیل است. حرکت نامنظم گرده گیاهان که در آب معلق هستند را به افتخار روبرت براون [۶]، گیاه‌شناس اسکاتلندی که برای نخستین بار در تابستان ۱۸۲۷ میلادی حرکت نامنظم گرده گیاهان معلق در آب را مشاهده کرد، حرکت براونی [۷] نامیدند. در سال ۱۹۰۵ میلادی آلبرت انیشتن [۸] علت این حرکت را بمباران دانه‌های گرده از سوی ملکول‌های مایع معرفی کرد. به عبارت دیگر، ذرات و مولکول‌های موجود در گازها و یا مایعات دارای حرکت نامنظمی هستند، یعنی در هر راستایی می‌توانند حرکت کنند و با برخورد با یکدیگر تغییر جهت دهند به این حرکت، حرکت براونی می‌گویند. پس از آن دامنه کاربرد حرکت براونی بسیار فراتر رفته و حتی وارد مباحث ریاضیات مالی مانند مدل‌سازی قیمت سهام نیز شده است. در سال ۱۹۱۸ میلادی نوربرت وینر [۹] (۱۸۹۴ ـ ۱۹۶۴ میلادی) ریاضی‌دان برجسته و نابغه آمریکایی، الگوی حرکت براونی را به‌طور کامل بررسی کرد. وی در سال ۱۹۲۳ میلادی فرآیند مطلوب حرکت براونی را که امروز فرآیند وینر نیز گفته می‌شود را به فرم ریاضی ساخت که به صورت زیر قابل بیان است [۲].

تعریف ۱.۲.۲. فرآیند تصادفی $\{B_t\}_{t\geq 0}$ را یک **حرکت براونی استاندارد** [۱۰] گفته می‌شود هرگاه

۱. $B_0(w)=0$،

۲. برای $0\leq t\leq s$، B_s-B_t دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $s-t$ باشد،

۳. برای $0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_n$، متغیرهای تصادفی $B_{t_n}-B_{t_{n-1}},\ldots,B_{t_1}-B_{t_2}$ مستقل و هم‌توزیع باشند.

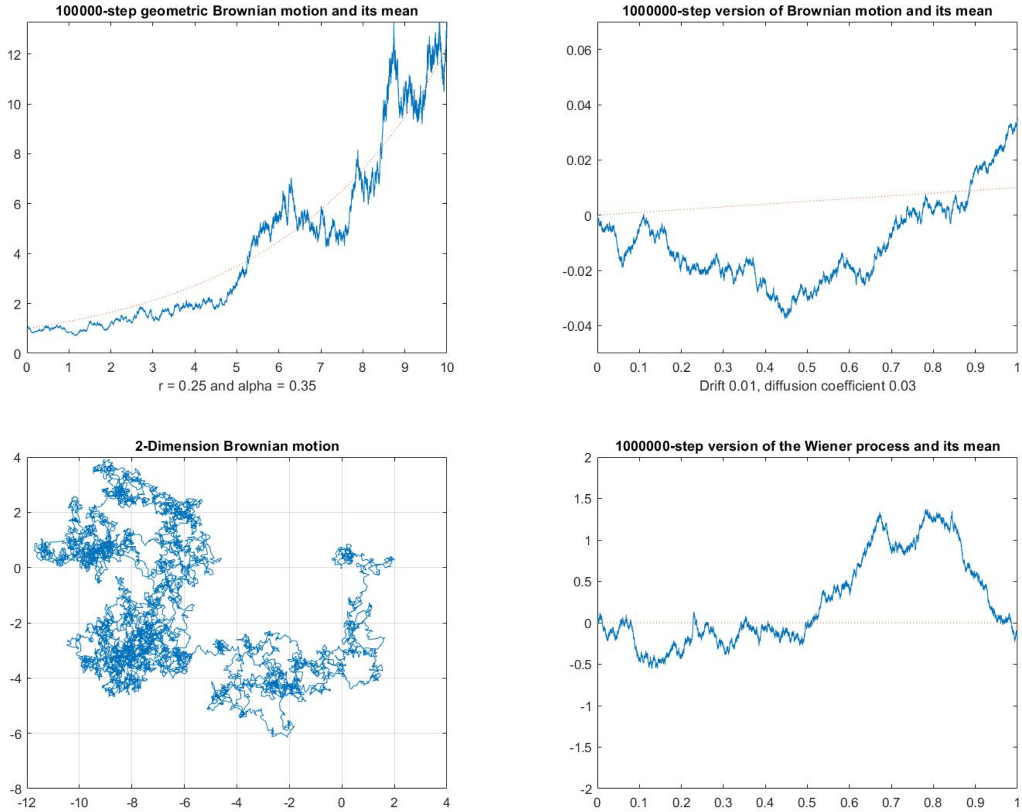
حرکت براونی استاندارد فرآیند وینر[۱۱] نیز گفته می‌شود.

ملاحظه ۱.۲.۲. فیلتر استاندارد فرآیند براونی به صورت زیر می‌باشد

$$\mathcal{F}_t=\sigma\{B_s,\ \ s\leq t\}.$$

.

[6] Robert Brown
[7] Brownian motion
[8] Albert Einstein
[9] Norbert Wiener
[10] Standard Brownian motion
[11] Wiener process



شکل ۱.۲: شبیه‌سازی حرکت براونی و انواع آن

قضیه ۱.۲.۲. تقریبا تمام مسیرهای حرکت براونی هیچ جا مشتق‌پذیر نیست، چون

$$P(\forall t \geq 0 \limsup \mid \frac{B(t+h)-B(t)}{h} \mid = +\infty) = 1.$$

برهان. به [۲۹] رجوع کنید. □

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید $\{W_t\}_{t\geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد باشد. در این صورت فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ که در معادله دیفرانسیل معمولی زیر صدق می‌کند

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t \qquad (۱.۲)$$

که در آن α و σ مقادیر ثابت‌اند، را **حرکت براونی هندسی** [۱۲] گویند.

قضیه ۲.۲.۲. برای حرکت بروانی هندسی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ با فرض $X_0 = x_0$ روابط زیر برقرار هستند:

۱ـ $E(X_t) = x_0 e^{\alpha t}$،

۲ـ $X_t = x_0 \exp\{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}$.

[12] Geometric Brownian motion

برهان. به [۲۷] رجوع کنید. □

تعریف ۳.۲.۲. بازگشت به میانگین [۱۳]، خاصیتی است که طبق آن یک فرآیند به بی‌نهایت میل نمی‌کند و حول یک میانگین بلندمدت خوش تعریف نوسان می‌کند. چنین فرآیندی به شکل زیر است:

$$dy_t = \lambda(\gamma - y_t)dt + \sigma_y f_y(y_t)dW_t,$$

که σ_y تلاطم، f یک تابع خوش تعریف، W_t فرآیند براونی نظیر y_t و γ میانگین بلندمدت y_t را نشان می‌دهند و λ نرخ بازگشت به میانگین نامیده می‌شود.

در حوزه سرمایه‌گذاری و به‌ویژه در بازارهای مالی خاصیت بازگشت به میانگین از اهمیت بالایی برخوردار است. طبق این خاصیت قیمت (یا بازده) یک دارایی همواره به سمت میانگین قیمت (یا بازده) بازار، یا به طور دقیق‌تر به سمت میانگین بلندمدت همان دارایی حرکت می‌کند. یعنی بازده‌های کمتر یا بیشتر از میانگین همواره به سمت میانگین بازمی‌گردند و هرچه شدت انحراف از میانگین بیشتر باشد، انتظار می‌رود سرعت بازگشت به میانگین نیز بیشتر باشد.

۲.۲.۲ فرآیند ریشه مربعی

یک فرایند تصادفی یک بعدی $X(t)$ که حرکت آن به صورت زیر باشد، فرایند ریشه دوم [۱۴] نامیده می‌شود

$$\mathrm{d}X(t) = \kappa(\theta - X(t))\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X(t)}\mathrm{d}B(t) \qquad (۲.۲)$$

که در آن $\kappa < ۰$ ، θ و $\sigma > ۰$ مقادیر ثابت هستند. مقدار واریانس شرطی در این فرایند $\sigma^۲ X(t)$ است که متناسب با سطح فرایند می‌باشد. فرایند ریشه مربعی فقط مقادیر نامنفی را می‌پذیرد. همچنین می‌توان نشان داد اگر $۲\kappa\theta > \sigma^۲$ و $x(۰) > ۰$ ، $X(t)$ مثبت خواهد بود و فرایند ۲.۲ خوش تعریف است. [۲۸]

برای یافتن جواب این فرایند، از لم ایتو با تابع $f(x,t) = \exp(\kappa t)x$ و تعریف فرایند $Y(t) = f(X(t),t) = \exp(\kappa t)X(t)$ استفاده می‌شود. پس

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa\exp(\kappa t)x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \exp(\kappa t), \qquad \frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} = ۰$$

با استفاده از لم ایتو و قرار دادن $\mu(t) = \kappa(\theta - X(t))$ و $\sigma(t) = \sigma\sqrt{X(t)}$ رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y(t) &= (\kappa\exp(\kappa t)X(t) + \exp(\kappa t)\kappa(\theta - X(t)) + ۰)\mathrm{d}t \\ &+ \sigma\exp(\kappa t)\sqrt{X(t)}\mathrm{d}B(t) = \kappa\theta\exp(\kappa t)\mathrm{d}t + \sigma\exp(\kappa t)\sqrt{X(t)}\mathrm{d}B(t).\end{aligned} \qquad (۳.۲)$$

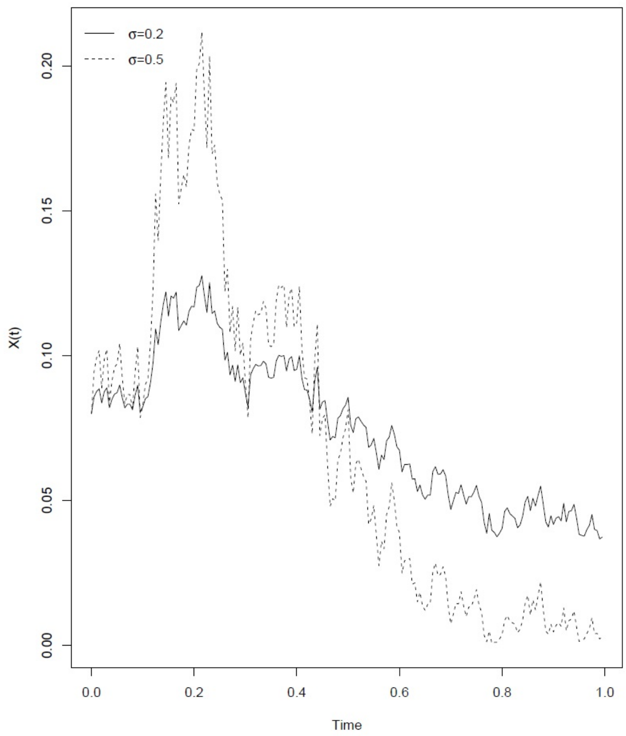
---
[13] Mean reversion
[14] Square Root

پس می‌توان نوشت

$$Y(t) = y(\circ) + \int_\circ^t \kappa\theta \exp(\kappa u)\mathrm{d}u + \int_\circ^t \sigma \exp(\kappa u)\sqrt{X(u)}\mathrm{d}B(u) \qquad (۴.۲)$$

با محاسبه‌ی انتگرال عادی و جایگزین کردن تعریف $Y(T)$ می‌توان نوشت

$$X(t) = \exp(-\kappa t)x(\circ) + \theta(۱ - \exp(-\kappa t)) + \int_\circ^t \sigma \exp(-\kappa(t-u))\sqrt{X(u)}\mathrm{d}B(u) \qquad (۵.۲)$$



شکل ۲.۲: شبیه‌سازی فرایند ریشه مربعی با $\kappa = ۲$ و $\theta = ۰/۰۸$

می‌توان نشان داد که $X(t)$ با فرض $X(\circ) = x(\circ)$ یک فرایند غیرمرکزی $\chi^۲$ است. به عنوان ویژگی‌های یک فرآیند تصادفی می‌توان میانگین شرطی و واریانس $X(t)$ را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)|X(\circ) = x(\circ)] &= \exp(-\kappa t)x(\circ) + \theta(۱ - \exp(-\kappa t))\\ \mathrm{Var}[X(t)|X(\circ) = x(\circ)] &= \frac{\sigma^۲}{\kappa}(\exp(-\kappa t) - \exp(-۲\kappa t)x(\circ))\\ &\quad + \frac{\sigma^۲}{۲\kappa}(۱ - \exp(-۲\kappa t))\theta.\end{aligned}$$

برای $t \to \infty$ میانگین غیرشرطی و واریانس به صورت زیر هستند

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0$$
$$\mathrm{Var}[X(t)] = \frac{\sigma^2 \theta}{2\kappa}$$

همچنین مسیرهای نمونه‌ی $X(t)$ به صورت زیر قابل شبیه‌سازی هستند.

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \kappa(\theta - X(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) + \sigma\sqrt{X(t_{i-1})}Z(t_i)\sqrt{(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i-1})}$$

که $Z(t_i)$ مستقل و هم‌توزیع هستند و $Z(t_i) \sim N(0,1)$

۳.۲ حسابان ایتو

مباحث حرکت براونی و حسابان ایتو از مباحث درهم تنیده‌ی ریاضیات تصادفی هستند. در این بخش، لم ایتو که در بخش قبل به آن اشاره شد، مشخص می‌شود.

۱.۳.۲ انتگرال ایتو

فرض کنید ذره‌ای در سطح آب حرکت می‌کند. مساله پیش رو مدل‌سازی حرکت این ذره نسبت به زمان است. از آن‌جا که مکان ذره در لحظه t، $t \in [0,T]$ و $(T > 0)$ به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول‌های آب به آن وارد می‌کند مشخص نیست (تصادفی است)، معادله آن به صورت زیر است.

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)(\text{نوفه}) \tag{۶.۲}$$

که در آن σ و b توابع حقیقی داده شده روی $\Omega \times (0, \infty)$ هستند و نوفه فرآیند تصادفی مانند Z_t است که در سه شرط زیر صدق می‌کند.

- برای هر $t_1, t_2 \in [0,T]$ که $t_1 \neq t_2$، Z_{t_1} و Z_{t_2} مستقل از هم باشند.
- توزیع توام متغیرهای تصادفی $Z_{t_1+t}, \ldots, Z_{t_n+t}$، $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq T$ به t بستگی نداشته باشد.
- برای هر $t \in (0,T]$، $E(Z_t) = 0$.

فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ افرازی از فاصله $[0,T]$ است. با گسسته‌سازی رابطه ۶.۲ به دست خواهد آمد

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})\Delta t_k Z_k.$$

تنها فرآیندی با این ویژگی‌ها که دارای مسیرهای پیوسته است فرآیند براونی است. لذا می‌توان نوشت

$$X_t = X_\circ + \sum_{j=\circ}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=\circ}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j$$

اگر حد طرف راست عبارت بالا وقتی $\Delta t \longrightarrow \circ$ وجود داشته باشد رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود

$$X_t = X_\circ + \int_\circ^t b(s,w)ds + \int_\circ^t \sigma(s,w)dB_s$$

بنابراین به روشنی برای پیدا کردن فرآیند $\{X_t\}$ لازم است انتگرال‌هایی به فرم زیر محاسبه شوند

$$\int_s^T f(t,w)dB_t(w)$$

که $B_t(w)$ فرآیند براونی یک بعدی استاندارد و f تابعی حقیقی روی $\Omega \times [\circ,\infty)$ است. برای رسیدن به این هدف لازم است مرحله‌های زیر طی شوند.

فرض کنید $\phi : [\circ,\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی ابتدایی[15] باشد یعنی

$$\phi(t,w) = X(w)\mathbb{I}_{(a,b]}(t), \quad a,b \in [\circ,\infty)$$

در این صورت رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^t \phi(s,w)dB_s = \int_a^t X(w)\chi_{[a,b)}dB_s(w) = X(w)[B_{b\wedge t}(w) - B_{a\wedge t}(w)]$$

که در آن برای هر $x,y \in \mathbb{R}$، $x \wedge y = \min\{x,y\}$.

