بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش بهینه سازی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

مسائل بهینه‌سازی فازی غیرخطی و روش‌هایی برای حل آن‌ها

نگارنده: مژگان زاده عمله

استاد راهنما

دکتر مهرداد غزنوی

استاد مشاور

دکتر سمیه مغاری

شهریور ۱۳۹۸

سپاسگزاری

پروردگار را سپاسگزارم که بار دیگر به من فرصت آموختن داد. از پدر و مادر عزیز و مهربانم به خاطر زحماتی که در طول زندگی همواره برای پیروزی و شادکامی من به جان خریدند، تشکر می‌کنم.

از استاد محترم جناب دکتر مهرداد غزنوی که زحمت زیادی برای تحقق این پایان نامه داشتند، متشکرم.

مژگان زاده عمله
شهریور ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **مژگان زاده عمله** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مسائل بهینه‌سازی فازی غیرخطی و روش‌هایی برای حل آن‌ها** ، تحت راهنمایی **مهرداد غزنوی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ’’ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مژگان زاده عمله

شهریور ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

با استفاده ازروش H ـ مشتق پذیری یک تابع فازی مقدار و رابطه ترتیب کلی پارامتری روی مجموعه اعداد فازی شرایط مطلوب لازم و کافی را برای مسائل بهینه سازی فازی نامقید یک وجند متغیره را نشان دادیم .در ادامه مسائل بهینه سازی فازی بدون محدودیت و مقید را با استفاده از رابطه ترتیب جزئی حداکثر فازی در مجموعه ای از اعداد فازی حل می‌کنیم .تحت مفاهیم تحدب و شبه تحدب بودن از توابع فازی مقدار،شرایط کافی بهینگی را برای مسائل بهینه سازی فازی مقید به دست می‌آوریم .در نهایت روش نیوتن را برای حل مسائل بهینه سازی یک متغیره و چند متغیره بدون محدودیت پیشنهاد می‌کنیم .

کلمات کلیدی: رابطه ترتیب کلی،بهینه سازی فازی،جواب نامغلوب، شرایط لازم و کافی بهینگی،

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

مفاهیم و اصطلاحات پایه

۱.۱ مفاهیم پایه

دراین بخش برخی از مفاهیم پایه راجع به مجموعه‌های فازی را ارائه می‌کنیم، از این مفاهیم در فصل‌های بعدی استفاده می‌شود.

۲.۱ مجموعه‌های فازی و عملیات آن‌ها

مجموعه‌ها یکی از بنیادی‌ترین مفاهیم در ریاضیات هستند. یک مجموعه شامل گردایه‌ای از اعضای خوش تعریف است. به عنوان مثال، مجموعه‌ای را در نظربگیرید که حاوی گروهی از مردم جوان است، در این صورت معلوم نیست فردی که بیش از ۵۰ سال سن دارد عضو این مجموعه می‌شود یا خیر؟ در اینصورت این مثال حکم یک مجموعه را ندارد. در یک مجموعه قطعی مرز مشخصی بین اعضای مجموعه و آن هایی که جزء مجموعه نیستند وجوددارد. اما در بسیاری از موارد درباره‌ی اینکه این عنصرمتعلق به مجموعه است یا نه ابهام وجود دارد. این موضوع منجر به معرفی مجموعه‌های فازی شد. زاده [۱۱۶] مفهوم یک مجموعه فازی را بیان نمود. بدین ترتیب مفهوم مجموعه های فازی مشخص میکرد که عناصرجهان برحسب یک ویژگی و مشخصه‌ای هستند که قطعی نیست و بنابراین اعضای آن را نمی‌توان به دو گروه قطعی طبقه‌بندی کردکه یک گروه آن شامل اعضایی باشد که دارای ویژگی خاصی باشدو دیگری

دارای اعضایی باشد که آن مشخصه را ندارند. در مقابل میزان تمایز بر اساس درجه‌ای است که یک عنصر خاص مجموعه مرجع دارا می‌باشد. بنابراین یک مجموعه فازی با یک تابع عضویت شناخته می‌شود که نگاشتی از مجموعه‌ی مرجع به یک بازه‌ِی واحد است.ازدیدگاه ریاضی می‌توان آن را بدین صورت تعریف کرد:

تعریف ۱.۲.۱. $\tilde{A}$ یک زیر مجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی مرجع X است،که تابع عضویت آن به صورت $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$ تعریف می‌شود. به ازای هر $x \in X$ تابع $\mu(x)$ نشان دهنده‌ی درجه‌ای است که x عضوی از مجموعه فازی باشد که در آن یک نشان دهنده‌ی عضویت کامل و صفر نشان دهنده عدم عضویت کامل است.

ملاحظه ۱.۲.۱. تابع عضویت یک مجموعه را میتوان با $\tilde{A}(x)$ به جای $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نیز نشان داد. در ادامه دو مثال برای مجموعه‌های فازی ارائه می‌دهیم .

مثال ۱.۲.۱. فرض کنید X زیرمجموعه ای از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشدو $\tilde{A}$ مجموعه ای فازی باشد که اعضای آن نزدیک صفر هستند. دراین صورت میتوان تابع عضویت رابه صورت رابطه‌ی زیر نوشت

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} (x+1) & -1 \leq x < 0 \\ (1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین درجه‌های عضویت به شکل روابط $\mu_{\tilde{A}}(0) = 1$، $\mu_{\tilde{A}}(0/1) = 0/9$، $\mu_{\tilde{A}}(-0/2) = 0/8$، $\mu_{\tilde{A}}(1) = 0$ خواهندبود.

در ادامه مثال دیگری از یک مجموعه فازی می‌آوریم.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید X مجموعه ای از سن افراد مشخصی باشد، و $\tilde{A}$ مجموعه ای فازی باشد که بیانگر مفهوم مجموعه افراد جوان است،بنابراین مقادیر درجه عضویت می‌توانند بصورت $\mu_{\tilde{A}}(20) = 1$، $\mu_{\tilde{A}}(30) = 0/8$، $\mu_{\tilde{A}}(45) = 0/5$، $\mu_{\tilde{A}}(60) = 0/1$ باشند.
مجموعه‌های فازی را میتوان براساس مجموعه‌ی مرجعی که روی آن تعریف می‌شوند،بیان کرد. مجموعه‌ی فازی تعریف شده روی یک مجموعه‌ی مرجع پیوسته بوسیله‌ی یک تابع عضویت پیوسته تعریف می‌شود. برای یک مجموعه‌ی گسسته یا متناهی $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ مجموعه فازی $\tilde{A}$ تعریف شده روی X را میتوان به صورت رابطه

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{A}(x_1)}{x_1} + \frac{\tilde{A}(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\tilde{A}(x_n)}{x_n}$$

نمایش داد.

مثال ۳.۲.۱. فرض کنید $X=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ و $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی باشد که نشان دهنده ”اعدادبسیار بزرگتر از یک“ است، دراین صورت می‌توان آن را به صورت رابطه زیر بیان کرد.

$$\frac{۰}{۰}+\frac{۰}{۱}+\frac{۰/۲}{۲}+\frac{۰/۴}{۳}+\frac{۰/۶}{۴}$$

یک نوع مجموعه فازی خاص وجود دارد که به آن مجموعه فازی نرمال می‌گویند و به شکل زیر تعریف می‌شود

تعریف ۲.۲.۱. یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ روی مجموعه مرجع X، نرمال گفته می‌شود اگر وجود داشته باشد $x \in X$ به طوری که $\tilde{A}(x)=۱$.

به عنوان مثال مجموعه های فازی تعریف شده درمثال ۱.۲.۱ و مثال ۲.۲.۱ مجموعه‌های فازی نرمال هستند، در حالی که مجموعه فازی مثال ۳.۲.۱ نرمال نیست.
سه عملیات اصلی مکمل، اشتراک، و اجتماع که روی مجموعه‌های قطعی انجام می‌شوند را میتوان به چندین طریق روی مجموعه‌های فازی تعمیم داد. در اینجا یکی ازروش‌های تعمیم تحت عنوان عملیات استاندارد مجموعه‌ی فازی را تعریف می‌کنیم که اهمیت بسزایی در نظریه مجموعه فازی دارد (مرجع [۴۵] راببینید).

تعریف ۳.۲.۱. مکمل استاندارد فازی $\bar{\tilde{A}}$ ازمجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نسبت به مجموعه مرجع X به وسیله تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{\tilde{A}}(x)=۱-\tilde{A}(x) \qquad \forall x \in X$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید مجموعه‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ داده شده باشند. برای هر $x \in X$ اشتراک استاندارد فازی $\widetilde{A\cap B}$ واجتماع استاندارد $\widetilde{A\cup B}$ به ترتیب با توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند

$$\widetilde{A\cap B}(x)=\min[\tilde{A}(x),\tilde{B}(x)]$$

$$\widetilde{A\cup B}(x)=\max[\tilde{A}(x),\tilde{B}(x)]$$

مثال ۴.۲.۱. مجموعه مرجع $X=\{a,b,c\}$ ومجموعه‌های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ که به صورت $\tilde{B}=\frac{۰/۵}{a}+\frac{۰/۹}{b}+\frac{۰/۳}{c}$ و $\tilde{A}=\frac{۰/۱}{a}+\frac{۰/۶}{b}+\frac{۱}{c}$ بر روی X تعریف می‌شوند را در نظربگیرید. لذا اجتماع،اشتراک ومکمل‌های استاندارد فازی آن‌ها به شکل روابط

$$\widetilde{A\cup B}=\frac{۰/۵}{a}+\frac{۰/۹}{b}+\frac{۱}{c}$$
$$\widetilde{A\cap B}=\frac{۰/۱}{a}+\frac{۰/۶}{b}+\frac{۰/۳}{c}$$
$$\bar{\tilde{A}}=\frac{۰/۹}{a}+\frac{۰/۴}{b}+\frac{۰}{c}$$
$$\bar{\tilde{B}}=\frac{۰/۵}{a}+\frac{۰/۱}{b}+\frac{۰/۷}{c}$$

.

خواهد بود.

۱.۲.۱ مجموعه‌های α ـ سطح و ویژگی‌های آن‌ها

حال یکی از مهمترین مفاهیم مجموعه‌ی فازی را تعریف می‌کنیم که به آن مجموعه های α ـ سطح [1] می‌گویند.

تعریف ۵.۲.۱. برای یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ که روی مجموعه مرجع X تعریف می‌شودو به ازای هر عدد $\alpha \in [0,1]$ ، مجموعه‌ی α ـ سطح مربوط به $\tilde{A}$ بصورت

$$\tilde{A}_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

تعریف می‌شود.

مثال ۵.۲.۱. به ازای مجموعه فازی داده در مثال ۱.۲.۱ ،مجموعه α ـ سطح مربوط به $\tilde{A}$ به ازای $\alpha = 0/1$ برابراست با:

$$\tilde{A}_{0/1} = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0/1\} = [-0/9, 0/9]$$

حال تحدب یک مجموعه‌ی فازی را تعریف می‌کنیم که بر اساس مجموعه‌های α ـ سطح آن است.

تعریف ۶.۲.۱. یک مجموعه‌ی فازی تعریف شده روی مجموعه مرجع $\mathbb{R}$ محدب نامیده می‌شود هرگاه تمام مجموعه‌های α ـ سطح آن برای هر $\alpha \in (0,1]$ محدب باشند.

مثال ۶.۲.۱. یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{B}$ تعریف شده روی $\mathbb{R}$ با تابع عضویت

$$\tilde{B}(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

را درنظر بگیرید. مجموعه‌های α ـ سطح آن برای $\alpha \in (0,1]$ عبارت است از

$$\tilde{B}_\alpha = [0 + \sin^{-1}\alpha, \pi - \sin^{-1}\alpha]$$

واضح است که تمام مجموعه‌های α ـ سطح به ازای $\alpha \in (0,1]$ محدب هستند .بنابراین مجموعه‌ی فازی $\tilde{B}$ هم محدب است .

قضیه ۱.۲.۱. [۱۱۹] یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ بر روی $\mathbb{R}$ محدب است ، اگر و تنها اگر رابطه‌ی

$$\tilde{A}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\tilde{A}(x_1), \tilde{A}(x_2)\}$$

به ازای تمام $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ و $\lambda \in [0,1]$ برقرار باشد.

[1] α-Level

ملاحظه ۲.۲.۱. باتوجه به قضیه بالا می‌توان فهمید که اگر یک مجموعه‌ی فازی محدب باشد لزومی ندارد که تابع عضویت آن نیز محدب باشد. در حقیقت تابع عضویت اکیدا شبه‌ـ محدب است.

قابلیت مجموعه‌های α ـ سطح یک مجموعه فازی این است که می‌توانند یک مجموعه فازی را برحسب مجموعه‌های α ـ سطح آن نمایش دهند. بدین ترتیب هر مجموعه‌ی فازی را میتوان به گونه‌ای منحصربه فرد به وسیله خانواده تمام مجموعه‌های α ـ سطح آن نشان داد. این کار به ما اجازه می‌دهد تا ویژگی‌های مختلف مجموعه‌های قطعی و عملیات روی مجموعه‌های قطعی را به مجموعه‌های فازی توسیع دهیم. جورج ویوآن [۴۵] به این کار تجزیه کردن مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ می‌گویند. دراینجا اولین اصل تجزیه آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۱. [۱۱۹] به ازای هر مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی X رابطه

$$\tilde{A} = \cup_{\alpha \in [0,1]} \alpha . \tilde{A}_\alpha$$

برقراراست، که در آن $\tilde{A}_\alpha$ مجموعه‌ی α ـ سطح مربوط به $\tilde{A}$ است و $\cup$ نشان دهنده‌ی اجتماع استاندارد فازی است.

۲.۲.۱ اصل توسیع زاده

زاده اصل توسیع را برای مجموعه‌های‌فازی معرفی کرد [۱۱۵]. اصل توسیع مجموعه‌های فازی یک ویژگی اساسی است که به دامنه تعریف یک نگاشت یا یک رابطه این امکان را می‌دهد که از نقاط در X به زیر مجموعه‌های فازی در X توسیع یابند. اگر بخواهیم دقیق تر بگوییم، فرض کنید f نگاشتی از X به Y باشد و $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از X باشد.آن‌گاه طبق اصل توسیع $f(\tilde{A})$ یک زیرمجموعه فازی از Y است ورابطه زیر را داریم:

$$f(\tilde{A}) = \sup_{\{x | f(x)=y\}} \tilde{A}(x)$$

فرض کنید $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$ و f تابعی حقیقی به فرم $f : X \times Y \longrightarrow Z$ باشد. فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به ترتیب دو زیر مجموعه‌ی فازی روی X و Y باشند. طبق اصل توسیع می‌توانیم از تابع f استفاده کنیم و یک تابع فازی به فرم

$$F : F(X) \times F(Y) \longrightarrow F(z)$$

تعریف کنیم. بدین ترتیب میتوان گفت که $F(\tilde{A}, \tilde{B})$ یک زیر مجموعه فازی از Z است که تابع عضویت آن به صورت

$$F(\tilde{A}, \tilde{B})(z) = \begin{cases} \sup_{z=f(x,y)} \{min\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)\}\}, & f^{-1}(z) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(z) = \phi \end{cases}$$

می‌باشد،که در آن $f^{-1}(z) = \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) = z \in Z\}$.
به این تابع F یک تابع فازی ایجاد شده به وسیله اصل توسیع می‌گویند .

مثال ۱.۲.۷. فرض کنید $X = Y = \{1, 2, ..., 10\}$ مجموعه های مرجع باشند و فرض کنید ”تقریبا ۲ ” و” تقریبا ۶ ” مجموعه های فازی تعریف شده روی X و Y باشند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\tilde{A} \simeq 2 = \frac{1}{2} + \frac{0/6}{1} + \frac{0/8}{3}$$

$$\tilde{B} \simeq 6 = \frac{1}{6} + \frac{0/8}{5} + \frac{0/7}{7}$$

و تابع حقیقی $f(x,y)$ حاصل ضرب x و y باشد. در اینجا از اصل توسیع استفاده می‌کنیم تا تابع داده شده را بصورت فازی درآوریم:

$$(\tilde{A} \times \tilde{B}) = (\frac{1}{2} + \frac{0/6}{1} + \frac{0/8}{3}) \times (\frac{1}{6} + \frac{0/8}{5} + \frac{0/7}{7}) = \frac{0/6}{5} + \frac{0/6}{6} + \frac{0/6}{7} + \frac{0/8}{10} + \frac{1}{12} + \frac{0/7}{14} + \frac{0/8}{15} + \frac{0/8}{18} + \frac{0/7}{21}$$

۱.۳ اعداد فازی و حسابان آن‌ها

این بخش با یکی از مفاهیم ساده‌ی حسابان کلاسیک شروع می‌شود که به آن شبه پیوسته بالایی یک تابع حقیقی مقدار می‌گویند که درتعریف اعداد فازی استفاده می‌شود.

۱.۳.۱ شبه پیوسته بالایی یک تابع حقیقی مقدار

تعریف شبه تعریف پیوسته بالایی یک تابع حقیقی مقدار به شرح زیر است.

تعریف ۱.۳.۱. یک تابع حقیقی مقدار f در یک نقطه x_0 شبه پیوسته بالایی است اگر مقادیر تابع، برای نقاط نزدیک به x_0 نزدیک به $f(x_0)$ باشند یا اینکه کمتر از $f(x_0)$ باشند. از دیدگاه ریاضی فرض کنید که X یک فضای توپولوژیکی، x_0 یک نقطه در X و $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ یک تابع حقیقی مقدار توسیع یافته باشد. می‌گویند f درنقطه x_0 شبه پیوسته بالایی است اگر برای هر $\epsilon > 0$ یک همسایگی مثل U در x_0 وجود داشته باشد به طوریکه به ازای تمام $x \in U$ داشته باشیم $f(x) \leq f(x_0) + \epsilon$، به طور معادل

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

که $\limsup$ همان حد بالایی (از تابع f درنقطه x_0) است .

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید که تابع f یک تابع پله‌ای واحد تعریف شده به صورت $f(x) = -1$ به ازای $x < 0$ و $f(x) = 1$ به ازای $x \geq 0$ باشد این تابع درنقطه‌ی $x_0 = 0$ شبه پیوسته بالایی است .

ملاحظه ۱.۳.۱. ممکن است که یک تابع بدون اینکه دارای پیوستگی راست یا چپ باشد ، شبه پیوسته بالا یا پایین باشد، به عنوان مثال تابع

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x<۱ \\ ۲ & x=۱ \\ \frac{۱}{۲} & x>۱ \end{cases}$$

را در نظر بگیرید این تابع در $x=۱$ شبه پیوسته بالایی است و در عین حال نه از چپ و نه ازراست پیوسته نیست. حد چپ آن برابر یک و حد راست آن برابر با $\frac{۱}{۲}$ است که هر دوی آن ها با مقدار تابع یعنی ۲ متفاوت هستند.

۲.۳.۱ اعداد فازی و حسابان آن ها

بهینه سازی کلاسیک تحت تاثیر حسابان و ساختار ترتیبی تعریف شده روی اعداد حقیقی است. برای حل مسائل بهینه سازی فازی به حسابان فازی و ساختار ترتیبی روی اعداد فازی احتیاج داریم. در این جا تعدادی از مفاهیم پایه ای در مورد اعداد فازی و توابع فازی مقدار را بیان می کنیم.
در بسیاری از حوزه های علمی مثل تحلیل سیستم ها و تحقیق در عملیات یک مدل را باید با داده هایی تنظیم کرد که تقریبا شناخته شده باشند. نظریه مجموعه‌های فازی که بوسیله‌ی زاده معرفی شده [۱۱۶] این امر را محقق ساخت . داده‌های عددی فازی را می‌توان با استفاده از زیر مجموعه‌های فازی خط حقیقی که تحت عنوان اعداد فازی شناخته می‌شوند نشان داد .دوبویس [۲] و پراد [۳] مفهوم اعداد فازی را در مقاله شان معرفی کردند، [۲۴] و برخی از ویژگی‌های اصلی آن‌ها راتشریح نمودند .گوتشل [۴] و واکمن [۵] در [۴۰] یک تعریف معادل و جدیدی از اعداد فازی را با استفاده از نمایش پارامتری معرفی نمودند. از بین انواع راه‌های موجود برای تعریف اعداد فازی مورد زیر را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۲.۳.۱. [۳۷] فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی و $\tilde{a}:\mathbb{R}\longrightarrow[۰,۱]$ یک زیر مجموعه فازی باشد. دراین صورت $\tilde{a}$ یک عدد فازی است اگر ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

الف. $\tilde{a}$ نرمال باشد.

ب. $\tilde{a}$ محدب فازی باشد.

پ. $\tilde{a}(x)$ روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ شبه پیوسته‌ی بالایی باشد، یعنی به ازای هر $\alpha\in(۰,۱]$

[۲] Dubois
[۳] Prade
[۴] Goetschel
[۵] Voxman

مجموعه α ـ سطح مربوط به $\tilde{a}$ زیر مجموعه بسته‌ای از $\mathbb{R}$ باشد.

ت. مجموعه 0 ـ سطح مربوط به $\tilde{a}$ که به صورت $\tilde{a}_0 = cl\{x \in \mathbb{R} | \tilde{a}(x) > 0\}$ تعریف می‌شود یک مجموعه فشرده را تشکیل دهد، که درآن cl نشان دهنده بستار یک مجموعه است.

مجموعه تمام اعداد فازی روی $\mathbb{R}$ با $F(\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود. هر عدد حقیقی r را میتوان به عنوان یک عدد فازی $\tilde{r}$ در نظر گرفت به طوری که $\tilde{r}(z) = 1$ اگر $z = r$ و $\tilde{r}(z) = 0$ اگر $z \neq r$ طبق تعریف اعداد فازی، میتوان اثبات کرد که به ازای هر $\tilde{a} \in F(\mathbb{R})$ وبه ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، $\tilde{a}_\alpha$ یک زیر مجموعه‌ی محدب فشرده از $\mathbb{R}$ است. و بنابراین یک بازه بسته کران دار در $\mathbb{R}$ است. لذا می‌نویسیم $\tilde{a}_\alpha = [\tilde{a}_\alpha{}^L, \tilde{a}_\alpha{}^U]$. $\tilde{a} \in F(\mathbb{R})$ را می‌توان با استفاده از مجموعه های α ـ سطح آن و با استفاده از نظریه معروف تجزیه سازی بازیابی کرد.(رجوع به قضیه ۲.۲.۱)

مثال ۲.۳.۱. مثال ۶.۲.۱ یک عدد فازی است.

نظریه ارائه شده به وسیله گوتشل و واکمن [۴۰] نشان دهنده‌ی مشخصات یک عدد فازی برحسب مجموعه های α ـ سطح آن است.

گزاره ۱.۳.۱. [۴۰] به ازای $\tilde{a} \in F(\mathbb{R})$ اگر دوتابع $\tilde{a}_\alpha{}^L$ و $\tilde{a}_\alpha{}^U$ را از $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$\tilde{a}_\alpha{}^L = \tilde{a}^L(\alpha)$ و $\tilde{a}_\alpha{}^U = \tilde{a}^U(\alpha)$ آن‌گاه

الف. $\tilde{a}_\alpha{}^L$ یک تابع غیر نزولی پیوسته‌ی چپ روی $(0, 1]$ می‌باشد،

ب. $\tilde{a}_\alpha{}^U$ یک تابع غیرصعودی پیوسته‌ی چپ روی $(0, 1]$ می‌باشد،

ج. $\tilde{a}_\alpha{}^L$ و $\tilde{a}_\alpha{}^U$ در $\alpha = 0$ پیوسته راست هستند،

د. $\tilde{a}_\alpha{}^L \leq \tilde{a}_\alpha{}^U$.

علاوه براین، اگر توابع $\tilde{a}_\alpha{}^L$ و $\tilde{a}_\alpha{}^U$ شرایط الف تا د را داشته باشند آنگاه یک $\tilde{a} \in F(\mathbb{R})$ منحصربه فرد وجود دارد ،به طوریکه $\tilde{a}_\alpha = [\tilde{a}_\alpha{}^L, \tilde{a}_\alpha{}^U]$ برای هر $\alpha \in [0, 1]$.

تعریف ۳.۳.۱. [۵۰] با استفاده از اصل توسیع زاده، ضرب اسکالر وجمع روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر روی $F(\mathbb{R})$ توسیع داده می‌شوند: به ازای $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$ و $\lambda \in \mathbb{R}$،

$$(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) = \sup_{\{x,y \in \mathbb{R} | z = x+y\}} \{\min\{\tilde{a}(x), \tilde{b}(y)\}\}$$

$$(\lambda \odot \tilde{a})(z) = \begin{cases} \tilde{a}(\frac{z}{\lambda}) & \lambda \neq 0 \\ 0 & \lambda = 0 \end{cases}$$

به ازای تمام $z \in \mathbb{R}$، واضح است که به ازای هر $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$ و $\lambda \odot \tilde{a}$ اعداد فازی هستند و با استفاده از محاسبات بازه‌ای می‌توان روابط

$$(\tilde{a} \oplus \tilde{b})_\alpha = \tilde{a}_\alpha + \tilde{b}_\alpha$$

$$(\lambda \odot \tilde{a})_\alpha = \lambda \cdot \tilde{a}_\alpha$$

برای هر $\alpha \in [۰,۱]$ را نشان داد.

مثال ۳.۳.۱. فرض کنید $X_۱ = X_۲ = \{۱,۲,\ldots,۱۰\}$ مجموعه‌های مرجع و" تقریبا ۲ " و" تقریبا ۶" اعداد فازی تعریف شده روی $X_۱$ و $X_۲$ به ترتیب به صورت

$$\tilde{A}_۱ = ۲ = \frac{۱}{۲} + \frac{۰/۶}{۱} + \frac{۰/۸}{۳}$$

$$\tilde{A}_۲ = ۶ = \frac{۱}{۶} + \frac{۰/۸}{۵} + \frac{۰/۷}{۷}$$

باشند. با استفاده ازاصل توسیع زاده، میتوان حاصل جمع $\tilde{A}_۱$ و $\tilde{A}_۲$ وضرب اسکالر $\tilde{A}_۱$، با یک اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ را به شکل زیر به‌دست آورد:

$$(\tilde{A}_۱ \oplus \tilde{A}_۲) = (\frac{۱}{۲}+\frac{۰/۶}{۱}+\frac{۰/۸}{۳} \oplus \frac{۱}{۶}+\frac{۰/۸}{۵}+\frac{۰/۷}{۷}) = \frac{۱}{۸}+\frac{۰/۸}{۷}+\frac{۰/۷}{۹}+\frac{۰/۶}{۷}+\frac{۰/۶}{۶}+\frac{۰/۶}{۸}+\frac{۰/۸}{۹}+\frac{۰/۸}{۸}+\frac{۰/۷}{۱۰}$$

$$= \frac{۰/۶}{۶} + \frac{۰/۸}{۷} + \frac{۰/۸}{۹} + \frac{۰/۷}{۱۰} + \frac{۱}{۸}$$

و

$$(\lambda \odot \tilde{A}_۱) = ۲ \odot (\frac{۱}{۲} + \frac{۰/۶}{۱} + \frac{۰/۸}{۳}) = \frac{۱}{۱} + \frac{۰/۶}{۰/۵} + \frac{۰/۸}{۱/۵}$$

برای $\lambda = ۲$ بدست می‌آید.

برای محاسبه‌ی سریع فرمول‌های عملیات روی اعداد فازی ،دوبوس و پراد [۲۴] اقدام به تعریف اعداد فازی $L-R$ به صورت زیر کردند:

تعریف ۴.۳.۱. [۵۰] فرض کنید $L, R : [۰,\infty) \longrightarrow [۰,۱]$ دو تابع غیر صعودی و غیر ثابت باشد که $L(۰) = R(۰) = ۱$ و به ازای یک $z_۰ > ۰$ داشته باشیم $L(z_۰) = R(z_۰) = ۰$. به عددفازی $\tilde{a}$ یک عدد فازی $L-R$ گفته می‌شود اگراعداد حقیقی $m, n (m \leq n)$، $\alpha, \beta (\alpha, \beta > ۰)$ وجود داشته باشند به‌طوریکه

$$\tilde{a}(z) = \begin{cases} L(\frac{m-z}{\alpha}) & z \leq m \\ ۱ & m \leq z \leq n \\ R(\frac{z-n}{\beta}) & z > n \end{cases}$$

که درآن α، β گستره‌های چپ و راست هستند .اعداد فازی $L-R$ شامل اعداد فازی مثلثی وذوزنقه‌ای هستند .به‌طور خاص به عدد فازی متقارن $L-R$، عدد L فازی گفته می‌شود. مجموعه اعداد فازی L روی $\mathbb{R}$ با $F_L(\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شوند.

تعریف ۵.۳.۱. به ازای هر عدد حقیقی r یک عدد فازی مثلثی $\tilde{r}$ به صورت

$$\tilde{r}(z)=\begin{cases}\frac{z-r^L}{r-r^L} & r^L\leq z\leq r\\ \frac{r^U-z}{r^U-r} & r<z\leq r^U\\ ۰ & \text{درغیراین صورت}\end{cases}$$

تعریف می‌شود که با $\tilde{a}=(r^L,r,r^U)$ نشان داده می‌شود. مجموعه‌ی α ـ سطح مربوط به $\tilde{r}$ برابر با

$$\tilde{r}_\alpha=[(۱-\alpha)r^L+\alpha r,(۱-\alpha)r^U+\alpha r]$$

است.

مثال ۴.۳.۱. عدد فازی $\tilde{r}$ که مفهوم "حدود ۳" را نشان می‌دهد می‌تواند با استفاده ازتابع عضویت مثلثی زیر تعریف شود:

$$\tilde{r}(x)=\begin{cases}\frac{x-۱}{۲} & ۱\leq x\leq ۳\\ \frac{۶-x}{۳} & ۳<x\leq ۶\\ ۰ & \text{در غیراین صورت}\end{cases}$$

و آن را با $\tilde{r}=(۱,۳,۶)$ نشان می‌دهند.

ملاحظه ۲.۳.۱. اگر یک عدد فازی مثلثی با مقادیر گستره راست و چپ یکسان داشته باشیم آن‌گاه می‌توان آن را به صورت یک عدد فازی L در نظر گرفت.

۴.۱ حسابان مشتقات فازی

ریاضی دانان زیادی به بررسی مشتق پذیری توابع دارای مقادیر فازی پرداخته‌اند. به عنوان مثال، پوری [۶] و رالسکو [۷] [۶۷] مفهوم مشتق پذیری هاکا هارا برای توابع فازی مقدار را معرفی کردند. پس از آن محققان زیادی از این موضوع در معادلات مشتق فازی استفاده کردند که از بین آن ها میتوان به دینگ [۸] وکاندل [۹] [۲۲] کالوا [۱۰] [۴۸]،[۳۵] وسیکالا [۱۱] [۸۵] اشاره کرد. اخیرا تحقیقات زیادی راجع به مفهوم جدید H ـ مشتق پذیری انحام شده است .بد [۱۲] و گال

[۶] Puri
[۷] Ralescu
[۸] Ding
[۹] Kandel
[۱۰] Kaleva
[۱۱] Seikklala
[۱۲] Bede

[۱۳] [۴] تعریف جامع تری برای توابع فازی مقدار ارائه دادند که به آن‌ها مشتقات تعمیم یافته ضعیف و قوی می‌گویند . بد و همکارانش روابط مشتق فازی خطی مرتبه اول را با استفاده از مشتق پذیری تعمیم یافته در مقاله شان بررسی کردند [۵] چالکو کانو [۱۴] و همکارانش [۱۲، ۱۳] نیز با استفاده از H ـ مشتق پذیری به بررسی معادلات دیفرانسیل فازی پرداختند. در این پایان نامه ازمشتقات مرتبه‌ی اول هاکاهارا [۶۷] برای توابع فازی مقدار استفاده می‌شود. در ادامه مشتق پذیری هاکاهارای مرتبه دوم برای توابع فازی مقدار تعریف می‌شود. با استفاده از این مفاهیم شرایط لازم وکافی مرتبه اول و دوم را به منظور بهینه سازی مسائل بهینه سازی فازی غیر خطی ایجاد می‌کنیم و نتایج را با مثال‌های مناسب نشان می‌دهیم.
در اینجا در مورد حسابان مشتق فازی بحث می‌کنیم و ابتدا به تعریف یک تابع فازی مقدار می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴.۱. [۱۰۶] فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی و $F(\mathbb{R})$ مجموعه ای از اعداد فازی باشد. آن گاه به تابع $\tilde{f}: V \longrightarrow F(\mathbb{R})$ تابع فازی مقدار روی V گفته می‌شود. متناظر با این تابع $\tilde{f}$ و $\alpha \in [0,1]$ دو تابع حقیقی مقدار ${\tilde{f}_\alpha}^U$ و ${\tilde{f}_\alpha}^L$ را روی V به‌صورت ${\tilde{f}_\alpha}^L(x) = (\tilde{f}(x))_\alpha{}^L$ و ${\tilde{f}_\alpha}^U(x) = (\tilde{f}(x))_\alpha{}^U$ برای هر $x \in V$ تعریف می‌کنیم.

مثال ۱.۴.۱. فرض کنید $\tilde{f}: \mathbb{R} \longrightarrow F(\mathbb{R})$ بصورت $\tilde{f}(x) = \tilde{a} \odot x$ تعریف شود که درآن $\tilde{a} = (1,2,3)$ یک عدد فازی مثلثی است، آنگاه $\tilde{f}$ یک تابع فازی مقدار است. دو تابع حقیقی مقدار متناظر با این تابع، ${\tilde{f}_\alpha}^L(x) = (1+\alpha)x$ و ${\tilde{f}_\alpha}^U(x) = (3-\alpha)x$ به ازای $\alpha \in [0,1]$ و $x \in \mathbb{R}$ هستند.
برای ادامه‌ی کار باید فضای متریک هاسدورف را روی اعداد فازی تعریف کنیم.

تعریف ۲.۴.۱. [۱۰۹] فرض کنید $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. فضای متریک هاسدورف d_H طبق رابطه

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\|x-y\|, \sup_{y\in B}\inf_{x\in A}\|x-y\|\}$$

تعریف می‌شود.لذا متریک d_F بر روی $F(\mathbb{R})$ به صورت

$$d_F(\tilde{a},\tilde{b}) = \sup_{0\leq\alpha\leq 1}\{d_H(\tilde{a}_\alpha,\tilde{b}_\alpha)\}$$

برای هر $\tilde{a},\tilde{b} \in F(\mathbb{R})$ تعریف می‌شود.از آن جایی که $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ در $\mathbb{R}$ بازه‌های بسته کران دار هستند، داریم

$$d_F(\tilde{a},\tilde{b}) = \sup_{0\leq\alpha\leq 1}\max\{|\tilde{a}_\alpha^L - \tilde{b}_\alpha^L|, |{\tilde{a}_\alpha}^U - {\tilde{b}_\alpha}^U|\}$$

[۱۳] Gal
[۱۴] Chalco-Cano

۱.۴.۱ پیوستگی یک تابع فازی مقدار

پیوستگی یک تابع فازی مقدار یک مفهوم اساسی در ریاضیات فازی است. محققان زیادی به بررسی پیوستگی توابع فازی مقدار از طریق متر سوپریمم روی اعداد فازی پرداخته‌اند [۲۱]،[۳۴]،[۴۰]،[۹۰]. دراینجا از تعریفی استفاده می‌کنیم که در [۲۱] برای توابع فازی مقدار ارائه شده است .

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید $F(\mathbb{R}) \longrightarrow \tilde{f}: \mathbb{R}^n$ یک تابع فازی مقدار باشد .گوییم $\tilde{f}$ در $c \in \mathbb{R}^n$ پیوسته است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$، یک $\delta = \delta(c, \epsilon) > 0$ وجود داشته باشد به‌طوریکه رابطه‌ی

$$d_F(\tilde{f}(x), \tilde{f}(c)) < \epsilon$$

به ازای تمام $x \in \mathbb{R}^n$ باشرط $\|x - c\| < \delta$ برقرار باشد. یعنی داشته باشیم:

$$\lim_{x \to c} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(c)$$

مثال ۲.۴.۱. تابع فازی مقدار درمثال ۱.۴.۱ یک تابع فازی مقدار پیوسته است.

گزاره زیر را بیان می‌کنیم:

گزاره ۱.۴.۱. [۱۰۵] فرض کنید $F(\mathbb{R}) \longrightarrow \tilde{f}: \mathbb{R}^n$ یک تابع فازی مقدار باشد. اگر $\tilde{f}$ در $c \in \mathbb{R}^n$ پیوسته باشد آن‌گاه توابع $\tilde{f}^L_\alpha(x)$ و $\tilde{f}^U_\alpha(x)$ به ازای تمام $\alpha \in [0, 1]$ در c پیوسته خواهند بود.

