

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش بهینه سازی

پایان نامه کارشناسی ارشد

پایداری سیستم‌های کنترلی فازی تاکاگی - سوگینو

نگارنده: زهرا قره سفلو

استاد راهنما

دکتر محمدهادی نوری اسکندری

خرداد ماه ۱۳۹۸

تقدیم به
پدر و مادروهمسر عزیزم

سپاس گزاری...

اینک که به فضل خداوند این پروژه به سرانجام رسیده، وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد گرامی جناب آقای دکتر محمدهادی نوری اسکندری که در اجرای این پروژه مرا یاری فرموده اند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همواره از خداوند متعال سلامتی و توفیق روز افزون شما را خواهانم .

زهرا قره سفلو
خرداد ماه ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب زهرا قره سفلو دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان پایداری سیستم‌های کنترلی فازی تاکاگی-سوگینو، تحت راهنمایی محمدهادی نوری اسکندری متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهرا قره سفلو

خرداد ماه ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مدل‌های تاکاگی - سوگینو معرفی می‌شوند. با یک مثال نحوه استفاده از این مدل‌ها برای تقریب زدن یک تابع (یاداده‌های موجود) را توضیح می‌دهیم. سپس رهیافتی برای طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های غیرخطی براساس مدل‌سازی تاکاگی - سوگینو ارائه می‌دهیم. و به آنالیز پایداری می‌پردازیم. همچنین مسأله جرم - فنر را در نظر می‌گیریم و یک کنترل کننده برای آن ارائه می‌دهیم. علاوه بر این دو رهیافت PDC و PPDC را برای پایداری سیستم‌های تاکاگی - سوگینو به کار می‌بریم و با مقایسه آن‌ها نشان می‌دهیم که رهیافت PPDC می‌تواند نتایج بهتری نسبت به رهیافت PDC داشته باشد. نتایج برای مسأله جرم - فنر شبیه سازی می‌شود.

کلمات کلیدی: سیستم‌های فازی، قواعد اگر-آنگاه فازی، گزاره‌های فازی، مدل‌سازی فازی TS، رهیافت PDC و PPDC.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. زهرا قره سفلو، دکتر محمد هادی نوری اسکندری، بررسی شرایط پایداری سیستم‌های کنترلی فازی تاکاگی-سوگینو، دومین سمینار ملی کنترل و بهینه‌سازی، ۲۴-۲۵ آبان ۱۳۹۷.

فهرست مطالب

| | |
|----|--|
| س | فهرست تصاویر |
| ف | فهرست جداول |
| ۱ | سیستم‌های فازی ۱ |
| ۵ | ۱.۱ نظریه فازی و مجموعه های فازی |
| ۵ | ۱.۱.۱ دهه ۱۹۶۰ آغاز نظریه فازی |
| ۵ | ۲.۱.۱ مجموعه‌های فازی و عملیات اساسی بر روی مجموعه‌های فازی |
| ۶ | ۳.۱.۱ مفاهیم اساسی مرتبط با مجموعه‌های فازی |
| ۸ | ۴.۱.۱ عملیات بر روی مجموعه‌های فازی |
| ۹ | ۵.۱.۱ اجتماع فازی (S - نرم‌ها) |
| ۱۰ | ۶.۱.۱ اشتراک فازی (t - نرم‌ها) |
| ۱۲ | ۲.۱ ترکیب روابط فازی |
| ۱۳ | ۳.۱ اصل توسعه |
| ۱۴ | ۴.۱ قواعد اگر-آنگاه فازی |
| ۱۵ | ۱.۴.۱ گزاره‌های فازی |
| ۱۵ | ۲.۴.۱ تفسیر قواعد اگر-آنگاه فازی |
| ۱۹ | ۲ مدل سازی فازی تاکاگی - سوگینو |
| ۱۹ | ۱.۲ مقدمه |
| ۱۹ | ۲.۲ مدل سازی فازی TS |
| ۲۳ | ۳.۲ پارامترهای روش وزنی |
| ۲۴ | ۱.۳.۲ مثال عددی |
| ۲۷ | ۳ طراحی کنترل کننده برای سیستم های غیرخطی با استفاده از مدل های TS |
| ۲۷ | ۱.۰.۳ مقدمه |
| ۲۹ | ۲.۰.۳ آنالیز پایداری و طراحی |

| | | | |
|----|-------|--|---|
| ۳۲ | | مثال کاربردی ۳.۰.۳ | |
| ۳۹ | | رهیافت های PDC و PPDC برای پایداری سیستم های فازی TS | ۴ |
| ۳۹ | | مقدمه ۱.۴ | |
| ۴۰ | | مدل فازی (TS) ۲.۴ | |
| ۴۱ | | PDC و PPDC ۳.۴ | |
| ۴۲ | | آنالیز پایداری در رهیافت PPDC ۴.۴ | |
| ۴۴ | | حل LMI ۵.۴ | |
| ۴۴ | | مثال عددی ۶.۴ | |
| ۴۹ | | نتیجه گیری | ۵ |
| ۵۱ | | مراجع | |

فهرست تصاویر

| | | |
|----|---|-----|
| ۲ | ساختار اصلی سیستم‌های فازی خالص | ۱.۱ |
| ۳ | ساختار اصلی سیستم فازی | ۲.۱ |
| ۴ | ساختار اصلی سیستم‌های فازی با فازی‌ساز و غیرفازی‌ساز | ۳.۱ |
| ۴ | طبقه‌بندی نظریه فازی | ۴.۱ |
| ۲۴ | داده‌های ورودی-خروجی | ۱.۲ |
| ۲۴ | نتایج شناسایی پارامترها | ۲.۲ |
| ۲۵ | توابع عضویت M_1^1 و M_1^2 | ۳.۲ |
| ۳۲ | سیستم جرم-فزر | ۱.۳ |
| | تابع عضویت مدل ماشین فازی سیستم جرم-فزر غیرخطی: $\mu_{M_1^1}(x(t)) =$ | ۲.۳ |
| | $\mu_{M_1^2}(x(t)) = \mu_{M_1^3}(x(t)) =$ (خط ممتد)، $\mu_{M_1^2}(x(t)) = 1 - (x^2/2.25)$ | |
| ۳۴ | (خط نقطه‌چین) $1 - (x^2/2.25)$ | |
| | تابع عضویت مدل ماشین فازی سیستم جرم-فزر غیرخطی: $\mu_{M_1^1}(\dot{x}(t)) =$ | ۳.۳ |
| | $\mu_{M_1^2}(\dot{x}(t)) = \mu_{M_1^3}(\dot{x}(t)) =$ (خط ممتد)، $\mu_{M_1^2}(\dot{x}(t)) = 1 - (\dot{x}^2/6.75)$ | |
| ۳۴ | (خط نقطه‌چین) $(\dot{x}^2/6.75)$ | |
| | پاسخ $x_1(t)$ سیستم جرم-فزر توسط یک کنترل کننده خطی (خط نقطه | ۴.۳ |
| | چین)، کنترل کننده غیرخطی پیشنهاد شده (خط ممتد) و $u(t) = 0$ (خط | |
| ۳۵ | بریده بریده) | |
| | پاسخ $x_2(t)$ سیستم جرم-فزر توسط یک کنترل کننده خطی (خط نقطه | ۵.۳ |
| | چین)، کنترل کننده غیرخطی پیشنهاد شده (خط ممتد) و $u(t) = 0$ (خط | |
| ۳۶ | بریده بریده) | |
| | کنترل سیگنال‌های $u(t)$ با کنترل کننده خطی (خط نقطه چین) ارائه شده | ۶.۳ |
| ۳۷ | و کنترل کننده غیرخطی پیشنهادی (خط ممتد). | |
| ۴۵ | پاسخ‌های مدل سازی PDC $(x(0) = [1/5 \ 0]^T)$ | ۱.۴ |
| ۴۶ | پاسخ‌های مدل سازی PPDC $(x(0) = [1/5 \ 0]^T)$ | ۲.۴ |

| | | | |
|----|-------|--|-----|
| ۴۶ | | $(x(\circ) = [-1/5 \ \circ]^T)$ <i>PDC</i> مدل سازی | ۳.۴ |
| ۴۷ | | $(x(\circ) = [-1/5 \ \circ]^T)$ <i>PPDC</i> مدل سازی | ۴.۴ |

فهرست جداول

| | | |
|----|--|-----|
| ۱۵ | عملگر استلزام در منطق کلاسیک | ۱.۱ |
| ۴۲ | مقایسه تعداد پارامترهای کنترل کننده های PDC و PPDC | ۱.۴ |

فصل ۱

سیستم‌های فازی

سیستم‌های فازی، سیستم‌هایی مبتنی بر دانش یا قواعد هستند. قلب یک سیستم فازی یک پایگاه دانش بوده که از قواعد اگر- آنگاه فازی تشکیل شده است. یک قاعده اگر- آنگاه فازی یک عبارت اگر- آنگاه بوده که بعضی کلمات آن بوسیله توابع عضویت پیوسته مشخص شده‌اند. در ادامه مفاهیمی مرتبط با سیستم‌های فازی از [۵۰] کتاب ارائه می‌گردد. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم کنترل کننده‌ای طراحی کنیم که سرعت اتومبیل را به طور خودکار کنترل کند. بطور کلی دو راه‌حل برای طراحی چنین کنترل کننده‌ای وجود دارد. یک راه‌حل استفاده از کنترل کننده‌های متعارف بوده و راه‌حل دوم شبیه‌سازی رفتار رانندگان است، بدین معنی که قواعدی که راننده در حین حرکت استفاده می‌کند را به کنترل کننده خودکار تبدیل کنیم. ما راه‌حل دوم را در نظر می‌گیریم. در صحبت‌های عامیانه راننده‌ها در شرایط طبیعی از سه قاعده زیر در حین رانندگی استفاده می‌کنند.

(۱.۱) اگر سرعت پایین است آنگاه نیروی بیشتری به پدال گاز وارد کنید.

(۲.۱) اگر سرعت متوسط است آنگاه نیروی متعادلی به پدال گاز وارد کنید.

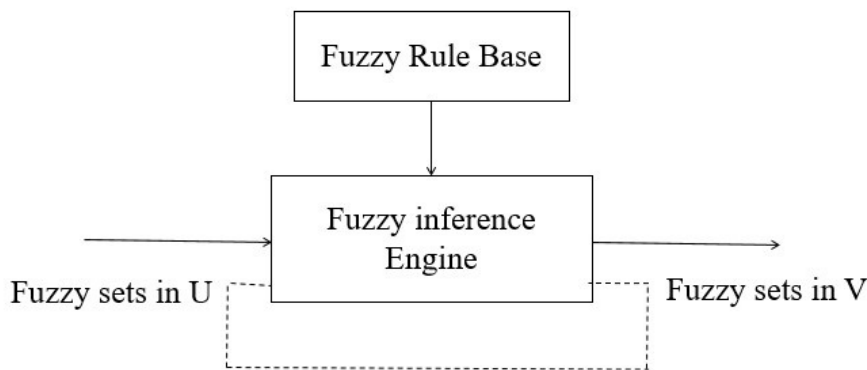
(۳.۱) اگر سرعت بالا است آنگاه نیروی کمتری به پدال گاز وارد کنید.

به این ترتیب، نقطه‌ی شروع ساخت یک سیستم فازی به دست آوردن مجموعه‌ای از قواعد اگر- آنگاه فازی از دانش افراد خبره یا دانش حوزه مورد بررسی است مرحله بعد، ترکیب این

قواعد در یک سیستم واحد است. سیستم‌های فازی مختلف از اصول و روش‌های متفاوتی برای ترکیب این قواعد استفاده می‌کنند. بنابراین سوال اساسی این است چه نوع سیستم‌های فازی معمولاً کارایی بیشتری دارد. در کتب و مقالات معمولاً از سه نوع سیستم فازی صحبت به میان می‌آید:

- (۱) سیستم‌های فازی خالص
- (۲) سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگینو (TS)^۱
- (۳) سیستم‌های با فازی‌ساز و غیرفازی‌ساز.

ساختار اصلی یک سیستم فازی خالص در شکل (۱.۱) نشان داده شده است. پایگاه قواعد فازی مجموعه‌ای از قواعد اگر-آنگاه فازی را نشان می‌دهد. به عنوان مثال برای کنترل کننده اتومبیل پایگاه قواعد فازی شامل قواعد (۱.۱) تا (۳.۱) است. موتور استنتاج فازی این قواعد را به یک نگاشت از مجموعه‌های فازی در فضای ورودی به مجموعه‌های فازی در فضای خروجی بر اساس اصول منطق فازی ترکیب می‌کند. در شکل (۱.۱) اگر خط نقطه‌چین وجود داشته باشد چنین سیستمی سیستم فازی دینامیک نامیده می‌شود.



شکل ۱.۱: ساختار اصلی سیستم‌های فازی خالص

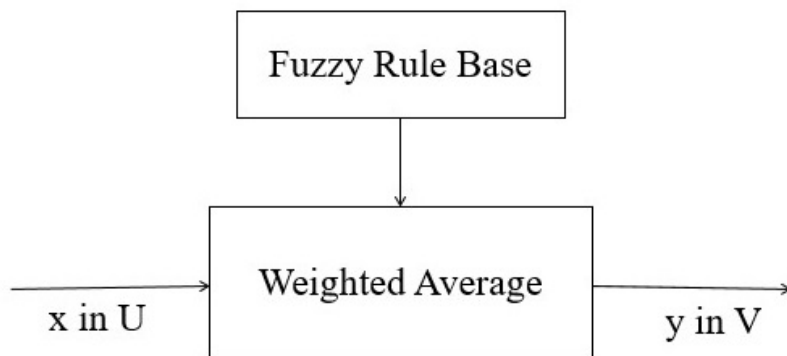
مشکل اصلی در رابطه با سیستم‌های فازی خالص این است که ورودی‌ها و خروجی‌های آن مجموعه‌های فازی هستند. در حالی که در سیستم‌های مهندسی، ورودی و خروجی‌ها متغیرهایی با مقادیر حقیقی هستند.

برای حل این مشکل، تاکاگی-سوگینو نوع دیگری سیستم‌های فازی معرفی کرده‌اند که ورودی‌ها و خروجی‌های آن متغیرهایی با مقادیر واقعی هستند. سیستم (TS) از قواعدی به این صورت استفاده می‌کند.

¹ Takagi-Sugeno

(۴.۱) اگر سرعت اتومبیل x بالا است، آنگاه نیروی وارد بر پدال گاز برابر است با $y = cx$

که واژه بالا همان معادله (۳.۱) را داده و c یک عدد ثابت است. مقایسه (۴.۱) با (۳.۱) نشان می‌دهد که بخش آنگاه قاعده فازی از یک عبارت توصیفی با مقادیر زبانی به یک رابطه ریاضی ساده تبدیل شده است. این تغییر، ترکیب قواعد فازی را ساده‌تر می‌سازد. در حقیقت سیستم فازی یک میانگین وزنی از مجموع قواعد آنگاه است. ساختار اصلی سیستم فازی در شکل (۲.۱) نشان داده شده است.