فرض کنید f تابعی ساده[16] روی $\Omega \times [\circ,\infty)$ باشد. یعنی

$$f = \sum_{j=\circ}^{n} \phi_i,$$

که ϕ_iها توابع ابتدایی هستند. در این صورت رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^t f dB_s = \sum_{j=\circ}^{n} \int_a^t \phi_i dB_s. \tag{۷.۲}$$

رده‌ی $\mathcal{P}_۲$ از توابع را به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳.۲. رده‌ی $\mathcal{P}_۲$ از توابع $f(t,w)$ روی مجموعه‌ی $\Omega \times [\circ,\infty)$، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است

- تابع $f(t,w) \longrightarrow (t,w)$، $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ــ اندازه‌پذیر است،

[15] Elemintary function

[16] Simple function

- به ازای هر t،تابع $f(t,.)$، $\mathcal{F}_t$ــ اندازه‌پذیر باشد،
- برای هر $T \geq \circ$، $E\left[\int_\circ^T f^{۲}(s,w)ds\right] < \infty$.

لم ۲.۳.۱. (لم ایزومتری ایتو) اگر تابع $\phi(t,w)$ کران‌دار و ابتدایی باشد، آن‌گاه

$$E\left[\left(\int_s^T \phi(t,w)dB_t(w)\right)^{۲}\right] = E\left[\int_s^T \phi^{۲}(t,w)dt\right].$$

برهان. به [۲۴] رجوع کنید. □

لم ۲.۳.۲. اگر $f \in \mathcal{P}_{۲}$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به‌طوری‌که

$$E\left[\int_\circ^T \mid \phi(s) - f_n(s) \mid^{۲} ds\right] \xrightarrow{n\to\infty} \circ.$$

برهان. به [۲۴] رجوع کنید. □

اکنون می‌توان $\int_s^T f(t,w)dB_t$ را برای هر $f \in \mathcal{P}_{۲}$ تعریف کرد زیرا برای $f \in \mathcal{P}_{۲}$، با توجه به لم قبل دنباله‌ای از توابع ابتدایی مانند $\{\phi_n\}$ موجود است که به f میل می‌کند. پس می‌توان تعریف کرد

$$\int_\circ^T f dB_t = \lim_{n\to\infty}\int_\circ^T \phi_n dB_t.$$

که انتگرال اخیر را **انتگرال ایتو**[۱۷] نامند.

۲.۳.۲ فرمول ایتو

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنید $\{B_t\}_{t\geq\circ}$ یک حرکت براونی استاندارد روی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ باشد. یک انتگرال تصادفی یک بعدی، یک فرآیند تصادفی X_t روی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ است و به صورت

$$X_t(w) = X_\circ(w) + \int_\circ^t u(s,w)\, ds + \int_\circ^t v(s,w)\, dB_s,$$

که در آن $u,v : [\circ,\infty)\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یا با مشتق‌گیری

$$dX_t = u\, dt + v\, dB_t.$$

بیان می‌شود.

قضیه ۲.۳.۱. (فرمول ۱ــ بعدی ایتو) اگر

$$dX_t = u\, dt + v\, dB_t,\ \ Y_t = g(t,X_t)$$

آن‌گاه

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{۱}{۲}\frac{\partial^{۲} g}{\partial x^{۲}}(t,X_t)(dX_t)^{۲},$$

که در این‌جا $dt.dt = dt.dB_t = dB_t.dt = \circ$ و $(dB)^{۲} = dt$.

[17] Ito integral

مثال ۱.۳.۲. فرض کنید $Y_t = g(t, B_t) = \frac{۱}{۲}B_t^۲$، در این صورت $g(t,x) = \frac{۱}{۲}x^۲$. لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = ۰, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial^۲ g}{\partial x^۲} = ۱,$$

در نتیجه با استفاده از فرمول ایتو رابطه زیر حاصل می‌شود

$$dY_t = B_t dB_t + \frac{۱}{۲}t.$$

قضیه ۲.۳.۲. (فرم کلی ایتو) فرض کنید $dX_t = u\,dt + v\,dB_t$ یک انتگرال nـ بعدی و $g : [۰, \infty) \times R^۲ \longrightarrow R^۲$ یک نگاشت $C^۲$ باشد. آن‌گاه $Y(t,w) = g(t, X_t)$ یک انتگرال تصادفی است و می‌توان نوشت

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i + \sum_{i,j} \frac{۱}{۲} \frac{\partial^۲ g}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_i dX_j,$$

که در اینجا $dt.dt = dt.dB_i = dB_i.dt = ۰$ و $dB_i dB_j = \delta_{ij}dt$.

مثال ۲.۳.۲. اگر $X_t = B_۱^۲(t) + B_۲^۲(t)$، آن‌گاه $g(t,x) = x_۱^۲ + x_۲^۲$. لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = ۰ \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = ۲x_i, \quad \frac{\partial^۲ g}{\partial x_i \partial x_j} = ۲\delta_{ij},$$

بنابراین

$$dX_t = \sum_{i=۱}^{۲} ۲B_i dB_i + \frac{۱}{۲}\sum_{i,j}^{۲} ۲\delta_{ij} dB_i dB_j = ۲(B_۱ dB_۱ + B_۲ dB_۲ + dt).$$

۴.۲ قضیه گیرسانوف

قضیه ۱.۴.۲. (**قضیه گیرسانوف**[۱۸]) فرض کنید برای هر T ،$۰ \leq t \leq T$، $\{B(t)\}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک حرکت براونی و $\{\mathcal{F}_t\}$ یک فیلتر برای حرکت براونی باشد. همچنین فرض کنید $\theta(t)$ یک فرآیند سازگار باشد. تعریف می‌شود

$$W_t = \int_۰^t \theta(u)du + B(t),$$

$$Z(t) = \exp\{-\int_۰^t \theta(u)dB(u) - \frac{۱}{۲}\int_۰^t \theta^۲(u)du\},$$

و یک اندازه احتمال جدید به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Q(A) = \int_A Z(T)dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

در این‌صورت W_t تحت اندازه احتمال Q یک حرکت براونی است.

[18]Girsanov theorem

ملاحظه ۱.۴.۲. قضیه فوق با شرط زیر برقرار است

$$E\exp\{\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(u)du\} < \infty.$$

ملاحظه ۲.۴.۲. در قضیه فوق

- $Z(t)$ مارتینگل است.
- Q اندازه احتمال است.
- اگر X یک متغیر تصادفی باشد آن‌گاه

$$E^Q[X] = E[Z(T)X]$$

که در آن E^Q امید ریاضی نسبت به اندازه احتمال Q و E امید ریاضی نسبت به اندازه احتمال P است.

برهان. به [۲۶] رجوع کنید. □

تعریف ۱.۴.۲. اندازه احتمال Q را **اندازه ریسک خنثی** [19] گویند هرگاه

۱. Q و P دو اندازه احتمال معادل باشند.

۲. فرآیند قیمت دارایی تنزیل شده $D(t)S(t)$ تحت Q مارتینگل باشد که $D(t) = e^{-\int_0^t R(s)ds}$، نرخ تنزیل و $R(t)$ نرخ بهره بدون ریسک می‌باشد.

در صورت ثابت بودن نرخ بهره، نرخ تنزیل e^{-rt} می‌باشد.

تعریف ۲.۴.۲. فرآیند تنزیل

یکی از نتایج مهم در قیمت‌گذاری اوراق مشتقه صادره بر روی سهام، ارزش‌گذاری نسبت به اندازه ریسک خنثی (یا ارزش‌گذاری بی تفاوت نسبت به ریسک) می‌باشد. مشتقات مالی از جمله اختیار معاملات را با این فرض می‌توان ارزش‌گذاری کرد که سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک بی تفاوت‌اند. به بیان دقیق‌تر، ترجیحات مربوط به ریسک سرمایه‌گذاران در ارزش اختیار معامله سهام، که به صورت تابعی از قیمت دارایی پایه است، تأثیری ندارد.
فرض ارزش‌گذاری بی تفاوت نسبت به ریسک، یک ابزار قوی برای به‌دست آوردن قیمت مشتقات است. زیرا زمانی که از جهان بی تفاوت نسبت به ریسک به دنیای ریسک گریزی نگاه شود، دو نتیجه مهم به‌دست می‌آید:

الف_ نرخ بازده مورد انتظار اوراق بهادار مساوی نرخ بهره بدون ریسک می‌شود.

ب_ نرخ مناسب تنزیل به‌کار برده شده جهت هر گونه پرداختی در آینده معادل نرخ بهره بدون ریسک می‌شود.

[19] Risk neutral measure

می‌توان اختیار معاملات و سایر مشتقات را که نرخ بازده معینی در یک دوره زمانی خاص دارند، با استفاده از فرض ارزش‌گذاری نسبت به اندازه ریسک خنثی به ترتیب زیر قیمت‌گذاری کرد:

الف- نرخ بازده مورد انتظار دارایی پایه، نرخ بهره بدون ریسک، r فرض شود.

ب- ارزش اختیار معامله یا عایدی مورد انتظار اختیار معامله در زمان سررسید محاسبه شود.

ج- بازده مورد انتظار فوق با نرخ بهره بدون ریسک تنزیل گردد.

تعریف ۳.۴.۲. فرض کنید $h(t)$ عایدی (بازدهی) یک دارایی در لحظه t باشد. در این صورت ارزش دارایی تحت اندازه ریسک خنثی در لحظه t به صورت زیر است

$$V(t) = E^Q\left[e^{-\int_t^T R(s)ds} h(T) \mid \mathcal{F}\right], \quad \circ \leq t \leq T,$$

که E^Q امید نسبت به اندازه ریسک خنثی Q است.

۵.۲ مفاهیم ریاضی مالی

ریاضیات مالی شاخه‌ای از ریاضیات است که برای جریان‌های پول و سرمایه در بازارهای مالی، مدل‌های ریاضی طراحی و مطالعه می‌کند. به عبارت دیگر با کمک ابزارهای ریاضی به توصیف و مدل‌سازی رفتارهای مختلف بازارهای مالی می‌پردازد. بازارهای مالی محل خرید و فروش دارایی‌ها هستند و علاوه بر خرید و فروش دارایی‌های پایه نظیر سهام و اوراق قرضه، قراردادهایی تحت عنوان مشتقات مالی نیز مورد توجه قرار می‌گیرند .

۱.۵.۲ سبد سهام

تعریف ۱.۵.۲. سبد سهام یا پرتفوی [۲۰] ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آنها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است و تا جای ممکن تلاش می‌شود سود یک سهم ضرر سهام دیگر را جبران کند.

سبد سهام با هدفر کاهش ریسک و به صورتی انتخاب می‌شود تا در شرایط عادی احتمال کاهش بازده همه دارایی‌ها (شامل سهام‌های خریداری شده) نزدیک به صفر باشد.

تعریف ۲.۵.۲. پرتفوی $h = (x, y)$ را در نظر بگیرید. فرآیند ارزش پرتفوی h به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_t^h = xB_t + yS_t, \quad t = \circ, ۱,$$

[20] Portfolio

که S_t فرآیند قیمت هر سهم (فرآیند تصادفی) در زمان t، B_t فرآیند قیمت یک ورق قرضه (فرآیند قطعی [۲۱]) در زمان t است.

تعریف ۳.۵.۲. استراتژی پرتفویی خودتأمین [۲۲] گفته می‌شود، هرگاه برای هر $t = ۰, ۱, \ldots, T - ۱$ داشته باشیم

$$x_t(۱ + R) + y_t S_t = x_{t+۱}(۱ + R) + y_{t+۱} S_t.$$

به عبارتی دیگر، با استفاده از ارزش پرتفوی قدیم $(x_t(۱ + R) + y_t S_t)$ که در زمان $t - ۱$ تشکیل شده است، می‌توان پرتفوی جدید به ارزش $(x_{t+۱}(۱ + R) + y_{t+۱} S_t)$ در لحظه t تشکیل داد.
در حقیقت در پرتفوی خودتأمین هیچ‌گاه پولی وارد نمی‌شود و پولی از آن برداشت نمی‌شود و تنها تغییر در ارزش پرتفوی می‌باشد.

تعریف ۴.۵.۲. متغیر تصادفی X را یک ادعای مشروط [۲۳] با زمان سررسید T نامیده می‌شود هر گاه $X \in \mathcal{F}_T$. دارنده این ادعا در $t = T$ مقدار تصادفی X را دریافت می‌کند.
فرض کنید S_t فرآیند قیمت دارایی پایه باشد، ادعای مشروط X را یک ادعای مشروط ساده [۲۴] گویند هر گاه به صورت $X = \phi(S_T)$ باشد که ϕ تابع قرارداد [۲۵] نامیده می‌شود.

۲.۵.۲ قراردادهای اختیارمعامله

اولین معاملات اختیار خرید و اختیار فروش، در اروپا و آمریکا در اوایل قرن ۱۸ صورت گرفت. در اوایل دهه ۱۹۹۰ ، گروهی از شرکت‌ها که خود را انجمن کارگزاران و معامله‌گران اختیار خرید و اختیار فروش معرفی می‌کردند، برای ایجاد یک بازار اختیار معامله اقدام نمودند. هدف این انجمن گردهم آوردن خریداران و فروشندگان در کنار یکدیگر بود. اگر سرمایه‌گذاری قصد خرید یک اختیار معامله را داشت، بایستی با یکی از اعضای انجمن تماس می‌گرفت، تا او یک فروشنده را، که قصد فروش اختیار معامله مذکور را دارد، پیدا کند. اگر عضو مذکور نمی‌توانست یک فروشنده پیدا کند، خود شرکت برای فروش اختیار معامله مذکور اقدام می‌کرد. در آوریل ۱۹۷۳ ، بورس شیکاگو یک بورس انحصاری برای اختیار معاملات بر روی سهام تشکیل داد. پس از آن، چندین بورس سهام و تقریباً تمام بورس‌های معاملات آتی، به مبادله اختیار معامله اقدام نمودند.
فعالان بازارهای اقتصادی و سرمایه‌گذاری به دلیل شرایط حاکم بر بازارها، نوسانات و عدم اطمینان از وضعیت آتی بازار؛ همواره با ریسک‌هایی مواجه هستند که ممکن است آن‌ها را در معرض زیان قرار دهد. به این منظور همواره تلاش بر این بوده است که راهکارهای مناسبی

[21] Deterministic
[22] Self financing
[23] Contingent claim
[24] Simple contingent claim
[25] Contract function

برای پوشش این ریسک‌ها اتخاذ شود و به عبارتی ریسک‌های پیش روی فعالان بازار سرمایه مدیریت شوند. یکی از ابزارهایی که در راستای این هدف ایجاد شده، اوراق مشتقه می‌باشد. یک مشتق مالی استاندارد، قراردادی است بین طرفین که به موجب آن دارایی پایه در زمان معلوم با قیمت توافق شده معلوم مورد معامله قرار گیرد. یکی از انواع مشتقات مالی، قرارداد اختیار معامله است.

اختیارمعامله استاندارد

یک اختیار معامله استاندارد، اختیاری است که به دارنده آن این اختیار و نه اجبار را می‌دهد تا یک دارایی پایه را در زمان مشخص در آینده با قیمت توافق شده بخرد یا بفروشد. اساس اختیارها حق بدون الزام است. در واقع سود بدون ضرر را برای دارنده اختیار به همراه دارد. در چنین قراردادهای بدون تعهد، دارنده اختیار باید مقداری پول را پیشاپیش پرداخت کند که به آن قیمت اختیار گفته می‌شود. می‌توان حق اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد؛ اختیار خرید [۲۶] و اختیار فروش [۲۷]. یک اختیار خرید در واقع این حق (و نه الزام) را به دارنده آن می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن، بخرد. به همین ترتیب، یک اختیار فروش به دارنده آن این حق را می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخصی و یا قبل از آن بفروشد. قیمتی را که در قرارداد ذکر می‌شود، قیمت توافقی یا قیمت اعمال [۲۸] و تاریخ ذکر شده در قرارداد را، اصطلاحاً تاریخ انقضا یا سررسید اختیار معامله [۲۹] می‌گویند. اختیار خرید یا فروش، هر کدام به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شود. قرارداد اختیار اروپایی [۳۰] فقط در تاریخ سررسید قابلیت اعمال دارد. در حالی که قرارداد اختیار آمریکایی [۳۱]، در هر زمانی قبل از تاریخ سررسید یا در تاریخ سررسید قابل اعمال است.

در هر قرارداد اختیار معامله، دو طرف معامله‌گر وجود دارد. یک طرف معامله کننده، سرمایه‌گذاری است که موقعیت خرید اتخاذ کرده است و اختیار معامله را خریده است. در طرف دوم قرارداد، سرمایه‌گذار موقعیت فروش اتخاذ کرده است؛ یعنی اختیار معامله را صادر کرده یا فروخته است. خریدار یا دارنده اختیار معامله، هیچ گونه تعهدی در قبال قرارداد ندارد، در حالی‌که فروش یا صدور اختیار معامله برای فروشنده تعهدآور است. بدین معنی که فروشنده، مبلغ قیمت اختیار را دریافت می‌کند و در مقابل متعهد می‌شود که در صورت اعمال اختیار معامله توسط خریدار، به مفاد قرارداد عمل کند. سود یا زیان صادر کننده اختیار، درست عکس خریدار می‌باشد.