برهان. این گزاره از تعریف پیوستگی توابع فازی مقدار $\tilde{f}$ و از متر روی اعداد فازی نتیجه می‌شود. □

۲.۴.۱ مشتق پذیری هاکاهارا دریک تابع فازی مقدار بر روی $\mathbb{R}$

برای تعریف کردن مشتق پذیری فازی، ابتدا تفاضل هاکاهارای(H ـ تفاضل) دو عدد فازی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دو عدد فازی باشند، اگر یک عدد فازی $\tilde{c}$ وجود داشته باشد به طوریکه که $\tilde{a} = \tilde{b} \oplus \tilde{c}$ آنگاه به $\tilde{c}$ تفاضل هاکاهارا $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ گفته می‌شود که آن را با $\tilde{a} \ominus_H \tilde{b}$ نمایش می‌دهند. H ـ مشتق‌پذیری(مشتق پذیری هاکاهارای)یک تابع تک متغیره‌ی فازی مقدار طبق تعریف پوری و رالسک [۶۷] به شرح زیر است:

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنید X زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}$ باشد. به تابع $\tilde{f}: X \longrightarrow \mathbb{R}$ در $x^\circ \in X$، H ـ مشتق پذیر گویند اگر یک عدد فازی مثل $D\tilde{f}(x^\circ)$ وجود داشته باشد به طوریکه حدهای

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \odot [\tilde{f}(x^\circ + h) \ominus_H \tilde{f}(x^\circ)]$$

و

$$\lim_{h\to \circ^+} \frac{۱}{h} \odot [\tilde{f}(x^\circ) \ominus_H \tilde{f}(x^\circ - h)]$$

نسبت به متر d_F وجود داشته باشند وبرابر با $D\tilde{f}(x^\circ)$ باشند. در این حالت به $D\tilde{f}(x^\circ)$، H ـ مشتق تابع $\tilde{f}$ در x° گفته می‌شود. اگر $\tilde{f}$ در همه نقاط $x \in X$، H ـ مشتق پذیر باشد آن‌گاه می‌گوییم که $\tilde{f}$ روی X، H ـ مشتق پذیراست.

ملاحظه ۱.۴.۱. تعریف بالا نشان می‌دهد که اگر یک تابع فازی مقدار در نقطه‌ی $x^\circ \in X$، H ـ مشتق پذیر باشد آن‌گاه تفاضل های هاکاهارای $\tilde{f}(x^\circ + h) \ominus_H \tilde{f}(x^\circ)$ و $\tilde{f}(x^\circ) \ominus_H \tilde{f}(x^\circ - h)$ به ازای هر $h \in (x^\circ - h, x^\circ + h)$ وجود خواهند داشت. با این حال برای یک تابع فازی مقدار، H ـ تفاضل‌ها برای $h > \circ$ وجود نداشته باشند یا اگر H ـ تفاضل هاوجودداشتند اما حدها موجود نباشند آن‌گاه تابع فاقد H ـ مشتق است. مثال زیر نشان دهنده‌ی این حقیقت است.

مثال ۳.۴.۱. [۲۱] فرض کنید $\tilde{f} : (\circ, ۲\pi) \longrightarrow F(\mathbb{R})$ روی مجموعه های سطح به صورت

$$[\tilde{f}(x)]_\alpha = (۱+\alpha)(۲+\sin(x))[-۱,۱]$$

(به ازای $\alpha \in [\circ, ۱]$)تعریف شود. در نقطه $x^\circ = \frac{\pi}{۲}$ مقادیر، ${\tilde{f}_\alpha}^L(\frac{\pi}{۲}+h) - {\tilde{f}_\alpha}^L(\frac{\pi}{۲})$ و ${\tilde{f}_\alpha}^U(\frac{\pi}{۲}+h) - {\tilde{f}_\alpha}^U(\frac{\pi}{۲})$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\tilde{c}_\alpha{}^L = {\tilde{f}_\alpha}^L(\frac{\pi}{۲}+h) - {\tilde{f}_\alpha}^L(\frac{\pi}{۲}) = (۱+\alpha) - (۱+\alpha)\sin(\frac{\pi}{۲}+h)$$

و

$$\tilde{c}_\alpha{}^U = {\tilde{f}_\alpha}^U(\frac{\pi}{۲}+h) - {\tilde{f}_\alpha}^U(\frac{\pi}{۲}) = (۱+\alpha) - (۱+\alpha)\sin(\frac{\pi}{۲}+h)$$

به آسانی می‌توان دید که به ازای هر $h > \circ$ و هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ داریم: $c_\alpha^L \nleq c_\alpha^U$. یعنی هیچ $\tilde{c}$ وجود ندارد که $\tilde{c} \oplus \tilde{f}(\frac{\pi}{۲}) = \tilde{f}(\frac{\pi}{۲}+h)$ بدین ترتیب H ـ تفاضل وجود ندارد. لذا این تابع در $x^\circ = \frac{\pi}{۲}$ فاقد H ـ مشتق است.

گزاره زیر راجع به مشتق پذیری $\tilde{f}_\alpha^L$ و $\tilde{f}_\alpha^U$ را اثبات می‌کنیم.

گزاره ۲.۴.۱. [۶۷] فرض کنید X زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید $\tilde{f} : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار باشد که در x° دارای H ـ مشتق $D\tilde{f}(x^\circ)$ باشد. اگر تعریف کنیم $\tilde{f}_\alpha(x) = [\tilde{f}_\alpha^L(x), \tilde{f}_\alpha^U(x)]$ دراین‌صورت $\tilde{f}_\alpha^L(x)$ و $\tilde{f}_\alpha^U(x)$ در x° به ازای تمام $\alpha \in [\circ, ۱]$ مشتق پذیر هستند. علاوه براین داریم:

$$D\tilde{f}_\alpha(x^\circ) = [D(\tilde{f}_\alpha^L)(x^\circ), D(\tilde{f}_\alpha^U)(x^\circ)]$$

برهان. به ازای $h > \circ$، رابطه

$$[\tilde{f}(x^\circ + h) \ominus_H \tilde{f}(x^\circ)]_\alpha = [\tilde{f}_\alpha^L(x^\circ + h) - \tilde{f}_\alpha^L(x^\circ), \tilde{f}_\alpha^U(x^\circ + h) - \tilde{f}_\alpha^U(X^\circ)]$$

را داریم و رابطه ای مشابه برای $[\tilde{f}(x^\circ) \ominus_H \tilde{f}(x^\circ - h)]_\alpha$ نیز داریم. با تقسیم این رابطه بر h و گرفتن حد آن در صورتی که $h \to \circ^+$ میل می‌کند نتیجه حاصل و قضیه اثبات می‌گردد. □

H ـ مشتق پذیری مرتبه دوم برای یک تابع فازی مقدار به شرح زیر است.

تعریف ۶.۴.۱. اگر تابع فازی مقدار $\tilde{f}: X \longrightarrow F(\mathbb{R})$، که در آن $X \subset \mathbb{R}$ دارای H ـ مشتق روی X باشد و اگر $D\tilde{f}$، H ـ مشتق پذیر باشد آن گاه H ـ مشتق مربوط به $D\tilde{f}$ را با $D^{2}\tilde{f}$ نشان می‌دهیم وبه $D^{2}\tilde{f}$، H ـ مشتق دوم تابع $\tilde{f}$ می‌گوییم .

گزاره ۳.۴.۱. فرض کنید $\tilde{f}: X \longrightarrow F_L(\mathbb{R})$، H ـ مشتق پذیر با H ـ مشتق $D\tilde{f}$ روی X باشد و فرض کنید $D\tilde{f}: X \longrightarrow F_L(\mathbb{R})$ نیز در x، H ـ مشتق پذیر با مشتق $D^{2}\tilde{f}(x)$ باشد. آن‌گاه $D\tilde{f}^{L}_{\alpha}(x)$ و $D\tilde{f}^{U}_{\alpha}(x)$ نیز به ازای تمام $\alpha \in [0,1]$ مشتق پذیر هستند. همچنین رابطه

$$(D^{2}\tilde{f})_{\alpha}(x) = [D^{2}(D\tilde{f}^{L}_{\alpha})(x), D^{2}(D\tilde{f}^{U}_{\alpha})(x)]$$

برقراراست .

به همین ترتیب $C^{n}([a,b], F(\mathbb{R}))$، $n \geq 1$ را به عنوان فضای توابع n بار به طور پیوسته H ـ مشتق‌پذیر از $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ به $F(\mathbb{R})$ تعریف می‌کنیم .در مرجع [۳۷] ثابت شد که

$$(\tilde{f}^{(i)}(x))_{\alpha} = [(\tilde{f}^{(i)}(x))^{L}_{\alpha}, (\tilde{f}^{(i)}(x))^{U}_{\alpha}]$$

برای $i = 1,2,\dots,n$ برقرار است که در آن i مرتبه مشتق است و به طور خاص روابط

$$(\tilde{f}^{(i)}(x))^{L}_{\alpha} = (\tilde{f}^{L}_{\alpha}(x))^{i}$$

و

$$(\tilde{f}^{(i)}(x))^{U}_{\alpha} = (\tilde{f}^{U}_{\alpha}(x))^{i}$$

را برای $\tilde{f} \in C^{n}([a,b], F(\mathbb{R}))$ و برای هر $\alpha \in [0,1]$ داریم .

۳.۴.۱ مشتق پذیری هاکاهارا بر توابع فازی مقدار در $\mathbb{R}^{n}$

درادامه H ـ مشتق پذیری یک تابع چند متغیره فازی مقدار را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۷.۴.۱. [۱۰۹] فرض کنید $\tilde{f}$ یک تابع فازی مقدار تعریف شده در یک زیر مجموعه‌ی باز X از $\mathbb{R}^{n}$ باشد و فرض کنید $\bar{x}^{\circ} = (x^{\circ}_{1}, \dots x^{\circ}_{n}) \in X$ ثابت باشد. گوییم که $\tilde{f}$، i (امین) H ـ مشتق جزئی $D_i\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})$ درنقطه $\bar{x}^{\circ}$ است،اگر تابع فازی مقدار

$$\tilde{g}(x_i) = \tilde{f}(x^{\circ}_{1}, \dots, x^{\circ}_{i-1}, x_i, x^{\circ}_{i+1}, \dots, x^{\circ}_{n})$$

در x°_{i}، دارای H ـ مشتق $D_i\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})$ باشد. عبارت $D_i\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})$ را بصورت $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\bar{x}^{\circ})$ نیز میتوان نوشت.

تعریف ۸.۴.۱. گوییم $\tilde{f}$ در $\bar{x}^{\circ}$، H ـ مشتق پذیر است اگر یکی از H ـ مشتقات جزئی $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}$ در $\bar{x}^{\circ}$ وجود داشته باشند و بقیه $n-1$، H ـ مشتقات جزئی در یک همسایگی از $\bar{x}^{\circ}$ وجود

داشته باشند و در $\bar{x}^\circ$ پیوسته باشند(به مفهوم پیوستگی توابع فازی مقدار).
گرادیان $\tilde{f}$ در $\bar{x}^\circ$ با رابطه ی

$$\nabla\tilde{f}(\bar{x}^\circ)=(D_1\tilde{f}(\bar{x}^\circ),\dots,D_n\tilde{f}(\bar{x}^\circ))$$

نشان داده می‌شود ویک تابع فازی مقدار از X به $F^n(\mathbb{R})=F(\mathbb{R})\times\cdots\times F(\mathbb{R})$ n بار تعریف می کند،که در ان هر $D_i\tilde{f}(\bar{x}^\circ)$ یک عدد فازی برای $i=1,\dots,n$ است .مجموعه ی α ـ سطح مربوط به $\nabla\tilde{f}(\bar{x}^\circ)$ طبق رابطه‌ی

$$\left[\nabla\tilde{f}(\bar{x}^\circ)\right]_\alpha=(D_1\tilde{f}(\bar{x}^\circ)_\alpha\times(D_2\tilde{f}(\bar{x}^\circ)\times\cdots\times D_n\tilde{f}(\bar{x}^\circ)_\alpha)$$

تعریف می شود که درآن

$$(D_i\tilde{f}(\bar{x}^\circ))_\alpha=[D_i\tilde{f}\alpha^L(\bar{x}^\circ)),D_i\tilde{f}\alpha^\cup(\bar{x}^\circ)]\qquad\forall i=1,\dots n$$

. گوییم که $\tilde{f}$ روی X، H ـ مشتق پذیراست اگر در هر $\bar{x}\in X$، H ـ مشتق پذیر باشد.

گزاره ۴.۴.۱. [۱۰۵] فرض کنید X زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر یک تابع فازی مقدار $\tilde{f}:X\longrightarrow F(\mathbb{R})$، H ـ مشتق پذیر بر روی X باشد. آنگاه $\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})$ و $\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})$ نیز به ازای تمام $\alpha\in[0,1]$ بر روی X مشتق پذیر هستند. علاوه براین به ازای هر $\bar{x}\in X$ داریم

$$(D_i\tilde{f}(\bar{x}))_\alpha=[D_i\tilde{f}\alpha^L(\bar{x})),D_i\tilde{f}\alpha^U(\bar{x})\qquad\forall i=1,\dots,n$$

برهان. این قضیه از قضایای ۱.۴.۱ و ۲.۴.۱ نتیجه می‌شود. □

تعریف ۹.۴.۱. گوییم که $\tilde{f}$ در $\bar{x}^\circ$ به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر است اگر تمام H ـ مشتقات جزئی $\frac{\partial\tilde{f}\bar{x}}{\partial x_i}$، $i=1,\dots,n$ در یک همسایگی از $\bar{x}^\circ$ وجود داشته باشند و در $\bar{x}^\circ$ پیوسته باشند گوییم $\tilde{f}$ روی X، H ـ مشتق پذیراست اگر در هر $\bar{x}^\circ\in X$ به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر باشد.

گزاره ۵.۴.۱. [۱۰۵] فرض کنید $\tilde{f}:X\longrightarrow F(\mathbb{R})$ بر روی X به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر باشد. آن‌گاه $\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})$ و $\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})$ نیز بر روی X برای هر $\alpha\in[0,1]$ به طور پیوسته مشتق پذیر هستند.

برهان. از قضایای ۱.۴.۱ و ۴.۴.۱ نتیجه می‌شود. □

تعریف ۱۰.۴.۱. فرض کنید X یک مجموعه باز باشد و $\tilde{f}:X\longrightarrow F(\mathbb{R})$ که درآن $X\subset\mathbb{R}^n$ یک تابع فازی مقدار باشد. فرض کنید $\bar{x}^\circ\in X$ وجود داشته باشد به طوری که گرادیان $\tilde{f}$، یعنی $\nabla\tilde{f}$ در $\bar{x}^\circ$، H ـ مشتق پذیر باشد. یعنی برای هر i تابع $D_i\tilde{f}:X\longrightarrow F(\mathbb{R})$ در $\bar{x}^\circ$، H ـ مشتق پذیر باشد. H ـ مشتق جزئی $D_i\tilde{f}$ درجهت $\bar{e}_j$ در نقطه $\bar{x}^\circ$ به وسیله روابط زیر نشان داده می‌شود.

$$D^2_{ij}\tilde{f}\qquad\text{یا}\qquad\frac{\partial^2\tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_i x_j}\qquad\text{اگر}\qquad i\neq j$$

و

$$i=j \quad \text{اگر} \quad \frac{\partial^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})}{\partial x_i^{۲}} \quad \text{یا} \quad D^{۲}_{ii}\tilde{f}$$

اگر این H ـ مشتقات $[D^{۲}_{ii}\tilde{f}]$ وجود داشته باشند. آن گاه گوییم که $\tilde{f}$ در $\bar{x}^{\circ}$ دوبار H ـ مشتق پذیر وبا ماتریس H ـ مشتق دوم $\nabla^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})$ است که به آن ماتریس هسیان فازی می‌گویند، و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^{\circ}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})}{\partial^{۲}x_i} & \cdots & \frac{\partial^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})}{\partial x_i \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})}{\partial x_n \partial x_{۱}} & \cdots & \frac{\partial^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})}{\partial x_n^{۲}} \end{pmatrix}$$

اگر $\tilde{f}$ در نقطه $\bar{x} \in X$ دوبار H ـ مشتق‌پذیر باشد گوییم $\tilde{f}$ روی X دوبار H ـ مشتق‌پذیر است و اگر برای هر $i,j = ۱,\cdots,n$ تابع H ـ مشتق‌پذیر $\frac{\partial^{۲}\tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j} \in F(\mathbb{R})$ یک تابع پیوسته از X به $F(\mathbb{R})$ باشد، گوییم $\tilde{f}$ به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر مرتبه‌ی دوم روی X است.

۴.۴.۱ ماتریس فازی معین و نیمه‌معین

ابتدا معین و نیمه معین بودن یک ماتریس حقیقی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۴.۱. فرض کنید A یک ماتریس متقارن $n \times n$ باشد. آن‌گاه A:

الف. معین مثبت [۱۵] است اگر داشته باشیم $x^t.A.x > \circ$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $x \neq \circ$.

ب. نیمه معین مثبت [۱۶] است اگر داشته باشیم $x^t.A.x \geq \circ$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$

ج. معین منفی [۱۷] است اگر داشته باشیم $x^t.A.x < \circ$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $x \neq \circ$

د. نیمه معین منفی [۱۸] است اگر داشته باشیم $x^t.A.x \leq \circ$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$

مثال ۴.۴.۱. ماتریس زیر یک ماتریس معین مثبت است:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۱ \end{pmatrix}$$

مثال ۵.۴.۱. ماتریس

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

یک ماتریس نیمه معین مثبت است.

[۱۵] Positive definite
[۱۶] Positive semidefinite
[۱۷] Negative definite
[۱۸] Negative semidefinite

مثال ۶.۴.۱. ماتریس

$$C = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

یک ماتریس نامعین است.

در این‌جا یک نتیجه مهم آورده شده است که براساس آن می‌توانیم متقارن بودن یک ماتریس را بررسی کنیم،

قضیه ۱.۴.۱. یک ماتریس $n \times n$، A:

۱. معین منفی است اگر و فقط اگر $(-۱)^k.|A_k| > ۰$ برای هر $k \in \{۱, \ldots, n\}$.

۲. معین مثبت است اگرو فقط اگر $|A_k| > ۰$ برای هر $k \in \{۱, \ldots, n\}$.

اکنون ما معین و نیمه‌معین بودن ماتریس فازی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۴.۱. فرض کنید $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$، $i, j = ۱, \ldots, n$ یک ماتریس فازی باشد، یعنی تمام عناصر $(\tilde{a}_{ij})$ درماتریس فازی $\tilde{A}$ اعداد فازی روی $\mathbb{R}$ باشند. دوماتریس حقیقی متناظر $\tilde{A}^L_\alpha$ و $\tilde{A}^U_\alpha$ برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ وجود دارند، که ماتریس‌های α ـسطح نامیده می‌شوند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{A}^L_\alpha = \begin{pmatrix} (\tilde{a}_{۱۱})^L_\alpha & \cdots & (\tilde{a}_{۱n})^L_\alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\tilde{a}_{n۱})^L_\alpha & \cdots & (\tilde{a}_{nn})^L_\alpha \end{pmatrix}$$

و

$$\tilde{A}^U_\alpha = \begin{pmatrix} (\tilde{a}_{۱۱})^U_\alpha & \cdots & (\tilde{a}_{۱n})^U_\alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\tilde{a}_{n۱})^U_\alpha & \cdots & (\tilde{a}_{nn})^U_\alpha \end{pmatrix}$$

آن‌گاه $\tilde{A}$:

الف. ماتریس معین مثبت نامیده می‌شود اگر ماتریس های α ـسطح $\tilde{A}^L_\alpha$ و $\tilde{A}^U_\alpha$ برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ ماتریس های معین مثبت حقیقی باشند.

ب. ماتریس نیمه معین مثبت نامیده می‌شود اگر ماتریس های α ـسطح $\tilde{A}^L_\alpha$ و $\tilde{A}^U_\alpha$ برای هر $\alpha \in [۰, ۱]$ ماتریس های نیمه معین مثبت حقیقی باشند.

مثال ۷.۴.۱. ماتریس فازی

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{۰} \\ \tilde{۰} & \tilde{a} \end{pmatrix}$$

که درآن $\tilde{a} = (۱,۲,۴)$ و $\tilde{\circ} = (\circ,\circ,\circ)$ اعداد فازی هستند را در نظر بگیرید. لذا ماتریس‌های α ـ سطح $\tilde{A}$ برای هر $\alpha \in [\circ,۱]$ به صورت زیر هستند:

$$\tilde{A}^L_\alpha = \begin{pmatrix} (۱+\alpha) & \circ \\ \circ & (۱+\alpha) \end{pmatrix}$$

و

$$\tilde{A}^U_\alpha = \begin{pmatrix} (۴-۲\alpha) & \circ \\ \circ & (۴-۲\alpha) \end{pmatrix}$$

واضح است که این ماتریس ها برای هر $\alpha \in [\circ,۱]$ معین مثبت هستند. بنابراین ماتریس فازی $\tilde{A}$ معین مثبت است.

مثال ۸.۴.۱. اکنون ماتریس فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{\circ} \\ \tilde{\circ} & \tilde{a} \end{pmatrix}$$

که درآن $\tilde{a} = (\circ,۲,۴)$ و $\tilde{\circ} = (\circ,\circ,\circ)$ اعداد فازی هستند. دو ماتریس α ـ سطح برای $\tilde{B}$ به ازای هر $\alpha \in [\circ,۱]$ به صورت

$$\tilde{B}^L_\alpha = \begin{pmatrix} (۲\alpha) & \circ \\ \circ & (۲\alpha) \end{pmatrix}$$

و

$$\tilde{B}^U_\alpha = \begin{pmatrix} (۴-۲\alpha) & \circ \\ \circ & (۴-۲\alpha) \end{pmatrix}$$

می‌باشند. این ماتریس‌ها برای هر α به جز $\alpha = \circ$، معین مثبت هستند برای $\alpha = \circ$ ماتریس اول نیمه معین مثبت است .بنابراین ماتریس فازی $\tilde{B}$ نیمه معین مثبت است.

۵.۱ انتگرال فازی ریمان

مفهوم انتگرال فازی توسط سوگنو [۱۹] [۸۹] معرفی شد. پس ازآن بسیاری از فرمول‌های انتگرال فازی توسعه یافتند. به عنوان مثال دیوبوس [۲۰] وپراد [۲۱] [۲۵] یک نوع خاص از تابع فازی مقدار را بررسی کردند و انتگرال توابع فازی مقدار را با استفاده از اصل توسیع تعریف کردند. همچنین پوری و رالسک در مقاله خود انتگرال تابع فازی مقدار را به صورت سطح بندی شده تعریف کرده‌اند .گوتشل و واکمن [۴۰] مشتق پذیری وانتگرال پذیری توابع فازی مقدار را به گونه‌ای

[۱۹] Sugeno
[۲۰] Dubois
[۲۱] Prade

تعریف کردند که در راستای تعاریف متناظر در فضای حقیقی باشند. سیمز [۲۲] و وانگ [۲۳] [۸۶] به مرور نتایج بدست آمده در این موضوع پرداختند. در این پایان نامه از انتگرال فازی ریمان یک تابع فازی مقدار استفاده می‌کنیم. [۴۰]

تعریف ۱.۵.۱. [۳۷] فرض کنید $\tilde{f} : [a,b] \longrightarrow F(\mathbb{R})$. گوییم $\tilde{f}$ روی $\tilde{I} \in F(\mathbb{R})$ انتگرال پذیر فازی ریمان $(F-R)$ است هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، وجود داشته باشد $\delta > 0$ وجودداشته باشد به طوری که برای هر افراز $P = \{[u,v] : \xi\}$ از $[a,b]$ با $\Delta(P) < \delta$ داشته باشیم:

$$d_F(\sum_P^* (v-u) \odot \tilde{f}(\xi), \tilde{I}) < \epsilon$$

که درآن $\sum^*$ مجموع فازی است. می نویسیم:

$$\tilde{I} = (FR)\int_a^b \tilde{f}(x)dx$$

براساس انتگرال پذیری فازی ریمان، دراینجا فرمول فازی تیلور برای توابع فازی مقدار تک متغیره و چند متغیره را ارائه می‌دهیم:

قضیه ۱.۵.۱. [۳۷] فرض کنید $\tilde{f} \in C^n([a,b], F(\mathbb{R}))$، $n \geq 1$، $[t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$ آن‌گاه

$$\tilde{f}(t_1) = \tilde{f}(t_0) \oplus (t_1 - t_0) \odot \tilde{f}'(t_0) \oplus \cdots \oplus \frac{(t_1 - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \odot \tilde{f}^{n-1}(t_0)$$

که

$$\oplus \frac{1}{(n-1)!} \odot (FR)\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \odot \tilde{f}^n(t)dt$$

باقی مانده انتگرال فازی در t، و پیوسته است .

قضیه ۲.۵.۱. [۳۷] فرض کنید U یک زیرمجموعه محدب باز از $\mathbb{R}^n$ باشد، $n \in N$ و $\tilde{f} : U \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار پیوسته باشد .فرض کنید همه H ـ مشتقات جزئی فازی از مشتق فازی $\tilde{f}$ تا مرتبه $m \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند و پیوسته باشند. فرض کنید $z = (z_1, z_2 \ldots, z_n)$ و $(x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in U$ به گونه‌ای باشند که $z_i \geq x_{0i}$، $i = 1, \ldots, n$. فرض کنید $0 \leq t \leq 1$. تعریف می‌کنیم $x_i = x_{0i} + t(z_i - x_{0i})$، $i = 1, \ldots n$ و $\tilde{g}_z(t) = \tilde{f}(x_0) + t(z - x_0))$ (واضح است که $(x_0 + t(z - x_0) \in U$) آن‌گاه برای $N = 1, \ldots, m$ داریم:

$$\tilde{g}_z^N(t) = [(\sum_{i=1}^n (z_i - x_{0i}) \odot \frac{\partial}{\partial x_i})^N \tilde{f}](x_1, \ldots, x_n)$$

فرمول تیلور چند متغیره زیر نیز برقرار است:

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(x_0) \oplus \sum_{N=1}^{m-1} \frac{\tilde{g}_z^{(N)}(0)}{N!} \oplus R_m(0,1)$$

---
[۲۲] Sims
[۲۳] Wang

که در آن

$$R_m(\circ,1) = \frac{1}{(m-1)} \odot (FR) \int_{\circ}^{1} (1-s)^{m-1} \odot \tilde{g}_{z}^{(m)}(s)ds$$

۶.۱ روابط ترتیبی روی اعداد فازی

مفهوم مهم دیگری که در تحقیق ما استفاده می شود ساختار ترتیبی بر روی اعداد فازی است. ساختارهای ترتیبی نقش مهمی در مسائل بهینه سازی فازی دارند. روش های زیادی برای مرتب سازی اعداد فازی در مراجع ارئه شده است.(به عنوان مثال به برتولان [۲۴] و دگانی [۲۵] [۹]) مراجعه شود .

۱.۶.۱ یک رابطه ترتیبی جزئی : ترتیب حداکثر فازی

از بین روش‌های مرتب سازی مختلف که برای اعداد فازی استفاده می‌شوند، یکی از روش‌هایی که معمولا مورداستفاده قرار می‌گیرد یک رابطه ترتیب جزئی است که ترتیب حداکثر فازی گفته می‌شود و توسط رامیک و ریمانک [۲۶] [۷۲] معرفی شده است. این ترتیب به صورت زیر است:

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دو عدد فازی در $F(\mathbb{R})$ باشند و فرض کنید $\tilde{a}_\alpha = [\tilde{a}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha]$ و $\tilde{b}_\alpha = [\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{b}^U_\alpha]$ دو مجموعه بسته در $\mathbb{R}$ برای $\alpha \in [\circ,1]$ باشند. تعریف می‌کنیم $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ اگر و فقط اگر $\tilde{a}^L_\alpha \leq \tilde{b}^L_\alpha$ و $\tilde{a}^U_\alpha \leq \tilde{b}^U_\alpha$ به ازای هر $\alpha \in [\circ,1]$.

می‌توان نشان داد که رابطه ترتیبی $\preceq$ در اصول موضوعه روابط ترتیبی جزئی در خانواده $F(\mathbb{R})$ صدق می‌کند. با استفاده از رابطه ترتیب جزئی در اعداد فازی، می‌توانیم $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ را به روش‌های مختلفی تعریف می‌کنیم:

الف. $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ اگر و فقط اگر $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ و $\alpha_\circ \in [\circ,1]$ وجود داشته باشد به طوری که $\tilde{a}^L_{\alpha_\circ} < \tilde{b}^L_{\alpha_\circ}$ یا $\tilde{a}^\cup_{\alpha_\circ} < \tilde{b}^\cup_{\alpha_\circ}$.

ب. $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ اگرو فقط اگر

$$\forall \alpha \in [\circ,1] \quad \begin{cases} \tilde{a}^L_\alpha < \tilde{b}^L_\alpha \\ \tilde{a}^U_\alpha < \tilde{b}^U_\alpha \end{cases} \quad \textbf{یا} \quad \begin{cases} \tilde{a}^L_\alpha \leq \tilde{b}^L_\alpha \\ \tilde{a}^U_\alpha < \tilde{b}^U_\alpha \end{cases} \quad \textbf{یا} \quad \begin{cases} \tilde{a}^L_\alpha < \tilde{b}^L_\alpha \\ \tilde{a}^U_\alpha \leq \tilde{b}^U_\alpha \end{cases}$$

ما از این رابطه ترتیب جزئی برای تعریف یک جواب بهینه برای یک مسئله بهینه‌سازی فازی استفاده می‌کنیم و شرایط بهینگی را بر اساس این رابطه ترتیبی ایجاد می‌کنیم.

[۲۴] Bortolan
[۲۵] Degani
[۲۶] Rimanek

۲.۶.۱ رابطه ترتیب کلی پارامتری

نوع دیگری از رابطه ترتیبی، رابطه ترتیب کلی پارامتری هست که روی اعداد L ــ فازی تعریف می‌شود. این رابطه ترتیب $\preceq_\lambda$ با پارامتر $\lambda \in [0,1]$ بر روی مجموعه اعداد L ــ فازی،توسط سیتو [۲۷] و ایشی [۲۸] [۸۱] معرفی شده ، که به صورت زیر است:

تعریف ۲.۶.۱. برای هر $\tilde{a}, \tilde{b} \in F_L(\mathbb{R})$، گوییم $\tilde{a} \preceq_\lambda \tilde{b}$ که $\preceq_\lambda$ یک رابطه ترتیبی پارامتری روی $F_L(\mathbb{R})$ برای $0 \leq \lambda \leq 1$ است، اگر تنها یکی از نامساوی‌های زیر برقرار شد:

الف. برای $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L < \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ داشته باشیم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L < \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$

ب. برای $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L \geq \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ داشته باشیم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L \leq \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که $\preceq_\lambda$ برای هر $\lambda \in [0,1]$ یک رابطه ترتیبی کلی روی $F_L(\mathbb{R})$ است. $\succeq_\lambda$ با $\tilde{b} \succeq_\lambda \tilde{a}$ با $\tilde{a} \preceq_\lambda \tilde{b}$ نیز تعریف می‌شود.

گزاره ۱.۶.۱. رابطه $\preceq_\lambda$ یک رابطه‌ی ترتیب کلی روی $F_L(\mathbb{R})$ است، که درآن $F_L(\mathbb{R})$ مجموعه اعداد L ــ فازی، روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $\preceq_\lambda$ یک رابطه ترتیب جزئی روی $F_L(\mathbb{R})$ است.

انعکاسی بودن: برای $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L = \tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L$ داریم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L = \lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L$
بنابراین، $\tilde{a} \preceq_\lambda \tilde{b}$ برای هر $\lambda \in [0,1]$ انعکاسی است .

پاد متقارن بودن: اگر $\tilde{a} \preceq_\lambda \tilde{b}$ و $\tilde{b} \preceq_\lambda \tilde{a}$ آن‌گاه $\tilde{a} = \tilde{b}$. از آن‌جایی که $\tilde{a} \preceq_\lambda \tilde{b}$، بنا به تعریف یکی از نامساوی‌های زیر برای $\lambda \in [0,1]$ برقرار است:

الف. برای $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L < \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ داریم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L < \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$

ب. برای $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L \geq \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ داریم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L \leq \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$

و $\tilde{a} \preceq_\lambda \tilde{b}$ نشان می‌دهد که تنها یکی از نامساوی‌های زیر برقرار است:

ج. برای $\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L < \tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L$ داریم: $\lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L < \lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L$

د. برای $\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L \geq \tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L$ داریم: $\lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L \leq \lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L$

دراینجا می‌توانیم ببنیم که الف و ج همزمان برقرارنیست به طور مشابه الف و د،وب وج همزمان برقرارنیستند. از این رو تنها مورد ممکن ب و د است. دراین مورد ما باید داشته باشیم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L = \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$. بنابراین $\tilde{a} = \tilde{b}$.

حالا ویژگی سوم، تعدی رانشان می‌دهیم: اگر $\tilde{b} \preceq_\lambda \tilde{a}$ و $\tilde{c} \preceq_\lambda \tilde{b}$ آن‌گاه $\tilde{c} \preceq_\lambda \tilde{a}$. ازآن‌جایی که $\tilde{b} \preceq_\lambda \tilde{a}$ با توجه به تعریف یکی از نامساوی‌های زیر برای $\lambda \in [0,1]$ بدست می‌آید:

[۲۷] S.Saito
[۲۸] H.Ishii

الف. برای $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L < \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ داریم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L < \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$

ب. برای $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L \geq \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ داریم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L \leq \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$

و $\tilde{c} \preceq_\lambda \tilde{b}$ نشان می‌دهد که تنها یکی از نامساوی‌های زیر برقرار است:

ج. برای $\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L < \tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L$ داریم: $\lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L < \lambda[\tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L] + \tilde{c}_1^L$

د. برای $\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L \geq \tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L$ داریم: $\lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L \leq \lambda[\tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L] + \tilde{c}_1^L$

حال از الف و ج برای $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L < \tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L$ داریم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L < \lambda[\tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L] + \tilde{c}_1^L$
ازحالت های الف ود داریم:
$\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L < \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ و $\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L \geq \tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L$
$\tilde{b} \preceq_\lambda \tilde{a}$ ایجاب می‌کند: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L < \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$
$\tilde{c} \preceq_\lambda \tilde{b}$ ایجاب می‌کند: $\lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L \geq \lambda[\tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L] + \tilde{c}_1^L$
در نتیجه: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L < \lambda[\tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L] + \tilde{c}_1^L$
یا $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L < \tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L$ یا $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] \geq \tilde{c}_1^L - \tilde{c}_0^L]$.
بنابراین $\tilde{c} \preceq_\lambda \tilde{a}$. ما می‌توانیم نامساوی را براحتی برای مورد الف و ج ثابت کنیم. پس $\preceq_\lambda$ یک رابطه ترتیب جزئی روی $F_L(\mathbb{R})$ است. حال ثابت می‌کنیم که $\preceq_\lambda$ یک رابطه ترتیب کلی روی $F_L(\mathbb{R})$ است .یعنی اگر $\tilde{b} \npreceq_\lambda \tilde{a}$ آن‌گاه $\tilde{a} \preceq_\lambda \tilde{b}$. ازآن‌جایی که $\tilde{b} \npreceq_\lambda \tilde{a}$، بنا به تعریف داریم:

حالت۱. $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L < \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ اما

$$\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L \geq \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$$

حالت۲. $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L \geq \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ اما

$$\lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L < \lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L$$

برای حالت ۲ داریم:

$$\lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L < \lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L$$

زمانی که $\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L < \tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L$
از ترکیب حالت ۱ و ۲ داریم:

$$\lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L \leq \lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L$$

زمانی که $\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L \geq \tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L$.
بنابراین برای هردو حالت داریم $\tilde{a} \preceq_\lambda \tilde{b}$ برای $\lambda \in [0,1]$ ثابت. □

مقادیر مختلف λ برای مقایسه دوعدد L ـ فازی، حالت‌های عملی مختلفی را نشان می‌دهد. دراینجا نیزمی‌توان متوجه شد که هنگامی که یک رابطه ترتیب کلی پارامتری $\preceq_\lambda$ روی $F_L(\mathbb{R})$ تعریف می‌کنیم، تابع L شکل باید برای تمام اعداد L ـ فازی ثابت باشد. با استفاده ازاین رابطه ترتیب، یک جواب بهینه برای مسائل بهینه‌سازی L ـ فازی تعریف می‌کنیم و شرایط لازم وکافی بهینگی را ثابت می‌کنیم.

۷.۱ تحدب تعمیم یافته یک تابع فازی مقدار

ابتدا برخی از مفاهیم اساسی راجع به محدب بودن مجموعه‌هاوتوابع را بیان می‌کنیم.

۱.۷.۱ مجموعه‌هاوتوابع محدب

دراینجا با تعریف یک مجموعه آفین شروع می‌کنیم .

تعریف ۱.۷.۱. یک مجموعه $C \subseteq \mathbb{R}^n$ آفین است اگر خط گذرنده از هر دو نقطه ی متمایز در C باشد. یعنی اگربرای هر $x_1, x_2 \in C$ و $\theta \in \mathbb{R}$ داشته باشیم: $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$. به عبارت دیگر C شامل ترکیب خطی هر دو نقطه در C است. به شرط آن که مجموعه ضرایب در ترکیب خطی برابر یک باشد.