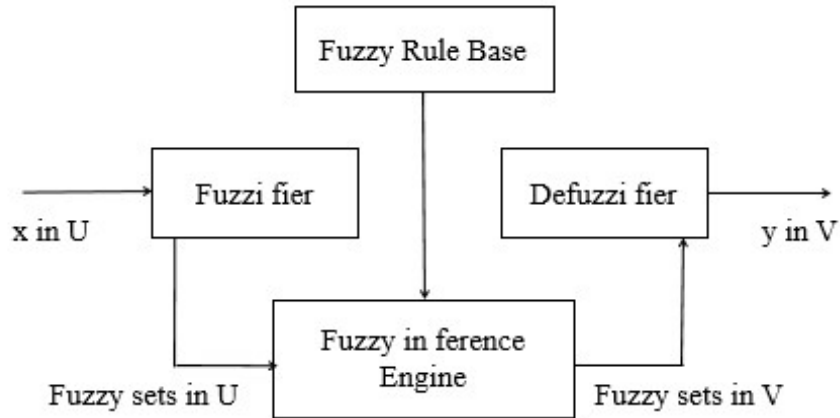
شکل ۲.۱: ساختار اصلی سیستم فازی

مشکلات عمده سیستم فازی عبارتند از:

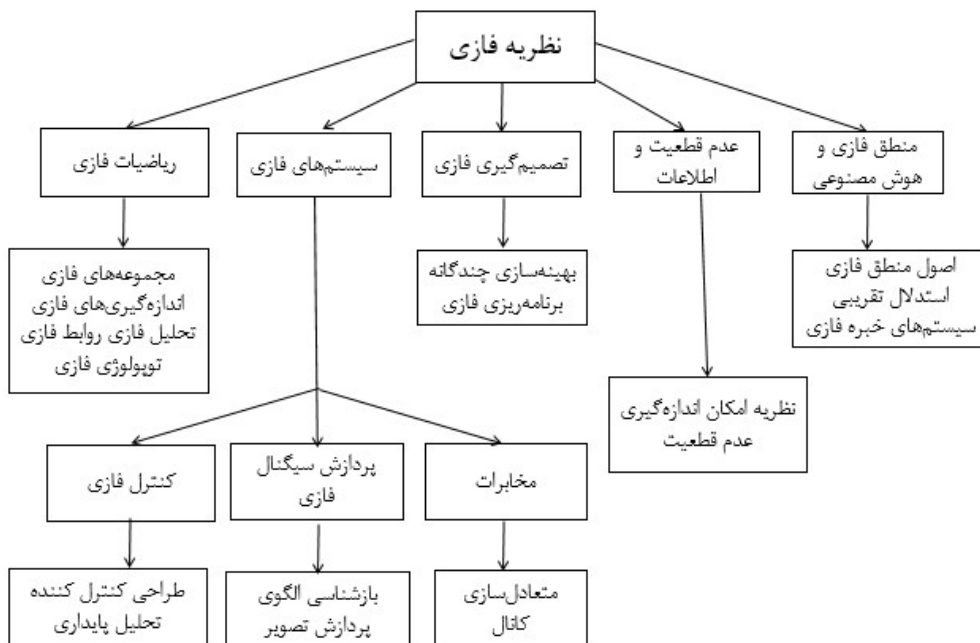
- (۱) بخش آنگاه قاعده یک فرمول ریاضی بوده و بنابراین چهارچوبی را برای نمایش دانش بشری فراهم نمی‌کند.
- (۲) این سیستم دست ما را برای اعمال اصول مختلف منطق فازی باز نمی‌گذارد و در نتیجه انعطاف‌پذیری سیستم‌های فازی در این ساختار وجود ندارد.

برای حل این مشکلات ما از نوع سومی از سیستم‌های فازی یعنی سیستم‌های فازی با فازی‌سازها و غیرفازی‌سازها استفاده می‌کنیم.

به منظور استفاده از سیستم‌های فازی خالص در سیستم‌های مهندسی، یک روش ساده، اضافه کردن یک فازی‌ساز در ورودی، که متغیرهای با مقادیر حقیقی را به یک مجموعه فازی تبدیل کرده و یک غیرفازی‌ساز، که یک مجموعه فازی را به یک متغیر با مقدار حقیقی در خروجی تبدیل می‌کند، است. نتیجه یک سیستم فازی با فازی‌ساز و غیرفازی‌ساز بوده که در شکل (۳.۱) نشان داده شده است.



شکل ۳.۱: ساختار اصلی سیستم‌های فازی با فازی‌ساز و غیرفازی‌ساز



شکل ۴.۱: طبقه‌بندی نظریه فازی

۱.۱ نظریه فازی و مجموعه های فازی

۱.۱.۱ دهه ۱۹۶۰ آغاز نظریه فازی

نظریه فازی بوسیله پرفسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ در مقاله ای بنام «مجموعه های فازی» معرفی گردید. در اوایل دهه ۶۰ او فکر کرد که نظریه کنترل کلاسیک بیش از حد بر روی دقت تأکید داشته و از این رو با سیستم های پیچیده نمی تواند کار کند. پس از آن وی ایده اش را در مقاله مجموعه های فازی تجسم بخشید.

به دلیل اینکه کاربردهای عملی نظریه فازی در ابتدای پیدایش آن مشخص نبود، تفهیم آن از جهت فلسفی کار مشکلی بود و تقریباً هیچ یک از مراکز تحقیقاتی نظریه فازی را به عنوان یک زمینه تحقیق جدی نگرفتند. با وجودی که نظریه فازی جایگاه واقعی خود را پیدا نکرده بود. هنوز محققینی در گوشه و کنار دنیا خود را وقف این زمینه جدید نمودند و در اواخر دهه ۱۹۶۰ روش های جدید فازی نظیر الگوریتم های فازی، تصمیم گیری های فازی و ... مطرح گردید. بسیاری از مفاهیم بنیادی نظریه فازی توسط زاده در اواخر دهه ۶۰ و اوایل دهه ۷۰ مطرح شد. پس از معرفی مجموعه ی فازی در سال ۱۹۶۵، مفاهیم الگوریتم های فازی در سال ۱۹۶۸، تصمیم گیری فازی در سال ۱۹۷۰ و ترتیب فازی در سال ۱۹۷۱ مطرح شد. در سال ۱۹۷۳ او مقاله ی دیگری را به نام «طرح یک راه حل جدید برای تجزیه تحلیل سیستم های پیچیده و فرآیندهای تصمیم گیری» مطرح نمود. این مقاله اساس کنترل فازی را بنا کرد. او در این مقاله مفهوم متغیرهای زبانی و استفاده از قواعد اگر- آنگاه را برای فرموله کردن دانش بشری معرفی نمود.

۲.۱.۱ مجموعه های فازی و عملیات اساسی بر روی مجموعه های فازی

فرض کنید U مجموعه جهانی و شامل تمامی عناصر و اعضا ممکن در بحث یا کاربرد مورد نظر ما باشد. یادآوری می شود که یک مجموعه کلاسیک A یا به اختصار مجموعه A در فضای جهانی U را می توان با دو روش فهرست و قاعده تعریف کرد. روش فهرست^۲ را فقط می توان در مجموعه های متناهی به کار برد، بنابراین کاربرد محدودی دارد. روش قاعده^۳ کلی تر است. در روش قاعده یک مجموعه A به صورت زیر تعریف می شود:

$$A = \{x \in U \mid x \text{ در شرایطی صدق می کند}\} \quad (1.1)$$

^۲ Rule Method

^۳ Rule Method

روش سومی نیز برای تعریف مجموعه A وجود دارد. روش عضویت که یک تابع عضویت دو مقداری $\{(1, 0)\}$ را برای A معرفی می‌کند که با $\mu_A(x)$ نشان داده می‌شود. به نحوی که

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

مجموعه A از نظر ریاضی متناظر با تابع عضویت $\mu_A(x)$ بوده و با معلوم بودن $\mu_A(x)$ مجموعه نیز معلوم خواهد بود.

تعریف ۱.۱.۱. یک مجموعه فازی A در فضای جهانی U به وسیله یک تابع $\mu_A(x)$ که مقداری در بازه $[0, 1]$ اختیار می‌کند، مشخص می‌شود.

بنابراین یک مجموعه فازی تعمیم یک مجموعه کلاسیک است که اجازه می‌دهد تابع عضویت هر مقداری را در بازه $[0, 1]$ اختیار کند. به عبارت دیگر یک مجموعه کلاسیک فقط می‌توانست دو مقدار 0 و 1 داشته باشد، در حالی که تابع عضویت یک مجموعه فازی یک تابع پیوسته در محدوده $[0, 1]$ است. در واقع می‌بینیم که هیچ چیز در مورد مجموعه فازی گنگ و مبهم نیست بلکه مجموعه فازی مجموعه‌ای است با یک تابع عضویت پیوسته. یک مجموعه فازی A را در U می‌توان با یک مجموعه از زوج‌های مرتب x و مقدار عضویت آن نمایش داد. بدین ترتیب

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}. \quad (3.1)$$

هنگامی که U پیوسته باشد (به عنوان مثال $U = \mathbb{R}$) را معمولاً بانماد زیر نشان می‌دهند.

$$A = \int_U \mu_A(x)/x \quad (4.1)$$

که علامت \int نشان دهنده‌ی انتگرال نیست بلکه اجتماع تمامی نقاط $x \in U$ و مقدار تابع عضویت متناظر $\mu_A(x)$ را نشان می‌دهد. هنگامی که U گسسته باشد A معمولاً به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$A = \sum_U \mu_A(x)/x \quad (5.1)$$

که در اینجا نیز علامت \sum به معنای جمع ریاضی نیست بلکه اجتماع تمامی نقاط $x \in U$ و تابع عضویت متناظر $\mu_A(x)$ را نشان می‌دهد.

۳.۱.۱ مفاهیم اساسی مرتبط با مجموعه‌های فازی

تعریف ۲.۱.۱. تکیه‌گاه^۴ مجموعه فازی A در فضای جهانی U یک مجموعه غیرفازی است که شامل تمامی عضوهای غیرصفر U می‌شود یعنی:

$$\text{supp}(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (6.1)$$

⁴Support

نظریه فازی و مجموعه های فازی ۷

که $supp(A)$ نشان دهنده تکیه گاه مجموعه فازی A است. اگر تکیه گاه یک مجموعه فازی خالی باشد آن را یک مجموعه فازی تهی می نامند.

تعریف ۳.۱.۱. یک منفرد فازی^۵ یک مجموعه فازی است که تکیه گاه آن یک نقطه واحد در U است.

تعریف ۴.۱.۱. مرکز^۶ یک مجموعه فازی بدین صورت تعریف می شود که اگر مقدار میانگین تمامی نقاطی که در آنها تابع عضویت مجموعه فازی به حداکثر مقدار خود می رسد، محدود باشد در این صورت این مقدار میانگین، مرکز یک مجموعه فازی است و اگر مقدار میانگین مثبت بی نهایت (منفی بی نهایت) باشد در آن صورت مرکز به صورت کوچکترین (بزرگترین) نقطه ای که در آن نقاط تابع به حداکثر مقدار خود می رسد تعریف می شود.

تعریف ۵.۱.۱. نقطه ی تقاطع^۷ یک مجموعه فازی، نقطه ای در U است که در آن مقدار تابع عضویت برابر 0.5 است.

تعریف ۶.۱.۱. ارتفاع^۸ یک مجموعه فازی، بزرگترین مقدار یک تابع عضویت است. اگر ارتفاع یک مجموعه فازی برابر ۱ باشد در این صورت آن را یک مجموعه فازی نرمال می نامند.

تعریف ۷.۱.۱. برش آلفای یک مجموعه فازی A یک مجموعه غیر فازی A_α است که شامل تمامی عضوهای U می باشد که مقادیر عضویتی بزرگتر یا مساوی α دارند یعنی

$$A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (7.1)$$

لم ۱.۱.۱. یک مجموعه فازی A در \mathbb{R}^n محدب نامیده می شود اگر و فقط اگر برای $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] \quad (8.1)$$

وقتی که مجموعه جهانی U یک فضای n بعدی \mathbb{R}^n باشد، مفهوم تحدب را می توان به مجموعه های فازی تعمیم داد. یک مجموعه فازی محدب نامیده می شود اگر و فقط اگر برش α آن (A_α) برای هر مقدار α در محدوده $[0, 1]$ یک مجموعه محدب باشد.

⁵ Single Fuzzy

⁶ Center

⁷ Crossover

⁸ Height

۴.۱.۱ عملیات بر روی مجموعه‌های فازی

تعریف ۸.۱.۱. دو مجموعه A و B معادل هستند اگر و فقط اگر برای تمامی مقادیر $x \in U$ ،

$$\mu_A(x) = \mu_B(x)$$

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه A زیر مجموعه B است اگر و فقط اگر برای تمامی مقادیر $x \in U$ ،

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

تعریف ۱۰.۱.۱. مکمل مجموعه فازی A مجموعه فازی \bar{A} در U است که تابع عضویت آن به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (۹.۱)$$

تعریف ۱۱.۱.۱. اجتماع A و B یک مجموعه فازی در U است که با $A \cup B$ نشان داده شده و تابع عضویت آن به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (۱۰.۱)$$

تعریف ۱۲.۱.۱. اشتراک A و B یک مجموعه فازی $A \cap B$ در U است با تابع عضویت زیر

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (۱۱.۱)$$

مکمل فازی: فرض کنید $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ نگاشتی باشد که تابع عضویت مجموعه فازی را به تابع عضویت مجموعه مکمل A تبدیل کند. بدین معنی که

$$C[\mu_A(x)] = \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (۱۲.۱)$$

برای اینکه تابع C واجد شرایط یک عملگر مکمل باشد باید حداقل دو شرط زیر را برآورده کند.

اصل موضوع c_1 : $c(0) = 1$, $c(1) = 0$ (شرط مرزی)

اصل موضوع c_2 : برای تمامی مقادیر $a, b \in [0, 1]$ اگر $a < b$ آنگاه $c(a) \geq c(b)$.

(شرط نزولی بودن) که a و b نشان دهنده‌ی توابع عضویت دو مجموعه فازی هستند، یعنی

$$b = \mu_B(x) \text{ و } a = \mu_A(x)$$

تعریف ۱۳.۱.۱. هر تابع $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ که اصول موضوع c_1 و c_2 را برآورده نماید یک مکمل فازی نامیده می‌شود. یک کلاس از مکمل‌های فازی، کلاس سوگینو^۹ است. که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \quad (۱۳.۱)$$

^۹Sugeno Class

که $\lambda \in (-1, \infty)$.

نوع دیگر مکمل فازی، کلاس یاگر^{۱۰} است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_w(a) = (1 - a^w)^{\frac{1}{w}} \quad (14.1)$$

که $w \in (0, \infty)$.

۵.۱.۱ اجتماع فازی (S - نرمها)

فرض کنید $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ نگاشتی باشد که توابع عضویت مجموعه های A و B را به تابع عضویت اجتماع A و B تبدیل می کند یعنی:

$$s[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cup B}(x) \quad (15.1)$$

در مورد رابطه (۱۰.۱) داریم:

$$s[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

برای اینکه تابع s واجد شرایط اجتماع باشد باید حداقل چهار شرط یا اصل موضوع را برآورده کند:

اصل موضوع s_1 : $s(0, a) = s(a, 0) = a, s(1, 1) = 1$ (شرط مرزی)

اصل موضوع s_2 : $s(a, b) = s(b, a)$ (شرط جابجایی)

اصل موضوع s_3 : اگر $a \leq a'$ و $b \leq b'$ آنگاه $s(a, b) \leq s(a', b')$ (شرط صعودی)

اصل موضوع s_4 : $s(s(a, b), c) = s(a, s(b, c))$ (شرط شرکت پذیری)

تعریف ۱۴.۱.۱. هر تابع $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ که اصول موضوع s_1 تا s_4 را ارضا نماید، یک s -نرم نامیده می شود. حال در اینجا ما سه رده خاص از s -نرمها را معرفی می کنیم: کلاس دوجهی^{۱۱}:

$$s_\lambda(a, b) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{-\frac{1}{\lambda}}} \quad (16.1)$$

که $\lambda \in (0, \infty)$.

