

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار، گرایش آمار ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

توزیع سری‌های توانی وایبل و کاربردهای آن

نگارنده: مهلا علیمردانی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

استاد مشاور

دکتر حسین باغیشنی

بهمن ۱۳۹۶

تقدیم به:

دریای لاجوردی، دانش عمیق و بی‌کرانه است... از ژرفای این زلال جان بخش
که جستن در آن رستگاری و خوشبختی را به جان و جهان انسان هدیه می‌دهد، دری
به دست آورده‌ام و آن را پیچیده در صدف سپید کاغذ تقدیم می‌کنم به: پرورندگان
جان و وجودم، آنان که یکتایند و نه تکرار خواهند شد و نه تکراری، عزیزان دلم... پدر
و مادر پرمهرم و به هم بال و همراه آسمان زندگانیم... همسر نازنینم... و پشتوانه‌ی
همیشگی... خواهر عزیزم

مقدمه

مبحث قابلیت اطمینان یکی از شاخه‌هایی است که امروزه، به طور وسیعی در رشته‌های مختلف علوم از جمله پزشکی و مهندسی کاربرد دارد. پیشرفت‌های صورت گرفته در تکنولوژی و آثار آن در زندگی انسان‌ها باعث شده که بحث‌های قابلیت اطمینان با افزایش تقاضای مصرف‌کنندگان برای محصولات با قابلیت اطمینان بالا، بیش از پیش برای تولیدکنندگان مهم باشد. با توجه به رقابت در بازار برای تولید محصولات با قابلیت اطمینان بالا، روش‌های طراحی بر مبنای قابلیت اطمینان نقش بسیار مهمی در سطح کیفیت مورد انتظار یک محصول در فازهای مختلف طول عمر ایفا می‌کنند. روش طراحی بر مبنای قابلیت اطمینان، روشی نوین در دنیا و با شناختی محدود در ایران است. فرض کنید با موجودی سرو کار داریم، علاقه‌مندیم از نظر احتمالی بررسی کنیم که چنین موجودی با چه احتمالی از زمان t بیشتر عمر می‌کند و در واقع هنگامی که یک موجود زنده را وظیفه‌ای معین در اختیارش می‌گذاریم علاقه‌مندیم قابلیت انجام چنین وظیفه‌ای را از نظر احتمالی روی چنین موجودی اندازه‌گیری کنیم.

از آنجایی که در مطالعات طول عمر محصولات، با کیفیت آن‌ها سروکار داریم و در مواقعی ممکن است محدودیت‌هایی مانند هزینه، فرصت کم و... در آزمایش رخ دهند. این محدودیت‌های به‌وجود آمده در نمونه را سانسور می‌نامند یا به عبارتی ممکن است بعضی از موجودات در زمان تعیین شده عمر نکنند یعنی شکست برای آن‌ها مشاهده نشود اساساً داده‌های زمانی را سانسور شده گوییم. انواع سانسور بر اساس این که آزمایش چه موقع به پایان می‌رسد و چگونه داده‌ها از آزمایش‌های طول عمر جمع‌آوری می‌شوند پدید می‌آیند. سانسور نوع یک و سانسور نوع دو یکی از انواع سانسورها می‌باشد که در زمینه‌های آزمون‌های طول عمر و قابلیت اطمینان از اهمیت بالایی برخوردار هستند. برای تعیین مدل مناسب آماری به داده‌ها و تجزیه و تحلیل‌های مربوط لازم است توزیع‌هایی که می‌توانند به عنوان توزیع طول عمر داده‌ها به کار روند را مورد بررسی قرار داد و مناسب‌ترین توزیع را انتخاب کرد. توزیع وایبل وارون یکی از آن توزیع‌هاست که به طور گسترده برای مدل‌سازی مسایل مختلف در آزمون‌های طول عمر و تحلیل قابلیت اطمینان مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین این توزیع یکی از بهترین توزیع‌ها برای مسایل مخاطره‌های مکمل در قابلیت اطمینان

(مخاطره های رقابتي در تحليل بقا) است. در مخاطره های مکمل، طول عمر برای هر خطر رقیب به طور جداگانه محاسبه و مورد بررسی قرار می گیرد. استفاده از توزیع وایبل و ارون در مسایلي که خطر معیوب شدن کالا تابعي کاهشي است، می تواند کارا باشد. اما در موقعیت های کاربردی مختلف، تابع مخاطره غیرکاهشي است؛ مثلاً ممکن است افزایشی یا سهمی گون باشد. در این موارد، توزیع سری های توانی وایبل و ارون که تابع مخاطره آن صورت های مختلفی دارد، جانشین مناسب تری محسوب می شود. این توزیع از ترکیب دو توزیع سری های توانی و وایبل و ارون ساخته می شود. در این توزیع نیز برای مخاطره های مکمل تنها طول عمر قابل مشاهده است. در این پایان نامه توزیع سری های توانی وایبل و ارون و کاربردهای آن در مدل بندی داده های طول عمر را معرفی و بررسی می کنیم.

این پایان نامه شامل چهار فصل می باشد که در هر فصل مطالبی بیان شده که بطور خلاصه به شرح ذیل می باشد:

- در فصل اول مقدمات، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز سایر فصول را بیان نموده ایم.
- در فصل دوم توزیع وایبل، توزیع وایبل و ارون و توزیع سری توانی را مورد بحث قرار می دهیم.
- در فصل سوم توزیع سری های توانی وایبل و ارون را بر اساس داده های سانسور شده شرح می دهیم، و در قالب یک مثال کاربرد توزیع سری های توانی وایبل و ارون را نشان می دهیم.
- پیوست این پایان نامه شامل برخی تعاریف اولیه و کدهای برنامه نویسی می باشد.

سپاس‌گزاری...

سپاس، آنان را که مرا با مهر از جام نوشین مهربانی‌شان نوشانیدند و بی‌وجودشان پیمایش طریق دانش، میسر نمی‌بود:

با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر احمد نزاقتی رضازاده که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند، صحیفه‌های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه‌گشای نگارنده در اتمام و کمال پایان‌نامه بوده است. از جناب آقای دکتر حسین باغیشنی به عنوان استاد مشاور بسیار سپاسگزارم چرا که با یاری‌ها و راهنمایی‌های بی‌چشم‌داشت ایشان بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان‌تر نمودند، که همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داده‌اند. همچنین از جناب آقای دکتر سبحان شفیعی به خاطر همه زحماتی که برایم کشیدند تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم کمال تشکر را دارم.

مهلا علی‌مردانی

بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب مهلا علیمردانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آمار علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **توزیع سری های توانی و اویل وارون و کاربردهای آن**، تحت راهنمایی **احمد نزاکتی رضازاده** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مهلا علیمردانی

بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

توزیع وایبل و ارون یکی از توزیع های احتمال است که به طور گسترده برای مدل سازی داده های نامنفی، به خصوص برای تخریب قطعات مکانیکی استفاده می شود. این توزیع نمی تواند برازش مناسبی برای توزیع های با نرخ شکست وان شکل و افزایشی در قابلیت اطمینان فراهم کند، بنابراین در این پایان نامه، یک توزیع ترکیبی طول عمر جدید با توابع نرخ مخاطره های صعودی، نزولی، وان شکل مطرح می شود. توزیع جدید، سه پارامتری و ترکیبی از توزیع وایبل و ارون و توزیع سری توانی است. همچنین گشتاورها، برآورد ماکسیمم درستنمایی با داده های سانسور شده، استنباط برای یک نمونه ی بزرگ و الگوریتم EM برای تعیین برآورد ماکسیمم درستنمایی مطرح می کنیم. سرانجام با استفاده از داده های واقعی، انعطاف پذیری توزیع جدید را نشان خواهیم داد.

کلمات کلیدی: توزیع وایبل، توزیع وایبل و ارون، توزیع سری توانی، الگوریتم EM ، آنتروپی شانون، آماره مرتب

فهرست مطالب

ش	فهرست تصاویر
ث	فهرست جداول
۱	تعاریف و مقدمات ۱
۱	۱.۱ آماره‌های مرتب
۱	۱.۱.۱ خواص آماره‌های مرتب
۲	۲.۱.۱ تابع توزیع تجربی
۲	۲.۱ کرامر فون میسز
۳	۳.۱ آندرسون دارلینگ
۳	۴.۱ آنتروپی شانون
۵	۱.۴.۱ تابع تشخیص کولبک- لایبر
۶	۲.۴.۱ معیار اطلاع آکاییک
۶	۳.۴.۱ معیار اطلاع بیزی
۶	۴.۴.۱ داده‌های کامل
۷	۵.۴.۱ زمان شکست
۷	۶.۴.۱ سانسور
۸	۷.۴.۱ انواع داده‌های سانسور شده طول عمر
۹	۸.۴.۱ سانسور نوع اول
۹	۹.۴.۱ سانسور نوع دوم
۱۰	۱۰.۴.۱ قابلیت اطمینان
۱۱	۱۱.۴.۱ نرخ شکست
۱۱	۱۲.۴.۱ تعیین شکل تابع نرخ شکست با استفاده از نمودار زمان کل آزمون
۱۲	۱۳.۴.۱ میانگین طول عمر و میانگین باقیمانده عمر
۱۳	۵.۱ کاپلان مایر
۱۳	۱.۵.۱ کاربرد کاپلان مایر

۱۵	توزیع وایبل و مدل‌های مختلف آن	۲
۱۵	توزیع وایبل	۱.۲
۲۰	وایبل وارون	۲.۲
۲۳	توزیع سری توانی	۳.۲
۲۵	توزیع سری توانی وایبل	۴.۲
۲۸	توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته	۵.۲
۳۱	توزیع سری‌های توانی وایبل وارون	۳
۳۱	توصیف مدل	۱.۳
۴۱	مشخصه‌سازی حداکثر آنتروپی	۲.۳
۴۶	برآورد و استنباط	۳.۳
۴۸	ماتریس اطلاع فیشر	۱.۳.۳
۵۰	الگوریتم EM	۲.۳.۳
۵۰	فرمول بندی الگوریتم EM	۳.۳.۳
۵۳	خطای استاندارد الگوریتم EM	۴.۳.۳
۵۷	زیر مدل‌های توزیع سری‌های توانی وایبل وارون	۴.۳
۵۷	توزیع دوجمله‌ای وایبل وارون	۱.۴.۳
۵۹	توزیع هندسی وایبل وارون	۲.۴.۳
۶۱	توزیع لگاریتم وایبل وارون	۳.۴.۳
۶۳	توزیع پواسون وایبل وارون	۴.۴.۳
۶۶	کاربرد توزیع سری‌های توانی وایبل وارون	۵.۳
۷۱	تعاریف	آ
۷۱	تابع درست‌نمایی	۱.آ
۷۲	برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم	۱.۱.آ
۷۲	خواص مجانبی برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم	۲.آ
۷۳	شرایط نظم	۱.۲.آ
۷۳	بردار امتیاز	۳.آ
۷۴	ماتریس اطلاع فیشر	۱.۳.آ
۷۴	کاربرد آماره‌های مرتب	۴.آ
۷۷	ب کدهای برنامه‌نویسی	
۱۰۵	مراجع	

۱۱۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۱۱۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۹ نمایش سانسور نوع اول	۱.۱
۹ نمایش سانسور نوع دوم	۲.۱
۱۲ اشکال نرخ شکست	۳.۱
۱۷ نمودارتابع چگالی توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف β و $\alpha = 0.5$	۱.۲
۱۷ نمودارتابع چگالی توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف β و $\alpha = 2$	۲.۲
۲۱ نمودارتابع چگالی توزیع وایبل و ارون به ازای مقادیر مختلف β و $\alpha = 0.5$	۳.۲
۲۲ نمودارتابع چگالی توزیع وایبل و ارون به ازای مقادیر مختلف β و $\alpha = 2$	۴.۲
۳۷ نمودار تابع چگالی توزیع <i>IWPS</i> برای $\alpha = 1$ ، $\theta = 1$ و β های مختلف	۱.۳
۳۸ نمودار تابع نرخ شکست توزیع <i>IWPS</i>	۲.۳
 نمودار تابع چگالی توزیع دوجمله‌ای وایبل و ارون برای $m = 5$ و به ازای	۳.۳
۵۸ مقادیر α ، θ و β های مختلف	
۶۰ تابع چگالی توزیع هندسی وایبل و ارون به ازای مقادیر θ ، α و β های مختلف	۴.۳
۶۲ نمودار تابع چگالی توزیع لگاریتم وایبل و ارون به ازای مقادیر مختلف θ ، α و β	۵.۳
 نمودار تابع چگالی توزیع پواسون وایبل و ارون به ازای مقادیر مختلف θ ، α و	۶.۳
۶۴ و β	
۶۶ نمودار TTT – (a) مجموعه داده اول ؛ (b) مجموعه داده دوم	۷.۳
 بقای تجربی و برآورد تابع بقا – (a) مجموعه داده اول ؛ (b) مجموعه داده	۸.۳
۶۸ دوم	

فهرست جداول

۱.۳ برآورد پارامترها ۶۸

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

در این فصل، مفاهیم و نمادهایی را که در این پایان نامه مورد استفاده قرار خواهد گرفت، معرفی می‌کنیم. در بخش اول آماره‌های مرتب و کاربردهای آن توضیح داده شده است. در بخش دوم کرامر فون میسر را بیان می‌کنیم. در بخش سوم آندرسون دارلینگ را بررسی نموده‌ایم. در بخش چهارم آنتروپی شانون و حداکثر آنتروپی را شرح می‌دهیم. در بخش پنجم به قابلیت اعتماد پرداخته و در بخش ششم کاپلان مایر و کاربردهای آن را بررسی می‌کنیم.

۱.۱ آماره‌های مرتب

فرض کنید T_1, \dots, T_n ، n متغیر تصادفی باشند. اگر آن‌ها را به ترتیب صعودی مرتب کنیم و مقادیر مرتب شده را به صورت $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(n)}$ ، نشان دهیم. در این صورت $T_{(j)}$ را j امین آماره مرتب در نمونه‌ای به حجم n گوییم. کوچکترین و بزرگترین آماره مرتب، یعنی $T_{(1)}$ و $T_{(n)}$ به مقادیر فرین معروف هستند.

۱.۱.۱ خواص آماره‌های مرتب

هر آماره مرتب فقط به آماره مرتب ماقبل خود ربط دارد و از دیگر آماره‌ها مستقل است. فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع پیوسته $F(x)$ باشد، آن‌گاه:

۱- تابع چگالی توام آماره‌های مرتب

$$f_{X_{1:n}, \dots, X_{n:n}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n f_X(x_i), \quad -\infty < x_1 < x_2 < \dots < \infty.$$

۲- تابع چگالی حاشیه‌ای یک آماره مرتب

$$f_{X_{i:n}}(x_i) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x), \quad -\infty < x_i < \infty.$$

۳- تابع چگالی توام دو آماره مرتب

$$f_{X_{i:j:n}}(x_i, x_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(x_i)]^{i-1} [F(x_j) - F(x_i)]^{j-i-1} \\ \times [1 - F(x)]^{n-j} f(x_i) f(x_j), \quad -\infty < x_i < x_j < \infty.$$

۲.۱.۱ تابع توزیع تجربی

فرض می‌کنیم X_1, \dots, X_n نمونه تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک $F(\cdot)$ باشد، در این صورت تابع توزیع تجربی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{F}_n(t) = \frac{\text{تعداد عناصر نمونه} \leq t}{\text{حجم نمونه}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{x_i \leq t\}. \quad (1.1)$$

مثال ۱.۱.۱. برای داده‌های زیر تابع توزیع تجربی را به دست آورید.

$$5, 3/5, 2/5, 3$$

تابع توزیع تجربی به صورت زیر است:

$$\hat{F}_4(t) = \begin{cases} 0 & x < 2/5 \\ 1/4 & 2/5 \leq x < 3 \\ 2/4 & 3 \leq x < 3/5 \\ 3/4 & 3 \leq x < 5 \\ 1 & x \leq 5 \end{cases}$$

۲.۱ کرامر فون میسر

معیار کرامر فون میسر اولین بار توسط هارالد کرامر [۱۶] و ریچارد ادلر فون میسر [۴۸] پیشنهاد شد و آندرسون [۵] تعمیم دونمونه‌ای آن را ارائه داد. معیار کرامر فون میسر در آمار برای آزمون

نیکیوی برآزش تابع توزیع تجمعی F^* و مقایسه‌ی یک یا دو تابع توزیع تجربی، همچنین برای برآورد حداقل فاصله استفاده می‌شود. آزمون کرامر فون میسر فرض مقابل آزمون کلموگروف اسمیرنو^۱ است و معیار آن برابر است با:

$$w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F^*(x)]^2 dF^*(x) \quad (2.1)$$

اگر x_1, \dots, x_n یک نمونه مشاهده شده باشد، آن‌گاه آزمون کرامر فون میسر برابر است با:

$$T = nw^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{2i-1}{2n} - F(x_i) \right]^2 \quad (3.1)$$

که T آماره کرامر فون میسر، F_n توزیع تجربی و F^* توزیع نظری می‌باشد.

۳.۱ آندرسون دارلینگ

آزمون آندرسون دارلینگ یک آزمون آماری است که توسط تیدر ویلبر آندرسون و دونالد آ دارلینگ [۶] ارائه شد. این آزمون بیان‌گر این است که آیا نمونه‌ی داده شده از یک توزیع احتمالی پیروی می‌کند یا خیر. اساس آن عبارت است از این که فرض کنیم در توزیع، هیچ پارامتری مورد آزمایش قرار نگرفته است. با این حال آزمون هنگامی استفاده می‌شود که در آن خانواده‌های توزیع، مورد آزمایش قرار می‌گیرند در این صورت پارامترهای آن خانواده باید برآورد شوند و در تنظیم آمار یا مقادیر بحرانی مورد توجه قرار گیرند. آزمایش k نمونه‌ای آندرسون دارلینگ برای آزمایش این که چندین مجموعه مشاهدات در یک جمعیت واحد که در آن تابع توزیع مشخص نشده است می‌توان مدل‌سازی کرد. علاوه بر مدل‌سازی، می‌توان به عنوان یک آزمون مناسب برای ارزیابی پارامتر به عنوان مبنایی برای روش حداقل برآورد فاصله استفاده کرد و فرمول آن برابر است با:

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x) \quad (4.1)$$

۴.۱ آنتروپی شانون

امروزه آنتروپی از جایگاه ویژه‌ای در علوم مختلف از قبیل فیزیک، آمار و احتمال، نظریه‌ی ارتباطات، نظریه‌ی مجموعه‌های فازی، اقتصاد و ... برخوردار است. کلاود شانون [۴۱] در مقاله‌ای تحت عنوان نظریه ریاضی برای ارتباطات، آنتروپی شانون را بیان کرد. آنتروپی شانون در زمینه نظریه‌ی اطلاع نقش بسیار مهمی دارد. آنتروپی (اطلاع شانون) یک پیشامد، میزان عدم حتمیت آن پیشامد را اندازه می‌گیرد. هر چه پیشامدی نادرتر باشد، رخ دادن آن

^۱ Kolmogorov-smirnov test

متضمن اطلاع بیشتری است. مفهوم آنتروپی اولین بار در علم فیزیک معرفی شد و برای کمی سازی مفاهیم عدم حتمیت و بی‌نظمی به کار برده شده است. بعدها هارتلی [۲۶] و نیکویست [۳۹]، اولین افرادی بودند که تعاریفی از اطلاع را در مهندسی ارتباطات ارائه دادند. شانون برای استخراج مفهوم آنتروپی یک توزیع احتمال مانند $P = (p_1, \dots, p_n)$ ، در جستجوی تابعی بود که در اصول زیر صدق کند:

$$f(1) = 0 \quad -1$$

$$f(p) \text{ یک تابع پیوسته از } p \text{ باشد.} \quad -2$$

$$p < q \Rightarrow f(p) > f(q) \text{ یعنی } f(p) \text{ یک تابع اکیدا نزولی از } p \text{ باشد.} \quad -3$$

$$f(p \times q) = f(p) + f(q), \quad \forall p, q \in [0, 1] \quad -4$$

تعریف ۱.۴.۱. اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(\cdot)$ باشد، آنگاه آنتروپی شانون به صورت

$$H_{sh}(f) = - \int_R f(x) \log f(x) dx = -E[\log f(X)] = E\left[\log \frac{1}{f(x)}\right] \quad (5.1)$$

تعریف می‌شود که میزان بی‌نظمی تابع چگالی $f(x)$ را بیان می‌کند. به این معنی که هر چقدر تابع چگالی $f(x)$ به تابع چگالی یکنواخت نزدیکتر باشد یا به عبارتی هر چه چگالی منظم تر باشد آنتروپی شانون کمتر می‌شود و تصمیم‌گیری بر اساس آن مشکل تر خواهد شد. بنابراین تصمیم‌گیری بر اساس تابع چگالی $f(x)$ زمانی قابل درک است که اندازه آنتروپی شانون آن زیاد باشد. اصل نظریه ارتباطات از بخش‌های مختلف آمار و احتمال به وجود می‌آید و پاسخگوی تمامی رشته‌های مختلف آمار و رشته‌های مرتبط با آن است. برای جزئیات بیشتر به [۴۶] مراجعه شود.

جینز [۲۷] روش حداکثر آنتروپی در رشته‌ی آمار و احتمال که از ماکسیمم کردن آنتروپی شانون به دست می‌آید، را تولید کرد. فرض کنید:

$$F = \{f(x) : E_f(T_i(X)) = \alpha_i, i = 0, \dots, m\} \quad (6.1)$$

$T_i(X)$ ، توابعی انتگرال‌پذیر در f و $T_0(X) = \alpha_0 = 1$ در موارد پیوسته اصل حداکثر آنتروپی تابع چگالی ناشناخته X از ماکسیمم آنتروپی شانون (۵.۱) به دست می‌آید. شور و جانسون [۴۴] روش حداکثر آنتروپی را بیان کردند. این روش با موفقیت در رشته‌های مختلف و همچنین برای مشخصه‌سازی چندین توزیع‌های احتمال استفاده می‌شود. برای جزئیات بیشتر به کاپور [۵۵]، صوفی [۴۶]، زگرافوس و بالاکریشانان [۵۰] مراجعه کنید. توزیع حداکثر آنتروپی متعلق به چگالی کلاس F است که با f^{ME} نمایش داده می‌شود، و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{ME}(x) = \arg \max_{f \in F} H_{sh} \quad (7.1)$$

اصل حداکثر آنتروپی نیز به برآورد توزیع متغیرهای تصادفی می‌پردازد و توزیعی به عنوان یک مدل مناسب انتخاب می‌شود که عدم حتمیت بیشتری داشته باشد.

ویژگی‌هایی که باعث می‌شود آنتروپی را یک معیار عدم حتمیت بدانیم عبارتند از:

(الف) آنتروپی برای متغیرهای تصادفی گسسته همواره نامنفی است و آنتروپی صفر می‌شود، اگر و تنها اگر حتمیت کامل وجود داشته باشد، یعنی همه‌ی احتمال دستگاه به یک پیشامد معین اختصاص یافته باشد، به عبارتی دیگر $H(1, 0, \dots, 0) = 0$.

(ب) در آنتروپی گسسته، همواره $H(F) \leq \log n$ و تساوی وقتی رخ می‌دهد که

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$$

در واقع وقتی همه‌ی پیشامدها هم‌احتمالند، بیشترین عدم حتمیت از این نظر که کدام پیشامد رخ خواهد داد، پیش می‌آید.

(ج) در حالت پیوسته، لازم است که محدودیت‌هایی برای متغیر تصادفی در نظر گرفت. به عنوان مثال، برای کلیه متغیرهای پیوسته‌ای که تکیه‌گاه آن‌ها خط حقیقی و واریانس آن‌ها مقدار σ^2 است، $H(X)$ ماکسیمم است، اگر و تنها اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع $N(0, \sigma^2)$ باشد.

برای توضیحات بیشتر به کاور و توماس [۵۳] مراجعه کنید.

۱.۴.۱ تابع تشخیص کولبک- لایبر

تابع اطلاع تشخیص کولبک- لایبر^۲ اولین بار توسط کولبک و لایبلا [۲۸] معرفی شد. از این تابع برای مقایسه دو توزیع و همچنین برای معیارهای اندازه‌گیری فاصله بین دو توزیع احتمال استفاده می‌شود.

تعریف ۲.۴.۱. برای دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y به ترتیب با تابع چگالی احتمال g, f اطلاع کولبک- لایبلا به عنوان میزان تفاوت توزیع‌های دو متغیر به صورت

$$K(f|g) = \int f(x) \log \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) dx \quad (۸.۱)$$

تعریف می‌شود، که در آن g توزیع مرجع است.

تعریف ۳.۴.۱. برای دو متغیر تصادفی گسسته X و Y با توابع چگالی احتمال $p(x)$ و $q(x)$ و تکیه‌گاه مشترک χ ، این فاصله عبارت است از:

$$K(p|q) = \sum_{x \in \chi} p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) \quad (۹.۱)$$

^۲Kullback-Leibler

از اندازه اطلاع کولبک- لایبلر برای تقریب توابع توزیع نیز استفاده می‌شود، به این معنا که اگر یکی از دو توزیع دارای تابع چگالی معلوم باشد، $K(f|g)$ قابلیت پیش‌بینی توزیع نامعلوم با استفاده از توزیع معلوم را نشان می‌دهد.