مثال ۱.۷.۱. به عنوان مثال مجموعه جواب معادلات معادله خطی $\{x|Ax = b\}$ آفین است.
حالا مجموعه محدب به را صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۲.۷.۱. هرزیرمجموعه C از $\mathbb{R}^n$ محدب است اگر پاره خط واصل بین دو نقطه در C قرار گیرد.یعنی اگر برای هر $x_1, x_2 \in C$ و برای هر θ با $0 \leq \theta \leq 1$ داشته باشیم:

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$$

مثال ۲.۷.۱. برای مثال یک مکعب جامد محدب است . اما هرچیزی که توخالی است یا درآن گودی وجود دارد مانند یک شکل هلال محدب نیست.

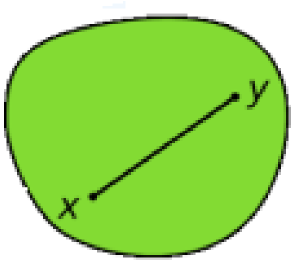
برخی مثال‌های مهم به صورت زیر می‌باشند:

الف. مجموعه تهی ϕ هرنقطه واحد(یکتایی) $\{x_0\}$ وکل فضای $\mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌های آفینی(وهمچنین محدبی)از $\mathbb{R}^n$ هستند.

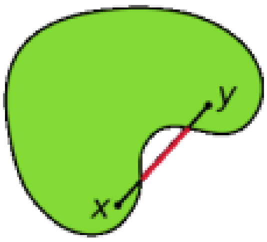
ب. هرخط آفین است اگرازصفر عبور می‌کند، آن گاه یک زیر فضا است واز این رو یک مخروط محدب نیز هست.

ج. یک پاره خط محدب است اما آفین نیست(مگر آن که به یک نقطه کاهش یابد).

شکل ۱.۱: مجموعه محدب



شکل ۲.۱: مجموعه نامحدب



د. هر زیرفضایی آفین یک مخروط محدب است .

اکنون تحدب یک تابع حقیقی مقدار را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۳.۷.۱. یک تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب است اگر دامنه f یک مجموعه محدب باشد واگر برای هر $x, y \in \ dom f$ و هر θ با $0 < \theta < 1$ داشته باشیم

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta) f(y) \tag{1.1}$$

یک تابع f اکیدا محدب است اگر در رابطه فوق نامساوی برای $x \neq y$ و $0 < \theta < 1$. اکید باشد گوییم f مقعراست هرگاه $-f$ محدب باشد،و اکیدا مقعراست هرگاه $-f$ اکیدا محدب باشد .

مثال‌هایی از توابع محدب و مقعر ارائه می‌دهیم:

۱. تابع نمایی e^{ax} برای هر $a \in \mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}$ محدب است .

۲. x^a روی $\mathbb{R}_+$ وقتی که $a \leq 0$ یا $a \geq 1$ محدب است وبرای $0 \leq a \leq 1$ مقعر است .

۳. تابع $|x|^p$ برای $p \geq 1$ روی $\mathbb{R}$ محدب است .

۴. تابع $\log x$ روی $\mathbb{R}_+$ مقعراست

دراینجا $\mathbb{R}_+$ مجموعه‌ای از اعداد مثبت را نشان می‌دهد . مثال دیگری در زیر آمده است:

مثال ۳.۷.۱. اگر $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نرم باشد و $۰ \leq \theta \leq ۱$ آن‌گاه

$$f(\theta x + (۱-\theta)y) \leq f(\theta x) + f((۱-\theta)y) = \theta f(x) + (۱-\theta)f(y)$$

نامساوی فوق از نامساوی مثلثی حاصل می‌شود و برابری از همنوا بودن یک نرم به دست می‌آید.

قضیه‌ی زیر یک ویژگی ازتوابع حقیقی مقدار محدب را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۷.۱. [۶۲] فرض کنید $f:T\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$، که درآن T یک مجموعه محدب است . اگر f در $\bar{x}^\circ$ مشتق پذیر باشد آن‌گاه $f(x)$ در نقطه $x=\bar{x}^\circ$ محدب است اگر وفقط اگر

$$(\nabla f(\bar{x}^\circ))^t(\bar{x}-\bar{x}^\circ) \leq f(\bar{x}) - f(\bar{x}^\circ) \qquad \forall \bar{x}\in T$$

۲.۷.۱ تحدب تابع فازی مقدار

آنالیز محدب یکی ازمهمترین حوزه‌های ریاضیات فازی است .ناندا [۲۹] وکار [۳۰] [۶۳] مفهوم تحدب برای توابع فازی را معرفی کرد.یان‌ـزو [۳۱] [۱۱۲] تحدب وشبه تحدب توابع فازی مقدار را مورد بحث قرار داد.سایان [۳۲] [۹۱] مفاهیم جدید محدب نمایی برای توابع فازی مقدار چند متغیره را معرفی کردند. تحدب و پیوستگی لیپ شتز توابع فازی مقدار توسط فاراکاوا [۳۳] [۳۴] مورد مطالعه قرار گرفتند. در اینجا ما تحدب یک تابع فازی مقدار را برحسب ترتیب ماکزیمم فازی بررسی می‌کنیم .

تعریف ۴.۷.۱. فرض کنید $\tilde{f}:T\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار باشد و T یک مجموعه محدب باشد .گوییم $\tilde{f}$ در $\bar{x}_\circ \in T$ محدب است اگر

$$\tilde{f}(\lambda\bar{x}_\circ + (۱-\lambda)\bar{x}) \preceq (\lambda\odot\tilde{f}(\bar{x}_\circ)\oplus((۱-\lambda)\odot\tilde{f}(\bar{x})))$$

برای هر $\lambda\in(۰,۱)$ و هر $\bar{x}\in T$.

گزاره ۱.۷.۱. [۱۰۵] فرض کنید $\tilde{f}:T\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار باشد و T یک مجموعه محدب باشد .گوییم $\tilde{f}$ در $\bar{x}_\circ\in T$ محدب است اگرو فقط اگر $\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})$ و $\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})$ در نقطه $\bar{x}_\circ$ برای هر $\alpha\in[۰,۱]$ محدب باشد .

[۲۹] Nanda
[۳۰] Kar
[۳۱] Yan-Xu
[۳۲] Syan
[۳۳] Furukawa

برهان. نتیجه می‌تواند به راحتی با استفاده از عملیات ریاضی و و رابطه ترتیب جزئی روی اعداد فازی ثابت شود. □

مثال ۱.۷.۴. تابع فازی مقدار $\tilde{f}(x_1, x_2) = (1,2,3) \odot x_1^2 \oplus (2,3,4) \odot x_2^2$ که در آن $(1,2,3)$ و $(2,3,4)$ اعداد فازی مثلثی هستند، یک تابع محدب فازی مقدار است زیراکه توابع α ـ سطح آن یعنی $\tilde{f}_\alpha^L(x_1, x_2) = (1+\alpha)x_1^2 + (2+\alpha)x_2^2$ و $\tilde{f}_\alpha^U(x_1, x_2) = (3-\alpha)x_1^2 + (4-\alpha)x_2^2$ برای هر α توابعی محدب می‌باشند .

۱.۷.۳ شبه محدب ومحدب نمایی یک تابع فازی مقدار

تحدب یک مفهوم قدرتمند در بهینه‌سازی است .با این حال از دیدگاه کاربردی، محدب بودن به عنوان یک فرض کاملا محدود کننده است. به عنوان مثال، تابع کوب ـ داگلاس که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^{t_1} \cdot \cdots, x_n^{t_n}$$

مقعر نیست مگر آن که $\sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1$ بنابراین ما در اینجا مفاهیم کمتر محدود کننده شبه تحدب ومحدب نمایی را برای یک تابع حقیقی مقدارتعریف می‌کنیم. ابتداشبه تحدب یک تابع حقیقی مقدار را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۷.۵. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ شبه محدب [۳۴] نامیده می‌شود اگردامنه آن و تمام مجموعه‌های زیرسطحی آن یعنی

$$\{x \in dom(f) | f(x) \leq \gamma\}$$

که $\gamma \in \mathbb{R}$ محدب باشند. یک تابع شبه مقعراست اگر مجموعه های ابر سطح آن

$$\{x \in dom(f) | f(x) \geq \gamma\}$$

محدب باشند. تابعی که هم شبه محدب باشد و هم شبه مقعر، شبه خطی نامیده می‌شود.

مثال ۱.۷.۵. (۱) $\log x$ روی $\mathbb{R}_+$ شبه محدب است.

(۲) تابع $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ با دامنه $\mathbb{R}_+^2$ و $f(x_1, x_2) = x_1.x_2$ یک تابع شبه مقعر است چون که مجموعه ابرسطح آن یعنی

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | x_1.x_2 \geq \gamma\}$$

به ازای هر γ یک مجموعه محدب است.

دراینجا برخی از ویژگی‌های اساسی توابع شبه محدب را بیان می‌کنیم:

[۳۴] quasiconvex

۱. یک رابطه اکید بین مقدار تابع در دو نقطه x و y و مقدار تابع در ترکیب محدب آن ها یعنی $\lambda x + (۱-\lambda)y$ وجود دارد.

قضیه ۲.۷.۱. [۷۹] تابع $\tilde{f} : T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow F(\mathbb{R})$ که درآن T یک مجموعه محدب می‌باشد، روی T شبه مقعر است اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in T$ و برای هر $\lambda \in (۰,۱)$

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\} \qquad (۲.۱)$$

تابع f روی T شبه محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in T$ و برای هر $\lambda \in (۰,۱)$

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \qquad (۳.۱)$$

اگر نامساوی‌ها در تعاریف فوق اکید باشند آن‌گاه تعاریف شبه تقعر اکید وشبه تحدب اکید را داریم

۲. هرتابع مقعر یک تابع شبه مقعر و هر تابع محدب یک تابع شبه محدب است .اما عکس آن در حالت کلی صحیح نیست. به عنوان مثال تابع $f(x) = x^۳$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ شبه مقعر است اما مقعر نیست و شبه محدب است اما محدب نیست .

۳. توابع شبه محدب و شبه مقعر لزوما در درون دامنه‌شان پیوسته نیستند.

۴. توابع شبه مقعر می‌تواند نقاط ماکزیمم موضعی داشته باشند که ماکزیمم سراسری نیستند. وتوابع شبه تحدب می‌تواند مینیمم موضعی داشته باشد که مینیمم سراسری نیستند.

۵. شرایط مرتبه اول حتی برای تعیین بهینگی موضعی تحت شبه محدب بودن کافی نیستند.

مثال زیر نشان دهنده‌ی سه نکته فوق است.

مثال ۶.۷.۱. [۷۹] فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت

$$f(x) = \begin{cases} x^۳, & x \in [۰,۱] \\ ۱, & x \in (۱,۲] \\ x^۳, & x > ۲ \end{cases}$$

تعریف شود.به راحتی می‌توان نشان داد که f هم شبه محدب و هم شبه مقعر روی $\mathbb{R}$ است به وضوح f در $x = ۲$ ناپیوسته است. علاوه بر این f در بازه‌ی $(۱,۲]$ ثابت است. بنابراین هر نقطه در این بازه یک ماکزیمم موضعی ویک مینیمم موضعی f است. با این حال هیچ نقطه ای در $(۱,۲]$ مینیمم وماکزیمم سراسری نیست. درنهایت $f'(۰) = ۰$ هر چند صفر به وضوح نه ماکزیمم موضعی ونه مینیمم موضعی است.

تعریف ۶.۷.۱. [۳، ۶۲] تابع $f: T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow F(\mathbb{R})$ شبه محدب در $\bar{x}_{\circ} \in T$ با مجموعه دلخواه T است اگروفقط اگر

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_{\circ}) \Longrightarrow f(\lambda \bar{x} + (۱-\lambda)\bar{x}_{\circ}) \leq f(\bar{x}_{\circ})$$

برای هر $\bar{x} \in T$ و هر $\lambda \in [\circ, ۱]$.

$f(\bar{x})$ روی T شبه محدب است اگرو تنها اگر در هر $\bar{x} \in T$ شبه محدب باشد .به علاوه، اگر $f(\bar{x})$ در $\bar{x}_{\circ} \in T$ مشتق پذیر باشد، $f(\bar{x})$ در $\bar{x} = \bar{x}_{\circ}$ شبه تحدب است اگر وفقط اگر

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_{\circ}) \Longrightarrow (\nabla f(\bar{x}_{\circ}))^t(\bar{x} - \bar{x}_{\circ}) \leq \circ, \forall \bar{x} \in T$$

یک تابع محدب نما [۳۵] تابعی است که در پیدا کردن مینیمم موضعی همانند یک تابع محدب رفتار می کند اما در واقع محدب نیست. به طور غیر رسمی یک تابعی مشتق پذیر محدب نما است اگر در هر جهتی که دارای مشتق جهتی مثبت باشد، افزایش یابد. تعریف به صورت زیر است:

تعریف ۷.۷.۱. یک تابع $f(\bar{x})$ تعریف شده روی مجموعه باز $T \subseteq \mathbb{R}^n$ در $\bar{x}_{\circ} \in T$ محدب نما گفته می‌شود اگرو فقط اگر در $\bar{x}_{\circ}$ مشتق پذیر باشد و

$$(\nabla f(\bar{x}_{\circ}))^t(\bar{x} - \bar{x}_{\circ}) \geq \circ \Longrightarrow f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_{\circ})$$

یا به طور معادل

$$f(\bar{x}) < f(\bar{x}_{\circ}) \Longrightarrow (\nabla f(\bar{x}_{\circ}))^t(\bar{x} - \bar{x}_{\circ}) < \circ$$

برای هر $\bar{x} \in T$ (و برای هر $\bar{x}_{\circ} \in T$).

مثال ۷.۷.۱. تابع $f(x) = x^۳ + x$ تعریف شده روی $\mathbb{R}$ یک تابع محدب نما است، زیرا برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$Df(x_۲)(x_۱ - x_۲) \geq \circ \Longrightarrow (۳x_۲^۲ + ۱)(x_۱ - x_۲) \geq \circ$$

که ایجاب می‌کند $(x_۱ - x_۲) \geq \circ$ در نتیجه $f(x_۱) \geq f(x_۲)$.

مثال ۸.۷.۱. تابع $f(x) = x^۳ - x$ تعریف شده روی $\mathbb{R}$ یک تابع محدب نما است، زیرا برای هر $x \in \mathbb{R}$ استدلالی مشابه مثال بالا برقرار است.

مثال ۹.۷.۱. تابع $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که در آن

$$S = \{x \in \mathbb{R}^۲ : \circ \leq x_۱ \leq ۱, \circ \leq x_۲ \leq ۱\}$$

[۳۵] pseudoconvex

مربع واحد در $\mathbb{R}^{۲}$ است و $f(x_{۱},x_{۲})=-x_{۱}^{۲}-x_{۱}$. دو نقطه دلخواه $x=[x_{۱},x_{۲}], y=[y_{۱},y_{۲}]\in S$ را در نظر بگیرید. اگررابطه

$$(\nabla f(x))^{t}(y-x)\geq \circ \Longrightarrow (-۲x_{۱}-۱)(y_{۱}-x_{۱})\geq \circ \Longrightarrow y_{۱}\leq x_{۱}$$

را داشته باشیم.این بدان معناست که $f(y)\geq f(x)$. ازاین رو f برای هر $x\in S$ محدب نما است.

تعریف ۸.۷.۱. [۳، ۶۲] یک تابع $f(\bar{x})$ روی مجموعه باز $T\subseteq \mathbb{R}^{n}$ در $\bar{x}_{\circ}\in T$ اکیدا محدب نما گفته می‌شود اگر و فقط اگر در $\bar{x}_{\circ}$ مشتق پذیر باشد و(برای هرنقطه $\bar{x}\in T$)

$$(\nabla f(\bar{x}_{\circ}))^{t}(\bar{x}-\bar{x}_{\circ})\geq \circ \Longrightarrow f(\bar{x})>f(\bar{x}_{\circ})$$

یا به طور معادل

$$f(\bar{x})\leq f(\bar{x}_{\circ}) \Longrightarrow (\nabla f(\bar{x}_{\circ}))^{t}(\bar{x}-\bar{x}_{\circ})<\circ$$

برای هر $\bar{x}(\neq \bar{x}_{\circ})\in T$ (و برای هر $\bar{x}\in T$).

مثال ۱۰.۷.۱. تابع $f(x)=-x^{۲}-x$ که در آن $\circ\leq x\leq ۱,$ اکیدا محدب نما است چون برای $x_{۱},x_{۲}\in[\circ,۱]$ با $x_{۱}\neq x_{۲}$ داریم:

$$Df(x_{۱})(x_{۲}-x_{۱})\geq \circ \Longrightarrow (-۲x_{۱}-۱)(x_{۲}-x_{۱})\geq \circ$$

یعنی $x_{۲}<x_{۱}$. این یعنی $f(x_{۲})>f(x_{۱})$.

تعریف ۹.۷.۱. فرض کنید $\tilde{f}:T\longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار روی مجموعه دلخواه $T\subseteq \mathbb{R}^{n}$ باشد. گوییم $\tilde{f}$ در نقطه $\bar{x}_{\circ}$ شبه محدب است اگر و فقط اگر توابع حقیقی مقدار $\tilde{f}_{\alpha}^{L}$ و $\tilde{f}_{\alpha}^{U}$ در نقطه $\bar{x}_{\circ}$ برای هر $\alpha\in[\circ,۱]$ شبه محدب باشند.

مثال ۱۱.۷.۱. یک تابع فازی مقدار $\tilde{f}(x)=(۱,۲,۳)\odot x^{۳}$ روی $\mathbb{R}$ را در نظربگیرید. به راحتی می‌توان نشان داد $\tilde{f}$ یک تابع شبه محدب است، چون $\tilde{f}_{\alpha}^{L}(x)=(۱+\alpha)x^{۳}$ و $\tilde{f}_{\alpha}^{U}(x)=(۳-\alpha)x^{۳}$ برای هر $\alpha\in[\circ,۱]$ توابع شبه محدب هستند.

تعریف ۱۰.۷.۱. فرض کنید $\tilde{f}:T\longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار تعریف شده روی مجموعه باز $T\subseteq \mathbb{R}^{n}$ باشد. گوییم $\tilde{f}$ در $\bar{x}_{\circ}$ محدب نما(اکیدا محدب نما) است اگر و فقط اگرتوابع حقیقی مقدار $\tilde{f}_{\alpha}^{L}$ و $\tilde{f}_{\alpha}^{U}$ در $\bar{x}_{\circ}$ برای هر $\alpha\in[\circ,۱]$ محدب نما (اکیدا محدب نما)باشند.

مثال ۱۲.۷.۱. فرض کنید تابع فازی مقدار $\tilde{f}(x)=(۱,۲,۳)\odot x\oplus(۲,۳,۴)\odot x^{۳}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد. به راحتی می‌توان نشان داد $\tilde{f}$ یک تابع محدب نما است. زیرا
$\tilde{f}_{\alpha}^{L}(x)=(۱+\alpha)x+(۲+\alpha)x^{۳}$ و $\tilde{f}_{\alpha}^{U}(x)=(۳-\alpha)x+(۴-\alpha)x^{۳}$ برای هر $\alpha\in[\circ,۱]$ توابع محدب نما هستند.

فصل ۲

مسائل بهینه سازی L ـ فازی نامقید

۱.۲ مقدمه

بسیاری از نویسندگان به طور گسترده‌ای از رتبه‌بندی اعداد فازی در حل مسائل بهینه‌سازی مطالعه استفاده کرده‌اند، به عنوان مثال به مراجع [۹] ،[۱۱]،[۱۱۳]،[۳۹]،[۴۹]،[۱۱۳] رجوع کنید. به طور کلی اعداد فازی به صورت طبیعی قابل مقایسه نیستند. با این حال، برخی از نویسندگان روش‌های مختلف رتبه بندی رابر حسب روابط ترتیبی کلی پارامتری تعریف کرده‌اند. به عنوان مثال فارکا [۳۲] یک رابطه ترتیبی کلی پارامتری را برای کلاس‌های اعداد فازی متقارن ایجاد شده توسط یک تابع معرفی کرد. او از آن به عنوان یک معیار برای به حداقل رساندن و برای حل یک مساله کوتاهترین مسیر روش فازی استفاده کرد. فارکا دو نوع رابطه ترتیبی پارامتری برای کلاس‌های اعداد فازی متقارن تولید شده توسط یک تابع S ـ شکل در [۳۳] تعریف کرد و از آن برای پیدا کردن جواب یک مساله بهینه‌سازی فازی استفاده کرد.

سیتو و ایشی یک رابطه ترتیب کلی پارامتری $\preceq_\lambda$،$\lambda \in [0,1]$ در [۸۱] معرفی کردند.

آن‌ها مسائل بهینه‌سازی فازی با توابع فازی مقدار که هم دامنه و هم برد آن ها اعداد L ـ فازی هستند را حل کردند. در این فصل ما ازیک رابطه ترتیبی کلی پارامتری $\preceq_\lambda$،$\lambda \in [0,1]$ برای به دست آوردن جواب بهینه مساله بهینه‌سازی فازی غیرخطی نامقید تک متغیره وچند متغیره استفاده می‌کنیم. ماشرایط لازم و کافی بهینگی را با استفاده از مفهوم مشتق پذیری

هاکاهارای یک تابع فازی مقدار بدست می‌آوریم. مثال‌های مناسب برای نشان دادن نتایج آورده شده است.

۲.۲ مسئله بهینه‌سازی L ـ فازی تک متغیره

در این بخش یک تابع فازی مقدار تعریف شده روی دامنه حقیقی را در نظر می‌گیریم که مقادیر آن L ـ فازی هستند و شرایط لازم و کافی برای بهینگی این مسئله را بدست می‌آوریم.

۱.۲.۲ تعریف مسئله

فرض کنید X یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}$ باشد، $F_L(\mathbb{R})$ مجموعه‌ای تمام اعداد L ـ فازی باشد و $\tilde{f}: X \longrightarrow F_L(\mathbb{R})$ یک تابع باشد. مسئله بهینه‌سازی L ـ فازی تک متغیره نامقید $(USFOP)$ [1] زیر رادر نظر می‌گیریم

$$\min \tilde{f}(x)$$
$$S.t. \quad x \in X$$

جواب‌های بهینه موضعی و سراسری این مسئله را استفاده از رابطه ترتیبی کلی پارامتری $\preceq_\lambda$، $\lambda \in [0,1]$ تعریف می‌کنیم. ابتدا تعریف $\preceq_\lambda$ یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. [۸۱] برای هر $\tilde{a}, \tilde{b} \in F_L(\mathbb{R})$ ، می‌گوییم $\tilde{a} \preceq_\lambda \tilde{b}$ که در اینجا $\preceq_\lambda$ یک رابطه ترتیبی پارامتری روی $F_L(\mathbb{R})$ برای $0 \leq \lambda \leq 1$ است اگر تنها یکی از نامساوی‌های زیر برقرار باشد:

الف. برای $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L < \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ داشته‌باشیم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L < \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$

ب. برای $\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L \geq \tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L$ داشته‌باشیم: $\lambda[\tilde{a}_1^L - \tilde{a}_0^L] + \tilde{a}_1^L \leq \lambda[\tilde{b}_1^L - \tilde{b}_0^L] + \tilde{b}_1^L$

$\tilde{b} \succeq_\lambda \tilde{a}$ توسط $\tilde{a} \preceq_\lambda \tilde{b}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲.۲. [۳۳] فرض کنید X یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}$ باشد و $\tilde{f}$ یک تابع فازی مقدار تعریف شده روی X باشد آن‌گاه گوییم $x^* \in X$:

الف. یک مینیمم کننده موضعی $\tilde{f}$ است اگر یک $\delta > 0$ وجودداشته باشد به طوری که $\tilde{f}(x^*) \preceq_\lambda \tilde{f}(x)$ برای هر $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$.

ب. یک مینیمم کننده سراسری $\tilde{f}$ است اگر $\tilde{f}(x^*) \preceq_\lambda \tilde{f}(x)$ برای هر $x \in X$.

ج. یک اکسترمم کننده است اگر مینیمم کننده یا ماکسیمم کننده باشد.

[1] Single-variable L-fuzzy Optimization Problem

۲.۲.۲ شرایط لازم بهینگی

در اینجا شرایط لازم بهینگی برای مسئله $(USFOP)$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. [۳۳] فرض کنید X یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}$ باشد و $x^* \in X$ یک اکسترمم کننده موضعی برای $\tilde{f} : X \longrightarrow F_L(\mathbb{R})$ باشد. اگر $\tilde{f}$ در x^*، H ــ مشتق پذیر باشد آن‌گاه

$$\lambda[D\tilde{f}_1^L(x^*) - D\tilde{f}_0^L(x^*)] + D\tilde{f}_1^L(x^*) = 0$$

که در آن $D\tilde{f}_\alpha^L(x)$ مشتق $\tilde{f}_\alpha^L(x)$ برای هر $\alpha \in [0,1]$ است.

برهان. ازآن جایی که x^* یک مینیمم موضعی برای $\tilde{f}$ است ، طبق تعریف، وجودارد $\delta > 0$ به طوری که $(x^* - \delta, x^* + \delta) \subset X$ و $\tilde{f}(x^*) \preceq_\lambda \tilde{f}(x)$ برای هر $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$. طبق تعریف رابطه ترتیب کلی $\preceq_\lambda$، برای هر $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ تنها یکی از نامساوی‌های زیر برقرار است .

الف. برای $\tilde{f}_1^L(x^*) - \tilde{f}_0^L(x^*) < \tilde{f}_1^L(x) - \tilde{f}_0^L(x)$ داریم:

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(x^*) - \tilde{f}_0^L(x^*)] + \tilde{f}_1^L(x^*) < \lambda[\tilde{f}_1^L(x) - \tilde{f}_0^L(x)] + \tilde{f}_1^L(x)$$

ب. برای $\tilde{f}_1^L(x^*) - \tilde{f}_0^L(x^*) \geq \tilde{f}_1^L(x) - \tilde{f}_0^L(x)$ داریم:

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(x^*) - \tilde{f}_0^L(x^*)] + \tilde{f}_1^L(x^*) \leq \lambda[\tilde{f}_1^L(x) - \tilde{f}_0^L(x)] + \tilde{f}_1^L(x)$$

.

حال برای هر $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ یا داریم:

$$\tilde{f}_1^L(x^*) - \tilde{f}_0^L(x^*) < \tilde{f}_1^L(x) - \tilde{f}_0^L(x)$$

و یا

$$\tilde{f}_1^L(x^*) - \tilde{f}_0^L(x^*) \geq \tilde{f}_1^L(x) - \tilde{f}_0^L(x)$$

بنابراین برای هر $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ یا

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(x^*) - \tilde{f}_0^L(x^*)] + \tilde{f}_1^L(x^*) < \lambda[\tilde{f}_1^L(x) - \tilde{f}_0^L(x)] + \tilde{f}_1^L$$

و یا

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(x^*) - \tilde{f}_0^L(x^*)] + \tilde{f}_1^L(x^*) \leq \lambda[\tilde{f}_1^L(x) - \tilde{f}_0^L(x)] + \tilde{f}_1^L$$

بنابراین، برای هر $h \in [0, \delta)$

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(x^*) - \tilde{f}_0^L(x^*)] + \tilde{f}_1^L(x^*) < \text{یا} \leq \lambda[\tilde{f}_1^L(x^* + h) - \tilde{f}_0^L(x^* + h)] + \tilde{f}_1^L(x^* + h)$$

یعنی

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(x^*+h)-\tilde{f}_1^L(x^*)]-[\lambda\tilde{f}_0^L(x^*+h)-\tilde{f}_0^L(x^*)]+\tilde{f}_1^L(x^*+h)-\tilde{f}_1^L(x^*) > \text{یا} \geq 0$$

از آن‌جایی که $\tilde{f}$ در x^*، H ـ مشتق پذیر است طبق گزاره ۲.۴.۱، $\tilde{f}_\alpha^L$ نیز برای هر $\alpha \in [0,1]$ در x^* مشتق پذیر است .باتقسیم نامساوی بالا بر $h > 0$ وگرفتن حد $h \to 0^+$ داریم

$$\lambda[D\tilde{f}_1^L(x^*)-D\tilde{f}_0^L(x^*)]+D\tilde{f}_1^L(x^*) \geq 0 \tag{۱.۲}$$

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که برای هر $h \in [0,\delta)$

$$\lambda(\tilde{f}_1^L(x^*-h)-\tilde{f}_1^L(x^*))-\lambda(\tilde{f}_0^L(x^*-h)-\tilde{f}_0^L(x^*))+\tilde{f}_1^L(x^*-h)-\tilde{f}_1^L(x^*) > \text{یا} \geq 0$$

با تقسیم این نامساوی بر $-h$ وگرفتن حد $h \to 0^+$ ، داریم

$$\lambda[D\tilde{f}_1^L(x^*)-D\tilde{f}_0^L(x^*)]+D\tilde{f}_1^L(x^*) \leq 0 \tag{۲.۲}$$

بنابراین با (۱.۲) و (۲.۲) نتیجه حاصل می‌شود. □

۳.۲.۲ شرایط کافی بهینگی

حال شرایط کافی بهینگی برای مسئله $(USFOP)$ را بررسی می‌کنیم:

قضیه ۲.۲.۲. [۳۳] فرض کنید X یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}$ باشد و $\tilde{f}: X \longrightarrow F_L(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار دو بار به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر باشد. اگر $x^* \in X$ به گونه‌ای باشد که:

الف.

$$\lambda[D\tilde{f}_1^L(x^*)-D\tilde{f}_0^L(x^*)]+D\tilde{f}_1^L(x^*)=0$$

و

ب.

$$\lambda[D^2\tilde{f}_1^L(x)-D^2\tilde{f}_0^L(x)]+D^2\tilde{f}_1^L(x)>0 \qquad \forall x \in X$$

آن‌گاه x^* یک مینیمم کننده موضعی $\tilde{f}$ است.

برهان. برای اینکه اثبات کنیم x^* یک مینیمم کننده موضعی $\tilde{f}$ است، باید ثابت کنیم $\tilde{f}(x^*) \preceq_\lambda \tilde{f}(x)$ برای هر $x \in X$. یعنی برای هر $x \in X$ ثابت می‌کنیم که،اگر

$$\tilde{f}_1^L(x^*)-\tilde{f}_0^L(x^*) \geq \tilde{f}_1^L(x)-\tilde{f}_0^L(x)$$

آن گاه

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(x^*)-\tilde{f}_0^L(x^*)]+\tilde{f}_1^L(x^*) \leq \lambda[\tilde{f}_1^L(x)-\tilde{f}_0^L(x)]+\tilde{f}_1^L(x)$$

درغیر این‌صورت نامساوی اکید بعدی برقرار است.

ازآن‌جایی که f یک تابع دوبار پیوسته H ـ مشتق پذیراست ، بنا به گزاره ۲.۴.۱ $\tilde{f}^L_\alpha$ یک تابع دوبار پیوسته مشتق‌پذیر برای هر $\alpha \in [0,1]$ است . بنابراین بنا به قضیه تیلور برای $x \neq x^*$ و $0 < t < 1$ ، داریم:

$$\tilde{f}^L_\alpha(x) = \tilde{f}^L_\alpha(x^*) + D\tilde{f}^L_\alpha(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2} D^2 \tilde{f}^L_\alpha(z)(x - x^*)^2$$

، که در آن $z = x^* + t(x - x^*)$ برای هر $\alpha \in [0,1]$. بنابراین با استفاده از معادله فوق برای $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ داریم:

$$\lambda[\tilde{f}^L_1(x) - \tilde{f}^L_0(x)] + \tilde{f}^L_1(x) = \lambda[\tilde{f}^L_1(x^*) - \tilde{f}^L_0(x^*)] + \tilde{f}^L_1(x^*)$$
$$+ \{\lambda[D^2 \tilde{f}^L_1(z) - D^2 \tilde{f}^L_0(z)] + D^2 \tilde{f}^L_1(z)\}\frac{1}{2}(x - x^*) \qquad (۳.۲)$$

حالا با استفاده از (۳.۲) داریم:

$$\lambda[\tilde{f}^L_1(x) - \tilde{f}^L_0(x) + \tilde{f}^L_1(x)] > \lambda[\tilde{f}^L_1(x^*) - \tilde{f}^L_0(x^*) + \tilde{f}^L_1(x^*)]$$

بنابراین $\tilde{f}(x) \preceq_\lambda \tilde{f}(x^*)$ برای هر $x \in X$. یعنی x^* یک مینیمم کننده موضعی $\tilde{f}$ روی X است. □

۴.۲.۲ مثال‌ها

مثال ۱.۲.۲. مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$\min \tilde{f}(x) = \tilde{a} \odot x \oplus \tilde{b} \odot x^2$$
$$S.t. \quad x \in \mathbb{R}$$

که درآن $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ اعدادفازی مثلثی به فرم $\tilde{a} = (1,2,3)$ و $\tilde{b} = (0,1,2)$ تعریف شده روی $\mathbb{R}$ بصورت زیر هستند:

$$\tilde{a}(r) = \begin{cases} (r-1) & 1 \le r \le 2 \\ (3-r) & 2 < r \le 3 \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

$$\tilde{b}(r) = \begin{cases} r & 0 \le r \le 1 \\ 2-r & 1 < r \le 2 \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

مجموعه α ـ سطح تابع $\tilde{f}(x)$ به‌صورت $\tilde{f}_\alpha(x) = [(1+\alpha)x + \alpha x^2, (3-\alpha)x + (2-\alpha)x^2]$ و مجموعه α ـ سطح تابع $D\tilde{f}(x)$ به‌صورت $D\tilde{f}_\alpha(x) = [(1+\alpha) + 2\alpha x, (3-\alpha) + 2(2-\alpha)x]$

می‌باشند. با استفاده از شرایط لازم از

$$\lambda[D\tilde{f}_{1}^{L}(x^*) - D\tilde{f}_{0}^{L}(x^*)] + D\tilde{f}_{1}^{L}(x^*) = 0$$

نتیجه می‌گیریم: $x^* = \frac{-(\lambda+2)}{2(\lambda+1)}$. حال با بررسی شرایط کافی، داریم

$$\lambda[D^2\tilde{f}_{1}^{L}(x^*) - D^2\tilde{f}_{0}^{L}(x^*)] + D^2\tilde{f}_{1}^{L}(x^*) = 2\lambda + 2 > 0$$

که در آن $D^2\tilde{f}(x) = [2\alpha, 2(2-\alpha)]$ و $\lambda \in [0,1]$. بنابراین گوییم $x^* = \frac{-(\lambda+2)}{2(\lambda+1)}$ یک مینیمم کننده موضعی برای تابع فازی مقدار برای یک مقدار ثابت $\lambda \in [0,1]$ می‌باشد . جدول زیر نشان می‌دهد که اگر λ مقادیر متفاوتی ازصفر تا یک بگیرد نقاط مینیمم متفاوتی برای تابع بدست می‌اوریم.

λ	x^*	$\tilde{f}(x^*)$
۰	-۱	$(-۳, -۱, ۱)$
۰/۲	$-۰/۹۱۶۷$	$(-۲/۷۵۰۰, -۰/۹۹۳۱, ۰/۷۶۳۹)$
۰/۶	$-۰/۸۱۲۵$	$(-۲/۴۳۷۵, -۰/۹۶۴۸, ۰/۵۰۷۸)$
۱	$-۰/۷۵$	$(-۲/۳۸۲۴, -۰/۹۵۷۶, ۰/۴۶۷۱)$

حالا مثال دیگری را به عنوان یک مطالعه موردی برای نشان دادن نتیجه ارائه می‌دهیم:

مثال ۲.۲.۲. [۷۴] قدرت اسب بخار تولید شده توسط یک چرخ پلتون متناسب با $u(V-u)$ است، u سرعت چرخ است که یک متغیر است، و V سرعت جت است که ثابت است . می‌خواهیم سرعت چرخاندن چرخ دنده‌ای که با آن کارایی ماکزیمم می‌شود را بیابیم. در اینجا اگر سرعت V ازجت را ثابت حقیقی در نظر بگیریم آن‌گاه مسئله به یک مسئله بهینه‌سازی قطعی تبدیل می‌شود. با این حال، سرعت جت ممکن است حدود V واحدباشد و در مدل‌های واقعی‌تر سرعت $\tilde{V}$ را به عنوان یک عدد فازی در نظر می‌گیرند. به طوردقیق‌تر ،فرض کنیم $\tilde{V}$ یک عدد فازی مثلثی به صورت $(V-1, V, V+1)$ باشد. لذا مسئله بهینه‌سازی جدید فازی ماکزیمم $\tilde{f}(u) = u \odot \tilde{V} - u^2$ است که در آن $\tilde{f}$ یک تابع از $\mathbb{R}$ به $F_L(\mathbb{R})$ است. بااعمال شرایط لازم

$$\lambda[D\tilde{f}_{1}^{L}(u) - D\tilde{f}_{0}^{L}(u)] + D\tilde{f}_{1}^{L}(u) = 0$$

که در آن $\tilde{f}_{\alpha}^{L}(u) = u(V-1+\alpha) - u^2$ و $D\tilde{f}_{\alpha}^{L}(u) = u(V-1+\alpha) - 2u$، برای $\alpha \in [0,1]$ مقدار عددی پارامتری $u = \frac{\lambda+V}{2}$ به دست می‌آید. حال با بررسی شرایط کافی:

$$\lambda[D^2\tilde{f}_{1}^{L}(u) - D^2\tilde{f}_{0}^{L}(u)] + D^2\tilde{f}_{1}^{L}(u) = -2 < 0$$

می‌بینیم $u = \frac{\lambda+V}{2}$ ماکزیمم پارامتری موضعی از $\tilde{f}$ نسبت به ترتیب کلی $\preceq$ روی $F_L(\mathbb{R})$ است.