کلاس دبوئیس-پرید^{۱۲}:

$$s_\alpha(a, b) = \frac{a + b - ab - \min(a, b, 1 - \alpha)}{\max(1 - a, 1 - b, \alpha)} \quad (17.1)$$

¹⁰Yager Class

¹¹Dombi Class

¹²Dubois-Prade class

که $\alpha \in [0, 1]$
 کلاس یاگر^{۱۳}:

$$s_w(a, b) = \min\{1, (a^w + b^w)^{\frac{1}{w}}\} \quad (18.1)$$

که $w \in (0, \infty)$
 جمع دراستیک^{۱۴}:

$$s_{ds}(a, b) = \begin{cases} a, & b = 0 \\ b, & a = 0 \\ 1, & o.w \end{cases} \quad (19.1)$$

جمع اینشتین^{۱۵}:

$$s_{es}(a, b) = \frac{a + b}{1 + ab} \quad (20.1)$$

جمع جبری^{۱۶}:

$$s_{as}(a, b) = a + b - ab \quad (21.1)$$

ماکزیم مطابق رابطه‌ی (۱۰.۱)

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

۶.۱.۱ اشتراک فازی (t - نرم‌ها)

فرض کنید $t: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابعی باشد که توابع عضویت مجموعه‌های فازی A و B را به تابع عضویت مجموعه فازی اشتراک A و B تبدیل کند یعنی:

$$t[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cap B}(x) \quad (22.1)$$

در مورد رابطه (۱۱.۱) داریم:

$$t[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (23.1)$$

برای اینکه تابع t واجد شرایط یک اشتراک باشد، باید حداقل چهار شرط زیر را برآورده کند:

¹³Yager Class

¹⁴Drastic Sum

¹⁵Einstein sum

¹⁶Algbtric sum

- اصل موضوع t_1 : $t(\circ, \circ) = \circ, t(a, 1) = t(1, a) = a$ (شرط مرزی)
- اصل موضوع t_2 : $t(a, b) = t(b, a)$ (شرط جابجایی)
- اصل موضوع t_3 : اگر $a \leq a'$ و $b \leq b'$ آنگاه $t(a, b) \leq t(a', b')$ (شرط صعودی بودن)
- اصل موضوع t_4 : $t[t(a, b), c] = t[a, t(b, c)]$ (شرط شرکت پذیری)

تعریف ۱۵.۱.۱. هر تابع $t: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ که اصول موضوع t_1 تا t_4 را ارضاء نماید یک t -نرم نامیده می شود. بنابراین متناظر با s -نرم های کلاس دوجهی، دبیوس-پرید و یاگر، t -نرم های کلاس دوجهی، دبیوس-پرید و یاگر وجود دارد که بدین ترتیب تعریف می شوند: کلاس دوجهی:

$$t_\lambda(a, b) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{-\frac{1}{\lambda}}} \quad (24.1)$$

که $\lambda \in (0, \infty)$.

کلاس دبیوس-پرید:

$$t_\alpha(a, b) = \frac{ab}{\max(a, b, \alpha)} \quad (25.1)$$

که $\alpha \in [0, 1]$.

کلاس یاگر:

$$t_w(a, b) = 1 - \min\{1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{\frac{1}{w}}\} \quad (26.1)$$

که $w \in (0, \infty)$.

متناظر با s -نرم های (۱۹.۱) تا (۲۱.۱) و (۱۰.۱) t -نرم هایی وجود دارند که در زیر معرفی شده اند:

ضرب دراستیک:

$$t_{ds}(a, b) = \begin{cases} a & \text{و } b = 1 \\ b & \text{و } a = 1 \\ \circ & \text{و } a, b < 1 \end{cases} \quad (27.1)$$

ضرب اینشتین:

$$t_{es}(a, b) = \frac{ab}{2 - (a + b - ab)} \quad (28.1)$$

ضرب جبری:

$$t_{as}(a, b) = ab \quad (29.1)$$

مینیمم مطابق رابطه (۱۱.۱)

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

تعریف ۱۶.۱.۱. یک رابطه فازی، یک مجموعه فازی است که در فضای حاصل ضرب برداری مجموعه‌های قطعی U_1, U_2, \dots, U_n تعریف شده است. با استفاده از نحوه نمایش $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}$ یک رابطه فازی Q در فضای $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ به صورت یک مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Q = \{(u_1, u_2, \dots, u_n), \mu_Q(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n\} \quad (۳۰.۱)$$

که

$$\mu_Q : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \longrightarrow [0, 1]$$

مثال ۱.۱.۱. فرض کنید U و V مجموعه اعداد حقیقی باشند. یعنی $U = V = \mathbb{R}$. رابطه فازی « x تقریباً برابر است با y » که با AE نشان داده می‌شود را می‌توان با تابع عضویت زیر نشان داد

$$\mu_{AE}(x, y) = e^{-(x-y)^2} \quad (۳۱.۱)$$

بطور مشابه رابطه فازی « x بسیار بزرگتر است از y » که با ML نشان داده می‌شود را می‌توان با تابع عضویت زیر نشان داد

$$\mu_{ML}(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-(x-y)}} \quad (۳۲.۱)$$

۲.۱ ترکیب روابط فازی

تعریف ۱.۲.۱. ترکیب روابط فازی $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ که با $P \circ Q$ نشان داده می‌شود به صورت یک رابطه فازی در $U \times W$ تعریف می‌شود که تابع عضویت آن به صورت زیر است

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} t[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)] \quad (۳۳.۱)$$

که $(x, z) \in U \times W$ و t یک نرم- t است) دو تا از مهمترین ترکیب‌های مورد استفاده ترکیب ماکزیمم-مینیمم و ترکیب ماکزیمم-حاصلضرب است که به صورت زیر تعریف می‌شوند. ترکیب ماکزیمم-مینیمم روابط فازی $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ یک رابطه فازی $P \circ Q$ در $U \times W$ بوده که با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} \min [\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)] \quad (۳۴.۱)$$

که $(x, z) \in U \times W$.

ترکیب ماکزیمم - حاصلضرب روابط فازی $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ یک رابطه فازی $P \circ Q$ در $U \times W$ بوده که با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} [\mu_P(x, y) \cdot \mu_Q(y, z)] \quad (35.1)$$

که $(x, z) \in U \times W$.

مثال ۱.۲.۱. فرض کنید $U = V = W = \mathbb{R}$ باشد. رابطه فازی AE (تقریباً برابر) و ML (خیلی بزرگتر) که بوسیله $\mu_{AE}(x, y) = e^{-(x-y)^2}$ و $\mu_{ML}(x, y) = \frac{1}{1+e^{-(x-y)}}$ تعریف شده‌اند را در نظر بگیرید. حال می‌خواهیم ترکیب $AE \circ ML$ را تعیین کنیم. با استفاده از ترکیب ماکزیمم - حاصلضرب داریم:

$$\mu_{AE \circ ML}(x, y) = \max_{z \in \mathbb{R}} \left[\frac{e^{-(x-y)^2}}{1+e^{-(y-z)}} \right] \quad (36.1)$$

برای محاسبه سمت راست رابطه فوق باید به ازای $x, z \in \mathbb{R}$ ثابت، مقدار $y \in \mathbb{R}$ را که در آن نقطه $\frac{e^{-(x-y)^2}}{1+e^{-(y-z)}}$ به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد را معین کنیم. شرط لازم برای این منظور عبارتست از

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{e^{-(x-y)^2}}{1+e^{-(y-z)}} \right] = 0 \quad (37.1)$$

از آنجا که بدست آوردن پاسخ فوق مشکل است در عمل باید به ازای مقادیر داده شده x و z ، ابتدا مقدار عددی رابطه‌ی بالا را پیدا کرده و آنگاه آنرا در رابطه (۳۶.۱) جای‌گذاری نماییم.

۳.۱ اصل توسیع

اصل توسیع یک معادله‌ی اساسی است که اجازه می‌دهد دامنه یک تابع را از نقاط در U به مجموعه‌های فازی در U توسعه داد. مشخص‌تر اینکه، فرض کنید $f: U \rightarrow V$ تابعی از مجموعه قطعی U به مجموعه قطعی V باشد. همچنین فرض کنید که یک مجموعه فازی A در U داده شده و ما می‌خواهیم مجموعه فازی B را در V به نحوی معین کنیم که $B = f(A)$ اگر f یک نگاشت یک‌به‌یک باشد آنگاه داریم:

$$\mu_B(y) = \mu_A[f^{-1}(y)] \quad , \quad y \in V \quad (38.1)$$

که $f^{-1}(y)$ معکوس f بوده، بدین معنی که $f[f^{-1}(y)] = y$. اگر f یک‌به‌یک نباشد آنگاه هنگامی که دو یا چند نقطه متمایز در U با مقادیر عضویت متفاوت در A به یک نقطه یکسان در V نگاشته شود ابهامی بوجود خواهد آمد. بعنوان مثال ما می‌توانیم داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) = y$$

ولی $x_1 \neq x_2$ و $\mu_A(x_1) \neq \mu_A(x_2)$. در نتیجه سمت راست رابطه (۳۸.۱) می‌تواند دو مقدار مختلف $\mu_A(x_1) = f^{-1}(y)$ یا $\mu_A(x_2) = f^{-1}(y)$ را اختیار کند. برای رفع این ابهام ما مقدار بزرگتر را در بین دو مقدار عضویت به $\mu_B(y)$ نسبت می‌دهیم. در حالت کلی، تابع عضویت برای B به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_B(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \quad \text{و} \quad y \in V \quad \text{و} \quad x \in f^{-1}(y) \quad (39.1)$$

که $f^{-1}(y)$ نشان دهنده مجموعه تمامی نقاط $x \in U$ بوده به نحوی که $f(x) = y$. معادله (۳۹.۱) اصل توسعه نامیده می‌شود.

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ و $f(x) = x^2$ فرض کنید کوچک (*small*) یک مجموعه فازی باشد که در U بدین شکل تعریف می‌شود:

$$small = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{9} + \frac{0.6}{16} + \frac{0.4}{25}$$

آنگاه در نتیجه رابطه (۳۹.۱) داریم:

$$small^2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{9} + \frac{0.6}{16} + \frac{0.4}{25}$$

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید A یک مجموعه فازی در U باشد آنگاه «خیلی A» به عنوان یک مجموعه فازی U با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{very(A)}(x) = [\mu_A(x)]^2 \quad (40.1)$$

و «کم و بیش A» یک مجموعه فازی در U با تابع عضویت زیر است.

$$\mu_{more\ or\ less(A)}(x) = [\mu_A(x)]^{\frac{1}{2}} \quad (41.1)$$

۴.۱ قواعد اگر-آنگاه فازی

یک قاعده اگر-آنگاه فازی یک گزاره شرطی به صورت زیر است.

$$\text{اگر } \langle \text{گزاره فازی} \rangle \text{ آنگاه } \langle \text{گزاره فازی} \rangle \quad (42.1)$$

برای درک قواعد اگر-آنگاه فازی می‌بایست ابتدا گزاره‌های فازی را بشناسیم.

جدول ۱.۱: عملگر استلزام در منطق کلاسیک

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

۱.۴.۱ گزاره‌های فازی

دو نوع گزاره فازی وجود دارد. گزاره فازی ساده و گزاره فازی مرکب.

گزاره فازی ساده بدین شکل است: $x \text{ is } A$.

که x یک متغیر زبانی و A یک مقدار زبانی متغیر x است. (بدین معنی که A یک مجموعه فازی تعریف شده در دامنه تعریف x می‌باشد) یک گزاره فازی مرکب، ترکیبی از گزاره‌های فازی ساده با استفاده از اتصال دهنده «و»، «یا» و «نه» است که نشان دهنده اشتراک فازی، اجتماع فازی و مکمل فازی است.

۲.۴.۱ تفسیر قواعد اگر-آنگاه فازی

به دلیل اینکه عبارتهای فازی به عنوان روابط فازی تعبیر می‌شوند، سوال اساسی که باقی مانده این است که عملکرد اگر-آنگاه چگونه تفسیر و تعبیر می‌شود. در ریاضیات جدید عبارت اگر p آنگاه q به شکل $p \rightarrow q$ نوشته شده و عملگر استلزام \rightarrow مطابق جدول (۱.۱) تعریف می‌گردد که p و q متغیرهایی هستند که فقط دو مقدار T یا F را می‌پذیرند.

از جدول (۱.۱) مشاهده می‌شود که اگر p و q هر دو درست یا نادرست باشند در آنصورت $p \rightarrow q$ درست بوده و اگر p درست و q نادرست باشد آنگاه $p \rightarrow q$ نادرست و اگر p نادرست و q درست باشد آنگاه $p \rightarrow q$ درست می‌باشد. بنابراین $p \rightarrow q$ معادل است با

$$\bar{p} \vee q \quad (۴۳.۱)$$

و

$$(p \wedge q) \vee \bar{p} \quad (۴۴.۱)$$

که $-$ ، \vee و \wedge به ترتیب نشان دهنده عملیات مقدماتی "not"، "or" و "and" می‌باشند. به دلیل اینکه قواعد اگر-آنگاه فازی را می‌توان با جایگزینی p و q با عبارتهای فازی در نظر گرفت ما می‌توانیم قواعد اگر-آنگاه فازی را با جایگزینی $-$ ، \vee و \wedge با مکمل فازی، اجتماع

فازی و اشتراک فازی تفسیر نماییم. از آنجا که چند نوع عملگر مکمل، اجتماع و اشتراک فازی وجود دارد تفسیرهای متعددی می‌تواند برای قاعده اگر-آنگاه فازی ارائه شود. ما در زیر تعدادی از آنها را فهرست کرده‌ایم. در ادامه ما عبارت (۴۲.۱) را به شکل

$$IF \langle FP_1 \rangle THEN \langle FP_2 \rangle \quad (45.1)$$

نوشته و p و q در (۴۳.۱) و (۴۴.۱) را به ترتیب با FP_1 و FP_2 که عبارت‌های فازی هستند نشان می‌دهیم. ما فرض می‌کنیم FP_1 یک رابطه فازی است که در $U = U_1 \times \dots \times U_n$ و FP_2 یک رابطه فازی است که در $V = V_1 \times \dots \times V_n$ تعریف شده‌اند و x و y به ترتیب بردارهایی در U و V می‌باشند.

استلزام دنیس-رشر: اگر ما عملگرهای منطقی \vee ، $-$ در رابطه (۴۳.۱) را با مکمل فازی اولیه (۹.۱) و اجتماع فازی اولیه (۱۰.۱) جایگزین کنیم آنگاه چیزی را بدست می‌آوریم که استلزام دنیس-رشر نامیده می‌شود.