۲.۴.۱ معیار اطلاع آکاییک

معیار اطلاع آکاییک^۳ (AIC)، معیاری برای انتخاب بهترین مدل آماری از بین چند نامزد است. این معیار، نیکویی برازش مدل را همراه با پیچیدگی آن، به‌طور توأم، در نظر می‌گیرد که توسط آکاییک [۴] پیشنهاد شد. با داده‌های مشاهده شده، چند مدل رقیب بر حسب مقدار AIC رتبه‌بندی می‌شود و مدل با کمترین AIC بهترین است. در حالت کلی، AIC به صورت

$$AIC = 2K - 2\log L$$

تعریف می‌شود که در آن K تعداد پارامترهای مدل و L تابع درست‌نمایی برای مقدار برآورد شده است.

۳.۴.۱ معیار اطلاع بیزی

معیار اطلاع بیزی^۴ (BIC) معیاری برای انتخاب مدل از میان مجموعه متناهی مدل‌ها و بر پایه تابع درست‌نمایی است. به دلیل سنگین‌تر بودن جریمه این معیار نسبت به آکاییک، مدلی که براساس این معیار انتخاب می‌شود یا همان مدل منتخب براساس آکاییک است یا مدلی با تعداد پارامتر کمتر و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$BIC = K\log n - 2\log L$$

که در آن K تعداد پارامترهای مدل و L تابع درست‌نمایی برای مقدار برآورد شده است.

قابلیت اعتماد

۴.۴.۱ داده‌های کامل

اگر یک نمونه تصادفی به حجم n تحت آزمون طول عمر قرار گیرد در این صورت اولین زمان خرابی مشاهده شده خود به خود کوچکترین آماره مرتب $x_{1:n}$ است و به طور مشابه دومین خرابی ثبت شده عبارتست از $x_{2:n}$ الی آخر. اگر همه n مشاهده، مرتب شده به دست آیند آن را نمونه‌گیری کامل می‌گویند. در واقع داده کامل ارزش هر واحد نمونه، مشاهده یا شناخته شده

^۳ Akaike information criterion

^۴ Bayesian information criterion

می‌باشد. برای مثال اگر بخواهیم میانگین نمره آزمونی برای یک نمونه ده‌تایی از دانشجویان را محاسبه کنیم، به اطلاعات کاملی شامل دانستن نمره هر یک از دانشجویان احتیاج خواهیم داشت. به همین ترتیب در مورد تحلیل داده‌های عمر، داده‌های کامل مجموعه‌ای از زمان شکست همه واحدهای نمونه، تشکیل خواهد شد.

۵.۴.۱ زمان شکست

در آنالیز بقاء کلاسیک، به مطالعه گروهی از افراد پرداخته می‌شود که برای تک تک آنها یک رویداد لحظه‌ای، به نام شکست، تعریف می‌شود. مدت زمانی که طول می‌کشد تا این شکست رخ دهد، زمان شکست نامیده می‌شود. روی هر فرد، شکست، حداکثر یک بار می‌تواند رخ دهد. داده‌های بقاء در حقیقت زمان‌های شکست را از یک لحظه ورود تعریف شده تا وقوع یک رویداد نهایی اندازه‌گیری می‌کنند. تعیین دقیق زمان شکست مستلزم آن است که:

الف- معنی و مفهوم شکست کاملاً واضح باشد.

ب- یک مبدأ زمانی برای هر یک از افراد مورد مطالعه تعریف شده باشد.

ج- یک مقیاس برای اندازه‌گیری زمان تعیین شده باشد.

دانستن زمان شکست در آنالیز بقا برای ما حائز اهمیت است. گاهی این زمانها را نمی‌توان مشاهده کرد چون به دلایلی سانسور می‌شوند.

۶.۴.۱ سانسور

هدف از مطالعه داده‌های بقاء مشاهده و بررسی زمان‌های شکست برای یک واحد زنده و یا مولفه تحت مطالعه می‌باشد. اغلب به دلیل محدودیت‌هایی که در مطالعات به وجود می‌آید، امکان پذیر نیست که صبر کنیم تا این رویداد برای همه‌ی افراد یا قطعات رخ دهد، مثلاً در آزمون عمر در قابلیت اعتماد صنعتی، بعضی از قطعات (مولفه‌ها) ممکن است از کار نیافتند، یعنی شکست برای آنها مشاهده نشود. بنابراین استنباط‌های خود را براساس مولفه‌هایی که خراب شده‌اند، انجام می‌دهیم. این محدودیت‌ها ممکن است به صورت اختیاری توسط آمارگر اعمال شود یا ماهیت آزمایش طوری باشد که خود به خود محدودیتی را در مشاهدات به وجود آورد.

بعضی از محدودیت‌ها عبارتند از:

(۱) هزینه بر بودن آزمایش

(۲) عدم دسترسی به همه واحدها یا مایوس شدن از نتیجه دادن همه واحدها

(۳) اشکالات فنی

(۴) طولانی شدن مدت آزمایش

(۵) فرصت کم برای اعلام نتایج

این محدودیت به وجود آمده در نمونه را سانسور گویند. هر چند با سانسور کردن مشاهدات، مقداری از اطلاعات موجود را از دست می دهیم، با این وجود گاهی اوقات به دلایلی که بیان شد مایل یا مجبور به سانسور کردن مشاهدات هستیم.

۷.۴.۱ انواع داده‌های سانسور شده طول عمر

برای جمع‌آوری داده‌های طول عمر دو روش وجود دارد:

۱ - روش اول به این صورت است که قبل از شروع آزمایش زمان t_0 را مشخص کنیم و فقط طول عمر مولفه‌هایی را که تا زمان t_0 شکست خورده‌اند یادداشت کنیم این روش را زمان سانسور^۵ می‌نامند، زیرا زمان قطعی آزمایش از ابتدا مشخص شده است.

۲ - روش دوم به این صورت است که قبل از شروع آزمایش یک عدد صحیح کوچکتر از n (تعداد کل مولفه‌ها) را معین کنیم و آن را r بنامیم و آزمایش را تا زمانی که طول عمر r تا مولفه اول به پایان برسد ادامه دهیم و دقیقاً در زمان T_r یعنی طول عمر r مین مولفه‌ای که شکست خورده، طول عمر آزمایش را قطع می‌کنیم. این روش را شکست سانسور^۶ می‌نامیم زیرا تعداد شکست‌های ثبت شده از ابتدا مشخص شده است.

همچنین اگر همه مولفه‌ها آزمایش را با هم شروع کنند، داده‌ها را سانسور منفرد^۷ و اگر مولفه‌ها در زمان‌های مختلفی از بازه زمانی شروع به فعالیت کنند، و آزمایش در زمان t_0 قطع شود داده‌ها را سانسور چندگانه^۸ می‌نامند.

برخی از سانسورها عبارتند از:

(۱) سانسور نوع اول

(۲) سانسور نوع دوم

(۳) سانسور هیبرید

(۴) سانسور فزاینده نوع یک

(۵) سانسور فزاینده نوع دو

در این بخش، سانسور نوع اول و دوم که در این پایان‌نامه استفاده شده است توضیح داده می‌شود.

^۵Time Censoring

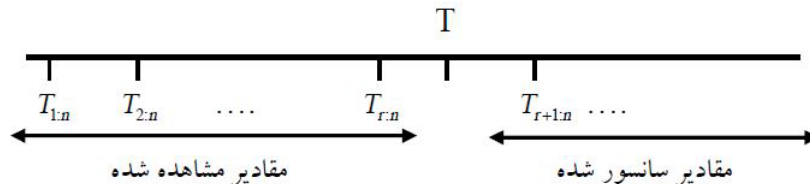
^۶Failure Censoring

^۷Single Censoring

^۸Multiple Censoring

۸.۴.۱ سانسور نوع اول

به داده‌های منفرد زمان سانسور، داده‌های سانسور شده نوع اول می‌گویند. شکل (۱.۱) این نوع سانسور را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱: نمایش سانسور نوع اول

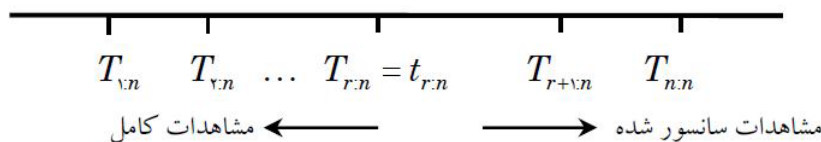
اگر طول عمر واحدها دارای تابع چگالی احتمال $f(t; \alpha, \beta)$ و تابع توزیع $F(t; \alpha, \beta)$ باشند آنگاه تابع درستنمایی به صورت زیر خواهد بود:

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^r f(t_{i:n}; \alpha, \beta) [1 - F(t; \alpha, \beta)]^{n-r}$$

مثال ۱.۴.۱. ۱۰ قطعه الکترونیکی، زمانی که در حالت روشن قرار دارند، در نظر بگیرید. آزمایش تا ۱۰ روز ادامه پیدا می‌کند. در طی آزمایش مدت زمان خرابی هر قطعه یادداشت می‌شود. بعد از ۱۰ روز (زمان اتمام آزمایش) برای قطعاتی که تا این زمان سالم هستند، فقط می‌دانیم که زمان لازم تا خرابی آن‌ها بیشتر از ۱۰ روز است.

۹.۴.۱ سانسور نوع دوم

به داده‌های منفرد شکست سانسور، داده‌های سانسور شده نوع دوم می‌گویند.



شکل ۲.۱: نمایش سانسور نوع دوم

تابع درستنمایی آن به صورت

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^r f(t_{i:n}; \alpha, \beta) [1 - F(t_{r:n}; \alpha, \beta)]^{n-r}$$

است که در آن F تابع توزیع و f تابع چگالی احتمال می‌باشد. این نوع سانسور در مطالعات پزشکی کمتر متداول است اما معمولاً در آزمون‌های الکترونیکی و مطالعات قابلیت اطمینان به کار می‌رود. در این روش از سانسور در حقیقت زمان لازم برای رسیدن به T_r امین شکست متغیر تصادفی مورد مطالعه است.

مثال ۲.۴.۱. هنگامی که 10 قطعه الکتریکی را در زمان $t = 0$ مورد استفاده قرار می‌دهیم ممکن است 10 روز زمان تعیین کنیم و منتظر بمانیم که چه تعداد از این قطعات در فاصله 10 روز از بین می‌رود. در اینجا زمان خرابی سایر قطعات مشخص نیست. در این سانسور تعداد واحدهایی که خراب می‌شوند از قبل مشخص و برابر مقدار ثابتی است که توسط محقق تعیین می‌شود، ولی زمان اتمام آزمایش یک متغیر تصادفی است.

اگرچه ظاهراً توابع درستنمایی این دو نوع سانسور دارای فرم‌های مشابهی هستند اما باید توجه داشت که تفاوت عمده‌ای با یکدیگر دارند که در اولی (سانسور نوع اول) r یک متغیر تصادفی از توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $(n; F(t; \theta))$ است اما در سانسور نوع دو r مقداری از قبل تعیین شده است.

سانسور نوع دو می‌تواند به سانسور نوع دو مرحله‌ای (راست و چپ) تعمیم داده شود. این حالت زمانی رخ می‌دهد که زمان‌های r شکست اول ثبت نشده باشد و مشاهدات از زمان $r + 1$ امین شکست شروع شوند و در زمان مشاهده T_r امین شکست، آزمایش به اتمام می‌رسد.

برای جزئیات بیشتر در مورد انواع سانسورها و کاربرد آن‌ها به کوهن [۵۴]، بالاکریشن و کوهن [۵۱]، لاولس [۵۷] و همچنین نلسن [۵۹] مراجعه شود.

۱۰.۴.۱ قابلیت اطمینان

یکی از معیارهای عمده در تصمیم‌گیری و برنامه‌ریزی‌های مهندسی نگهداری و تعمیرات، قابلیت اطمینان می‌باشد. عام‌ترین و معمول‌ترین تعریف برای قابلیت اطمینان را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

احتمال آن که T بتواند در طول عمر تعیین شده‌اش، تحت شرایط محیطی از قبل مشخص شده، اهداف تعیین شده از ساخت خود را تامین نماید.

معمولاً بر حسب نوع استفاده و موقعیت کاربرد، تعاریف گوناگونی برای قابلیت اطمینان وجود دارد. همه این تعاریف دارای این وجه مشترک هستند که تابع قابلیت اطمینان $(0, T)$ بیانگر احتمال موجود برای عملکرد مطلوب یک دستگاه در فاصله زمانی می‌باشد. بدیهی است که در حالت کلی، عملکرد مطلوب در زمان t این معنی را خواهد داشت که دستگاه در تمام فاصله زمانی $(0, T)$ عملکرد مطلوب داشته است، به شرط این که در این فاصله هیچ‌گونه تعویض قطعه و یا تعمیر صورت نگرفته باشد. قابلیت اطمینان با گذشت زمان تغییر می‌کند و لذا می‌توانیم قابلیت اطمینان را به صورت تابعی از زمان در نظر گرفته و به صورت $R(\cdot)$ نشان دهیم.

حال فرض کنید متغیر تصادفی T دارای تابع توزیع $F(\cdot)$ است. قابلیت اطمینان در زمان t به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) \quad (10.1)$$

از آنجا که تابع قابلیت اطمینان احتمال عدم از کارافتادگی را بیان می‌کند، به توابع بقاء معروف می‌باشند. در واقع تعیین کننده احتمال عمر باقیمانده دستگاه‌ها و تجهیزات هستند. چگونگی قرار دادن قطعات در محصول بر قابلیت اطمینان کل سیستم تاثیر می‌گذارد. قطعات را می‌توان به صورت سری، موازی یا ترکیبی از این دو در سیستم قرار داد.

۱۱.۴.۱ نرخ شکست

نرخ شکست یا میزان شکست یکی از ابزارهای کاربردی در بحث‌های مهندسی و برنامه‌ریزی نگهداری و تعمیرات به شمار می‌رود و یکی از مشخصه‌های آماری تجهیزات و دستگاه‌ها است که معمولاً در مطالعات مربوط به جایگزینی تجهیزات مطرح می‌گردد. بنابراین نرخ شکست عبارتست از: نسبت تجهیزات معیوب در یک فاصله زمانی به کل تجهیزات راه اندازی شده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(\cdot)$ است. نرخ شکست متغیر تصادفی X را با $h(\cdot)$ نشان داده و در زمان t به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (11.1)$$

$f(t)$ بیانگر تابع چگالی احتمال و $R(t)$ بیانگر تابع قابلیت اطمینان می‌باشد.

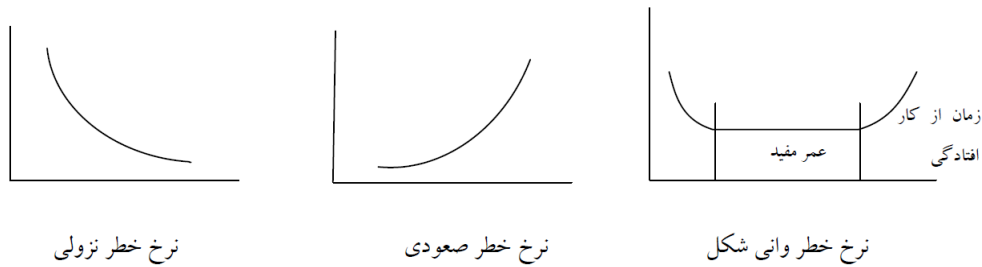
توجه کنید که تابع نرخ شکست احتمال از کار افتادن نیست (یعنی لزوماً مقداری بین صفر و یک اختیار نمی‌کند). این کمیت نرخ از کار افتادگی را برای موجود زنده در زمان t نشان می‌دهد. طبیعی است که هر چقدر مقدار این کمیت بیشتر باشد انتظار داریم قابلیت اطمینان آن کمتر باشد. تابع نرخ شکست $h(t)$ بر مبنای تغییرات زمان رفتارهای گوناگونی دارد. متداول ترین نوع رفتار $h(t)$ می‌تواند ثابت، صعودی، نزولی و وانی شکل باشد. اشکال نرخ شکست در شکل (۳.۱) رسم شده است.

۱۲.۴.۱ تعیین شکل تابع نرخ شکست با استفاده از نمودار زمان کل آزمون

نمودار زمان کل آزمون^۹ یا TTT-Plot یک روش گرافیکی برای تشخیص شکل تابع نرخ شکست می‌باشد که توسط بارلو و کامپو^{۱۰} به عنوان ابزاری جهت تحلیل داده‌های شکست معرفی شد.

^۹ Total time on test plot

^{۱۰} Barlow and Campo



شکل ۳.۱: اشکال نرخ شکست

فرض می‌کنیم یک نمونه مرتب کامل به صورت $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ از زمان شکست مستقل و هم‌توزیع با توزیع $F(t)$ و تابع قابلیت اطمینان $R(t) = 1 - F(t)$ داریم. نمودار زمان کل آزمون این مشاهدات به روش بیان شده در زیر حاصل می‌شود:

اگر $S_0 = 0$ قرار دهیم، مقدار S_j (زمان کل آزمون) براساس فرایند بازگشتی زیر محاسبه می‌شود:

- برای $j = 1, 2, \dots, n$ $S_j = S_{j-1} + (n - j + 1)(t_{(j)} - t_{(j-1)})$
- مقادیر زمان کل آزمون را به صورت $U_j = \frac{S_j}{S_n}$ ، نرمال می‌کنیم.
- نمودار $(\frac{j}{n}, U_j)$ را به ازای $j = 0, 1, \dots, n$ رسم می‌کنیم.
- نقاط حاصل را به‌طور متوالی به‌وسیله پاره خط متصل می‌کنیم. بنابراین نمودار زمان کل آزمون، مرکب از پاره خط‌هایی است که از گوشه سمت چپ پایین شروع و در گوشه سمت راست بالای مربع واحد تمام می‌شود.

۱۳.۴.۱ میانگین طول عمر و میانگین باقیمانده عمر

فرض کنید T نشان دهنده‌ی طول عمر یک قطعه الکتریکی، سیستم و... باشد که دارای تابع چگالی f و تابع قابلیت اطمینان R است. بنابراین میانگین طول عمر برابر است با:

$$E(T) = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (12.1)$$

یعنی $E(T)$ برابر است با انتگرال از صفر تا بینهایت روی تابع قابلیت اطمینان. این حقیقت در مورد تابع قابلیت اطمینان شرطی نیز صادق است. به عبارتی دیگر فرض کنید طول عمر یک دستگاه که با T نشان داده می‌شود از t بیشتر باشد ($T > t$) آن‌گاه میانگین باقیمانده عمر

دستگاه برابر است با:

$$m(t) = [P(T > t)]^{-1} \int_0^{\infty} yf(t+y; \Theta)dy \quad (13.1)$$

$$= [R(t)]^{-1} \int_0^{\infty} yf(t+y; \Theta)dy \quad (14.1)$$

که $f(\cdot)$ تابع چگالی و تابع $m(t)$ را میانگین باقیمانده عمر می نامند. این تابع به عنوان تابعی پویا در هر لحظه از زمان، میانگین عمر باقیمانده دستگاه را نشان می دهد و واضح است که:

$$m(\circ) = E(T)$$

امروزه در تحلیل داده های طول عمر و بقا میانگین باقیمانده عمر مانند تابع نرخ شکست نقش مهمی را ایفا می کند. رابطه بین میانگین باقیمانده عمر و توزیع طول عمر یک رابطه یک به یک است.

۵.۱ کاپلان مایر

کاپلان مایر به عنوان برآوردکننده حد محصول شناخته می شود و یک آماره غیر پارامتری است که توسط ادوارد ال کاپلان و پوال مایر^{۱۱} انجام شده است، و به صورت زیر تعریف می شود: فرض کنید n قطعه در زمان $t = \circ$ را وارد آزمایش طول عمر کرده ایم. فرض کنید این n واحد در زمان های $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ ($k \leq n$) شکست خورده باشند. توجه داشته باشید که چنین فرضی بدین معنی است که ممکن است در زمان t_j بیش از یک شکست داشته باشیم. همچنین فرض می کنیم بعضی از ارقام ممکن است به هر دلیل از آزمایش در هر لحظه از زمان خارج شوند (سانسور شوند). اما این فرض را نیز اضافه می کنیم که سانسورها در زمانی بلافاصله بعد از t_i صورت می گیرند. بنابراین آماره کاپلان مایر برابر است با:

$$\hat{S} = \prod_{ti \leq t} (1 - \frac{d_i}{n_i}) \quad (15.1)$$

d_i = تعداد وقایع در زمان t_j و n_i = کل قطعاتی که در زمان t_j شکست خورده اند.

۱.۵.۱ کاربرد کاپلان مایر

- در تحقیقات پزشکی اغلب برای اندازه گیری تعدادی از بیماران که برای زمان مشخصی پس از درمان زندگی می کنند، استفاده می شود.
- برای اندازه گیری مدت زمانی که افراد پس از دست دادن شغل بیکار می شوند .
- زمان شکست در قطعات ماشین

^{۱۱}Edward L. Kaplan and Paul Meier

- برای تخمین عملکرد بقا در داده‌های طول عمر و...

.

فصل ۲

توزیع وایبل و مدل‌های مختلف آن

در این فصل، توزیع وایبل، توزیع وایبل وارون و توزیع سری توانی با داده‌های کامل را معرفی می‌کنیم که هر کدام از این توزیع‌ها در آمار کاربردهای ویژه‌ای دارند. در بخش دوم توزیع وایبل و خواص آن و همچنین تابع چگالی، تابع توزیع، نرخ شکست، گشتاورها و واریانس این توزیع را محاسبه می‌کنیم. در بخش سوم ابتدا با معرفی مدل وایبل وارون سپس تابع چگالی، تابع توزیع، نرخ شکست و گشتاورهای این توزیع را به دست می‌آوریم و در بخش چهارم به توزیع سری توانی و چند مثال از آن خواهیم پرداخت.

۱.۲ توزیع وایبل

توزیع وایبل یکی از توزیع‌های احتمالی پیوسته است. این توزیع اولین بار توسط دانشمند فرانسوی به نام فرچه [۱۹] ارائه شد سپس رزین و راملر [۴۳] از آن برای توصیف اندازه ذرات بهره بردند. اما نام آن برگرفته از یک فیزیکدان سوئدی به نام والدی وایبل^۱ است که به عنوان مدل مناسب در مطالعات قابلیت اطمینان و مسائل مربوط به آزمون حیات از قبیل زمان شکست یا طول عمر یک محصول و یا واحد خاص، بیان می‌شود. همچنین مدل وایبل، توزیع مناسبی جهت به کارگیری در تحلیل خرابی اجزای سیستم‌های مکانیکی می‌باشد. برای مثال اگر یک دستگاه شامل اجزای زیادی باشد که توزیع زمان خرابی آن‌ها یکسان باشد، آن‌گاه اگر

^۱Waloddi Weibull

با از کار افتادن یک جزء از این دستگاه، کل دستگاه از کار بیفتد. گاهی توزیع وایبل می‌تواند یک توزیع مناسب برای چنین دستگاهی باشد.

تابع چگالی و تابع توزیع مدل وایبل به صورت زیر تعریف می‌شود:
متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبل با پارامترهای α و β است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\} \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (1.2)$$

α پارامتر مقیاس و β پارامتر شکل است. تابع چگالی وایبل را با نماد $W(\alpha, \beta)$ نمایش می‌دهند. با استفاده از انتگرال زیر می‌توان تابع توزیع $W(\alpha, \beta)$ را محاسبه کرد.

$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta}{\alpha^\beta} y^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^\beta\right\} dy \quad (2.2)$$

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$u = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^\beta \Rightarrow y^\beta = \alpha^\beta u$$

$$du = \frac{\beta}{\alpha^\beta} \times y^{\beta-1} dy$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه‌ی (۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \exp\{-u\} du \\ &= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

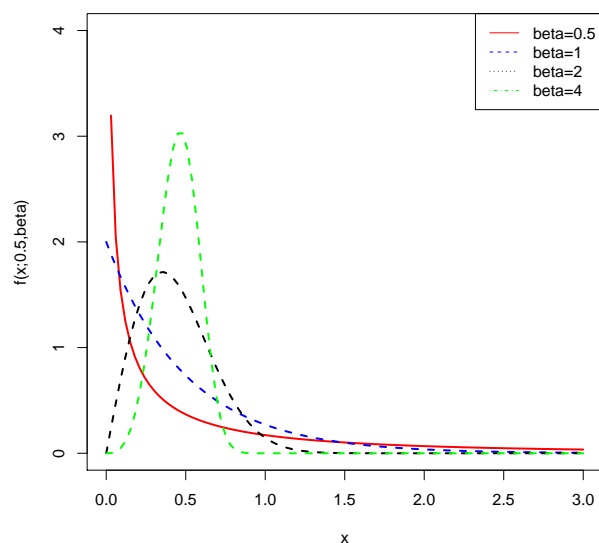
شکل تابع چگالی فقط به پارامتر شکل بستگی دارد و مستقل از پارامتر مقیاس است. که حالات زیر رخ می‌دهد:

الف) $\beta \leq 1$ تابع چگالی به‌طور یکنواخت نزولی است.

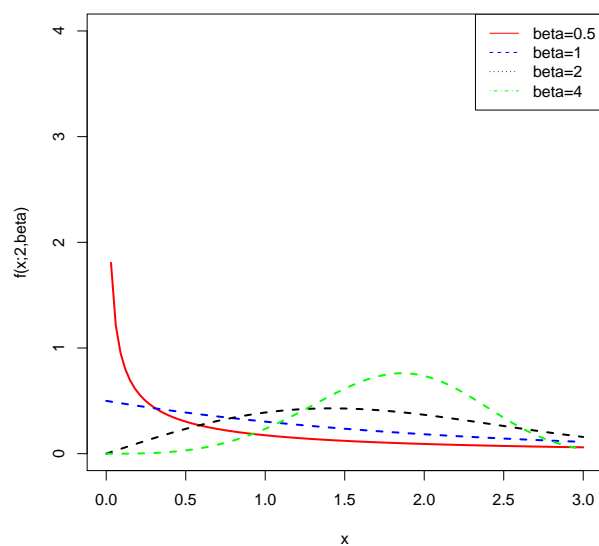
ب) $\beta > 1$ تابع چگالی آن تک‌مندی است.