۳.۲ مسئله بهینه‌سازی Lـ فازی چند متغیره

دراین بخش یک مسئله بهینه‌سازی L ـفازی چند متغیره نامقید را بررسی می‌کنیم .یک جواب بهینه برای مسئله را با استفاده از رابطه ترتیبی کلی پارامتری $\preceq_\lambda$ برای $\lambda \in [0,1]$ تعریف می‌کنیم. شرایط لازم وکافی بهینگی مرتبه اول ودوم برای یک مسئله بهینه‌سازی L ـفازی را ایجاد می‌کنیم. از مشتق پذیری هاکاهارای توابع فازی مقدار برای اثبات نتایج استفاده می‌کنیم. مثال‌های مناسبی جهت نشان دادن نتایج ارائه می‌دهیم.

۱.۳.۲ تعریف مسئله

دراین‌جا یک مسئله بهینه‌سازی L ـفازی چند متغیره نامقید $(UFMOP)$ [۲] را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\min \tilde{f}(\bar{x})$$
$$S.t. \quad \bar{x} \in X$$

که در آن $X \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز و $\tilde{f} : X \longrightarrow F_L(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار است با استفاده از رابطه ترتیب کلی پارامتری $\preceq_\lambda$، $\lambda \in [0,1]$ یک جواب بهینه موضعی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید $\tilde{f} : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow F_L(\mathbb{R})$ و $\lambda \in [0,1]$ ثابت باشد، آن‌گاه:

الف. نقطه $\bar{x}^* \in X$ یک نقطه مینیمم موضعی برای $\tilde{f}$ نسبت به رابطه ترتیبی کلی پارامتری $\preceq_\lambda$ نامیده می‌شود اگر $r > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}^*) \preceq_\lambda \tilde{f}(\bar{x})$ برای هر $\bar{x} \in X \cap B(\bar{x}^*; r)$.

ب. نقطه $\bar{x}^* \in X$ را اکیدا مینیمم موضعی برای $\tilde{f}$ نسبت به ترتیبی کلی پارامتری $\preceq_\lambda$ گویند اگروجود داشته باشد $r > 0$ به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}^*) \prec_\lambda \tilde{f}(\bar{x})$ برای هر $\bar{x} \in X \cap B(\bar{x}^*; r)$.

۲.۳.۲ شرط مرتبه اول

اکنون شرایط لازم مرتبه اول $(FONC)$ [۳] برای بهینگی مسئله $(UMFOP)$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۲. $(FONC)$ فرض کنید $\bar{x}^* \in intX$ یک مینیمم کننده موضعی برای $\tilde{f} : X \longrightarrow F_L(\mathbb{R})$ نسبت به رابطه ترتیبی کلی پارامتری $\preceq_\lambda$ باشد. همچنین فرض کنید $\tilde{f}$ در نقطه $\bar{x}^*$ H ـ مشتق پذیر باشد آن‌گاه $\lambda[\nabla \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*] + \nabla \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) = 0$

برهان. از آن‌جایی که $\bar{x}^* \in intX$ یک مینیمم موضعی برای $\tilde{f}$ روی X هست ، بنابه تعریف، برای هر $\bar{x} \in X \cap B(\bar{x}^*; r)$ داریم $\tilde{f}(\bar{x}^*) \preceq_\lambda \tilde{f}(\bar{x})$.

[۲] Multi-variable L-fuzzy Optimization Problem

[۳] First-Order condition

یعنی فقط یکی از نامساوی‌های زیر برقرار است:

الف. برای $\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*) < \tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x})$ داریم:

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) < \lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x})] + \tilde{f}_1^L(\bar{x})$$

ب. برای $\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*) \geq \tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x})$ داریم:

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) \leq \lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x})] + \tilde{f}_1^L(\bar{x})$$

بنابراین برای هر $\bar{x} \in X \cap B(\bar{x}^*; r)$ یا رابطه

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) < \lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x})] + \tilde{f}_1^L(\bar{x})$$

برقرار است و یا رابطه زیر:

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) \leq \lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x})] + \tilde{f}_1^L(\bar{x})$$

فرض کنید $\bar{e}_i = [\circ, \cdots, 1, \cdots]^T$ یک بردار واحد یک درموقعیت i ام باشد. لذا $(\bar{x}^* + h\bar{e}_i)$ با $h > \circ$ نشان دهنده‌ی یک بهم‌ریختگی با اندازه h در $\bar{x}^*$ درجهت $\bar{e}_i$ است . فرض کنید $\bar{x} = \bar{x}^* + h\bar{e}_i$ که در آن $h < r$. آن‌گاه داریم

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) < \text{یا} \leq \lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^* + h) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^* + h)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^* + h)$$

به طور مشابه برای $\bar{x} = \bar{x}^* - h\bar{e}_i$ و برای h به اندازه کافی کوچک داریم:

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) < \text{یا} \leq \lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^* - h) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^* + h)] - \tilde{f}_1^L(\bar{x}^* + h)$$

یعنی:

$$\lambda(\tilde{f}_1^L(\bar{x}^* + h) - \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)) - \lambda(\tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^* + h) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*) + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^* + h)] - \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) > \text{یا} \geq \circ \quad (۴.۲)$$

$$\lambda(\tilde{f}_1^L(\bar{x}^* - h) - \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)) - \lambda(\tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^* - h) - \tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*) + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^* - h)) - \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) > \text{یا} \geq \circ \quad (۵.۲)$$

از آن جایی که $\tilde{f}$ در $\bar{x}^*$، H ــ مشتق پذیر است بنا به گزاره ۲.۴.۱، $\tilde{f}_\alpha^L$ نیز در $\bar{x}^*$ برای هر $\alpha \in [\circ, 1]$ مشتق پذیر است . با تقسیم نامساوی های (۴.۲) و (۵.۲) بر h و $-h$ و گرفتن حد وقتی $h \to \circ$ داریم:

$$\lambda[D_i\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - D_i\tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*)] + D_i\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) \geq \circ \forall i = 1, \cdots, n$$

بنابراین

$$\lambda[\nabla\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla\tilde{f}_\circ^L(\bar{x}^*)] + \nabla\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) \geq \circ$$

$$\lambda[\nabla \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) \leq 0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\lambda[\nabla \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) = 0$$

□

۳.۳.۲ شرایط لازم و کافی مرتبه دوم

این بخش را بابحث در مورد شرایط لازم مرتبه دوم $(SONC)$ برای بهینگی تابع فازی مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}^n$ شروع می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۲. $(SONG)$ [۴] فرض کنید $\tilde{f} : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow F_L(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر باشد و $\bar{x}^* \in X$ یک نقطه درونی X باشد:

الف. اگر $\tilde{f}$ دارای یک مینیمم موضعی در $\bar{x}^* \in X$ باشد، آن‌گاه

$$\lambda[\nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla^2 \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)$$

نیمه معین مثبت است .

ب. اگر $\tilde{f}$ دارای یک ماکزیمم موضعی در $\bar{x}^* \in X$ باشد. آن‌گاه

$$\lambda[\nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla^2 \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)$$

نیمه معین منفی است .

برهان. یک روش دو مرحله‌ای برای اثبات این قضیه اتخاذ می‌کنیم . ابتدا نتیجه را برای $n = 1$ (یعنی $X \subseteq \mathbb{R}$) اثبات می‌کنیم . سپس با استفاده از این نتیجه حالت کلی را ثابت می‌کنیم .

حالت اول: $n = 1$

زمانی که $n = 1$ داریم $\tilde{f} : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow F_L(\mathbb{R})$ و $\lambda[\nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla^2 \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)$ عدد حقیقی است باید نشان دهیم:

$$\lambda[\nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla^2 \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) \geq 0$$

از آن‌جایی که $\tilde{f}$ دارای یک مینیمم موضعی در $\bar{x}^* \in X$ می‌باشد بنا به تعریف، برای هر $\bar{x} \in X \cap B(\bar{x}^*; r)$ و $r > 0$ داریم $\tilde{f}(\bar{x}^*) \preceq_\lambda \tilde{f}(\bar{x})$. یعنی تنها یکی از نامساوی‌های زیر برقرار است:

الف. برای $\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*) < \tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_0^L(\bar{x})$ داریم:

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) < \lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_0^L(\bar{x})] + \tilde{f}_1^L(\bar{x})$$

[۴] Second-order condition

ب. برای $\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*) \geq \tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_0^L(\bar{x})$ داریم:

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) \leq \lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_0^L(\bar{x})] + \tilde{f}_1^L(\bar{x})$$

برای هر $\bar{x} \in X \cap B(\bar{x}^*; r)$ و $0 \leq \lambda \leq 1$.

سری تیلور تابع $\tilde{f}_\alpha^L$ در $\bar{x}^*$ برای h به اندازه کافی کوچک با $\bar{x}^* + h \in B(\bar{x}^*; r)$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}^* + h) = \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}^*) + hD\tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}^*) + \frac{1}{2}h^2 D^2 \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}^*) + O(h^3)$$

با استفاده ازاین ، داریم:

$$\begin{aligned} 0 \leq \{\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^* + h) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^* + h)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^* + h)\} &= \{\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)\} \\ &+ h\{\lambda[D\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - D\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + D\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)\} \\ &+ \frac{h^2}{2}\{\lambda[D^2\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - D^2\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + D^2\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)\} \\ &+ O(h^3) \end{aligned}$$

در نقطه مینیمم موضعی داریم:

$$\lambda[D\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - D\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + D\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) = 0$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \{\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^* + h) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^* + h)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^* + h)\} &- \{\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)\} \\ &= \frac{h^2}{2}\{\lambda[D^2\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - D^2\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + D^2\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)\} \\ &+ O(h^3) \end{aligned}$$

با انتخاب h به اندازه کافی کوچک می‌توانیم اطمینان حاصل کنیم که

$$\frac{h^2}{2}\{\lambda[D^2\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - D^2\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + D^2\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)\}$$

بر عبارت باقیمانده $O(h^3)$ غلبه می‌کند . بنابراین دریک نقطه مینمم موضعی داریم:

$$\lambda[D^2\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - D^2\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + D^2\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) \geq 0$$

حالت دوم: $n > 1$ قسمت ۱ را ثابت می‌کنیم.فرض کنید $\bar{x}^*$ یک نقطه مینمم موضعی برای $\tilde{f}$ روی X باشد .باید نشان دهیم که برای هر $z \in \mathbb{R}^n$ با $z \neq 0$ داریم $z'Az \geq 0$ که در آن

$$A = \lambda[\nabla^2\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla^2\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla^2\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)$$

یک $z \in \mathbb{R}^n$ انتخاب کنید. تابع فازی مقدار $\tilde{g} : \mathbb{R} \longrightarrow F(\mathbb{R})$ را به صورت $\tilde{g}(t) = \tilde{f}(\bar{x}^* + tz)$ تعریف کنید. توجه شود که $\tilde{g}(\circ) = \tilde{f}(\bar{x}^*)$. برای $|t|$ به اندازه کافی کوچک داریم

$$\tilde{f}(\bar{x}^*) \preceq_\lambda \tilde{f}(\bar{x}^* + tz)$$

چون $\tilde{f}(\bar{x}^*)$ در $\bar{x}^*$ یک مینیمم موضعی دارد. به این ترتیب $\epsilon > \circ$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ رابطه $\tilde{g}(\circ) \preceq_\lambda \tilde{g}(t)$ برقرار است ،یعنی صفر یک مینیمم موضعی $\tilde{g}$ است. طبق حالت اول باید داشته باشیم:

$$\lambda[D^۲\tilde{g}^L_۱(\circ) - D^۲\tilde{g}^L_\circ(\circ)] + D^۲\tilde{g}^L_۱(\circ) \geq \circ$$

از سوی دیگر با توجه به تعریف $\tilde{g}$ نتیجه می‌گیریم $\tilde{g}$ دو بار به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر است چون $\tilde{g}(t) = \tilde{f}(\bar{x}^* + tz)$. بنابراین $\tilde{g}^L_\alpha(t) = \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^* + tz)$ و $D^۲\tilde{g}^L_\alpha(t) = z'\nabla^۲\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^* + tz)z$ ، این یعنی $D^۲\tilde{g}^L_\alpha(t) = z'\nabla^۲\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^*)z$ لذا

$$\lambda[D^۲\tilde{g}^L_۱(\circ) - D^۲\tilde{g}^L_\circ(\circ)] + D^۲\tilde{g}^L_۱(\circ) = z'Az$$

که در آن

$$A = \lambda[\nabla^۲\tilde{f}^L_۱(\bar{x}^*) - \nabla^۲\tilde{f}^L_\circ(\bar{x}^*)] + \nabla^۲\tilde{f}^L_۱(\bar{x}^*)$$

در نتیجه

$$z'Az = \lambda[D^۲\tilde{g}^L_۱(\circ) - D^۲\tilde{g}^L_\circ(\circ)] + D^۲\tilde{g}^L_۱(\circ) \geq \circ$$

این اثبات قسمت الف را کامل می‌کند .قسمت ۲ به طور مشابه ثابت می‌شود. □

اکنون شرایط کافی مرتبه دوم $(SOSC)$ [۵] را برای حالتی ثابت می‌کنیم که x^* یک مینیمم کننده اکیدا موضعی برای مسئله $(UMFOP)$ باشد. برای اثبات قضیه به نامساوی زیر به نام نامساوی ریلی [۶] نیاز داریم. [۶۱]

قضیه ۳.۳.۲. اگر یک ماتریس $P_{n\times n}$ معین مثبت متقارن حقیقی باشد آن‌گاه

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^۲ \leq x^T Px \leq \lambda_{\max}(p)\|x\|^۲$$

که در آن $\lambda_{\min}(P)$ کوچکترین مقدار ویژه P را نشان می‌دهد و $\lambda_{\max}(P)$ نشان دهنده‌ی بزرگترین مقدار ویژه P است.

قضیه ۴.۳.۲. $(SOSC)$ فرض کنید $\tilde{f} : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow F_l(\mathbb{R})$ یک تابع به طور پیوسته دوبار H ـ مشتق پذیر باشد

[۵] Second-order sufficient condition
[۶] Rayleigh's Inequality

۱. اگر

$$\lambda[\nabla \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) = 0$$

و

$$\lambda[\nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla^2 \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)$$

معین مثبت باشد آن‌گاه $\bar{x}^*$ یک مینیمم موضعی اکید برای $\tilde{f}$ روی X است.

۲. اگر

$$\lambda[\nabla \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) = 0$$

و

$$\lambda[\nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla^2 \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)$$

معین منفی باشد آن‌گاه $\bar{x}^*$ یک ماکزیمم موضعی اکید برای $\tilde{f}$ روی X است.

برهان. قسمت ۱ را اثبات می‌کنیم ،قسمت ۲ به طور مشابه اثبات می‌شود. باید ثابت کنیم که $\bar{x}^*$ یک مینیمم موضعی اکید برای $\tilde{f}$ روی X است. طبق تعریف باید برای هر $\bar{x} \in X \cap B(\bar{x}^*; r)$ وبرای هر ثابت $\lambda \in [0, 1]$ ، نشان دهیم:

$$\tilde{f}(\bar{x}^*) \prec_\lambda \tilde{f}(\bar{x})$$

یعنی

$$\tilde{f}(\bar{x}) \not\preceq_\lambda \tilde{f}(\bar{x}^*)$$

یعنی باید نشان دهیم که نامساوی‌های زیر برای هر $\bar{x} \in X \cap B(\bar{x}^*; r)$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ ثابت به طور همزمان برقرار نیستند.

الف. برای $\tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}) < \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)$ داریم:

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_0^L(\bar{x})] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}) < \lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)$$

ب. برای $\tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}) \geq \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)$ داریم:

$$\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}) - \tilde{f}_0^L(\bar{x})] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}) \leq \lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)$$

فرض کنید

$$\tilde{H}^L(\bar{x}^*) = \lambda[\nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*) - \nabla^2 \tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)] + \nabla^2 \tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)$$

با استفاده از فرض ۲ و نامساوی ریلی(قضیه ۳.۳.۲) ، نتیجه می‌گیریم اگر $\bar{d} \neq 0$ آنگاه

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}^L(\bar{x}^*))\|\bar{d}\|^2 \leq \bar{d}^T \tilde{H}^L(\bar{x}^*)\bar{d}$$

که در آن $\lambda_{\min}(\tilde{H}^L(\bar{x}^*))$ کوچکترین مقدار ویژه $\tilde{H}^L(\bar{x}^*)$ می‌باشد. با توجه به قضیه تیلور و فرض ۱ داریم:

$$\begin{aligned}\left\{\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*+d)-\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*+d)]+\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*+d)\right\}-\left\{\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)-\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)]+\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)\right\}\\ =\frac{1}{2}\bar{d}^T\tilde{H}^L(\tilde{x}^*)\bar{d}+O(\|\bar{d}\|^2)\\ \geq\frac{\lambda_{\min}(\tilde{H}^L(\bar{x}^*))}{2}\|\bar{d}\|^2+O(\|\bar{d}\|^2)\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $\bar{d}$ با $\|\bar{d}\|$ کوچک ، داریم:

$$\{\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*+d)-\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*+d)]+\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*+d)\}>\{\lambda[\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)-\tilde{f}_0^L(\bar{x}^*)]+\tilde{f}_1^L(\bar{x}^*)\}$$

این نامساوی، نشان می‌دهد که دو نامساوی (الف)و(ب) به طور همزمان برقرارنیست. بنابراین گوییم $\tilde{f}$ دارای یک مینیمم موضعی اکید در $\bar{x}^*$ نسبت به رابطه ترتیب کلی $\preceq_\lambda$ است. □

۴.۳.۲ مثال‌های عددی

مثال ۱.۳.۲. مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\min \tilde{f}(x_1,x_2)=(\tilde{1}\odot x_1^2)\oplus(\widetilde{0/5}\odot x_2^2)\oplus(\tilde{3}\odot x_2)\oplus\widetilde{4/5}\\ &s.t.\quad x_1,x_2\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

که در آن $\tilde{3}=(2,3,4)$، $\widetilde{0/5}=(0/4,0/5,0/6)$، $\tilde{1}=(0,1,2)$ و $\widetilde{4/5}=(3/5,4/5,5/5)$ اعداد مثلثی فازی تعریف شده روی $\mathbb{R}$ و با ترتیب کلی $\preceq_\lambda$ برای یک مقدار ثابت $\lambda\in[0,1]$ می‌باشد. داریم $\tilde{f}_\alpha^L(x_1,x_2)=\alpha x_1^2+(0/4+\alpha 0/1)x_2^2+(2+\alpha)x_2+(3/5+\alpha)$ و

$$\nabla\tilde{f}_\alpha^L=\begin{pmatrix}2\alpha x_1\\ 2(0/4+0/1\alpha)x_2+(2+\alpha)\end{pmatrix}$$

طبق شرط لازم مرتبه اول داریم:

$$\lambda[\nabla\tilde{f}_1^L(\bar{x})-\nabla\tilde{f}_0^L(\bar{x})]+\nabla\tilde{f}_1^L(\bar{x})=0$$

یعنی

$$\lambda 2x_1+2x_1=0$$

$$\lambda(0/2x_2+1)+x_2+3=0$$

با حل این معادلات جواب پارامتری زیر را داریم:

$$\bar{x}^*=(0,-\frac{(\lambda+3)}{0/2\lambda+1})$$

اکنون

$$\lambda[\nabla^{2}\tilde{f}_{1}^{L}(\bar{x})-\nabla^{2}\tilde{f}_{0}^{L}(\bar{x})]+\nabla^{2}\tilde{f}_{1}^{L}(\bar{x})=\begin{pmatrix}2\lambda & 0\\ 0 & 0/2\lambda+1\end{pmatrix}$$

که در آن

$$\nabla^{2}\tilde{f}_{\alpha}^{L}(\bar{x})=\begin{pmatrix}2\alpha & 0\\ 0 & 2(0/4+0/1\alpha)\end{pmatrix}$$

از آن جایی که این ماتریس برای $\lambda\in[0,1]$ معین مثبت است، نقطه $\bar{x}^{*}=(0,-\frac{(\lambda+3)}{0/2\lambda+1})$ در شرط کافی مرتبه دوم $(SOSC)$ صدق می‌کند. بنابراین $\bar{x}^{*}$ یک نقطه مینیمم اکید موضعی برای تابع فازی مقدار داده شده می‌باشد.

مثال ۲.۳.۲. مسئله زیر را در نظر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\min\tilde{f}(x_{1},x_{2})=(\tilde{1}\odot x_{1}^{2})\oplus(\widetilde{-1}\odot x_{2}^{2})\\ &s.t.\quad x_{1},x_{2}\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

که در آن $\widetilde{-1}=(-2,-1,0)$، $\tilde{1}=(0,1,2)$ اعداد مثلثی فازی تعریف شده روی $\mathbb{R}$ و نسبت به رابطه ترتیب کل $\preceq_{\lambda}$ برای مقدار ثابت $\lambda\in[0,1]$. می‌باشند. داریم

$$\tilde{f}_{\alpha}^{L}(x_{1},x_{2})=\alpha x_{1}^{2}+(-2+\alpha)x_{2}^{2}$$

$$\nabla\tilde{f}_{\alpha}^{L}=\begin{pmatrix}2\alpha x_{1}\\ 2(-2+\alpha)x_{2}\end{pmatrix}$$

طبق شرط لازم مرتبه اول، داریم:

$$\lambda[\nabla\tilde{f}_{1}^{L}(\bar{x})-\nabla\tilde{f}_{0}^{L}(\bar{x})]+\nabla\tilde{f}_{1}^{L}(\bar{x})=0$$

یعنی

$$\lambda 2x_{1}+2x_{1}=0$$

$$\lambda 2x_{2}-2x_{2}=0$$

با حل این معادلات ، جواب پارامتری زیر را داریم:

$$\bar{x}^{*}=(0,0)$$

مقدار

$$\lambda[\nabla^{2}\tilde{f}_{1}^{L}(\bar{x})-\nabla^{2}\tilde{f}_{0}^{L}(\bar{x})]+\nabla^{2}\tilde{f}_{1}^{L}(\bar{x})=\begin{pmatrix}2\lambda+2 & 0\\ 0 & 2\lambda-2\end{pmatrix}$$

را که در آن

$$\nabla^{۲}\tilde{f}^{L}_{\alpha}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} ۲\alpha & ۰ \\ ۰ & ۲(-۲+\alpha) \end{pmatrix}$$

محاسبه می‌کنیم . در نقطه $\bar{x}^* = (۰,۰)$ شرط لازم مرتبه اول $(FONC)$ برقرار است اما شرط لازم مرتبه دوم $(SONC)$ برقرار نیست ، زیرا $۰ < ۲ + ۲\lambda$ اما $۰ \leq (۲ - ۲\lambda)(۲ + ۲\lambda)$ برای هر $\lambda \in [۰,۱]$. علاوه براین ، شرط کافی مرتبه دوم برقرار نیست. چون $۰ \leq (۲ - ۲\lambda)(۲ + ۲\lambda)$ برای هر $\lambda \in [۰,۱]$. بنابراین $\bar{x}^* = (۰,۰)$ برای $\lambda \in [۰,۱]$ نقطه بهینه برای تابع فازی مقدار نیست.

فصل ۳

مسائل بهینه‌سازی فازی

۱.۳ مقدمه

وو در [۱۰۵] ، جواب های نامغلوب [۱] یک مسئله بهینه‌سازی فازی مقید غیرخطی با محدودیت‌های حقیقی را معرفی کرد و شرایط بهینگی کافی را نیز برای آن استخراج کرد. نتایج بدست آمده توسط وو را برای مسائل بهینه‌سازی فازی دارای محدودیت‌های فازی‌مقدار تعمیم می‌دهیم. قبل از بررسی مسائل بهینه‌سازی فازی مقید، شرایط لازم و کافی بهینگی مرتبه اول و دوم را برای مسائل بهینه‌سازی فازی نامقید تحت رابطه ترتیب جزئی روی مجموعه اعداد فازی رایجاد می‌کنیم. مثال‌های مناسبی را جهت توضیح نتایج ارائه شده، برای مسائل بهینه‌سازی فازی نامقید و مقید ارائه می‌دهیم.

۲.۳ پیش‌نیازها

به منظور تعریف شرایط بهینگی کان_ تاکر برای مسائل بهینه‌سازی فازی غیرخطی، نیازمند فراهم‌سازی برخی خواص توابع فازی مقدار هستیم. با بیان دو گزاره زیر که از آنالیز حقیقی آورده شده است شروع می‌کنیم.

[۱] non-dominated solutions

گزاره ۱.۲.۳. [۲] فرض کنید ϕ یک تابع حقیقی‌مقدار دومتغیره تعریف‌شده بر روی $I \times [a,b]$ باشد، که در آن I یک بازه در $\mathbb{R}$ است . فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند :

الف. برای هر $x \in I$ تابع حقیقی‌مقدار $h(y) = \phi(x,y)$ در بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمانی باشد . در این حالت، می‌نویسیم $f(x) = \int_a^b \phi(x,y)dx$.

ب. فرض کنید $x^\circ \in int(I)$ و برای هر $\epsilon > \circ$ ، وجود داشته باشد یک $\delta > \circ$ به قسمی که

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x^\circ,y)\right| < \epsilon$$

برای هر $y \in [a,b]$ و هر $x \in (x^\circ - \delta, x^\circ + \delta)$،

آنگاه $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x^\circ,y)$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمانی است، $f'(x^\circ)$ موجود است و داریم

$$f'(x^\circ) = \int_a^b \phi(x,y)dx$$

گزاره ۲.۲.۳. [۹۳] هر تابع یکنوا روی یک بازه، انتگرال‌پذیر ریمانی است.

فرض کنید $\tilde{f} : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار تعریف‌شده بر روی زیرمجموعه X از $\mathbb{R}^n$ باشد. آنگاه برای هر $\alpha \in [\circ,۱]$، $\tilde{f}_\alpha^L$ و $\tilde{f}_\alpha^U$ توابع حقیقی مقدار تعریف‌شده بر روی X هستند. برای هر $\bar{x}^\circ \in X$ ثابت توابع حقیقی مقدار متناظر $\tilde{f}_\alpha^L$ و $\tilde{f}_\alpha^u$ تعریف‌شده روی $[\circ,۱]$ را می‌توان به‌عنوان توابعی متغیر از $\alpha \in [\circ,۱]$ در نظر گرفت. با توجه به گزاره ۱.۴.۱ ، این توابع در $[\circ,۱]$ یکنوا بوده و از این‌رو، با توجه به گزاره ۲.۲.۳ انتگرال‌پذیر ریمانی هستند. بنابراین، برای هر $\bar{x} \in X$ توابع جدید F^L و F^U را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F^L(\bar{x}) = \int_\circ^۱ \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x})d\alpha \qquad \text{و} \qquad F^U(\bar{x}) = \int_\circ^۱ \tilde{f}_\alpha^U(\bar{x})d\alpha \tag{۱.۳}$$

بعلاوه، گزاره سودمند زیر را نیز داریم:

گزاره ۳.۲.۳. [۱۰۵] فرض کنید $\tilde{f}$ یک تابع فازی مقدار تعریف‌شده بر روی یک زیرمجموعه باز X از $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر $\tilde{f}$ در یک همسایگی از $\bar{x}^\circ = (\bar{x}_۱^\circ, \bar{x}_۲^\circ, \cdots, \bar{x}_n^\circ)$ به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر باشد . آنگاه توابع حقیقی مقدار F^L و F^U تعریف‌شده در بالا در $\bar{x}^\circ$ به طور پیوسته مشتق‌پذیرند و داریم

$$\frac{\partial F^L}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ) = \int_\circ^۱ \frac{\partial \tilde{f}_\alpha^L}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ)d\alpha \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial F^U}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ) = \int_\circ^۱ \frac{\partial \tilde{f}_\alpha^U}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ)d\alpha \qquad \forall i = ۱, \cdots, n$$

برهان. باید نشان دهیم که مشتقات جزئی $\frac{\partial F^L}{\partial x_i}$ و $\frac{\partial F^U}{\partial x_i}$ در یک همسایگی از $\bar{x}^\circ$ وجود دارند و برای هر $i = ۱, \cdots, n$ در $\bar{x}^\circ$ پیوسته هستند. با توجه به (۱.۳) شرط (الف) در گزاره ۱.۲.۳ برقرار است. از آن‌جایی که $\tilde{f}$ در یک همسایگی از $\bar{x}^\circ$ به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر است.

بنا به تعریف، همه مشتقات جزئی $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}$، $i = ۱, \cdots, n$ در یک همسایگی از $\bar{x}^\circ$ وجود دارند و در $\bar{x}^\circ$ پیوسته هستند. بنابراین، بنا به تعریف پیوستگی تابع فازی مقدار، داریم:

برای هر $\epsilon > \circ$، وجود دارد $\delta > \circ$ به طوری که $\|\bar{x} - \bar{x}^\circ\| < \delta$ که ایجاب می‌کند:

$$d_F\left(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x})}{\partial x_i}, \frac{\partial \tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_i}\right) < \epsilon \qquad (۲.۳)$$

برای هر $i = ۱, \cdots, n$. حالا با استفاده از تعریف متریک d_F داریم:

$$d_F\left(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x})}{\partial x_i}, \frac{\partial \tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_i}\right) = \sup_{\alpha\in[\circ,۱]}\left\{d_H\left((\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x})}{\partial x_i})_\alpha, (\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_i})_\alpha\right)\right\}$$

$$= \sup_{\alpha\in[\circ,۱]}\left\{\max\left\{\left|(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x})}{\partial x_i})^L_\alpha - (\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_i})^L_\alpha\right|, \left|\left(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x})}{\partial x_i}\right)^U_\alpha - \left(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_i}\right)^U_\alpha\right|\right\}\right\}$$

بنابراین، با توجه به (۲.۳) داریم:

$$\left|\left(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x})}{\partial x_i}\right)^L_\alpha - \left(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_i}\right)^L_\alpha\right| < \epsilon$$

و

$$\left|\left(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x})}{\partial x_i}\right)^U_\alpha - \left(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_i}\right)^U_\alpha\right| < \epsilon$$

برای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ و $i = ۱, \cdots, n$. از آن‌جایی که

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x})}{\partial x_i}\right)^L_\alpha = \frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) \qquad \text{و} \qquad \left(\frac{\partial \tilde{f}(\bar{x})}{\partial x_i}\right)^U_\alpha = \frac{\partial \tilde{f}^U_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x})$$

برای هر $\epsilon > \circ$ ، وجود دارد $\delta > \circ$ به طوری که

$$\|\bar{x} - \bar{x}^\circ\| < \delta$$

ایجاب می‌کند:

$$\left|\frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}) - \frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ)\right| < \epsilon$$

برای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ و $i = ۱, \cdots, n$. بنابراین، شرط (ب) از گزاره ۱.۲.۳ نیز برقرار است .

بنابراین، با توجه به گزاره ۱.۲.۳ داریم:

$$\frac{\partial F^L}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ) = \int_\circ^۱ \frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ)d\alpha \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial F^U}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ) = \int_\circ^۱ \frac{\partial \tilde{f}^U_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ)d\alpha \qquad \forall i = ۱, \cdots, n \qquad (۳.۳)$$

بنابراین اگر

$$\|\bar{x} - \bar{x}^\circ\| < \delta$$

آنگاه با استفاده از (۳.۳) داریم:

$$\left|\frac{\partial F^L}{\partial x_i}(\bar{x})-\frac{\partial F^L}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ)\right|=\left|\left[\int_\circ^{۱}\frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x})-\int_\circ^{۱}\frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ)\right]d\alpha\right|$$
$$\leq\int_\circ^{۱}\left|\frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x})-\frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_i}(\bar{x}^\circ)\right|d\alpha<\epsilon$$

برای هر $i=۱,\cdots,n$. بنابراین، $\frac{\partial F^L}{\partial x_i}$ برای هر $i=۱,\cdots,n$ پیوسته است. بطور مشابه، می‌توان پیوستگی $\frac{\partial F^U}{\partial x_i}$ را نیز اثبات کرد. بدین ترتیب اثبات ما کامل می‌شود. □

نمادگذاری:

الف. گرادیان تابع $\tilde{f}:X\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow F(\mathbb{R})$ را با استفاده از مجموعه‌های α ـ سطح آن به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\nabla\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})=\left(\frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_۱}(\bar{x}),\cdots,\frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_n}(\bar{x})\right)^t$$

و

$$\nabla\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})=\left(\frac{\partial \tilde{f}^U_\alpha}{\partial x_۱}(\bar{x}),\cdots,\frac{\partial \tilde{f}^U_\alpha}{\partial x_n}(\bar{x})\right)^t$$

علاوه براین،

$$\int_\circ^{۱}\nabla\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})d\alpha=\left(\int_\circ^{۱}\frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_۱}(\bar{x})d\alpha,\cdots,\int_\circ^{۱}\frac{\partial \tilde{f}^L_\alpha}{\partial x_n}(\bar{x})d\alpha\right)^t$$

و

$$\int_\circ^{۱}\nabla\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})d\alpha=\left(\int_\circ^{۱}\frac{\partial \tilde{f}^U_\alpha}{\partial x_۱}(\bar{x})d\alpha,\cdots,\int_\circ^{۱}\frac{\partial \tilde{f}^U_\alpha}{\partial x_n}(\bar{x})d\alpha\right)^t$$

ب. ماتریس فازی مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $\tilde{f}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^\circ)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_۱^{۲}} & \cdots & \frac{\partial^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_۱\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_n\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_n^{۲}}\end{pmatrix}$$

در آن $\frac{\partial^{۲}\tilde{f}(\bar{x}^\circ)}{\partial x_i\partial x_j}\in F(\mathbb{R})$، که برای $i,j=۱,\cdots,n$.

لذا ماتریس‌های α ـ سطح ماتریس فوق به شکل زیر می‌باشند:

$$\nabla^{۲}\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^{۲}\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)}{\partial x_۱^{۲}} & \cdots & \frac{\partial^{۲}\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)}{\partial x_۱\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^{۲}\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)}{\partial x_n\partial x_۱} & \cdots & \frac{\partial^{۲}\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)}{\partial x_n^{۲}}\end{pmatrix}$$

و

$$\nabla^2 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

در اینجا نکته مهمی را به عنوان یک تبصره می‌آوریم .

ملاحظه ۳.۲.۱. مسائل بهینه‌سازی بطور عمده به روابط ترتیب بستگی دارند. در مسائل بهینه‌سازی قطعی، با اعداد حقیقی سروکار داریم که به طور خطی مرتب شده اند و هیچ مسئله‌ای در باب رابطه ترتیبی وجود ندارد. مسئله اصلی به هنگام رسیدگی به مسائل بهینه‌سازی فازی، تعریف رابطه ترتیبی بر روی مجموعه‌ی اعداد فازی است . روش‌های مختلفی برای تعریف روابط ترتیب بر روی اعداد فازی وجود دارند . برخی از آنها ترتیب جزئی و برخی نیز روابط ترتیب تام هستند. در بخش حاضر، مسئله بهینه‌سازی فازی همراه بایک رابطه ترتیب جزئی تحت عنوان ''ترتیب حداکثر فازی'' که در فصل های قبل تعریف شده است را بررسی می‌کنیم. در این رابطه ترتیب ، نامساوی اکید بین دو عدد فازی به دو شیوه مختلف تعریف شده‌اند. برای مسائل بهینه‌سازی فازی نامقید و مقید، از نامساوی های اکید مختلف استفاده می‌کنیم.

۳.۳ مسئله بهینه‌سازی فازی نامقید

در اینجا مسئله بهینه‌سازی فازی نامقید را در نظر گرفته و شرایط لازم و کافی بهینگی مرتبه اول و دوم را برای آن اثبات می‌کنیم. در ابتدا تعریف مسئله و جواب آن را فرمول‌بندی می‌کنیم. فرض کنید $T \subseteq \mathbb{R}^n$ یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ و $\tilde{f}$ تابع فازی مقدار تعریف‌شده بر روی T باشد. مسئله بهینه‌سازی فازی غیرخطی نامقید $(FOPL)$ [۲] زیر را در نظر بگیرید.

$$\min \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_1, \cdots, x_n)$$
$$S.t. \quad \bar{x} \in T$$

تعریف رابطه ترتیب جزئی بر روی اعداد فازی را دوباره یادآوری می‌کنیم:

تعریف ۳.۳.۱. برای $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$ ، گوییم $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ اگر و تنها اگر $\tilde{a}^L_\alpha \le \tilde{b}^L_\alpha$ و $\tilde{a}^U_\alpha \le \tilde{b}^U_\alpha$ برای هر $\alpha \in [0,1]$، که در آن $\tilde{a}_\alpha = [\tilde{a}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha]$ و $\tilde{b}_\alpha = [\tilde{b}^L_\alpha, \tilde{b}^U_\alpha]$ مجموعه‌های α ـ سطح اعداد فازی داده شده هستند .علاوه‌براین، نامساوی اکید بین دو عدد فازی را به این شکل تعریف می‌کنیم $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ اگر و تنها اگر $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ و برای حداقل یک $\alpha_0 \in [0,1]$ داشته باشیم $\tilde{a}^L_{\alpha_0} < \tilde{b}^L_{\alpha_0}$ یا $\tilde{a}^U_{\alpha_0} < \tilde{b}^U_{\alpha_0}$
حالا اعداد فازی مقایسه‌پذیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

[۲] Unconstrained fuzzy Optimization Problem

تعریف ۲.۳.۳. برای $\tilde{a},\tilde{b} \in F(\mathbb{R})$ ، گوییم $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ قابل مقایسه هستند اگر $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ یا $\tilde{b} \preceq \tilde{a}$
یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله $(FOPL)$ به صورت زیر داده شده است.