بطور مشخص قاعده فازی $IF \langle FP_1 \rangle THEN \langle FP_2 \rangle$ به شکل یک رابطه فازی Q در $U \times V$ با تابع عضویت زیر تفسیر می‌گردد:

$$\mu_{Q_D}(x, y) = \max [1 - \mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)] \quad (46.1)$$

استلزام لوکاشیویکز: اگر ما از s نرم یا گر با $w = 1$ برای \vee و از مکمل فازی اولیه (۹.۱) برای $-$ استفاده کنیم استلزام لوکاشیویکز را بدست می‌آوریم. بطور مشخص قاعده فازی $IF \langle FP_1 \rangle THEN \langle FP_2 \rangle$ به شکل یک رابطه فازی Q_L در $U \times V$ با تابع عضویت زیر تفسیر می‌گردد:

$$\mu_{Q_L}(x, y) = \min [1, 1 - \mu_{FP_1}(x) + \mu_{FP_2}(y)] \quad (47.1)$$

استلزام‌زاده: در اینجا قاعده فازی $IF \langle FP_1 \rangle THEN \langle FP_2 \rangle$ به شکل رابطه فازی Q_Z در $U \times V$ با تابع عضویت زیر تفسیر می‌گردد:

$$\mu_{Q_Z}(x, y) = \max [\min (\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y), 1 - \mu_{FP_1}(x))] \quad (48.1)$$

واضح است که رابطه (۴۸.۱) با استفاده از مکمل فازی (۹.۱) و اجتماع فازی اولیه (۱۰.۱) و اشتراک فازی (۱۱.۱) برای $-$ ، \vee و \wedge به دست آمده است. استلزام گودل: استلزام گودل یک فرمول شناخته شده در منطق کلاسیک به شمار می‌رود. با تعمیم آن به گزاره‌های فازی، قاعده فازی $IF \langle FP_1 \rangle THEN \langle FP_2 \rangle$ به شکل رابطه فازی Q_G در $U \times V$ با تابع عضویت زیر تفسیر می‌گردد:

$$\mu_{Q_G} = \begin{cases} 1 & : \mu_{FP_1}(x) \leq \mu_{FP_2}(y) \\ 0 & : o.w \end{cases} \quad (49.1)$$

هنگامی که p و q گزاره‌های قطعی باشند. (به این معنی که p و q یا درست یا نادرست هستند) $p \rightarrow q$ یک استلزام کلی است. از این نظر که جدول (۱.۱) تمامی حالت‌های ممکن را پوشش می‌دهد. با این حال، هنگامی که p و q گزاره‌های فازی باشند، $p \rightarrow q$ یک استلزام جزئی یا محلی خواهد بود چرا که با توجه به تعدد مقادیر p و q ، تعداد حالت‌های زیادی خواهد داشت. به عنوان مثال هنگامی که می‌گوییم اگر سرعت بالا است آنگاه مقاومت بالا خواهد بود، ما فقط با یک وضعیت خاص روبرو هستیم و این قاعده هیچ چیز راجع به حالت‌های «سرعت پایین» است، «سرعت متوسط» است و از این قبیل به ما نمی‌گوید. بنابراین قاعده فازی

$$IF \langle FP_l \rangle THEN \langle FP_r \rangle \quad (50.1)$$

باید به صورت زیر تفسیر گردد:

$$IF \langle FP_l \rangle THEN \langle FP_r \rangle Else \langle NOTHING \rangle \quad (51.1)$$

که $NOTHING$ بدین معنی است که این قاعده وجود ندارد. در گزاره‌های منطقی این تبدیل می‌شود به

$$p \rightarrow q = p \wedge q \quad (52.1)$$

با استفاده از min و ضرب جبری برای \wedge در رابطه (۵۲.۱) ما استلزام ممدانی را بدست می‌آوریم. استلزام ممدانی: قاعده اگر-آنگاه فازی (۵۰.۱) به شکل رابطه فازی Q_{MM} یا Q_{MP} در $U \times V$ با تابع عضویت زیر تفسیر می‌گردد:

$$\mu_{Q_{MM}}(x, y) = \min [\mu_{FP_l}(x), \mu_{FP_r}(y)] \quad (53.1)$$

$$\mu_{Q_{MP}}(x, y) = \mu_{FP_l}(x) \mu_{FP_r}(y) \quad (54.1)$$

استلزام ممدانی بطور وسیع در سیستم‌ها و کنترل فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این استلزام به این دلیل که قواعد اگر-آنگاه فازی محلی هستند تأیید می‌شود.

فصل ۲

مدل سازی فازی تاکاگی - سوگینو

۱.۲ مقدمه

مدل سازی فازی بر اساس مفاهیم فازی و استدلال ممکن است یکی از مهم ترین زمینه های تئوری سیستم های فازی باشد. کارهای [۱۲، ۲۵، ۲۸، ۳۵، ۴۷، ۴۸] در مورد مدل سازی فازی مطرح شده است. به طور کلی، ساخت مدل با داده های ورودی - خروجی توسط دو چیز مشخص می شود؛ یکی از آنها ابزارهای ریاضی برای بیان مدل سیستم است و دیگری روش شناسایی است. این بر اساس یک افراز فازی از فضای ورودی است. در هر زیرمجموعه فازی یک رابطه ورودی - خروجی خطی شکل گرفته است. خروجی استدلال فازی با جمع آوری مقادیری که توسط بعضی از مفاهیم که بر یک ورودی اعمال شده، داده می شود. در این فصل به طور خلاصه روش مدل سازی فازی تاکاگی - سوگینو (TS) را توضیح می دهیم.

۲.۲ مدل سازی فازی TS

سیستم های کنترل غیرخطی مبتنی بر مدل فازی تاکاگی - سوگینو (TS) [۳۷] طی ۲۰ سال گذشته توجه زیادی را به خود جلب کرده اند. لذا رهیافت قدرتمندی برای توسعه تابع تقریب، تکنیک های اصولی برای آنالیز پایداری و طراحی کنترل کننده برای سیستم های کنترل فازی با توجه به نظریه و تکنیک های کنترل متداول می باشد. همچنین کاربرد نسبتاً آسان تکنیک های

یادگیری قدرتمند برای شناسایی داده‌ها را ارائه می‌دهند. این مدل با استفاده از مجموعه‌ای از قواعد فازی برای نشان دادن یک سیستم غیرخطی به عنوان مجموعه‌ای از مدل‌های وابسته موضعی که به وسیله‌ی توابع عضویت فازی مرتبط هستند، تشکیل می‌شود. این روش مدل‌سازی فازی، روشی جایگزین برای نشان دادن سیستم‌های غیرخطی پیچیده [۵۸] ارائه می‌دهد و تعداد قواعد مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی مرتبه بالاتر را کاهش می‌دهد. برخی مقالات بر اثبات ویژگی تقریبی سراسری مدل‌های فازی TS تمرکز می‌کنند زیرا آن‌ها قادر به تقریب هر تابع غیرخطی هموار با هر درجه دقتی در هر ناحیه فشرده محدب هستند [۱۱، ۱۶، ۲۷، ۳۷، ۴۳، ۵۸] محققان نشان دادند که با افزایش تعداد قواعد فازی، خطای تقریب به صفر می‌رسد [۲۰] با استفاده از مدل‌های ذکر شده، اگر تعداد قوانین محدود شده باشد، به طور کلی، تقریب خوب توابع پیوسته، دشوار است. بنابراین، تنها توابعی که شرایط ویژه را ارضا می‌کنند یا تعداد نامحدود قواعد مورد نیاز دارند، می‌توانند توسط چنین مدل‌هایی تقریب زده شود. این نتیجه، محدودیتی برای چنین مدل‌هایی محسوب می‌شود. راه حل پیشنهاد شده توسط نویسندگان برای این اختلاف می‌تواند تعاملی بین دقت و تعداد قوانین باشد. [۳، ۶، ۳۶، ۴۶]. این اهداف متناقض، به محققان انگیزه می‌دهد تا تعادل بین دقت مشخص شده و پیچیدگی محاسباتی ناشی از مدل فازی را پیدا کنند.

در [۱۸]، یک روش مبتنی بر مقادیر منحصربه‌فرد، برای کاهش مجموعه قوانین فازی، مورد بحث قرار گرفت. این روش، تجزیه مقادیر منحصربه‌فرد را از نتیجه قواعد انجام می‌دهد و برخی از ترکیبات خطی خاصی را از توابع عضویت اصلی ایجاد می‌کند تا قواعد جدیدی را برای مجموعه کوچک شده ایجاد کند. این تحقیق ویژگی‌های توابع عضویت را با شرایط نرمال بودن مجموع، غیر منفی بودن و عادی مشخص می‌کند. روش پیشنهادی بدون در نظر گرفتن مثال‌های استنتاجی پذیرفته‌شده، قابل اجرا است. تحقیق حاضر، سه برنامه کاربردی خاص را برای کاهش فازی مورد بحث قرار داده است:

- فازی مبتنی بر قاعده با پشتیبانی مجموعه‌ی تک عنصره
- فازی مبتنی بر قواعد با پشتیبانی مجموعه‌ی چند عنصره
- مدل TS.

در [۲۹]، نویسندگان پیشنهاد کردند که بهترین ویژگی‌های مدل‌های ممدانی و مدل TS را با استفاده از یک مدل سراسری با تابع تقریبی مرتبط با حفاظت از تفسیر موضعی، به دست آورند. این مدل ممکن است به عنوان تعمیم مدل TS تفسیر شود که در آن ضرایب دینامیکی جداشده است. آن‌ها نشان دادند که مدل‌های ممدانی و TS می‌توانند طوری ترکیب شوند که تفسیر موضعی و سراسری حفظ شوند.

توجه زیادی به شناسایی مدل‌های فازی TS شده است و نتایج زیادی در [۸، ۱۶، ۳۰] به دست آمده است. شناسایی مدل‌های فازی براساس دو نوع رویکرد هستند:

- یکی خطی کردن سیستم اصلی غیر خطی در نقاط عملیاتی مختلف زمانی که مدل سیستم شناخته شده است
- دیگری بر اساس داده‌های ورودی-خروجی جمع‌آوری شده از سیستم غیر خطی اصلی زمانی که مدل آن ناشناخته است.

نویسندگان در [۸] از روش دسته‌بندی فازی برای شناسایی مدل‌های فازی TS استفاده می‌کردند. از جمله شناسایی تعدادی از قواعد فازی و پارامترهای توابع عضویت فازی و شناسایی پارامترهای مدل‌های خطی موضعی با استفاده از روش حداقل مربعات [۳۴]. هدف مینیمم کردن خطای بین مدل‌های فازی TS و سیستم‌های غیرخطی اصلی مربوطه است.

در [۱۸] کلاوون و همکاران توضیح دادند که چگونه روش‌های دسته‌بندی فازی می‌تواند برای طراحی یک کنترل کننده فازی اعمال شود. در [۱۴] هانگ و لیی دریافتند که معایب بیشتر سیستم‌های فازی این است که توابع عضویت و قواعد فازی باید از پیش تعیین شده باشد تا داده‌های عددی را به گزاره‌های زبانی تبدیل کرده و منطق فازی ایجاد شود. آن‌ها روش مبتنی بر تکنیک دسته‌بندی فازی و جداول تصمیم‌گیری را برای استخراج توابع عضویت و قواعد فازی از داده‌های عددی پیشنهاد کردند. باین‌حال، الگوریتم هنگ و لیی که در [۱۴] ارائه شده است، نیاز به تعریف توابع عضویت متغیرهای زبانی ورودی دارد و قواعد فازی را با یک سری از عملیات ادغام، ساده می‌کند. با افزایش تعداد متغیرها، جدول تصمیم‌گیری به شدت افزایش می‌یابد و روند ساده‌سازی قانون بر اساس جداول تصمیم‌گیری پیچیده‌تر می‌شود. نویسندگان در [۱۶] روشی برای شناسایی مدل‌های فازی TS پیشنهاد کردند. که در راستای بهبود تقریبی موضعی و سراسری مدل TS است. مشخص شده است که روش‌های شناسایی محدود و منظم می‌تواند تفسیری از مدل‌های موضعی سازنده را به عنوان خطی‌سازی‌های موضعی، بهبود بخشد و روش حداقل مربعات با وزن‌های موضعی می‌تواند به طور صریح به مصاحبه بین دقت موضعی و سراسری مدل‌های فازی TS گفته شود.

در [۳۴] روش جدید شناسایی مدل فازی با گام توسعه داده شد. این روش ترکیبی از یک روش شناسایی فازی با برخی ایده‌های نظریه برنامه‌نویسی خطی است. در [۱۷] یک روش جدید برای مدل‌سازی فازی با استفاده از مکانیزم یادگیری بردار مرتبط (RVM) بر اساس برآورد بیزی بر اساس هسته معرفی شده است. نکته اصلی یافتن بهترین ساختار مدل فازی TS برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی با اندازه‌گیری خطا است. در [۴] نویسندگان روش تبدیلی را پیشنهاد دادند که ارتباط بین پیچیدگی مدل‌سازی و دقت مدل فازی TS را پیشنهاد می‌دهد. هدف روش تبدیل پیشنهادی، پیدا کردن مینیمم تعداد قواعد فازی را برای دقت مورد نظر مدل فازی TS است. بهینه‌سازی دقت، به طور مفهومی، با حذف کردن قواعدی که بر خروجی اثر کمی دارند، به دست می‌آید.

درون‌یابی یک موضوع مهم برای کاهش تراکم قواعد و همچنین برای استخراج اطلاعات مفید از قسمت‌های قواعد با تراکم کم است. در [۲۰] نویسندگان نشان دادند که درون‌یابی قواعد

به کاهش پیچیدگی شناسایی کمک کردند. پیشنهاد می‌شود که تنها حداقل تعداد قواعد ضروری باقی بماند که حاوی اطلاعات اساسی هستند و سایر قوانین با الگوریتم درون‌یابی جایگزین می‌شوند. در [۲، ۲۰، ۴۵، ۵۵، ۵۶] رهیافت هایی برای برطرف کردن معایب روش مذکور ارائه شده است. در [۳۷] نویسندگان روشی برای شناسایی سیستم‌های غیرخطی با استفاده از داده‌های ورودی-خروجی ایجاد می‌کنند. آن‌ها فرآیند شناسایی را به سه مرحله تقسیم می‌کنند؛ متغیرهای پیش فرض، توابع عضویت و پارامترهای برآیند. با توجه به توابع عضویت، آن‌ها تکنیک برنامه‌نویسی غیرخطی را برای به حداقل رساندن شاخص عملکرد به کار می‌برند.

در [۲۱]، مطالعه‌ای رویکرد مینیمم-ماکزیمم جدیدی را برای دسته‌بندی فازی، تخمین و شناسایی با داده‌های نامشخص، ارائه کرده است. رویکرد پیشنهادی تأثیر بدترین حالت عدم اطمینان داده‌ها و خطای مدل سازی را در عملکرد تخمین زدن، بدون در نظر گرفتن فرضیات آماری و نیاز به دانش پیشینی از عدم قطعیت‌ها، به حداقل می‌رساند.

روش‌های متعددی در رابطه با بهینه‌سازی توابع عضویت استفاده می‌شود که روش‌های مبتنی بر مشتقات یا روش مشتق-آزاد هستند. رویکردهای مشتق آزاد از روش‌های مبتنی بر مشتقات، با توجه به پیدا کردن مینیمم سراسری و با توجه به طیف گسترده‌ای از تابع هدف و توابع عضویت قوی‌تر هستند. اشکال اصلی این است که آن‌ها آهسته‌تر از روش‌های مبتنی بر مشتقات همگرا می‌شوند [۴۴] از سوی دیگر، روش‌های مبتنی بر مشتقات تمایل دارند تا به مینیمم‌های موضعی همگرا شوند. علاوه بر این، آن‌ها محدود به توابع هدف خاصی و انواع استنتاج و توابع عضویت هستند. رایج‌ترین روش‌ها عبارت‌اند از: گرادیان نزولی [۳۱]، حداقل مربعات [۳۴]، انتشار به عقب [۵۱]، و فیلتر کالمن [۱۵، ۱۹، ۳۲، ۳۳، ۵۲]. فرض کنید هدف شناسایی توابعی به شکل زیر باشد

$$f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

در مدل سازی فازی تاکاگی - سوگینو هر قاعده IF-THEN، $R^{(i_1 \dots i_n)}$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$R^{(i_1 \dots i_n)} : \text{If } x_1 \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and } \dots x_n \text{ is } M_n^{i_n} \text{ then}$$

$$\hat{y} = p_0^{(i_1 \dots i_n)} + p_1^{(i_1 \dots i_n)} x_1 + p_2^{(i_1 \dots i_n)} x_2 + \dots + p_n^{(i_1 \dots i_n)} x_n \quad (1.2)$$

که برآورد خروجی به صورت زیر است:

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_n=1}^{r_n} w^{(i_1 \dots i_n)}(x) \left[p_0^{(i_1 \dots i_n)} + p_1^{(i_1 \dots i_n)} x_1 + p_2^{(i_1 \dots i_n)} x_2 + \dots + p_n^{(i_1 \dots i_n)} x_n \right]}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_n=1}^{r_n} w^{(i_1 \dots i_n)}(x)} \quad (2.2)$$

که در آن

$$w^{(i_1 \dots i_n)}(x) = \mu_{i_1}(x_1) \mu_{i_2}(x_2) \dots \mu_{i_n}(x_n)$$

تابع عضویت مرتبط با مجموعه فازی $M_j^{i_j}$ است.