نمودار تابع چگالی وایبل برای پارامترهای α و β با مقادیر مختلف در شکل‌های (۱.۲) و (۲.۲) رسم شده است.

در نمودار تابع چگالی توزیع وایبل به‌ازای $\beta = 0.5$ ، نزولی با شیب تند و به‌ازای $\beta = 1$ نزولی با شیب کند می‌باشد. و با در نظر گرفتن $\beta = 2$ منحنی ابتدا صعودی سپس نزولی و با شیب کمی می‌باشد. ولی $\beta = 4$ نمودار وایبل دارای صعود و نزول زیادی است. در ضمن با افزایش α برای β ‌های مختلف میزان صعود و نزول کاهش می‌یابد.



شکل ۱.۲: نمودار تابع چگالی توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف β و $\alpha = 0.5$



شکل ۲.۲: نمودار تابع چگالی توزیع وایبل به ازای مقادیر مختلف β و $\alpha = 2$

تابع قابلیت اطمینان و نرخ شکست توزیع وایبل

لم ۱.۱.۲. فرض کنید متغیر تصادفی $X \sim W(\alpha, \beta)$. آن گاه تابع قابلیت اطمینان براساس (۱۰.۱) به صورت زیر است:

$$R(x) = 1 - F(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\} \quad x \geq 0$$

و تابع نرخ شکست توزیع وایبل از رابطه‌ی (۱۱.۱) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

از جمله دلایل اهمیت توزیع وایبل در تحلیل بقا می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف- نرخ شکست توزیع وایبل دارای فرم بسته است و همین امر باعث می‌شود تحلیل در مورد داده‌ها با این توزیع راحت‌تر صورت گیرد.

ب- توزیع وایبل مدلی است که انواع داده‌ها را می‌توان با آن تفسیر کرد. داده‌های با نرخ شکست صعودی، نزولی و ثابت.

ج- اگر T دارای توزیع وایبل باشد آنگاه لگاریتم آن دارای توزیعی است که متعلق به خانواده مقیاس-مکانی است که در استنباط آماری یک ویژگی مهم محسوب می‌شود.

د- تحت شرایطی ثابت می‌شود [۱] که مینیمم یک مجموعه از متغیرهای تصادفی وایبل، خود دارای توزیع وایبل است.

قسمت (ج) و (د) را اثبات می‌کنیم.

برهان. همانطور که در بالا اشاره شد لگاریتم متغیر تصادفی وایبل دارای توزیعی است که به خانواده مکان-مقیاس تعلق دارد. این توزیع به توزیع مقدار غایبی نوع سوم معروف است. متغیر تصادفی X را توزیع مقدار غایبی نوع سوم گوییم هر گاه تابع توزیع آن به فرم زیر باشد:

$$F(X) = 1 - \exp\left\{-e^{\left(\frac{x-b}{a}\right)}\right\}, \quad -\infty < t < \infty, \quad a \in R, \quad b > 0$$

حال اگر متغیر تصادفی T دارای توزیع وایبل با پارامترهای λ, α باشد آن‌گاه $X = \log T$ دارای توزیع مقدار غایبی نوع سوم است که در آن $a = -\log L$ و $b = \frac{1}{\beta}$. نتیجه مهم دیگری که در بالا به آن اشاره شد آن است که اگر $T_i \sim W(\lambda_i, \beta)$, $i = 1, \dots, n$ باشد. آنگاه در حالتی که T_i ها مستقل باشند، $T = \min T_i$ دارای توزیع وایبل است با پارامترهای

$$\lambda_0 \text{ و } \beta = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \beta \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\begin{aligned}
 P(T > t) &= P(\min_{1 \leq i \leq n} T_i > t) \\
 &= \prod_{i=1}^n P(T_i > t) \\
 &= \prod_{i=1}^n e^{-(\lambda_i t)^\beta} \\
 &= e^{-t^\beta \sum_{i=1}^n \lambda_i^\beta} \\
 &= e^{-\left[t \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]^\beta}
 \end{aligned}$$

□

معلوم بودن نرخ خرابی یافتن دلیل خرابی‌ها را در قابلیت اطمینان فراهم می‌کند: اگر در طول زمان نرخ شکست کاهش یابد (تابع نرخ شکست نزولی) بدین معنی است که احتمال خرابی واحدها با گذشت زمان رو به بهبودی است و کارایی آن‌ها افزایش می‌یابد. برای مثال در مورد مرگومیر کودکان که با گذشت زمان کمتر اتفاق می‌افتد. اگر در طول زمان نرخ شکست افزایش یابد (تابع نرخ شکست صعودی) نشان می‌دهد که احتمال خرابی واحدها در فاصله زمانی بعدی بیشتر از خرابی آن‌ها در فاصله زمانی قبلی با همان طول زمان است یعنی احتمال خرابی با گذشت زمان بیشتر است و کارایی آن کمتر می‌شود. مثلاً در قطعات دستگاه‌های مکانیکی با گذشت زمان فرسوده‌تر شده و کارایی خود را از دست می‌دهند.

تابع نرخ شکست ثابت برای توزیع نمایی رخ می‌دهد که ویژگی بدون حافظه بودن این توزیع را منعکس می‌نماید و توزیع نمایی حالت خاص توزیع وایبل است. این حالت برای قطعات الکتریکی می‌تواند مناسب باشد.

کاربرد توزیع وایبل

توزیع وایبل دارای کاربردهای زیادی است که به چند مورد از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- تحلیل بقا^۲
- قابلیت اطمینان و تحلیل شکست

^۲ Survival analysis

- صنعت بیمه
- پیش‌بینی وضع هوا^۳
- برای توصیف توزیع سرعت باد
- برای زمان تحویل کالا در صنعت

گشتاورهای توزیع وایبل

لم ۲.۱.۲. اگر $X \sim W(\alpha, \beta)$ آن‌گاه تابع مولد گشتاور به صورت زیر است:

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \Gamma(\frac{n}{\beta} + 1) \alpha^n}{n!} \quad (4.2)$$

که در آن $\Gamma(\beta)$ تابع گاما است که به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} x^{\beta-1} \exp(-x) dx$$

امیدریاضی و واریانس توزیع وایبل

لم ۳.۱.۲. با مشتق‌گیری از تابع مولد گشتاور نسبت به t و قرار دادن $t = 0$ امیدریاضی و واریانس توزیع وایبل $W(\alpha, \beta)$ را می‌توان محاسبه کرد:

$$E(X) = \alpha \Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \alpha^2 \Gamma(\frac{2}{\beta} + 1) - \left(\alpha \Gamma(\frac{1}{\beta} + 1) \right)^2$$

۲.۲ وایبل وارون

مدل وایبل وارون یکی دیگر از توزیع‌های احتمال طول عمر است که از این توزیع برای مدل‌های مختلف شکست از جمله: مرگ‌ومیر نوزادان، طول عمر و ... استفاده می‌شود. هنگامی که قطعات الکتریکی یا مکانیکی در آزمون طول عمر وجود داشته باشد توزیع وایبل وارون مدلی مناسب خواهد بود. کلو و همکاران [۷] براساس شکست اجزای مکانیکی توزیع وایبل وارون را معرفی کردند.

کالابریا و پولسینی [۹] برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و حداقل مربعات توزیع وایبل وارون را به‌دست آوردند. همچنین برآوردگر بیزی پارامترهای مدل با محدوده اطمینان برای قابلیت

^۳ Weather forecasting

اطمینان توسط کالابریا و پولسینی [۱۰، ۱۱]، جانسون و همکاران [۶۰] بیان شد. برای جزئیات بیشتر به [۳۶] مراجعه کنید.

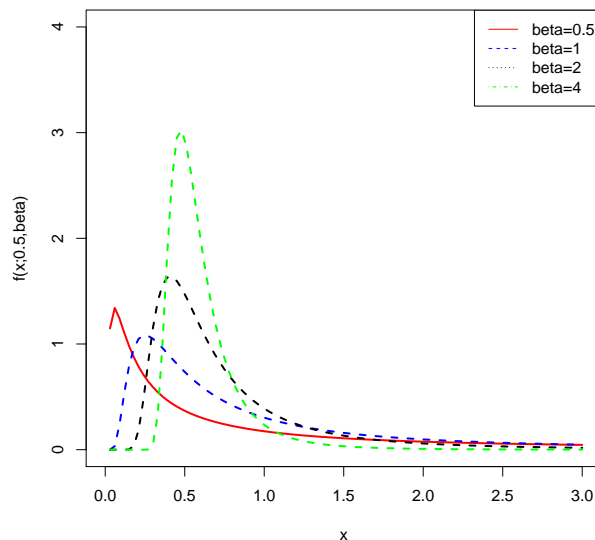
تابع چگالی و تابع توزیع وایبل وارون به صورت زیر تعریف می‌شود:
متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبل وارون با پارامترهای α و β است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \beta \alpha^\beta x^{-(\beta+1)} \exp \left\{ - \left(\frac{\alpha}{x} \right)^\beta \right\} \quad x > 0 \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0 \quad (5.2)$$

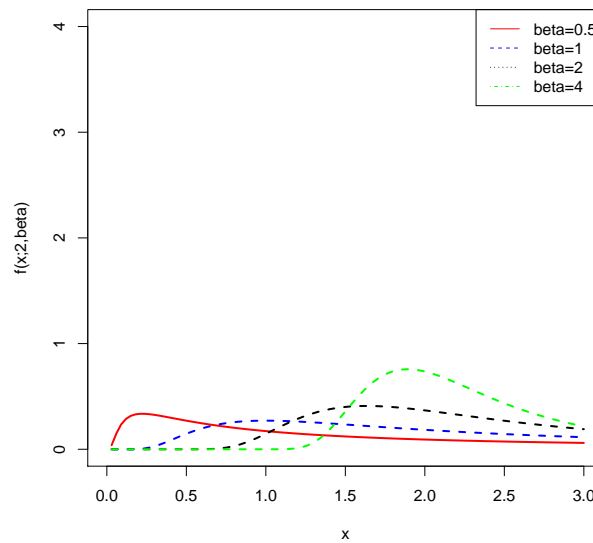
α پارامتر مقیاس و β پارامتر شکل است. و آن را با نماد $IW(\alpha, \beta)$ نمایش می‌دهند. تابع توزیع وایبل وارون $IW(\alpha, \beta)$ به صورت زیر است:

$$F(x) = \exp \left\{ - \left(\frac{\alpha}{x} \right)^\beta \right\} \quad x > 0 \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0 \quad (6.2)$$

تابع چگالی فقط به پارامتر شکل β وابسته است و مستقل از پارامتر مقیاس α است. نمودار تابع چگالی وایبل وارون با مقادیر مختلف α و β در شکل‌های (۳.۲) و (۴.۲) رسم شده است. در نمودار تابع چگالی توزیع وایبل وارون به‌ازای $\beta = 0.5$ ، نزولی با شیب تند و به‌ازای $\beta = 1$ نزولی با شیب کند می‌باشد. و با در نظر گرفتن $\beta = 2$ منحنی ابتدا صعودی سپس نزولی و با شیب کمی می‌باشد. ولی $\beta = 4$ نمودار وایبل وارون دارای صعود و نزول زیادی است.



شکل ۳.۲: نمودار تابع چگالی توزیع وایبل وارون به‌ازای مقادیر مختلف β و $\alpha = 0.5$



شکل ۴.۲: نمودار تابع چگالی توزیع وایبل وارون به‌ازای مقادیر مختلف β و $\alpha = 2$

قابلیت اطمینان و نرخ شکست توزیع وایبل وارون

لم ۱.۲.۲. فرض کنید متغیر تصادفی $X \sim IW(\alpha, \beta)$ دارای تابع چگالی $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ باشد. تابع قابلیت اطمینان از رابطه‌ی (۱۰.۱) به صورت

$$R(x) = 1 - F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta\right\}$$

می‌باشد و همچنین تابع نرخ شکست براساس (۱۱.۱) به صورت زیر است:

$$h(x) = \frac{\beta \alpha^\beta x^{-(\beta+1)} \exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta\right\}}{1 - \exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta\right\}}$$

حالات زیر برای تابع نرخ شکست رخ می‌دهد:

الف) $\beta < 1$ تابع نرخ شکست به طور مستمر کاهش می‌یابد که نشان‌دهنده‌ی شکست زود هنگام است و توزیع وارون گاما را به دنبال دارد.

ب) $\beta > 1$ تابع نرخ شکست به طور مستمر افزایش می‌یابد.

ارتباط توزیع وایبل وارون با سایر توزیع‌ها

توزیع وایبل وارون یک توزیع انعطاف‌پذیری است که با تغییر مقدار پارامتر β به توزیع‌های مختلفی تبدیل می‌شود.

اگر یک متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبل وارون با پارامترهای α و β باشد، یعنی $IW(\alpha, \beta)$ آنگاه:

۱- $\beta = 1$ یعنی $IW(\alpha, 1)$ توزیع وایبل وارون به توزیع وارون نمایی تبدیل می‌شود که یک حالت خاص از مدل وایبل وارون است. و آن را با نماد (IE) نمایش می‌دهند.

۲- $\beta = 2$ یعنی $IW(\alpha, 2)$ به توزیع وارون رای لی معروف است و آن را با نماد (IR) نمایش می‌دهند.

۳.۲ توزیع سری توانی

نواک [۳۸] توزیع گسسته‌ی سری توانی را معرفی کرد. با وجود اهمیت خانواده توزیع‌های سری توانی در پیشبرد مباحث مختلف آماری، در برخی مسائل فاقد کارایی لازم می‌باشند. به عنوان مثال، این توزیع‌ها بر روی داده‌های تجمعی و داده‌های شمارشی همبسته با پراکنش زیاد و با فراوانی متورم (آماسیده) در صفر برازش مناسبی ندارند، از این رو تعمیم‌های مختلفی به این توزیع جهت جایگزینی داده شده است. خانواده توزیع‌های سری توانی صفر آماسیده و پارامتر آماسیده دو مورد از این تعمیم‌ها هستند. در بیمه شخص ثالث به دلیل وجود سیستم پاداش-جریمه و استفاده از سیستم پاداش آخر سال، بیمه‌گذار خسارت‌های کوچک خود را به شرکت بیمه گزارش نمی‌دهد. این کار باعث ایجاد صفرهای زیاد در تعداد ادعای خسارت بیمه‌گذار می‌شود. ازسوی دیگر تحلیل تعداد ادعای خسارت و عوامل تشکیل دهنده خطر روی این پاسخ، برای شرکت‌های بیمه حائز اهمیت است. برای این منظور، برخی از مدل‌ها با پاسخ‌های شمارشی با استفاده از توزیع سری‌های توانی مانند مدل رگرسیون پواسون و مدل رگرسیون دوجمله‌ای منفی و توزیع سری‌های توانی آماسیده صفر مانند مدل رگرسیون پواسون آماسیده صفر و رگرسیون دوجمله‌ای منفی آماسیده صفر برای تحلیل داده‌های بیمه شخص ثالث با تعداد صفر زیاد استفاده می‌شود. فرم کلی توزیع سری توانی به شکل زیر است:

$$f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \quad |x| < U \leq \infty, \quad a_j \geq 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

و تابع احتمال آن برابر است با:

$$Pr(\xi = j) = \frac{a_j x^j}{f(x)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

در اینجا x ثابت است و $0 < x < U$ و ξ توزیع سری توانی است. متغیرهای تصادفی ξ_1, \dots, ξ_n توزیع سری توانی هستند اگر:

$$Pr(\xi_1 = j_1, \xi_2 = j_2, \dots, \xi_n = j_n) = \frac{a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x^{j_1 + j_2 + \dots + j_n}}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1}^{\infty} \dots \sum_{j_n}^{\infty} a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} \geq 0, \quad j_1, j_2, \dots, j_n = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_{j_1, j_2, \dots, j_n} \geq 0, \quad a_{j_1, j_2, \dots, j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} \geq 0$$

اغلب توزیع‌های گسسته کلاسیک مانند پواسون، دوجمله‌ای، دوجمله‌ای منفی و سری لگاریتمی متعلق به خانواده توزیع‌های سری توانی هستند. احتمال هر یک از این توزیع‌ها را بیان می‌کنیم:

(۱) پواسون

$$Pr(\xi = j) = \frac{e^{-x} x^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad x > 0$$

(۲) دوجمله‌ای منفی

$$Pr(\xi = j) = \frac{\binom{N+j-1}{j} x^j}{(1-x)^{-N}} \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad N > 0, \quad 0 < x < 1$$

(۳) دوجمله‌ای

$$Pr(\xi = j) = \frac{\binom{N}{j} x^j}{(1+x)^N} \quad X = \frac{p}{1-p}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad N > 0, \quad 0 < x < 1$$

(۴) چندجمله‌ای

$$Pr(\xi_1 = j_1, \xi_2 = j_2, \dots, \xi_k = j_k) = \frac{N!}{j_1! \dots j_k!} x_1^{j_1} \dots x_k^{j_k} / (1 + X_1 + \dots + X_k)^N$$

که

$$j_i = 0, 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{k+1} j_i = N, \quad x_i = \frac{p_i}{p_{k+1}}, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{k+1} p_i = 1$$

(۵) توزیع سری لگاریتمی

توزیع سری لگاریتمی اولین بار توسط فیشر و همکاران^۴ (۱۹۴۳) با معرفی توزیع تعداد گونه‌های مختلف حشرات که در دوره‌های مختلف در تله‌ای به دام افتادند، معرفی شد. این توزیع یکی از قدیمی‌ترین توزیع‌های سری توانی است و از حد توزیع دوجمله‌ای منفی به دست می‌آید. یکی از کاربردهای آن، در اقتصاد می‌توان نام برد. برای مثال، چتفیلد و همکاران^۵ از توزیع سری لگاریتمی برای نمایش توزیع تعداد اقلام خریداری شده از یک نوع کالا در یک دوره خاص استفاده نمودند.

$$Pr(\xi = j) = \frac{\frac{x^j}{j}}{-\ln(1-x)}$$

در این قسمت دو مثال از توزیع سری توانی را بیان می‌کنیم.

^۴ Fisher et al

^۵ Chatfield

۴.۲ توزیع سری توانی وایبل

توزیع سری توانی وایبل ترکیبی از توزیع سری توانی و توزیع وایبل است، که توسط آلیس لموس مورایس و وگنر برتو-سوزا [۳۴] معرفی شده است. این کلاس تعمیمی از چندین توزیع است که عبارتند از: هندسی نمایی [۳]، پواسون نمایی [۲۹] و توزیع لگاریتم نمایی [۴۷].

تابع چگالی و تابع توزیع، توزیع وایبل به شکل

$$g(x; \beta, \alpha) = \alpha \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha} \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (9.2)$$

$$G(x; \beta, \alpha) = 1 - e^{-(\beta x)^\alpha} \quad (10.2)$$

می باشد و تابع احتمال توزیع سری توانی به صورت

$$P_n = P(N = n) = \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.2)$$

است که a_n فقط به n بستگی دارد و

$$C(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n \quad (12.2)$$

می باشد و $\theta > 0$.

لم ۱۰.۴.۲. با توجه به توزیع وایبل، تابع توزیع سری توانی وایبل به صورت زیر خواهد بود:

$$F(x) = 1 - \frac{C(\theta e^{-(\beta x)^\alpha})}{C(\theta)} \quad (13.2)$$

برهان. با توجه به رابطه های (۱۰.۲) و (۱۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} F(x; \alpha, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)} G(x; \alpha, \beta)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)} \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^n \\ &= \frac{1}{C(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\theta \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)\right]^n \end{aligned}$$

از رابطه (۱۲.۲) نتیجه می گیریم:

$$F(x) = 1 - \frac{C(\theta e^{-(\beta x)^\alpha})}{C(\theta)}$$

□

لم ۲.۴.۲. تابع چگالی توزیع سری توانی وایبل را با نماد $WPS(\alpha, \beta, \theta)$ نمایش داده و به صورت زیر است:

$$f(x) = \alpha\theta\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha} \frac{C'(\theta e^{-(\beta x)^\alpha})}{C(\theta)} \quad x > 0$$

□ برهان. از مشتق (۱۳.۲) تابع چگالی توزیع سری توانی وایبل به دست می‌آید.

قابلیت اطمینان و نرخ شکست توزیع سری توانی وایبل

لم ۳.۴.۲. فرض کنید متغیر تصادفی $X > 0$ دارای تابع چگالی $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ باشد. آن‌گاه قابلیت اطمینان توزیع سری توانی وایبل برابر است با:

$$R(x) = 1 - F(x) = \frac{C(\theta e^{-(\beta x)^\alpha})}{C(\theta)}$$

□ برهان. قابلیت اطمینان توزیع سری توانی وایبل از رابطه‌ی (۱۰.۱) به دست می‌آید.

لم ۴.۴.۲. تابع نرخ شکست آن از رابطه‌ی (۱۱.۱) برابر است با:

$$h(x) = \alpha\theta\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha} \frac{C'(\theta e^{-(\beta x)^\alpha})}{C(\theta e^{-(\beta x)^\alpha})}, \quad x > 0$$

چندک

لم ۵.۴.۲. اگر $WPS(\alpha, \beta, \theta)$ باشد آن‌گاه چندک توزیع سری توانی وایبل برابر است با:

$$x_\gamma = \beta^{-1} \left\{ -\log C((1-\gamma)C(\theta))^{-1} + \log \theta \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

برهان. فرمول چندک برابر است با:

$$p(X \leq x_\gamma) = \gamma \quad (14.2)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۳.۲) در (۱۴.۲) داریم:

$$1 - \frac{C(\theta e^{-(\beta x_\gamma)^\alpha})}{C(\theta)} = \gamma$$

$$1 - \gamma C(\theta) = C(\theta e^{-(\beta x_\gamma)^\alpha})$$

C را به سمت چپ می‌بریم در نتیجه:

$$C^{-1}(1 - \gamma C(\theta)) = \theta e^{-(\beta x_\gamma)^\alpha}$$

$$\frac{C^{-1}(1 - \gamma C(\theta))}{\theta} = e^{-(\beta x_\gamma)^\alpha}$$

log گرفته در نتیجه داریم:

$$\frac{-1}{\beta} \log \left[\frac{C^{-1} (1 - \gamma C(\theta))}{\theta} \right] = x_\gamma^\alpha$$

$$\frac{-1}{\beta} \log \left[\frac{C^{-1} (1 - \gamma C(\theta))}{\theta} \right]^{\frac{1}{\alpha}} = x_\gamma$$

بنابراین:

$$x_\gamma = \beta^{-1} \left\{ -\log C((1 - \gamma)C(\theta))^{-1} + \log \theta \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

□

لم ۶.۴.۲. در تابع چگالی (۹.۲) $E(Y^r)$ برابر است با:

$$E(Y^r) = \beta^{-r} \Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right) \quad (۱۵.۲)$$

بنابراین r امین گشتاور توزیع سری توانی وایبل به صورت:

$$E(X^r) = \sum_{n=1}^{\infty} p(N=n) E Z_n^r = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right)}{\beta^r C(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{n^{\frac{r}{\alpha}}}$$

می باشد، که در آن Z_n دارای توزیع $g(x, n^{\frac{1}{\alpha}} \beta, \alpha)$ است.

برهان. تابع چگالی Y به صورت (۹.۲) و امید آن برابر است با:

$$E(Y^r) = \int_0^{\infty} y^r \alpha \beta^\alpha y^{\alpha-1} e^{-(\beta y)^\alpha} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \alpha \beta^\alpha y^{r+\alpha-1} e^{-(\beta y)^\alpha} dy$$

با استفاده از تغییر متغیر:

$$u = y^\alpha \implies y = u^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$du = \alpha y^{\alpha-1} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \beta^\alpha u^{\frac{r}{\alpha}} e^{-\beta^\alpha u} du$$

$$= \beta^\alpha \frac{\Gamma\left(1 + \frac{r}{\alpha}\right)}{\beta^{r+\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{r}{\alpha}} e^{-\beta^\alpha u}}{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right) (\beta^\alpha)^{\frac{r+\alpha}{\alpha}}} du$$

$$= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{r}{\alpha}\right)}{\beta^r}$$

در نتیجه از رابطه‌های (۱۱.۲) و (۱۵.۲) داریم:

$$E(X^r) = \sum_{n=1}^{\infty} p(N=n) E Z_n^r = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right)}{\beta^r C(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{n^{\frac{r}{\alpha}}}$$

□

۵.۲ توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته

ردریگو و همکاران [۴۲] توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته^۶ را که ترکیبی از توزیع وایبل گسترش یافته و توزیع سری توانی است، معرفی کردند. این کلاس از تعمیم توزیع‌های سری توانی وایبل [۳۴] و توزیع سری توانی نمایی [۱۳] به وجود آمده است. گرویچ و همکاران [۲۲] تابع توزیع و چگالی توزیع وایبل گسترش یافته را به شکل

$$G(x; \alpha, \xi) = 1 - e^{-\alpha H(x; \xi)}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0 \quad (16.2)$$

$$g(x; \alpha, \xi) = \alpha h(x; \xi) e^{-\alpha H(x; \xi)}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0 \quad (17.2)$$

بیان کردند. که $H(x; \xi)$ یک تابع نامنفی است و به طور یکنواخت افزایش می‌یابد و به پارامتر ξ وابسته می‌باشد.