تعریف ۳.۳.۳. فرض کنید T یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد. یک نقطه $\bar{x}^\circ$ یک جواب نامغلوب [۳] موضعی برای مسئله $(FOPL)$ است اگر هیچ $\bar{x}^1 (\neq \bar{x}^\circ) \in N_\epsilon(\bar{x}^\circ) \cap T$ ای وجود نداشته باشد به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}^1) \preceq \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$ ، که در آن $N_\epsilon(\bar{x}^\circ)$ یک ϵ ـ همسایگی از $(\bar{x}^\circ)$ است.

۱.۳.۳ شرایط لازم و کافی بهینگی

شرایط لازم و کافی بهینگی مرتبه اول و دوم برای مسئله بهینه‌سازی نامقید حقیقی، که در [۶۱] ارائه شده، به صورت زیر می‌باشند.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید T یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد.

الف. $(FONC)$ فرض کنید f یک تابع به طور پیوسته روی T باشد. اگر x^* یک نقطه مینیمم موضعی از f بر روی T باشد، آنگاه $\nabla f(x^*) = \circ$.

ب. $(SONC)$ فرض کنید f تابع دو بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر روی T باشد. اگر x^* یک نقطه مینیمم موضعی f بر روی T باشد، آنگاه $\nabla^2 f(x^*)$ نیمه‌معین مثبت است .

ج. $(SOSC)$ فرض کنید f یک تابع دوبار به طور پیوسته مشتق‌پذیر روی T باشد . فرض کنید

۱. $\nabla f(x^*) = \circ$

۲. $\nabla^2 f(x^*)$ معین مثبت باشد،

آنگاه x^* یک نقطه مینیمم موضعی اکید f است.

در اینجا، شرایط لازم و کافی بهینگی را برای یافتن جواب های نامغلوب موضعی برای مسئله $(FOPL)$ اثبات می‌کنیم .به قضیه زیر از بهینه‌سازی کلاسیک، که در [۳] ارائه شده نیاز داریم:

قضیه ۲.۳.۳. [۳] فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ در $\bar{x}$ مشتق‌پذیر باشد . در صورتی‌که یک بردار $\bar{d}$ وجود داشته باشد به طوری که $\nabla f(\bar{x}).\bar{d} < \circ$، آنگاه یک $\delta > \circ$ وجود دارد به طوری که $f(\bar{x} + \lambda \bar{d}) < f(\bar{x})$ برای هر $\lambda \in (\circ, \delta)$. لذا $\bar{d}$ یک جهت نزولی f در $\bar{x}$ است.
شرط لازم مرتبه اول به صورت زیر است.

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید $\tilde{f} : T \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار پیوسته H ـ مشتق‌پذیر باشد، که در آن T یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ است. اگر $\bar{x}^\circ \in T$ یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله $(FOPL)$ باشد و برای هر جهت $\bar{d}$ و برای هر $\delta > \circ$ ، وجود داشته باشد $\lambda \in (\circ, \delta)$ به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}^\circ + \lambda.\bar{d})$ و $\tilde{f}(\bar{x}^\circ)$ قابل مقایسه باشند، آنگاه $\nabla \tilde{f}(\bar{x}^\circ) = \tilde{\circ}$.

[۳] nondominated solution

برهان. . فرض کنید که
$$\nabla\tilde{f}(\bar{x}^\circ) \neq \tilde{\circ}$$
آنگاه $\alpha_\circ \in [\circ,1]$ ای وجود دارد به طوری که
$$\nabla\tilde{f}^L_{\alpha_\circ}(\bar{x}^\circ) \neq \circ$$
یا
$$\nabla\tilde{f}^U_{\alpha_\circ}(\bar{x}^\circ) \neq \circ$$
بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید
$$\nabla\tilde{f}^L_{\alpha_\circ}(\bar{x}^\circ) \neq \circ$$
فرض کنید
$$\bar{d} = -\nabla\tilde{f}^L_{\alpha_\circ}(\bar{x}^\circ) \neq \circ$$
آنگاه داریم
$$\nabla\tilde{f}^L_{\alpha_\circ}(\bar{x}^\circ).\bar{d} = -\|\nabla\tilde{f}^L_{\alpha_\circ}(\bar{x}^\circ)\|^{2} < \circ$$
طبق قضیه ۲.۳.۳ ، یک $\delta > \circ$ ای وجود دارد به طوری که
$$\tilde{f}^L_{\alpha_\circ}(\bar{x}^\circ + \lambda\bar{d}) < \tilde{f}^L_{\alpha_\circ}(\bar{x}^\circ) \quad (۴.۳)$$
برای $\lambda \in (\circ,\delta)$. حالا بنا به فرض قضیه، برای هر جهت $\bar{d}$ و برای هر $\delta > \circ$، وجود دارد $\lambda \in (\circ,\delta)$ به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}^\circ+\lambda.\bar{d})$ و $\tilde{f}(\bar{x}^\circ)$ قابل مقایسه باشند. بنابراین، $\tilde{f}(\bar{x}^\circ+\lambda.\bar{d}) \preceq \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$ یا $\tilde{f}(\bar{x}^\circ) \preceq \tilde{f}(\bar{x}^\circ+\lambda.\bar{d})$. اما با توجه به (۴.۳) ، داریم
$$\tilde{f}(\bar{x}^\circ + \lambda.\bar{d}) \prec \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$$
که با این فرض که $\bar{x}^\circ$ یک جواب نامغلوب بوده در تناقض است . از اینرو،
$$\nabla\tilde{f}(\bar{x}^\circ) = \tilde{\circ}$$
□

ملاحظه ۱.۳.۳.
$$\nabla\tilde{f}(\bar{x}^\circ) = \tilde{\circ}$$
نتیجه می‌دهد
$$\nabla\tilde{f}^L_{\alpha}(\bar{x}^\circ) = \circ \qquad \text{و} \qquad \nabla\tilde{f}^U_{\alpha}(\bar{x}^\circ) = \circ$$
برای هر $\alpha \in [\circ,1]$ این نتیجه می‌دهد
$$\int_\circ^1 \nabla\tilde{f}^L_{\alpha}(\bar{x}^\circ)d\alpha = \circ \qquad \text{و} \qquad \int_\circ^1 \nabla\tilde{f}^U_{\alpha}(\bar{x}^\circ)d\alpha = \circ$$

یعنی

$$\int_{\circ}^{\text{۱}} \{\nabla \tilde{f}_{\alpha}^{L}(\bar{x}^{\circ}) + \nabla \tilde{f}_{\alpha}^{U}(\bar{x}^{\circ})\}.d\alpha = \circ$$

اکنون شرط لازم مرتبه دوم را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنید $\tilde{f}$ یک تابع فازی‌مقدار دو بار به طور پیوسته H ـ مشتق‌پذیر تعریف‌شده بر روی $T \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد. اگر $\bar{x}^{\circ}$ یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله $(FOPL)$ باشدو برای هر جهت $\bar{d}$ و برای هر $\delta > \circ$ ، وجود داشته باشد $\lambda \in (\circ, \delta)$ به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}^{\circ} + \lambda.\bar{d})$ و $\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})$ قابل مقایسه باشند، آنگاه $\nabla^{\text{۲}}\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})$ یک ماتریس فازی نیمه معین مثبت است

برهان. . نتیجه را با برهان خلف اثبات می‌کنیم. فرض کنید $\nabla^{\text{۲}}\tilde{f}(\bar{x}^{\circ})$ یک ماتریس فازی نیمه معین مثبت نباشد. آنگاه بنا به تعریف، $\alpha_{\circ} \in [\circ, \text{۱}]$ ای وجود دارد به طوری که

$$\bar{d}_{\circ}^{t}.\nabla^{\text{۲}}\tilde{f}_{\alpha_{\circ}}^{L}(\bar{x}).\bar{d}_{\circ} < \circ$$

یا

$$\bar{d}_{\circ}^{t}.\nabla^{\text{۲}}\tilde{f}_{\alpha_{\circ}}^{U}(\bar{x}).\bar{d}_{\circ} < \circ$$

برای یک جهت $\bar{d}$ بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنیم

$$\bar{d}_{\circ}^{t}.\nabla^{\text{۲}}\tilde{f}_{\alpha_{\circ}}^{L}(\bar{x}).\bar{d}_{\circ} < \circ \qquad (\text{۵.۳})$$

اکنون فرض کنید $\bar{x}(\beta) = \bar{x}^{\circ} + \beta\bar{d}$ و تابع مرکب زیر را تعریف کنید:

$$\phi_{\alpha}(\beta) = \tilde{f}_{\alpha}^{L}(\bar{x}^{\circ} + \beta\bar{d})$$

برای هر $\alpha \in [\circ, \text{۱}]$ از آنجایی که $\tilde{f}$ یک تابع فازی مقدار دوبار به طور پیوسته H ـ مشتق‌پذیر در T است، بنابه به گزاره‌های ۱.۴.۱ و ۲.۴.۱ $\tilde{f}_{\alpha}^{L}$ و $\tilde{f}_{\alpha}^{U}$ نیز برای هر $\alpha \in [\circ, \text{۱}]$ ، توابع دوبار به طور پیوسته مشتق‌پذیر در T هستند. آنگاه بنا به قضیه تیلور داریم،

$$\phi_{\alpha}(\beta) = \phi_{\alpha}(\circ) + \phi_{\alpha}'(\circ).\beta + \phi_{\alpha}''(\circ).\frac{\beta^{\text{۲}}}{\text{۲}} + O(\beta^{\text{۲}})$$

برای هر $\alpha \in [\circ, \text{۱}]$. اکنون از آن‌جایی که $\bar{x}^{\circ}$ یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله $(FOPL)$ است، آنگاه مطابق قضیه ۳.۳.۳ داریم

$$\phi_{\alpha}'(\circ) = \bar{d}.\nabla\tilde{f}_{\alpha}^{L}(\bar{x}^{\circ}) = \circ$$

برای هر $\alpha \in [\circ, \text{۱}]$. از اینرو،

$$\phi_{\alpha}(\beta) - \phi_{\alpha}(\circ) = \phi_{\alpha}''(\circ).\frac{\beta^{\text{۲}}}{\text{۲}} + O(\beta^{\text{۲}})$$

از آنجایی که $\phi''_\alpha(\circ) = \bar{d}^t.\nabla^{\text{۲}}\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ).\bar{d}$ ،

$$\phi_\alpha(\beta) - \phi_\alpha(\circ) = (\bar{d}^t.\nabla^{\text{۲}}\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ).\bar{d})\frac{\beta^{\text{۲}}}{\text{۲}} + O(\beta^{\text{۲}})$$

با در نظرگرفتن $\alpha = \alpha_\circ$ و $\bar{d} = \bar{d}_\circ$ ،و با توجه به رابطه (۵.۳) و برای β به قدر کافی کوچک داریم:

$$\phi_{\alpha_\circ}(\beta) - \phi_{\alpha_\circ}(\circ) < \circ$$

به این معنا که،

$$\tilde{f}^L_{\alpha_\circ}(\bar{x}^\circ + \beta\bar{d}_\circ) < \tilde{f}^L_{\alpha_\circ}(\bar{x}^\circ) \qquad (\text{۶.۳})$$

حالا β به‌گونه‌ای انتخاب شده است که $\tilde{f}(\bar{x}^\circ + \beta\bar{d}_\circ)$ و $\tilde{f}(\bar{x}^\circ)$ قابل مقایسه باشند . یعنی

$$\tilde{f}(\bar{x}^\circ + \beta\bar{d}_\circ) \preceq \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$$

یا $\tilde{f}(\bar{x}^\circ + \beta\bar{d}_\circ) \succeq \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$. اما $\tilde{f}(\bar{x}^\circ + \beta\bar{d}_\circ) \succeq \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$ مطابق (۶.۳) شدنی نیست . از اینرو،

$$\tilde{f}(\bar{x}^\circ + \beta\bar{d}_\circ) \preceq \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$$

که با این فرض که، $\bar{x}^\circ$ یک جواب نامغلوب موضعی بوده است در تناقض است . بنابراین، $\nabla^{\text{۲}}\tilde{f}(\bar{x}^\circ)$ یک ماتریس فازی نیمه معین مثبت است. □

حالا، شرط کافی مرتبه دوم را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵.۳.۳. فرض کنید f یک تابع دوبار به طور پیوسته مشتق‌پذیر روی $T \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد . فرض کنید که

۱. $\nabla\tilde{f}(\bar{x}^\circ) = \circ$

۲. $\nabla^{\text{۲}}\tilde{f}(\bar{x}^\circ)$ یک ماتریس معین مثبت باشد .

آنگاه $\bar{x}^\circ$ یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله $(FOPL)$ است

برهان. این نتیجه را بوسیله برهان خلف اثبات می‌کنیم. فرض کنید $\bar{x}^\circ \in T$ یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله $(FOPL)$ نباشد. آنگاه، برای هر $\epsilon > \circ$ وجود دارد $\bar{x}^{\text{۱}}(\neq \bar{x}^\circ) \in N_\epsilon(\bar{x}^\circ) \cap T$ به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}^{\text{۱}}) \preceq \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$. به این معنا که، $\bar{x}^{\text{۱}} \in N_\epsilon(\bar{x}^\circ) \cap T$ ای وجود دارد به طوری که

$$\tilde{f}(\bar{x}^{\text{۱}})^L_\alpha \leq \tilde{f}(\bar{x}^\circ)^L_\alpha \quad \text{و} \quad \tilde{f}(\bar{x}^{\text{۱}})^U_\alpha \leq \tilde{f}(\bar{x}^\circ)^U_\alpha \qquad (\text{۷.۳})$$

برای هر $\alpha \in [\circ, \text{۱}]$. حالا از آنجایی که $\tilde{f}$ یک تابع دوباربه طور پیوسته H ــ مشتق پذیر است، $\tilde{f}^L_\alpha$ و $\tilde{f}^U_\alpha$ نیز برای هر $\alpha \in [\circ, \text{۱}]$ ، توابع دوباربه طور پیوسته مشتق‌پذیر هستند . با توجه به

فرض ۲ و نامساوی ریلی (مراجعه کنید به قضیه ۳.۳.۲ در فصل ۲)، نتیجه می‌گیریم که اگر $\bar{d} \neq ۰$ ، آنگاه

$$۰ < \lambda_{\min}(\nabla^۲ \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ))\|\bar{d}\|^۲ \leq \bar{d}^t.\nabla^۲ \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ).\bar{d}$$

. طبق قضیه تیلور و فرض ۱ داریم:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ + \bar{d}) - \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) &= \frac{۱}{۲}\bar{d}^t.\nabla^۲ \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ).\bar{d} + O(\|\bar{d}\|^۲) \\
&\geq \frac{\lambda_{\min}(\nabla^۲ \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ))}{۲}\|\bar{d}\|^۲ + O(\|\bar{d}\|^۲) \\
&> ۰
\end{aligned}$$

برای هر $\bar{d}$ که $\|\bar{d}\|$ به قدر کافی کوچک باشد . حالا $\bar{x}^۱$ را خیلی نزدیک به $\bar{x}^\circ$ انتخاب کنید بطوریکه $\bar{d} = \bar{x}^۱ - \bar{x}^\circ$ به قدر کافی کوچک باشد و در نتیجه داریم،

$$\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^۱) - \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) = \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ + \bar{d}) - \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) > ۰$$

به این معنا که،

$$\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^۱) > \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)$$

این با نامساوی (۷.۳) در تناقض است . از اینرو نتیجه اثبات می‌شود. □

ما دو مثال را جهت توضیح نتایج فوق بررسی می‌کنیم .

مثال ۱.۳.۳. مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
&\min \tilde{f}(x_۱, x_۲) \\
&s.t. \quad \bar{x} = (x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲
\end{aligned}$$

که در آن $\tilde{f} : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow F(\mathbb{R})$ بصورت $\tilde{f}(x_۱, x_۲) = (۱,۲,۴) \odot x_۱^۲ \oplus (۱,۲,۴) \odot x_۲^۲ \oplus (۱,۳,۵)$ تعریف شده است و $(۱,۲,۴)$ و $(۱,۳,۵)$ اعداد فازی مثلثی هستند. با توجه به شرط لازم مرتبه اول، داریم

$$\int_۰^۱ \{\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) + \nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)\}.d\alpha = ۰$$

داریم $\tilde{f}^L_\alpha(x_۱, x_۲) = (۱+\alpha)x_۱^۲ + (۱+\alpha)x_۲^۲ + (۱+۲\alpha)$ و $\tilde{f}^U_\alpha(x_۱, x_۲) = (۴-۲\alpha)x_۱^۲ + (۴-۲\alpha)x_۲^۲ + (۵-۲\alpha)$. از اینرو،

$$\nabla \tilde{f}^L_\alpha(x_۱, x_۲) = \begin{pmatrix} ۲(۱+\alpha)x_۱ \\ ۲(۱+\alpha)x_۲ \end{pmatrix}$$

و

$$\nabla \tilde{f}^U_\alpha(x_۱, x_۲) = \begin{pmatrix} ۲(۴-۲\alpha)x_۱ \\ ۲(۴-۲\alpha)x_۲ \end{pmatrix}$$

از اینرو،

$$\int_{\circ}^{۱}\{\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)+\nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)\}.d\alpha=\begin{pmatrix}۹x_۱\\ ۹x_۲\end{pmatrix}=\circ$$

یعنی، $x^\circ=(x_۱,x_۲)=(\circ,\circ)$. حالا به منظور بررسی شرایط لازم و کافی مرتبه دوم، ماتریس هسیان فازی $\tilde{f}(x)$ بدست می‌آوریم

. ماتریس‌های α ـ سطح ماتریس هسیان فازی عبارتند از:

$$\nabla^۲\tilde{f}^L_\alpha(x)=\begin{pmatrix}۲(۱+\alpha) & \circ\\ \circ & ۲(۱+\alpha)\end{pmatrix}$$

و

$$\nabla^۲\tilde{f}^U_\alpha(x)=\begin{pmatrix}۲(۴-۲\alpha) & \circ\\ \circ & ۲(۴-۲\alpha)\end{pmatrix}$$

از آنجا که هر دو ماتریس α ـ سطح $\nabla^۲\tilde{f}^L_\alpha(x)$ و $\nabla^۲\tilde{f}^U_\alpha(x)$ برای هر $\alpha\in[\circ,۱]$ ماتریس‌های معین مثبت هستند،بنابراین، $x^\circ=(\circ,\circ)$ شرط لازم و کافی مرتبه دوم را برای یک جواب نامغلوب موضعی دارا است . از اینرو، $x^\circ=(\circ,\circ)$ یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله داده شده است .

حالا مثال دیگری را بررسی می‌کنیم .

مثال ۲.۳.۳.

$$\min \tilde{f}(x_۱,x_۲)$$
$$S.t.\quad \bar{x}=(x_۱,x_۲)\in\mathbb{R}^۲$$

که در آن $\tilde{f}:\mathbb{R}^۲\longrightarrow F(\mathbb{R})$ به صورت $\tilde{f}(x_۱,x_۲)=(۱,۲,۴)\odot x_۱^۳\oplus(۱,۲,۴)\odot x_۲^۳\oplus(۱,۳,۵)$ تعریف شده است، که در آن $(۱,۲,۴)$ و $(۱,۳,۵)$ اعداد فازی مثلثی هستند . با توجه به شرط لازم مرتبه اول، داریم

$$\int_{\circ}^{۱}\{\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)+\nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)\}.d\alpha=\circ$$

در اینجا، $\tilde{f}^L_\alpha(x_۱,x_۲)=(۱+\alpha)x_۱^۳+(۱+\alpha)x_۲^۳+(۱+۲\alpha)$ و $\tilde{f}^U_\alpha(x_۱,x_۲)=(۴-۲\alpha)x_۱^۳+(۴-۲\alpha)x_۲^۳+(۵-۲\alpha)$. از این‌رو

$$\nabla\tilde{f}^L_\alpha(x_۱,x_۲)=\begin{pmatrix}۳(۱+\alpha)x_۱^۲\\ ۳(۱+\alpha)x_۲^۲\end{pmatrix}$$

و

$$\nabla\tilde{f}^U_\alpha(x_۱,x_۲)=\begin{pmatrix}۳(۴-۲\alpha)x_۱^۲\\ ۳(۴-۲\alpha)x_۲^۲\end{pmatrix}$$

لذا

$$\int_{0}^{1} \{\nabla \tilde{f}^{L}_{\alpha}(\bar{x}^{\circ}) + \nabla \tilde{f}^{U}_{\alpha}(\bar{x}^{\circ})\}.d\alpha = \begin{pmatrix} 13/5 x_1^2 \\ 13/5 x_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

یعنی $x^{\circ} = (x_1, x_2) = (0, 0)$. حالا به‌منظور بررسی شرایط لازم و کافی مرتبه دوم، به ماتریس هسیان فازی $\tilde{f}(x)$ را بدست می‌آوریم . ماتریس‌های α ـ سطح ماتریس هسیان فازی عبارتند از:

$$\nabla^2 \tilde{f}^{L}_{\alpha}(x) = \begin{pmatrix} 6(1+\alpha) & 0 \\ 0 & 6(1+\alpha) \end{pmatrix}$$

و

$$\nabla^2 \tilde{f}^{U}_{\alpha}(x) = \begin{pmatrix} 6(4-2\alpha) & 0 \\ 0 & 6(4-2\alpha) \end{pmatrix}$$

از آنجا که هر دو ماتریس α ـ سطح $\nabla^2 \tilde{f}^{L}_{\alpha}(x)$ و $\nabla^2 \tilde{f}^{U}_{\alpha}(x)$ برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ،ماتریس‌های نیمه معین مثبت هستند،بنابراین، $x^{\circ} = (0, 0)$ شرط لازم مرتبه دوم را برآورده می‌سازد ولی شرط کافی برای یک جواب نامغلوب موضعی را برآورده نمی‌سازد، چرا که هیچیک از ماتریس‌های α ـ سطح در نقطه $x^{\circ} = (0, 0)$ معین مثبت نیستند. بنابراین $x^{\circ} = (0, 0)$ یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله داده شده نیست.

۴.۳ مسئله بهینه‌سازی فازی مقید

حالا شرایط بهینگی لازم و کافی کان‌ـ تاکر را جهت دستیابی به یک جواب نامغلوب برای مسئله بهینه‌سازی فازی مقید غیرخطی اثبات می‌کنیم .

۱.۴.۳ تعریف مسئله

فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ یک زیرمجموعه باز در $\mathbb{R}^n$ و $\tilde{f}$ ، $\tilde{g}_j$ ، برای $j = 1, \cdots, m$ توابع مقدار فازی تعریف‌شده بر روی X باشند. مسئله بهینه‌سازی فازی غیرخطی مقید $(NCFOP)$ [۴] زیر را در نظر بگیرید

$$\min \tilde{f}(\bar{x}) = \tilde{f}(x_1, \cdots, x_n)$$
$$s.t. \quad \tilde{g}_j(\bar{x}) \preceq \tilde{0}, j = 1, \cdots, m$$

که در آن $\tilde{0}$ یک عدد فازی تعریف‌شده به صورت $\tilde{0}(r) = 1$ اگر $r = 0$ و $\tilde{0}(r) = 0$ اگر $r \neq 0$ می‌باشد و مجموعه سطح آن برای $\alpha \in [0, 1]$ به شکل $\tilde{0}_{\alpha} = 0$ است. برای مسئله $(NCFOP)$ جواب مورد نظر به صورت یک جواب نامغلوب ضعیف مطابق زیر تعریف شده است.

[۴] Constrained fuzzy Optimization Problem

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنید $\bar{x}^\circ \in X^1 = \{\bar{x} \in X : \tilde{g}_j(\bar{x}) \preceq \tilde{\circ}, j = 1, \cdots, m\}$. گوییم $\bar{x}^\circ$ یک جواب نامغلوب برای مسئله $(NCFOP)$ است اگر هیچ $\bar{x}^1 (\neq \bar{x}^\circ) \in X_1$ ای وجود نداشته باشد به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}^1) \preceq \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$. همچنین $\bar{x}^\circ$ یک جواب نامغلوب ضعیف [۵] است اگر هیچ $\bar{x}^1 \in X_1$ ای وجود نداشته باشد به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}^1) \prec \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$. به این معنا که، $\bar{x}^\circ$ یک جواب نامغلوب ضعیف است اگر هیچ $\bar{x}^1 \in X_1$ ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$\begin{cases} \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^1) < \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) \\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^1) < \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^1) \leq \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) \\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^1) < \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^1) < \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) \\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^1) \leq \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ) \end{cases}$$

برای هر $\alpha \in [\circ, 1]$.

۲.۴.۳ شرایط لازم و کافی بهینگی

فرض کنید f و $\tilde{g}_j$،$j = 1, \cdots, m$ توابع حقیقی‌مقدار تعریف‌شده بر روی $T \subset \mathbb{R}^n$ باشند. آنگاه مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} &\min f(\bar{x}) = f(x_1, \cdots, x_n) \\ &s.t. \quad g_j(\bar{x}) \leq \circ, j = 1, \cdots, m \end{aligned} \tag{P}$$

شرایط بهینگی کان‌ـ تاکر برای مسئله (P) توسط رانگاراجان [۶] در [۷۲] به صورت زیر بیان شده‌است:

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید f تابعی به طور پیوسته مشتق پذیر و محدب باشد که از T به $\mathbb{R}$ نگاشت می‌شود، که در آن $T \subset \mathbb{R}^n$ باز و محدب است و برای $j = 1, \cdots, m$، توابع محدودیت $g_j : T \longrightarrow \mathbb{R}$، محدب به طور پیوسته مشتق پذیر باشند. فرض کنید $\bar{x} \in T$ ای وجود داشته باشد به طوری که $g_j(\bar{x}) < \circ, j = 1, \cdots, m$. آنگاه $\bar{x}^\circ$ یک جواب بهینه برای مسئله (P) بر روی مجموعه شدنی $\{\bar{x} \in T : g_j(\bar{x}) \leq \circ, j = 1, \cdots, m\}$ است اگر و تنها اگر ضریب‌های $\circ \leq \mu_j \in \mathbb{R}$،$j = 1, \cdots, m$ وجود داشته باشند، به طوری که شرایط مرتبه اول کان‌ـ تاکر زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned} &\nabla f(\bar{x}^\circ) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}^\circ) = \circ \\ &\mu_j g_j(\bar{x}^\circ) = \circ \qquad \forall j = 1, \cdots, m. \end{aligned}$$

حالا شرایط بهینگی کان‌ـ تاکر را برای مسئله $(NCFOP)$ ارائه می‌دهیم .

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید $\tilde{f} : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع هدف فازی‌مقدار محدب و به طورپیوسته H ـ مشتق پذیر باشد، که در آن $X \subset \mathbb{R}^n$ باز و محدب است .همچنین فرض کنید برای

[۵] Weak non-dominated solution

[۶] S.Rangarajan

$j=1,\cdots,m$ ، توابع محدودیت‌های فازی‌مقدار $\tilde{g}_j : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ محدب و به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر باشند . فرض کنید $X_1 = \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}_j(\bar{x}) \preceq \tilde{0}, j=1,\cdots,m$ یک مجموعه شدنی برای مسئله $(NCFOP)$ باشد و فرض کنید $\bar{x}^\circ \in X$. فرض کنید $\bar{x} \in X$ ای وجود دارد به طوری که $\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}) < 0, j=1,\cdots,m$. آنگاه $\bar{x}^\circ$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ است اگر و تنها اگر ضرایب $0 \leq \mu_j \in \mathbb{R}, j=1,\cdots,m$ وجود داشته باشند به طوری که شرایط مرتبه اول کان ـ تاکر صادق باشند:

$$\int_0^1 \nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)d\alpha + \int_0^1 \nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)d\alpha + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla \tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}^\circ) = 0;$$

$$\mu_j.\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}^\circ) = 0 \qquad \forall j = 1,\cdots,m.$$

برهان. لازم. تابع جدید زیر را تعریف می‌کنیم:

$$F(\bar{x}) = \int_0^1 \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})d\alpha + \int_0^1 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})d\alpha. \tag{۸.۳}$$

از آنجایی که $\tilde{f}$ یک تابع محدب وبه طور پیوسته H ـ مشتق پذیر است، با توجه به گزاره های ۵.۴.۱ و ۱.۷.۱ نتیجه می‌شود که $F(\bar{x})$ یک تابع حقیقی مقدار محدب وبه طور پیوسته مشتق‌پذیر در X است . از آن‌جایی که $\bar{x}^\circ$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای $(NCFOP)$ است . آنگاه هیچ $\bar{x}^1 \in X_1$ ای وجود ندارد به طوری که

$$\begin{cases} \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^1) < \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) \\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^1) < \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^1) \leq \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) \\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^1) < \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^1) < \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) \\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^1) \leq \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ) \end{cases}$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$. بنابراین، هیچ $\bar{x}^1 \in X_1$ ای وجود ندارد به طوری که

$$\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^1) + \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^1) < \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) + \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$ در نتیجه هیچ $\bar{x}^1 \in X_1$ ای وجود ندارد به طوری که

$$\int_0^1 \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^1)d\alpha + \int_0^1 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^1)d\alpha < \int_0^1 \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)d\alpha + \int_0^1 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)d\alpha$$

به این معنا که، هیچ $\bar{x}^1 \in X_1$ وجود ندارد به طوری که

$$F(\bar{x}^1) < F(\bar{x}^\circ)$$

بنابراین،

$$F(\bar{x}^\circ) \leq F(\bar{x}^1)$$

برای هر $\bar{x}^1 \in X_1$. از آنجایی که $\tilde{g}_j$ توابع محدب و به طور پیوسته H ـ مشتق پذیر برای $j=1,\cdot,m$ هستند، نتیجه می‌گیریم که $\tilde{g}^L_{j\circ}$ و $\tilde{g}^U_{j\circ}$ توابع حقیقی مقدار محدب و به طور پیوسته

مشتق‌پذیر برای هر $\alpha \in [0,1]$ و $j = 1, \cdots, m$ هستند . با توجه به تعریف ترتیب جزئی، داریم

$$\begin{aligned} X_1 &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}_j(\bar{x}) \preceq \tilde{0}, j = 1, \cdots, m\} \\ &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}^L_{j\alpha}(\bar{x}) \leq 0, \tilde{g}^U_{j\alpha}(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\} \\ &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}^U_{j\alpha}(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\} \\ &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\} \end{aligned}$$

بنابراین، $\bar{x}^\circ \in X_1 = \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\}$ و $\bar{x} \in X$ ای وجود دارد به طوری که $\tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}) < 0, j = 1, \cdots, m$. بنابراین مسئله ما تبدیل به یک مسئله بهینه‌سازی دارای تابع هدف حقیقی $F(\bar{x})$ تحت محدودیت‌های حقیقی می‌شود. بنابراین، مطابق قضیه ۱.۴.۳ ضرایب $0 \leq \mu_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, m$ وجود دارند به طوری که شرایط کان‌ـ تاکر مرتبه اول زیربرقرار باشند:

$$\nabla F(\bar{x}^\circ) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}^\circ) = 0$$

$$\mu_j \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}^\circ) = 0 \forall j = 1, \cdots, m.$$

اما داریم: $F(\bar{x}) = \int_0^1 \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})d\alpha + \int_0^1 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})d\alpha$. لذا شرایط کان‌ـ تاکر را به صورت زیر برای مسئله $(NCFOP)$ به دست می‌آوریم

$$\int_0^1 \nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)d\alpha + \int_0^1 \nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)d\alpha + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}^\circ) = 0;$$

$$\mu_j . \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}^\circ) = 0 \forall j = 1, \cdots, m.$$

کافی: این بخش را با استفاده از برهان خلف اثبات می‌کنیم. فرض کنید که $\tilde{x}^\circ$ یک جواب نامغلوب ضعیف نباشد. آنگاه یک $\tilde{x}^1 \in X_1$ وجود دارد به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}^1) \prec \tilde{f}(\bar{x}^\circ)$. بنابراین، داریم

$$\int_0^1 \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^1)d\alpha + \int_0^1 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^1)d\alpha < \int_0^1 \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)d\alpha + \int_0^1 \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)d\alpha$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$. مطابق (۸.۳) داریم

$$F(\bar{x}^1) < F(\bar{x}^\circ) \tag{۹.۳}$$

از آنجا که F یک تابع محدب و به طور پیوسته مشتق‌پذیر است و علاوه‌براین،

$$\bar{x}^\circ \in X_1 = \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\}$$

با توجه به شرایط اول و دوم این قضیه، شرایط جدید زیر را به دست می‌آوریم:

$$\nabla F(\bar{x}^\circ) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}^\circ) = 0$$

$$\mu_j \tilde{g}^U_{j^\circ}(\bar{x}^\circ) = \circ \forall j = ۱, \cdots, m.$$

با توجه به قضیه ۱.۴.۳ مشاهده می‌شود که $\bar{x}^\circ$ یک جواب بهینه برای تابع هدف حقیقی F با محدودیت‌های حقیقی $\tilde{g}^U_{j^\circ}(\bar{x}^\circ)$ برای $j = ۱, \cdots, m$ باشد، یعنی $F(\bar{x}^\circ) \leq F(\bar{x}^۱)$ ، که با (۹.۳) در تناقض است. لذا اثبات ما کامل شد. $\square$

۳.۴.۳ مثال‌ها

در ابتدا یک مسئله بهینه‌سازی فازی دارای یک تابع هدف فازی‌مقدار و محدودیت‌های حقیقی را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱.۴.۳.

$$\begin{aligned} &\min \tilde{f}(x_۱, x_۲) = (\tilde{a} \odot x_۱^۲) \oplus (\tilde{b} \odot x_۲^۲) \\ s.t. \quad &g(x_۱, x_۲) = (x_۱ - ۲)^۲ + (x_۲ - ۲)^۲ \leq ۱ \end{aligned}$$

که در آن $\tilde{a} = (۱, ۲, ۳)$ و $\tilde{b} = (\circ, ۱, ۲)$ اعداد فازی مثلثی تعریف‌شده بر روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر هستند:

$$\tilde{a}(r) = \begin{cases} (r - ۱) & ۱ \leq r \leq ۲ \\ (۳ - r) & ۲ < r \leq ۳ \\ \circ & \text{درغیر این‌صورت} \end{cases}$$

و

$$\tilde{b}(r) = \begin{cases} r & \circ \leq r \leq ۱ \\ (۲ - r) & ۱ < r \leq \\ \circ & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

با استفاده از تعریف ۱.۴.۱ داریم

$$\tilde{f}^L_\alpha(x_۱, x_۲) = (۱ + \alpha)x_۱^۲ + \alpha x_۲^۲, \qquad \tilde{f}^U_\alpha(x_۱, x_۲) = (۳ - \alpha)x_۱^۲ + (۲ - \alpha)x_۲^۲ \forall \alpha \in [\circ, ۱]$$

داریم:

$$\nabla \tilde{f}^L_\alpha(x_۱, x_۲) = \begin{pmatrix} ۲x_۱(\alpha + ۱) \\ ۲x_۲\alpha \end{pmatrix}$$

و

$$\nabla \tilde{f}^U_\alpha(x_۱, x_۲) = \begin{pmatrix} ۲x_۱(۳ - \alpha) \\ ۲x_۲(۲ - \alpha) \end{pmatrix}$$

و

$$\nabla g(x_۱, x_۲) = \begin{pmatrix} ۲(x_۱ - ۲) \\ ۲(x_۲ - ۲) \end{pmatrix}$$

بنابراین، داریم

$$\int_{\circ}^{1} \nabla \tilde{f}_{\alpha}^{L}(x_1, x_2) d\alpha = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\circ}^{1} \nabla \tilde{f}_{\alpha}^{U}(x_1, x_2) d\alpha = \begin{pmatrix} 5x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

با توجه به قضیه ۲.۴.۳ شرایط کان_ تاکر زیر را داریم

$$\begin{aligned} &8x_1 + 2\mu(x_1 - 2) = 0 \\ &4x_2 + 2\mu(x_2 - 2) = 0 \\ &\mu((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

با حل این معادلات، جواب $(x_1, x_2) = (\frac{6}{5}, \frac{3}{2})$ و $\mu = 6$ را به دست می‌آوریم . با توجه به قضیه ۲.۴.۳ ، نتیجه می‌شود که $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{6}{5}, \frac{3}{2}))$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله داده شده است . همچنین حداقل مقدار تابع هدف $\tilde{f}_{min} = (1/44, 5/13, 8/82)$ است و می‌توان مقدار غیرفازی ۵/۱۳ را با استفاده از روش مرکز سطح به دست آورد [۴۵].