[26] Call option
[27] Put option
[28] Strike price or Exercise price
[29] Expiration date or Exercise date
[30] European option
[31] American option

به طور کلی چهار موقعیت برای یک اختیار معامله وجود دارد:
۱. موقعیت خرید در قرارداد اختیار خرید
۲. موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش
۳. موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید
۴. موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش

برای بیان بازده یا ارزش نهایی سرمایه گذار در اختیار معامله‌های اروپایی، با توجه به تصادفی بودن قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید، واضح است که هزینه اولیه سرمایه گذاری در اینجا دخیل نمی‌باشد. اگر K را قیمت اعمال و S_T را قیمت دارایی پایه در زمان سررسید باشند، بازده حاصل از موقعیت خرید در یک اختیار خرید اروپایی عبارت است از:

$$\max\{S_T - K, \circ\}.$$

رابطه بالا، این واقعیت را نشان می‌دهد که اگر $K < S_T$ باشد، اختیار معامله اعمال خواهد شد و در غیر این صورت یعنی اگر $S_T \leq K$ باشد، اختیار معامله اعمال نخواهد شد. بازده سرمایه‌گذاری که موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید اروپایی اتخاذ کرده است به ترتیب زیر خواهد بود:

$$-\max\{S_T - K, \circ\} = \min\{K - S_T, \circ\}.$$

به همین منوال بازده سرمایه گذاری که موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش اروپایی اتخاذ کرده است به صورت زیر است.

$$\max\{K - S_T, \circ\}.$$

همچنین بازده دارنده موقعیت فروش اختیار فروش اروپایی به صورت زیر است:

$$-\max\{k - S_T, \circ\} = \min\{S_T - k, \circ\}.$$

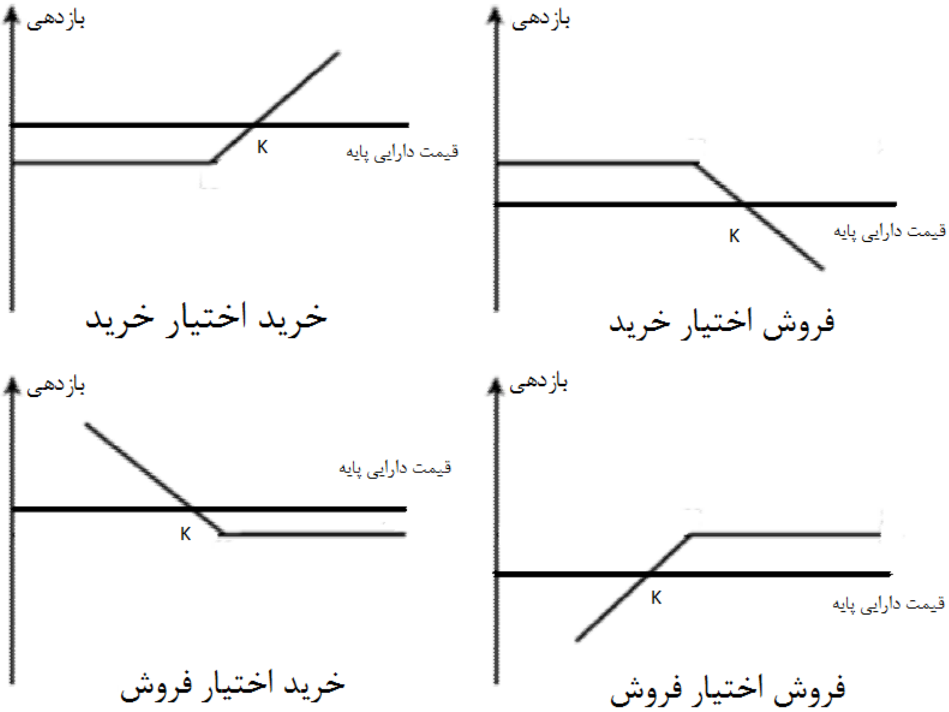
نمودارهای شکل ۳.۲ این حالات را نشان می‌دهند.

تعریف ۵.۵.۲. (رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید [۳۲])

$$C + Ke^{-rT} = P + S_\circ$$

رابطه فوق را ''رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید'' برای اختیار معامله استاندارد می‌گویند. رابطه فوق نشان می‌دهد که می‌توان قیمت یک اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی و سررسید معین را از قیمت یک اختیار فروش اروپایی با همان قیمت توافقی و همان سررسید به‌دست آورد و برعکس.

[32] Put-Call parity



شکل ۳.۲: بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معامله اروپایی

اختیار معامله غیر استاندارد

قراردادهای اختیار معامله غیر استاندارد یا نامتعارف، اختیاراتی هستند که با استفاده از یک سری قواعد، بازده‌هایی را بدست می‌دهند که محاسبه این بازده‌ها همچون حق اختیار معامله استاندارد ساده و آسان نیست. برخی اختیارات غیر معمول مجموعه‌ای از اختیار خرید و اختیار فروش اروپایی و آمریکایی هستند، بقیه مقداری پیچیده‌تر هستند. از جمله اختیارات غیر استاندارد می‌توان اختیار آسیایی [۳۳]، اختیار متکی به گذشته [۳۴] و ... نام برد.
دسته‌ای دیگر از اختیار معاملات غیر استاندارد، اختیار معاملات توان [۳۵] می‌باشند. به اختیار معاملاتی که بازدهی آن‌ها تابعی چندجمله‌ای از قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید است، اختیار معاملات توان معمولی [۳۶] گویند. تابع بازدهی اختیار خرید توان معمولی با توان nام عبارت است از:

$$V_T = \max(\sum_{i=1}^{n} a_i S_T^i - \sum_{i=1}^{n} a_i K^i, 0), \quad a_i \geq 0,$$

[33] Asain option
[34] Lookback option
[35] Power options
[36] General power options

که در آن n عدد صحیح مثبت، S_T قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید و K قیمت توافقی می‌باشد.

اختیار معامله توان استاندارد [۳۷] اختیاری است که بازدهی آن، وابسته به قیمت دارایی پایه با توانی از $m > 0$ است. اگر S_T قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید $T > 0$ و K قیمت توافقی فرض شوند، بازده حاصل از اختیار خرید توان mــام استاندارد عبارت است از:

$$\max\{S_T^m - K^m, 0\}.$$

و به همین ترتیب، بازده حاصل از اختیار فروش توان mــام استاندارد عبارت است از:

$$\max\{K^m - S_T^m, 0\}.$$

نوع دیگر بازدهی حاصل از اختیار خرید توان mــام به صورت زیر می‌باشد

$$\max\{S_T^m - K, 0\}.$$

و دیگری اختیار خرید توان سقف [۳۸] ، اختیاری است که بازدهی آن با قیمت توافقی k، تاریخ سررسید $T > 0$ و سقف L به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\min\{\max\{S_T^m - K^m, 0\}, L\}.$$

در این نوع از اختیار معامله، سقف سود از پیش تعیین می‌شود. به عبارتی دیگر، سقف سود به‌طور خودکار زمانی که قیمت دارایی پایه به حد مشخصی برسد، اعمال می‌شود. اختیار معاملات توان به دلیل قدرت نفوذ قابل توجه‌ای که نسبت به اختیار معاملات معمولی دارند، توجه خریداران اختیار معامله و سرمایه‌گذاران را جلب نموده‌اند. زیرا برای یک سرمایه‌گذار تیزبین در بازار، به دلیل داشتن بازدهی بهتر به خصوص در بازار تبادلات ارز خارجی، شاخص‌ها و ... توانمندتر از اختیار معامله‌های معمولی عمل می‌کند. به عنوان مثال، بانکداران در آلمان اختیارمعاملات توان سقف FX روی دلار آمریکا، ین ژاپن و فرانک فرانسه با توانی از مرتبه ۲ منتشر می‌کنند. همچنین در توکیو اختیار معاملات چندجمله‌ای روی شاخص Nikkei مبادله می‌شود. علاوه بر این، این اختیار معامله از جمله ابزارهایی که به منظور مدیریت ریسک در بانک‌ها مورد استفاده قرار می گیرد.

۳.۵.۲ انواع معامله‌گران

عملکرد بازارهای آتی و پیمان‌های آتی و اختیار معاملات، به طور قابل توجهی موفقیت‌آمیز بوده است. مهم‌ترین دلیل آن، توانایی این بازارها برای جذب تعداد کثیری از انواع معامله‌گران و ایجاد قابلیت نقدینگی فراوان برای انجام مبادلات است، به طوری که چنانچه سرمایه‌گذاری

[37] Standard power option
[38] Capped power call option

بخواهد یک موقعیت معاملاتی را اتخاذ کند، معمولاً مشکلی در یافتن طرف دوم قرارداد ندارد. سه گروه عمده معامله‌گران را می‌توان پوشش‌دهندگان ریسک، سفته‌بازان و آربیتراژگران در نظر گرفت. پوشش‌دهندگان ریسک با استفاده از قراردادهای آتی، پیمان‌های آتی و اختیار معاملات به دنبال کاهش ریسکی هستند، که از حرکت بالقوه آتی در یک متغیر ناشی می‌شود. سفته‌بازان از پیش‌بینی، جهت حرکت آتی قیمت، در یک متغیر بازار استفاده می‌کنند. آربیتراژگران با اتخاذ موقعیت‌های متناسب در دو یا چند بازار مختلف، به دنبال کسب سود بدون ریسک هستند [۱۶] . در این قسمت فعالیت‌ها و اقدامات هر یک از این گروه‌ها را بررسی شده‌است.

پوشش ریسک با استفاده از اختیار معاملات

با استفاده از اختیار معاملات، می‌توان به پوشش ریسک پرداخت. در واقع پوشش‌دهندگان ریسک که در موقعیت ریسک مرتبط با تغییر قیمت دارایی‌اند، از قراردادهای فوق برای کاهش یا حذف این ریسک استفاده می‌کنند. فرض کنید سرمایه‌گذاری، هزار سهم شرکتی را در اختیار دارد. قیمت فعلی هر سهم ۷۰۰ ریال است و انتظار می‌رود که اقامه دعوی علیه شرکت، باعث افت شدید قیمت، در دو ماه آینده شود. این سرمایه‌گذار می‌تواند، اختیار فروش با سررسید دوماهه را با قیمت توافقی ۶۵۰ ریال برای هر سهم بخرد. فرض کنید قیمت هر حق اختیار فروش ۲۵ ریال باشد. در این صورت هزینه کل انتخاب این استراتژی، معادل $۲۵۰۰۰ = ۲۵ \times ۱۰۰۰$ ریال خواهد بود. با این‌که انتخاب این استراتژی ۲۵۰۰۰ ریال هزینه در بردارد، ولی در عوض تضمین می‌کند، که حداقل قیمت فروش سهام برای هر سهم تا زمان سررسید اختیار، ۶۵۰ ریال باشد. اگر قیمت بازار سهام کاهش یابد، شخص می‌تواند اختیار فروش را اعمال کند و ۶۵۰۰۰۰ ریال بابت فروش سهام دریافت کند، که با کسر هزینه ۲۵۰۰۰ ریال برای خرید اختیار معامله درآمد خالص وی، مبلغ ۶۲۵۰۰۰ ریال می‌شود. اگر قیمت بازار بیش از ۶۵۰ ریال شود، اختیار فروش اعمال نمی‌شود و منقضی می‌گردد. اما در این حالت، ارزش کل دارایی بیش از ۶۵۰۰۰۰ ریال می‌شود (یا با در نظر گرفتن هزینه اوراق اختیار فروش ۶۲۵۰۰۰ ریال می‌شود).

سفته‌بازان

پوشش‌دهندگان ریسک از مواجه شدن با تغییرات نامطلوب قیمت دارایی‌ها اجتناب می‌کنند. درحالی‌که برخلاف آن‌ها سفته‌بازان به استقبال ریسک می‌روند و موقعیت‌هایی را متناسب با نوع پیش‌بینی خود درباره تغییر قیمت‌ها، کسب می‌کنند. فرض کنید یک سفته‌باز پیش‌بینی می‌کند، که ارزش سهام شرکتی در دو ماه آینده افزایش خواهد یافت. قیمت سهام مورد نظر در حال حاضر، ۴۰۰ ریال است و یک اختیار خرید دو ماهه با قیمت اعمال ۴۵۰ ریال، به قیمت ۲۰ ریال فروخته می‌شود. دو راهکار را برای یک سفته‌باز با سرمایه ۴۰۰۰۰ ریال وجود دارد. گزینه اول این است که ۱۰۰ سهم بخرد. گزینه دوم شامل خرید ۲۰۰۰ اختیار خرید (یا ۲۰ قرارداد

اختیار خرید) است. فرض کنید پیش‌بینی سفته‌باز درست باشد و قیمت سهم موردنظر در دو ماه آینده به ۷۰۰ ریال برسد. گزینه اول که خرید سهام بود، سود زیر را ایجاد می‌کند:

$$۱۰۰ \times (۷۰۰ - ۴۰۰) = ۳۰۰۰۰$$

اما گزینه دوم بسیار سودآورتر است. یک اختیار خرید بر روی سهام با قیمت توافقی ۴۵۰ ریال، درآمدی معادل ۲۵۰ ریال نصیب سفته‌باز می‌کند، چرا که ورقه اختیار خرید، او را قادر می‌سازد، که سهام ۷۰۰ ریالی را با قیمت ۴۵۰ ریال بخرد. کل سودی که در روش دوم نصیب سفته‌باز می‌شود، عبارت است از:

$$۲۵۰ \times ۲۰۰۰ = ۵۰۰۰۰۰$$

که با کم کردن هزینه (قیمت) اختیار خرید، سود خالص عبارت است از:

$$۵۰۰۰۰۰ - ۴۰۰۰۰ = ۴۶۰۰۰۰$$

بنابراین سود حاصل از انتخاب استراتژی اختیار خرید، بیش از ۱۵ برابر سود حاصل از انتخاب استراتژی خرید سهام است. در ضمن، توجه کنید که اوراق اختیار خرید، میزان زیان بالقوه را نیز افزایش می‌دهد. فرض کنید قیمت سهام در دو ماه آینده به ۳۰۰ ریال کاهش یابد. در این صورت استفاده از روش اول (یعنی خرید سهام) زیانی معادل $۱۰۰ \times (۴۰۰ - ۳۰۰) = ۱۰۰۰۰$ ریال، بر سفته‌باز وارد می‌کند. ولی از آنجا که اوراق اختیار خرید بدون اینکه اعمال شوند، منقضی می‌شوند، لذا روش دوم (یعنی اوراق اختیار) فقط زیانی معادل ۴۰۰۰۰ ریال ــ مبلغی که در ابتدا بابت اوراق اختیار خرید پرداخته می‌شودــ بر سفته‌باز تحمیل می‌کند. نتایج این استراتژی نشان می‌دهد اوراق اختیار معامله، همچون قراردادهای آتی، نوعی اهرم ایجاد می‌کنند؛ یعنی میزان پیامدهای مالی حاصل از سرمایه گذاری با استفاده از اوراق اختیار معامله اهرمی، افزایش می‌یابد؛ به عبارت دیگر، اگر پیش‌بینی‌ها درست باشند، سودهای بیشتر و در غیر این صورت، زیان‌های بیشتری را نصیب سرمایه‌گذار می‌کند.

آربیتراژگران

گروه سوم و مهم معامله‌گران در بازارهای اختیار معاملات، پیمان‌های آتی و قراردادهای آتی، آربیتراژگران هستند. آربیتراژ عبارت است از فرصت دستیابی به سود بدون ریسک، از طریق ورود هم‌زمان در دو یا چند بازار.