لم ۱.۵.۲. با توجه به توزیع وایبل گسترش یافته، تابع توزیع، توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$F(x; \theta, \alpha, \xi) = 1 - \frac{C(\theta e^{-\alpha H(x; \xi)})}{C(\theta)} \quad (18.2)$$

برهان. از رابطه‌ی (۱۱.۲) و (۱۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} F(x; \theta, \alpha, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)} G(x, \alpha, \xi)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)} \left(1 - e^{-\alpha H(x; \xi)}\right)^n \\ &= \frac{1}{C(\theta)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n \left(1 - e^{-\alpha H(x; \xi)}\right)^n \end{aligned}$$

از رابطه‌ی (۱۲.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$F(x; \theta, \alpha, \xi) = 1 - \frac{C(\theta e^{-\alpha H(x; \xi)})}{C(\theta)}$$

□

لم ۲.۵.۲. تابع چگالی توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته را با نماد $EWPS(\theta, \alpha, \xi)$ نمایش داده و برابر است با:

$$f(x; \theta, \alpha, \beta) = \theta \alpha h(x; \xi) e^{-\alpha H(x; \xi)} \frac{C'(\theta e^{-\alpha H(x; \xi)})}{C(\theta)} \quad x > 0 \quad (19.2)$$

برهان. تابع چگالی توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته از مشتق (۱۸.۲) به دست می‌آید.

□

^۶The compound class of extended Weibull power series distributions

قابلیت اطمینان و نرخ شکست توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته

لم ۳.۵.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی از تابع توزیع و چگالی $f(x)$ ، $F(x)$ باشد. آن گاه تابع قابلیت اطمینان و تابع نرخ شکست توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته به ترتیب برابر است با:

$$R(x; \theta, \alpha, \xi) = \frac{C(\theta e^{-\alpha H(x; \xi)})}{C(\theta)} \quad (20.2)$$

$$h(x; \theta, \alpha, \xi) = \theta \alpha h(x; \xi) e^{-\alpha H(x; \xi)} \frac{C'(\theta e^{-\alpha H(x; \xi)})}{C(\theta e^{-\alpha H(x; \xi)})}, \quad x > 0$$

برهان. قابلیت اطمینان توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته از رابطه‌ی (۱۰.۱)، همچنین تابع نرخ شکست آن از رابطه‌ی (۱۱.۱) به دست می‌آید. □

چندک

لم ۴.۵.۲. اگر تابع توزیع $U \sim U(0, 1)$ از رابطه‌ی (۱۸.۲) باشد آن گاه چندک توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته به صورت

$$X = H^{-1} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \log \left[\frac{C^{-1}(C(\theta)(1-U))}{\theta} \right] \right\}$$

است که یک معادله‌ی غیرخطی و $C^{-1}(\cdot)$ و $H^{-1}(\cdot)$ وارون تابع‌های $C(\cdot)$ و $H(\cdot)$ می‌باشند.

برهان. با توجه به رابطه‌ی (۱۴.۲) اثبات می‌شود. □

گشتاور

لم ۵.۵.۲. r امین گشتاور توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته به صورت

$$E(X^r) = \sum_{n=1}^{\infty} p(N=n) E(Z^r) \quad (21.2)$$

می‌باشد. که در آن Z دارای توزیع $g(z; n\alpha, \xi)$ از (۱۹.۲) و تابع احتمال از (۱۱.۲) به دست می‌آید.

برهان.

$$f(Z|N=n) = \frac{f(Z, N=n)}{p(N=n)}$$

$$f(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(Z|N=n) p(N=n)$$

با توجه به (۲۱.۲) :

$$E(X^r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int (Z^r) f(Z|N=n) p(N=n) dz$$

که $f(Z^r) f(Z|N=n) dz$ امیدریاضی $E(Z^r)$ است، بنابراین داریم:

$$E(X^r) = \sum_{n=1}^{\infty} p(N=n) E(Z^r)$$

□

میانگین طول عمر و میانگین طول عمر باقیمانده

لم ۶.۵.۲. میانگین طول عمر توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته از رابطه‌ی (۱۲.۱) برابر است با:

$$t_m = E(T) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_0^{\infty} e^{-n\alpha H(x;\xi)} dx$$

برهان. با توجه به (۲۰.۲) و (۱۲.۲) داریم:

$$E(T) = \int_0^{\infty} \frac{C(\theta e^{-\alpha H(x;\xi)})}{C(\theta)} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\theta e^{-\alpha H(x;\xi)})^n}{C(\theta)} dx$$

از رابطه‌ی (۱۱.۲) داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_0^{\infty} e^{-n\alpha H(x;\xi)} dx \quad (۲۲.۲)$$

□

در زمینه‌ی قابلیت اطمینان مفهوم میانگین طول عمر باقیمانده زمانی از x_0 تا زمان شکست است. یعنی قبل از زمان x_0 هیچ شکستی وجود ندارد. بنابراین میانگین طول عمر باقیمانده از رابطه‌ی (۱۳.۱) برابر است با:

$$m(t; \theta, \alpha, \xi) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)} \int_t^{\infty} (y-t) \theta \alpha h(x, \xi) e^{-\alpha H(x, \xi)} \frac{C'(\theta \alpha h(x, \xi) e^{-\alpha H(x, \xi)})}{C(\theta)} dt}{1 - F(t; \theta, \alpha, \xi)}$$

فصل ۳

توزیع سری‌های توانی وایبل وارون

در این فصل توزیع ۳ پارامتری سری‌های توانی وایبل وارون، با داده‌های سانسور شده و کاربردهای آن را معرفی می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از مطالعه سبحان شفیع و همکاران^۱ [۴۵] است. در بخش سوم به معرفی توزیع سری‌های توانی وایبل وارون پرداخته و با اثبات قضیه‌هایی به خواص این توزیع پی می‌بریم. در بخش چهارم آنتروپی را توضیح می‌دهیم. در بخش پنجم به برآورد پارامترها با استفاده از الگوریتم EM می‌پردازیم و در بخش ششم زیرمدل‌های خاص این توزیع را بررسی می‌کنیم.

۱.۳ توصیف مدل

مدل سری‌های توانی وایبل وارون به شرح زیر می‌باشد:
متغیر تصادفی Z از توزیع سری توانی با تعداد شکست $z = 1, 2, \dots$ ، که تابع احتمال آن

$$P(Z = z) = \frac{a_z \theta^z}{C(\theta)} \quad z = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

می‌باشد و

$$C(\theta) = \sum_{z=1}^{\infty} a_z \theta^z \quad (2.3)$$

$a_z \geq 0$ و فقط به Z وابسته است، $\theta \in (0, s)$ که s می‌تواند بی‌نهایت باشد یعنی $C(\infty)$. اگر $X_i \sim IW(\alpha, \beta)$ ، $i = 1, 2, \dots$ ، آنگاه تابع توزیع وایبل وارون برابر است با:

$$G(x; \alpha, \beta) = e^{-\alpha x^{-\beta}} \quad x, \alpha, \beta > 0 \quad (3.3)$$

α پارامتر مقیاس و β پارامتر شکل است. در مخاطره‌های مکمل، طول عمر (x_i) برای هر خطر رقیب به طور جداگانه محاسبه و مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مخاطره‌های مکمل، طول عمر با تعداد شکست (Z) مرتبط است و چون تعداد شکست قابل مشاهده نیست، به همین دلیل در مخاطره‌های مکمل به طول عمر، متغیر پنهان می‌گویند. متغیر پنهان، متغیری است که به طور مستقیم نمی‌توان از آن استفاده کرد. همچنین در مخاطره‌های مکمل، معمولاً حداکثر طول عمر (X_z) در بین تمام شکست‌ها قابل مشاهده است، بنابراین متغیر مشاهده شده برابر است با:

$$X_z = \max(X_1, \dots, X_z) \quad (4.3)$$

و تابع توزیع شرطی $X_z|Z=z$ به صورت

$$G_{X_z|Z=z} = e^{-z\alpha x^{-\beta}} \quad (5.3)$$

می‌باشد که $X_z|Z=z$ یک توزیع وایبل وارون با پارامترهای $z\alpha$ و β است.

لم ۱.۱.۳. با توجه به توزیع IW ، تابع توزیع سری‌های توانی وایبل وارون برابر است با:

$$\begin{aligned} F(x; \alpha, \beta, \theta) &= \sum_{z=1}^{\infty} \frac{a_z \theta^z}{C(\theta)} [G(x; \alpha, \beta)]^z \\ &= \frac{C(\theta G(x; \alpha, \beta))}{C(\theta)} \\ &= \frac{C(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

برهان.

$$F(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{1}{C(\theta)} \sum_{z=1}^{\infty} \alpha_z (\theta G(x; \alpha, \beta))^z$$

از رابطه‌ی (۳.۳) داریم:

$$F(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{1}{C(\theta)} \sum_{z=1}^{\infty} \alpha_z (\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})^z$$

بنابراین براساس (۲.۳) اثبات می‌شود:

$$F(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{C(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)} \quad (7.3)$$

□

نتیجه ۱.۱.۳. اگر داشته باشیم $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq z} X_i$ ، آن گاه تابع توزیع $X_{(1)}$ به صورت

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x; \alpha, \beta, \theta) &= 1 - \frac{C(\theta - \theta G(x; \alpha, \beta))}{C(\theta)} \\ &= 1 - \frac{C(\theta - \theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)} \end{aligned}$$

خواهد بود.

برهان. اگر X_1, \dots, X_n توزیع وایبل وارون باشد آن گاه:

$$\begin{aligned} p(\min(X_1, \dots, X_z) \leq x) &= 1 - p(\min(X_1, \dots, X_z) > x) \\ &= 1 - \left(\prod_{i=1}^z p(X_i \geq x) \right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^z p(X_i \geq x) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^z (1 - p(X_i \leq x)) \end{aligned}$$

از رابطه‌ی (۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} &= 1 - \prod_{i=1}^z (1 - e^{-\alpha x^{-\beta}}) \\ &= 1 - (1 - e^{-\alpha x^{-\beta}})^z \end{aligned}$$

با جایگذاری عبارت بالا در رابطه‌ی (۶.۳)، تابع توزیع $X_{(1)}$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x; \alpha, \beta, \theta) &= \sum_{i=1}^z \frac{a_z \theta^z}{C(\theta)} (1 - (1 - e^{-\alpha x^{-\beta}})^z) \\ &= \sum_{i=1}^z \frac{a_z \theta^z}{C(\theta)} - \sum_{i=1}^z \frac{a_z (\theta (1 - e^{-\alpha x^{-\beta}})^z)}{C(\theta)} \\ &= 1 - \frac{C(\theta - \theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)} \end{aligned}$$

□

چندک

لم ۲.۱.۳. چندک توزیع سری‌های توانی وایبل وارون برابر است با:

$$Q_\xi = \left[\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\theta}{C^{-1}(\xi C(\theta))} \right) \right]^{\frac{-1}{\beta}} \quad (۸.۳)$$

برهان. براساس (۳.آ) و (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{C(\theta e^{-\alpha Q_\xi^{-\beta}})}{C(\theta)} &= \xi \\ C(\theta e^{-\alpha Q_\xi^{-\beta}}) &= \xi C(\theta) \\ \theta e^{-\alpha Q_\xi^{-\beta}} &= C^{-1}(\xi C(\theta)) \\ e^{-\alpha Q_\xi^{-\beta}} &= \frac{C^{-1}(\xi C(\theta))}{\theta} \\ -\alpha Q_\xi^{-\beta} &= \ln\left(\frac{C^{-1}(\xi C(\theta))}{\theta}\right) \\ Q_\xi &= -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{C^{-1}(\xi C(\theta))}{\theta}\right)^{\frac{-1}{\beta}} \\ Q_\xi &= \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\theta}{C^{-1}(\xi C(\theta))}\right)^{\frac{-1}{\beta}} \end{aligned}$$

□

$C^{-1}(\cdot)$ وارون تابع $C(\cdot)$ است.

میانه توزیع سری توانی وایبل وارون

اگر $X = Q_\xi$ از توزیع سری‌های توانی وایبل وارون با پارامترهای α, β, θ باشد، میانه توزیع از (۸.۳) به صورت

$$Q_{\circ/\Delta} = \left\{ \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\theta}{C^{-1}(\circ/\Delta C(\theta))}\right) \right\}^{\frac{-1}{\beta}}$$

خواهد بود.

لم ۳.۱.۳. تابع چگالی توزیع سری‌های توانی وایبل وارون را با نماد $IWPS(\alpha, \beta, \theta)$ نمایش داده و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}, \quad x > \circ \quad (۹.۳)$$

برهان. اگر از (۶.۳) نسبت به x مشتق بگیریم تابع چگالی به دست می‌آید:

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$F'(x; \alpha, \beta, \theta) = \theta(-\alpha)(-\beta)x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}$$

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}$$

□

از (۶.۳) نتیجه می‌گیریم که تابع چگالی سری‌های توانی وایبل وارون به عنوان ترکیب خطی بی‌نهایت از چگالی وایبل وارون بیان می‌شود.

لم ۴.۱.۳. تابع نرخ شکست توزیع سری‌های توانی وایبل وارون برابر است با:

$$h(x; \alpha, \beta, \theta) = \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta) - C(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}, \quad x > 0 \quad (10.3)$$

برهان. از رابطه‌ی (۱۱.۱) داریم:

$$\begin{aligned} h(x; \alpha, \beta, \theta) &= \frac{\theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}}{1 - \frac{C(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}} \\ &= \frac{\theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}}{\frac{C(\theta) - C(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}} \\ &= \frac{C(\theta) \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)(C(\theta) - C(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}}))} \\ &= \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta) - C(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})} \end{aligned}$$

□

گزاره‌های زیر خواص توزیع سری‌های توانی وایبل وارون را نشان می‌دهند. گزاره ۱ نشان می‌دهد که توزیع وایبل وارون از حد توزیع سری‌های توانی وایبل وارون به‌دست می‌آید.

گزاره ۱.۱.۳. توزیع وایبل وارون با پارامترهای $c\alpha$ و β از حد توزیع سری‌های توانی وایبل وارون به‌دست می‌آید وقتی که $\theta \rightarrow 0^+$ و $c = \min \{z \in N : a_z > 0\}$.

برهان. با توجه به (۲.۳) و (۶.۳):

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} F(x; \alpha, \beta, \theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{z=1}^{\infty} a_z \theta^z [G(x; \alpha, \beta)]^z}{\sum_{z=1}^{\infty} a_z \theta^z}$$

بنابراین $a_i = 0$, $i < c$ در نتیجه:

$$\frac{a_c \theta^c [G(x; \alpha, \beta)]^c + \sum_{z=c+1}^{\infty} a_z \theta^z [G(x; \alpha, \beta)]^z}{a_c \theta^c + \sum_{z=c+1}^{\infty} a_z \theta^z}$$

با فاکتورگیری از θ^c از صورت و مخرج داریم:

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{a_c [G(x; \alpha, \beta)]^c + \sum_{z=c+1}^{\infty} a_z \theta^{z-c} [G(x; \alpha, \beta)]^z}{a_c + \sum_{z=c+1}^{\infty} a_z \theta^{z-c}}$$

اگر $\theta \rightarrow 0^+$ باشد آن‌گاه:

$$= [G(x; \alpha, \beta)]^c$$

□

طبق (۳.۳) همان تابع توزیع وایبل وارون با پارامترهای $c\alpha$ و β است.

گزاره ۲.۱.۳. اگر X یک متغیر تصادفی از توزیع سری‌های توانی وایبل وارون $IWPS(\alpha, \beta, \theta)$ باشد، آنگاه:

(۱) تابع توزیع $Y = \frac{1}{X}$ برابر است با:

$$\psi(y; \alpha, \beta, \theta) = 1 - \frac{C(\theta e^{-\alpha y^\beta})}{C(\theta)}, \quad y > 0$$

برهان.

$$G_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P(X > \frac{1}{y}) = 1 - P(X < \frac{1}{y}) = 1 - F\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{C(\theta e^{-\alpha y^\beta})}{C(\theta)}$$

با توجه به (۱۳.۲) همان تابع توزیع سری‌های توانی وایبل با پارامترهای $\beta, \alpha^{\frac{1}{\beta}}$ و θ است.

□

(۲) اگر $Y = \mu e^{X^{-\beta}}$ باشد، آنگاه تابع توزیع سری توانی پارتو به صورت

$$\phi(y; \mu, \alpha, \theta) = 1 - \frac{C(\theta(\frac{y}{\mu})^\alpha)}{C(\theta)}, \quad y \geq \mu > 0$$

خواهد بود.

برهان.

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\mu e^{X^{-\beta}} \leq y) = P(e^{X^{-\beta}} \leq \frac{y}{\mu}) = P(X^{-\beta} \leq \ln(\frac{y}{\mu})) \\ &= P(X > \ln(\frac{y}{\mu})^{-\beta}) = 1 - P(X < \ln(\frac{y}{\mu})^{-\beta}) = 1 - F\left(\ln(\frac{y}{\mu})^{-\beta}\right) \\ &= 1 - \frac{C(\theta e^{-\alpha \ln(\frac{y}{\mu})^{-\beta}})}{C(\theta)} = 1 - \frac{\theta e^{-\alpha \ln(\frac{y}{\mu})}}{C(\theta)} = 1 - \frac{C(\theta(\frac{y}{\mu})^\alpha)}{C(\theta)} \end{aligned}$$

□

گزاره ۳.۱.۳. تابع چگالی توزیع سری‌های توانی وایبل وارون $IWPS(\alpha, \beta, \theta)$ تک مدی است.

برهان. می‌دانیم:

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}, \quad x > 0$$

بنابراین:

$$\log f(x; \alpha, \beta, \theta) = \log \theta + \log \alpha + \log \beta + \log x^{-(\beta+1)} - \alpha x^{-\beta} + \log \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}$$

$$\frac{\partial \log f(x; \alpha, \beta, \theta)}{\partial x} = -\frac{(\beta+1)}{x} + \alpha \beta x^{-(\beta+1)} + \frac{\theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C''(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}}{\frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}}$$

از $\alpha\beta x^{-(\beta+1)}$ فاکتور می‌گیریم، بنابراین:

$$\frac{-(\beta+1)}{x} + \alpha\beta x^{-(\beta+1)} \left(1 + \frac{\theta e^{-\alpha x^{-\beta}} C''(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}\right) = 0$$

$$\frac{(\beta+1)}{x} = \alpha\beta x^{-(\beta+1)} \left(1 + \frac{\theta e^{-\alpha x^{-\beta}} C''(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}\right)$$

x را به سمت راست برده و با $x^{-(\beta+1)}$ ساده می‌شود. در نتیجه:

$$(\beta+1) = \alpha\beta x^{-\beta} \left(1 + \frac{\theta e^{-\alpha x^{-\beta}} C''(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}\right)$$

با در نظر گرفتن $u = \alpha x^{-\beta}$:

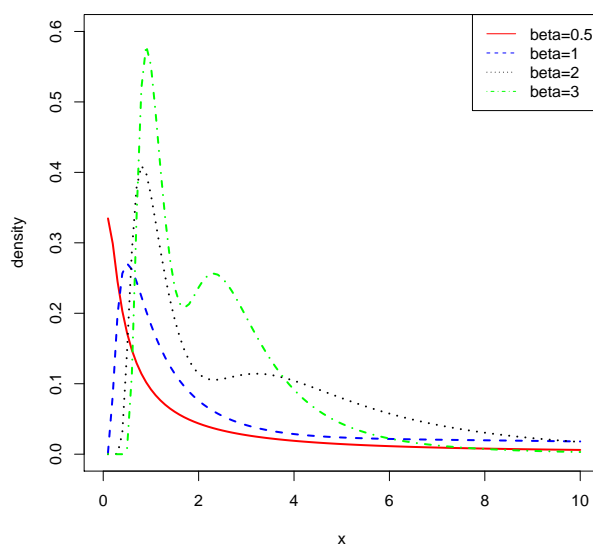
$$1 + \theta e^{-u} \frac{C''(\theta e^{-u})}{C'(\theta e^{-u})} = \frac{\beta+1}{\beta u}$$

با توجه به عبارت آخر که یک ریشه دارد [۴۵] بنابراین تابع چگالی $f(.; \alpha, \beta, \theta)$ تک مدی است و قضیه اثبات می‌شود. □

نمودار تابع چگالی (۹.۳) برای $C(\theta) = \theta + \theta^2$ ، $\alpha = 1$ و $\theta = 1$ به صورت

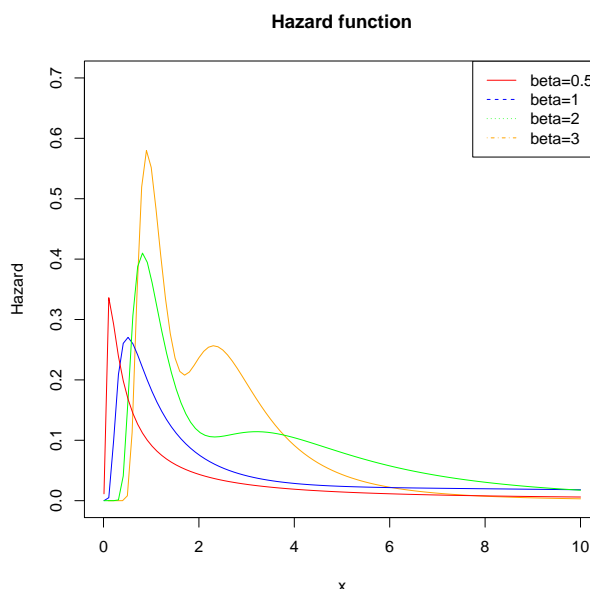
$$f(x; \beta) = \frac{1}{5} \beta x^{-(\beta+1)} e^{-x^{-\beta}} (1 + 2e^{-19x^{-\beta}})$$

می‌باشد حال بتاهای مختلف $\beta = 0.5, 1, 2, 3$ را رسم می‌کنیم.



شکل ۱.۳: نمودار تابع چگالی توزیع IWPS برای $\alpha = 1$ ، $\theta = 1$ و β های مختلف

در نمودار تابع چگالی توزیع سری‌های توانی وایبل وارون به ازای $\beta = 0.5$ ، نزولی با شیب تند و به ازای $\beta = 1$ منحنی صعودی و سپس نزولی با شیب کمی می‌باشد. با در نظر گرفتن $\beta = 2$ ابتدا صعود و با شیب زیاد نزول می‌کند و سپس صعود و نزول کاهش می‌یابد و با توجه به مقدار $\beta = 3$ در ابتدا صعود و نزول زیاد و سپس صعود کم و در انتها نزول می‌یابد.



شکل ۲.۳: نمودار تابع نرخ شکست توزیع $IWPS$

با استفاده از ترتیب‌های تصادفی متغیرهای Y, X که به ترتیب دارای توزیع‌های $IWPS$ و IW هستند، را با هم مقایسه می‌کنیم.

گزاره ۴.۱.۳. متغیر تصادفی $Y \sim IWPS(\alpha, \beta, \theta)$ در نسبت درست‌نمایی از متغیر تصادفی $X \sim IW(\alpha, \beta)$ بزرگتر است اگر و فقط اگر $\theta > 0$.

برهان. برای اثبات آن کافی است نسبت تابع چگالی دو توزیع را بدست آوریم:
همان‌طور که داشتیم تابع چگالی احتمال سری توانی وایبل وارون برابر است با:

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}, \quad x > 0$$

و تابع چگالی احتمال وایبل وارون با $\alpha = \alpha^{-\frac{1}{\beta}}$ برابر است با:

$$\frac{\beta}{\alpha} (x)^{\beta+1} e^{-\frac{1}{\alpha} (x)^\beta}$$

اکنون نسبت دو تابع چگالی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{f(x; \alpha, \beta, \theta)}{g(x; \alpha, \beta)} = \frac{\theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}}{\frac{\beta}{\alpha} x^{-(\beta+1)} e^{-\frac{1}{\alpha} x^{-\beta}}}$$

$$\frac{f(x; \alpha, \beta, \theta)}{g(x; \alpha, \beta)} = \frac{\theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)}}{\frac{\beta}{\alpha} x^{-(\beta+1)} e^{-\frac{1}{\alpha} x^{-\beta}}}$$

$$\frac{f(x; \alpha, \beta, \theta)}{g(x; \alpha, \beta)} = \frac{\theta}{C(\theta)} C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}}) \quad (11.3)$$

□ که (۱۱.۳) به ازای $\theta > 0$ در X صعودی است.

از گزاره (۴.۱.۳) نتیجه می‌گیریم که نرخ شکست معمولاً تصادفی و مرتبه میانگین باقی مانده طول عمر بین X و Y قرار دارد. برای جزئیات بیشتر به شاکد و شانتی کومار [۶۱] مراجعه کنید. در تجزیه و تحلیل آماری مخصوصاً در کاربرد آماره مرتب بر ضرورت و اهمیت گشتاورها تاکید شده است. بنابراین گشتاور توزیع سری‌های توانی و ایبل وارون به صورت زیر بیان می‌شود:

لم ۵.۱.۳. اگر X از توزیع سری‌های توانی و ایبل وارون $IWPS(\alpha, \beta, \theta)$ باشد، آن گاه K امین گشتاور براساس رابطه‌ی (۶.۳) به صورت

$$E(X^k) = \sum_{z=1}^{\infty} P(Z = z) E(Y_{(z)}^k) = \frac{\alpha^{\frac{k}{\beta}} \Gamma(1 - \frac{k}{\beta})}{C(\theta)} \sum_{z=1}^{\infty} \alpha_z \theta^z z^{\frac{k}{\beta}}, \quad \beta > k \quad (12.3)$$

خواهد بود که Y_n ، n امین آماره مرتب از یک نمونه تصادفی با اندازه n از توزیع و ایبل وارون است و $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما کامل می‌باشد.