حالا همان مسئله بهینه‌سازی فازی دارای تابع هدف فازی‌مقدار با محدودیت‌های فازی را حل می‌کنیم .

مثال ۲.۴.۳.

$$\begin{aligned} &\min \tilde{f}(x_1, x_2) = (\tilde{a} \odot x_1^2) \oplus (\tilde{b} \odot x_2^2) \\ &s.t. \quad g(x_1, x_2) = (\tilde{b} \odot (x_1 - 2)^2) \oplus (x_2 - 2)^2 \preceq \tilde{c} \end{aligned}$$

که در آن $\tilde{a} = (1, 2, 3)$ و $\tilde{b} = (0, 1, 2)$ و $\tilde{c} = (0, 2, 4)$ اعداد فازی مثلثی تعریف‌شده بر روی $\mathbb{R}$ به فرم زیر هستند:

$$\tilde{a}(r) = \begin{cases} (r-1) & 1 \le r \le 2 \\ (3-r) & 2 < r \le 3 \\ 0 & \text{درغیر این‌صورت} \end{cases}$$

و

$$\tilde{b}(r) = \begin{cases} r & 0 \le r \le 1 \\ (2-r) & 1 < r \le 2 \\ 0 & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

و

$$\tilde{c}(r) = \begin{cases} \frac{r}{2} & 0 \le r \le 2 \\ \frac{(4-r)}{2} & 2 < r \le 4 \\ 0 & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

با استفاده از تعریف ۱.۴.۱ داریم:

$$\tilde{f}^L_\alpha(x_1,x_2)=(1+\alpha)x_1^2+\alpha x_2^2,\qquad \tilde{f}^U_\alpha(x_1,x_2)=(3-\alpha)x_1^2+(2-\alpha)x_2^2\forall\alpha\in[0,1]$$

علاوه‌براین

$$\tilde{g}^U_\alpha(x_1,x_2)=(2-\alpha)(x_1-2)^2+(2-\alpha)(x_2-2)^2\leq(4-2\alpha)\forall\in[0,1]$$

از اینرو

$$\tilde{g}^U_0(x_1,x_2)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2\leq 2$$

حالا داریم:

$$\nabla\tilde{f}^L_\alpha(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2x_1(\alpha+1)\\ 2x_2\alpha\end{pmatrix}$$

و

$$\nabla\tilde{f}^U_\alpha(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2x_1(3-\alpha)\\ 2x_2(2-\alpha)\end{pmatrix}$$

و

$$\nabla g(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2(x_1-2)\\ 2(x_2-2)\end{pmatrix}$$

. بنابراین، داریم:

$$\int_0^1\nabla\tilde{f}^L_\alpha(x_1,x_2)d\alpha=\begin{pmatrix}3x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

و

$$\int_0^1\nabla\tilde{f}^U_\alpha(x_1,x_2)d\alpha=\begin{pmatrix}5x_1\\ 3x_2\end{pmatrix}$$

با توجه به قضیه ۲.۴.۳ شرایط کان_تاکر زیر را داریم

$$\begin{aligned}&8x_1+2\mu(x_1-2)=0\\ &4x_2+2\mu(x_2-2)=0,\\ &\mu((x_1-2)^2+(x_2-2)^2-2)=0.\end{aligned}$$

با حل این معادلات، جواب $(x_1,x_2)=(\frac{(-6+2\sqrt{41})}{(1+\sqrt{41})},\frac{(-6+2\sqrt{41})}{(-1+\sqrt{41})})$ و $\mu=-3+\sqrt{41}$ را به دست می‌آید . با توجه به قضیه ۲.۴.۳ نتیجه می‌گیریم که $(x_1^*,x_2^*)=(\frac{(-6+2\sqrt{41})}{(1+\sqrt{41})},\frac{(-6+2\sqrt{41})}{(-1+\sqrt{41})})$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله داده شده است . همچنین حداقل مقدار تابع هدف برابر

$$\tilde{f}_{min}=(0/8453,3/2773,5/7094)$$

می‌باشد و می‌توان مقدار غیرفازی ۳/۲۷۷۳ آن را با استفاده از روش مرکز سطح پیدا کرد.

ملاحظه ۱.۴.۳. با مقایسه مقدار مینیمم غیرفازی توابع هدف در مثال ۱.۴.۳ و ۲.۴.۳ مشاهده می‌کنیم که اگر مسئله بهینه‌سازی فازی هم با محدودیت‌های فازی در نظر گرفته شود، اثر معناداری بر روی حداقل مقدار تابع هدف فازی به وجود می‌آید . علاوه‌براین، اگر مسئله بهینه‌سازی فازی را با محدودیت‌های فازی در نظر بگیریم، آنگاه نمی‌توانیم قضیه ۶.۲ در [۱۰۵] را جهت یافتن جواب نامغلوب به کار ببریم . در این‌صورت، نتیجه بدست آمده ما جهت دستیابی به یک جواب بسیار سودمند خواهد بود.

۴.۴.۳ مثال کاربردی

در اینجا، یک مسئله بهینه‌سازی فازی غیرخطی را بعنوان یک مطالعه موردی مورد بررسی قرار می‌دهیم که توصیف‌کننده یک وضع ممکن در یک شرکت صادراتی است . این مسئله به صورت زیر است:

دو محصول A و B باید با استفاده از دو فرآیند متفاوت (p_1, p_2) بمنظور صادرات تولید شوند . تولید یک واحد از محصول $A(B)$ در حدود ۱۰ (حدود ۶) دقیقه زمان پردازش برای فرآیند P_1 و در حدود ۵ (حدود ۱۰) دقیقه برای فرآیند P_2 نیاز دارد. کل زمان در دسترس برای فرآیند P_1 حداقل ۲۰۰۰ دقیقه بوده که تا ۲۰۶۴ دقیقه هم قابل افزایش است و با احتمال کاهش خطی و زمان در دسترس در فرآیند P_2 حداقل ۲۰۵۰ دقیقه است که با کاهش خطی می‌توان آن را تا ۲۱۲۴ دقیقه افزایش داد . هنگامی که این محصولات در خارج از کشور به فروش می‌رسند، محصول $A(B)$ سودی در حدود ۲۰ (حدود ۳۲) در هر واحد دارد . تخفیف حدود ۴ درصد (حدود ۳ درصد) از کل مقدار خریداری شده از محصول $A(B)$ در قیمت فروش واحد هر واحد محصول $A(B)$ داده شده است. مدیران قصد بیشینه‌سازی سود را دارند . در اینجا، پارامترهای مورد نظر را بر حسب زمان‌های پردازش در قسمت‌های مختلف انتخاب می‌کنیم به گونه ای که سود حاصل از فروش محصولات به جای مقدار دقیق به صورت تقریبی در نظر گرفته می‌شوند . مسئله فازی مورد نظر را می‌توان به شکل زیر فرموله کرد:

$$\max \widetilde{20} \odot x_1 \oplus \widetilde{32} \odot x_2 \ominus \widetilde{0.04} \odot x_1^2 \ominus \widetilde{0.03} \odot x_2^2$$

تحت محدودیت‌های:

$$\tilde{10} \odot x_1 \oplus \tilde{6} \odot x_2 \preceq \widetilde{2000}$$

$$\tilde{5} \odot x_1 \oplus \tilde{10} \odot x_2 \preceq \widetilde{2050}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

که در آن $\widetilde{20} = (18, 20, 21)$، $\widetilde{32} = (31, 32, 34)$ $\widetilde{0.04} = (0.03, 0./4, 0.05)$، $\widetilde{0.03} = (0.02, 0.03, 0.05)$، $\tilde{10} = (9, 10, 11)$، $\tilde{5} = (4, 5, 6)$ و $\tilde{6} = (5, 6, 7)$ اعداد فازی مثلثی و $\widetilde{2000}$ و $\widetilde{2050}$ اعداد فازی

دارای توابع عضویت زیر هستند:

$$\mu_{\widetilde{۲۰۰۰}}(r) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leq r \leq ۲۰۰۰ \\ \frac{۲۰۶۴-r}{۶۴} & ۲۰۰۰ < r \leq ۲۰۶۴ \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

و

$$\mu_{\widetilde{۲۰۵۰}}(r) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leq r \leq ۲۰۵۰ \\ \frac{۲۱۲۴-r}{۷۴} & ۲۰۵۰ < r \leq ۲۱۲۴ \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

با استفاده از شرایط لازم و کافی کان_ تاکر فوق جواب نامغلوب ضعیف $x_1 = ۲۴۶/۸۷۵$ و $x_2 = ۴۹۶/۱۵$ برای مسئله بهینه‌سازی فازی داده شده بدست می‌آید .

فصل ۴

مسئله بهینگی فازی تحت تحدب تعمیم یافته

۱.۴ معرفی

ماجامدار [1] شرایط کافی بهینگی را برای مسائل بهینه سازی چند هدفه با استفاده از مفاهیم تحدب و تحدب تعمیم یافته در مقاله‌اش به اثبات رسانده است [۶۲] .وو [2] شرایط کافی بهینگی را برای یک مسئله بهینه‌سازی شامل تابع هدف فازی مقدار و محدودیت‌های واقعی با استفاده از تابع هدف محدب نما اثبات کرده است [۱۰۹] .با استفاده از این رویکرد [۶۲] ، در این فصل ما شرایط کافی بهینگی را برای یک جواب بهینه یک مسئله فازی شامل تابع هدف فازی مقدار ومحدودیت‌های فازی تحت مفهوم تحدب و تحدب تعمیم یافته اثبات می‌کنیم.

[1] Majumdar
[2] Wu

۲.۴ مسئله وجواب آن

مسئله بهینه سازی فازی غیرخطی مقید $(NCFOP)$ را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} &\min \tilde{f}(\bar{x}) = \tilde{f}(x_۱, \cdots, x_n) \\ S.t. \quad &\tilde{g}_j(\bar{x}) \preceq \tilde{\circ}. j = ۱, \cdots, m \\ &\bar{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

که درآن X یک مجموعه باز است و $\tilde{f}$ و $\tilde{g}_j.j = ۱, \cdots, m$ توابع فازی مقدار تعریف شده روی X هستند .در این‌جا تعریف جواب ضعیف نامغلوب را از فصل ۴ یاد آوری می‌کنیم .

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید

$$\bar{x}_\circ \in X_۱ = \{\bar{x} \in X : \tilde{g}_j(\bar{x}) \preceq \circ, j = ۱, \cdots, m\}$$

گوییم $\bar{x}_\circ$ یک جواب نامغلوب برای مسئله $(NCFOP)$ است اگر هیچ $\bar{x}_۱(\neq \bar{x}_\circ) \in X_۱$ وجود نداشته باشد به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}_۱) \preceq \tilde{f}(\bar{x}_\circ)$. به $\bar{x}_\circ$ جواب نامغلوب ضعیف گفته می‌شود اگر هیچ $\bar{x}_۱ \in X_۱$ وجود نداشته باشد به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}_۱) \prec \tilde{f}(\bar{x}_\circ)$.

برای برقراری شرایط کافی بهینگی درمسئله $(NCFOP)$ به قضیه‌های دگرین زیر نیاز داریم.

قضیه ۱.۲.۴. [۹۶] (قضیه دگرین تاکر)فرض کنید A و B ماتریس‌هایی به ترتیب با ابعاد $n\times m$ و $n \times p$ باشند .و فرض کنید x،y و u به ترتیب بردارهای ستونی با اندازه‌های m, p, n باشند. آن‌گاه تنها یکی از دستگاه‌های زیر جواب دارد:

دستگاه ۱: برای یک u داده شده $A'u \leq \circ, A'u \neq \circ, B'u \leq \circ$

دستگاه ۲: $Ax + By = \circ$ برای یک $x > \circ, y \geq \circ$

۳.۴ شرایط کافی بهینگی

با استفاده ازمفهوم تحدب وتحدب تعمیم یافته یک تابع فازی مقدار که در فصل ۲ تعریف شد، شرایط کافی بهینگی برای آنکه $\bar{x}_\circ$ جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ باشد را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۴. (شرط کافی ۱ برای جواب نامغلوب ضعیف).فرض کنید که $\bar{x}_\circ \in X_۱$ در شرایط زیر صدق کند:

الف. $\tilde{f}(\bar{x})$ و $\tilde{g}_j(\bar{x}).j = ۱, \cdots, m$ در $\bar{x} = \bar{x}_\circ \in X_۱$ H ـ مشتق پذیر باشند ؛

ب. $\tilde{f}(\bar{x})$ و $\tilde{g}_j(\bar{x}).j=1,\cdots,m$ در $\bar{x}=\bar{x}_\circ \in X_1$ محدب باشند؛

ج. وجود داشته باشد $0 \le \mu_j \in \mathbb{R}.j=1,\cdots,m$ به طوری که

۱. $\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)+\nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)+\sum_{j=1}^m \nabla \tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}^\circ).\mu_j=0;\forall\alpha\in[0,1]$

۲. $\mu_j.\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}^\circ)=0\forall j=1,\cdots,m.$

آن‌گاه $\bar{x}_\circ$ جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ است.

برهان. فرض کنید $\bar{x}_\circ \in X_1$ یک جواب نامغلوب ضعیف نباشد. پس وجود دارد $\bar{x}_1 \in X_1$ به طوری که $f(\bar{x}_1) \prec f(\bar{x}_\circ)$. یعنی وجود دارد $\bar{x}_1 \in X_1$ به طوری که

$$\begin{cases}\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_1)<\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_\circ)\\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_1)<\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_\circ)\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_1)\le\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_\circ)\\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_1)<\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_\circ)\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_1)<\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_\circ)\\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_1)\le\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_\circ)\end{cases}$$

$\forall\alpha\in[0,1]$. بنابراین،

$$\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_1)+\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_1)<\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_\circ)+\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_\circ).$$

به این معنا که

$$F_\alpha(\bar{x}_1)-F_\alpha(\bar{x}_\circ)<0 \tag{۱.۴}$$

که درآن $\forall\alpha\in[0,1]$

$$F_\alpha(\bar{x})=\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})+\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})$$

با توجه به تعریف ترتیب جزئی، داریم:

$$\begin{aligned}X_1&=\{\bar{x}\in X\subset\mathbb{R}^n:\tilde{g}_j(\bar{x})\preceq\tilde{0},j=1,\cdots,m\}\\ &=\{\bar{x}\in X\subset\mathbb{R}^n:\tilde{g}^L_{j\alpha}(\bar{x})\le 0,\tilde{g}^U_{j\alpha}(\bar{x})\le 0,j=1,\cdots,m\}\\ &=\{\bar{x}\in X\subset\mathbb{R}^n:\tilde{g}^U_{j\alpha}(\bar{x})\le 0,j=1,\cdots,m\}\\ &=\{\bar{x}\in X\subset\mathbb{R}^n:\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x})\le 0,j=1,\cdots,m\}\end{aligned}$$

فرض کنید $J=\{j:\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}_\circ)=0\}$ مجموعه مشخصه محدودیت‌های فعال در $\bar{x}=\bar{x}_\circ$ باشد . ازآن‌جایی که $\bar{x}_\circ,\bar{x}_1\in X_1$ برای $j\in J$ ،داریم

$$\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}_1)-\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}_\circ)\le 0 \tag{۲.۴}$$

حالا با استفاده از فرض(ب.)از قضیه و قضیه ۱.۷.۱ برای (۱.۴) و (۲.۴) داریم:

$$\nabla F_\alpha(\bar{x}_\circ)(\bar{x}_1-\bar{x}_\circ)<0,\nabla\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}_\circ)(\bar{x}_1-\bar{x}_\circ)\le 0,j\in J\text{و}\forall\alpha\in[0,1]$$

بنابراین دستگاه نامساوی‌های زیر

$$\begin{cases} \nabla F_\alpha \bar{z} < 0 & \forall \alpha \in [0,1] \\ \nabla \tilde{g}^U_{j_0} \bar{z} \leq 0 \end{cases}$$

دارای یک جواب $\bar{z} = \bar{x}_1 - \bar{x}_0$ است. بنابراین بنابه قضیه دگرین تاکر (رجوع شود به قضیه ۱.۲.۴) وجود ندارد $\lambda > 0$ و $\mu'_j \geq 0$ به طوری که

$$\nabla F_\alpha(\bar{x}_0)\lambda + \sum_{j\in J} \nabla \tilde{g}^U_{j_0}(\bar{x}_0).\mu'_j = 0 \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

بنابراین

$$\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) + \nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0) + \sum_{j\in J} \nabla \tilde{g}^U_{j_0}(\bar{x}_0).\mu_j = 0$$

که درآن $\mu_j = \frac{\mu'_j}{\lambda}$ و $F_\alpha(\bar{x}_0) = \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) + \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0)$ برای هر $\alpha \in [0,1]$. برای $j = \{1, \cdots, m\} - J$ قرار می‌دهیم $\mu_j = 0$. بنابراین می‌توانیم بگوییم که وجود ندارد هیچ $\mu_j \geq 0$ برای هر $j \in J$ به طوری که

$$\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) + \nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0) + \sum_{j=1}^{m} \nabla \tilde{g}^U_{j_0}(\bar{x}_0).\mu_j = 0$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$. بنابراین می‌توانیم بگوییم که وجود ندارد $\mu_j \geq 0, j = 1 \cdots, m$ به طوری که

$$\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) + \nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0) + \sum_{j=1}^{m} \nabla \tilde{g}^U_{j_0}(\bar{x}_0).\mu_j = 0$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$ و $\mu_j.\tilde{g}^U_{j_0}(x_0) = 0$ برای $j = 1, \cdots, m$. این با فرض (ج) قضیه مخالف است. لذا $\bar{x}_0$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ است. □

قضیه ۲.۳.۴. (شرایط کافی برای یک جواب نامغلوب) فرض کنید $x_0 \in X_1$ در شرایط زیر صدق کند:

الف. $\tilde{f}(\bar{x})$ و $\tilde{g}_j(\bar{x}).j = 1, \cdots, m$ در $\bar{x} = \bar{x}_0 \in X_1$ اکیدا محدب نما باشند؛

ب. وجود داشته باشد $0 \leq \mu_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, m$ به طوری که

۱. $\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) + \nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0) + \sum_{j=1}^{m} \nabla \tilde{g}^U_{j_0}(\bar{x}_0).\mu_j = 0$ برای هر $\alpha \in [0,1]$

۲. $\mu_j.\tilde{g}^U_{j_0}(\bar{x}_0) = 0 \forall j = 1, \cdots, m$

آن‌گاه $\bar{x}_0$ جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ است.

برهان. فرض کنید $\bar{x}_0 \in X_1$ جواب نامغلوب ضعیف نباشد. آن‌گاه $\bar{x}_1 (\neq \bar{x}_0) \in X_1$ وجود دارد به طوری که $\tilde{f}(\bar{x}_1) \preceq \tilde{f}(\bar{x}_0)$ ، یعنی $\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_1) \leq \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0)$ و $\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_1) \leq \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0)$ برای هر $\alpha \in [0,1]$.

با توجه به فرض محدب نمای اکید بودن $\tilde{f}(\bar{x})$ در $\bar{x}=\bar{x}_\circ$، نتیجه می‌گیریم $\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})$ و $\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})$ نیز توابع اکیدا محدب نماهستند. با استفاده از نامساوی‌های بالا نتیجه می‌گیریم:
$\nabla\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_\circ)^t(\bar{x}_1-\bar{x}_\circ)<\circ$ و $\nabla\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_\circ)^t(\bar{x}_1-\bar{x}_\circ)<\circ$ برای هر $\alpha\in[\circ,1]$.
به علاوه،داریم:

$$\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}_1)-\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}_\circ)\leq\circ$$

که درآن $j\in J=\{j:\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}_\circ)=\circ\}$ یک مجموعه مشخصه از محدودیت‌های فعال در $\bar{x}=\bar{x}_\circ$ است .بنابراین داریم:

$$\nabla F_\alpha(\bar{x}_\circ)^t(\bar{x}_1-\bar{x}_\circ)<\circ$$

و

$$\nabla\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}_\circ)^t(\bar{x}_1-\bar{x}_\circ)<\circ$$

. که درآن $F_\alpha(\bar{x}_\circ)=\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_\circ)+\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_\circ)$ برای هر $\alpha\in[\circ,1]$. بنابراین دستگاه نامساوی‌های زیر

$$\begin{cases}\nabla F_\alpha\bar{z}<\circ & \forall\alpha\in[\circ,1]\\ \nabla\tilde{g}^U_{j\circ}\bar{z}\leq\circ\end{cases}$$

دارای یک جواب $\bar{z}=\bar{x}_1-\bar{x}_\circ$ است. بنابراین بنابه قضیه دگرین تاکر(قضیه ۱.۲.۴) وجود ندارد $\lambda>\circ$ و $\circ\leq\mu'_j\in\mathbb{R},j\in J$ به طوری که

$$\nabla F_\alpha(\bar{x}_\circ)\lambda+\sum_{j\in J}\nabla\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}_\circ).\mu'_j=\circ\forall\alpha\in[\circ,1]$$

با اثبات قضیه ۱.۳.۴ می‌توان نشان داد که وجود ندارد $\circ\leq\mu_j\in\mathbb{R},j=1,\cdots,m$ به طوری که

$$\nabla\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_\circ)+\nabla\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_\circ)+\sum_{j=1}^m\nabla\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}_\circ).\mu_j=\circ\forall\alpha\in[\circ,1]$$

و $\mu_j.\tilde{g}^U_{j\circ}(x_\circ)=\circ$ برای $j=1,\cdots,m$ که با فرض (ب) قضیه مخالف است. از این رو $\bar{x}_\circ$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ می‌باشد. □

قضیه ۳.۳.۴. (شرط کافی ۲ برای یک جواب نامغلوب ضعیف). فرض کنید که $\bar{x}_\circ\in X_1$ در شرایط زیر صدق کند:

الف. $\tilde{f}(\bar{x})$ در $\bar{x}=\bar{x}_\circ\in X_1$ محدب نما باشد،

ب. $\tilde{g}_j(\bar{x}),\forall j=1,\cdots,m$ در $\bar{x}_\circ$ شبه محدب H ـ مشتق‌پذیر باشند،

ج. وجود داشته باشد $\circ\leq\mu_j\in\mathbb{R}.j=1,\cdots,m$ به طوری که

۱. $\nabla\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ)+\nabla\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ)+\sum_{j=1}^m\nabla\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}^\circ).\mu_j=\circ;$ برای هر $\alpha\in[\circ,1]$،

۲. $\mu_j.\tilde{g}^U_{j\circ}(\bar{x}^\circ)=\circ\forall j=1,\cdots,m.$

آن‌گاه $\bar{x}_0$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ است.

برهان. فرض کنید $\bar{x}_0 \in X_1$ یک جواب نامغلوب ضعیف نباشد. آن‌گاه $\bar{x}_1 \in X_1$ وجود دارد به طوری که $f(\bar{x}_1) \prec f(\bar{x}_0)$ یعنی $\bar{x}_1 \in X_1$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{cases} \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}_1) < \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}_0) \\ \tilde{f}_\alpha^U(\bar{x}_1) < \tilde{f}_\alpha^U(\bar{x}_0) \end{cases} \quad \textbf{یا} \quad \begin{cases} \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}_1) \leq \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}_0) \\ \tilde{f}_\alpha^U(\bar{x}_1) < \tilde{f}_\alpha^U(\bar{x}_0) \end{cases} \quad \textbf{یا} \quad \begin{cases} \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}_1) < \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}_0) \\ \tilde{f}_\alpha^U(\bar{x}_1) \leq \tilde{f}_\alpha^U(\bar{x}_0) \end{cases}$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$. بنابراین،

$$\tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}_1) + \tilde{f}_\alpha^U(\bar{x}_1) < \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}_0) + \tilde{f}_\alpha^U(\bar{x}_0)$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$. به این معنا که

$$F_\alpha(\bar{x}_1) - F_\alpha(\bar{x}_0) < 0 \tag{۳.۴}$$

که در آن $F_\alpha(\bar{x}) = \tilde{f}_\alpha^L(\bar{x}) + \tilde{f}_\alpha^U(\bar{x})$ برای هر $\alpha \in [0,1]$ با توجه به تعریف ترتیب جزئی، داریم:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}_j(\bar{x}) \preceq \tilde{0}, j = 1, \cdots, m\} \\ &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}_{j\alpha}^L(\bar{x}) \leq 0, \tilde{g}_{j\alpha}^U(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\} \\ &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}_{j\alpha}^U(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\} \\ &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}_{j0}^U(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\} \end{aligned}$$

فرض کنید $J = \{j : \tilde{g}_{j0}^U(\bar{x}_0) = 0\}$ مجموعه مشخصه محدودیت‌های فعال در $\bar{x} = \bar{x}_0$ باشد . ازآن‌جایی که $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in X_1$ برای $j \in J$ ،داریم،

$$\tilde{g}_{j0}^U(\bar{x}_1) - \tilde{g}_{j0}^U(\bar{x}_0) \leq 0 \tag{۴.۴}$$

حالا با استفاده از فرض های (الف)و(ب)این قضیه و روابط (۳.۴) و (۴.۴) داریم:

$$\nabla F_\alpha(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) < 0, \nabla \tilde{g}_{j0}^U(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \leq 0, j \in J \forall \alpha \in [0,1]$$

بنابراین دستگاه نامساوی‌های زیر

$$\begin{cases} \nabla F_\alpha \bar{z} < 0 & \forall \alpha \in [0,1] \\ \nabla \tilde{g}_{j0}^U \bar{z} \leq 0 \end{cases}$$

دارای یک جواب $\bar{z} = \bar{x}_1 - \bar{x}_0$ است .بنابراین باقضیه دگرین تاکر(قضیه ۱.۲.۴) وجود ندارد $\lambda > 0$ و $\mu'_j \geq 0$ به طوری که

$$\nabla F_\alpha(\bar{x}_0)\lambda + \sum_{j \in J} \nabla \tilde{g}_{j0}^U(\bar{x}_0).\mu'_j = 0 \forall \alpha \in [0,1]$$

مشابه با اثبات قضیه ۱.۲.۴ می‌توان نشان داد که وجود ندارد $0 \leq \mu_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, m$ به طوری که

$$\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) + \nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0) + \sum_{j=1}^{m} \nabla \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}_0).\mu_j = 0$$

برای هر $\alpha \in [0, 1]$. و $\mu_j.\tilde{g}^U_{j0}(x_0) = 0$ برای $j = 1, \cdots, m$، این با فرض (ج) قضیه مخالف است از این رو $\bar{x}_0$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ است. □

حالا شرایط کافی بهینگی برای مسئله $(NCFOP)$ را تحت شرط شبه محدب بودن تابع هدف فازی مقدار اثبات می‌کنیم. قضیه زیر راجع به توابع شبه محدب را از [۳۸] می‌آوریم .

قضیه ۴.۳.۴. [۳۸] فرض کنید $X^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$ باز باشد .اگر یک تابع مشتق‌پذیر $f : X^\circ \longrightarrow \mathbb{R}$ در یک نقطه $\bar{x} \in X^\circ$ که $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ محدب باشد ،آن‌گاه در $\bar{x}$ محدب نما است .

قضیه ۵.۳.۴. (شرط کافی ۳ برای یک جواب نامغلوب ضعیف).فرض کنید که

$$\bar{x}_0 \in X_1 = \{\bar{x} \in X : \tilde{g}_j \preceq \tilde{0}, j = 1, \cdots, m\}$$

شرایط زیر برقرار باشند:

الف. $\tilde{f}$ و $\tilde{g}_j, j = 1, \cdots, m$ در $\bar{x}_0$، H ـ مشتق‌پذیر باشند و $\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) \neq 0$ و $\nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0) \neq 0$ برای هر $\alpha \in [0, 1]$.

ب. $\tilde{f}$ و $\tilde{g}_j$، $j = 1, \cdots, m$

در $\bar{x}_0$ توابعی شبه محدب باشند .

ج. فرض کنید $j = 1, \cdots, m$. $0 \leq \mu_j \in \mathbb{R}$ و $\bar{x}_0 \in X_1$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}^\circ) + \nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}^\circ) + \sum_{j=1}^{m} \nabla \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}^\circ).\mu_j = 0;$ ،برای هر $\alpha \in [0, 1]$

۲. $\mu_j.\tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}^\circ) = 0, \forall j = 1, \cdots, m.$

آن‌گاه $\bar{x}_0$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ است.

برهان. فرض کنید $\bar{x}_0 \in X_1$ جواب نامغلوب ضعیف نباشد. آن‌گاه $\bar{x}_1 \in X_1$ وجود دارد به طوری که $f(\bar{x}_1) \prec f(\bar{x}_0)$ یعنی $\bar{x}_1 \in X_1$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{cases} \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_1) < \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) \\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_1) < \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_1) \leq \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) \\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_1) < \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_1) < \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) \\ \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_1) \leq \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0) \end{cases}$$

برای هر $\alpha \in [0, 1]$. بنابراین،

$$\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_1) + \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_1) < \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) + \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0)$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$. به این معنا که

$$F_\alpha(\bar{x}_1) - F_\alpha(\bar{x}_0) < 0 \tag{۵.۴}$$

که در آن $F_\alpha(\bar{x}) = \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}) + \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})$ برای هر $\alpha \in [0,1]$. با توجه به تعریف ترتیب جزئی، داریم:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}_j(\bar{x}) \preceq \tilde{0}, j = 1, \cdots, m\} \\ &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}^L_{j\alpha}(\bar{x}) \leq 0, \tilde{g}^U_{j\alpha}(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\} \\ &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}^U_{j\alpha}(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\} \\ &= \{\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n : \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}) \leq 0, j = 1, \cdots, m\} \end{aligned}$$

فرض کنید $J = \{j : \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}_0) = 0\}$ مجموعه مشخصه محدودیت‌های فعال در $\bar{x} = \bar{x}_0$ باشد. ازآن‌جایی که $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in X_1$ برای $j \in J$ ،داریم

$$\tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}_1) - \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}_0) \leq 0 \tag{۶.۴}$$

حالا با استفاده از فرض‌های الف ـ ج از قضیه $\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})$ و $\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})$ برای هر $\alpha \in [0,1]$ $\bar{x}_0$ توابعی شبه محدب هستند(قضیه ۴.۳.۴) برای هر $\alpha \in [0,1]$. بنابراین،از (۵.۴) و (۶.۴) داریم:

$$\nabla F_\alpha(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) < 0, \nabla \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}_0)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \leq 0, j \in J \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

بنابراین دستگاه نامساوی‌های زیر

$$\begin{cases} \nabla F_\alpha \bar{z} < 0 & \forall \alpha \in [0,1] \\ \nabla \tilde{g}^U_{j0} \bar{z} \leq 0 & \end{cases}$$

دارای یک جواب $\bar{z} = \bar{x}_1 - \bar{x}_0$ است بنابراین باقضیه دگرین تاکر(به قضیه ۱.۲.۴) وجود ندارد $\lambda > 0$ و $\mu'_j \geq 0$ به طوری که

$$\nabla F_\alpha(\bar{x}_0)\lambda + \sum_{j \in J} \nabla \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}_0).\mu'_j = 0$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$. مشابه بااثبات قضیه ۱.۳.۴ می‌توان نشان داد که $0 \leq \mu'_j \in \mathbb{R}.j = 1, \cdots, m$ وجود ندارد به طوری که

$$\nabla \tilde{f}^L_\alpha(\bar{x}_0) + \nabla \tilde{f}^U_\alpha(\bar{x}_0) + \sum_{j=1}^{m} \nabla \tilde{g}^U_{j0}(\bar{x}_0).\mu_j = 0$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$. و $\mu_j.\tilde{g}^U_{j0}(x_0) = 0$ برای $j = 1, \cdots, m$ که این با فرض ج این قضیه مخالف است لذا $\bar{x}_0$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ است. □

۴.۴ مثال‌ها

در این‌جا دو مثال آوردیم که تاثیر مدل فازی را در مسئله بهینه‌سازی نشان می‌دهیم:

مثال ۱.۴.۴. مسئله قطعی زیر رادر نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min f(x_۱, x_۲) = ۲.x_۱^۲ + ۲.x_۲^۲ \\ s.t. \quad &g(x_۱, x_۲) = (x_۱ - ۲)^۲ + (x_۲ - ۲)^۲ \leq ۳ \end{aligned}$$

این مسئله دارای نقطه مینیمم $(x_۱^*, x_۲^*) = (۲-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}, ۲-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}})$ و مقدار مینیمم $f(x_۱^*, x_۲^*) = ۶/۴۱۹$ است.

اکنون یک مساله بهینه‌سازی فازی را درنظر می‌گیریم که دارای ضرایب فازی باشند و جواب‌های نامغلوب را با استفاده از شرایط بهینگی به‌دست می‌آوریم:

مثال ۲.۴.۴. مسئله بهینه سازی فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min \tilde{f}(x_۱, x_۲) = (\tilde{۲} \odot x_۱^۲) \oplus (\tilde{۲} \odot x_۲^۲) \\ s.t. \quad &\tilde{g}(x_۱, x_۲) = (\tilde{۱} \odot (x_۱ - ۲)^۲) \oplus (\tilde{۱} \odot (x_۲ - ۲)^۲)) \preceq \tilde{۳} \end{aligned}$$

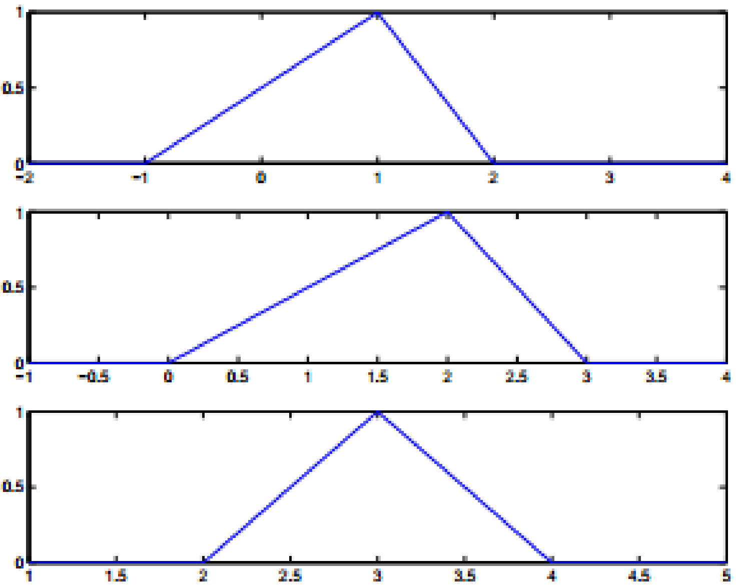
که در آن $\tilde{۲} = (۰, ۲, ۳)$، $\tilde{۱} = (-۱, ۱, ۲)$، $\tilde{۳} = (۲, ۳, ۴)$ اعداد فازی مثلثی هستند که در شکل ۱.۴ نشان داده شده‌اند .

بنا به حسابان اعداد فازی داریم:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_\alpha^L(x_۱, x_۲) = ۲\alpha x_۱^۲ + ۲\alpha x_۲^۲, \\ &\tilde{f}_\alpha^U(x_۱, x_۲) = (۳ - \alpha)x_۱^۲ + (۳ - \alpha)x_۲^۲ \\ &\tilde{g}_\alpha^U(x_۱, x_۲) = (۲ - \alpha)(x_۱ - ۲)^۲ + (۲ - \alpha)(x_۲ - ۲)^۲ \leq (۴ - \alpha). \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{f}_\alpha^L(x_۱, x_۲) &= \begin{pmatrix} ۴\alpha x_۱ \\ ۴\alpha x_۲. \end{pmatrix}, \\ \nabla \tilde{f}_\alpha^U(x_۱, x_۲) &= \begin{pmatrix} ۲(۳ - \alpha)x_۱ \\ ۲(۳ - \alpha)x_۲ \end{pmatrix}, \\ \nabla \tilde{g}_\circ^U(x_۱, x_۲) &= \begin{pmatrix} ۲(x_۱ - ۲) \\ ۲(x_۲ - ۲) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



شکل ۱.۴: توابع عضویت اعداد فازی مثلثی $\tilde{۱} = (-۱,۱,۲)$، $\tilde{۲} = (۰,۲,۳)$، $\tilde{۳} = (۲,۳,۴)$.