فر ض کنید سهامی هم‌زمان در بورس سهام نیویورک و در بورس سهام لندن معامله می‌شود. همچنین فرض کنید قیمت این سهام در بورس نیویورک ۱۷۲ دلار و در بورس لندن ۱۰۰ پوند است. اگر نرخ مبادله پوند و دلار، برابر ۱/۷۵ دلار برای هر پوند باشد، آنگاه آربیتراژگر می‌تواند با خرید مثلاً ۱۰۰ سهام از بورس نیویورک و فروش آن سهام در بازار لندن به سود بدون ریسک زیر دست پیدا کند:

$$۱۰۰ \times [(۱/۷۵ \times ۱۰۰) - ۱۷۲] = ۳۰۰$$

یعنی سودی معادل ۳۰۰ دلار بدون در نظر گرفتن هزینه معاملات برای آربیتراژگر تضمین می‌شود. البته احتمال دارد که هزینه‌های معاملات برای سرمایه گذاران کوچک سود آربیتراژی را از بین ببرد. با این حال، هزینه‌های‌مربوط به معاملات در بازار سهام و بازار تبدیلات ارز، برای معاملات بزرگ رقم چندانی نیست و همین موضوع سبب می‌شود که فرصت آربیتراژ بسیار جذاب باشد و همگان بکوشند، تا از این فرصت‌ها بیشترین منفعت را کسب کنند. همچنین باید توجه داشت که فرصت‌های آربیتراژی که یک نمونه از آن در بالا ذکر شد، نمی‌تواند برای مدت طولانی استمرار داشته باشد. با خرید سهام در بازار نیویورک، نیروهای عرضه و تقاضا باعث افزایش قیمت سهام می‌شوند و همچنین فروش آن در بازار لندن، زمینه کاهش قیمت را فراهم می‌آورد و به زودی دو قیمت فوق با نرخ مبادله فعلی در دو بازار یکسان خواهند شد. نکته جالب‌تر این است، که وجود آربیتراژگرانی که به دنبال کسب سود آربیتراژی هستند، امکان تفاوتی قابل ملاحظه بین قیمت دلار و قیمت پوند را، از همان ابتدا غیرممکن می‌سازد. به طور کلی می‌توان گفت، وجود تعداد زیادی آربیتراژگر در بازار، به این معناست که در عمل، فرصت آربیتراژی بسیار کمی در بازارهای مالی مشاهده می‌شود. به همین دلیل، بیشتر مسائلی که در خصوص قیمت‌گذاری دارایی‌ها و مشتقات مالی مطرح می‌شوند، بر این پیش فرض مبتنی هستند، که فرصت آربیتراژ وجود ندارد.

قضیه ۱.۵.۲. (قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری) بازاری که با فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و فرآیند قیمت $\{S_t\}_{t\geq 0}$ تعریف شده باشد، بدون آربیتراژ است اگر و تنها اگر اندازه مارتینگلی Q وجود داشته باشد که S تحت Q مارتینگل باشد.

برهان. به [۲۷] رجوع کنید. □

این قضیه بین یک مفهوم اقتصادی (وجود بازار بدون آربیتراژ) و یک مفهوم ریاضی (وجود اندازه مارتینگلی) ارتباط ایجاد می‌کند.

قضیه ۲.۵.۲. (قضیه اساسی دوم قیمت‌گذاری) بازار کامل است اگر و تنها اگر اندازه مارتینگلی یکتا باشد.

برهان. به [۲۷] رجوع کنید.

□

در حقیقت کلید قیمت‌گذاری هر قراردادی در استفاده از قضیه اساسی قیمت‌گذاری است که در آن اصل عدم آربیتراژ معادل با وجود یک اندازه احتمال ریسک خنثی است.

۶.۲ مدل بلک شولز

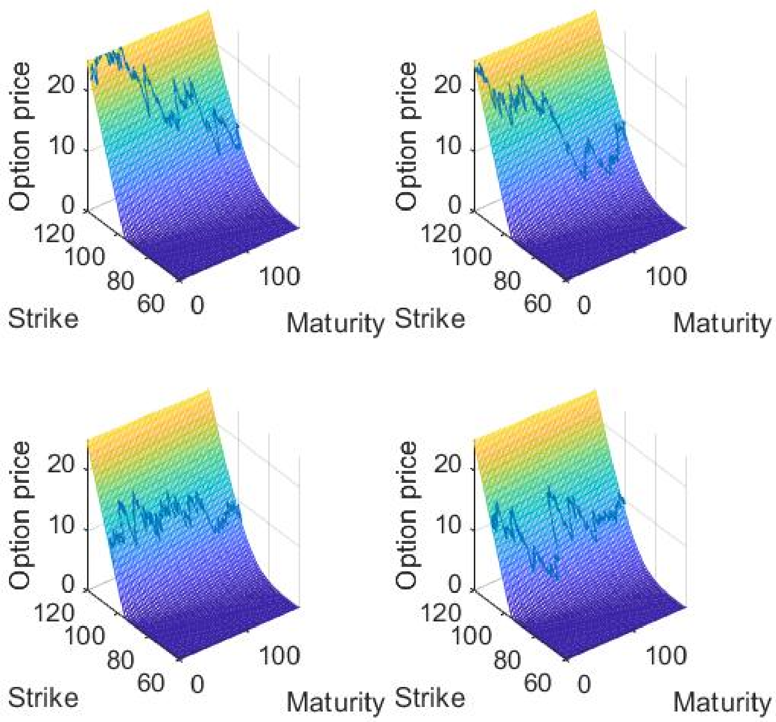
در اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰ آقایان ''فیشر بلک''، ''میرن شولز'' و ''رابرت مرتون'' گام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند. نتیجه‌ی کار آن‌ها ارائه مدلی بود که تحت عنوان

''مدل بلک ـ شولز [۳۹]'' معروف گشت. این مدل تأثیر زیادی در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله داشته است. همچنین این مدل نقش اساسی و محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشته است. از آن‌جایی که ارزش‌گذاری اختیار معامله یکی از مهم‌ترین موضوعات در اقتصادهای مالی است. و بی‌شک مدل بلک ـ شولز انقلابی در شیوه‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله به وجود آورده است. بدین دلیل در این بخش ابتدا مدل بلک ـ شولز را معرفی و سپس ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت این مدل مشخص شده است.

مدل بلک شولز مدلی شامل دو دارایی است الف ـ دارایی بدون ریسک ب ـ دارایی ریسکی که به ترتیب دارای دینامیک‌های زیرهستند.

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, \quad B(0) = 1, \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \end{aligned}$$

که در آن r، σ و μ به ترتیب نرخ بهره، تلاطم قیمت دارایی و نرخ بازده مورد انتظار دارایی (مقادیر ثابت) می‌باشند و W_t یک فرآیند براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است.



شکل ۴.۲: شبیه‌سازی مدل بلک ـ شولز با چند مسیر متفاوت

[39]Black - Sholes model

۱.۶.۲ قیمت‌گذاری اختیار توان تحت مدل بلک شولز

از محاسن مدل بلک شولز این است که برای بسیاری از اختیارهای معامله را می‌توان تابع قیمت اختیار معامله را به طور تحلیلی به دست آورد. هرچند شواهد تجربی نشان می‌دهند که این مدل در همخوانی با واقعیت‌های بازار چندان موفق نیست.

با معرفی قضیه‌ی زیر، تابع قیمت اختیار توانی مشخص می‌شود.

قضیه ۱.۶.۲. [۳۰] فرض کنید فرآیند قیمت دارایی از مدل بلک شولز پیروری کند (نرخ بهره و تلاطم مقادیر ثابت‌اند). اگر $h_T = h(S_T)$ که $h(x)$ یک تابع برای $x \in R$ باشد آن‌گاه $V(t) = F(t, S_t)$ که $0 \leq t \leq T$، $\tau = T - t$ و

$$F(t,x) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} h(x \exp\{\sigma\sqrt{\tau}y + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\})dy.$$

بازده حاصل از اختیار خرید توان mــام با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T به صورت زیر است

$$h_m(T) = (S_T^m - K)^+ = \max\{S_T^m - K, 0\},$$

که $m > 0$.

بنابراین ارزش اختیار خرید توان در زمان t با استفاده از ۳.۴.۲ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_m(t,K) = e^{-r(T-t)} E\left[(S_T^m - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right],$$

که r نرخ بهره، ثابت است.

برای ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل بلک‌ـشولز با استفاده از ۱.۶.۲ و ۳.۴.۲ می‌توان نوشت $h_m(x) = (x^m - K)^+$ و $C_m(t,K) = F(t,x)$ که

$$F(t,x) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} (x^m \exp\{m\sigma\sqrt{\tau}y + m(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\} - K)^+ dy$$

با توجه به این‌که

$$x^m \exp\{m\sigma\sqrt{\tau}y + m(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\} \geq K$$

پس

$$y \geq -\frac{\ln(x/K^{\frac{1}{m}}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -g_2(x,\tau)$$

بنابراین

$$F(t,x) = e^{-r\tau} \int_{-g_2(x,\tau)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} (x^m \exp\{m\sigma\sqrt{\tau}y + m(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\} - K)dy$$

فرض کنید $F(t,x) = A - B$ که

$$A = e^{-r\tau} \int_{-g_2(x,\tau)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} x^m \exp\{m\sigma\sqrt{\tau}y + m(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\}dy$$

$$B = e^{-r\tau} \int_{-g_{۲}(x,\tau)}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} K e^{-\frac{۱}{۲}y^{۲}} dy$$

با تغییر متغیر $u = -y$

$$B = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{g_{۲}(x,\tau)} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} K e^{-\frac{۱}{۲}u^{۲}} du = K e^{-r\tau} N(g_{۲}(x,\tau))$$

که N تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

ملاحظه ۱.۶.۲. تابع توریع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد $N(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{۱}{۲}u^{۲}} du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

علاوه بر این

$$\begin{aligned}
A &= e^{-r\tau} \int_{-g_{۲}(x,\tau)}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}y^{۲}} x^{m} \exp\{m\sigma\sqrt{\tau}y + mr\tau - \frac{۱}{۲}m\sigma^{۲}\tau\} dy \\
&= x^{m} e^{(m-۱)r\tau} \int_{-g_{۲}(x,\tau)}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\{-\frac{۱}{۲}y^{۲} + m\sigma\sqrt{\tau}y - \frac{۱}{۲}m\sigma^{۲}\tau\} dy \\
&= x^{m} e^{(m-۱)r\tau} \int_{-g_{۲}(x,\tau)}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\{-\frac{۱}{۲}(y - m\sigma\sqrt{\tau})^{۲} + \frac{۱}{۲}m\sigma^{۲}\tau(m-۱)\} dy \\
&= x^{m} e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^{۲})\tau} \int_{-g_{۲}(x,\tau)}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\{-\frac{۱}{۲}(y - m\sigma\sqrt{\tau})^{۲}\} dy
\end{aligned}$$

در رابطه فوق قرار می‌دهیم $v = y - m\sigma\sqrt{\tau}$ پس داریم

$$A = x^{m} e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^{۲})\tau} \int_{-g_{۲}(x,\tau)-m\sigma\sqrt{\tau}}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\{-\frac{۱}{۲}v^{۲}\} dv.$$

فرض می‌کنیم $u := -v$ آن‌گاه

$$\begin{aligned}
A &= x^{m} e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^{۲})\tau} \int_{-\infty}^{g_{۲}(x,\tau)+m\sigma\sqrt{\tau}} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\{-\frac{۱}{۲}u^{۲}\} du \\
&= x^{m} e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^{۲})\tau} N(g_{۱}(x,\tau))
\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
g_{۱}(x,\tau) &= g_{۲}(x,\tau) + m\sigma\sqrt{\tau} \\
&= \frac{\ln(x/K^{\frac{۱}{m}}) + (r + (m - \frac{۱}{۲})\sigma^{۲})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}
\end{aligned}$$

بنابراین فرمول قیمت‌گذاری اختیار خرید توان تحت مدل بلک شولز به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$C_{m}(t,K) = S_{t}^{m} e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^{۲})\tau} N(g_{۱}(S_{t},\tau)) - K e^{-r\tau} N(g_{۲}(S_{t},\tau)), \qquad (۸.۲)$$

که $\tau = T - t$ و

$$g_۱(x,\tau) = \frac{\ln(x/K^{\frac{۱}{m}}) + (r + (m - \frac{۱}{۲})\sigma^۲)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$g_۲(x,\tau) = g_۱(x,\tau) - m\sigma\sqrt{\tau}.$$

ملاحظه ۲.۶.۲. در رابطه‌ی فوق به ازای $m = ۱$ فرمول ارزش‌گذاری برای اختیار خرید اروپایی حاصل می‌شود.

۷.۲ تبدیل فوریه در قیمت‌گذاری

در سال ۱۹۵۱ گیل پلاز با معرفی قضیه‌ای، حالتی دیگر از معکوس تبدیل فوریه [۴۰] را مطرح کرد [۱۱] و کار و مادان در سال ۱۹۹۹ با استفاده از معکوس تبدیل فوریه، با روشی جدید به نام تبدیل فوریه سریع، به قیمت‌گذاری اختیار معاملات اروپایی تخت مدل هستون پرداختند. [۷] روش آن‌ها به سرعت به یکی از راهکارهای محبوب و مفید برای قیمت‌گذاری مشتقات تبدیل شد. چراکه این روش از سرعت و دقت بالایی برخوردار بود. روش تبدیل فوریه سریع نیازمند مشخص کردن تابع مشخصه [۴۱] مدل‌های قیمت‌گذاری است که توابع اکثر مدل‌ها در دسترس می‌باشند.

۱.۷.۲ تبدیل فوریه

فرض کنید W یک متغیر تصادفی در فضای احتمال (Ω, F, P) باشد. تبدیل فوریه یک تابع پیوسته به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t < \infty \qquad (۹.۲)$$

که $\omega \in \mathbb{R}$.تابع f اصلی را می‌توان از معکوس تبدیل فوریه برگرداند.

$$f(t) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\hat{f}(t)\mathrm{d}\omega < \infty \qquad (۱۰.۲)$$

شرایط کافی(ولی نه لازم) برای وجود تبدیل فوریه و معکوس آن این است که اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در فضای انتگرال‌پذیر $L^۱$ باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$$

[40] Fourier Transformation
[41] Characteristic function

تابع مشخصه $\phi(\omega)$ با $\omega \in \mathbb{R}$ با استفاده از تبدیل فوریه‌ی تابع چگالی احتمال $\mathbb{P}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi(\omega) \equiv F[\mathbb{P}(x)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\mathbb{P}(x)\mathrm{d}x = E[e^{i\omega x}]. \tag{۱۱.۲}$$

۲.۷.۲ تبدیل فوریه سریع برای اختیار معامله توان

برای نوع اول و دوم اختیار معامله توان با توان $m > 0$ و قیمت توافقی K و سررسید T تابع قیمت‌گذاری به صورت زیر است

$$c(t, S_T) = e^{-r(T-t)}E^Q[(S_T^m - K^m)^+|F_t], \tag{۱۲.۲}$$

$$c(t, S_T) = e^{-r(T-t)}E^Q[(S_T^m - K)^+|F_t], \tag{۱۳.۲}$$

که r نرخ بهره بدون ریسک و $(S_T^m - K^m)^+ = \max(S_T^m - K^m, 0)$ است. رابطه (۱۲.۲) مربوط به نوع اول و رابطه (۱۳.۲)) مربوط به نوع دوم اختیار معامله توان هستند.