اگر M مجموعه سیستم ورودی / خروجی مثل $\{x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}, y_k\}$ باشد، پارامترهای سیستم فازی می‌تواند به عنوان نتیجه‌ی مینیمم‌سازی شاخص عملکرد درجه دوم زیرمحاسبه شود:

$$J = \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{y}_k)^2 = \|Y - XP\|^2 \quad (3.2)$$

که در آن

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]^T$$

$$P = [p_1^{(1 \dots 1)} \quad p_2^{(1 \dots 1)} \quad p_3^{(1 \dots 1)} \quad \dots \quad p_n^{(1 \dots 1)} \quad \dots \quad p_1^{(r_1 \dots r_n)} \quad \dots \quad p_n^{(r_1 \dots r_n)}]^T \quad (4.2)$$

$$X = \begin{bmatrix} \beta_1^{(1 \dots 1)} & \beta_1^{(1 \dots 1)} x_{11} & \dots & \beta_1^{(1 \dots 1)} x_{n1} & \dots & \beta_1^{(r_1 \dots r_n)} & \dots & \beta_1^{(r_1 \dots r_n)} x_{n1} \\ \beta_m^{(1 \dots 1)} & \beta_m^{(1 \dots 1)} x_{1m} & \dots & \beta_m^{(1 \dots 1)} x_{nm} & \dots & \beta_m^{(r_1 \dots r_n)} & \dots & \beta_m^{(r_1 \dots r_n)} x_{nm} \end{bmatrix}$$

و

$$\beta_k^{(i_1 \dots i_n)} = \frac{w^{(i_1 \dots i_n)}(x_k)}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_n=1}^{r_n} w^{(i_1 \dots i_n)}(x_k)} \quad (5.2)$$

اگر X ماتریس رتبه کامل باشد، حل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$J = \|Y - XP\|^2 = (Y - XP)^T (Y - XP),$$

$$\nabla J = X^T (Y - XP) = X^T Y - X^T X P = 0,$$

$$P = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (6.2)$$

۳.۲ پارامترهای روش وزنی

هدف اصلی بهبود انتخاب شاخص عملکرد و مینیمم کردن آن است. که می‌تواند با گسترش تابع هدف با در نظر گرفتن وزن γ از بردار p به صورت زیر مشخص شود.

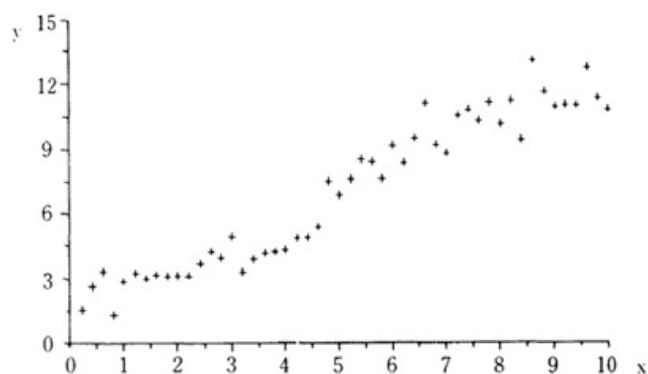
$$J = \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{y}_k)^2 + \gamma^2 \sum_j p_j^2 = \|Y - XP\|^2 + \gamma^2 \|P\|^2 \quad (7.2)$$

این را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

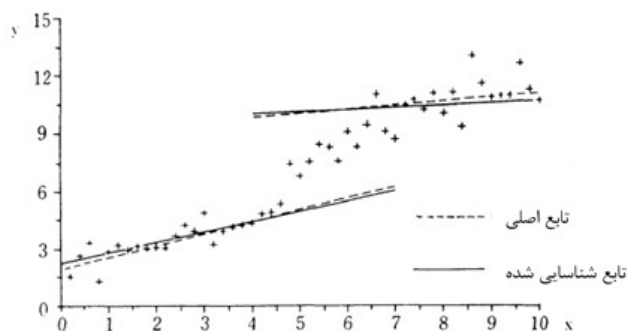
$$J = \|Y - XP\|^2 + \gamma^2 \|P\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ \gamma^2 I \end{bmatrix} P \right\|^2 = \|Y_a - X_a P\|^2 \quad (۸.۲)$$

اکنون ماتریس گسترش یافته X_a با رتبه کامل است و بردار p می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$P = (X_a^T X_a)^{-1} X_a^T Y_a \quad (۹.۲)$$



شکل ۱.۲: داده های ورودی-خروجی



شکل ۲.۲: نتایج شناسایی پارامترها

۱.۳.۲ مثال عددی

فرض کنید یک سری داده (x, y) به صورتی که در شکل (۱.۲) نشان داده شده است با توجه به دورابطه زیر به دست آمده باشد:

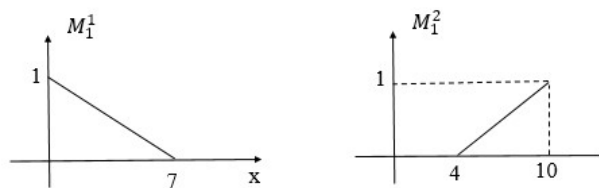
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \Rightarrow y = 0.6x + 2 \\ 4 \leq x \leq 10 \Rightarrow y = 0.2x + 9 \end{cases} \quad (۱۰.۲)$$

هدف این است که باتوجه به داده های موجود توابع $y = 0/2x + 9$ و $y = 0/6x + 2$ راباروش مدل سازی فازی تاکاگی - سوگینو تقریب بزنییم دوقاعده اگر - آنگاه فازی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(1) \text{ اگر } x \in M_1^1 \text{ آنگاه } y = p_0^1 + p_1^1 x$$

$$(2) \text{ اگر } x \in M_1^2 \text{ آنگاه } y = p_0^2 + p_1^2 x$$

که در آن M_1^1 و M_1^2 دوتابع عضویت هستند که در شکل (۳.۲) نمایش داده شده اند. پس از به کار گیری روش حداقل مربعات پارامترهای سیستم شناسایی شده و خطوط



شکل ۳.۲: توابع عضویت M_1^1 و M_1^2

داده شده اند. به دست آمده اند که در شکل (۲.۲) نمایش داده شده اند.

فصل ۳

طراحی کنترل کننده برای سیستم های غیرخطی با استفاده از مدل های TS

۱.۰.۳ مقدمه

کنترل فازی می تواند برای پایدارسازی سیستم های غیرخطی به کار رود [۴۹، ۱۳]. با این حال، بدون انجام آنالیز عمیق، طراحی کنترل کننده ممکن است یک سیستم پایدار را تضمین ندهد. یک رویکرد رایج آنالیز، مبتنی بر یک مدل ماشین فازی است که یک سیستم غیرخطی را به عنوان مجموع وزنی چند زیر سیستم خطی بیان می کند [۳۸، ۹]. با این ساختار، چند روش کنترل خطی و روش آنالیز پایداری را می توان اعمال کرد. برخی از نویسندگان یک کنترل کننده فازی را برای کنترل این دسته از سیستم های غیرخطی پیشنهاد دادند. این کنترل کننده فازی یک مجموع وزنی از کنترل کننده های حالت بازخورد خطی است [۲۳، ۲۴، ۲۶، ۴۲، ۵۳، ۵۹]. مسأله نابرابری ماتریس خطی (LMI)^۱، $p \times c$ ، در [۲۳، ۲۶، ۴۲، ۵۳، ۵۹] مشتق شده که p و c ، به ترتیب تعداد قواعد فازی مدل ماشین فازی و کنترل کننده فازی است. مسأله LMI می تواند با استفاده از برخی ابزارهای LMI، از قبیل MATLAB، به طور عددی حل شود [۱۰]. در حالتی که $p = c$ و فرضیات مدل ماشین فازی و کنترل کننده فازی یکسان باشد، شرایط LMI، $p \times (p+1)$ در [۵۳] و [۲۶]–[۵۹] به دست می آید. در این فصل، ما یک رهیافت طراحی

^۱linear matrix inequality

را پیشنهاد کردیم که می تواند تعداد شرایط LMI را به p کاهش دهد. در این رهیافت اولاً، ما یک کنترل کننده غیرخطی [۶۰] را برای کنترل ماشین غیرخطی پیشنهاد می کنیم. تنها تفاوت مفهومی بین کنترل کننده فازی معمولی و کنترل کننده غیرخطی پیشنهاد شده این است که درجه عضویت کنترل کننده سابق در حال حاضر به عنوان بازدهی غیرخطی در نظر گرفته می شود که می تواند مقادیر مثبت یا منفی داشته باشند. ثانیاً، با معرفی بازدهی غیرخطی تعریف شده، تعداد شرایط پایداری LMI کاهش می یابد که مستقل از تعداد قواعد کنترل کننده است. همان طور که تعداد شرایط LMI کاهش می یابد، شانس یافتن راه حل نیز افزایش می یابد. ثالثاً، روشی برای طراحی کنترل کننده غیرخطی پیشنهادی، ارائه می دهیم. یک مثال کاربردی در پایداری یک سیستم جرم-فنر غیرخطی، برای تأیید نتایج این فصل ارائه شده است.

فرض شده است یک سیستم کنترل غیرخطی چند متغیره با تمام حالت های سیستم، قابل دسترسی است. ماشین می تواند با مدل ماشین فازی ارائه شود و یک کنترل کننده غیرخطی طراحی شود.

(آ) مدل سازی تاکاگی - سوگینو

اگر p تعداد قواعد فازی توصیف شده توسط ماشین غیرخطی باشد

i امین قاعده، قالب زیر را دارد [۳۸، ۹]:

قاعده i : اگر $x_1(t) \in M_1^i$ باشد و ... و $x_n(t) \in M_n^i$ باشد، آنگاه

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (1.3)$$

که M_k^i تابع عضویت مرتبط با حالت $x_k(t)$ ، $k = 1, 2, \dots, n$ ، $i = 1, 2, \dots, p$ ؛ $A_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$ و $B_i \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ، به ترتیب ماتریس سیستم و ماتریس ورودی هستند؛ $x(t) \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ بردار وضعیت سیستم و $u(t) \in \mathcal{R}^{m \times 1}$ بردار ورودی است. دینامیک سیستم توسط عبارت زیر توصیف شده است:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p \omega_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.3)$$

که در آن

$$\sum_{i=1}^p \omega_i(x(t)) = 1, \quad \omega_i(x(t)) \in [0, 1] \quad (3.3)$$

اگر $\mu_{M_k^i}(x_k(t))$ درجه عضویت مجموعه فازی M_k^i باشد، آنگاه تعریف می کنیم

$$\omega_i(x(t)) = \frac{\mu_{M_1^i}(x_1(t)) \times \mu_{M_2^i}(x_2(t)) \times \dots \times \mu_{M_n^i}(x_n(t))}{\sum_{j=1}^p (\mu_{M_1^j}(x_1(t)) \times \mu_{M_2^j}(x_2(t)) \times \dots \times \mu_{M_n^j}(x_n(t)))} \quad (4.3)$$

(ب) کنترل کننده غیرخطی

یک کنترل کننده غیرخطی مشابه با یک کنترل کننده فازی، با c قاعده باید برای ماشین طراحی شود. خروجی کنترل کننده غیرخطی توسط رابطه زیر ارائه می‌شود.

$$u(t) = \sum_{j=1}^c m_j(x(t)) G_j x(t) \quad (5.3)$$

که $G_j \in \mathcal{R}^{m \times n}$ ، $j = 1, 2, \dots, c$ ، یک بردار بازخورد بازدهی است که باید طراحی شود و

$$\sum_{j=1}^c m_j(x(t)) = 1 \quad (6.3)$$

در اینجا $m_j(x(t))$ تابع غیرخطی از $x(t)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$m_j(x(t)) = \frac{\mu_{Nj}(x_k(t))}{\sum_{k=1}^c (\mu_{Nk}(x(t)))} \quad (7.3)$$

۲.۰.۳ آنالیز پایداری و طراحی

در این بخش پایداری سیستم کنترل غیرخطی متشکل از مدل ماشین فازی و کنترل کننده غیرخطی متصل به حلقه بسته بررسی می‌شود. یک روش طراحی $m_j(x(t))$ ، $j = 1, 2, \dots, c$ ، زیر نظر پایداری سیستم حلقه بسته ارائه می‌شود. برای ساده سازی $\omega_i(x(t))$ را به صورت ω_i و $m_j(x(t))$ را به صورت m_j می‌نویسیم.

از (۱.۳) و (۵.۳) مقدار $\sum_{i=1}^p \omega_i = \sum_{j=1}^c m_j = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \omega_i m_j = 1$ و سیستم کنترل غیرخطی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^p \omega_i \left(A_i x(t) + B_i \sum_{j=1}^c m_j G_j x(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \omega_i m_j (A_i + B_i G_j) x(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \omega_i m_j H_{ij} x(t) \end{aligned} \quad (8.3)$$

که

$$H_{ij} = A_i + B_i G_j \quad (9.3)$$

برای بررسی پایداری (۸.۳) تابع لیپانوف زیر را به صورت مرتبه دوم در نظر گرفتیم:

$$V = \frac{1}{2} x(t)^T P x(t) \quad (10.3)$$

که $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ یک ماتریس متقارن معین مثبت است. با مشتق گیری از (۱۰.۳) داریم:

$$\dot{V} = \frac{1}{\varphi} (\dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t)) \quad (11.3)$$

از (۸.۳) و (۱۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{\varphi} \left[\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \omega_i m_j H_{ij} x(t) \right)^T P x(t) + x(t)^T P \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \omega_i m_j H_{ij} x(t) \right] \\ &= \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \omega_i m_j x(t)^T (H_{ij}^T P + P H_{ij}) x(t). \end{aligned} \quad (12.3)$$

اگر

$$Q_{ij} = - (H_{ij}^T P + P H_{ij}) \quad (13.3)$$

از (۱۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^c \omega_i m_j x(t)^T Q_{ij} x(t) \\ &= -\frac{1}{\varphi} \sum_{j=1}^c m_j \left(x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t) \right). \end{aligned} \quad (14.3)$$

توابع $\mu_{N^j}(x_k(t))$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(15.3)$$

$$\mu_{N^1}(x(t)) = \begin{cases} \left(\frac{\sum_{j=2}^c x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)}{\sum_{j=1}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)|} \right), & \sum_{j=1}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)| \neq 0 \\ \frac{1}{c}, & o.w. \end{cases}$$

$$\mu_{N^j}(x(t)) = \begin{cases} \frac{x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)}{\sum_{j=1}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)|}, & \sum_{j=1}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)| \neq 0 \\ \frac{1}{c}, & o.w. \end{cases} \quad (16.3)$$

برای هر $j = 2, 3, \dots, c$ و بنابراین با (۷.۳)، (۱۵.۳) و (۱۶.۳) می توان مشاهده کرد که

$$\sum_{j=1}^c m_j = 1 \text{ و } \sum_{j=1}^c \mu_{N^j}(x(t)) = 1 \implies m_j = \mu_{N^j}.$$

از (۱۴.۳) - (۱۶.۳) و با توجه به حالت $\sum_{j=1}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)| \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\sum_{j=2}^c x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{i1} x(t)}{\sum_{j=1}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)|} \right) \times x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{i1} x(t) - \frac{1}{\gamma} \sum_{j=2}^c \frac{\left(x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t) \right)^2}{\sum_{j=2}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)|} \\ &\leq -\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\sum_{j=2}^c x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{i1} x(t)}{\sum_{j=2}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)|} \right) \times x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{i1} x(t). \end{aligned} \quad (17.3)$$

باانتخاب

$$Q_{i1} > \circ \quad \forall i = 1, 2, \dots, p. \quad (18.3)$$

داریم $x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{i1} x(t) > \circ$ هنگامی که $x(t) \neq \circ$ و $x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{i1} x(t) = \circ$ هنگامی که $x(t) = \circ$. از (17.3) و (18.3) و رابطه زیر

$$1 - \frac{\sum_{j=2}^c x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{i1} x(t)}{\sum_{j=1}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)|} > \circ$$

می توانیم نتیجه بگیریم که

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\sum_{j=2}^c x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{i1} x(t)}{\sum_{j=1}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)|} \right) \times \sum_{i=1}^p \omega_i x(t)^T Q_{i1} x(t) \leq \circ. \quad (19.3)$$

هنگامی که $x(t) = \circ$ باشد، نامساوی به تساوی تبدیل می شود.