برهان.

$$f(Y_{(z)}|Z = z) = \frac{f(y_{(z)}, Z = z)}{P(Z = z)}$$

$$f(y_{(z)}) = \sum_Z f(y_{(z)}|Z = z) P(Z = z)$$

می‌دانیم:

$$E(X^k) = \int x^k f(x) dx$$

براساس (۴.۳) داریم:

$$E(X^k) = \sum_z \int y_{(z)}^k f(y_{(z)}|Z = z) P(Z = z) dy_{(z)}$$

که $\int y_{(z)}^k f(y_{(z)}|Z = z) dy_{(z)}$ برابر است با $E(y_{(z)}^k)$ در نتیجه:

$$E(X^k) = \sum_{z=1}^{\infty} P(Z = z) E y_{(z)}^k \quad (13.3)$$

بنابراین از رابطه‌ی (۱۴.۳) داریم:

$$E(X^k) = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{a_z \theta^z}{C(\theta)} E y_{(z)}^k \quad (14.3)$$

حال $E y_{(z)}^k$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} E y_{(z)}^k &= \int y_{(z)}^k f(y_{(z)}) dy_{(z)} \\ &= \int_0^{\infty} y_{(z)}^k z \alpha \beta y_{(z)}^{-(\beta+1)} e^{-z \alpha y_{(z)}^{-\beta}} dy_{(z)} \end{aligned} \quad (15.3)$$

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$u = y_{(z)}^{-\beta} \implies y_{(z)} = u^{-\frac{1}{\beta}}$$

و

$$du = -\beta y_{(z)}^{-(\beta+1)} dy_{(z)}$$

با جایگذاری تغییر متغیرها در (۱۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} u^{-\frac{k}{\beta}} z \alpha e^{-z \alpha u} du \\ &= z \alpha \frac{\Gamma(1 - \frac{k}{\beta})}{(z \alpha)^{1 - \frac{k}{\beta}}} \int_0^{\infty} \frac{(z \alpha)^{1 - \frac{k}{\beta}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{\beta})} u^{(-\frac{k}{\beta} + 1) - 1} e^{-z \alpha u} du \end{aligned}$$

مقدار انتگرال برابر یک می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{\Gamma(1 - \frac{k}{\beta})}{(z \alpha)^{-\frac{k}{\beta}}} \quad (16.3)$$

از رابطه‌های (۱۴.۳) و (۱۶.۳) داریم:

$$E(X^k) = \sum_{z=1}^{\infty} P(Z = z) E(Y_{(z)}^k) = \frac{\alpha^{\frac{k}{\beta}} \Gamma(1 - \frac{k}{\beta})}{C(\theta)} \sum_{z=1}^{\infty} \alpha_z \theta^z z^{\frac{k}{\beta}}$$

□

میانگین طول عمر باقی‌مانده یک تابع مهم در تحلیل بقا است که در علوم آماری، اقتصاد، علوم اجتماعی و قابلیت اطمینان از میانگین طول عمر استفاده می‌شود. میانگین طول عمر باقی‌مانده برای توزیع سری‌های توانی وایبل وارون براساس (۱۳.۱) به صورت زیر است:

$$m(t; \alpha, \beta, \theta) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n \theta^n}{C(\theta)}) \int_t^{\infty} (y-t) n \alpha \beta y^{-(\beta+1)} e^{-n \alpha y^{-\beta}} dy}{1 - F(t; \alpha, \beta, \theta)}$$

که با تغییر متغیر $u = n \alpha y^{-\beta}$ خواهیم داشت:

$$m(t; \alpha, \beta, \theta) = \frac{1}{F(t; \alpha, \beta, \theta) - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n (n\alpha)^{\frac{1}{\beta}} \Gamma(\frac{-1}{\beta}) + \beta \Gamma(\frac{(\beta-1)}{\beta}, n\alpha t^{-\beta})}{C(\theta)} - t, \quad \beta > 1$$

که در آن $\Gamma(\alpha)$ تابع کامل گاما است و

$$\Gamma(\alpha, t) = \int_t^{\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy$$

مساله‌ی مشخصه‌سازی توزیع، یک موضوع بسیار مهمی می‌باشد که اخیراً توجه بسیاری از محققان را به خودش جلب کرده است. مشخصه‌سازی‌های بسیاری از جهات مختلف صورت گرفته است. محقق علاقه‌مند است بداند شرایط لازم توزیع سری‌های توانی وایبل وارون برای برازش مدل چه چیزهایی می‌باشند. بدین منظور مشخصه‌های توزیع که تحت آن، شرایط لازم برای توزیع پیشنهادی را مشخص می‌کند، بیان می‌کنیم. این مشخصات براساس

۱- اصل حداکثر آنتروپی

۲- رابطه‌ی ساده بین دو گشتاور بریده شده

ارائه می‌شوند.

۲.۳ مشخصه‌سازی حداکثر آنتروپی

جینز [۲۷] وضعیت بیشترین آنتروپی از توزیع $f^{ME}(x)$ را بر اساس مساله‌ی ماکسیمم‌سازی (۷.۱) بیان کرده است. اکنون شرایطی را بیان خواهیم کرد که مشخصه‌سازی حداکثر آنتروپی برای توزیع سری‌های توانی وایبل وارون از رابطه‌ی (۶.۳) به دست می‌آید. که قضیه‌ی زیر در این زمینه نقش مهمی را ایفا می‌کند.

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنید $X \sim IWPS(\alpha, \beta, \theta)$ باشد آن‌گاه:

$$i) E(\log C'(\theta e^{-\alpha X^{-\beta}})) = \left(\frac{C(\theta)}{\beta}\right) \left\{ \log C(\theta) - \frac{1}{\beta} \right\}$$

$$ii) E(\log X) = \left(\frac{\theta}{C(\theta)}\right) E(C'(\theta e^{-\alpha Y^{-\beta}}) \log Y)$$

$$iii) E(X^{-\beta}) = \left(\frac{\theta}{C(\theta)}\right) E(C'(\theta e^{-\alpha Y^{-\beta}}) Y^{-\beta})$$

که Y توزیع وایبل وارون با تابع توزیع (۶.۳) است.

برهان. (۱)

$$E(\log C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}}))$$

ابتدا تابع مولد گشتاور را محاسبه می‌کنیم:

$$M(t) = E e^{t \log C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})} = E C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})^t$$

با توجه به (۹.۳)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})^t \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})}{C(\theta)} dx \\ &= \int_0^{\infty} \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} \frac{C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})^{t+1}}{C(\theta)} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\frac{d}{dx} [C(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})^{t+2}]}{(t+2)C(\theta)} dx \\ &= \frac{1}{C(\theta)(t+2)} [C(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})^{t+2}] \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{C(\theta)^{t+1}}{t+2} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$E(\log C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})) = M'(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{C(\theta)^{t+1}}{t+2} \right) \Big|_{t=0}$$

اگر $w(t) = C(\theta)^{t+1}$ در نظر بگیریم آن‌گاه:

$$\ln w(t) = (t+1) \ln C(\theta)$$

در نتیجه:

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \ln C(\theta)$$

و

$$w'(t) = \ln C(\theta) \times C(\theta)^{t+1} \quad (۱۷.۳)$$

اگر $y(t) = \frac{C(\theta)^{t+1}}{t+2}$ باشد، آن‌گاه:

$$y'(t) = \frac{[C(\theta)^{t+1}]'(t+2) - C(\theta)^{t+1}}{(t+2)^2}$$

با توجه به (۱۷.۳):

$$\begin{aligned} & \frac{\ln C(\theta) \cdot C(\theta)^{t+1} (t+2) - C(\theta)^{t+1}}{(t+2)^2} \\ &= \frac{C(\theta)^{t+1} (\ln C(\theta) (t+2) - 1)}{(t+2)^2} \end{aligned}$$

$t = 0$ قرار می‌دهیم آن‌گاه:

$$\frac{C(\theta)(2 \ln C(\theta) - 1)}{4}$$

از ۲ فاکتر می‌گیریم:

$$= \frac{C(\theta)}{2} \left(\ln C(\theta) - \frac{1}{2} \right)$$

(۲)

$$E(\log X) = \int_0^{\infty} \log Y \frac{\theta}{C(\theta)} \alpha \beta Y^{-(\beta+1)} e^{-\alpha Y^{-\beta}} C'(\theta e^{-\alpha Y^{-\beta}}) dY$$

که بر اساس تابع چگالی رابطه‌ی (۳.۳):

$$E(\log X) = \frac{\theta}{C(\theta)} E(\log Y C'(\theta e^{-\alpha Y^{-\beta}}))$$

(۳)

$$E(X^{-\beta}) = \int_0^{\infty} Y^{-\beta} \frac{\theta}{C(\theta)} \alpha \beta Y^{-(\beta+1)} e^{-\alpha Y^{-\beta}} C'(\theta e^{-\alpha Y^{-\beta}}) dY$$

و بر اساس تابع چگالی رابطه‌ی (۳.۳):

$$E(X^{-\beta}) = \frac{\theta}{C(\theta)} E(C'(\theta e^{-\alpha Y^{-\beta}}) Y^{-\beta})$$

□

در گزاره زیر نشان داده می‌شود که توزیع سری‌های توانی و ایبل وارون دارای بیشترین آنتروپی از تابع چگالی تحت شرایط بیان شده در گزاره قبل می‌باشد.

گزاره ۲.۲.۳. تابع چگالی احتمال (۹.۳) با پارامترهای α ، β و θ جواب یکتا و بهینه

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \operatorname{argmax}_{\varphi} H_{sh} \quad (18.3)$$

تحت شرایط ۱، ۲ و ۳ ارائه شده در گزاره‌ی (۱.۲.۳) می‌باشد.

برهان. اگر φ تابع چگالی احتمال تحت شرایط گزاره‌ی (۱.۲.۳) باشد آنگاه واگرایی کولبک- لایبر بین φ و $f(\cdot; \alpha, \beta, \theta)$ به صورت زیر است:

$$D(f, \varphi) = \int_R \varphi(x) \log \left(\frac{\varphi(x)}{f(x; \alpha, \beta, \theta)} \right) dx$$

با توجه به نتایج کاور و توماس^۲ داریم:

$$0 \leq D(f, \varphi) = -H_{sh}(\varphi) - \int_R \varphi(x) \log f(x; \alpha, \beta, \theta) dx$$

با توجه به این که $\varphi(x)$ تابع چگالی احتمال می‌باشد داریم:

$$\begin{aligned} & \int \varphi(x) \log f(x) dx \\ &= \int \varphi(x) \left(\log \alpha \beta \theta - (\beta + 1) \log x - \alpha x^{-\beta} + \log(C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})) - \log C(\theta) \right) \\ &= \log \alpha \beta \theta - (\beta + 1) E \log x - \alpha E x^{-\beta} + E \log C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}}) - \log C(\theta) \end{aligned}$$

و با توجه به شرایط (۱.۲.۳) جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \log(\alpha \beta \theta) - (\beta + 1) \frac{\theta}{C(\theta)} E(C'(\theta e^{-\alpha Y^{-\beta}}) \log Y) \\ & - \log C(\theta) - \alpha \frac{\theta}{C(\theta)} E(C'(\theta e^{-\alpha Y^{-\beta}}) Y^{-\beta}) \\ & + \frac{C(\theta)}{2} \left\{ \log C(\theta) - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \int_{\mathcal{R}} f(x; \alpha, \beta, \theta) \log f(x; \alpha, \beta, \theta) dx = \\ & - H_{sh}(f) \end{aligned}$$

همان‌طور که در قبل گفتیم Y توزیع وایبل وارون است بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$H_{sh}(\varphi) \leq H_{sh}(f)$$

و ماکسیمم $H_{sh}(\phi)$ زمانی است که:

$$\varphi(x) = f(x; \alpha, \beta, \theta) \quad (۱۹.۳)$$

و چون برای هر مقدار x بجز صفر رابطه‌ی (۱۹.۳) برقرار است پس یکتایی برقرار می‌باشد. بنابراین آنتروپی شانون توزیع سری توانی وایبل وارون به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} H_{sh}(f) &= -\log(\alpha \beta \theta) + (\beta + 1) \frac{\theta}{C(\theta)} E(C'(\theta e^{-\alpha Y^{-\beta}}) \log Y) \\ & + \log C(\theta) + \alpha \frac{\theta}{C(\theta)} E(C'(\theta e^{-\alpha Y^{-\beta}}) Y^{-\beta}) \\ & - \frac{C(\theta)}{2} \left\{ \log C(\theta) - \frac{1}{2} \right\} \quad (۲۰.۳) \end{aligned}$$

□

مشخصه‌سازی براساس دو گشتاور بریده شده

جهت به دست آوردن نتایج تابع مشخصه از قضیه‌ی زیر که توسط گلانزل [۲۰] بیان شده، استفاده خواهد شد.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمال و $H = [a, b]$ که بهترین حالت می‌تواند $(a < b, a = -\infty, b = \infty)$ باشد و فرض کنید $X : \Omega \rightarrow H$ و φ و ψ دو تابع حقیقی که روی H تعریف شده‌اند به طوری که:

$$E(\phi(x)|X \geq x) = E(\psi(x)|X \geq x)\lambda(x), \quad x \in H$$

که در آن λ یک تابع حقیقی است. فرض کنید F یک تابع اکیدا یکنوا دو بار مشتق پذیر پیوسته روی H باشد همچنین رابطه‌ی $\psi\lambda = \varphi$ دارای جواب حقیقی در نقاط درونی H است آن‌گاه F به طور یکتا به وسیله‌ی توابع φ, ψ و λ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F(x) = C \int_a^x \left| \frac{\lambda'(u)}{\lambda(u)\psi(u) - \phi(u)} \right| \exp\{-s(u)\} du$$

که در آن C یک مقدار ثابت و تابع S جواب معادله‌ی دیفرانسیل

$$s' = \frac{\lambda'\psi}{(\lambda\psi - \phi)} \quad (21.3)$$

است. دقت کنید که $\int_H dF = 1$ است.

نتیجه ۱.۲.۳. در قضیه‌ی (۱.۲.۳):

الف) فاصله H نیاز نیست بسته باشد.

ب) تابع λ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که دارای ساده‌ترین شکل ممکن باشد. برای جزئیات بیشتر به گلانزل و همدانی [۲۱] و همدانی [۲۴، ۲۵] مراجعه کنید.

گزاره ۳.۲.۳. اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته به صورت $(\circ, \infty) \rightarrow \Omega : X$ باشد و فرض کنید $x \in (\circ, \infty)$ $\psi(x) = \frac{e^{\alpha x - \beta}}{xC'(\theta e^{-\alpha x - \beta})}$ ، $\phi(x) = \frac{e^{\alpha x - \beta}}{C'(\theta e^{-\alpha x - \beta})}$ ، آن‌گاه (۹.۳) تابع چگالی X است اگر و فقط اگر تابع λ در قضیه (۱.۲.۳) به فرم

$$\lambda(x) = \frac{\beta + 1}{\beta} x, \quad x \in (\circ, \infty)$$

باشد.

برهان. با توجه به (۹.۳):

$$\begin{aligned} \{1 - F(x; \alpha, \beta, \theta)\} E(\psi(x)|X \geq x) &= \int_0^\infty \psi(x)f(x)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{\alpha x - \beta} \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x - \beta} C'(\theta e^{-\alpha x - \beta})}{xC'(\theta e^{-\alpha x - \beta})C(\theta)} dx \\ &= \frac{\alpha \beta \theta x^{-(\beta+1)}}{C(\theta)(\beta + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{1 - F(x; \alpha, \beta, \theta)\} E(\phi(x)|X \geq x) &= \int_0^{\infty} \varphi(x)f(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{\alpha x - \beta} \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x - \beta} C'(\theta e^{-\alpha x - \beta})}{C'(\theta e^{-\alpha x - \beta}) C(\theta)} dx \\ &= \frac{\alpha \theta}{C(\theta)} x^{-\beta} \end{aligned}$$

بنابر تعریف λ :

$$\lambda'(x) = \frac{\beta + 1}{\beta} \quad (22.3)$$

در نتیجه از رابطه‌های (۲۱.۳) و (۲۲.۳) داریم:

$$s'(x) = \frac{\lambda'(x)\psi(x)}{\lambda(x)\psi(x) - \phi(x)} = \frac{\frac{\beta+1}{\beta} \times \frac{e^{\alpha x - \beta}}{x C'(\theta e^{-\alpha x - \beta})}}{\frac{\beta+1}{\beta} x \times \frac{e^{\alpha x - \beta}}{x C'(\theta e^{-\alpha x - \beta})} - \frac{e^{\alpha x - \beta}}{C'(\theta e^{-\alpha x - \beta})}} = \frac{\frac{(\beta+1)e^{\alpha x - \beta}}{x \beta C'(\theta e^{-\alpha x - \beta})}}{\frac{e^{\alpha x - \beta}}{\beta C'(\theta e^{-\alpha x - \beta})}} = \frac{\beta + 1}{x}$$

$$s(x) = (\beta + 1) \ln(x) + C_1, \quad x \in (0, \infty)$$

□

C_1 ثابت است و تابع چگالی X متناظر با (۹.۳) است.

نتیجه‌گیری ۱

متغیر تصادفی پیوسته X به صورت $X : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ و $\psi(x)$ براساس گزاره (۳.۲.۳) تعریف می‌شود، آن‌گاه (۹.۳) تابع چگالی X است اگر و فقط اگر تابع‌های λ, ϕ در قضیه (۱.۲.۳) به صورت زیر باشند:

$$\frac{\lambda'(x)\psi(x)}{\lambda(x)\psi(x) - \phi(x)} = \frac{\beta + 1}{x}, \quad x \in (0, \infty) \quad (23.3)$$

نتیجه ۲.۲.۳. جواب عمومی ارائه شده در نتیجه‌گیری ۱ به صورت

$$\lambda(x) = x^{\beta+1} \left\{ - \int (\beta + 1) C'(\theta e^{-\alpha x - \beta}) e^{-\alpha x - \beta} x^{-(\beta+1)} \phi(x) d(x) + D \right\}, \quad x \in (0, \infty)$$

است که D ثابت است و $D = 0$ یک مجموعه از توابع مناسب در گزاره (۳.۲.۳) می‌باشد.

۳.۳ برآورد و استنباط

در این قسمت پارامترهای توزیع سری‌های توانی وایبل وارون را برآورد می‌کنیم. آزمایشگر ممکن است در آزمایش طول عمر به دلیل محدودیت‌های زمانی و یا محدودیت‌های دیگر مانند (پول، منابع مادی و یا مشکلات تجربی) در جمع‌آوری داده‌ها، همیشه طول عمر را مشاهده نکند. بنابراین نمونه‌ی سانسور در عمل به وجود می‌آید. در این قسمت سانسور راست را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱.۳.۳. تحت نوع سانسور راست مطالعه تا زمان k_i که از قبل توسط آزمایشگر مشخص شده است ادامه می‌یابد. تحت این سانسور، مشاهدات عبارتند از:

$$X_i = \begin{cases} X_i & \text{if } X_i < k_i \\ k_i & \text{if } X_i \geq k_i \end{cases} \quad (24.3)$$

$$i = 1, \dots, n$$

اگر X_i یک متغیر تصادفی از توزیع سری‌های توانی وایبل وارون با پارامترهای $\Theta = (\alpha, \beta, \theta)^T$ باشد، بنابراین برای به‌دست آوردن برآورد ابتدا لگاریتم گرفته و سپس از تک‌تک پارامترها مشتق می‌گیریم. مشاهدات را به دو گروه سانسور و غیر سانسور تقسیم می‌کنیم. اگر m سانسور داشته باشیم $n - m$ غیر سانسور خواهیم داشت، مانند:

$$X_{obs} = (x_1, \dots, x_{n-m}, k_{n-m+1}, \dots, k_n)$$

بنابراین لگاریتم تابع درست‌نمایی $l = l(\Theta; X_{obs})$ از رابطه‌های (۹.۳) و (۲۴.۳) به‌صورت زیر است:

$$l = (n - m) \log(\alpha\beta\theta) - n \log C(\theta) - (\beta + 1) \sum_{i=1}^{n-m} \log x_i \\ - \alpha \sum_{i=1}^{n-m} x_i^{-\beta} + \sum_{i=1}^{n-m} \log C'(\theta P_{xi}) + \sum_{i=n-m+1}^n \log [C(\theta) - C(\theta P_{ki})]$$

در نظر می‌گیریم. بنابراین مشتق‌های $l(\alpha, \beta, \theta)$ نسبت به α, β و θ بدست می‌آوریم، یعنی:

$$U(\Theta, x_{obs}) = \left(\frac{dl}{d\alpha}, \frac{dl}{d\beta}, \frac{dl}{d\theta} \right)^T$$

بنابراین:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{n - m}{\theta} - n \frac{C'(\theta)}{C(\theta)} + \sum_{i=1}^{n-m} P_{xi} \frac{C''(\theta P_{xi})}{C'(\theta P_{xi})} + \sum_{i=n-m+1}^n \frac{C'(\theta) - P_{ki} C'(\theta P_{ki})}{C(\theta) - C(\theta P_{ki})}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n - m}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n-m} x_i^{-\beta} - \theta \sum_{i=1}^{n-m} x_i^{-\beta} P_{xi} \frac{C''(\theta P_{xi})}{C'(\theta P_{xi})} + \theta \sum_{i=n-m+1}^n \frac{k_i^{-\beta} P_{ki} C'(\theta P_{ki})}{C(\theta) - C(\theta P_{ki})}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{n - m}{\beta} - \sum_{i=1}^{n-m} \log x_i + \alpha \sum_{i=1}^{n-m} x_i^{-\beta} \log x_i + \alpha \theta \sum_{i=1}^{n-m} \frac{C''(\theta P_{xi})}{C'(\theta P_{xi})} x_i^{-\beta} P_{xi} \log x_i \\ - \alpha \theta \sum_{i=n-m+1}^n \frac{C'(\theta P_{ki})}{C(\theta) - C(\theta P_{ki})} k_i^{-\beta} P_{ki} \log k_i$$

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $\hat{\Theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta})^T$ است که با قرار دادن مشتقات بالا برابر صفر به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{\partial l}{\partial \theta} = 0$$

برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی α, β و θ وجود دارند اما نمی‌توان به فرم بسته پیدا کرد. بنابراین با استفاده از روش عددی نیوتون رافسون می‌توان برآوردهای آن‌ها را به دست آورد.

۱.۳.۳ ماتریس اطلاع فیشر

اگر $I(\alpha, \beta, \theta)$ نشان دهنده‌ی ماتریس اطلاع فیشر α, β, θ باشد، آن‌گاه ماتریس اطلاع مشاهدات به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(\theta) = - \begin{pmatrix} I_{\alpha\alpha} & I_{\alpha\beta} & I_{\alpha\theta} \\ I_{\beta\alpha} & I_{\beta\beta} & I_{\beta\theta} \\ I_{\theta\alpha} & I_{\theta\beta} & I_{\theta\alpha} \end{pmatrix}$$

که مقادیر ماتریس اطلاع مشاهدات از مشتق دوم پارامترهای α, β, θ به دست می‌آیند، بنابراین:

$$I_{\alpha\alpha} = -\frac{n-m}{\alpha} + \theta \sum_{i=1}^{n-m} x_i^{-\beta} [w_{\lambda_i} + \theta x_i^{-\beta} w_{\psi_i}] - \theta \sum_{i=n-m+1}^n k_i^{-\beta} P_{ki} \frac{[C'(\theta P_{ki}) - \theta P_{ki} C''(\theta P_{ki})] \tau_i + \theta^{\beta} P_{ki} C'(\theta P_{ki})^{\beta}}{\tau_i^{\beta}}$$

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n-m} x_i^{-\beta} \log x_i + \theta \sum_{i=1}^{n-m} w_{\lambda_i} \log x_i - \alpha \theta \sum_{i=1}^{n-m} x_i^{-\beta} [w_{\lambda_i} + \theta x_i^{-\beta} w_{\psi_i}] \log x_i - \theta \sum_{i=n-m+1}^n k_i^{-\beta} P_{ki} w_{\psi_i} \log k_i + \alpha \theta^{\beta} \sum_{i=n-m+1}^n k_i^{-\beta} P_{ki}^{\beta} \frac{C'(\theta P_{ki})^{\beta}}{[C(\theta) - C(\theta P_{ki})]^{\beta}} \log k_i$$

$$I_{\alpha\theta} = - \sum_{i=1}^{n-m} [w_{\lambda_i} + \theta x_i^{-\beta} w_{\psi_i}] + \sum_{i=n-m+1}^n k_i^{-\beta} P_{ki} w_{\psi_i}$$

$$I_{\beta\beta} = -\frac{n-m}{\beta^2} - \alpha \sum_{i=1}^{n-m} x_i^{-\beta} (\log x_i)^{\beta} - \theta \alpha \sum_{i=1}^{n-m} w_{\lambda_i} (\log x_i)^{\beta} + \theta \alpha \sum_{i=n-m+1}^n k_i^{-\beta} P_{ki} [\log k_i]^{\beta} w_{\psi_i} + \theta \alpha^{\beta} \sum_{i=1}^{n-m} x_i^{-\beta} [w_{\lambda_i} + \theta x_i^{-\beta} w_{\psi_i}] (\log x_i)^{\beta} - \theta^{\beta} \alpha^{\beta} \sum_{i=n-m+1}^n k_i^{-\beta} P_{ki}^{\beta} \frac{C'(\theta P_{ki})^{\beta} [\log k_i]^{\beta}}{[C(\theta) - C(\theta P_{ki})]^{\beta}}$$

$$I_{\beta\theta} = \alpha \sum_{i=1}^{n-m} [w_{\gamma_i} + \theta x_i^{-\beta} w_{\gamma_i}] \log x_i - \alpha \sum_{i=n-m+1}^n k_i^{-\beta} P_{ki} w_{\gamma_i} \log k_i$$

$$I_{\theta\theta} = \sum_{i=1}^{n-m} w_{\gamma_i} + \sum_{i=n-m+1}^n \frac{[C'''(\theta) - P_{ki} C''(\theta P_{ki})] \tau_i - [C'(\theta) - P_{ki} C'(\theta P_{ki})]^{\gamma}}{\tau_i^{\gamma}} - \frac{n-m}{\theta^{\gamma}} - n \frac{C''(\theta)C(\theta) - C'(\theta)^{\gamma}}{C(\theta)^{\gamma}}$$

که

$$w_{\gamma_i} = \frac{x_i^{-\beta} P_{xi} C''(\theta P_{xi})}{C'(\theta P_{xi})}$$

$$w_{\gamma_i} = \frac{P_{xi}^{\gamma} [C'''(\theta P_{xi}) C'(\theta P_{xi}) - C''(\theta P_{xi})^{\gamma}]}{C'(\theta P_{xi})^{\gamma}}$$

$$w_{\gamma_i} = \frac{([C'(\theta P_{ki}) + \theta P_{ki} C''(\theta P_{ki})] \tau_i - \theta C'(\theta P_{ki}) [C'(\theta) - P_{ki} C'(\theta P_{ki})])}{\tau_i^{\gamma}}$$

$$w_{\gamma_i} = \frac{([\gamma - \alpha k_i^{-\beta}] C'(\theta P_{ki}) - \alpha \theta k_i^{-\beta} P_{ki} C''(\theta P_{ki}))}{\tau_i}$$

۹

$$\tau_i = C(\theta) - C(\theta P_{ki})$$

$$P_{w_i} = e^{-\alpha w_i^{-\beta}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

است.