فرض کنید $k = \ln K$ $X_t = \ln S_t$ و $t = 0$. پس می‌توان نوشت.

$$c(T, k) = e^{-rT}\int_k^{\infty}(e^{mX_T} - e^{mk})q_T(X_T)\mathrm{d}X_T, \tag{۱۴.۲}$$

$$c(T, k) = e^{-rT}\int_k^{\infty}(e^{mX_T} - e^{k})q_T(X_T)\mathrm{d}X_T, \tag{۱۵.۲}$$

که $q_T(X_T)$ تابع چگالی فرایند تصادفی X_T است. تابعی که کار و مادان اصلاح کردند به صورت زیر است

$$C(T, k) = e^{\alpha k}c(T, k), \qquad \alpha > 0. \tag{۱۶.۲}$$

تبدیل فوریه روی $C(T, k)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\psi_T(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk}C(T, k)\mathrm{d}k. \tag{۱۷.۲}$$

با جایگذاری (۱۴.۲) در (۱۶.۲) و (۱۶.۲) در (۱۷.۲) معادله‌ی زیر برای نوع اول اختیار توان به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk}e^{\alpha k}e^{-rT}\int_k^{+\infty}(e^{mX_T} - e^{mk})q_T(X_T)\mathrm{d}X_T\mathrm{d}k \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT}q_T(X_T)\int_{-\infty}^{X_T}(e^{mX_T+\alpha k} - e^{(\alpha+m)k})e^{iuk}\mathrm{d}k\mathrm{d}X_T \\ &= \tfrac{me^{-rT}f(u-(\alpha+m)i)}{(\alpha+iu)(m+\alpha+iu)}. \end{aligned} \tag{۱۸.۲}$$

همچنین برای نوع دوم اختیار معامله توان، با جایگذاری (۱۵.۲) در (۱۶.۲) و (۱۶.۲) در (۱۷.۲) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk}e^{\alpha k}e^{-rT}\int_k^{+\infty}(e^{mX_T} - e^{k})q_T(X_T)\mathrm{d}X_T\mathrm{d}k \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT}q_T(X_T)\int_{-\infty}^{X_T}(e^{mX_T+\alpha k} - e^{(\alpha+1)k})e^{iuk}\mathrm{d}k\mathrm{d}X_T \\ &= e^{-rT}[\tfrac{f(u-(\alpha+m)i)}{(\alpha+iu)} - \tfrac{f(u-(\alpha+1)i)}{1+\alpha+iu}], \end{aligned} \tag{۱۹.۲}$$

در معادلات بالا تابع $f(u)$ تابع مشخصه X_T تحت اندازه ریسک خنثی است. با استفاده از تعریف تبدیل فوریه معکوس تابع $C(T,K)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$C(T,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iuk}\psi_T(u)\mathrm{d}u. \tag{۲۰.۲}$$

بنابراین قیمت اصلاح شده اختیار خرید توان با استفاده از تبدیل فوریه سریع به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$c(T,k)=\frac{e^{-\alpha k_\nu}}{\pi}\sum_{j=1}^{N}e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(\nu-1)}e^{ibu_j}\psi_T(u_j)\frac{\Delta}{3}(3+(-1)^j-\delta_{j-1}), \tag{۲۱.۲}$$

که مقدار Δ وابسته به N است و N توانی از دو می‌باشد. همچنین

$$u_j=\Delta(j-1),\ b=\frac{N\Delta}{2},\ \nu=1,2,\ldots,N,\ \delta_n=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & o.w.\end{cases} \tag{۲۲.۲}$$

فصل ۳

مدل‌های تلاطم تصادفی

یکی از مهم ترین مدل‌هاي قیمت گذاري مشتقات مالی، مدل بلک_شولز است که بی‌تردید پایه و اساس شکل‌گیري بسیاري از مدل‌هاي مالی در حال حاضر است. فرض اساسی در مدل بلک_شولز این است که توزیع احتمال قیمت آتی دارایی‌هاي پایه (سهام)، لگ‌نرمال است. اما در بازارهاي مالی واقعی فرایند قیمت دارایی در مقایسه با توزیع لگ‌نرمال، داراي دُم سنگین‌تری است. بدین ترتیب، با توزیع‌هاي مختلفی از قیمت‌هاي اختیار خرید یا فروش مواجه خواهیم شد که تفاوت آنها در دم توزیع است. از طرف دیگر، در مدل بلک – شولز نوسان قیمت سهام، ثابت در نظر گرفته شده است، در صورتی که نتایج تجربی غیر مسطح بودن نوسان قیمت دارایی هاي پایه را نشان می‌دهد. ایده‌ی نوسان تصادفی، به خصوص پس از رکود اقتصادي سال ۱۹۷۸ مورد توجه قرار گرفت و تا قبل از آن زمان مدل بلک – شولز، بهترین و کارآمدترین مدل براي قیمت‌گذاري حرکت سهام به شمار می‌آمد.

در این فصل، ضمن معرفی چند مدل تلاطم تلادفی، تابع مشخصه‌ی هر مدل نیز، جهت استفاده در تبدیل فوریه سریع، معرفی می‌شود.

۱.۳ مدل هستون

مدل هستون یک نوع مدل نوسان تصادفی است که هستون در سال ۱۹۹۳ به منظور تجزیه‌تحلیل قراردادهای اختیار ارزی بدان پرداخت. هدف اصلی هستون غلبه بر برخی کاستی‌های موجود

در مدل مشهور قیمت‌گذاری اختیار بلک_شولز بود. به طور مثال مدل بلک_شولز دارای این پیش فرض قوی است که حرکت قیمت سهام به صورت یک توزیع نرمال با میانگین و واریانس مشخص، توزیع شده اند. علاوه بر این، در مدل بلک_شولز نوسانات ثابت فرض شده‌اند. در مقابل مدل بلک_شولز، مدل هستون این اجازه را می‌دهد تا نوسانات بطور تصادفی تغییر کنند که این موضوع باعث می‌شود تا مدل هستون بطور بالقوه برای شرایط گسترده‌تری قابل استفاده باشد [۲۵] .

فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمال، F_{tt} فیلتر تولید شده توسط فرآیندهای براونی و فرآیند پرش در زمان $\circ \leq t \leq T$ و Q اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی باشد. درمدل هستون فرآیند قیمت دارایی پایه S_t در لحظه‌ی t از مدل زیر تبعیت می‌کند

$$\mathrm{d}S_t = \mu(S_t)\mathrm{d}t + \sqrt{V_{(t)}}(S_t)\mathrm{d}Z_{t_۱} \qquad t \in [\circ, T], \tag{۱.۳}$$

که در آن $Z_{t_۱}$ فرآیند وینر است.

در مدل هستون برای نوسان نیز یک فرآیند وینر دیگر درنظر گرفته می‌شود . فرایند نوسان به شکل زیر است

$$\mathrm{d}V_t = \kappa(\theta - V_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{V(t)}\mathrm{d}Z_{t_۲} \qquad t \in [\circ, T], \tag{۲.۳}$$

با این فرض که :

$$Z_{t_۱} Z_{t_۲} = \rho \mathrm{d}t,$$

که در آن S_t فرایند قیمت ، V_t فرایند نوسان، $Z_{t_۱}$ و $Z_{t_۲}$ فرایند براونی با ضریب همبستگی ρ هستند. θ میانگین بلند مدت، κ سرعت بازگشت به میانگین و σ واریانس فرایند نوسان هستند.

۱.۱.۳ تابع مشخصه

با قرار دادن $x_T = \ln S_T$ تابع مشخصه‌ی مدل هستون به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}
\phi_j(\varphi; x_t, v_t) &= \mathbb{E}[\phi_j(\varphi; x_T, v_T)|F_t] \\
&= \mathbb{E}[e^{i\varphi \ln S_T|(x_t, v_t)}] \\
&= exp[C_j(\tau, \varphi) + D_j(\tau, \varphi)v_t + i\varphi x_t]
\end{aligned}$$

که در آن

$$C_j = ri\varphi\tau + \frac{a}{\sigma^۲}\left[(b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j)\tau - ۲\ln\left(\frac{۱ - g_j e^{d_j\tau}}{۱ - g_j}\right)\right] \tag{۳.۳}$$

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j}{g_i\sigma^۲}\left(\frac{۱ - e^{-d_j\tau}}{۱ - e^{-d_j\tau}/g_i}\right) \tag{۴.۳}$$

و

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j}$$
$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\varphi - b_j)^۲ - \sigma^۲(۲u_j i\varphi - \varphi^۲)}$$
$$u_j = \begin{cases} \frac{۱}{۲}, & j = ۱ \text{ اگر}; \\ -\frac{۱}{۲}, & j = ۲ \text{ اگر}; \end{cases}$$
$$b_j = \begin{cases} \kappa + \lambda - \rho\sigma, & \text{اگر } j = ۱; \\ \kappa + \lambda, & \text{اگر } j = ۲; \end{cases}$$
$$a = \kappa\theta.$$

۲.۱.۳ حقه کوچک هستون

در سال ۲۰۰۷ البرچر، نشان داد که مدل هستون دارای دو تابع مشخصه متفاوت است. تابع اول همان تابع مشخصه اصلی مدل می‌باشد درحالی که حالت دوم کمی متفاوت‌تر است. همچنین او نشان داد که این دو تابع با هم هم‌ارز هستند اما تابع مشخصه دوم رفتار بهتری دارد و برای انتگرال‌های عددی مناسب‌تر است [۵].

با ضرب صورت و مخرج D_j در $\exp(-d_j\tau)$ در معادله (۴.۳) می‌توان D_j را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j}{g_i\sigma^۲}\left(\frac{۱ - e^{-d_j\tau}}{۱ - e^{-d_j\tau}/g_i}\right) = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j}{\sigma^۲}\left(\frac{۱ - e^{-d_j\tau}}{۱ - c_j e^{d_j\tau}}\right) \tag{۵.۳}$$

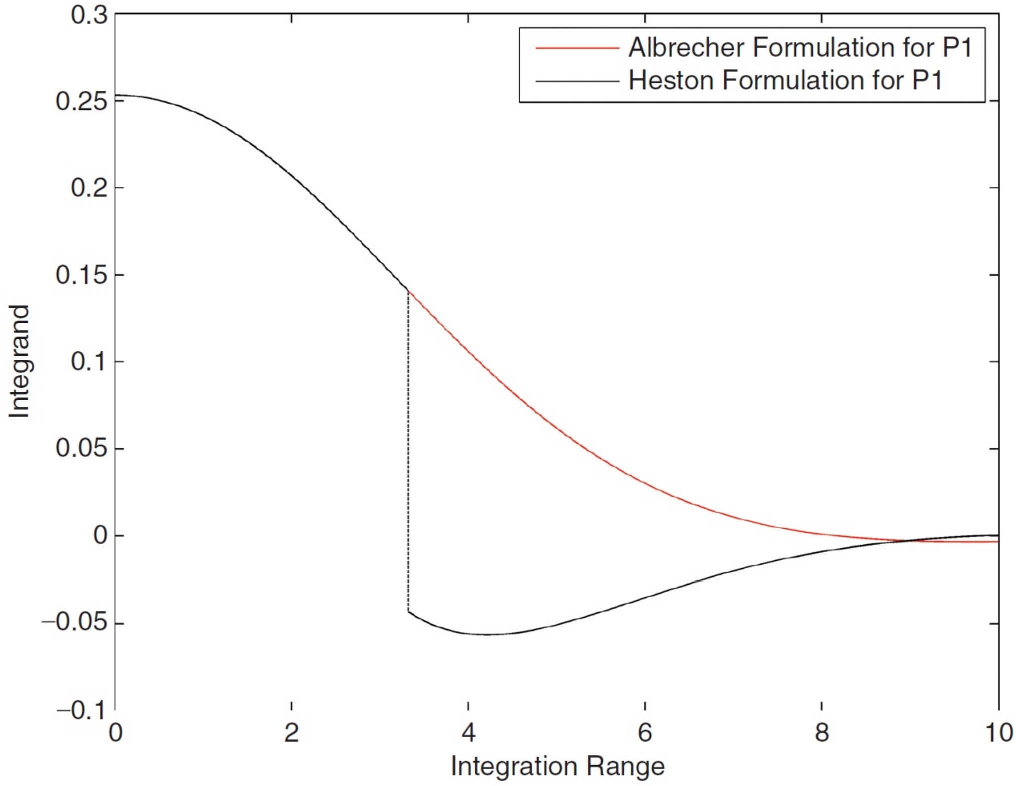
که

$$c_i = \frac{۱}{g_i} = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j}{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j},$$

همچنین برای تابع C_j در معادله (۳.۳) می‌توان نوشت

$$C_j = ri\varphi\tau + \frac{a}{\sigma^۲}\left[(b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j)\tau - ۲\ln\left(\frac{۱ - c_j e^{-d_j\tau}}{۱ - c_j}\right)\right]. \tag{۶.۳}$$

به سادگی با قرار دادن این دو تابع جدید در تابع مشخصه‌ی هستون، تابع مشخصه‌ی دیگری برای این مدل ایجاد می‌شود. البرچر نشان داد که با وجود یکسان بودن دو حالت، این تابع جدید مشکلات عددی کمتری در اجرا دارد.



شکل ۱.۳: مقایسه خطای دو تابع مشخصه‌ی مدل هستون

۲.۳ مدل هستون مضاعف

کریستوفرسن در سال ۲۰۰۹ با هدف بررسی دقیق‌تر رویه‌ی تلاطم ضمنی بازار، با افزودن یک فرایند تصادفی دیگر به مدل هستون، مدل هستون مضاعف را ارائه کرد. همچنین این مدل در مقایسه با مدل هستون استاندارد، نسبت به قیمت‌های پرت، انعطاف بیشتری نشان می‌دهد. [۸] در این مدل تلاطم قیمت دارایی پایه به دو جزء شکسته می‌شود.

معادلات مدل هستون مضاعف به شکل زیر هستند.

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sqrt{V_{1,t}}S_t\mathrm{d}W_{1,t} + \sqrt{V_{2,t}}S_t\mathrm{d}W_{2,t},$$
$$\mathrm{d}V_{1,t} = \kappa_1(\theta_1 - V_{1,t})\mathrm{d}t + \sigma_1\sqrt{V1,t}\mathrm{d}Z_{1,t},$$
$$\mathrm{d}V_{2,t} = \kappa_2(\theta_2 - V_{2,t})\mathrm{d}t + \sigma_2\sqrt{V2,t}\mathrm{d}Z_{2,t},$$

که در آن‌ها روابط زیر برقرار هستند.

$$\mathbb{E}[\mathrm{d}W_{1,t}\mathrm{d}Z_{1,t}] = \rho_1\mathrm{d}t,$$
$$\mathbb{E}[\mathrm{d}W_{2,t}\mathrm{d}Z_{2,t}] = \rho_2\mathrm{d}t,$$
$$\mathbb{E}[\mathrm{d}W_{1,t}\mathrm{d}W_{2,t}] = \mathbb{E}[\mathrm{d}Z_{1,t}\mathrm{d}Z_{2,t}] = \mathbb{E}[\mathrm{d}W_{1,t}\mathrm{d}Z_{2,t}] = \mathbb{E}[\mathrm{d}W_{2,t}\mathrm{d}Z_{1,t}] = 0,$$

۱.۲.۳ تابع مشخصه

دافی و همکاران [۱۰] تابع مشخصه‌ی این مدل را به صورت زیر برای $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ و $(x_T, v_{1,T}, v_{2,T})$ معرفی کرده‌اند

$$\begin{aligned}\phi(\varphi; x_t, v_{1,T}, v_{2,T}) &= \mathbb{E}[\exp(i\varphi_0 x_T + i\varphi_1 v_{1,T} + i\varphi_2 v_{2,T})] \\ &= \exp[A(\tau) + B_0(\tau)x_t + B_1(tau)v_{1,T} + B_2(\tau)v_{2,T}],\end{aligned} \tag{۷.۳}$$

که در آن

$$\begin{aligned}A(\tau,\varphi) &= r\varphi i\tau + \sum_{j=1}^{2}\frac{\kappa_j\theta_j}{\sigma_j^2}[(\kappa_j - \rho_j\sigma_j\varphi i + d_j)\tau - 2\ln\left(\frac{1-g_je^{d_j\tau}}{1-g_j}\right)], \\ B_j(\tau,\varphi) &= \frac{\kappa_j - \rho_j\sigma_j\varphi i + d_j}{\sigma_j^2}\left(\frac{1-e^{d_j\tau}}{1-g_je^{d_j\tau}}\right),\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}g_j &= \frac{\kappa_j - \rho_j\sigma_j\varphi i + d_j}{\kappa_j - \rho_j\sigma_j\varphi i - d_j}, \\ d_j &= \sqrt{(\kappa_j - \rho_j\sigma_j\varphi i)^2 + \sigma_j^2\varphi(\varphi+i)},\end{aligned}$$

۳.۳ مدل میخایلوف و نوگل

وابسته کردن پارامترها به زمان، یکی از راهبردهای مدلسازی تلاطم ضمنی بازار در سررسیدهای کوتاه مدت و سازگار شدن مدل با بازار واقعی است، که به اینگونه مدل‌ها، مدل‌های وابسته به زمان می‌گویند.

مدل میخایلوف و نوگل [۲۳] درواقع همان مدل هستون است که وابسته به زمان شده و به صورت زیر هستند.

$$dS_t = rS_tdt + \sqrt{v_t}S_tdW_{1,t}, \tag{۸.۳}$$

$$dv_t = \kappa_t(\theta_t - v_t)dt + \sigma_t\sqrt{v_t}dW_{2,t}, \tag{۹.۳}$$

که S_t فرایند تغییر قیمت دارایی پایه و v_t فرایند تلاطم هستند و r نرخ بهره بدون ریسک، $\kappa_t > 0$ سرعت بازگشت به میانگین، $\theta_t > 0$ میانگین بلندمدت، $\sigma_t > 0$ واریانس فرایند تلاطم هستند. همچنین $W_{1,t}$ و $W_{2,t}$ دو حرکت براونی با ضریب همبستگی ρ_t هستند، یعنی رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[dW_{1,t}dW_{2,t}] = \rho_tdt$$

۱.۳.۳ تابع مشخصه

برای تعیین تابع مشخصه‌ی این مدل، بازه‌ی $[0, T_N]$ که T_N زمان سررسید اختیار می‌باشد، به N قسمت مساوی تقسیم شده است. فاصله‌ی هر دو قسمت را به صورت $\tau_k = T_k - T_{k-1},\ k = 1, \ldots, N$ قرار می‌دهیم. در هر گام زمانی τ_k ، مدل میخایلوف و نوگل به مدل هستون تبدیل می‌شود و باید تمام پارامترهای مدل هستون در این بازه برآورد شوند.