توجه داریم که $x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{i1} x(t) = \circ$ تنها زمانی که $x(t) = \circ$ است برقرار می شود، این نشان می دهد که $\sum_{j=1}^c |x(t)^T \sum_{i=1}^p \omega_i Q_{ij} x(t)| = \circ$ تنها زمانی اتفاق می افتد که $x(t) = \circ$. از این رو می توانیم نتیجه گیری کنیم که سیستم به طور مجانبی پایدار است. آنالیز را می توان طبق نتیجه زیر خلاصه کرد.

خلاصه سیستم کنترل غیرخطی (8.3) قطعاً به طور مجانبی پایدار است اگر p شرط LMI ، زیربرقرار باشد:

$$Q_{i1} = -(H_i^T P + P H_i) > 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

و کنترل کننده همان طور که در (۱۵.۳) و (۱۶.۳) نشان داده شده، طراحی شده است.

۳.۰.۳ مثال کاربردی

یک مثال کاربردی مبتنی بر سیستم جرم-فنر [۴۰] در این بخش ارائه شده تا شیوه طراحی کنترل کننده غیرخطی را نشان دهد. شکل (۱.۳) سیستم جرم-فنر را نشان می دهد. معادله دینامیکی آن به صورت زیر است

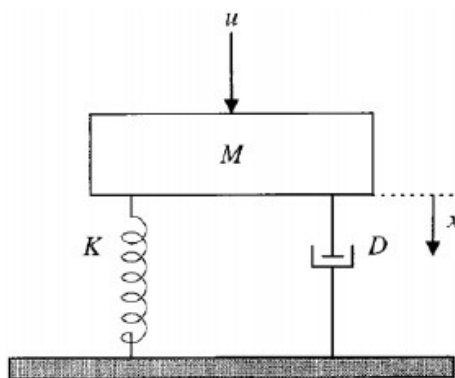
$$M\ddot{x}(t) + g(x(t), \dot{x}(t)) + f(x(t)) = \phi(\dot{x}(t))u(t) \quad (۲۰.۳)$$

که M جرم است، u نیرو است، $f(x(t))$ غیرخطی بودن فنر است؛ $g(x(t), \dot{x}(t))$ و $\phi(\dot{x}(t))$ عبارت هایی غیرخطی هستند. فرض می کنیم

$$g(x(t), \dot{x}(t)) = c_1 x(t) + c_2 \dot{x}(t)$$

$$f(x(t)) = c_3 x(t) + c_4 x(t)^3$$

$$\phi(\dot{x}(t)) = c_5 + c_6 \dot{x}(t)^2. \quad (۲۱.۳)$$



شکل ۱.۳: سیستم جرم-فنر

محدوده عملیاتی x و \dot{x} در فاصله $[-1/5, 1/5]$ قرار دارد، و پارامترها به صورت زیر انتخاب

می شوند:

$$c_4 = 0/1, c_3 = 0/01, c_2 = 1, c_1 = 0, M = 1, c_5 = 1/4387, c_6 = 0/13$$

در این صورت سیستم به صورت زیر می تواند بیان شود

$$\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) - 0/01x(t) - 0/1x(t)^3 + (1/4387 - 0/13\dot{x}(t)^2)u(t). \quad (22.3)$$

کنترل کننده غیرخطی می تواند توسط یک مدل فازی تاکاگی- سوگینوارائه شود. i امین قاعده بدین صورت است:

قاعده i : اگر $x(t) \in M_1^i$ باشد و $\dot{x}(t) \in M_2^i$ باشد، آنگاه

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (23.3)$$

که توابع عضویت M_k^i , $i = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2$ همان طور که در شکل های (۲.۳) و (۳.۳) نشان داده شده اند، به ترتیب بدین صورت در نظر گرفته می شوند:

$$\mu_{M_1^1}(x(t)) = \mu_{M_2^1}(x(t)) = 1 - \frac{x(t)^2}{2/25}$$

$$\mu_{M_1^2}(x(t)) = \mu_{M_2^2}(x(t)) = \frac{x(t)^2}{2/25}$$

$$\mu_{M_1^3}(\dot{x}(t)) = \mu_{M_2^3}(\dot{x}(t)) = 1 - \frac{\dot{x}(t)^2}{6/75}$$

$$\mu_{M_1^4}(\dot{x}(t)) = \mu_{M_2^4}(\dot{x}(t)) = \frac{\dot{x}(t)^2}{6/75} \quad (24.3)$$

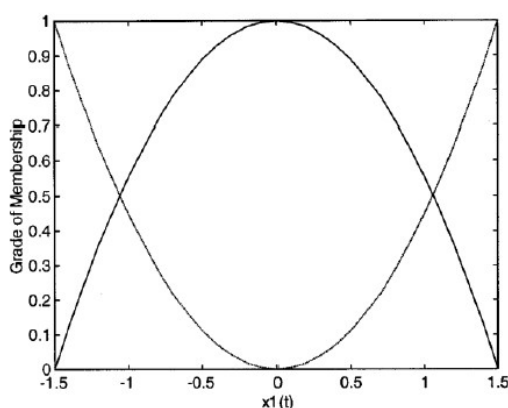
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

در اینجا براساس [۴۰] داریم

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0/01 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0/235 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0/5613 \end{bmatrix}, B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4387 \end{bmatrix}$$

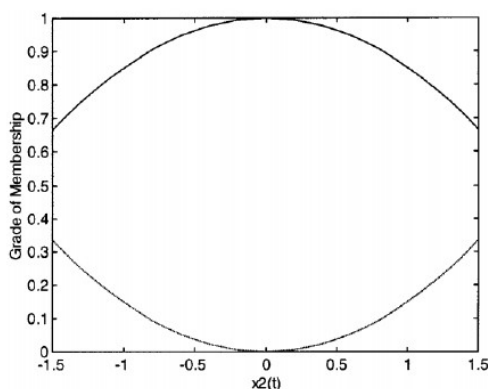


شکل ۲.۳: تابع عضویت مدل ماشین فازی سیستم جرم- فنر غیرخطی: $\mu_{M_1}(x(t)) = \mu_{M_3}(x(t)) = \mu_{M_4}(x(t)) = 1 - (x^2/2.25)$ ، (خط ممتد)، $\mu_{M_2}(x(t)) = 1 - (x^2/2.25)$ (خط نقطه چین)

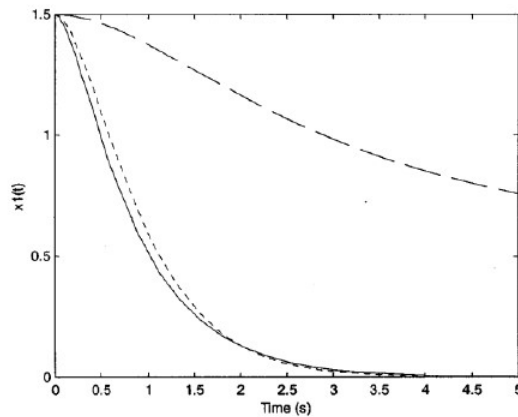
کنترل کننده غیرخطی مشابه با یک کنترل کننده فازی دو- قاعده ای برای ماشین (۲۳.۳) طراحی شده است. کنترل توسط رابطه زیر داده شده است.

$$u(t) = \sum_{j=1}^2 m_j(x(t)) G_j x(t). \quad (25.3)$$

بردارهای $G_1 = [-2/7732 \quad -2/852]$ و $G_2 = [-6/7076 \quad -5/3447]$ را به صورت دلخواه انتخاب می کنیم. از (۹.۳) می توان بقیه H_{ij} هارامشخص کرد.



شکل ۳.۳: تابع عضویت مدل ماشین فازی سیستم جرم- فنر غیرخطی: $\mu_{M_1}(\dot{x}(t)) = \mu_{M_3}(\dot{x}(t)) = \mu_{M_4}(\dot{x}(t)) = 1 - (\dot{x}^2/6.75)$ ، (خط ممتد)، $\mu_{M_2}(\dot{x}(t)) = \mu_{M_5}(\dot{x}(t)) = \mu_{M_6}(\dot{x}(t)) = 1 - (\dot{x}^2/6.75)$ (خط نقطه چین)



شکل ۴.۳: پاسخ $x_1(t)$ سیستم جرم-فنر توسط یک کنترل کننده خطی (خط نقطه چین)، کنترل کننده غیرخطی پیشنهاد شده (خط ممتد) و $u(t) = 0$ (خط بریده بریده)

اکنون ماتریس p را طوری می‌یابیم که $Q_{i1} = -(H_{i1}^T P + P H_{i1}) > 0$ برای $i = 1, 2, 3, 4$. یک جواب برای این سیستم LMI به صورت زیر است:

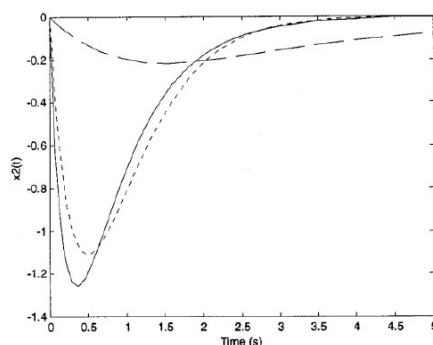
$$P = \begin{bmatrix} 1.1486 & 0.1560 \\ 0.1586 & 0.2225 \end{bmatrix}$$

توابع عضویت مربوط به کنترل کننده غیرخطی باتوجه (۱۵.۳) و (۱۶.۳) به صورت زیر خواهد بود (۲۶.۳)

$$\mu_{N^1}(x(t)) = \begin{cases} \left(\frac{\sum_{j=2}^2 x(t)^T \sum_{i=1}^4 \omega_i Q_{i1} x(t)}{\sum_{j=1}^2 |x(t)^T \sum_{i=1}^4 \omega_i Q_{ij} x(t)|} \right), & \sum_{j=1}^2 |x(t)^T \sum_{i=1}^4 \omega_i Q_{ij} x(t)| \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & o.w. \end{cases}$$

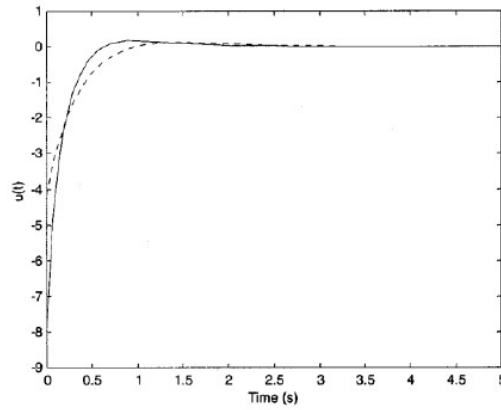
$$\mu_{N^2}(x(t)) = \begin{cases} \frac{x(t)^T \sum_{i=1}^4 \omega_i Q_{i1} x(t)}{\sum_{j=1}^2 |x(t)^T \sum_{i=1}^4 \omega_i Q_{ij} x(t)|}, & \sum_{j=1}^2 |x(t)^T \sum_{i=1}^4 \omega_i Q_{ij} x(t)| \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & o.w. \end{cases} \quad (27.3)$$

شکل (۴.۳) و (۵.۳) پاسخ سیستم $x_1(t)$ و $x_2(t)$ سیستم جرم-فنر را تحت کنترل کننده غیرخطی (خطوط ممتد) با شرایط اولیه $x(0) = [1.5 \ 0]^T$ نشان می‌دهد. این پاسخ‌ها با



شکل ۵.۳: پاسخ $x_2(t)$ سیستم جرم-فنر توسط یک کنترل کننده خطی (خط نقطه چین)، کنترل کننده غیرخطی پیشنهاد شده (خط ممتد) و $u(t) = 0$ (خط بریده بریده)

پاسخ های کنترل کننده خطی با $u(t) = G_1 x(t)$ (خطوط نقطه چین) مقایسه شده اند. پاسخ های سیستم حلقه باز (خطوط بریده بریده) نیز به ترتیب در شکل (۴.۳) و (۵.۳) نشان داده شده است. هم چنین می توانیم مشاهده کنیم که پاسخ های ارائه شده توسط کنترل کننده غیرخطی بهتر هستند. علاوه بر این، پاسخ های حلقه بسته بسیار بهتر از پاسخ های حلقه باز هستند. شکل (۶.۳) کنترل ارائه شده توسط کنترل کننده غیرخطی و کنترل کننده خطی را نشان می دهد.



شکل ۶.۳: کنترل سیگنال‌های $u(t)$ با کنترل کننده خطی (خط نقطه چین) ارائه شده و کنترل کننده غیرخطی پیشنهادی (خط ممتد).

فصل ۴

رهیافت های PDC و PPDC برای پایداری سیستم های فازی TS

۱.۴ مقدمه

پس از تحقیق اصلی توسط زاده، کنترل فازی، حیطةی بسیار محبوبی در مهندسی کنترل شد. اخیراً، برخی از ابزارهای تحلیلی مرتبط با پایداری (اولین و آخرین نگرانی در مورد هر طراحی سیستم) و طراحی کنترل کننده سیستم های فازی، ارائه شده است. بیشتر این تحقیقات بر اساس آنالیز پایداری و طراحی کنترل کننده اصولی مدل فازی (TS) تاکاگی-سوگینو است. بر اساس این مدل، یک الگوریتم مفهومی ساده و صریح به نام PDC^۱ برای طراحی کنترل کننده، به منظور اطمینان از پایداری سیستم حلقه بسته، معرفی شده است [۵۴]. تاناکا ایده استفاده از نامساوی ماتریس خطی (LMI) را برای یافتن ماتریس P پیشنهاد داد تا از پایداری سیستم فازی (TS) اطمینان حاصل کند [۴۱]. علاوه بر این، محققان به شدت به بهبود و ساده سازی آنالیز پایداری مدل فازی (TS) و طراحی کنترل کننده های مربوط، علاقه مند شده اند. برخی از محققان قواعد کنترل خطی ساده شده را برای کاهش چشم گیر تعداد پارامترها پیشنهاد دادند در حالی که این قواعد از مفهوم و مزایای مدل فازی (TS) اصلی نیز محافظت می کند [۵۷]. برخی دیگر طراحی های متفاوتی از PDC ارائه دادند [۱]. در حالی که سایر طراحی ها

^۱parallel distributed compensation

شرایط لیاپانوف را اصلاح کردند تا آنالیز پایداری و طراحی سیستم های فازی را بهبود بخشند [۲۲]. با این حال، به خاطر سختی های تحلیل سیستم های مرتبه بالاتر، لازم است تا تحقیقات بیشتری در این زمینه انجام شود.

در این فصل، رویکرد طراحی جبران متناسب موازی نسبی PPDC^۲ برای سیستم های فازی پیوسته (CFS)^۳ ارائه می دهیم. استفاده از ضرایب نسبی منجر به کاهش چشم گیر پارامترهای قابل تنظیم درگیر در رویکرد PDC معمولی شده و آن ها را از بازخورد دوباره جدا می کند. از طریق آنالیز پایداری لیاپانوف، قضیه جدیدی در مورد شرایط کافی برای اطمینان از پایداری را نیز به دست آوردیم. با استفاده از ابزارهای (LMI) یک روش اصولی برای پیدا کردن ماتریس معین مثبت P در دسترس است. نتایج شبیه سازی عددی برای پایداری سیستم جرم- فنر نشان می دهد که رویکرد PPDC بسیار بهتر از رویکرد PDC معمولی است و دارای پتانسیل بالقوه در کاربرد علمی سیستم های فازی است.