اکنون تحت شرایط نظم خواص جانبی برآوردگر درست‌نمایی به صورت توزیع نرمال چندگانه

$$\sqrt{n}(\hat{\Theta} - \Theta) \rightarrow N_{\gamma}(\circ, I(\hat{\Theta})^{-1})$$

می‌باشد.

۲.۳.۳ الگوریتم EM

اولین مطالعه‌ی تئوری الگوریتم EM^۳ توسط دمپستر، لیرد و رابین [۱۷] معرفی و توسط مک لاجلان و کریشنان^۴ (۱۹۷۷) ارائه شده است. الگوریتم EM یک روش بهینه‌سازی تکرار شونده است. عمومیت الگوریتم EM ریشه‌دار از این می‌باشد که چقدر ساده این روش اجرا می‌شود و چقدر قابل اعتماد است که بتواند برآوردگرهای بهینه‌ای را از طریق گام‌های پایدار پیدا کند. مفهوم اصلی الگوریتم EM ساختن یک برآورد برای تابع درست‌نمایی داده‌های کامل است که این تابع درست‌نمایی را با روش‌های رایج عددی ماکسیمم کند (مانند روش نیوتون رافسون). بنابراین الگوریتم EM در اصل یک الگوریتم عددی نیست اما در عوض یک فرایند کلی پیشنهاد شده برای محاسبه‌ی برآورد پارامترها از داده‌های ناقص براساس تابع درست‌نمایی کامل می‌باشد. اجباری که در استفاده از الگوریتم EM وجود دارد این است که برآورد ماکسیمم درست‌نمایی داده‌های کامل به آسانی قابل محاسبه است اما در مورد داده‌های ناقص کار کردن با روش ماکسیمم درست‌نمایی مشکل است.

۳.۳.۳ فرمول‌بندی الگوریتم EM

فرض کنید تابع چگالی (۹.۳) را داریم و $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^t$ بردار پارامتر مجهول از فضای پارامتر Ω است و $l_c(\theta; Y, X)$ ، لگاریتم تابع درست‌نمایی براساس کلیه‌ی داده‌ها می‌باشد. Y بردار داده‌های کامل و X بردار داده‌های ناقص می‌باشند. با این دید به X می‌نگریم که گویی تابع قابل مشاهده از داده‌های کامل است. لفظ داده‌های ناقص در مورد داده‌های گمشده به کار می‌رود اما به هر داده‌ای که هرگز قابل مشاهده نباشد نیز اطلاق می‌شود. الگوریتم با یک مقدار اولیه‌ی $\Theta^\circ \in \Omega$ آغاز می‌شود و دو مرحله‌ی E و M را تا رسیدن به همگرایی، تکرار می‌کند لازم به ذکر است که تحت شرایطی این دنباله به همگرایی نمی‌رسد برای جزئیات بیشتر به [۴۹] رجوع شود.

در الگوریتم EM امیدریاضی با توجه به توزیع داده کامل محاسبه و Θ برآورد می‌شود. به‌طور خاص اگر صفر یک مقدار اولیه باشد، در تکرار اول لازم است

$$Q(\Theta; \Theta^\circ) = E_{\Theta^\circ} [l(\Theta; y) | X_{obs}]$$

محاسبه شود. که همان تابع درست‌نمایی برای داده‌های کامل است. و گام M نیز ماکسیمم‌سازی این تابع $Q(\Theta; \Theta^\circ)$ نسبت به Θ روی فضای پارامتر Ω است به عبارت دیگر مقدار $\Theta^{(1)}$ ی انتخاب می‌کنیم که

$$Q(\hat{\Theta}^{(1)}; \hat{\Theta}^{(0)}) \geq Q(\Theta; \hat{\Theta}^{(0)})$$

^۳Expectation Maximization

^۴McLachlan and Krishnan

گام‌های E و M دوباره نیز تکرار می‌شود اما این بار به جای $\theta^{(r)}$ از $\theta^{(r+1)}$ استفاده می‌شود. در تکرار $(r+1)$ ام گام‌های E و M به صورت زیر تعریف می‌شوند:
گام E: محاسبه‌ی $Q(\theta; \theta^{(r)})$ که

$$Q(\theta, \theta^{(r)}) = E_{\theta^{(r)}} [\ln L(\theta) | X_{obs}]$$

گام M: انتخاب $\hat{\theta}^{(r+1)}$ که $Q(\theta; \theta^{(r)})$ را برای هر $\theta \in \Omega$ ماکسیمم کند به قسمی که:

$$Q(\hat{\theta}^{(r+1)}; \hat{\theta}^{(r)}) \geq Q(\theta; \hat{\theta}^{(r)})$$

گام‌های E و M تا زمانی تکرار می‌شوند که تفاضل $L\hat{\theta}^{(r+1)} - L\hat{\theta}^{(r)}$ مقدار کوچک دلخواهی را که نشان‌دهنده‌ی همگرایی دنباله‌ی $\{L(\theta^{(r)})\}$ است اختیار کند. پس وقتی داده‌های بقا از توزیع نمایی پیروی کنند و بعضی داده‌ها از سمت راست سانسور شده باشند، آن‌گاه الگوریتم EM ابزاری مفید می‌باشد. بنابراین اگر i مشاهدات سانسور شده باشند آن‌گاه X را می‌توان به عنوان داده مشاهده نشده پنهان در نظر گرفت به طوری که $X_i \sim IWPS(\alpha, \beta, \theta)$ ، $i = n - m + 1, \dots, n$ و اگر Y داده کامل باشد آن‌گاه الگوریتم EM به صورت زیر است:

$$v = (X_{obs}, x_{n-m+1}, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n)$$

z_i تعداد شکست، X_{obs} نشان‌دهنده‌ی داده مشاهده شده ولی ناقص. اکنون فرضیه‌ی توزیع داده کامل را برای $i = 1, 2, \dots, n$ $(X_i, Z_i)^T$ به دست می‌آوریم. تابع احتمال آن طبق رابطه‌های (۱.۳)، (۵.۳) و (۲۴.۳) به فرم زیر است:

$$g(x_i, z_i; \theta) = \frac{z_i \alpha z_i^{\theta z_i}}{C(\theta)} \alpha \beta x_i^{-(\beta+1)} e^{-\alpha z_i x_i^{-\beta}}, \quad \alpha, \beta, \theta > 0, \quad z_i \in N, \quad x_i > 0 \quad (25.3)$$

بنابراین از رابطه‌ی (۲۵.۳) تابع لگاریتم برای داده کامل برابر است با:

$$l^*(\theta; v) \propto n[\log \alpha + \log \beta - \log C(\theta)] + \log \theta \sum_{i=1}^n z_i - \beta \sum_{i=1}^n \log x_i - \alpha \sum_{i=1}^n z_i x_i^{-\beta}$$

با توجه به تعریف مرحله‌ی E، امیدریاضی شرطی را محاسبه می‌کنیم به طوری که:

$$Q(\theta | \theta^{(r)}) = E(l^*(\theta; V) | X_{obs})$$

$$Q(\theta | \theta^{(r)}) \propto n[\log \alpha \beta - \log C(\theta)] + \sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\theta^{(r)}) [\log \theta - \alpha x_i^{-\beta}] - \beta \sum_{i=1}^{n-m} \log x_i + \sum_{i=n-m+1}^n [\log \theta \xi_{2i}(\theta^{(r)}) - \alpha \xi_{3i}(\theta^{(r)}) - \beta \xi_{4i}(\theta^{(r)})] \quad (26.3)$$

برای محاسبه‌ی ξ ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

طبق معادله‌های (۹.۳) و (۲۵.۳) و $X \geq k$ داریم:

$$g(z|x) = z\alpha_z\theta^{z-1}(e^{-\alpha x^{-\beta}})^{(z-1)}C'(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})^{-1}, \quad z \in N$$

۹

$$\begin{aligned} g(z|X \geq k) &= \int g(x, z|X \geq k)dx = \int g(z|X = x, X \geq k)f(x|X \geq k)dx \\ &= \tau(k) \int g(z|X = x, X \geq k)f(x; \alpha, \beta, \theta)I_A(x)dx \\ &= \tau(k) \int_A g(x, z; \Theta)dx \\ &= \frac{a_z\theta^z}{C(\theta) - C(\theta e^{-\alpha k^{-\beta}})}(1 - e^{-\alpha_z k^{-\beta}}), \quad z \in N \end{aligned}$$

که

$$\tau(k) = \frac{C(\theta)}{[C(\theta) - C(\theta e^{-\alpha k^{-\beta}})]}, \quad A = [k, \infty)$$

است.

بنابراین رابطه‌های زیر طبق بالا محاسبه می‌شوند:

$$\xi_{f_i}(\Theta^{(r)}) = E(\log X_i | X_i \geq k_i) = \frac{\theta^{(r)}\alpha^{(r)}\beta^{(r)} \int_{k_i}^{\infty} x^{-(\beta^{(r)}+1)}P_x^{(r)}C'(\theta^{(r)}P_x^{(r)})\log x dx}{C(\theta^{(r)}) - C(\theta^{(r)}P_{k_i}^{(r)})},$$

$$i = n - m + 1, \dots, n$$

$$\xi_{Y_i}(\Theta^{(r)}) = E(Z_i | X_i \geq k_i) = \frac{\theta^{(r)}C'(\theta^{(r)}) - \theta^{(r)}P_{k_i}^{(r)}C'(\theta^{(r)}P_{k_i}^{(r)})}{C(\theta^{(r)}) - C(\theta^{(r)}P_{k_i}^{(r)})}, \quad i = n - m + 1, \dots, n$$

$$\xi_{Z_i}(\Theta^{(r)}) = E(Z_i X_i^{-\beta} | X_i \geq k_i) = \frac{C(\theta^{(r)}) - \alpha^{(r)}\theta^{(r)}K_i^{-\beta^{(r)}}P_{k_i}^{(r)}C'(\theta^{(r)}P_{k_i}^{(r)}) - C(\theta^{(r)}P_{k_i}^{(r)})}{\alpha^{(r)}[C(\theta^{(r)}) - C(\theta^{(r)}P_{k_i}^{(r)})]}$$

$$i = n - m + 1, \dots, n$$

$$\xi_{V_i}(\Theta^{(r)}) = E(Z_i | x_i) = 1 + \theta^{(r)}P_{x_i}^{(r)} \frac{C''(\theta^{(r)}P_{x_i}^{(r)})}{C'(\theta^{(r)}P_{x_i}^{(r)})} \quad i = 1, \dots, n - m$$

که $\Theta^{(r)} = (\alpha^{(r)}, \beta^{(r)}, \theta^{(r)})^T$ و $P_w^{(r)} = e^{-\alpha^{(r)}w^{-\beta^{(r)}}$ است.

در ادامه، گام M در الگوریتم شامل ماکسیمم کردن این تابع لگ درست‌نمایی جدید (با جایگذاری‌ها در رابطه‌ی (۲۶.۳)) است که به ساده‌گی با مشتق گرفتن نسبت به $\hat{\beta}^{(k)}$, $\hat{\alpha}^{(k)}$ و $\hat{\theta}^{(k)}$ و حل کردن معادله‌ی مشتق تابع درست‌نمایی، مقدار $\hat{\beta}^{(k+1)}$, $\hat{\alpha}^{(k+1)}$ و $\hat{\theta}^{(k+1)}$ به دست می‌آید. که تابع لگ درست‌نمایی را ماکسیمم می‌کند. بنابراین:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\right)^T &= \frac{n}{\hat{\alpha}^{(r+1)}} - \sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta^{(r)}) x_i^{-\hat{\beta}^{(r)}} - \sum_{i=n-m+1}^n \xi_{2i}(\Theta^{(r)}) \\ \Rightarrow \hat{\alpha}^{(r+1)} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta^{(r)}) x_i^{-\hat{\beta}^{(r)}} + \sum_{i=n-m+1}^n \xi_{2i}(\Theta^{(r)})} \end{aligned} \quad (27.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)^T &= -n \frac{C'(\hat{\theta}^{(r+1)})}{C(\hat{\theta}^{(r+1)})} + \frac{1}{\hat{\theta}^{(r+1)}} \sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta^{(r)}) + \frac{1}{\hat{\theta}^{(r+1)}} \sum_{i=n-m+1}^n \xi_{2i}(\Theta^{(r)}) \\ &= -n \frac{C'(\hat{\theta}^{(r+1)})}{C(\hat{\theta}^{(r+1)})} + \frac{1}{\hat{\theta}^{(r+1)}} \left(\sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta^{(r)}) + \sum_{i=n-m+1}^n \xi_{2i}(\Theta^{(r)}) \right) \\ \Rightarrow \hat{\theta}^{(r+1)} &= \frac{C(\hat{\theta}^{(r+1)})}{nC'(\hat{\theta}^{(r+1)})} \left(\sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta^{(r)}) + \sum_{i=n-m+1}^n \xi_{2i}(\Theta^{(r)}) \right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \beta}\right)^T = \frac{n}{\hat{\beta}^{(r+1)}} + \alpha^{(r+1)} \sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta^{(r)}) x_i^{-\hat{\beta}^{(r+1)}} \log x_i - \sum_{i=1}^{n-m} \log x_i - \sum_{i=n-m+1}^n \xi_{2i}(\Theta^{(r)})$$

بنابراین با جایگذاری رابطه‌ی (۲۷.۳) در $\alpha^{(r+1)}$ داریم:

$$\frac{n}{\hat{\beta}^{(r+1)}} + \frac{n \sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta^{(r)}) x_i^{-\hat{\beta}^{(r+1)}} \log x_i}{\sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta^{(r)}) x_i^{-\hat{\beta}^{(r+1)}} + \sum_{i=n-m+1}^n \xi_{2i}(\Theta^{(r)})} = \sum_{i=1}^{n-m} \log x_i + \sum_{i=n-m+1}^n \xi_{2i}(\Theta^{(r)})$$

به صورت عددی به دست می‌آیند.

۴.۳.۳ خطای استاندارد الگوریتم EM

خطای استاندارد الگوریتم EM براساس نتیجه‌ی لوییس [۲۳] محاسبه می‌شود. اگر داشته باشیم $V = (X_{obs}, X_R, Z)$ ، آن‌گاه مقادیر ماتریس اطلاع فیشر با توجه به رابطه‌ی

$$I^*(\Theta; V) = -\left[\frac{\partial^2 l^*(\Theta; V)}{\partial \Theta^2} \right]$$

به دست می‌آیند، بنابراین:

$$\frac{\partial^2 l^*}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 l^*}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 l^*}{\partial \beta \partial \alpha} = \sum_{i=1}^n z_i x_i^{-\beta} \log x_i$$

$$\frac{\partial^2 l^*}{\partial \alpha \partial \theta} = \frac{\partial^2 l^*}{\partial \theta \partial \alpha} = \frac{\partial^2 l^*}{\partial \beta \partial \theta} = \frac{\partial^2 l^*}{\partial \theta \partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 l^*}{\partial \beta^2} = -\frac{n}{\beta^2} - \alpha \sum_{i=1}^n z_i x_i^{-\beta} (\log x_i)^2$$

$$\frac{\partial^2 l^*}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n z_i}{\theta^2} - n \frac{C''(\theta)C(\theta) - [C'(\theta)]^2}{[C(\theta)]^2}$$

امیدریاضی شرطی $I^*(\Theta; V)$ با توجه به ماتریس 3×3 به صورت

$$l_c(\Theta; X_{obs}) = E(I^*(\Theta; V) | X_{obs}) = [c_{ij}] \quad (28.3)$$

محاسبه می‌شود. از رابطه‌ی (۲۶.۳) مشتق‌های α, β, θ را به دست می‌آوریم:

$$c_{11} = -\frac{n}{\alpha^2}$$

$$c_{12} = c_{21} = \sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta) x_i^{-\beta} \log x_i + \sum_{i=n-m+1}^n M_{1i}(\Theta)$$

$$c_{22} = -\frac{n}{\beta^2} - \alpha \left[\sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta) x_i^{-\beta} (\log x_i)^2 + \sum_{i=n-m+1}^n M_{2i}(\Theta) \right]$$

$$c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0$$

$$c_{33} = -\frac{\sum_{i=1}^{n-m} \xi_{1i}(\Theta) + \sum_{i=n-m+1}^n \xi_{2i}(\Theta)}{\theta^2} - n \frac{C''(\theta)C(\theta) - [C'(\theta)]^2}{[C(\theta)]^2}$$

به طور مشابه در قبل مقدار ξ ها برابر است با:

$$\xi_{1i}(\Theta) = E(Z_i | x_i) = 1 + \theta P_{xi} \frac{C''(\theta P_{xi})}{C'(\theta P_{xi})}$$

$$\xi_{2i}(\Theta) = E(Z_i | X_i \geq k) = \frac{\theta C'(\theta) - \theta P_{ki} C'(\theta P_{ki})}{C(\theta) - C(\theta P_{ki})}$$

و همچنین

$$M_{ji}(\Theta) = E(Z_i X_i^{-\beta} [\log X_i]^j | X_i \geq k_i) \\ = \frac{\alpha \beta \theta \int_{k_i}^{\infty} x^{-(\beta+1)} P_x [\log x]^j \{C'(\theta P_x) + \theta P_x C''(\theta P_x)\} dx}{C(\theta) - C(\theta P_{ki})}, \quad j = 1, 2$$

است. برای به دست آوردن واریانس طبق رابطه‌ی

$$l_m(\Theta; X_{obs}) = Var \left(\frac{\partial l^*(\Theta; V)}{\partial \Theta} | X_{obs} \right) = [v_{ij}] \quad (29.3)$$

عمل می‌کنیم. بنابراین:

$$v_{11} = \sum_{i=1}^{n-m} V_{1i} x_i^{-2\beta} + \sum_{i=n-m+1}^n V_{2i}$$

$$v_{33} = \frac{\sum_{i=1}^{n-m} V_{1i} + \sum_{i=n-m+1}^n V_{5i}}{\theta^2}$$

$$v_{22} = \alpha^2 \sum_{i=1}^{n-m} x_i^{-2\beta} [\log x_i]^2 V_{1i} + \sum_{i=n-m+1}^n [V_{3i} + \alpha^2 V_{4i} - 2\alpha C_{1i}]$$

$$v_{12} = v_{21} = \sum_{i=1}^n [C_{2i} - \alpha C_{3i}]$$

$$v_{13} = v_{31} = -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n C_{4i}$$

$$v_{23} = v_{32} = -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n [C_{5i} - \alpha C_{6i}]$$

همان‌طور که می‌دانیم:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (30.3)$$

بنابراین فرمول‌های زیر از رابطه‌ی (30.3) محاسبه می‌شوند:
برای i مشاهده غیرسانسور داریم:

$$V_{1i} = Var(Z_i | x_i) = E(Z_i^2) - E(Z_i)^2 = \frac{\theta P_{xi} C''(\theta P_{xi}) + [\theta P_{xi}]^2 C'''(\theta P_{xi})}{C'(\theta P_{xi})} - \frac{[\theta P_{xi} C''(\theta P_{xi})]^2}{[C'(\theta P_{xi})]^2}$$

$$C_{1i} = C_{2i} = C_{5i} = 0$$

$$C_{3i} = x_i^{-2\beta} \log x_i V_{1i}$$

$$C_{4i} = x_i^{-\beta} V_{1i}$$

$$C_{6i} = x_i^{-\beta} \log x_i V_{1i}$$

همچنین برای i مشاهده سانسور شده برابر است با:

$$V_{\Psi_i} = Var(Z_i X_i^{-\beta} | X_i \geq k) = E(Z_i^{\Psi} X_i^{-\Psi\beta}) - E(Z_i X_i^{-\beta})^{\Psi} =$$

$$= \frac{\Psi[C(\theta) - C(\theta P_{k_i})] - \alpha \theta k_i^{-\beta} P_{k_i} C'(\theta P_{k_i}) [\Psi + \alpha k_i^{-\beta}] - \alpha^{\Psi} \theta^{\Psi} k_i^{-\Psi\beta} P_{k_i}^{\Psi} C''(\theta P_{k_i})}{\alpha^{\Psi} [C(\theta) - C(\theta P_{k_i})]} - [\xi_{\Psi_i}(\theta)]^{\Psi}$$

$$V_{\Psi_i} = Var(\log X_i | X_i \geq k) = \xi_{\Delta_i}(\theta) - [\xi_{\Psi_i}(\theta)]^{\Psi}$$

$$V_{\Psi_i} = Var(Z_i X_i^{-\beta} \log X_i | X_i \geq k) = M_{\Psi_i}^{\Psi}(\theta) - [M_{\Psi_i}(\theta)]^{\Psi}$$

$$V_{\Delta_i} = Var(Z_i | X_i \geq k) = \frac{\theta C'(\theta) - \theta P_{k_i} C'(\theta P_{k_i}) + \theta^{\Psi} C''(\theta) - \theta^{\Psi} P_{k_i}^{\Psi} C''(\theta P_{k_i})}{C(\theta) - C(\theta P_{k_i})} - [\xi_{\Psi_i}(\theta)]^{\Psi}$$

همان طور که می‌دانیم

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (31.3)$$

بنابراین فرمول‌های زیر از رابطه‌ی (31.3) محاسبه می‌شوند:

$$C_{\Psi_i} = Cov(Z_i X_i^{-\beta} \log X_i, \log X_i | X_i \geq k_i) = E(Z_i X_i^{-\beta} \log X_i \log X_i) - E(Z_i X_i^{-\beta} \log X_i) E(\log X_i)$$

$$= M_{\Psi_i}(\theta) - \xi_{\Psi_i}(\theta) M_{\Psi_i}(\theta)$$

$$C_{\Psi_i} = Cov(Z_i X_i^{-\beta}, \log X_i | X_i \geq k_i) = E(Z_i X_i^{-\beta} \log X_i) - E(Z_i X_i^{-\beta}) E(\log X_i) = M_{\Psi_i}(\theta) - \xi_{\Psi_i}(\theta) \xi_{\Psi_i}(\theta)$$

$$C_{\Psi_i} = Cov(Z_i X_i^{-\beta} \log X_i, Z_i X_i^{-\beta} | X_i \geq k_i) = M_{\Psi_i}^{(\Psi)}(\theta) - \xi_{\Psi_i}(\theta) M_{\Psi_i}(\theta)$$

$$C_{\Psi_i} = Cov(Z_i X_i^{-\beta}, Z_i | X_i \geq k_i) = \xi_{\Psi_i}(\theta) - \xi_{\Psi_i}(\theta) \xi_{\Psi_i}(\theta)$$

$$C_{\Delta_i} = Cov(\log X_i, Z_i | X_i \geq k_i) = M_{\Psi_i}(\theta) - \xi_{\Psi_i}(\theta) \xi_{\Psi_i}(\theta)$$

$$C_{\Psi_i} = Cov(Z_i X_i^{-\beta} \log X_i, Z_i | X_i \geq k_i) = M_{\Psi_i}^{(1)}(\theta) - \xi_{\Psi_i}(\theta) M_{\Psi_i}(\theta)$$

به طور مشابه در قبل مقدار ξ ها برابر هستند با:

$$\xi_{\Delta_i}(\theta) = E([\log X_i]^{\Psi} | X_i \geq k_i) = \frac{\theta \alpha \beta \int_{k_i}^{\infty} x^{-(\beta+1)} P_x C'(\theta P_x) [\log x]^{\Psi} dx}{C(\theta) - C(\theta P_{k_i})}$$

$$\xi_{\Psi_i}(\theta) = E(Z_i^{\Psi} X_i^{-\Psi\beta} | X_i \geq k_i) = \frac{\theta C'(\theta) - \alpha \theta k_i^{-\beta} P_{k_i} [C'(\theta P_{k_i}) + \theta P_{k_i} C''(\theta P_{k_i})] - \theta P_{k_i} C'(\theta P_{k_i})}{\alpha [C(\theta) - C(\theta P_{k_i})]}$$

همچنین

$$M_{\Psi_i}(\Theta) = E(Z_i \log X_i | X_i \geq k_i) = \frac{\theta \alpha \beta \int_{k_i}^{\infty} x^{-(\beta+1)} P_x \log x [C'(\theta P_x) + \theta P_x C''(\theta P_x)] dx}{C(\theta) - C(\theta P_{k_i})}$$

$$M_{j_i}^{(r)}(\Theta) = E(Z_i^{\Psi} X_i^{-r\beta} [\log X_i]^j | X_i \geq k_i) \\ = \frac{\alpha \beta \theta \int_{k_i}^{\infty} x^{-((r+1)\beta+1)} P_x [\log x]^j [C'(\theta P_x) + \Psi \theta P_x C''(\theta P_x) + \theta^{\Psi} P_x^{\Psi} C'''(\theta P_x)] dx}{C(\theta) - C(\theta P_{k_i})}$$

که $P_w = e^{-\alpha w^{-\beta}}$ است. بنابراین با توجه به معادلات (۲۸.۳) و (۲۹.۳) ماتریس اطلاع فیشر از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$I(\hat{\theta}; X_{obs}) = l_c(\hat{\theta}; X_{obs}) - l_m(\hat{\theta}; X_{obs})$$

۴.۳ زیر مدل‌های توزیع سری‌های توانی و ایبل وارون

در این قسمت برخی از زیر مدل‌های معروف توزیع سری‌های توانی و ایبل وارون را معرفی می‌کنیم. گشتاورها، تابع چندک و آنتروپی شانون را برای هر توزیع به دست می‌آوریم و همچنین نمودار تابع چگالی آن‌ها را رسم می‌کنیم.