تابع مشخصه‌ی مدل میخایلوف و نوگل به صورت زیر است

$$\phi_j(\varphi; x; v; \Theta_k) = \exp[\widetilde{C}_j(\varphi, \tau_k; \Theta_k) + \widetilde{D}_j(\varphi, \tau_k; \Theta_k) v_0^k + i\varphi x] \qquad (۱۰.۳)$$

که

$$\widetilde{C}_j(\varphi, \tau_k; \Theta_k) = (r - q) i\varphi\tau_k + \frac{a}{\sigma^2}[\varpi_j \tau_k - 2\ln(\frac{1 - \tilde{g}_j e^{d_j \tau_k}}{1 - \tilde{g}_j})] + C_j^{k-1}, \qquad (۱۱.۳)$$

$$\widetilde{D}_j(\varphi, \tau_k; \Theta_k) = \begin{cases} \zeta_j, & k = 1, \\ \chi_j, & k \geq 2, \end{cases} \qquad (۱۲.۳)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \varpi_j &= b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j, \\ \zeta_j &= \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j}{\sigma^2}(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j \tau}}), \\ \chi_j &= \frac{(b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j) - (b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j)\tilde{g}_j \exp(d_j\tau_k)}{\sigma^2(1 - \tilde{g}_j \exp(d_j \tau_k))}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g_j &= \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j - D_j^{k-1}\sigma^2}{b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j - D_j^{k-1}\sigma^2}, \\ d_j &= \sqrt{(\rho\sigma i\varphi - b_j)^2 \sigma^2 (2\mu_j i\varphi - \varphi^2)}, \\ \mu_j &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = 1, \\ -\frac{1}{2}, & j = 1, \end{cases} \\ b_j &= \begin{cases} \kappa + \lambda - \rho\sigma, & j = 1, \\ \kappa + \lambda, & j = 2, \end{cases} \\ a &= \kappa\theta \end{aligned}$$

همچنین توابع C_j و D_j از اجزای تابع مشخصه‌ی مدل هستون هستند.

۴.۳ مدل هستون با پرش(بیتس)

در سال ۱۹۹۶ بیتس [۶] با افزودن پرش‌هایی مستقل و یکسان با تابع توزیع پواسون [1] به مدل هستون، این مدل را ارتقا داد و به بازارهای پرتلاطم نزدیک‌تر کرد.

مدل بیتس برای فرایند قیمت و تلاطم به صورت زیر است

$$dS_t = (r - \Lambda\mu_J)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_{۱,t} + JS_t d\tilde{N}_t, \tag{۱۳.۳}$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_v\sqrt{v_t}dW_{۲,t}, \tag{۱۴.۳}$$

که در آن S_t فرآیند قیمت، r بهره‌ی بدون ریسک، Λ تکرار پرش‌های سالانه، J درصد تصادفی پرش‌های شرطی، μ_J میانگین فرآیند پرش، $\tilde{N}$ فرایند پواسون با درجه شدت λ ، v_t فرآیند تلاطم، $\kappa > ۰$ سرعت بازگشت به میانگین ، $\theta > ۰$ میانگین بلندمدت ، $\sigma > ۰$ واریانس فرایند تلاطم و $W_{۱,t}$ و $W_{۲,t}$ دو فرایند براونی با ضریب همبستگی ρ هستند. یعنی رابطه‌ی زیر برقرار است

$$E^{\mathbb{P}} = \rho dt. \tag{۱۵.۳}$$

همچنین

$$۱ + J \sim \log N(\mu_S, \sigma_S^۲), \tag{۱۶.۳}$$

و رابطه‌ی میان μ_J و μ_S به صورت زیر است.

$$\mu_J = \exp(\mu_S + \frac{\sigma_S^۲}{۲}) - ۱, \tag{۱۷.۳}$$

۱.۴.۳ تابع مشخصه

تابع مشخصه‌ی مدل بیتس، همانند مدل هستون است، فقط در بخش پرش، تفاوت ظاهر می‌شود که به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\phi_j(\varphi; x_t, v_t) &= \mathbb{E}[\phi_j(\varphi; x_T, v_T)|F_t] \\ &= \mathbb{E}[e^{i\varphi \ln S_T}|(x_t, v_t)] \\ &= \exp[C_j(\tau,\varphi) + D_j(\tau,\varphi)v_t + P(\varphi)\Lambda\tau + i\varphi x_t],\end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

که در آن

$$P(\varphi) = -\mu_J i\varphi + [(۱ + \mu_J)^{i\varphi} e^{\sigma_S^۲(\frac{i\varphi}{۲})(i\varphi - ۱)} - ۱],$$

[1] Poisson process

و توابع C_j و D_j اجزای تابع مشخصه‌ی مدل هستون هستند که به صورت زیر هستند.

$$C_j = ri\varphi\tau + \frac{a}{\sigma^۲}[(b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j)\tau - ۲\ln(\frac{۱ - g_j e^{d_j\tau}}{۱ - g_j})]$$
$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j}{\sigma^۲}(\frac{۱ - e^{d_j\tau}}{۱ - g_j e^{d_j\tau}})$$

که در آن

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi + d}{b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j}$$
$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\varphi - b_j)^۲ - \sigma^۲(۲\mu_j i\varphi - \varphi^۲)}$$
$$\mu_j = \begin{cases} \frac{۱}{۲}, & j = ۱; \\ -\frac{۱}{۲}, & j = ۲; \end{cases}$$
$$b_j = \begin{cases} \kappa + \lambda - \rho\sigma, & j = ۱; \\ \kappa + \lambda, & j = ۲; \end{cases}$$
$$a = \kappa\theta$$

فصل ۴

مدل‌هایی با حافظه بلندمدت

مندلبروت بنیان‌گذار هندسه فراکتال بود. پارامتر H از حرکت براونی کسری به نام متخصص آب‌شناسی هارولد ادوین هرست نام‌گذاری شد که یک بررسی آماری سالانه براساس ورودی و خروجی رود نیل انجام داد (بررسی حافظه سری آن) . در سال ۱۹۶۷ روبرت کاسوف [۱۶] با برازش منحنی به قیمت های واقعی اختیار خرید سهام به یک فرمول تجربی ارزش‌گذاری دست می یابد. بعضی از خواص فرآیند حرکت براونی کسری توسط مندلبروت و ون نس ارائه گردید. ساموئلسون، به این واقعیت پی برد که تنزیل ارزش مورد انتظار توزیع مقادیر احتمالی اختیار خرید سهام به هنگام اعمال آن رویه درستی نیست [۱۶]. مندلبروت، اولین کسی بود که ایده وجود حافظه بلند مدت را در بازده دارایی‌ها مطرح کرد . فیشر بلک، مایرون شولز، رابرت مرتون با ارائه دادن مدل بلک_شولز برای قیمت‌گذاری اختیار، دنیای مالی را تغییر دادند. محاسبات کسری یا سیستم‌های شامل مشتق و انتگرال‌های کسری توسط کارسلا و اولد هامند اسپانیر در سال ۱۹۷۴ مورد مطالعه قرار گرفت، گرین و فیلیتز با استفاده از آماره $\frac{R}{S}$ کلاسیک، بازده روزانه شاخص بورس نیویورک را مطالعه کردند و شواهدی قوی مبنی بر وجود حافظه بلند مدت در آن یافتند [۱۳] . هوگارد و همکاران، فرضیه تحدب قیمت اختیار بدست آمده را ارائه نمودند و یک معادله بلک_شولز غیر خطی را از طریق تعمیم معادله بلک_شولز برای تلفیق هزینه‌های معامله استنتاج کرده‌اند [۱۵]. تعداد قابل ملاحظه‌ای از استراتژی آربیتراژی برای مدل‌های FBM توسط راجرز، شیریاو و سالوپک ارائه شده است. با کشف ساختار فراکتالی برای بازار مالی، مدل بلک_شولز کسری به عنوان یک مدل تعمیم

یافته مدل بلک_ شولز کلاسیک ارائه شد. گواسونی نشان داد با در نظر گرفتن هزینه‌های معامله متناسب فرصت‌های آربیتراژی در مدل بلک_ شولز کسری کاهش می‌یابد [۱۴].

۱.۴ توان هرست

توان هرست ابزاری مناسب برای تشخیص یک سری زمانی غیرتصادفی از یک سری تصادفی، بدون درنظر گرفتن نوع توزیع آن است. روش مطالعه و آزمون هرست به تدریج به پدیده های دیگری نیز، که در ظاهر تصادفی به نظر می رسند، ولی ممکن است از یک الگوی منظمی برخوردار باشند، تعمیم داده شد. هرست با استفاده از قاعده نصف در آمار، رابطه زیر را تعریف کرد

$$(\frac{R}{S})_n = a \cdot n^H \tag{۱.۴}$$

که در آن R دامنه تجدید مقیاس شده، S انحراف معیار سری زمانی، a عدد ثابت، n تعداد مشاهدات و H توان هرست است .فرمول بالا را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\log(\frac{R}{S})_n = \log a + H \log n \tag{۲.۴}$$

توان هرست همانندی دو پیشامد پیاپی را نشان می دهد و به کمک محاسبه شیب منحنی $\frac{\log \frac{R}{S}}{\log n}$ و با استفاده از روش رگرسیون در حوزهٔ تغییرات n بدست می آید. مقدار بدست آمده نمایانگر میانگین دوره گردش متناوب الگو است. در عمل، می‌توان با انجام یک رگرسیون، ضریب توان هرست H را برآورد کرد، طبق نتایج هرست اگر مقدار توان برابر ۰،۵ باشد دلالت بر یک فرآیند مستقل دارد. همچنین بعد فراکتالی سری‌های زمانی میزان ناهمواری و نوسانات آن را نشان می‌دهد [۲۰]. بعد فراکتالی یک خط برابر ۱ و برای یک صفحه برابر ۲ است، بنابراین بعد فراکتالی یک سری زمانی بین ۱ و ۲ قرار دارد. رابطه بعد فراکتالی و توان هرست یک سری زمانی از رابطه بدست می آید.

$$D = ۲ - H$$

D بعد فراکتال و H توان هرست است. اگر توان هرست بین ۰،۵ و ۱ قرار گیرد، دلالت بر یک سری زمانی پایدار با حافظه بلند مدت دارد و در نهایت اگر، توان هرست برابر با یک مقدار مثبت ولی کمتر شد، دلالت بر ناپایداری فرایند دارد

برای محاسبه توان هرست می‌توان از رابطه زیر نیز استفاده کرد.

$$\text{توان هرست} = \frac{\text{لگاریتم دامنه تغییرات قیمت}}{\text{انحراف معیار قیمت‌های ماهیانه}} \tag{۳.۴}$$

۲.۴ حرکت براونی کسری

حرکت براونی کسری اولین بار توسط کلموگروف در سال ۱۹۴۰ معرفی شد [۱۸].

تعریف ۱.۲.۴. یک فرآیند تصادفی گاوسی $(B_t^H)_{(t\geq 0)}$ با توان هرست $H \in (0,1)$ ، حرکت براونی کسری نامیده می‌شود اگر:

۱. مسیرهای B^H پیوسته و $B_0^H = 0$

۲. $\mathbb{E}[B_t^H] = 0$ و $Var[B_t^H] = t^{2H}$ برای هر $t \geq 0$

۳. نموهای B^H مانا هستند

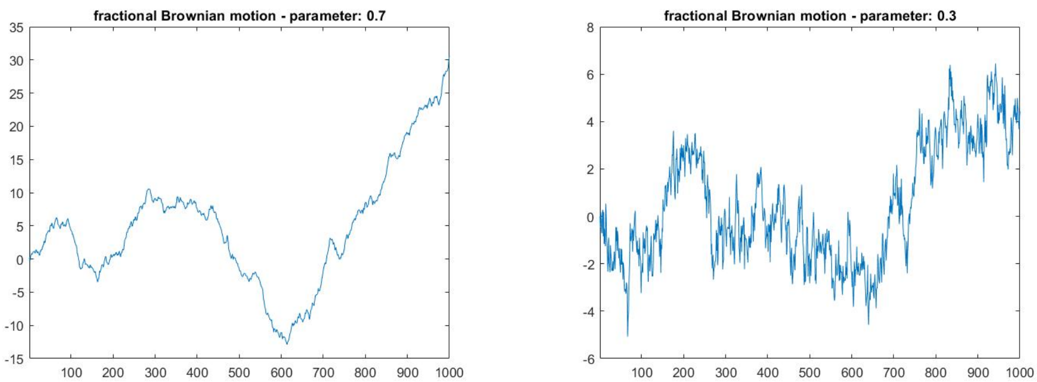
۴. فرایند B^H در تابع کوواریانس زیر برقرار است

$$p_{t,s} := \mathbb{E}[B_t^H B_S^H] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) \qquad (۴.۴)$$

فرآیندهای FBM را می‌توان به دو دسته جدا از فرآیند براونی استاندارد $(H = \frac{1}{2})$ تقسیم کرد. اگر $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ نموهای FBM همبستگی مثبت دارند که فرآیند B^H رفتار وابسته طولانی با حافظه‌ی بلندمدت دارد. وقتی $H \in (0, \frac{1}{2})$ با نموهای B^H همبستگی منفی دارند و برای مدل های متناوب و بی‌دوام قابل استفاده است . مدنلبروت و ون نس انتگرال تصادفی زیر را برای FBM ارائه کردند [۲۱].

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})}\left(\int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} \mathrm{d}B_s + \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}]\mathrm{d}B_s\right), \quad t \geq 0$$

که B حرکت براونی استاندارد است. بخش اول مدل‌سازی اتفاقات حال است و بخش دوم مربوط به میانگین تلاطم گذشته می‌باشد.



شکل ۱.۴: شبیه‌سازی حرکت براونی کسری

قضیه ۱.۲.۴. حرکت براونی کسری B^H در شرایط زیر برقرار است.

۱. فرایند B^H خودمتشابه است.

۲. مسیرهای B^H تقریبا همه‌جا مشتق‌پذیرند

برهان. برای اثبات به [۲۱] رجوع شود □

۳.۴ فرایند ریشه مربعی کسری

فرض کنید فرایند $\hat{Y}(t)$ ریشه مربعی باشد که $\kappa > 0$ ، $\sigma > 0$ و $B(t)$ حرکت براونی استاندارد می‌باشد. همچنین محدودیت $\kappa\theta \geq \frac{\sigma^2}{2}$ نیز اعمال می‌شود. تحت این محدودیت، لمبرتون و لاپیر [۱۹] نشان دادند که $\hat{Y}(t)$ در هر بازه‌ی زمانی متناهی تقریبا همه‌جا مثبت است.

با استفاده از $\hat{Y}(t)$ ، $Y(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Y(t) = \hat{Y}(t) - \theta.$$

فرایند $Y(t)$ به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$\mathrm{d}Y(t) = -\kappa Y(t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{\theta + Y(t)}\mathrm{d}B(t). \quad (۵.۴)$$

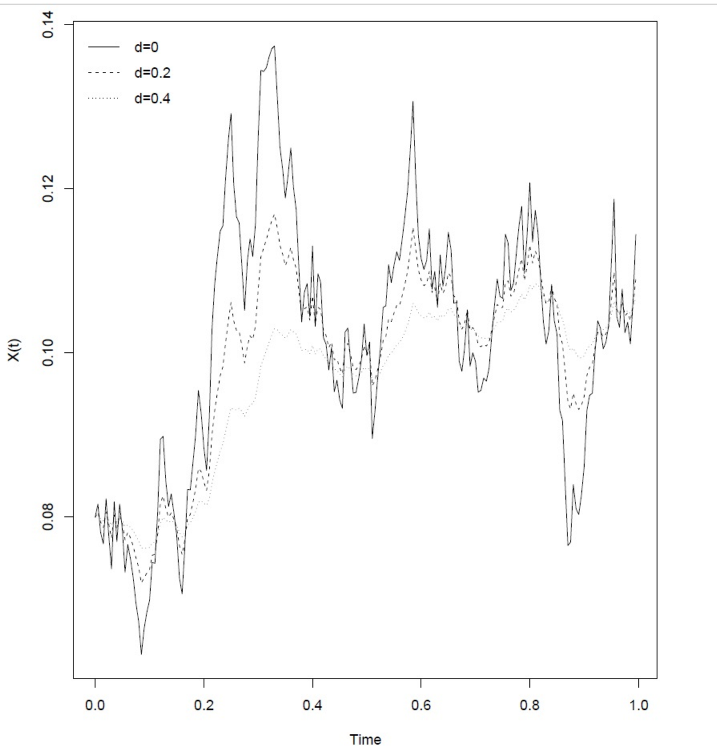
در این صورت فرایند $X(t)$ یک فرایند ریشه مربعی کسری نامیده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$X(t) = \theta + Y^{(d)}(t), \quad (۶.۴)$$

که $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ و $Y^{(d)}(t)$ انتگرال d ـ کسری $Y(t)$ با دستور ریمان‌ـلیوویل است یعنی

$$Y^{(d)}(t) = (I^d_{0+}Y)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{d-1}}{\Gamma(d)} Y(s)\mathrm{d}s. \quad (۷.۴)$$

توجه شود که اگر $d = 0$ مشخص است که $X(T) = Y^{(d)}(t)$ فرایند ریشه مربعی می‌باشد.