۲.۴ مدل فازی (TS)

مدل فازی متشکل از مجموعه های فازی ورودی، منطق فازی عملگر AND، قواعد فازی با توابع خطی از متغیرهای ورودی و یک غیرفازی ساز است [۳۹]. فرض کنید قاعده i از مدل فازی (TS) به صورت زیر بیان شود

(CFS) Rule i :

$$IF z_1(t) \in M_{i1} AND \dots AND z_p(t) \in M_{ip} \quad (1.4)$$

$$Then \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$$

$$i = 1, 2, \dots, r.$$

در این جا M_{ij} مجموعه فازی است، i تعداد قواعد $IF = THEN$ ، $x(t) \in R^n$ بردار وضعیت، $u(t) \in R^m$ بردار ورودی، $A_i \in R^{n \times n}$ و $B_i \in R^{n \times m}$ است. متغیرهای z_1, \dots, z_p به عنوان متغیرهای فرض هستند و می توانند مولفه های بردار x باشند. با توجه به جفت $(x(t), u(t))$ خروجی سیستم می تواند به صورت زیر بیان شود

$$CFS : \quad \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (2.4)$$

که در آن

$$z(t) = [z_1(t) z_2(t) \dots z_p(t)]^T$$

^۲proportional parallel distributed compensation

^۳continuous fuzzy system

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)), \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0 \end{cases}$$

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \\ h_i(z(t)) \geq 0 \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

$M_{ij}(z_j(t))$ درجه عضویت $z_j(t)$ در مجموعه فازی M_{ij} است. ترکیب مقادیر عضویت مجموعه‌های فازی در قاعده پیش فرض براساس ضرب برای به دست آوردن $w_i(z(t))$ استفاده می‌شود. مجموعه $w_i = w_i(z(t))$ بر نسبت وزن هر قاعده فازی دلالت دارد. برای راحتی در نشانه‌گذاری، $w_i = w_i(z(t))$ و $h_i = h_i(z(t))$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین، حالت نهایی سیستم فازی می‌تواند به صورت زیر ارائه شود:

$$CFS: \quad \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i \{A_i x(t) + B_i u(t)\}. \quad (3.4)$$

۳.۴ PPDC و PDC

مفهوم PDC نوعی رویکرد استفاده شده در طراحی یک کنترل کننده فازی است تا یک سیستم، مدل سازی فازی TS را پایدار سازد. کنترل کننده فازی طراحی شده، متغیرهای ورودی و مجموعه‌های فازی یکسانی با مدل فازی TS در بخش‌های IF دارند. برای مدل‌های فازی (۳.۴) قواعد کنترل کننده زیر با رویکرد PDC طراحی شده‌است:

$$IF \ z_1(t) \in M_{i1} \ AND \dots \ AND \ z_p(t) \in M_{ip} \ \text{Then} \ u_i(t) = -F_i x(t)$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

که $F \in R^{m \times n}$ ماتریس حالت پس خورد محلی است. هر قاعده کنترل فازی یک قانون وضعیت پس خورد خطی در بخش‌های THEN دارد.

در طراحی PDC اصلی، پارامترهای کنترل کننده قابل تنظیم $r \times m \times n$ به کنترل کننده این اختیار را می‌دهند تا اقدامات کنترل مورد نظر را تولید کند. با این حال، در مقایسه با کنترل کننده‌های PI, PD و PID که عمدتاً استفاده می‌شوند که تنها به تنظیم دو یا سه پارامتر احتیاج دارند، کنترل کننده TS با استفاده از PDC کاربرد سختی دارد. در واقع، ثابت شده است که تنظیم هم زمان بیش از ۱۰ پارامتر، برای انسان تقریباً غیر ممکن است. برای فائق آمدن بر این معایب، یک طرح قانون کنترل که می‌تواند به طور قابل توجهی تعداد پارامترهای موجود در رویکرد PDC را کاهش دهد، پیشنهاد شده است که PPDC نامیده شده است:

$IF z_1(t) \in M_{i_1} \text{ AND...AND } z_p(t) \in M_{i_p} \text{ Then } u_i(t) = -k_i Fx(t)$
 $i = 1, 2, \dots, r$

که $F \in R^{m \times n}$ ماتریس وضعیت پس خورد محلی است که برای تمام زیر سیستم های موضعی مختلف، یکسان است. K_i هاضرایب نسبی را ارائه می دهند که بسته به قواعد کنترل مختلف، فرق می کند. اکنون برای قواعد r تعداد کلی پارامترهای ناشناخته به $r+m \times n$ کاهش می یابد. در مقایسه با $r \times m \times n$ در PDC معمولی، کاهش چشم گیری وجود دارد. همان طور که در جدول (۱.۴) نشان داده شده است، اثر کاهش تعداد پارامترها هنگامی که تعداد قوانین افزایش می یابد عمیق تر می شود.

کنترل کننده کلی PDC و PPDC به صورت زیر هستند

$$PDC : \quad u(t) = \frac{-\sum_{i=1}^r w_i F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i} = -\sum_{i=1}^r h_i F_i x(t) \quad (۴.۴)$$

$$PPDC : \quad u(t) = \frac{-\sum_{i=1}^r w_i k_i Fx(t)}{\sum_{i=1}^r w_i} = -\sum_{i=1}^r h_i k_i Fx(t) \quad (۵.۴)$$

جدول ۱.۴: مقایسه تعداد پارامترهای کنترل کننده های PDC و PPDC

| تعداد قواعد | تعداد پارامترها در PDC | تعداد پارامترها در PPDC |
|-------------|------------------------|-------------------------|
| ۴ | ۲۴ | ۱۰ |
| ۸ | ۴۸ | ۱۴ |
| ۱۶ | ۹۶ | ۲۲ |
| ۳۲ | ۱۹۲ | ۳۸ |

۴.۴ آنالیز پایداری در رهیافت PPDC

پایداری یک سیستم فازی TS حلقه بسته با طراحی PPDC در این بخش بحث شده است. قضیه های شرایط پایداری سیستم های فازی، مطابق با تعریف پایداری لیاپانوف هستند. تاناکا و همکاران نشان داده اند که پایداری سیستم TS کلی می تواند با پیدا کردن یک ماتریس معین مثبت تضمین شود. با انتخاب $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ به عنوان تابع لیاپانوف سیستم TS شرایط پایداری زیر با استفاده از رویکرد لیاپانوف به دست می آید.

قضیه ۱.۴.۴. [۴۱] (CFS). سیستم فازی حلقه بسته پیوسته که با استفاده از PPDC توصیف شده است، به طور سراسری پایدار است اگر وجود داشته باشد یک ماتریس معین مثبت P به طوری که

$$(A_i - k_j B_i F)^T P + P (A_i - k_j B_i F) < \circ \quad (۶.۴)$$

برای هر $i, j = 1, 2, \dots, r$ به جز زوج (i, j) به طوری که $h_i * h_j = \circ$.

قضیه ۲.۴.۴. (CFS) سیستم فازی حلقه بسته پیوسته که با استفاده از PPDC توصیف شده است، به طور سراسری پایدار است اگر وجود داشته باشد یک ماتریس معین مثبت P به طوری که

$$\begin{cases} (A_i - B_i F)^T P + P (A_i - B_i F) < \circ \\ (B_i F)^T P + P (B_i F) < \circ \\ \circ < k_j < 1 \end{cases} \quad (۷.۴)$$

برای هر $i, j = 1, 2, \dots, r$ به جز زوج (i, j) طوری که $h_i * h_j = \circ \forall t$.

اثبات. با توجه به اولین نابرابر در (۷.۴) می توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$A_i^T P + P A_i < (B_i F)^T P + P (B_i F)$$

تا زمانی که دومین و سومین نامساوی در (۷.۴) برقرار باشد، در نتیجه برای تمام k_j داریم:

$$(B_i F)^T P + P (B_i F) < k_j (B_i F)^T P + k_j P (B_i F)$$

سپس نامساوی زیر برای تمام $i, j = 1, 2, \dots, r$ برقرار است.

$$A_i^T P + P A_i < k_j (B_i F)^T P + k_j P (B_i F)$$

$$(A_i - k_j B_i F)^T P + P (A_i - k_j B_i F) < \circ$$

□ با استفاده از بالا و قضیه (۱.۴.۴)، قضیه (۲.۴.۴) اثبات شد.

توجه دارید که در (۶.۴) تعداد r^2 نامساوی در حالی که در (۷.۴) تعداد $2r$ نامساوی برای یافتن F و P داریم.

لم ۱.۴.۴. اگر P یک ماتریس معین مثبت باشد، $P > \circ$ ، آنگاه $A^T P A > \circ$ نیز یک ماتریس معین مثبت است، یعنی $A^T P A > \circ$ که $A, P \in R^{n \times n}$.

اثبات. زمانی که P یک ماتریس معین مثبت باشد، سپس $x^T P x > \circ$ برای تمام $x \in R^n$ است که $Ax \in R^n$ ،

$$x^T (A^T P A) x = (Ax)^T P (Ax) > \circ$$

□ بنابراین $A^T P A > \circ$ در نتیجه، عبارت خلاصه صحیح است.

۵.۴ حل LMI

یکی از راه های حل LMI در قضیه (۲.۴.۴) استفاده از ایده اصلی در [۷] است که می توان ابتدا نامساوی های زیر را نسبت به M و $Y > 0$ حل کرد و سپس P و F را با روابط $F = MP$ و $P = Y^{-1}$ بدست آورد.

$$-YA_i^T - A_iY + M^T B_i^T + B_iM > 0$$

$$M^T B_i^T + B_iM < 0 \quad (۸.۴)$$

۶.۴ مثال عددی

مسأله طراحی کنترل برای پایداری سیستم جرم- فنر در فصل قبل مطرح شد را در نظر بگیرید. در رهیافت PPDC چهار قاعده اگر آنگاه زیر در نظر گرفته می شود

Rule ۱: IF $x(t) \in M_{11}$ AND $\dot{x}(t) \in M_{12}$

$$\text{Then } u(t) = -k_1 Fx(t)$$

Rule ۲: IF $x(t) \in M_{21}$ AND $\dot{x}(t) \in M_{22}$

$$\text{Then } u(t) = -k_2 Fx(t)$$

Rule ۳: IF $x(t) \in M_{31}$ AND $\dot{x}(t) \in M_{32}$

$$\text{Then } u(t) = -k_3 Fx(t)$$

Rule ۴: IF $x(t) \in M_{41}$ AND $\dot{x}(t) \in M_{42}$

$$\text{Then } u(t) = -k_4 Fx(t)$$

و ضرایب نسبی به صورت زیر انتخاب می شوند:

$$k_1 = 0.8, k_2 = 0.85, k_3 = 0.9, k_4 = 0.95$$

از حل LMI های مربوطه F و P به صورت زیر بدست می آید.

$$F = \begin{bmatrix} 1/97.7 & 3/357.5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0/132.0 & 0/1813 \\ 0/1813 & 0/4202 \end{bmatrix}$$

همچنین با به کارگیری رهیافت PDC و چهار قاعده اگر - آنگاه مشابه فوق (بافرض $u_1(t) = -F_i x(t)$) ها p به صورت زیر حاصل می شود.

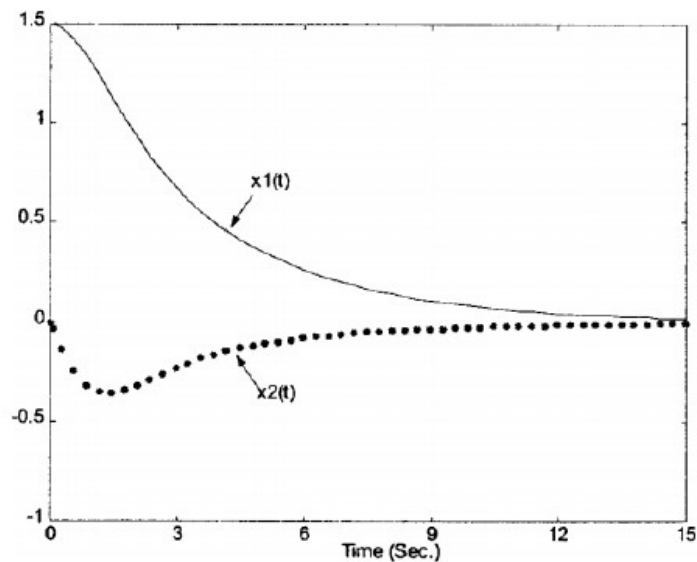
$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \begin{bmatrix} 0/357.1 & 0/743.7 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0/1092 & 0/0184 \end{bmatrix}$$

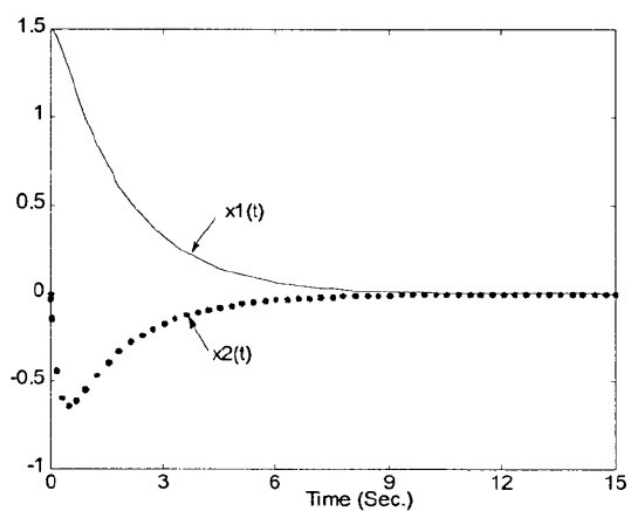
$$P = \begin{bmatrix} 0/0328 & 0/0324 \\ 0/0324 & 0/1727 \end{bmatrix}$$

نتایج پاسخ‌های شبیه‌سازی تحت شرایط اولیه مختلف $x(0) = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $x(0) = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 0 \end{bmatrix}$ در شکل‌های (۱.۴)، (۲.۴)، (۳.۴) و (۴.۴) نشان داده شده است.

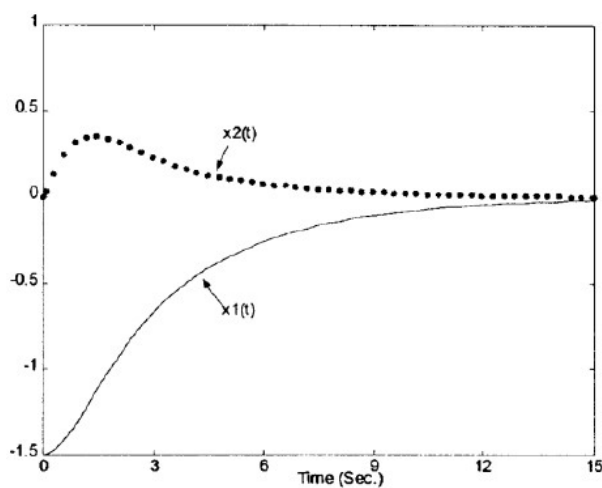
دو موقعیت، یعنی سیستم حلقه بسته با PDC و سیستم حلقه بسته با PPDC مورد بحث قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که در مقایسه با روش PDC معمولی، PPDC می‌تواند در یک زمان کوتاه‌تر به پاسخ حالت پایدار دست یابد. اما مقادیر متغیرهای وضعیت طراحی PPDC بزرگ‌تر از PDC هستند.