۱.۴.۳ توزیع دوجمله‌ای و ایبل وارون

در توزیع دوجمله‌ای و ایبل وارون ($\theta > 0$) $C(\theta) = (\theta + 1)^m - 1$ است. بنابراین تابع توزیع از رابطه‌ی (۶.۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$F(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}} + 1)^m - 1}{(\theta + 1)^m - 1}, \quad x, \theta > 0 \quad (۳۲.۳)$$

m اعداد صحیح مثبت است. اگر از تابع توزیع مشتق بگیریم تابع چگالی به دست می‌آید:

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{m \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} (\theta e^{-\alpha x^{-\beta}} + 1)^{m-1}}{(\theta + 1)^m - 1}$$

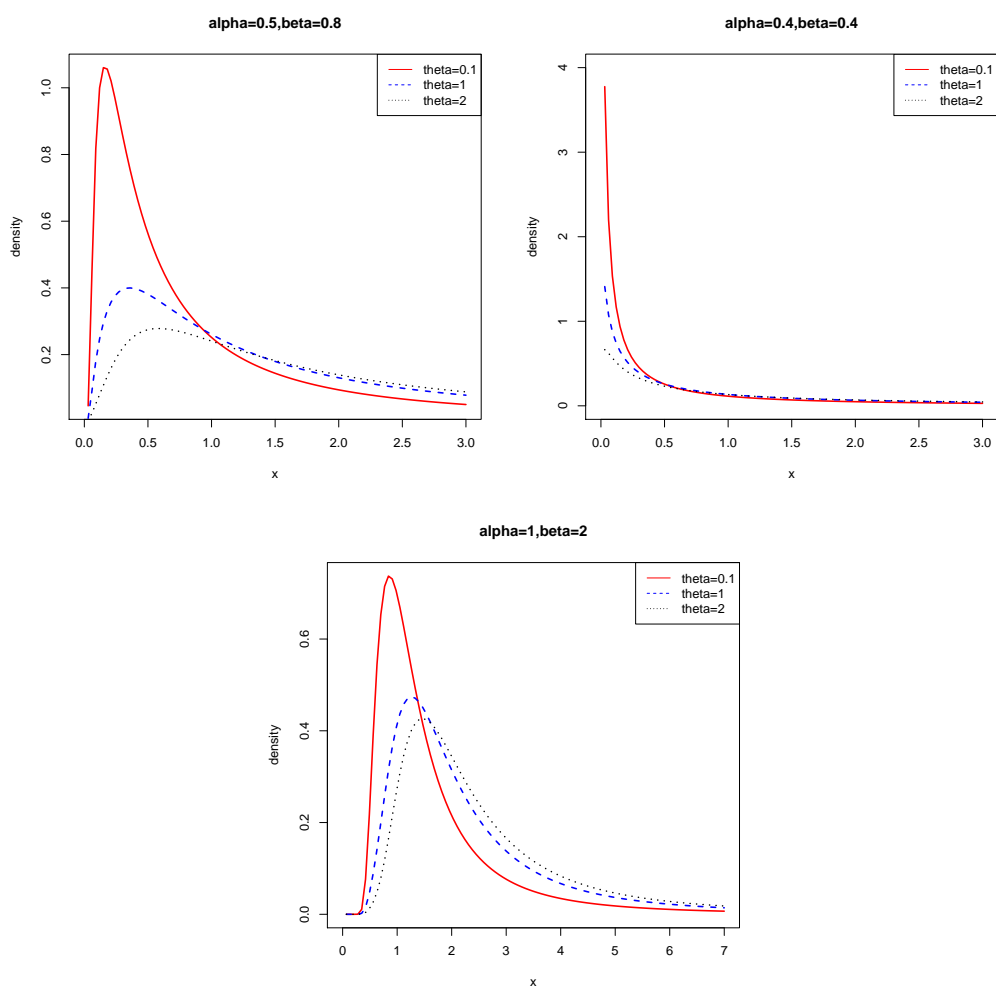
نمودار تابع چگالی توزیع دوجمله‌ای و ایبل وارون با مقادیر مختلف α, β و θ در شکل‌های (۳.۳) رسم شده است.

نرخ شکست دوجمله‌ای و ایبل وارون با توجه به (۱۱.۱) به صورت

$$h(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{m \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} (\theta e^{-\alpha x^{-\beta}} + 1)^{m-1}}{(\theta + 1)^m - (\theta e^{-\alpha x^{-\beta}} + 1)^m}, \quad x > 0$$

است. اگر $a_z = \binom{m}{z}$ باشد، آن‌گاه گشتاور دو جمله‌ای و ایبل وارون از رابطه (۱۲.۳) به صورت

$$E(X^k) = \frac{\alpha^{\frac{k}{\beta}} \Gamma(1 - \frac{k}{\beta})}{(\theta + 1)^m - 1} \sum_{z=1}^m \binom{m}{z} \theta^z z^{\frac{k}{\beta}}, \quad \beta > k$$



شکل ۳.۳: نمودار تابع چگالی توزیع دوجمله‌ای وایبل وارون برای $m = 5$ و به‌ازای مقادیر θ, α و β های مختلف

است.

چندک توزیع دوجمله‌ای وایبل وارون از رابطه‌ی (۱۴.۲) به دست می‌آید:

$$Q_{\xi} = \left[\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\theta}{(\xi(\theta+1)^m - \xi + 1)^{\frac{1}{m}} - 1} \right) \right]^{\frac{-1}{\beta}} \quad (۳۳.۳)$$

با جایگذاری مقدار $C(\theta) = (\theta+1)^m - 1$ در رابطه‌ی (۲۰.۳) آنتروپی شانون توزیع دوجمله‌ای وایبل وارون به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} H_{sH}(f) = & -\log(\alpha\beta\theta) + \frac{m(\beta+1)}{\beta((\theta+1)^m - 1)} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \theta^{j+1} \left\{ \frac{\gamma + \log(j+1) + \log\alpha}{j+1} \right\} \\ & + \log((\theta+1)^m - 1) + \frac{m}{(\theta+1)^m - 1} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{\theta^{j+1}}{(j+1)^2} \\ & - \frac{(\theta+1)^m - 1}{2} \left\{ \log((\theta+1)^m - 1) - \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

γ ثابت اویلر است.

۲.۴.۳ توزیع هندسی وایبل وارون

در توزیع هندسی وایبل وارون $\theta \in (0, 1)$ ، $C(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$ است، بنابراین، تابع چگالی آن به فرم

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{1-\theta}{(1-\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})^2} \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}}, \quad x > 0$$

می‌باشد. نمودار تابع چگالی توزیع هندسی وایبل وارون با مقادیر مختلف α, β و θ در شکل‌های (۴.۳) رسم شده است.

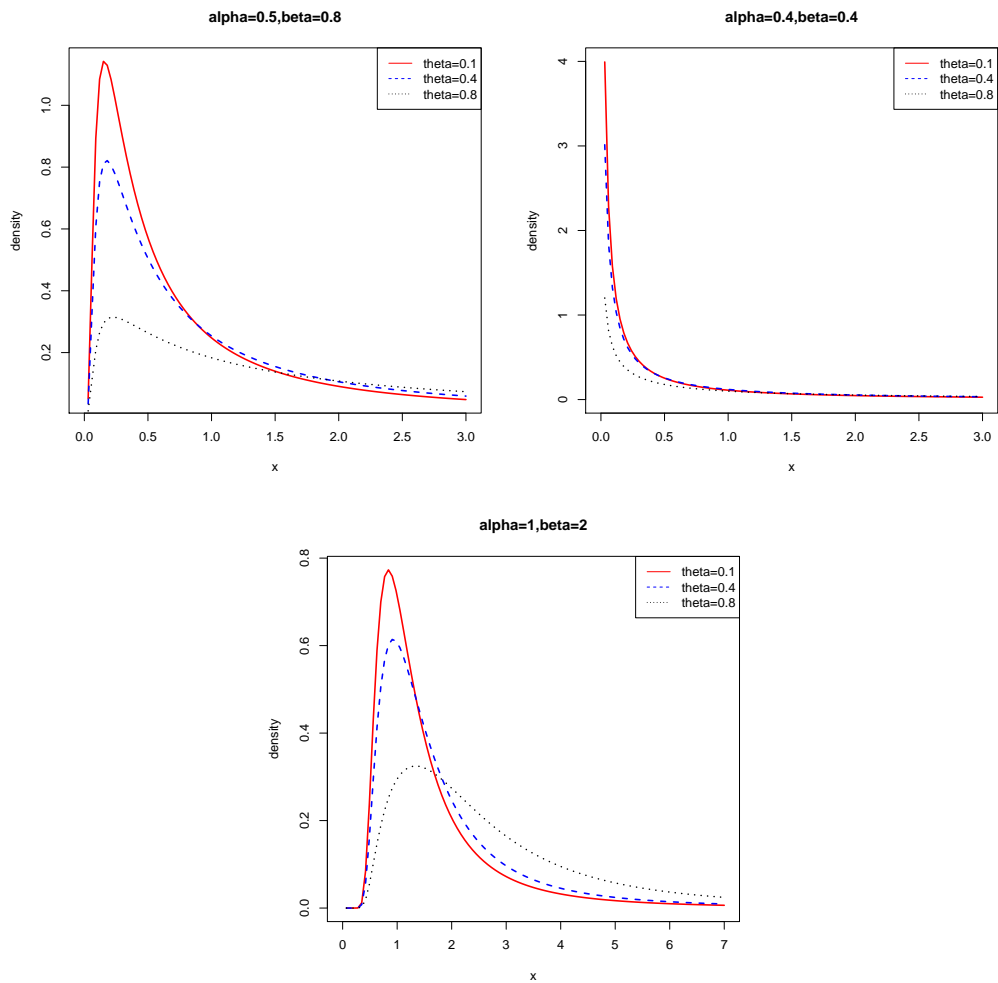
نرخ شکست و K امین گشتاور X از توزیع هندسی وایبل وارون به ترتیب از رابطه‌های (۱۱.۱) و (۱۲.۳) به صورت زیر هستند:

$$h(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{\alpha \beta (1-\theta) x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}}}{(1-\theta e^{-\alpha x^{-\beta}})(1-e^{-\alpha x^{-\beta}})}, \quad x > 0$$

$$E(X^k) = \frac{\alpha^{\frac{k}{\beta}} (1-\theta) \Gamma(1 - \frac{k}{\beta})}{\theta} \sum_{z=1}^{\infty} \theta^z z^{\frac{k}{\beta}}, \quad \beta > k$$

چندک و آنتروپی شانون توزیع هندسی وایبل وارون به ترتیب از رابطه‌های (۱۴.۲) و (۲۰.۳) به دست می‌آیند:

$$Q_{\xi} = \left[\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\xi\theta - \theta + 1}{\xi} \right) \right]^{\frac{-1}{\beta}} \quad (۳۴.۳)$$



شکل ۴.۳: تابع چگالی توزیع هندسی وایبل وارون به ازای مقادیر θ ، α و β های مختلف

$$H_{sh}(f) = -\log(\alpha\beta\theta) + \frac{(\beta+1)(1-\theta)}{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{j-1} \log(j\alpha e^{\gamma})$$

$$+ \log \frac{\theta}{1-\theta} + (1-\theta) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta^{j-1}}{j} - \frac{\theta}{2(1-\theta)} \left\{ \log \frac{\theta}{1-\theta} - \frac{1}{2} \right\}$$

۳.۴.۳ توزیع لگاریتم وایبل وارون

یکی دیگر از توزیع‌های خاص سری توانی، توزیع لگاریتم وایبل وارون است که با در نظر گرفتن

$$a_z = \frac{1}{z}, \quad C(\theta) = -\log(1-\theta), \quad 0 < \theta < 1$$

تابع چگالی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{\theta\alpha\beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}}}{(1-\theta e^{-\alpha x^{-\beta}}) \log(1-\theta)^{-1}}, \quad \theta < 1, x > 0$$

نمودار تابع چگالی توزیع لگاریتم وایبل وارون به ازای مقادیر مختلف α ، β و θ در شکل‌های (۵.۳) رسم شده است.

نرخ شکست و K امین گشتاور X از توزیع لگاریتم وایبل وارون به ترتیب از رابطه‌های (۱۱.۱) و (۱۲.۳) به دست می‌آیند:

$$h(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{\theta\alpha\beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}}}{(\theta e^{-\alpha x^{-\beta}} - 1) \log\left(\frac{1-\theta}{1-\theta e^{-\alpha x^{-\beta}}}\right)}, \quad \theta < 1, x > 0$$

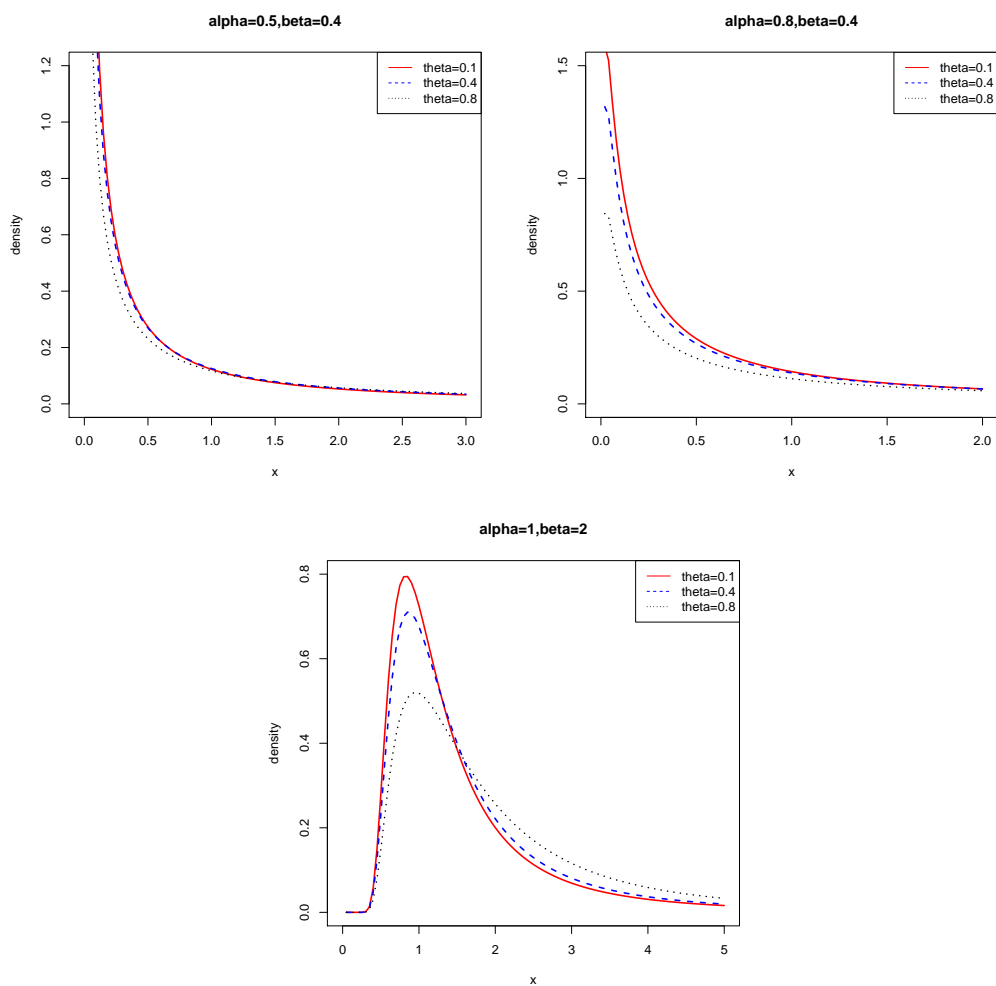
$$E(X^k) = \frac{\alpha^{\frac{k}{\beta}} \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right)}{\log(1-\theta)^{-1}} \sum_{z=1}^{\infty} \theta^z z^{\frac{k}{\beta}-1}, \quad \beta > k$$

چندک و آنتروپی شانون توزیع لگاریتم وایبل وارون به ترتیب از رابطه‌های (۱۴.۲) و (۲۰.۳) به صورت زیر هستند:

$$Q_{\epsilon} = \left[\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\theta}{1 - (1-\theta)\epsilon} \right) \right]^{\frac{-1}{\beta}}$$

$$H_{sh}(f) = -\log(\alpha\beta\theta) + \frac{(\beta+1)}{\beta \log(1-\theta)^{-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \theta^{j+1} \left\{ \frac{\gamma + \log(j+1) + \log \alpha}{j+1} \right\}$$

$$+ \log(1-\theta)^{-1} + \frac{1}{\log(1-\theta)^{-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^{j+1}}{(j+1)^2} - \frac{\log(1-\theta)}{2} \left\{ \log(1-\theta)^{-1} - \frac{1}{2} \right\}$$



شکل ۵.۳: نمودار تابع چگالی توزیع لگاریتم وایبل وارون به ازای مقادیر مختلف θ ، β و α

۴.۴.۳ توزیع پواسون وایبل وارون

توزیع پواسون وایبل وارون یکی دیگر از توزیع‌های خاص سری توانی است که $a_z = \frac{1}{z!}$ ، $C(\theta) = e^\theta - 1$ ($\theta > 0$) می‌باشد.

تابع توزیع پواسون وایبل وارون از رابطه‌ی (۶.۳) برابر است با:

$$F(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{e^{\theta e^{-\alpha x^{-\beta}}}}{e^\theta - 1} \quad \theta \in R, x > 0$$

با مشتق‌گیری از تابع توزیع، تابع چگالی به دست می‌آید:

$$f(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{e^{\theta e^{-\alpha x^{-\beta}}}}{e^\theta - 1} \theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}}, \quad \theta \in R, x > 0$$

نمودار تابع چگالی توزیع پواسون وایبل وارون با مقادیر مختلف α, β و θ در شکل‌های (۶.۳) رسم شده است.

نرخ شکست توزیع پواسون وایبل وارون از رابطه‌ی (۱۱.۱) به صورت

$$h(x; \alpha, \beta, \theta) = \frac{\theta \alpha \beta x^{-(\beta+1)} e^{-\alpha x^{-\beta}} e^{\theta e^{-\alpha x^{-\beta}}}}{e^\theta - e^{\theta e^{-\alpha x^{-\beta}}}}, \quad \theta \in R, x > 0$$

می‌باشد.

گزاره ۸

توزیع پواسون وایبل وارون از حد توزیع دوجمله‌ای وایبل وارون با تابع توزیع (۳۲.۳) به دست می‌آید، اگر:

$$m\theta_m \rightarrow \lambda > 0, \quad m \rightarrow \infty$$

برهان. باید نشان دهیم تابع توزیع دوجمله‌ای وایبل وارون همگرا به تابع توزیع پواسون وایبل وارون است.

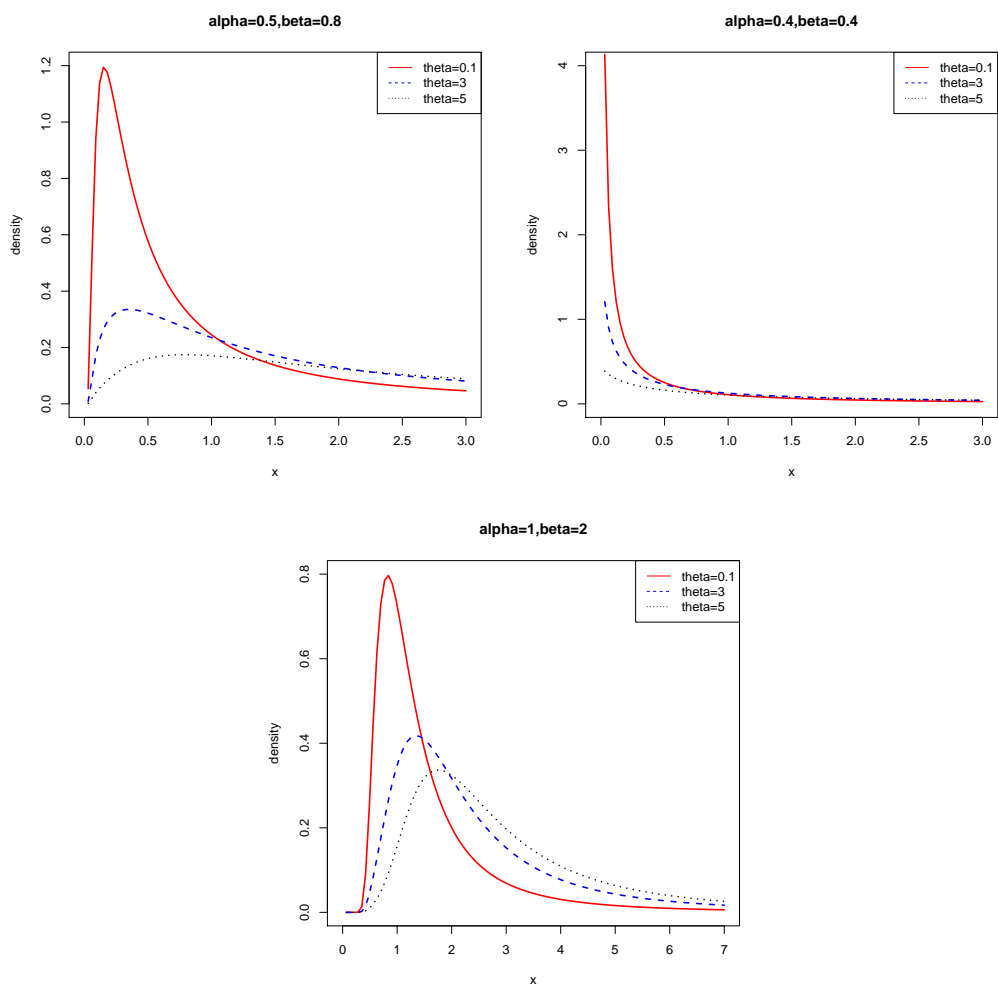
$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}, \quad -1 < z \leq 1 \quad (۳۵.۳)$$

فرض کنید اگر $m \rightarrow \infty$ آن‌گاه $m\theta_m \rightarrow \lambda > 0$. برای m بزرگ، از معادله‌ی (۳۵.۳) و (۳۲.۳) نتیجه می‌شود:

$$m \log(1 + \theta_m e^{-\alpha x^{-\beta}}) = m \theta_m e^{-\alpha x^{-\beta}} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} m \theta_m^k \frac{e^{-\alpha k x^{-\beta}}}{k}$$

بنابراین:

$$(۱) \quad \exists m_0 \in N : \forall m > m_0, |m(-1)^{k+1} \theta_m^k \left(\frac{e^{-\alpha k x^{-\beta}}}{k}\right)| < \lambda \left(\frac{e^{-\alpha k x^{-\beta}}}{k}\right)$$



شکل ۶.۳: نمودار تابع چگالی توزیع پواسون و ایبل وارون به ازای مقادیر مختلف θ ، α و β

$$(۲) \quad m(-1)^{k+1}\theta_m^k \frac{(e^{-\alpha kx^{-\beta}})}{k} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

$$(۳) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(e^{-\alpha kx^{-\beta}})}{k} < \infty$$

طبق قضیه همگرایی:

$$\sum_{k=2}^{\infty} m(-1)^{k+1}\theta_m^k \left(\frac{e^{-\alpha kx^{-\beta}}}{k}\right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

بنابراین

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \log(1 + \theta_m e^{-\alpha x^{-\beta}}) = \lambda e^{-\alpha x^{-\beta}}$$

به این معنی که:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \theta_m e^{-\alpha x^{-\beta}})^m = \exp \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} m \log(1 + \theta_m e^{-\alpha x^{-\beta}}) \right\} = e^{\lambda e^{-\alpha x^{-\beta}}}$$

می‌دانیم:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \theta_m)^m = e^{\lambda}$$

بنابراین:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1 + \theta_m e^{-\alpha x^{-\beta}})^m - 1}{(\theta_m + 1)^m - 1} = \frac{e^{\lambda e^{-\alpha x^{-\beta}}} - 1}{e^{\lambda} - 1} \quad (۳۶.۳)$$

اکنون با مقایسه‌ی رابطه‌ی (۳۶.۳) و (۳۲.۳) به نتیجه می‌رسیم.