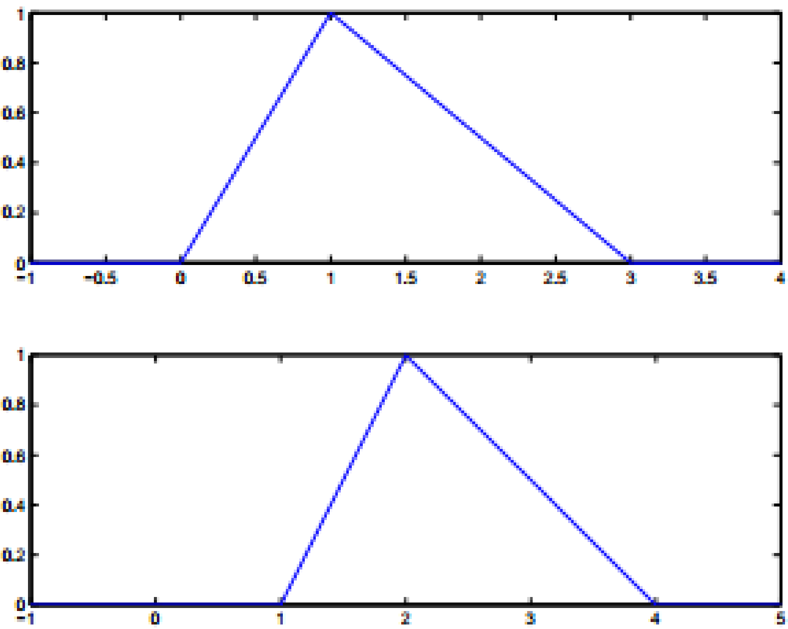
برای بررسی شرایط (الف) و (ب) قضیه ۱.۳.۴ به حل دستگاه زیر نیاز داریم:

$$\alpha x_۱ + ۳x_۱ + ۲\mu x_۱ - ۴\mu = ۰$$
$$\alpha x_۲ + ۳x_۲ + ۲\mu x_۲ - ۴\mu = ۰$$
$$\mu.((x_۱ - ۲)^۲ + (x_۲ - ۲)^۲ - ۲) = ۰.$$

بنابراین جواب $(x_۱, x_۲) = (۱,۱)$ و $\mu = \frac{(\alpha+۳)}{۲}$ به‌دست می‌آیند .می‌بینیم که $(x_۱, x_۲) = (۱,۱)$ یک جواب شدنی برای مسئله $(NCFOP)$ داده شده می‌باشد .برای هر $\alpha \in [۰,۱]$ ثابت،می‌بینیم که $\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})$،$\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})$ و $\tilde{g}^U_\alpha(\bar{x})$ در $\bar{x} = (۱,۱)$ توابعی اکیدا محدب هستند .بنابراین از قضیه ۱.۳.۴ نتیجه می‌گیریم که $(x^*_۱, x^*_۲) = (۱,۱)$ یک جواب نامغلوب ضعیف برای مسئله $(NCFOP)$ است و مقدارمینیمم تابع هدف فازی مقدار برابر $\tilde{۴} = (۰,۴,۶)$ با $\tilde{۴}_\alpha = [۴\alpha, ۶ - ۲\alpha]$ است. مقدار مینیمم را با استفاده ازروش مرکز ناحیه داده شده در [۴۵] از غیرفازی می‌کنیم وجواب ۳/۳۳۳/۳ را بدست می‌آوریم .اگر این جواب را با جواب برای مسئله بهینه‌سازی قطعی در مثال ۱.۴.۴ که ۶/۴۱۹. است مقایسه کنیم، مشاهده می کنیم که با تقریب زدن ضرایب با اعداد فازی،مقدار مینیمم بهتری بدست می‌آوریم .

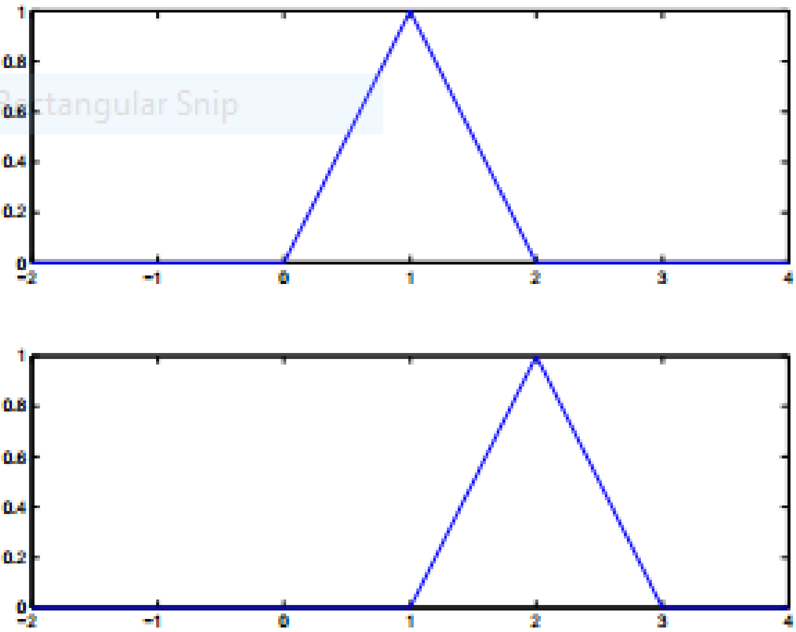
ملاحظه ۱.۴.۴. در مثال بالا یک مسئله بهینه‌سازی فازی را حل کردیم که دارای ضرایب فازی بود که اعداد فازی آن به صورت غیر متقارن در چپ گسترده شده بودند .حال اگر اعداد فازی

مثلثی را در نظر بگیریم که در سمت راست غیر متقارن هستند همانند شکل ۲.۴ آن‌گاه جواب نامغلوب ضعیف آن مسئله بهینه سازی فازی به صورت $(x_1^*, x_2^*) = (2 - \frac{2}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{2}{\sqrt{6}})$ ومقدار مینیمم $\tilde{f}(x_1^*, x_2^*) = (۲/۸, ۵/۶, ۱۱/۲)$ خواهد بودو مقدار غیر فازی آن ۶/۵۳۳ است .



شکل ۲.۴: توابع عضویت اعداد فازی مثلثی $\tilde{1} = (0, 1, 3)$، $\tilde{2} = (1, 2, 4)$.

اگر ما اعداد فازی مثلثی را متقارن را در نظر بگیریم (همانگونه که درشکل ۳.۴ آورده شده است) آن‌گاه جواب نامغلوب $(x_1^*, x_2^*) = (1, 1)$ و $\mu = 4$ ومقدار مینیمم $\tilde{4} = (2, 4, 6)$ بدست می‌آیدو مقدار غیر فازی آن ۴ است . بنابراین فازی کردن پارامترهای نشان دهنده ضرایب x_1^2 و x_2^2 در f و ضرایب $(x_1 - 2)^2, (x_2 - 2)^2$ در g می‌توانددبر روی جواب نامغلوب و مقدار غیرفازی تابع هدف تاثیر مهمی داشته باشد .



شکل ۳.۴: توابع عضویت اعداد فازی مثلثی $\tilde{۱} = (۰,۱,۲)$، $\tilde{۲} = (۱,۲,۳)$.

مثال ۳.۴.۴. مسئله بهینه سازی فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min \tilde{f}(x_۱, x_۲) = (\tilde{۱} \odot x_۱^۲) \oplus (\tilde{۲} \odot x_۲^۲) \oplus ((\widetilde{-۳}) \odot x_۲) \\ s.t. \quad &\tilde{g}(x_۱, x_۲) = (\tilde{۳} \odot x_۱) \oplus (\tilde{۵} \odot x_۲ -) \oplus (\widetilde{-۷}) \preceq \tilde{۰} \end{aligned}$$

که در آن $\tilde{۰} = (۰,۰,۰)$، $\tilde{۱} = (۰,۱,۲)$، $\widetilde{-۳} = (-۴,-۳,-۲)$ $\tilde{۲} = (۲,۳,۴)$ $\tilde{۵} = (۴,۵,۶)$ و $\widetilde{-۷} = (-۸,-۷,-۶)$ اعداد فازی مثلثی هستند . با استفاده از حسابان اعداد فازی داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\alpha^L(x_۱, x_۲) &= \alpha x_۱^۲ + (۱+\alpha)x_۲^۲ + (-۴+\alpha)x_۱ + (-۴+\alpha)x_۲, \\ \tilde{f}_\alpha^U(x_۱, x_۲) &= (۲-\alpha)x_۱^۲ + (۳-\alpha)x_۲^۲ + (-۲-\alpha)x_۱ + (-۲-\alpha)x_۲ \\ \tilde{g}_\alpha^L(x_۱, x_۲) &= (۲+\alpha)x_۱ + (۴+\alpha(x_۲ + (-۸+\alpha) \\ \tilde{g}_\alpha^U(x_۱, x_۲) &= (۴-\alpha)x_۱ + (۶-\alpha)x_۲ + (-۶-\alpha). \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\nabla \tilde{f}^L_\alpha(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 2\alpha x_1+(-4+\alpha)\\ 2(1+\alpha)x_2+(-4+\alpha).\end{pmatrix},$$
$$\nabla \tilde{f}^U_\alpha(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 2(2-\alpha)x_1-2-\alpha\\ 2(3-\alpha)x_2-2-\alpha\end{pmatrix},$$
$$\nabla \tilde{g}^U_0(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 4\\ 6\end{pmatrix}.$$

برای بررسی شرایط (الف) و (ب) قضیه ۱.۳.۴ به حل دستگاه زیر نیاز داریم:

$$4x_1-6+4\mu=0$$
$$8x_2-6+6\mu=0$$
$$\mu.(4x_1+6x_2-6)=0.$$

با حل این دستگاه جواب $(x_1,x_2)=(\frac{33}{34},\frac{6}{17})$ و $\mu=\frac{9}{17}$ بدست می‌آید که یک جواب شدنی برای مسئله $(NCFOP)$ می‌باشد .برای هر $\alpha\in[0,1]$ ثابت، مشاهده می‌شود که $\tilde{f}^U_\alpha(\bar{x})$،$\tilde{f}^L_\alpha(\bar{x})$ اکیدا محدب و $\tilde{g}^U_\alpha(\bar{x})$ در $\bar{x}=(\frac{33}{34},\frac{6}{17})$ محدب است . بنابراین از قضیه ۱.۳.۴ نتیجه می‌شود که $(x_1,x_2)=(\frac{33}{34},\frac{6}{17})$ یک جواب نامغلوب ضعیف می‌باشد.

اکنون یک مثال دیگر در نظر می‌گیریم که قضیه ۳.۳.۴ رانشان می‌دهد .

مثال ۴.۴.۴. مسئله فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min \tilde{f}(x)=(\tilde{2}\odot x^3)\oplus(\widetilde{-2})\odot x\\ s.t.\quad &\tilde{g}(x)=\tilde{2}\odot x^3\oplus(\widetilde{-2})\preceq\tilde{0}\end{aligned}$$

که در آن $\tilde{2}=(1,2,3)$، $\widetilde{-2}=(-3,-2,-1)$ و $\tilde{0}=(0,0,0)$ اعداد فازی مثلثی هستند .با استفاده از حسابان اعداد فازی داریم:

$$\tilde{f}^L_\alpha(x)=(1+\alpha)x^3+(-3+\alpha)x,$$
$$\tilde{f}^U_\alpha(x)=(3-\alpha)x^3+(-1-\alpha)x$$
$$\tilde{g}^U_\alpha(x)=(3-\alpha)x^3+(-1-\alpha).$$

همچنین داریم:

$$D\tilde{f}^L_\alpha(x) = ۳(۱+\alpha)x^۲ + (-۳+\alpha),$$
$$D\tilde{f}^U_\alpha(x) = ۳(۳-\alpha)x^۲ + (-۱-\alpha)$$
$$D\tilde{g}^U_\circ(x) = ۹x^۲.$$

با استفاده ازشرایط (الف) و (ب) در قضیه ۳.۳.۴ سیستم معادلات زیر بدست می‌آید:

$$۳x^۲ - ۳ + ۹x^۲ - ۱ + \mu ۹x^۲ = \circ$$
$$\mu.(۳x^۳ - ۱) = \circ.$$

با حل دستگاه داریم $x_\circ = -۱\sqrt{۳}$ و $\mu = \circ$ که یک جواب شدنی برای مسئله $(NCFOP)$ می‌باشد.برای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ ثابت مشاهده می‌شود که $\tilde{f}^L_\alpha(x) = (۱+\alpha)x^۳ + (-۳+\alpha)x$ ، $\tilde{f}^U_\alpha(x) = (۳-\alpha)x^۳ + (-۱-\alpha)x$ توابعی محدب نمادر $x_\circ$ هستند (به مثال ۸.۷.۱ مراجعه کنید) و $\tilde{g}^U_\alpha = ۳x^۳ - ۱$ در $x_\circ$ شبه محدب است .بنابراین از قضیه ۳.۳.۴ نتیجه می‌گیریم که $-۱\sqrt{۳}$ یک جواب نامغلوب ضعیف می‌باشد .

فصل ۵

حل مسائل بهینه سازی‌فازی با روش نیوتن

۱.۵ مقدمه

در این فصل روش نیوتن برای یافتن جواب غیر مغلوب مسائل بهینه‌سازی فازی بدون نیاز به اینکه تمام جواب‌های شدنی در همسایگی یک جواب غیرمغلوب قابل مقایسه باشند را بررسی می‌کنیم و از gH ـ مشتق پذیری به جای H ـ مشتق پذیری استفاده می‌کنیم .

تعریف ۱.۱.۵. [۷۸] فرض کنید دو عدد فازی u و v داده شده باشند .عدد فازی w را تفاضل هاکاهارای تعمیم یافته آن دو عدد گویند و با $w = u \ominus_{gH} v$ نشان می‌دهند. اگر

$$u \ominus_{gH} v = w \Leftrightarrow \begin{cases} (i) u = v + w \\ \text{یا} \\ (ii) v = u + (-۱) w \end{cases}$$

می‌توان نشان داد که اگر w یک عدد قطعی باشد آن گاه هر دو مورد (ii)و(i) برقرارند. ابل ذکر است که حالت همان(i) تفاضل هاکاهارای است که در فصل‌های قبل تعریف شد و لذا مفهوم gH ـ تفاضل کلی‌تر از H ـ تفاضل است [۴۲، ۶۵].

اگر $u \ominus_{gH} v$ وجود داشته باشد آن‌گاه برحسب α ـ سطح‌ها داریم:

$$[u \ominus_{gH} v]_\alpha = [u]_\alpha \ominus_{gH} [v]_\alpha = \left[\min\{u^L_\alpha - v^L_\alpha, u^U_\alpha - v^U_\alpha\}, \max\{u^L_\alpha - v^L_\alpha, u^U_\alpha - v^U_\alpha\}\right]$$

برای هر $\alpha \in [0,1]$، که در آن $[u]_\alpha \ominus_{gH} [v]_\alpha$ نشان دهنده‌ی gH ـ تفاضل بین دو بازه است([۷۷، ۷۸] را ببینید). با توجه به $u, v \in F(\mathbb{R})$ فاصله بین u و v تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} D(u,v) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} d_H\left([u]_\alpha, [v]_\alpha\right) \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\{|u^L_\alpha - v^L_\alpha|, |u^U_\alpha - v^U_\alpha|\} \end{aligned}$$

بنابراین $(F(\mathbb{R}), D)$ یک فضای متریک کامل است .

۲.۵ توابع فازی مشتق پذیر

همانند فصل‌های گذشته فرض می‌کنیم تابع $\tilde{f} : X \to F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی باشد و برای هر $\alpha \in [0,1]$ تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{f}_\alpha(x) = [f^L_\alpha(x), f^U_\alpha(x)]$$

. که در آن $f^L_\alpha(x), f^U_\alpha(x) : X \to \mathbb{R}$ به ترتیب تابع‌های بالا و پایین $\tilde{f}$ گفته‌می‌شود.

تعریف ۱.۲.۵. [۷] فرض کنید $X \subset \mathbb{R}$ و $\tilde{f} : X \to F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی و $x_0 \in X$ و h به گونه‌ای باشد که $x_0 + h \in X$ آن‌گاه مشتق تعمیم یافته هاکاهاری(gH ـ مشتق) $\tilde{f}$ در x_0 به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{f}'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(x_0 + h) \ominus_{gH} \tilde{f}(x_0)}{h} \tag{۱.۵}$$

اگر $\tilde{f}'(x_0) \in F(\mathbb{R})$ وجود داشته باشد،گوییم که $\tilde{f}$ مشتق پذیر هاکاهاری تعمیم یافته (gH ـ مشتق پذیر)در x_0 می‌باشد .

gH ـ مشتق یک تابع بازه‌ای مقدار [۷۷] مشابه تعریف ۱.۲.۵ می‌باشد. به طور دقیق‌تر، یک تابع بازه‌ای مقدار $\tilde{f} : X \to F(\mathbb{R})$ در $x_0 \in X$، gH ـ مشتق پذیر با gH ـ مشتق $\tilde{f}'(x_0)$ است اگر رابطه (۱.۵) نسبت به حددر فضای متری $(\tilde{f}, d_H)$ وجود داشته باشد که در آن تفاضل به وسیله gH ـ تفاضل بین بازه ها تعریف می‌شود . [۷۷]

قضیه ۱.۲.۵. فرض کنید $\tilde{f} : X \to F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی باشد. اگر $\tilde{f}$ یک تابع gH ـ مشتق پذیر باشد آن‌گاه تابع بازه‌ای مقدار $\tilde{f}_\alpha : X \to F(\mathbb{R})$ برای هر $\alpha \in [0,1]$، gH ـ مشتق پذیر است. علاوه براین

$$[\tilde{f}'(x)]_\alpha = \tilde{f}'_\alpha(x)$$

.

برهان. اثبات از تعریف gH ـ مشتق پذیری نتیجه می‌شود. □

مثال ۱.۲.۵. تابع فازی $\tilde{f}:\mathbb{R}\to F(\mathbb{R})$ با تعریف $\tilde{f}(x)=C.x$ را در نظر بگیرید،که در آن C عدد فازی و $[C]_\alpha=[C_\alpha^L,C_\alpha^U]$ با $C_\alpha^L<C_\alpha^U$ می‌باشد توجه داشته باشید که $\tilde{f}$ یک تابع تعمیم یافته خطی است و برای هر $\alpha\in[0,1]$ داریم:

$$\tilde{f}_\alpha(x)=\begin{cases}[C_\alpha^L x, C_\alpha^U x] & x\geq 0\\ [C_\alpha^U x, C_\alpha^L x] & x<0\end{cases}$$

بنابراین توابع $\tilde{f}_\alpha^L$ و $\tilde{f}_\alpha^U$ در $x=0$ مشتق پذیر نیستند .بااین حال $\tilde{f}$، gH ـ مشتق پذیر روی $\mathbb{R}$ است و برای هر $x\in\mathbb{R}$ برابر با $\tilde{f}'(x)=C$ می‌باشد .به طور کلی اگر $\tilde{f}(x)=C.\tilde{g}(x)$ باشد که در آن $\tilde{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع مشتق پذیرو $C\in F\mathbb{R}$ است ،پس gH ـ مشتق وجود دارد وآن برابر $\tilde{f}'(x)=C.\tilde{g}'(x)$ است،اما توابع پایانی $\tilde{f}_\alpha^L$ و $\tilde{f}_\alpha^U$ لزوما مشتق پذیر نیستند.

به طور کلی قضیه زیر را در نظر می‌گیریم که gH ـ مشتق‌پذیری $\tilde{f}$ ومشتق‌پذیری توابع $\tilde{f}_\alpha^L$ و $\tilde{f}_\alpha^U$ را بهم مرتبط می‌کند.

قضیه ۲.۲.۵. فرض کنید $\tilde{f}:X\to\mathcal{F}(\mathbb{R})$ یک تابع فازی باشد. اگر $\tilde{f}$ در $x_0\in X$، gH ـ مشتق‌پذیر باشد،آن‌گاه برای هر $\alpha\in[0,1]$ یکی از موارد زیر برقرار است:

الف. $\tilde{f}_\alpha^L$ و $\tilde{f}_\alpha^U$ در x_0 مشتق‌پذیر است و

$$[\tilde{f}'(x_0)]_\alpha=\left[\min\left\{(\tilde{f}_\alpha^L)'(x_0),(\tilde{f}_\alpha^U)'(x_0)\right\},\max\left\{(\tilde{f}_\alpha^L)'(x_0),(\tilde{f}_\alpha^U)'(x_0)\right\}\right]$$

ب. $(\tilde{f}_\alpha^L)'_-(x_0)$،$(\tilde{f}_\alpha^L)'_+(x_0)$،$(\tilde{f}_\alpha^U)'_-(x_0)$ و $(\tilde{f}_\alpha^U)'_+(x_0)$ وجود دارند و $(f_\alpha^L)'_-(x_0)=(f_\alpha^U)'_+(x_0)$ و به صورت $(f_\alpha^L)'_+(x_0)=(f_\alpha^L)'_-(x_0)$ بیان می‌شود.علاوه براین

$$\begin{aligned}[\tilde{f}'(t_0)]_\alpha&=\left[\min\left\{(f_\alpha^L)'_-(x_0),(f_\alpha^U)'_-(x_0)\right\},\max\left\{(f_\alpha^L)'_-(x_0),(f_\alpha^U)'_-(x_0)\right\}\right]\\&=\left[\min\left\{(f_\alpha^L)'_+(x_0),(f_\alpha^U)'_+(x_0)\right\},\max\left\{(f_\alpha^L)'_+(x_0),(f_\alpha^U)'_+(x_0)\right\}\right]\end{aligned}$$

برهان. اثبات از قضیه ۱.۲.۵ نتیجه گیری می‌شود. □

حال مشتق جزئی برای یک تابع فازی $\tilde{f}$ روی $X\subset\mathbb{R}^n$ را نشان می‌دهیم فرض کنید $\tilde{f}(x)=\tilde{f}(x_1,\cdots,x_n)\in\tilde{f}(\mathbb{R})$ برای هر $x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$ تعریف شده باشد، برای این منظور، فرض کنید یک تابع فازی $\tilde{f}:X\to F(\mathbb{R})$ داده شده باشد، عدد فازی $\tilde{f}(x)$ با $\tilde{f}(x)=\left[\tilde{f}_\alpha^L(x),\tilde{f}_\alpha^U(x)\right]$ نمایش می‌دهیم و برای هر $\alpha\in[0,1]$ داریم:

$$\tilde{f}_\alpha(x)=\left[\tilde{f}_\alpha^L(x),\tilde{f}_\alpha^U(x)\right]$$

تعریف ۲.۲.۵. فرض کنید F یک تابع فازی باشذ که روی $X \subset \mathbb{R}^n$ تعریف شده باشد و $x_\circ = \left(x_1^{(\circ)}, \cdots, x_n^{(\circ)}\right)$ یک عضو ثابت از X باشد. تابع فازی

$$h_i(x_i) = \tilde{f}((x_1^{(\circ)}, \cdots, x_{i-1}^{(\circ)}, (x_{i+1}^{(\circ)}, \cdots, x_n^{(\circ)})$$

را در نظر می‌گیریم. در صورتی h_i در $x_i^{(\circ)}$، gH ـ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه گوییم $\tilde{f}$ دارای i امین gH ـ مشتق جزئی در $x_\circ$ است(به صورت $(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i})(x_\circ)$) نمایش داده می‌شود و داریم $(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i})(x_\circ) = (h_i)'(x_i^{(\circ)})$.

تعریف ۳.۲.۵. فرض کنید $\tilde{f}$ یک تابع فازی روی X باشد و $x_\circ = \left(x_1^{(\circ)}, \cdots, x_n^{(\circ)}\right) \in X$ ثابت باشد .گوییم $\tilde{f}$ در $x_\circ$، gH ـ مشتق پذیر است اگر همه gH ـ مشتقات جزئی $(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1})(x_\circ), \cdots, (\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n})(x_\circ)$ در یک همسایگی $x_\circ$ وجود داشته باشند و در $x_\circ$ پیوسته باشند . توجه داشنه باشید که اگر $\tilde{f}$ در $x_\circ$، gH ـ مشتق پذیر باشد، آن‌گاه $(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i})(x_\circ)$ یک عدد فازی است .بنابراین برای هر $\alpha \in [0, 1]$ تعریف می‌کنیم:

$$\left[(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i})(x_\circ)\right] = (\frac{\partial \tilde{f}_\alpha}{\partial x_i})(x_\circ) = \left[(\frac{\partial \tilde{f}_\alpha^L}{\partial x_i})(x_\circ), (\frac{\partial \tilde{f}_\alpha^U}{\partial x_i})(x_\circ)\right].$$

توجه شود که $(\frac{\partial \tilde{f}_\alpha^L}{\partial x_i})(x_\circ)$ و $(\frac{\partial \tilde{f}_\alpha^U}{\partial x_i})(x_\circ)$ از قضیه ۲.۲.۵ بدست می‌آیند.

گزاره زیر را ارائه می‌دهیم که برای بدست آوردن نتایج اصلی استفاده می‌شود.

گزاره ۱.۲.۵. فرض کنید $\tilde{f} : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی باشد، اگر $\tilde{f}$ در $x_\circ \in X$، gH ـ مشتق پذیر باشد آن‌گاه برای هر $\alpha \in [0, 1]$ تابع حقیقی مقدار $\tilde{f}_\alpha^L + \tilde{f}_\alpha^U : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است .علاوه براین

$$(\frac{\partial \tilde{f}_\alpha^L}{\partial x_i})(x_\circ) + (\frac{\partial \tilde{f}_\alpha^L}{\partial x_i})(x_\circ) = (\frac{\partial\left(\tilde{f}_\alpha^L + \tilde{f}_\alpha^U\right)}{\partial x_i})(x_\circ) \tag{۲.۵}$$

برهان. ازقضیه ۲.۲.۵ اثبات می‌شود. □

تعریف ۴.۲.۵. فرض کنید $\tilde{f} : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی باشد که در آن $X \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه باز است. فرض کنید $x^\circ \in X$ وجود داشته باشد به طوری که گرادیان $\tilde{f}$، $\nabla \tilde{f}$ در x°، gH ـ مشتق پذیر باشد، یعنی برای هر i تابع $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ در x°، gH ـ مشتق‌پذیر است . gH ـ مشتق جزئی $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}$ به صورت

$$D_{ij}^2 \tilde{f}(x^\circ) \qquad \text{یا} \qquad \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i x_j}(x^\circ), i \neq j$$

و

$$D_{ii}^2 \tilde{f}(x^\circ) \qquad \text{یا} \qquad \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i^2}(x^\circ), i = j$$

نشان داده می‌شود. اگر $\tilde{f}$ در هر $x^\circ \in X$ دوبار مشتق‌پذیر باشد گوییم $\tilde{f}$ دوبار مشتق پذیر در X است و اگر برای هر $i, j = 1, 2, \cdots, n$ مشتق جزئی $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i x_j}$ تابع پیوسته از X به $F(\mathbb{R})$ باشد می‌گوییم $\tilde{f}$ به طور پیوسته دوبار gH ـ مشتق پذیر روی X است .

تابع فازی به طور پیوسته m ـ بار gH ـ مشتق پذیر را می‌توان مشابه ۴.۲.۵ تعریف کرد یعنی $\tilde{f} : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ به طور پیوسته m ـ بار gH ـ مشتق پذیر در X است اگروفقط اگر به طور پیوسته تمام مشتقات جزئی ازمرتبه $m \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد. اگر $\tilde{f}$، gH ـ مشتق پذیر باشد توابع $\tilde{f}^L_\alpha$ و $\tilde{f}^U_\alpha$ لزوما مشتق پذیر نیستند .در صورتی که از ۱.۲.۵ داریم که $\tilde{f}^L_\alpha + \tilde{f}^U_\alpha$ برای هر $\alpha \in [0, 1]$ همیشه مشتق پذیر هستند .این ویژگی برای m ـ بار gH ـ مشتق از $\tilde{f}^L_\alpha + \tilde{f}^U_\alpha$ نیز صدق می کند

گزاره ۲.۲.۵. فرض کنید $\tilde{f} : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی باشد .اگر $\tilde{f}$، m ـ بار gH ـ مشتق پذیر در $x_0 \in X$ باشد آن‌گاه برای هر $\alpha \in [0, 1]$ تابع حقیقی مقدار $\tilde{f}^L_\alpha + \tilde{f}^U_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ m ـ بار مشتق پذیر در x_0 است .

برهان. از گزاره ۱.۲.۵ نتیجه می‌شود. □

۳.۵ بهینه‌سازی فازی

مسئله بهینه‌سازی $(USFOP)$ [1] زیر را در نظرمی‌گیریم

$$\begin{aligned} &\min \tilde{f}(x) \\ s.t.\quad & x \in X \end{aligned}$$

که در آن $X \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز و $\tilde{f} : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقداراست . با استفاده از رابطه ترتیب جزئی تعریف شده در فصل ۱ ،در این‌جا یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله $(USFOP)$ را از فصل ۳ یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۵. فرض کنید $X \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز باشد .گوییم $x^* \in X$ یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله $(USFOP)$ است اگر هیچ $x \in N_\epsilon(x^*) \cap X$ وجود نداشته باشد به طوری که $\tilde{f}(x) \prec \tilde{f}(x^*)$ که درآن $N_\epsilon(x^*)$ یک ϵ همسایگی از x^* است .

به منظور ارائه روش نیوتن جهت یافتن یک جواب نامغلوب برای مسئله بهینه‌سازی فازی تک متغیره نامقید، نیازمند شرط لازم مرتبه اول برای یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله $(USFOP)$ هستیم . این شرط بهینگی را در فصل ۳ برای مسئله بهینه‌سازی فازی نامقید چندمتغیره بیان کردیم (به قضیه ۳.۳.۳ مراجعه کنید).
شرط لازم بهینگی مرتبه اول برای مسئله بهینه‌سازی فازی تک متغیره به صورت زیر است که در [۶۹] اثبات شده است .

قضیه ۱.۳.۵. فرض کنید $\tilde{f} : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ تابع فازی است ، که در آن $X \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه باز است.اگر $x^* \in X$ یک جواب غیرمغلوب موضعی برای مسئله $(USFOP)$ باشد وبرای هرجهت

[1] fuzzy Optimization Problem

$\bar{d}$ و برای هر $\delta > \circ$ وجود داشته باشد $\lambda \in (\circ, \delta)$ به طوری که $\tilde{f}(x^* + \lambda.\bar{d})$ و $\tilde{f}(x^*)$ قابل مقایسه باشند .آن‌گاه x^* یک مینیمم موضعی توابع مقدار حقیقی $\tilde{f}^L_\alpha$ و $\tilde{f}^U_\alpha$ برای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ است.

در قضیه بالا شرط اینکه $x^* \in X$ یک جواب نامغلوب موضعی برای مسئله $(USFOP)$ باشد و برای هر جهت $\bar{d}$ و برای هر $\delta > \circ$ وجود داشته باشد $\lambda \in (\circ, \delta)$ به طوری که $\tilde{f}(x^* + \lambda.d)$ و $\tilde{f}(x^*)$ قابل مقایسه باشند، بسیار محدود کننده است . به عنوان مثال اگر $\tilde{f}(x) = u.x$ در نظر بگیریم که در آن $u = (-۱, \circ, ۱)$ باشد، آن‌گاه شرط قبلی برقرار نیست یعنی برای برای هر x, y توابع $\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)$ قابل مقایسه نیستند در حالی که $\circ$ یک جواب نامغلوب از F است .
از سوی دیگر این شرط که یک جواب نامغلوب x^* یک مینیمم موضعی از هردو تابع حقیقی مقدار $\tilde{f}^L_\alpha$ و $\tilde{f}^U_\alpha$ برای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ باشد، بسیار محدود است .اگر این نقطه وجود داشته باشد، آن را نقطه‌ی ایده‌آل می‌نامند، همان‌طور که در بهینه سازی چند هدفه شناخته شده است . پیدا کردن توابع فازی که نقطه ایده‌آل داشته باشد خیلی مشکل است .درواقع مثال‌های [۶۹] برای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ نقطه ایده‌آل ندارند .به عنوان مثال تابع فازی

$$\tilde{f}(x_۱, x_۲) = (-۱, ۱, ۳).x_۱^۲ + (\circ, ۱, ۲).x_۱ x_۲ + (۱, ۲, ۴).x_۲^۲, x_۱, x_۲ \in \mathbb{R}$$

را درنظربگیرید .دراین حالت $x^* = (\circ, \circ)$ یک جواب نامغلوب از $\tilde{f}$ است،با این حال $x^* = (\circ, \circ)$ یک مینیمم موضعی تابع $\tilde{f}^L_\circ$ نیست زیرا $\tilde{f}^L_\circ(\circ, \circ) = \circ < \tilde{f}^L_\circ(\epsilon, \circ)$ برای هر $\epsilon > \circ$ نزدیک صفر.
در ادامه یک شرط کافی برای یک جواب نامغلوب $\tilde{f}$ بر اساس مجموع توابع هدف ارائه می‌دهیم .این قضیه برای روش نیوتن مناسب تر است.

قضیه ۲.۳.۵. فرض کنید $\tilde{f} : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک تابع فازی باشد و $X \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز باشد. اگر $x^* \in X$ یک مینیمم موضعی برای تابع حقیقی مقدار $\tilde{f}^L_\alpha + \tilde{f}^U_\alpha$ برای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$ باشد، آن‌گاه x^* یک جواب نامغلوب موضعی برای $(USFOP)$ است.

برهان. فرض کنید که x^* یک جواب نامغلوب موضعی برای $(USFOP)$ نباشد. آن‌گاه وجود دارد $x \in N_\epsilon(x^*)$ به طوری که $\tilde{f}(x) \prec \tilde{f}(x^*)$. بنابراین وجود دارد $\alpha^* \in [\circ, ۱]$ به طوری که

$$\tilde{f}^L_{\alpha^*}(x) \leq \tilde{f}^L_{\alpha^*}(x^*)$$

و

$$\tilde{f}^U_{\alpha^*}(x) \leq \tilde{f}^U_{\alpha^*}(x^*)$$

که در آن حداقل یکی از نامساوی‌ها برقرار است .بنابراین

$$(\tilde{f}^L_{\alpha^*} + \tilde{f}^U_{\alpha^*})(x) < (\tilde{f}^L_{\alpha^*} + \tilde{f}^U_{\alpha^*})(x^*)$$

بنابراین، x^* یک مینیمم موضعی برای تابع حقیقی مقدار $(\tilde{f}^L_{\alpha^*} + \tilde{f}^L_{\alpha^*})$ نیست. و این اثبات را کامل می‌کند . $\square$

۴.۵ روش نیوتن

در این بخش یک روش نیوتن برای پیدا کردن یک جواب نامغلوب برای مسئله $(USFOP)$ را ارائه می‌دهیم .برای این کار فرض می‌کنیم که درهر نقطه‌ی $x^{(k)}$ می‌توانیم $\tilde{f}(x^{(k)})$، $\nabla\tilde{f}(x^{(k)})$، $\nabla^{۲}\tilde{f}(x^{(k)})$ را محاسبه کنیم .بنابراین بادر نظر گرفتن گزاره های ۱.۲.۵ و ۲.۲.۵ می‌توانیم $\tilde{f}^{L}_{\alpha}(x^{(k)})$، $\tilde{f}^{U}_{\alpha}(x^{(k)})$، $\nabla\left(\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha}\right)(x^{(k)})$ و $\nabla^{۲}\left(\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha}\right)(x^{(k)})$ برای هر $\alpha\in[۰,۱]$ رامحاسبه کنیم. لذا برای هر $\alpha\in[۰,۱]$ می‌توانیم تقریبی از تابع حقیقی مقدار $\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha}$ با استفاده از تابع حقیقی مقدار درجه دوم h_{α} با کمک فرمول تیلور بدست بیاریم:

$$\begin{aligned} h_{\alpha} &= \left(\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha}\right)(x^{(k)})+\nabla\left(\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha}\right)(x^{(k)}).\left(x-x^{(k)}\right) \\ &+\left\{\frac{۱}{۲}\left(x-x^{(k)}\right)^{T}.\nabla^{۲}\left(\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha}\right)(x^{(k)}).\left(x-x^{(k)}\right)\right\} \qquad \forall\alpha\in[۰,۱] \end{aligned}$$

اگر x^{*} یک مینیمم کننده $(\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha})$ باشد برای هر $\alpha\in[۰,۱]$ باشد. با کمک $x^{(k)}$ داده شده سعی می‌کنیم تقریبی از مینیمم $(\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha})$ با استفاده از پیدا کردن مینیمم h_{α} برای هر $\alpha\in[۰,۱]$ بدست آوریم. از شرط لازم مرتبه اول برای h_{α} داریم:

$$\nabla h_{\alpha}(x^{*})=۰ \qquad \forall\alpha\in[۰,۱]$$

به این معنی که

$$\int_{۰}^{۱}\nabla\left((\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha}\right)\left(x^{(k)}\right)d\alpha+\int_{۰}^{۱}\nabla^{۲}\left((\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha}\right)\left(x^{(k)}\right)d\alpha\left(x-x^{(k)}\right)=۰ \tag{۳.۵}$$

تابع حقیقی $\Psi:\mathbb{R}^{n}\longrightarrow F(\mathbb{R})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(x)=\int_{۰}^{۱}\left((\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha}\right)(x)d\alpha$$

اگر تابع فازی F به طور پیوسته دوبار gH ـ مشتق پذیر باشد، آن‌گاه باتوجه به گزاره، ۲.۲.۵ $(\tilde{f}^{L}_{\alpha}+\tilde{f}^{U}_{\alpha})$ به طور پیوسته دوبار gH ـ مشتق پذیر برای هر $\alpha\in[۰,۱]$ است . بنابراین ψ به طور پیوسته دوبار gH ـ مشتق پذیر است .بنابراین از (۳.۵) داریم:

$$\nabla\psi\left(x^{(k)}\right)+\nabla^{۲}\psi\left(x^{(k)}\right).\left(x-x^{(k)}\right)=۰ \tag{۴.۵}$$

با قرار دادن $x=x^{(k+۱)}$ در (۴.۵) می‌رسیم به

$$x^{(k+۱)}=x^{(k)}-\nabla\psi(x^{(k)}).\left[\nabla^{۲}\psi\left(x^{(k)}\right)\right]^{-۱} \tag{۵.۵}$$

که در آن $\left[\nabla^{۲}\psi\left(x^{(k)}\right)\right]^{-۱}$ معکوس ماتریس $\nabla^{۲}\psi\left(x^{(k)}\right)$ است . لذا باشروع یک تقریب اولیه مینیمم $\tilde{f}$ می‌توانیم با استفاده از فرمول (۵.۵) دنباله‌ای از تقریب های این مینیمم کننده $\tilde{f}$ ، را تولید کنیم .این فرایند زمانی متوقف می‌شود که $\|x^{(k+۱)}-x^{(k)}\|<\epsilon$ باشد. که در آن ϵ شرط

توقف از پیش تعیین شده است .توجه کنید که با استفاده از فرمول (۵.۵) می‌توانیم بحرانی $\tilde{f}_\alpha^L+\tilde{f}_\alpha^U$ برای هر $\alpha \in [0,1]$ را پیدا کنیم . حال، برای بررسی این که آیا این نقاط مینیمم کننده $\tilde{f}_\alpha^L+\tilde{f}_\alpha^U$ هستند یا خیر، نیازمند شرایط کافی مرتبه دوم یا برخی شرایط دیگر مانند محدب یا تحدب تعمیم یافته از

$$\tilde{f}_\alpha^L+\tilde{f}_\alpha^U \qquad \forall \alpha \in [0,1]$$

هستیم .