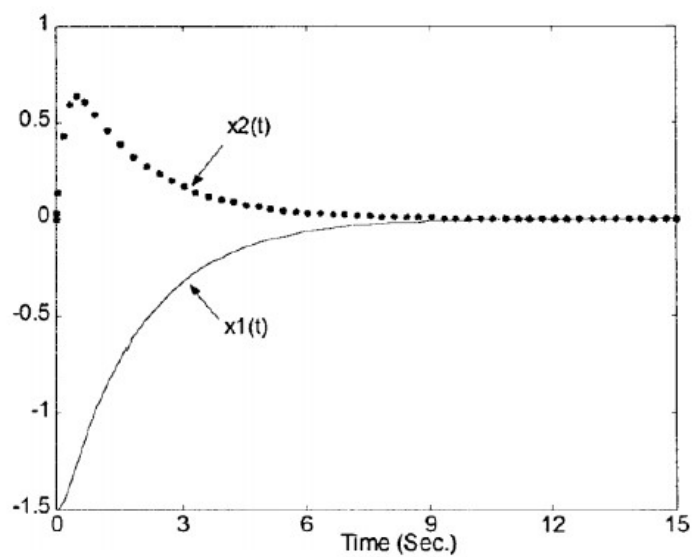
شکل ۱.۴: پاسخ‌های مدل سازی PDC $(x(0) = [1/5 \ 0]^T)$



شکل ۲.۴: پاسخ های مدل سازی PPDC $(x(0) = [1/5 \ 0]^T)$



شکل ۳.۴: پاسخ های مدل سازی PDC $(x(0) = [-1/5 \ 0]^T)$



شکل ۴.۴: پاسخهای مدل سازی $PPDC$ $(x(0) = [-1/5 \ 0]^T)$

فصل ۵

نتیجه گیری

در این پایان نامه مدل سازی تاکاگی - سوگینو و تقریب توابع و نحوه محاسبه پارامترها با روش حداقل مربعات را بررسی کردیم. و یک رهیافت برای طراحی کنترل پایدارساز با توجه به یک تابع لیاپانف درجه دو ارائه دادیم. همچنین رهیافت های PDC و PPDC را برای طراحی یک سیستم مدل فازی تاکاگی - سوگینو ارائه کردیم و با مقایسه این رهیافت ها نشان دادیم که رهیافت PPDC می تواند به طور قابل توجهی تعداد پارامترها را نسبت به رهیافت PDC کاهش دهد و با پیاده سازی دو رهیافت بر روی مسأله سیستم جرم - فنر نشان دادیم که رهیافت PPDC نسبت به PDC از عملکرد بهتری برخوردار است.

مراجع

- [١] Akar M, Ozguner U. Decentralized parallel distributed compensator design for Takagi – Sugeno fuzzy systems. In: ٣٨th Proceedings of the Conference on Decision Control, Phoenix, Arizona, December, ١٩٩٩ p. ٤٨٣٩–٤٨٣٤
- [٢] Baranyi P, Koczy LT, Gedeon TD. A generalized concept for fuzzy rule interpolation. IEEE Transactions on Fuzzy Systems ؛٢٠٠٤ .٨٣٧–٨٢٠:(٤)١٢
- [٣] Baranyi P, Korondi P, Hashimoto H. Global asymptotic stabilization of the prototypical aeroelastic wing section via TP model transformation. Asian Journal of Control ؛٢٠٠٥ .١١١–٩٩:(٢)٧
- [٤] Baranyi P, Korondi P, Patton RJ, Hashimoto H. Trade-off between approximation accuracy and complexity for T-S fuzzy models. Asian Journal of Control ؛٢٠٠٤ .٣٣–٢١:(١)٦
- [٥] Baranyi P. SVD-based reduction to MISO TS models. IEEE Transactions on Industrial Electronics ؛٢٠٠٣ .٢٤٢–٢٣٢:(١)٥١
- [٦] Baranyi P, Szeidl L, Varlaki P, Yam Y. Definition of the HOSVD based canonical form of polytopic dynamic models. Proceedings of ٣rd International Conference on Mechatronics (ICM, (٢٠٠٦ Budapest, Hungary, ٥–٣ July ؛٢٠٠٦ .٦٦٥–٦٦٠
- [٧] Boyd S, Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia, PA: SIAM؛ .١٩٩٤

- [٨] Cao SG, Rees NW, Feng G. Analysis and design for a class of complex control systems- Part I: fuzzy modeling and
- [٩] Cao, S. G. N.W. Rees, and G. Feng, "Analysis and design for a class of complex control systems part I and II: Fuzzy controller design," *Automatica*, vol. ٣٣ no. ٤ pp. ١٠٣٩-١٠١٧ .١٩٩٧
- [١٠] Gahinet. p , Nemirovski. A , A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox, for Use with MATLAB: The Mathworks Inc.*, .١٩٩٥
- [١١] Gang F. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* ؛٢٠٠٦ .٤٩٧-٤٧٤:(٥)١٤
- [١٢] Gorzackzany. M. B. , J. B. Kiszka, and M. S. Stachowicz, "Some problems of studying adequacy of fuzzy models," in *Fuzzy Set and Possibility Theory*, R. R. Yager, Ed. New York: Pergamon, .١٩٨٢
- [١٣] Holmblad L. P. and J. J. Ostergaard, "Control of a cement klin by fuzzy logic techniques," in *Proc. Conf. ٨th IFAC, Kyoto, Japan*, ١٩٨١ pp.٨١٤-٨٠٩.
- [١٤] Hong TP, Lee CY. Induction of fuzzy rules and membership functions from training examples. *Fuzzy Sets and Systems* ؛١٩٩٦ .٤٧-٣٣:(١)٨٤
- [١٥] Hsiao C. Modified gain fuzzy Kalman filtering algorithm. *JSME International Journal. Series C* ؛١٩٩٩ .٣٤٨-٤٢:٣٤٣
- [١٦] Johansen TA, Shorten R, Murray-Smith R. On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* ؛٢٠٠٠ .٣١٣-٢٩٧:(٣)٨
- [١٧] Kim J, Suga Y, Won S. A new approach to fuzzy modeling of nonlinear dynamic systems with noise: relevance vector learning mechanism. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* ؛٢٠٠٦ -٢٢٢:(٢)١٤ .٢٣١
- [١٨] Klawonn F, Kruse R. Constructing a fuzzy controller from data. *Fuzzy Sets and Systems* ؛١٩٩٧ .١٩٣-١٧٧:(٢)٨٥

- [١٩] Kobayashi K, Cheok K, Watanabe K. Estimation of the absolute vehicle speed using fuzzy logic rule-based Kalman filter. Proceedings of the American Control Conference, Seattle, WA, ٢٣-٢١ Jun ١٩٩٥. ٣٠٩٠-٣٠٨٦
- [٢٠] Koczy LT, Hirota K. Size reduction by interpolation in fuzzy rule bases. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B ١٩٩٧. ٢٥-١٤:(١)٢٧
- [٢١] Kumar M, Stoll R, Stoll N. A min-max approach to fuzzy clustering, estimation, and identification. IEEE Transactions on Fuzzy Systems ٢٠٠٦. ٢٦٢-٢٤٨:(٢)١٤
- [٢٢] Lam HK, Leung FHF, Tam PKS. An improved stability analysis and design of fuzzy control systems. IEEE International Fuzzy Systems Conference Proceedings, Seoul, Korea, August, ١٩٩٩ p. ٤٣٣-٤٣٠
- [٢٣] Lam. H. K, F. H. F. Leung, and P. K. S. Tam, "Stable and robust fuzzy control for uncertain nonlinear systems," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. A, vol. ٣٠ pp. ٨٤٠-٨٢٥ Nov. ٢٠٠٠
- [٢٤] Lam .H. K, F. H. F. Leung, and P. K. S. Tam, "Fuzzy control of a class of multivariable nonlinear systems subject to parameter uncertainties: Model reference approach," Int. J. Approx. Reason., vol. ٢٦ no. ٢ pp. ١٤٤-١٢٩ Feb. ٢٠٠١
- [٢٥] Larsen. P. M, "Industrial application of fuzzy logic control," Int. J. Man-Machine Studies, vol. ١٢ pp. ١٠-٣. ١٩٨٠
- [٢٦] Leung. F. H. F, H. K. Lam, and P. K. S. Tam, "Design of fuzzy controllers for uncertain nonlinear systems using stability and robustness analyzes," Syst. Contr. Lett., vol. ٣٥ no. ٤ pp. ٢٨٣-٢٣٧. ١٩٩٨
- [٢٧] Lian K-Y, Su C-H, Huang C-S. Performance Enhancement for T-S Fuzzy Control Using Neural Networks. IEEE Transactions on Fuzzy Systems ٢٠٠٦. ٦٢٧-٦١٩:(٥)١٤

- [٢٨] Mamdani. E. H ، ”Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant,” Proc. IEEE, vol. ،١٢١ no. ،١٢ pp. ،١٥٨٨ – ١٥٨٥ .١٩٧٦
- [٢٩] Matia F, Jimenez A, Al-Hadithi BM. An affine model with decoupled fuzzy dynamics, ٢٧-٢٢ June ؛٢٠٠٨ .٧٢٠-٧١٣
- [٣٠] Mollov S, Babuska R, Abonyi J, Verbruggen HB. Effective optimization for fuzzy model predictive control. IEEE Transactions on Fuzzy Systems ؛٢٠٠٤ .٦٧٥-٦٦١:(٥)١٢
- [٣١] Simon D. Design and rule base reduction of a fuzzy filter for the estimation of motor currents. International Journal of Approximate Reasoning ؛٢٠٠٠ .١٦٧-٢٥:١٤٥
- [٣٢] Simon D. Training fuzzy systems with the extended Kalman filter. Fuzzy Sets and Systems ؛٢٠٠٢ .١٩٩-١٣٢:١٨٩
- [٣٣] Simon D. Sum normal optimization of fuzzy membership functions. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems ؛٢٠٠٢ .٣٨٤-٣٦٣:(٤)١٠
- [٣٤] Skrjanc I, Blazic S, Agamennoni O. Interval fuzzy model identification using l-Norm. IEEE Transactions on Fuzzy Systems ؛٢٠٠٥ .٥٦٨-٥٦١:(٥)١٣
- [٣٥] Sugeno. M and T. Takagi, ”Multi-dimensional fuzzy reasoning,” Fuzzy Sets and Systems, vol. ،٩ no. ،٢ .١٩٨٣
- [٣٦] Szeidl L, Varlaki P. HOSVD based canonical form for polytopic models of dynamic systems. Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics ؛٢٠٠٩ .٦٠-٥٢:(١)١٣
- [٣٧] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics ؛١٩٨٥ .١٣٢-١١٦:(١)١٥
- [٣٨] Takagi. T and M. Sugeno, “Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control.” IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. SMC-١٥, pp. ،١٣٢-١١٦ Jan. .١٩٨٥

- [٣٩] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control. IEEE Trans Systems, Man and Cybernet .١٣٢-١٥:١٦؛١٩٨٥
- [٤٠] Tanaka. K ، T. Ikeda، and H. O.Wang، “Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stability، H control theory، and linear matrix inequalities،” IEEE Trans. Fuzzy Syst.،vol. ،٤ pp. ،١٣-١ Feb. .١٩٩٦
- [٤١] Tanaka K، Ikeda T، Wang HO. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based design. IEEE Trans Fuzzy Syst .٢٦٥-٢٥٠:(٢)٦؛١٩٩٨
- [٤٢] Tanaka. K and M. Sugeno، “Stability analysis and design of fuzzy control systems،” Fuzzy Sets Syst.، vol. ،٤٥ pp. ،١٥٦-١٣٥ .١٩٩٢
- [٤٣] Tanaka K، Wang HO. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach. Wiley: New York، .٢٠٠١
- [٤٤] Tao C، Taur J. Design of fuzzy controllers with adaptive rule insertion. IEEE Transactions on Systems، Man، and Cybernetics-Part B: Cybernetics ؛١٩٩٩ .٣٩٧-٢٩:٣٨٩
- [٤٥] Tikk D، Baranyi P. Comprehensive analysis of a new fuzzy rule interpolation method. IEEE Transactions on Fuzzy Systems ؛٢٠٠٠ .٢٩٦-٢٨١:(٣)٨
- [٤٦] Tikk D، Baranyi P، Patton RJ. Approximation properties of TP forms and its consequences to TPDC design framework. Asian Journal of Control ؛٢٠٠٧ .٢٣١-٢٢١:(٣)٩
- [٤٧] Tong. R. M ، ”The construction and evaluation of fuzzy models،” in Advances to Fuzzy Set Theory and Applications، M. M. Gupta Ed. New York: Plenum، .١٩٧٩
- [٤٨] Tong. R. M ، M. B. Beck، and A. Latten، ”Fuzzy control of the activated sludge wastewater treatment process،” Automatica، vol. ،١٦ pp. ،٧٠١-٦٥٩ .١٩٨٠

- [٤٩] Tong.R. M, M. Beck, and A. Latten, "Fuzzy control of the activated sludge wastewater treatment process," Automatica, vol. ,١٦ pp. .٦٩٧,١٩٨٠-٦٩٥
- [٥٠] Wang L , A Course in Fuzzy systems and control prentice-Hall international,Inc.,١٩٦٢.
- [٥١] Wang L, Mendel J. Back-propagation of fuzzy systems as nonlinear dynamic system identifiers. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, San Diego, California, ؛١٩٩٢ .١٤١٨-١٤٠٩
- [٥٢] Wang L, Yen J. Extracting fuzzy rules for system modelling using a hybrid of genetic algorithms and Kalman filter. Fuzzy Sets and Systems ؛١٩٩٨ .٣٦٢-١٠١:٣٥٣
- [٥٣] Wang.H. O, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and the design issues," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. ,٤ pp. ,٢٣-١٤ .١٩٩٦
- [٥٤] Wang HO, Tanaka K, Griffin M. Parallel distributed compensation of non-linear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. In: Proceedings of the Fuzzy-IEEE, Yokohama,Japan, ،١٩٩٥ p .٥٣٨-٥٣١
- [٥٥] Yam Y, Koczy LT. Representing membership functions as points in high dimensional spaces for fuzzy interpolation and extrapolation. IEEE Transactions on Fuzzy Systems ؛٢٠٠٠ ٨(٦):٧٦١U".٧٧٢ _
- [٥٦] Yam Y, Wong ML, Baranyi P. Interpolation with function space representation of membership functions. IEEE Transactions on Fuzzy Systems ؛٢٠٠٦ .٤١١-٣٩٨:(٣)١٤
- [٥٧] Ying H. The Takagi-Sugeno fuzzy controllers using the simplified linear control rules are non-linear variable gain controllers. Automatica .١٦٧-١٥٧:(٢)٣٤؛١٩٩٨
- [٥٨] Zeng K, Zhang NY, Xu WL. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators. IEEE Transactions Fuzzy Systems ؛٢٠٠٠ .٧٨٠-٧٧٣:(٦)٨

- [٥٩] ، “Design of stable and robust fuzzy controllers for uncertain multivariable nonlinear systems,” in *Stability Issues in Fuzzy Control*, J. Aracil, Ed. New York: Springer, pp. ١٢٥–١٦٤.
- [٦٠] ، “Fuzzy state feedback controller for nonlinear systems: Stability analysis and design,” in *Proc. ٩th Int. Conf. Fuzzy Systems (IEEE FUZZ’٢٠٠٠)*, vol. ٢, ٢٠٠٠ pp. ٦٧٧–٦٨١.

Abstract

In this thesis ,first we introduce the Takagi - Sugeno Models and then ,by an example,explain the application of this Models to approximate a function (or available data).Also,we present an approach to design controller for nonlinear systems,based on the Takagi - Sugeno Modelling,and analyze the stability.Further,we consider the mass- spring problem and give its controller.Moreover,we apply two approaches PDC and PPDC for stabilization of the Takagi - Sugeno systems and by their comparison show that the PPDC approach has better results with to the PDC approach.The results are simulated for mass - spring problem.

key words:Fuzzy systems•Rules if-then fuzzy•Fuzzy propositions•Fuzzy modeling TS•Approach PDC and PPDC.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Optimization

**Stability of Takagi-Sugeno fuzzy control
system**

By: Zahra Ghare Safalo

Supervisor

Mohammad Hadi Noor skandari

MAY 2019