شکل ۲.۴: شبیه‌سازی فرایند ریشه مربعی کسری با ۲ $= \kappa$، ۰/۲ $= \sigma$ و ۰/۰۸ $= \theta$

فرض کنید

$$\widetilde{X}(t) = \theta + \widetilde{Y}^{(d)}(t),$$

که $-\frac{۱}{۲} < d < \frac{۱}{۲}$ و $\widetilde{Y}^{(d)}(t)$ انتگرال d_ کسری $Y(t)$ با دستور ریمان_لیوویل باشد یعنی

$$\widetilde{Y}^{(d)}(t) = (I^d_{\circ+}Y)(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{(t-s)^{d-۱}}{\Gamma(d)} Y(s)\mathrm{d}s. \qquad (۸.۴)$$

کومته، کوتین و رنالت قضیه زیر را برای این فرایند اثبات کرده‌اند [۹].

قضیه ۱.۳.۴. برای $\circ < d < \frac{۱}{۲}$ می‌توان نشان داد

$$\mathrm{Var}(\widetilde{X})(t) = \frac{\theta\sigma^۲}{\kappa^{۲d+۱}} \frac{\Gamma(۱-۲d)\Gamma(۲d)}{\Gamma(۱-d)\Gamma(d)}.$$

۴.۴ مدل بلک_شولز کسری

مدل بلک شولز در نحوه قیمت‌گذاری در پوشش ریسک اختیار معامله نقش اساسی و محوری در مهندسی مالی داشته است. اساس مدل بلک شولز بررسی این است که نوسانات قیمت سهام در طول زمان‌های آتی چگونه حرکت خواهد کرد. فرض اساسی در این مدل این است که قیمت سهام از گشت تصادفی پیروی می‌کند و تغییرات قیمت سهام در یک دوره زمانی کوتاه

مدت دارای توزیع لاگ نرمال می‌باشد. تحت مدل قیمت‌گذاری اختیار بلک شولز، ارزش اختیار تابع حرکت براونی است. حرکت براونی فاقد حافظه است و گذشته خود را فراموش می کند. به همین دلیل مدل بلک_ شولز با رفتار بازارهای مالی ایده آل مطابقت دارد. اما شواهد تجربی و بررسی‌های آماری حاکی از عدم پیروی بازار از توزیع نرمال است. اما با تغییر جرکت براونی در مدل بلک_شولز به حرکت براونی کسری با ضریب H، می‌توان سبب ایجاد حافظه بلندمدت در مدل شد که با واقعیت بازار سازگارتر است. مدل بلک_شولز کسری به صورت زیر است.

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t^H, \tag{۹.۴}$$

که B_t^H فرایند براونی کسری است.

۱.۴.۴ قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل بلک_شولز کسری

رابطه‌ی زیر قیمت‌گذاری اختیار توان تحت مدل بلک_شولز کسری را نشان می‌دهد.

$$C_m(t,K) = S_t^m e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^۲)\tau} N(g_۱(S_t,\tau)) - Ke^{-r\tau}N(g_۲(S_t,\tau)), \tag{۱۰.۴}$$

که $\tau = T - t$ و

$$g_۱(x,\tau) = \frac{\ln(x/K^{\frac{۱}{m}}) + (r + (m - \frac{۱}{۲})\hat{\sigma}^۲)\tau}{\hat{\sigma}\sqrt{\tau}},$$
$$g_۲(x,\tau) = g_۱(x,\tau) - m\hat{\sigma}\sqrt{\tau},$$

همچنین

$$\hat{\sigma} = \sigma^۲(\Delta t)^{۲H-۱}.$$

۵.۴ مدل هستون کسری

معادلات دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر بگیرید

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sqrt{V_t} S_t \mathrm{d}B_t^{۱,H}, \qquad t \in [\circ, \infty), \tag{۱۱.۴}$$
$$\mathrm{d}V_t = \kappa(\theta - V_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{V_t}\mathrm{d}B_t^{۲,H}, \qquad t \in [\circ, \infty), \tag{۱۲.۴}$$

که $(B^{۱,H}, B^{۲,H})$ دو فرآیند FBM دو بعدی با پارامتر هرست $H \in (\frac{۱}{۲}, ۱)$ و مقادیر κ ، θ ، σ مثبت هستند.همچنین مقادیر $S_\circ > \circ$ و $V_\circ > \circ$ مفروض باشند. با این مفروضات، همچون مدل هستون کلاسیک، مقدار $\rho \geq \circ$ چنان موجود است که

$$\operatorname{cov}(B_{t+dt}^{۱,H} - B_t^{۱,H}, B_{t+dt}^{۲,H} - B_t^{۲,H}) := \mathbb{E}(B_{t+dt}^{۱,H} - B_t^{۱,H})(B_{t+dt}^{۲,H} - B_t^{۲,H}) = \rho(\mathrm{d}t)^{۲H}. \quad t, \mathrm{d}t \geq \circ \tag{۱۳.۴}$$

این مطلب نشان می‌دهد مقدار
مقدار همبستگی بین نموهای $B^{1,H}$ و $B^{2,H}$ در هر گام زمانی است

قضیه ۱.۵.۴. معادلات دیفرانسیل ۱۱.۴ و ۱۲.۴ دارای جواب یکتا هستند.

برهان. به [۲۲] مراجعه شود □

۱.۵.۴ تابع مشخصه

تابع مشخصه‌ی $f(\phi)$ این مدل با فرض $X(t+\tau)$ تحت اندازه‌احتمال Q به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} f(\phi) = \exp[i\phi\tau r &- \frac{1}{2}i\phi\rho^2\sigma^2\theta\tau - \frac{1}{2}\phi(i+\phi)\theta\tau \\ &- \frac{1}{2}\phi(i+\phi)\frac{1}{\Gamma(d+1)}\int_0^t ((t+\tau-s)^d - (t-s)^d)\sigma_c^2(s)\mathrm{d}s \\ &- A(\tau) - (i\phi\rho + B(\tau))\sigma_c^2(t) + i\phi X(t)], \end{aligned} \tag{۱۴.۴}$$

که در آن توابع $A(\tau)$ و $B(\tau)$ با حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی زیر با شرایط مرزی $A(0)=0$ و $B(0)=-i\phi\rho$ به دست می‌آیند

$$\dot{A}(\tau) = -\tfrac{1}{2}\sigma^2\theta B(\tau), \tag{۱۵.۴}$$

$$\dot{B} = -\kappa B(\tau) - \tfrac{1}{2}\sigma^2 B^2(\tau) + \tfrac{1}{2}i\phi\rho^2\sigma^2 + \tfrac{1}{2}\phi(i+\phi)\tfrac{1}{\Gamma(d+1)}\tau^2 - i\phi\rho\kappa, \tag{۱۶.۴}$$

که

$$\sigma_c(t) = V(t) - \theta. \tag{۱۷.۴}$$

فصل ۵

مقایسه عددی روی شاخص کل بازار بورس تهران

در بعضی کشورها، می‌توان قراردادهای اختیار معامله را روی شاخص کل بازار بورس اجرا کرد. درواقع شاخص کل بازار، نقش دارایی پایه و مقدار شاخص، به عنوان قیمت دارایی پایه مدنظر گرفته می‌شود. دارنده‌ی این اختیار، به طور غیر مستقیم، اختیاری از تمام بازار را در سبد خود دارد.

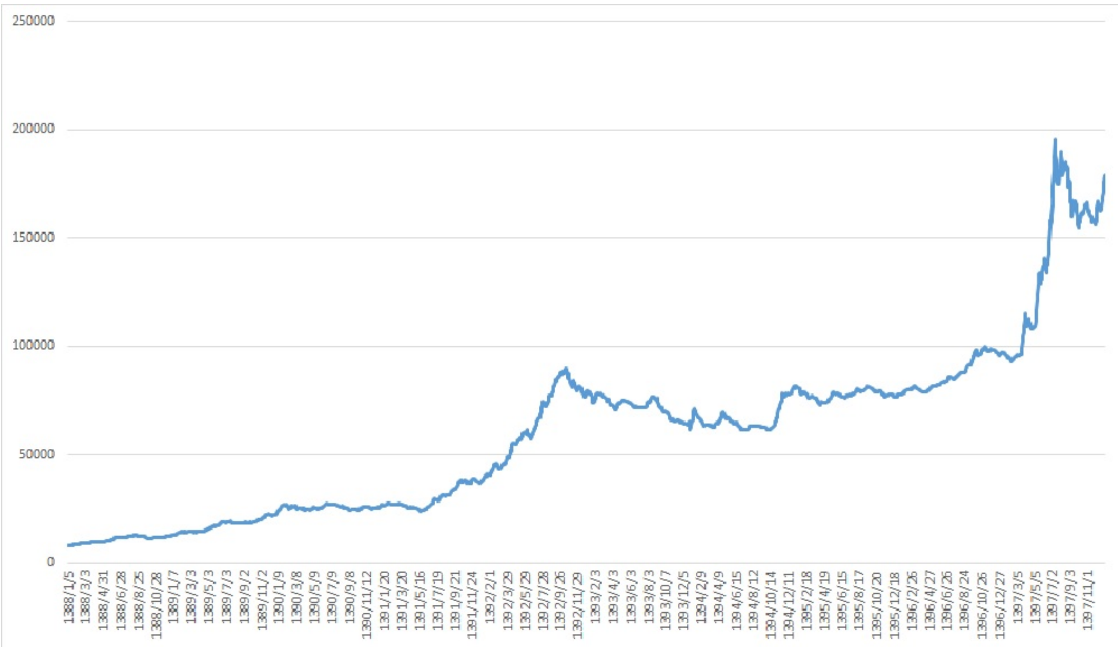
در این رساله، فرض بر این است که سرمایه‌گذاری در انتهای سال ۱۳۹۷ (که مقدار شاخص کل در این زمان برابر ۱۷۸۶۵۹/۱ است)قرار دارد و قصد دارد اختیار معامله‌ی توان نوع اول را که دارایی پایه‌ی آن شاخص کل بازار بورس اوراق بهادار تهران و سررسید سه ماهه (مقدار واقعی شاخص کل در انتهای این دوره برابر۲۳۷۱۴۸/۲است) قیمت‌گذاری کند. همچنین اطلاعات ۱۰ سال شاخص کل بورس را (از ابتدای سال ۱۳۸۸ تا انتهای سال ۱۳۹۷) در اختیار دارد.

با توجه موقعیت گفته‌شده، قیمت‌گذاری اختیار توان با توان دو (m=۲) تحت چند مدل صورت می‌گیرد و با مقایسه با شرایط واقعی بازار، مناسب ترین مدل که مانع ایجاد فضای آربیتراژی می‌شود، مشخص می‌گردد.

در صورتی که قیمت واقعی در سررسید از قیمت توافقی بیشتر باشد، برای محاسبه سود اختیار خرید، مقدار قیمت توافقی و قیمت اتی اختیار، از قیمت واقعی در سررسید کم می‌شوند. در غیر این صورت قیمت اختیار، زیان دارنده اختیار محسوب می‌شود. در اختیار فروش نیز اگر

قیمت واقعی در سررسید از قیمت توافقی بیشتر باشد، سود برابر است با مقدار قیمت توافقی منهای قیمت اتی اختیار و قیمت واقعی در سررسید. در غیر این صورت قیمت اختیار، زیان دارنده اختیار محسوب می‌شود.(۳.۲)

در شکل ۱.۵ روند تغییرات مقدار کل شاخص بورس اوراق بهادار تهران را در بازه‌ی مورد نظر مشاهده می‌کنید.



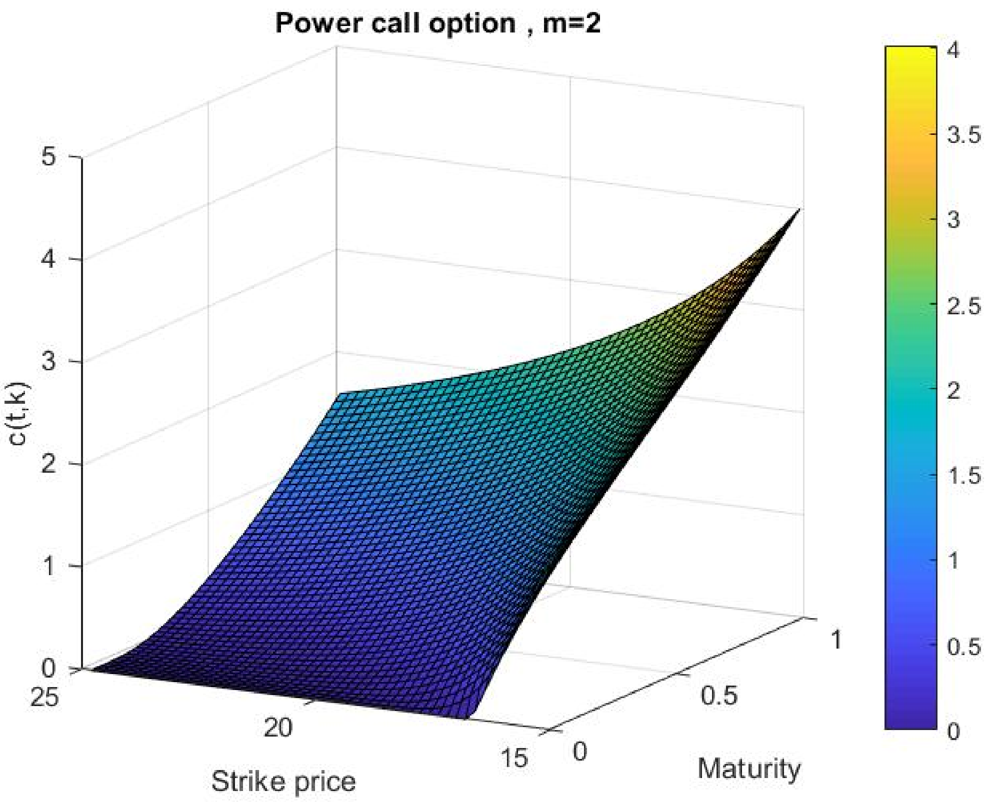
شکل ۱.۵: شاخص کل بازار بورس اوراق بهادار تهران از ۱۳۸۸/۱/۱ تا ۱۳۹۷/۱۲/۲۹

برای محاسبه‌ی بهره بدون ریسک(بازده مورد انتظار) از رابطه‌ی زیر استفاده شده‌است .

$$\text{نرخ بهره بدون ریسک} = \ln\left(\frac{\text{ارزش حال دارایی}}{\text{ارزش روز گذشته دارایی}}\right)$$

بازده مورد انتظار (r) در دوره مورد بررسی ۳۰٪ برآورد شده است. همچنین برای سادگی محاسبات، مقادیر شاخص بر ۱۰۰۰۰ تقسیم شده‌اند. بنابراین قیمت اولیه دارایی پایه برابر $S =$ ۱۷/۸۶۵۹۱ است. همچنین قیمت توافقی برای این نوع اختیار $K =$ ۱۸/۷۷۶۱ قرار گرفته است. از طرفی قیمت واقعی در انتهای ماه تیر ۱۳۹۸ برابر $S_T =$ ۲۳/۷۱۴۸۲ می‌باشد.