۱.۴.۵ همگرایی روش نیوتن

دراین بخش همگرایی روش نیوتن را نشان خواهیم داد.

قضیه ۱.۴.۵. فرض کنید $\tilde{f}$ یک تابع فازی به طور پیوسته سه بار gH ـ مشتق پذیر باشد که در $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است و $x^* \in \mathbb{R}^n$ نقطه ای باشد به طوری که

الف. $\nabla\psi(x^*) = 0$

ب. $\nabla^2\psi(x^*)$ معکوس پذیر است

آن‌گاه برای هر $x^{(0)}$ به اندازه کافی نزدیک به x^* روش نیوتن برای تمام k ها خوش تعریف است و با همگرایی حداقل ۲ به x^* نزدیک می‌شود.

برهان. از آن جایی که $\tilde{f}$ یک تابع فازی به طور پیوسته سه بار gH ـ مشتق پذیر است پس ψ تابع به طور پیوسته سه بار مشتق پذیر است ..بنابراین اثبات از اثبات کلاسیک روش نیوتن نتیجه می‌شود. □

۲.۴.۵ مثال‌های عددی

دراین بخش برخی از مثال‌ها را برای توجیه روش پیشنهادی ارائه می‌کنیم. علاوه براین مثال‌هایی که در [۶۹] ارائه شده است را اصلاح می‌کنیم .

مثال ۱.۴.۵. (مثال ۴.۱ [۶۹] راببینید) مسئله بهینه‌سازی فازی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\min \tilde{f}(x_1,x_2) = \tilde{1}.x_1^3 \oplus \tilde{2}.x_2^3 \oplus \tilde{1}.x_1.x_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

که در آن $\tilde{1} = (-1,1,3)$ و $\tilde{2} = (1,2,3)$ اعدادفازی مثلثی هستند، بنابراین برای هر $\alpha \in [0,1]$ داریم:

$$
\begin{aligned}
[\tilde{f}(x_۱,x_۲)]_\alpha &= [\tilde{۱}]_\alpha x_۱^۳ + [\tilde{۲}]_\alpha x_۲^۳ + [\tilde{۱}]_\alpha x_۱ x_۲\\
&= [-۱+۲\alpha, ۳-۲\alpha]x_۱^۳ + [۱+\alpha, ۳-\alpha]x_۲^۳ + [-۱+۲\alpha, ۳-\alpha]x_۱x_۲\\
&= \begin{cases}
[(-۱+۲\alpha)x_۱^۳, (۳-۲\alpha)x_۱^۳] + [(۱+\alpha)x_۲^۳, (۳-\alpha)x_۲^۳] + [(-۱+۲\alpha)x_۱x_۲, (۳-۲\alpha)x_۱x_۲]\\
[(-۱+۲\alpha)x_۱^۳, (۳-۲\alpha)x_۱^۳] + [(۳-\alpha)x_۲^۳, (۱+\alpha)x_۲^۳] + [(۳-۲\alpha)x_۱x_۲, (-۱+۲\alpha)x_۱x_۲]\\
[(۳-۲\alpha)x_۱^۳, (-۱+۲\alpha)x_۱^۳] + [(۳-\alpha)x_۲^۳, (۱+\alpha)x_۲^۳] + [(-۱+۲\alpha)x_۱x_۲, (۳-۲\alpha)x_۱x_۲]\\
[(۳-۲\alpha)x_۱^۳, (-۱+۲\alpha)x_۱^۳] + [(۱+\alpha)x_۲^۳, (۳-\alpha)x_۲^۳] + [(۳-۲\alpha)x_۱x_۲, (-۱+۲\alpha)x_۱x_۲]
\end{cases}
\end{aligned}
$$

بنابراین توابع $\tilde{f}_\alpha^L$ و $\tilde{f}_\alpha^U$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$
\tilde{f}_\alpha^L(x_۱,x_۲) = \begin{cases}
(-۱+۲\alpha)x_۱^۳ + (۱+\alpha)x_۲^۳ + (-۱+۲\alpha)x_۱x_۲, & x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰\\
(-۱+۲\alpha)x_۱^۳ + (۳-\alpha)x_۲^۳ + (۳-۲\alpha)x_۱x_۲, & x_۱ \geq ۰, x_۲ < ۰\\
(۳-۲\alpha)x_۱^۳ + (۳-\alpha)x_۲^۳ + (-۱+۲\alpha)x_۱x_۲, & x_۱ < ۰, x_۲ < ۰\\
(۳-۲\alpha)x_۱^۳ + (۱+\alpha)x_۲^۳ + (۳-۲\alpha)x_۱x_۲, & x_۱ < ۰, x_۲ \geq ۰
\end{cases}
$$

و

$$
\tilde{f}_\alpha^U(x_۱,x_۲) = \begin{cases}
(۳-۲\alpha)x_۱^۳ + (۳-\alpha)x_۲^۳] + (۳-۲\alpha)x_۱x_۲ & x_۱ \geq ۰, x_۲ \geq ۰\\
(۳-۲\alpha)x_۱^۳ + (۱+\alpha)x_۲^۳] + (-۱+۲\alpha)x_۱x_۲] & x_۱ \geq ۰, x_۲ < ۰\\
(-۱+۲\alpha)x_۱^۳] + (۱+\alpha)x_۲^۳ + (۳-۲\alpha)x_۱x_۲] & x_۱ < ۰, x_۲ < ۰\\
(-۱+۲\alpha)x_۱^۳ + (۳-\alpha)x_۲^۳ + (-۱+۲\alpha)x_۱x_۲] & x_۱ < ۰, x_۲ \geq ۰
\end{cases}
$$

در مثال ۴.۱ [۶۹] ،نویسندگان توابع نهایی دیگری را به‌دست آوردند که صحیح نیستند .

مشاهده می‌شود که $\tilde{f}_\alpha^L$ و $\tilde{f}_\alpha^U$ مشتق پذیر نیستند و بنابراین $\tilde{f}$، gH ـ مشتق پذیر نیست . بنابراین نمی‌توانیم روش نیوتن راکه در [۶۹] ارائه شده است اعمال کنیم .با این وجود مشاهده می‌شود که $\tilde{f}$ سه بار gH ـ مشتق پذیر است. و از گزاره ۲.۲.۵ داریم $\tilde{f}_\alpha^L+\tilde{f}_\alpha^U$ سه بار مشتق‌پذیر است و داریم

$$
\left(\tilde{f}_\alpha^L + \tilde{f}_\alpha^U\right)(x_۱,x_۲) = ۲x_۱^۳ + ۴x_۲^۳ + ۲x_۱x_۲ \qquad \forall\alpha\in[۰,۱]
$$

است . بنابراین

$$
\psi = \int_۰^۱ \left(\tilde{f}_\alpha^L + \tilde{f}_\alpha^U\right)(x_۱,x_۲)d\alpha = ۲x_۱^۳ + ۴x_۲^۳ + ۲x_۱x_۲
$$

لذا

$$
\nabla\psi(x_۱,x_۲) = \begin{pmatrix} ۶x_۱^۲ + ۲x_۲\\ ۱۲x_۲^۲ + x_۱ \end{pmatrix}
$$

و

$$\nabla^{۲}\psi(x_{۱},x_{۲})=\begin{pmatrix}۱۲x_{۱} & ۲\\ ۲ & ۲۴x_{۲}\end{pmatrix}$$

هستند . حالا یک دنباله $\{x^{(k)}\}$، $k=۱,۲,\cdots$ را با استفاده از معادله زیر

$$x^{k+۱}=x^{k}-\nabla\psi(x^{(k)}).\left[\nabla^{۲}\psi\left(x^{(k)}\right)\right]^{-۱}$$

بدست می‌آوریم، $x^{*}=(۰,۰)$ یک نقطه بحرانی از $\tilde{f}_{\alpha}^{L}+\tilde{f}_{\alpha}^{U}$ برای هر $\alpha\in[۰,۱]$ بادقت $۱۰^{-۳}$ می‌باشد ازآن‌جایی که $\tilde{f}_{\alpha}^{L}+\tilde{f}_{\alpha}^{U}$ محدب نیست، نمی‌توانیم اطمینان حاصل کنیم که $x^{*}=(۰,۰)$ یک جواب نامغلوب از $\tilde{f}$ است .در واقع $x^{*}=(۰,۰)$ یک جواب نامغلوب نیست زیرا $F(۰,-\epsilon)\prec F(۰,۰)$. این مثال ۴.۱ در [۶۹] را اصلاح می‌کند،که در آن نویسندگان ادعا می‌کنند که $x^{*}=(۰,۰)$ یک جواب نامغلوب است .

مثال ۲.۴.۵. (مثال ۴.۲ [۶۹] را ببینید) مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$\min\tilde{f}(x_{۱},x_{۲})=(-۱,۱,۳).x_{۱}^{۲}\oplus(۰,۱,۲).x_{۱}x_{۲}\oplus(۱,۲,۴).x_{۲}^{۲},x_{۱},x_{۲}\in\mathbb{R}$$

دراین مثال $\tilde{f}$، H ـ مشتق پذیر نیست اما سه بار gH ــ مشتق‌پذیر است .همچنین با استفاده از روش نیوتن

$$\left(\tilde{f}_{\alpha}^{L}+\tilde{f}_{\alpha}^{U}\right)(x_{۱},x_{۲})=۲x_{۱}^{۲}+۲xx_{۱}x_{۲}+(۵-\alpha)x_{۲}^{۲}$$

برای نقطه‌ی بحرانی از $f_{\alpha}^{L}+f_{\alpha}^{U}$ برای هر $\alpha\in[۰,۱]$ جستجو می‌کنیم. برای این منظور،نقطه اولیه $x_{۰}=(۲,-۲)$ را در نظرمی‌گیریم ودنباله‌ی $\{x^{k}\}$، $k=۱,۲,\cdots$ را با استفاده از (۵.۵) محاسبه می‌کنیم . $x^{*}=(۰,۰)$ به عنوان نقطه بحرانی از $\tilde{f}_{\alpha}^{L}+\tilde{f}_{\alpha}^{U}$ برای هر α با دقت $۱۰^{-۳}$ بدست می‌آید. ازآن‌جایی که $\tilde{f}_{\alpha}^{L}+\tilde{f}_{\alpha}^{U}$ محدب است، x^{*} مینیممی از $\tilde{f}_{\alpha}^{L}+\tilde{f}_{\alpha}^{U}$ است .بنابراین از قضیه ۲.۳.۵ نتیجه می‌گیریم x^{*} یک نقطه نامغلوب از $\tilde{f}$ است. روش نیوتن پیشنهاد شده در [۶۹] رانمی‌توان برای این مثال اعمال کرد، زیرا $\tilde{f}$، gH ـ مشتق پذیر نیست وشرایط لازم برای اجرای این روش را برآورده نمی‌کند .

مثال‌های دیگری از توابع فازی که توسط پیرزاده و پاتک در [۶۹] مورد توجه قرارگرفته‌اند نیز H ـ مشتق پذیر نیستند و شرایط لازم برای اجرای روش نیوتن را برآورده نمی‌کنند . با این وجود،این مثال‌ها شرایط برای روش نیوتن پیشنهادشده در اینجا را برآورده می‌کنند وهمانطور که درمثال‌های قبلی دیدیم ،ممکن است جواب‌های نامغلوب بدست آیند

فصل ۶

نتیجه گیری

در این رساله با استفاده از H ـمشتق پذیری یک تابع فازی مقدار و رابطه‌ی ترتیب کلی پارامتری روی مجموعه اعداد فازی،شرایطی لازم و کافی برای مسائل بهینه‌سازی فازی نامقید یک متغیره وچند متغیره بدست آوردیم .در ادامه مسائل بهینه‌سازی فازی بدون محدودیت و مقید را با استفاده از رابطه ترتیب جزئی حداکثر فازی روی مجموعه‌ای از اعداد فازی حل کردیم. تحت مفاهیم تحدب و شبه تحدب از توابع فازی مقدار، شرایط کافی بهینگی را برای مسائل بهینه‌سازی فازی مقید به دست آوردیم . همچنین شرایط لازم و کافی بهینگی مرتبه اول و مرتبه دوم برای مسائل بهینه‌سازی فازی نامقید را ارائه دادیم .رابطه ترتیب کلی پارامتری $\preceq_\lambda$ برای $\lambda \in [0,1]$ روی مجموعه اعداد فازی که دارای تابع عضویت L است تعریف گردید. قابل ذکر است که اگر به جای توابع فازی مقدار از توابع حقیقی مقدار استفاده کنیم آنگاه رابطه ترتیب کلی $\preceq_\lambda$ برای $\lambda \in [0,1]$ به رابطه ترتیب کلی $\preceq$ در $\mathbb{R}$ وشرایط بهینه‌سازی به شرایط بهینگی برای توابع حقیقی مقدار بر روی $\mathbb{R}$ کاهش می یابد . همچنین ، تعمیم شرایط بهینگی برای یک مسئله بهینه‌سازی فازی غیرخطی مقید که به خوبی در حوزه بهینه‌سازی کلاسیک توصیف شده است ،مورد بررسی قرار گرفت . یک جواب نامغلوب را برای مسئله بهینه‌سازی فازی با استفاده از رابطه ترتیب جزئی – مرتبه حداکثر فازی بر روی اعداد فازی تعریف کردیم. با استفاده از مفهوم مشتق‌پذیری هاکاهارا یک تابع فازی مقدار، نتایج مورد نیاز را اثبات کردیم. سپس ،شرایط کافی بهینگی را برای بدست آوردن جواب نامغلوب مسئله بهینه سازی فازی ارائه دادیم. شرایط بهینگی براساس فرضیه‌های تحدب ، نیمه تحدب و

محدب نما تعمیم یافته تابع هدف فازی مقدار و محدودیت‌های فازی اثبات شده است .برخی از مثال‌های مسائل بهینه‌سازی فازی را با استفاده از این شرایط بهینگی را حل کردیم که تاثیر مدل فازی را در آن نشان می‌دهد . در نهایت ، روش نیوتن برای مسائل بهینه‌سازی فازی نامقید تک متغیره و چند متغیره ارائه کردیم . ما با استفاده از مفهوم gH ـ مشتق‌پذیری تابع فازی مقدار، همگرایی روش‌های نیوتن برای مسائل تک متغیره و چند متغیره را نشان دادیم .

مراجع

[1] Abdalla, A., and Buckley, J. J. (2009)" Monte Carlo methods in fuzzy queuing theory" Soft Computing, 13(11), 1027-1033.

[2] Banks, H. T., Hu, S., and Thompson, W. C. (2014)" Modeling and inverse problems in the presence of uncertainty" Chapman and Hall/CRC.

[3] Bazaraa, M. S. Sherali, H,D. and Shetty, C.M. (1993)" Nonlinear Programming: Theory and Algorithms"Wiley.

[4] Bede, B., and Gal, S. G. (2005)" Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations" Fuzzy Sets and Systems, 151(3), 581-599.

[5] Bede, B., Rudas, I. J., and Bencsik, A. L. (2007)" First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability" Information Sciences, 177(7), 1648-1662.

[6] Bede, B., and Gal, S. G. (2010)" Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability" Communications in Mathematical Analysis, 9(2), 22-41.

[7] Bede, B., and Stefanini, L. (2013) "Generalized differentiability of fuzzy-valued functions" Fuzzy Sets and Systems, 230, 119-141.

[8] Bellman, R. E., and Zadeh, L. A. (1970)" Decision-making in a fuzzy environment" Management Science, 17(4), B-141.

[9] Bortolan, G., and Degani, R. (1985)" A review of some methods for ranking fuzzy subsets" Fuzzy Sets and Systems, 15(1), 1-19.

[10] Cadenas, J. M., and Verdegay, J. L. (2009)" Towards a new strategy for solving fuzzy optimization problems" Fuzzy Optimization and Decision Making, 8(3), 231-244.

[11] Campos, L., and Verdegay, J. L. (1989)” Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers” Fuzzy Sets and Systems, 32(1), 1-11.

[12] Chalco-Cano, Y., and Roman-Flores, H. (2008)” On new solutions of fuzzy differential equations” Chaos, Solitons and Fractals, 38(1), 112-119.

[13] Chalco-Cano, Y., and Román-Flores, H. (2009)” Comparation between some approaches to solve fuzzy differential equations” Fuzzy Sets and Systems, 160(11), 1517-1527.

[14] Chalco-Cano, Y., Lodwick, W. A., and Román-Flores, H. (2013, June)” The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for a class of fuzzy optimization problems using strongly generalized derivative” In 2013 Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS) (pp. 203-208). IEEE.

[15] Chalco-Cano, Y., Rufián-Lizana, A., Román-Flores, H., and Jiménez-Gamero, M. D. (2013)” Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications” Fuzzy Sets and Systems, 219, 49-67.

[16] Chalco-Cano, Y., Román-Flores, H., and Jiménez-Gamero, M. D. (2011)” Generalized derivative and π-derivative for set-valued functions” Information Sciences, 181(11), 2177-2188.

[17] Chalco-Cano, Y., Rufián-Lizana, A., Román-Flores, H., and Osuna-Gómez, R. (2013)” A note on generalized convexity for fuzzy mappings through a linear ordering” Fuzzy Sets and Systems, 231, 70-83.

[18] Chalco-Cano, Y., Lodwick, W. A., and Rufián-Lizana, A. (2013)” Optimality conditions of type KKT for optimization problem with interval-valued objective function via generalized derivative” Fuzzy Optimization and Decision Making, 12(3), 305-322.

[19] Dempe, S., and Starostina, T. (2003)” Sensitivity Analysis for Linear Optimization Problem with Fuzzy Data in Objective Function” Dekan der Fak. für Mathematik und Informatik. publisher=Publishing House Russian Acad Sciences, Siberian Branch Morskoi PR 2, A-YA …

[20] Delgado, M., Vila, M. A., Kaprzyk, J., and Verdegay, J. L. (1994)” Fuzzy optimization: Recent advances” Springer-Verlag.

[21] Diamond, P., and Kloeden, P. E. (1994)” Metric spaces of fuzzy sets: theory and applications” World Scientific.

[22] Ding, Z., Ma, M., and Kandel, A. (1997)" Existence of the solutions of fuzzy differential equations with parameters" Information Sciences, 99(3-4), 205-217.

[23] Dubois, D., and Prade, H. (1983)" Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory" Information Sciences, 30(3), 183-224.

[24] Dubois, D., and Prade, H. (1978)" Operations on fuzzy numbers" International Journal of Systems Science, 9(6), 613-626.

[25] Dubois, D. J. (1980)" Fuzzy sets and systems: theory and applications (Vol. 144)" Academic Press.

[26] Dubois, D., Kerre, E., Mesiar, R., and Prade, H. (2000)" Fuzzy interval analysis" In Fundamentals of Fuzzy Sets (pp. 483-581). Springer, Boston, MA.

[27] Delgado, M., Kaprzyk, J., Verdegay, J. L., Vila, M. A. (1994) "Fuzzy optimization: Recent Advances" Springer-Verlag.

[28] Fang, S. C., Hu, C. F., Wang, H. F., and Wu, S. Y. (1999)" Linear programming with fuzzy coefficients in constraints" Computers and Mathematics with Applications, 37(10), 63-76.

[29] Fang, S. C., and Li, G. (1999)" Solving fuzzy relation equations with a linear objective function" Fuzzy Sets and Systems, 103(1), 107-113.

[30] Fedrizzi, M., Kacprzyk, J., and Verdegay, J. L. (1991)" A survey of fuzzy optimization and mathematical programming" In Interactive fuzzy optimization (pp. 15-28). Springer, Berlin, Heidelberg.

[31] Fullér, R. (1989)" On stability in fuzzy linear programming problems" Fuzzy Sets and Systems, 30(3), 339-344.

[32] Furukawa, N. (1994)" A parametric total order on fuzzy numbers and a fuzzy shortest route problem" Optimization, 30(4), 367-377.

[33] Furukawa, N. (1997)" Paramentric orders on fuzzy numbers and their roles in fuzzy optimization problems" Optimization, 40(2), 171-192.

[34] Furukawa, N. (1998)" Convexity and local Lipschitz continuity of fuzzy-valued mappings" Fuzzy Sets and Systems, 93(1), 113-119.

[35] Friedman, M., Ma, M., and Kandel, A. (1999)" Numerical solutions of fuzzy differential and integral equations" Fuzzy Sets and Systems, 106(1), 35-48.

[36] French, S. (1995)” Uncertainty and imprecision: modelling and analysis” Journal of the Operational Research Society, 46(1), 70-79.

[37] George, A. A. (2005)” Fuzzy Taylor Formulae” CUBO, A Mathematical Journal, 7, 1-13.

[38] Giorgi, G. (1994)” On sufficient optimality conditions for a quasiconvex programming problem” Journal of Optimization Theory and Applications, 81(2), 401-405.

[39] González, A. (1990)” A study of the ranking function approach through mean values” Fuzzy sets and systems, 35(1), 29-41.

[40] Goetschel Jr, R., and Voxman, W. (1986)” Elementary fuzzy calculus” Fuzzy Sets and Systems, 18(1), 31-43.

[41] Greco, S., Matarazzo, B., and Slowinski, R. (1998)” A new rough set approach to evaluation of bankruptcy risk” In Operational Tools in the Management of Financial Risks (pp. 121-136). Springer, Boston, MA.

[42] Hukuhara, M. (1967)” Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe” Funkcialaj Ekvacioj, 10(3), 205-223.

[43] Inuiguchi, M., and Ramık, J. (2000)” Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem” Fuzzy Sets and Systems, 111(1), 3-28.

[44] Inuiguchi, M., and Ramık, J. (2000) ”Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem” Fuzzy Sets and Systems, 111(1), 3-28.

[45] Klir, G. J., and Yuan, B. (1995)” Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications” Upper Saddle River, 563.

[46] Kacprzyk, J., and Esogbue, A. O. (1996)” Fuzzy dynamic programming: Main developments and applications” Fuzzy Sets and Systems, 81(1), 31-45.

[47] Kacprzyk, J., and Orlovski, S. A. (1987)” Fuzzy optimization and mathematical programming: A brief introduction and survey” In Optimization models using Fuzzy Sets and Possibility Theory (pp. 50-72). Springer, Dordrecht.

[48] Kaleva, O. (1987)” Fuzzy differential equations” Fuzzy Sets and Systems, 24(3), 301-317.

[49] Kim, K., and Park, K. S. (1990)” Ranking fuzzy numbers with index of optimism” Fuzzy Sets and Systems, 35(2), 143-150.

[50] Kurano, M., Yasuda, M., Nakagami, J. I., and Yoshida, Y. (2000)” ordering of convex fuzzy sets: a brief survey and new results” Journal of the Operations Research Society of Japan, 43(1), 138-148.

[51] Lai, Y. J., and Hwang, C. L. (1994)” Fuzzy multiple objective decision making” In Fuzzy Multiple Objective Decision Making (pp. 139-262). Springer, Berlin, Heidelberg.

[52] Lu, J., and Fang, S. C. (2001)” Solving nonlinear optimization problems with fuzzy relation equation constraints” Fuzzy Sets and Systems, 119(1), 1-20.

[53] Lodwick, W. A., and Bachman, K. A. (2005)” Solving large-scale fuzzy and possibilistic optimization problems” Fuzzy Optimization and Decision Making, 4(4), 257-278.

[54] Lodwick, W. A., and Jamison, K. D. (2007)”Theoretical and semantic distinctions of fuzzy, possibilistic, and mixed fuzzy/possibilistic optimization” Fuzzy Sets and Systems, 158(17), 1861-1872.

[55] Lodwick, W. A. (2009, November)” The relationship between interval, fuzzy and possibilistic optimization” In International Conference on Modeling Decisions for Artificial Intelligence (pp. 55-59). Springer, Berlin, Heidelberg.

[56] Luhandjula, M. K. (1989)” Fuzzy optimization: an appraisal” Fuzzy Sets and Systems, 30(3), 257-282.

[57] Lodwick, W. (2012)” An overview of flexibility and generalized uncertainty in optimization” Computational and Applied Mathematics, 31(3).

[58] Lodwick, W. A., and Kacprzyk, J. (Eds.). (2010)” Fuzzy optimization: Recent advances and applications (Vol. 254)” Springer.

[59] Lai, Y. J., and Hwang, C. L. (1992)” Fuzzy mathematical programming(methods and applications)” Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.

[60] Lai, Y. J., and Hwang, C. L. (1994)” Fuzzy multiple objective decision making” In Fuzzy Multiple Objective Decision Making (pp. 139-262). Springer, Berlin, Heidelberg.

[61] Morgan, D., and Ceder, G. (2005)” Data mining in materials development. In Handbook of Materials Modeling (pp. 395-421)” Springer, Dordrecht.

[62] Majumdar, A. A. K. (1997) ”Optimality conditions in differentiable multiobjective programming” Journal of Optimization Theory and Applications, 92(2), 419-427.

[63] Nanda, S., and Kar, K. (1992)” Convex fuzzy mappings” Fuzzy Sets and Systems, 48(1), 129-132.

[64] Nasseri, S. H. (2008)” Fuzzy nonlinear optimization” The Journal of Nonlinear Sciences and its Applications, 1(4), 230-235.

[65] Puri, M. L., and Ralescu, D. A. (1983)” Differentials of fuzzy functions” Journal of Mathematical Analysis and Applications, 91(2), 552-558.

[66] Panigrahi, M., Panda, G., and Nanda, S. (2008)” Convex Fuzzy Mapping with Differentiability and Its Application in Fuzzy Optimization” European Journal of Operational Research, 185(1), 47-62.

[67] Puri, M. L., and Ralescu, D. A. (1983)” Differentials of Fuzzy Functions” Journal of Mathematical Analysis and Applications, 91(2), 552-558.

[68] Puri, M. L. (1986)” Fuzzy Random variables/Puri ML, Ralescu DA. J. Math. Anal” Appl, 114(2), 409-422.

[69] Pirzada, U. M., and Pathak, V. D. (2013)” Newton Method for Solving the Multi-Variable Fuzzy Optimization Problem” Journal of Optimization Theory and Applications, 156(3), 867-881.

[70] Rogers, F., and Jun, Y. (2009)” Fuzzy Nonlinear Optimization for the linear Fuzzy Real Number System” In International Mathematical Forum, 12(4), 587-596.

[71] Rommelfanger, H., and Słowiński, R. (1998)” Fuzzy linear Programming with single or Multiple Objective Functions” In Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics (pp. 179-213). Springer, Boston, MA.

[72] Ramík, J. (1985)” Inequality Relation Between Fuzzy Numbers and Its Use in Fuzzy Optimization” Fuzzy Sets and Systems, 16(2), 123-138.

[73] Ramik, J., and Vlach, M. (2002)” Fuzzy Mathematical Programming: a Unified Approach Based on Fuzzy Relations” Fuzzy Optimization and Decision Making, 1(4), 335-346.

[74] Rao, S. S. (1996)” Further Topics in Optimization” In Engineering Optimization: Theory and Practice (pp. 779-783). New Age International Publishers.

[75] Rödder, W., and Zimmermann, H. J. (1977)" Analyse, Beschreibung und Optimierung von Unscharf Formulierten Problemen" Zeitschrift für Operations Research, 21(1), 1-18.

[76] Rommelfanger, H., and Słowiński, R. (1998)" Fuzzy linear Programming with Single or Multiple Objective Functions" In Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics (pp. 179-213). Springer, Boston, MA.

[77] Stefanini, L., and Bede, B. (2009)" Generalized Hukuhara Differentiability of Interval-Valued Functions and Interval Differential Equations" Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 71(3-4), 1311-1328.

[78] Stefanini, L. (2010)" A Generalization of Hukuhara Difference and Division for Interval and Fuzzy Arithmetic" Fuzzy Sets and Systems, 161(11), 1564-1584.

[79] Sundaram, R. K. (1996)" A First course in Optimization Theory" Cambridge University Press.

[80] Slowinski, R., and Teghem, J. (Eds.). (1990)" Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty" Dordrecht: Kluwer Academic.

[81] Saito, S., and Ishii, H. (2001)" L-Fuzzy Optimization Problems by Parametric Representation" In 2001 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. e-Systems and e-Man for Cybernetics in Cyberspace (Cat. No. 01CH37236) (Vol. 2, pp. 1173-1177). IEEE.

[82] Sakawa, M., and Yano, H. (1989)" An interactive fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Nonlinear Programming Problems with Fuzzy Parameters" Fuzzy Sets and Systems, 30(3), 221-238.

[83] Sakawa, M., and Yano, H. (1994)" A fuzzy dual decomposition method for large-scale multiobjective nonlinear programming problems" Fuzzy sets and Systems, 67(1), 19-27.

[84] Sastry, S. S. (2012)" Introductory Methods of Numerical Analysis" PHI Learning Pvt. Ltd.

[85] Seikkala, S. (1987)" On the Fuzzy Initial Value Problem" Fuzzy Sets and Systems, 24(3), 319-330.

[86] Sims, J. R., and Zhenyuan, W. (1990)" Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals: an Overview" International Journal Of General System, 17(2-3), 157-189.

[87] Slowinski, R., and Teghem, J. (Eds.). (1990)” Stochastic versus fuzzy approaches to multi-objective mathematical programming under uncertainty” Dordrecht: Kluwer Academic.

[88] Seikkala, S. (1987)” On the Fuzzy Initial Value Problem” Fuzzy Sets and Systems, 24(3), 319-330.

[89] Sugeno, M. (1974)” Theory of Fuzzy Integrals and its applications” Doct. Thesis, Tokyo Institute of Technology.

[90] Syau, Y. R., and Lee, E. S. (2006)” Fuzzy Weirstrass Theorem and Convex Fuzzy Mappings” Computers and Mathematics with Applications, 51(12), 1741-1750.

[91] Syau, Y. R. (1999)” On Convex and Concave Fuzzy Mappings” Fuzzy Sets and Systems, 103(1), 163-168.

[92] Syau, Y. R. (1999)” On Convex and Concave Fuzzy Mappings” Fuzzy Sets and Systems, 103(1), 163-168.

[93] Thorn, B. T. (2001). ” The Hand that Rocks the Cradle Rocks the World”: Women in Vancouver’s Communist Movement, 1935-1945. Simon Fraser University.

[94] Tang, J., and Wang, D. (1997)” A Nonsymmetric Model for Fuzzy Nonlinear Programming Problems with Penalty Coefficients” Computers and Operations Research, 24(8), 717-725.

[95] Tang, J., Wang, D., and Fung, R. Y. (1998)” Model and Method Based on GA for Nonlinear Programming Problems with Fuzzy Objective and Resources” International Journal of Systems Science, 29(8), 907-913.

[96] Tucker, A. W. (1951)” Theorems of Alternatives for Pairs of Matrices” In Symposium on Linear Inequalities and programming, USAF and NBS, Washington, D. C.

[97] Wang, G., and Wu, C. (2003)” Directional Derivatives and Subdifferential of Convex Fuzzy Mappings and Application in Convex Fuzzy Programming” Fuzzy Sets and Systems, 138(3), 559-591.

[98] Wu, H. C. (2003)” Duality Theorems in Fuzzy Mathematical Programming Problems Based on the Concept of Necessity” Fuzzy Sets and Systems, 139(2), 363-377.

[99] Wu, H. C. (2003)” Duality Theory in Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Coefficients” Fuzzy Optimization and Decision Making, 2(1), 61-73.

[100] Wu, H. C. (2004)" Evaluate Fuzzy Optimization Problems Based on Biobjective Programming Problems" Computers and Mathematics with Applications, 47(6-7), 893-902.

[101] Wu, H. C. (2007)" The Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions for the Optimization Problem with Fuzzy-Valued Objective Function" Mathematical Methods of Operations Research, 66(2), 203-224.

[102] Wu, H. C. (2009)" The Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions for Multi-Objective Programming Problems with Fuzzy-Valued Objective Functions" Fuzzy Optimization and Decision Making, 8(1), 1-28.

[103] Wu, H. C. (2009)" The Optimality Conditions for Optimization Problems with Convex Constraints and Multiple Fuzzy-Valued Objective Functions" Fuzzy Optimization and Decision Making, 8(3), 295-321.

[104] Wu, H. C. (2003)" Fuzzy Optimization Problems Based on Ordering Cones" Fuzzy Optimization and Decision Making, 2(1), 13-29.

[105] Wu, H. C. (2003)" Saddle Point Optimality Conditions in Fuzzy Optimization Problems" Fuzzy Optimization and Decision Making, 2(3), 261-273.

[106] Wu, H. C. (2004)" An (α, β)-optimal Solution Concept in Fuzzy Optimization Problems" Optimization, 53(2), 203-221.

[107] Wu, H. C. (2004)" Duality Theory in Fuzzy Optimization Problems" Fuzzy Optimization and Decision Making, 3(4), 345-365.

[108] Wu, H. C. (2007)" The Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions for the Optimization Problem with Fuzzy-Valued Objective Function" Mathematical Methods of Operations Research, 66(2), 203-224.

[109] Wu, H. C. (2008)" The Optimality Conditions for Optimization Problems with Fuzzy-Valued Objective Functions" Optimization, 57(3), 473-489.

[110] Wu, Z., and Xu, J. (2009)" Generalized Convex Fuzzy Mappings and Fuzzy Variational-like Inequality" Fuzzy Sets and Systems, 160(11), 1590-1619.

[111] Wu, Z., and Xu, J. (2008)" Nonconvex Fuzzy Mappings and the Fuzzy pre-variational Inequality" Fuzzy Sets and Systems, 159(16), 2090-2103.

[112] Yan, H., and Xu, J. (2002)” A Class of Convex Fuzzy Mappings” Fuzzy Sets and Systems, 129(1), 47-56.

[113] Yuan, Y. (1991)” Criteria for Evaluating Fuzzy Ranking Methods” Fuzzy Sets and Systems, 43(2), 139-157.

[114] Zhang, C., Yuan, X. H., and Lee, E. S. (2005)” Duality Theory in Fuzzy Mathematical Programming Problems with Fuzzy Coefficients” Computers and Mathematics with Applications, 49(11-12), 1709-1730.

[115] Zadeh, L. A. (1975)” The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning—I” Information Sciences, 8(3), 199-249.

[116] Zadeh, L. A. (1965)” Fuzzy sets” Information and control, 8(3), 338-353.

[117] Zimmermann, H. J., Zadeh, L. A., and Gaines, B. R. (1984)” Fuzzy Sets and Decision Analysis (Vol. 20)” North Holland.

[118] Zimmermann, H. J. (1975)” Description and Optimization of Fuzzy Systems” International Journal of General System, 2(1), 209-215.

[119] Zimmermann, H. J. (1978)” Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions” Fuzzy Sets and Systems, 1(1), 45-55.

[120] Zimmermann, H. J. (1985)” Applications of Fuzzy Set Theory to Mathematical Programming” Information Sciences, 36(1-2), 29-58.

[121] Zimmermann, H. J. (2011) ”Fuzzy Set Theory—and its Applications” Springer Science and Business Media.

Aabstract

Using H-differentiability of a fuzzy-valued function and a parametric total order relation on set of fuzzy numbers, we prove the necessary and sufficient optimality condition for unconstrained single and multi variable fuzzy optimization problems. The following, we solve the unconstrained and constrained fuzzy optimization problems using partial order relation-fuzzy max order on the set of fuzzy numbers. Under the concepts of convexity and generalized convexity of fuzzy-valued functions, we derive sufficient optimality conditions for constrained fuzzy optimization problems. Eventully, we propose the Newton's method for solving unconstrained single and multi variable fuzzy optimization problems.

Kay Word:Total Order Relation,Fuzzy Optimization,Non-dominated Solution ,Necessary and Sufficient Optimality Conditions

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Optimization

nonliner fuzzy optimization problems and methods for their sloving

By: Mozhgan Zade Amale

Supervisor

Dr. Mehrdad Ghaznavi

Advisor

Dr. Somayeh Moghari

September 2019