در شکل ۲.۵ قیمت‌گذاری اختیار مورد نظر تحت مدل بلک شولز با استفاده از رابطه‌ی (۸.۲) مشاهده می‌شود. در این شکل $T \in [0,1]$ و $K \in [20,25]$ متغیر هستند

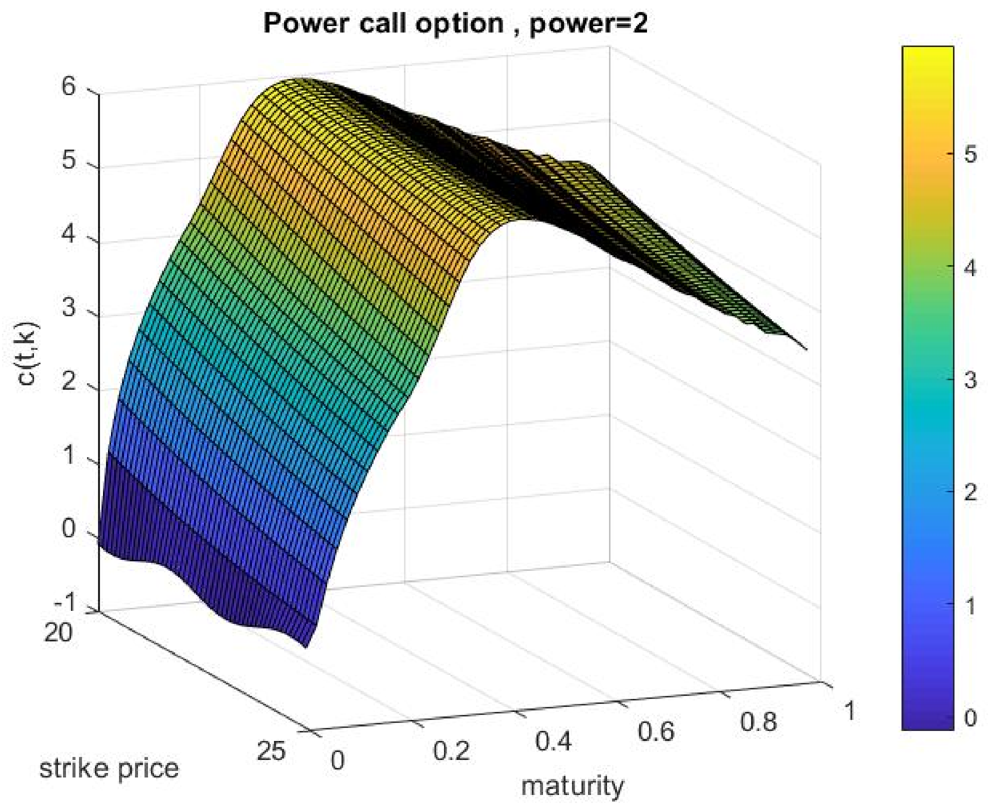


شکل ۲.۵: تغییرات قیمت اختیار معامله توان تحت مدل بلک_شولز روی شاخص کل بازار

برای قیمت‌گذاری اختیار تحت مدل هستون و انواع آن، نیاز به تخمین پارامترهای مدل است. کل دوره زمانی مورد نظر به بازه‌های سه ماهه تقسیم شدند. با استفاده از پیوست آ نتایج تخمین پارامترهای مدل هستون به صورت زیر می‌باشد.

$$\kappa = ۱۸/۱۱۸۷,\ \sigma = ۶/۸۱۴۱,\ \theta = ۱/۷۹۴۴,\ \rho = ۰/۷۱۶۱۱.$$

در شکل ۳.۵ تغییرات قیمت اختیار معامله توان با شرایط گفته‌شده تحت مدل هستون با تغییر قیمت توافقی و تاریخ سررسید، مشاهده می‌شود. همانطور که در شکل دیده می‌شود که مدل هستون در قیمت‌گذاری اختیارهایی با سررسید بیشتر از شش ماه دچار افت و نوسان شده است.



شکل ۳.۵: تغییرات قیمت اختیار معامله توان تحت مدل هستون روی شاخص کل بازار

مدل هستون مضاعف نیز نیاز به تخمین پارامترها دارد. پارامترهای مدل هستون مضاعف نیز به صورت زیر برآورد شده‌اند.

$$\kappa_۱ = ۶/۷۹۶۹,\ \sigma_۱ = ۳/۴۰۹۴,\ \theta_۱ = ۱/۲۹۰۹,\ \rho_۱ = ۰/۱۸۲۴$$
$$\kappa_۲ = ۱۴/۱۷۲۵,\ \sigma_۲ = ۵/۳۶۹۹,\ \theta_۲ = ۲/۳۱۱۷,\ \rho_۲ = -۰/۰۰۴۳.$$

در شکل ۴.۵ نیز تغییرات قیمت اختیار معامله توان با شرایط مورد نظر تحت مدل هستون مضاعف مشخص شده است. مشاهده می‌شود که این مدل نسبت به مدل هستون نوسانات کمتری در قیمت‌گذاری دارد.

شکل ۴.۵: تغییرات قیمت اختیار معامله توان تحت مدل هستون مضاعف روی شاخص کل بازار

با استفاده از رابطه (۳.۴) اندازه توان هرست در بازه زمانی مورد نظر برابر $H = ۰/۴۴$ برآورد شد که نشان از ناپایداری و عدم وجود حافظه بلندمدت دارد. در شکل ۵.۵ قیمت‌گذاری اختیار توان با شرایط گفته شده تحت مدل بلک-شولز کسری، با استفاده از رابطه (۱۰.۴) نمایش داده شده است.

شکل ۵.۵: تغییرات قیمت اختیار معامله توان تحت مدل بلک–شولز کسری روی شاخص کل بازار

در جدول ۱.۵ نتایج قیمت‌گذاری اختیار خرید توان با شرایط گفته شده، مشخص شده‌است. چون قیمت توافقی (۱۸/۷۷۶۱) از قیمت واقعی (۲۳/۷۱۴۸۲) کمتر فرض شده سود و زیان اختیار خرید از کسر کردن مقدار قیمت توافقی و ارزش آتی اختیار از قیمت واقعی حاصل می‌شود. همانگونه که مشاهده می‌شود، اگر قیمت‌گذاری بر اساس مدل بلک–شولز صورت گیرد، عایدی دارنده اختیار، نسبت به قیمت اختیار بالاست و درواقع سود اربیتراژی وجود دارد. همانطور که گفته شد مقدار توان هرست کمتر از ۵٪ براورد شده است و مدل بلک–شولز کسری نیز برای دارنده اختیار عایدی نسبتا بالا دربردارد. مدل‌های هستون مضاعف و میخایلوف و نوگل سود منطقی و متناسبی به دارنده‌ی اختیار می‌دهند. اما در این میان، سود حاصل از مدل هستون، منفی شده‌است. درواقع مدل هستون، با حذف سود آربیتراژی، به بازار ایران نزدیک‌تر است.

جدول ۱.۵: نتایج قیمت‌گذاری اختیار خرید توان

مدل	قیمت اختیار خرید	ارزش آتی اختیار	سود یا زیان اختیار
بلک_شولز	۱/۸۹۵۳	۱/۹۵۳۰	۲/۹۸۵۶
هستون	۴/۸۱۹	۴/۹۶۵۷	−۰/۰۲۷۰۴
میخایلوف و نوگل	۴/۳۳۴۹	۴/۴۶۶۹	۰/۴۷۱۸
هستون مضاعف	۳/۶۲۶۴	۳/۷۳۶۸	۱/۲۰۱۸
بلک_شولز کسری	۲/۰۰۴۲	۲/۰۶۵۲	۲/۸۷۳۴

در جدول ۲.۵ نتایج قیمت‌گذاری اختیار فروش در حالت گفته شده تحت چند مدل، مشاهده می‌شود. در شرایط مورد نظر چون ارزش دارایی در زمان سررسید از قیمت توافقی بیشتر است اختیار اعمال نمی‌شود و تمام ارزش آتی اختیار زیان دارنده اختیار و سود فروشنده اختیار است. دارنده اختیار می‌تواند دارایی را با قیمت بالاتری بفروشد و سود بیشتری کسب کند. درواقع بالابودن قیمت اختیار از سود دارنده اختیار کم می‌کند و مانع ایجاد فرصت آربیتراژ می‌شود. با توجه به جدول مشخص است که زیان ناشی از قیمت‌گذاری اختیار تحت مدل هستون و میخایلوف و نوگل بیشتر است و این زیان از سود دارنده اختیار می‌کاهد. از طرفی عایدی فروشنده‌ی اختیار فروش در این دو مدل بیشتر است. به بیانی دیگر با ایجاد تعادل بین عایدی دارنده و فروشنده اختیار از ایجاد فرصت سودجویی جلوگیری شده است.

جدول ۲.۵: نتایج قیمت‌گذاری اختیار فروش توان

مدل	قیمت اختیار فروش	ارزش آتی اختیار	سود یا زیان اختیار
بلک_شولز	۰/۱۵	۰/۱۵۴۵	−۰/۱۵۴۵
هستون	۲/۰۵	۲/۱۱۲۴	−۲/۱۱۲۴
میخایلوف و نوگل	۲/۳۴۳۱	۲/۴۱۴۴	−۲/۴۱۴۴
هستون مضاعف	۱/۲۶۷۲	۱/۳۰۵۷۹	−۱/۳۰۵۷۹
بلک_شولز کسری	۰/۱۸۰۳	۰/۱۸۵۷	−۰/۱۸۵۷

مراجع

[۱] زرگری، ب. و زمانی، ش. و ظهوری زنگنه، ب. و کنت، ر. (۲۰۱۰)، ''استخراج فرمول قیمت گذاری اختیار معامله در مدل هستون'' ،**فرهنگ و اندیشه ریاضی** ، شماره ۴۴، ۱۱ـ۲۸ .

[۲] ظهوری زنگنه ب. و جهانی پور ر. ا.(۲۰۰۴)، ''حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل ساز پدیده های طبیعی''، **فرهنگ و اندیشه ریاضی**، ۱ـ۲۰.

[۳] مهردوست، ف. و صابر. ن، (۱۳۹۲)، '' قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش'' ، **مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی** ، دوره ۳، شماره ۲، ۴۵ـ۶۰ .

[۴] نیسی، ع. و ملکی، ب. و رضائیان، ر.(۱۳۹۵) ،''تخمین پارامترهای مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان''، **مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار** ، شماره بیست و هشتم، ۹۱ـ۱۱۵ .

[5] Albrecher, H., Mayer, P., Schoutens, W., and Tistaert, J. (2007), "The Little Heston Trap." **Wilmott Magazine**, January 2007, 83–92.

[6] Bates, David S. (1996), "Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutche mark options", **Review of financial studies**, 9(1): 69-107.

[7] Carr, P. and Madan D.(1999), "option valuation using the fast Fourier transform, **Journal of Computational Finance**, 2(4), : 61-73

[8] Christoffersen, P., Heston, S. and Jacobs, K. (2009), "The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well", **Management Science**, 55, 1914-1932.

[9] Comte, F., L. Coutin, and E. Renault (2003), "Affine Fractional Stochastic Volatility Models", Working Paper.

[10] Duffie, D., Pan, J., Singleton, K. (2000), "Transform analysis and asset pricing for affine jumps diffusions" **Econometrical**, 68(6), 1343- 1376.

[11] Gil-Pelaez J. (1951),"Note on the inversion theorem", **Biometrika**, 38(3-4), 481-482.

[12] González Sáez, G.K. (2014), Master thesis in quantitative finance and banking, "FOURIER TRANSFORM METHODS FOR OPTION PRICING: AN APPLICATION TO EXTENDED HESTON-TYPE MODELS", Universidad del Páis Vasco, Spain.

[13] Greene,M., Fielitz,B.(1997), "Long term dependence in Common Stock returns", **Journal of Financial Economics**.

[14] Guasoni,P.,(2006) "No arbitrage under transaction costs with fractional Brownian motion and byond"«, **Math Finance**, 16, No.3.569-582.

[15] Hoggard,T.,et al (1994), "Hedeging option portfolio in the presence of transaction costs" **Adv. Futures Opt. Res** 7,21-35.

[16] Hull, J.C. (2002), **Fundamentals of futures and options Markets**, Edit, University of Toronto.

[17] Iqmal Ibrahim Siti nur,G.O'Hara John, Mohd Zaki Muhammad syazwan(2016), "Pricing Formula for Power Options with Jump-Diffusion", **Applied Mathematics & Information Sciences**,10,No 4, 1313-1317

[18] Kolmogorov A.N. (1940), "Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum", **Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS** (26), 115-118.

[19] Lamberton, D. and B. Lapeyre (1996), "Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance", Chapman & Hall.

[20] Mandelbrot.B.B,(2004), **The (Mis) Behavior of markets**,p.187.

[21] Mandelbrot B. B. and Van Ness J(1968), "Fractional Brownian motion, fractional noises and applications", **SIAM Review**, 10 (4), 422-437.

[22] F. Mehrdoust, Emmanuel Lépinette (2017),"A fractional version of the Heston model with Hurst parameter $H \in (\frac{1}{2}, 1)$", **Journal of Dynamic Systems and Application(ISI)**.

[23] Mikhailov, S. and Nogel, U. (2004), "**Heston's stochastic volatility model: Implementation, calibration and some extensions**", Wilmott magazine.

[24] Øksendal, B. (2003), "**Stochastic differential equations**", In Stochastic differential equations (pp. 65-84). Springer Berlin Heidelberg.

[25] P. Ren (2014) , In Partial Fullfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy, ”Parametric estimation of the Heston model under the indirect observability framework”, University of Houston.

[26] Chalasani, P., and Jha, S. (1997), ”Steven Shreve: Stochastic Calculus and Finance” Lecture notes, October.

[27] Sturm, A., and Björk, T. (2001), ”**Arbitrage Theory in Continuous Time**”.

[28] Tong Z., (2012), MSc thesis, ”Option Pricing with Long Memory Stochastic Volatility Models”, University of Ottawa

[29] Wilde, I. F. (2009), ”Stochastic Analysis-Notes”, Lecture Notes, King’s College, London.

[30] Wu, Y-Y. (2011), PhD thesis, ”The Pricing of Power Options under the Generalized Black-Scholes Model”.

پیوست آ

تخمین پارامترهای مدل هستون

ملاحظه آ.۱.۰. شروط پارامترهای هستون به صورت زیر هستند

۱. مقدار اولیه V_t که با $V_۰$ نمایش داده می‌شود، همیشه مثبت است.

۲. نرخ بازگشت به میانگین κ ، میانگین بلند مدت σ و نوسانات واریانس θ همگی مقادیر مثبت هستند.

۳. $۲\kappa\theta = \sigma^۲$ که به عنوان شرط فلر (feller) شناخته می‌شود. [۲۵]

قضیه آ.۱.۰. براورد MLE برای پارامتر های κ، θ و σ به صورت زیر است.

$$\hat{\kappa} = \frac{۲}{\delta}\left(۱ + \frac{\widehat{P}\delta}{۲}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{V_{k-۱}} - \frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{\frac{V_k}{V_{k-۱}}}\right), \tag{آ.۱}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{۴}{\delta}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\left[\sqrt{V_k} - \sqrt{V_{k-۱}} - \frac{\delta}{۲\sqrt{V_{k-۱}}}(\widehat{P} - \hat{\kappa}V_{k-۱})\right]^۲}, \tag{آ.۲}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\widehat{P} + \frac{۱}{۴}\hat{\sigma}^۲}{\hat{\kappa}}, \tag{آ.۳}$$

که $n = \frac{T}{\delta}$ و δ مقداری مثبت، دلخواه و کوچک می‌باشد. همچنین

$$\widehat{P} = \frac{\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{V_{k-۱}V_k} - \frac{۱}{n^۲}\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{\frac{V_k}{V_{k-۱}}}\sum_{k=۱}^{n}V_{k-۱}}{\frac{\delta}{۲} - \frac{\delta}{۲}\frac{۱}{n^۲}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{V_{k-۱}}\sum_{k=۱}^{n}V_{k-۱}} \tag{آ.۴}$$

و ضریب همبستگی ρ با استفاده از رابطه‌ی زیر براورد می‌شود.

$$\hat{\rho} = \frac{۱}{n\delta} \sum_{u=۲}^{n} \Delta W_{۱_u} \Delta W_{۲_u} \qquad (\text{آ.۵})$$

که

$$\Delta W_{۱_u} = \frac{\ln S_u - \ln S_{u-۱} - (r - \frac{۱}{۲} V_{u-۱})\delta}{\sqrt{V_{u-۱}}} \qquad (\text{آ.۶})$$

$$\Delta W_{۲_u} = \frac{V_u - V_{u-۱} - \kappa(\theta - V_{u-۱})\delta}{\sigma \sqrt{V_{u-۱}}} \qquad (\text{آ.۷})$$

و $\Delta W_{i_u} = W_{i_u} - W_{i_{u-۱}}$، $i = ۱, ۲$

Abstract In this thesis some stochastic volatility models have been investigated. Then Power option pricing under these models has been driven on Tehran stock exchange index as underlying asset. In the sequel, with comparison between considered models, the arbitrary opportunity existence has been investigated. So in this study, Tehran stock exchange information for ten years has been restored and divided to periods of three months.

Keywords: Stochastic volatility models, Long memory models, Power option

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Financial Mathematics

Comparing of Power Option Pricing under Some Stochastic Volatility Models in Tehran Stock Exchange

By: Hossein Sahebi Fard

Supervisors

Dr. Elham Dastranj
Dr. Abdolmajid Abdolbaghi

Advisor

Seyed Reza Hejazi

July 2019