□

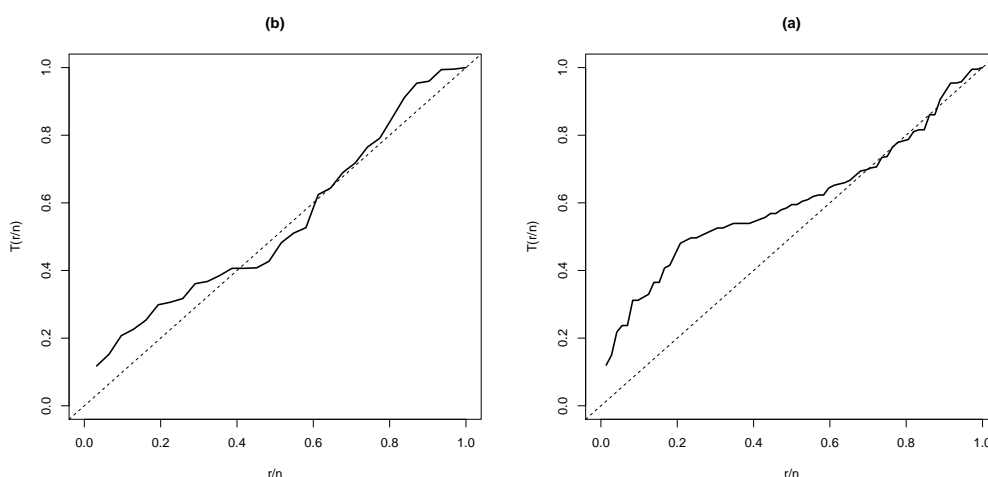
K امین گشتاور X و چندک توزیع پواسون وایبل وارون به ترتیب از رابطه‌های (۱۲.۳) و (۱۴.۲) به دست می‌آیند:

$$E(X^k) = \frac{\alpha^{\frac{k}{\beta}} \Gamma(1 - \frac{k}{\beta})}{e^{\theta} - 1} \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\theta^z z^{\frac{k}{\beta}}}{z!}, \quad \beta > k$$

$$Q_{\xi} = \left[\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\theta}{\log(\xi(e^{\theta} - 1) + 1)} \right) \right]^{\frac{-1}{\beta}}$$

با جایگذاری مقدار $C(\theta) = e^{\theta} - 1$ در رابطه‌ی (۲۰.۳) آنتروپی شانون توزیع پواسون وایبل وارون برابر است با:

$$H_{sh}(f) = -\log(\alpha\beta\theta) + \frac{\beta + 1}{\beta(e^{\theta} - 1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^{j+1}}{(j+1)!} \{ \gamma + \log(j+1) + \log\alpha \} \\ + \log(e^{\theta} - 1) + \frac{1}{e^{\theta} - 1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^{j+1}}{(j+1)^2 j!} - \frac{e^{\theta} - 1}{2} \left\{ \log(e^{\theta} - 1) - \frac{1}{2} \right\}$$



شکل ۷.۳: نمودار TTT - (a) مجموعه داده اول؛ (b) مجموعه داده دوم

۵.۳ کاربرد توزیع سری‌های توانی وایبل وارون

برای نشان دادن کاربرد مدل پیشنهادی، دو مجموعه داده در نظر گرفته شده است. که در قالب یک مثال کاربرد آن را بیان می‌کنیم. تمام محاسبات ارائه شده در این بخش به‌وسیله نرم‌افزار آماری R انجام شده است.

مثال ۱.۵.۳. اولین مجموعه‌ی داده نشان‌دهنده زمان بقا خوکچه‌های دریایی تزریق شده با دوزهای مختلف از باسیلی توبرکل^۵ است. این مجموعه داده‌ها توسط چندین نویسنده در نظر گرفته شده است. برای مثال، کوندو و هولادر [۳۰] توزیع وایبل وارون را برای این مجموعه داده‌ها در نظر گرفتند. در حالی که کردیرو و همکاران [۱۵] توزیع نیمه نرمال تعمیم یافته کوماراس وامی (Kw-GHN) را برازش دادند و با مدل‌های نیمه نرمال تعمیم یافته (GHN) و نیمه نرمال (HN) مقایسه کردند. مجموعه داده‌های دوم برگرفته از دانشگاه اپن^۶ [۶۲] مربوط به قیمت ۳۱ اسباب‌بازی چوبی کودکان در فروش یک فروشگاه صنایع دستی در آوریل ۱۹۹۱ است. داده‌ها عبارتند از:

۴/۲, ۱/۱۲, ۱/۳۹, ۲, ۳/۹۹, ۲/۱۵, ۱/۷۴, ۵/۸۱, ۱/۷, ۲/۸۵, ۰/۵, ۰/۹۹, ۱۱/۵, ۵/۱۲, ۰/۹, ۱/۹۹, ۶/۲۴,
۲/۶, ۳, ۱۲/۲, ۷/۳۶, ۴/۷۵, ۱۱/۵۹, ۸/۶۹, ۹/۸, ۱/۸۵, ۱/۹۹, ۱/۳۵, ۱۰, ۰/۶۵, ۱/۴۵.

نمودار زمان کل یا نمودار TTT [۲] نموداری مفید برای شکل تابع نرخ شکست می‌باشد که می‌تواند در انتخاب مدل کمک کند. شکل (۷.۳) نمودار TTT برای این دو مجموعه داده‌ها را نشان می‌دهد. نمودار TTT برای مجموعه داده اول نشان می‌دهد که تابع نرخ شکست گودالی شکل است اما نمودار TTT برای مجموعه داده دوم علاوه بر گودالی شکل بودن تابع نرخ

^۵tubercle bacilli

^۶Open

شکست، به صعودی و نزولی بودن توزیع سری‌های توانی وایبل وارون اشاره می‌کند. بنابراین با توجه به این نمودارها متناسب بودن برازش توزیع جدید را نشان می‌دهد که مدل جدید می‌تواند جایگزین تابع نرخ شکست گودالی شکل باشد. این مجموعه داده‌ها را با توزیع‌های پواسون وایبل وارون، هندسی وایبل وارون و لگاریتم وایبل وارون برازش، و با مدل‌های وایبل وارون، وایبل، ناداراجاه حقیقی (NH) [۳۷]، وایبل وارون تعمیم‌یافته (GIW)، ناداراجاه حقیقی نمایی [۳۲]، دوجمله‌ای نمایی (EEB) [۸] و پواسون وایبل نمایی (EWP) [۴۰] مقایسه کرده‌ایم. تابع چگالی آن‌ها به ترتیب عبارتند از:

$$f_1(t; \alpha, \beta) = \alpha \beta t^{-(\beta+1)} e^{-\alpha t^{-\beta}}, \quad t, \alpha, \beta > 0$$

$$f_2(t; \alpha, \beta) = \alpha \beta t^{(\beta-1)} e^{-\alpha t^\beta}, \quad t, \alpha, \beta > 0$$

$$f_3(t; \alpha, \beta) = \alpha \beta (\lambda + \beta t)^{\alpha-1} \exp\{1 - (\lambda + \beta t)^\alpha\}, \quad t, \alpha, \beta > 0$$

$$f_4(t; \alpha, \beta, \lambda) = \lambda \beta \alpha^\beta t^{-(\beta+1)} e^{-\lambda (\frac{\alpha}{t})^\beta}, \quad t, \alpha, \beta, \lambda > 0$$

$$f_5(t; \alpha, \beta, \lambda) = \alpha \beta \lambda \frac{(\lambda + \beta t)^{\alpha-1} \exp\{1 - (\lambda + \beta t)^\alpha\}}{[1 - \exp\{1 - (\lambda + \beta t)^\alpha\}]^{1-\beta}}, \quad t, \alpha, \beta, \lambda > 0$$

$$f_6(t; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{n \alpha \beta \lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{\alpha-1} (1 - \beta (1 - e^{-\lambda t})^\alpha)^{n-1}}{1 - (1 - \beta)^n}, \quad t, \alpha, \lambda > 0, \beta \in (0, 1)$$

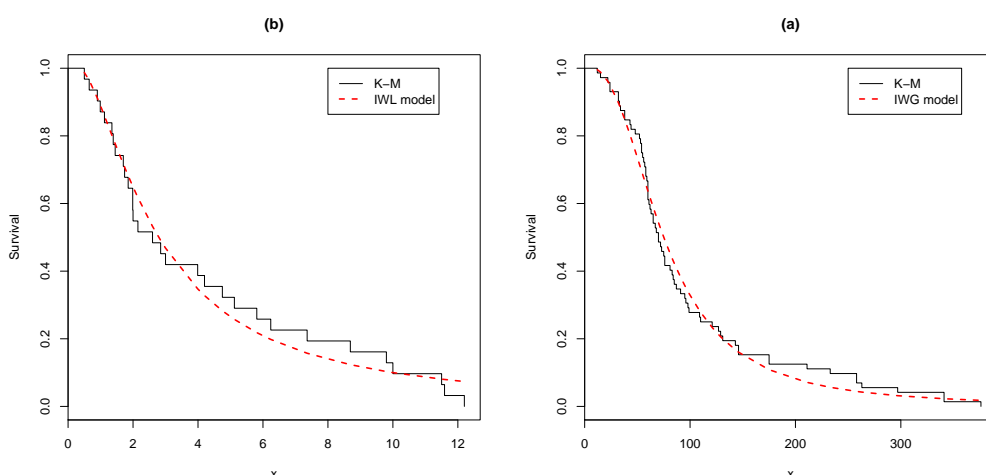
$$f_7(t; \alpha, \beta, \lambda, \theta) = \frac{\alpha \theta \lambda \beta^\lambda}{e^{\theta-1}} t^{\lambda-1} e^{-(\beta t)^\lambda} (1 - e^{-(\beta t)^\lambda})^{\alpha-1} e^{\theta(1 - e^{-(\beta t)^\lambda})^\alpha}, \quad t, \alpha, \beta, \lambda, \theta > 0$$

جدول زیر آزمون نیکویی برازش این که کدام یک از توزیع‌ها برای این مجموعه داده‌ها برازش بهتری دارند، نشان می‌دهد. همچنین در این جدول، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، لگاریتم ماکسیمم درست‌نمایی \hat{l} ، معیار اطلاع آکائیک (AIC)، معیار اطلاع بیزی (BIC) و همچنین دو آماره کرامر فن میسز (W^*) و آندرسون دارلینگ (A^*) را به دست آورده‌ایم. برای جزئیات بیشتر به [۱۴] مراجعه شود.

در مجموعه داده‌های دوم مدل لگاریتم وایبل وارون، کمترین مقدار را از لحاظ معیار اطلاع آکائیک، معیار اطلاع بیزی و دو آماره (A^*) و (W^*) دارد، بنابراین برازش بهتری نسبت به بقیه‌ی مدل‌ها دارد. از طرفی در مجموعه داده‌های اول توزیع پواسون وایبل نمایی طبق دو آماره‌ی (A^*) و (W^*) برازش بهتری دارد. اما با مقایسه‌ی معیار اطلاع آکائیک و بیزی توزیع هندسی وایبل وارون بهترین برازش در میان مدل‌هاست. این بدان معناست که هرکدام از این توزیع‌ها (EWP و IWG) می‌توانند به عنوان بهترین توزیع برای زمان بقا انتخاب شوند. توزیع هندسی وایبل وارون نسبت به توزیع پواسون وایبل نمایی بهترین انتخاب است زیرا این مدل سه پارامتر دارد ولی توزیع پواسون وایبل نمایی چهار پارامتر دارد. به‌طور خلاصه توزیع جدید سه پارامتری سری‌های توانی وایبل وارون می‌تواند جایگزین سایر مدل‌های موجود برای مدل سازی داده‌های مثبت باشند. شکل (۸.۳) برآورد کاپلان-مایر (K-M) و بهترین تابع بقا برآورد شده برای دو مجموعه داده‌ها را نشان می‌دهد. واضح است که متناسب با این داده‌ها، توزیع جدید یعنی مدل سری‌های توانی وایبل وارون، نزدیک‌تر به بقای تجربی هستند.

جدول ۱.۳: برآورد پارامترها

A*	W*	BIC	AIC	τ	θ	λ	β	α	distributions
۱۴۱.۵۷	۲۱.۹۰۹	۷۹۹.۸۵	۷۹۵.۳۰	-۳۹۵.۶۴	-	-	۱.۴۱۴۸	۲۸۳.۸۴	داده‌های اول (n=۷۲) IW
۰.۷۸۱۵	۰.۱۴۳۵	۷۹۷.۳۰	۷۸۸.۲۰	-۳۹۰.۱۰	۴.۳۳۹۹	۰.۳۰۳۱	۰.۷۳۶۱	۲۸.۴۷۷	Kw-GHN
۳.۱۹۶۸	۰.۵۸۰۱	۸۱۲.۰۰	۸۰۷.۵۰	-۴۰۱.۸۰	۱۲۹.۲۴	۱.۰۱۶۳	۱	۱	GHN
۳.۱۵۵۷	۰.۵۷۲۶	۸۰۷.۸۰	۸۰۵.۵۰	-۴۰۱.۸۰	۱۲۸.۲۷	۱	۱	۱	HN
۲.۳۹۳۸	۰.۴۳۴۸	۸۰۲.۸۵	۷۹۸.۳۰	-۳۹۷.۱۵	-	-	۱.۳۹۳۲	۰.۰۰۱۴	Weibull
۲.۶۲۹۳	۰.۴۷۷۶	۸۱۱.۲۹	۸۰۶.۷۳	-۴۰۱.۳۷	-	-	۰.۰۰۴۰	۱.۹۵۲۸	NH
۱۴۱.۵۷	۲۱.۹۰۹	۸۰۴.۱۳	۷۹۷.۲۹	-۳۹۵.۶۵	-	۰.۸۴۵۶	۱.۴۱۴۸	۶۱.۰۰۸	GIW
۰.۷۶۳۸	۰.۱۳۹۶	۷۹۳.۱۴	۷۸۶.۳۱	-۳۹۰.۱۵	-	۰.۲۱۹۴	۹.۸۶۵۵	۰.۴۵۵۲	ENH
۱.۴۹۲۶	۰.۲۷۵۳	۷۹۴.۰۸	۷۸۷.۲۵	-۳۹۰.۶۲	-	۰.۰۱۲۰	۰.۰۳۲۶	۲.۷۳۳۶	EEB
۰.۶۲۲۸	۰.۱۱۱۶	۷۹۶.۲۶	۷۸۷.۱۵	-۳۸۹.۵۸	۴.۰۸۴۰	۰.۲۴۹۵	۴۴.۶۰۷	۳۵۶.۱۶	EWP
۰.۷۳۱۵	۰.۱۳۲۵	۷۹۳.۵۳	۷۸۶.۵۳	-۳۹۰.۲۶	-۱۳.۸۹۰	-	۰.۵۵۴۴	۳۳.۰۰۳	IWP
۰.۶۳۴۲	۰.۱۱۳۱	۷۹۲.۲۵	۷۸۵.۴۲	-۳۸۹.۷۱	۰.۹۸۳۸	-	۲.۴۸۱۰	۷۲۳.۵۴	IWG
۱.۱۴۴۷	۰.۱۹۵۸	۸۰۲.۴۴	۷۹۵.۶۱	-۳۹۴.۸۱	۰.۹۰۰۲	-	۱.۸۵۵۸	۷۱۹.۷۸	IWL
۶۲.۰۹۶	۱۰.۵۷۳	۱۵۶.۵۴	۱۵۳.۶۷	-۷۴.۸۳۴	-	-	۱.۲۱۴۸	۲.۱۵۳۰	داده‌های دوم (n=۳۱) IW
۰.۷۶۷۲	۰.۱۲۷۴	۱۵۶.۴۵	۱۵۳.۵۸	-۷۴.۷۸	-	-	۱.۲۲۸۰	۰.۱۵۵۳	Weibull
۰.۸۵۰۸	۰.۱۴۱۵	۱۵۷.۴۶	۱۵۴.۵۹	-۷۵.۲۹۵	-	-	۰.۰۹۶۳	۱.۸۸۱۱	NH
۶۲.۰۹۶	۱۰.۵۷۳	۱۵۹.۹۷	۱۵۵.۶۷	-۷۴.۸۳۴	-	۱.۲۷۰۵	۱.۲۱۴۸	۱.۵۴۳۸	GIW
۰.۳۷۴۴	۰.۰۵۷۷	۱۵۷.۳۸	۱۵۳.۰۷	-۷۳.۵۳۷	-	۶.۸۴۲۴	۶.۴۱۴۶	۰.۳۹۲۵	ENH
۰.۵۸۰۰	۰.۰۹۵۶	۱۵۸.۴۸	۱۵۴.۱۸	-۷۴.۰۸۹	-	۰.۲۶۴۰	۰.۰۳۶۱	۱.۷۳۱۵	EEB
۰.۳۸۰۸	۰.۰۵۸۸	۱۶۰.۹۳	۱۵۵.۲۰	-۷۳.۵۹۹	۰.۰۰۶۹	۰.۳۷۵۵	۹.۱۲۲۵	۲۰.۴۷۵	EWP
۰.۴۴۴۶	۰.۰۷۱۴	۱۵۷.۷۹	۱۵۳.۴۹	-۷۳.۷۴۵	-۳۴.۴۹۲	-	۰.۳۳۲۰	۵.۶۲۸۵	IWP
۰.۳۶۶۰	۰.۰۵۲۷	۱۵۸.۳۶	۱۵۴.۰۵	-۷۴.۰۲۷	۰.۸۴۴۸	-	۱.۶۷۲۶	۰.۸۰۴۴	IWG
۰.۲۹۴۶	۰.۰۳۸۹	۱۵۵.۰۹	۱۵۰.۷۹	-۷۲.۳۹۶	۰.۹۹۹۹	-	۳.۵۸۰۸	۰.۲۴۵۰	IWL



شکل ۸.۳: بقای تجربی و برآورد تابع بقا - (a) مجموعه داده اول؛ (b) مجموعه داده دوم

نتیجه گیری

در این پایان نامه به بررسی توزیع سری های توانی وایبل و ارون با داده های سانسور شده پرداختیم که نرخ شکست افزایشی، کاهشی و وان شکل را در بر دارد. همان طور که اشاره شد کاربرد زیادی در قابلیت اطمینان و تحلیل بقا دارد.

در ابتدا به معرفی توزیع وایبل، توزیع وایبل و ارون، توزیع سری توانی، توزیع سری توانی وایبل و توزیع سری توانی وایبل گسترش یافته پرداختیم و تابع چگالی، تابع توزیع و گشتاورهای آنها را به دست آوردیم. در فصل سوم با شرح توزیع سری های توانی وایبل و ارون براساس داده های سانسور شده، تابع چگالی، تابع توزیع، میانگین طول عم باقیمانده، گشتاور، آنتروپی شانون و برآورد پارامترها را براساس الگوریتم EM محاسبه کردیم. سپس زیر مدل های توزیع سری توانی وایبل و ارون را بیان و تابع چگالی، تابع توزیع، گشتاور و آنتروپی شانون آنها را به دست آوردیم، و در پایان، به مقایسه ای این توزیع و زیرمدل هایش روی یک مجموعه داده واقعی بررسی کردیم و نشان دادیم که توزیع سری های توانی وایبل و ارون جایگزین نرخ شکست وانی شکل در مجموعه داده اول است و همچنین توزیع سری های توانی وایبل و ارون و زیر مدل هایش دارای برازش بهتری نسبت به بقیه مدل ها می باشند.

پیشنهادات آینده

از مشتقات دیگر توزیع وایبل و ارون می توان به جای توزیع دلخواه در توزیع سری های توانی استفاده نمود. بررسی های انجام شده در این پایان نامه را علاوه بر داده های سانسور راست می توان، بر روی انواع سانسورهای دیگر انجام داد.

پیوست آ

تعاریف

در این پیوست برخی تعاریف اولیه‌ی آماری را بیان می‌کنیم:

۱.۱ تابع درست‌نمایی

نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n را از متغیر تصادفی X با چگالی $f(x; \theta)$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مقدار واقعی پارامتر θ به مجموعه A به نام فضای پارامتر، تعلق داشته باشد. یافته‌های این نمونه تصادفی را با اعداد x_1, \dots, x_n نشان می‌دهیم می‌دانیم که X_i ها هم‌توزیع با X و مستقل هستند. بنابراین چگالی هر X_i ها برابر است با $f(x; \theta)$ و چگالی توام X_i برابر است با حاصلضرب چگالی آن‌ها. این چگالی توام را با فرض این که x_i ها ثابت و θ متغیر باشد با $L(\theta)$ نشان می‌دهند و آن را تابع درست‌نمایی برای یافتن نمونه‌های تصادفی می‌نامند، داریم:

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (1.1)$$

در حالت گسسته $L(\theta)$ دقیقاً برابر است با احتمال مشاهده‌ی یافته‌های بالا بر حسب پارامتر مجهول θ ، چه در حالت گسسته و چه در حالت پیوسته، هر چقدر اندازه $L(\theta)$ بیشتر باشد شانس مشاهده x_1, \dots, x_n از چگالی $f(x; \theta)$ بیشتر است. از این رو مقداری از θ در A را به عنوان برآورد θ بر می‌گزینیم که $L(\theta)$ را ماکسیمم کند.

۱.۱.آ برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم

اگر $T(X)$ برآوردگری برای θ باشد، به طوری که

$$P_{\theta}(T(X) \in \theta) = 1, \quad \forall \theta \in \Theta \quad -۱$$

$$L(T(X)) \geq L(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta \quad -۲$$

آن‌گاه $T(X)$ به عنوان یک برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی θ تعریف می‌شود. معمولاً برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی θ را با $\hat{\theta}$ نمایش می‌دهند و لزومی ندارد که منحصر به فرد باشد. هم‌چنین داریم:

$$L(\hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

یا اگر تعریف کنیم $l(\theta) = \ln L(\theta)$ آن‌گاه

$$l(\hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} l(\theta) \quad (۲.آ)$$

که در آن $l(\theta) = \ln L(\theta)$ لگ تابع درست‌نمایی نامیده می‌شود. بنابراین برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم MLE پارامتر θ از حل معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

در اغلب موارد به ویژه در آزمون‌های طول عمر، برآورد $\hat{\theta}$ به صورت تحلیلی قابل حصول نیست و باید آن‌ها را با استفاده از روش‌های عددی محاسبه کرد. بسیاری از نرم افزارهای موجود توانایی حل معادلات درست‌نمایی به روش عددی را دارند.

۲.آ خواص جانبی برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم

فرض کنید X_1, \dots, X_k ، نمونه تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(x; \Theta)$ باشد، به طوری که $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ بردار k بعدی از پارامترها باشد، در این صورت تحت شرایط نظم خواص جانبی زیر برقرار است:

$$\sqrt{n}(\hat{\Theta}_{mle} - \Theta) \xrightarrow{D} N(0, I(\Theta|x_i)^{-1})$$

به عبارتی دیگر،

$$\hat{\Theta}_{mle} \sim N\left(\Theta, \frac{1}{n} I(\Theta|x_i)^{-1}\right) \equiv N(\Theta, I(\Theta|x_i)^{-1})$$

۱.۲.آ شرایط نظم

فرض کنید X یک متغیر تصادفی از خانواده توزیع‌های احتمال $F = \{f_\theta, \theta \in \Theta\}$ است. در این صورت با برقراری شرایط زیر می‌گوییم شرایط نظم برقرار است.

(۱) $\theta \subset R$ یک فاصله باز از اعداد حقیقی باشد و تکیه‌گاه X ، $S_x = \{x; f_\theta(x) > 0\}$ به θ بستگی نداشته باشد.

(۲) $\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x)$ به ازای تمام مقادیر $\theta \in \Theta$ موجود و متناهی باشد.

(۳) هرگاه $h(X)$ یک تابع حقیقی از x باشد به طوری که $E_\theta |h(X)| < \infty$ آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E|h(X)| = \frac{\partial}{\partial \theta} \int h(X) f_\theta(x) dx = \int h(X) \frac{\partial}{\partial \theta} f_\theta(x) dx$$

به عبارتی بتوان جای عملگرهای مشتق و انتگرال را عوض کرد.

(۴) برای $\forall \theta \in \Theta$

$$E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x) \right]^2 > \infty.$$

نتایج زیر با توجه به شرایط نظم حاصل می‌شود:

(الف) برای $\forall \theta \in \Theta$

$$E_\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x) \right] = 0.$$

(ب) به ازای یک برآوردگر دلخواه $T(X)$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta [T(X)] = E_\theta \left[T(X) \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x) \right] = \text{cov}_\theta(T(X), \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x)).$$

[۵۲]

۳.آ بردار امتیاز

فرض می‌کنیم X_1, \dots, X_n نمونه تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی مشترک $f(x, \theta)$ باشد، به طوری که θ بردار $(K \times 1)$ بعدی پارامترها است. با در نظر گرفتن تابع درست‌نمایی به شکل

$$L(\theta | x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

بردار امتیاز که عبارت است از مشتق تابع لگاریتم درست‌نمایی، به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(\Theta|X) = \left(\frac{\partial \log L(\Theta|X)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \log L(\Theta|X)}{\partial \theta_k} \right)$$

طبق تعریف برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم، $S(\hat{\Theta}_{MLE}|X) = 0$ در یک نمونه تصادفی، امتیاز نمونه به صورت مجموع امتیازهای همه مشاهدات محاسبه می‌شود، یعنی:

$$S(\Theta|X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(x_i; \Theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n S(\Theta|x_i)$$

آ.۳.۱ ماتریس اطلاع فیشر

اطلاع فیشر در واقع بیان‌کننده اطلاعاتی است که درباره پارامتر θ در بر دارد. با فرض این‌که $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ بردار K بعدی پارامترها است و اگر مشتق مرتبه دوم تابع $\log f(X, \theta)$ وجود داشته باشد، آنگاه اطلاع فیشر را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$I(\Theta|X) = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \log L(\Theta|x)}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \log L(\Theta|x)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \log L(\Theta|x)}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \log L(\Theta|x)}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \log L(\Theta|x)}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \log L(\Theta|x)}{\partial \theta_k^2} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$I_X(\Theta) = -E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X, \Theta) \right)$$

آ.۴ کاربرد آماره‌های مرتب

کاربرد آماره‌های مرتب را می‌توان در قسمت‌های مختلف آماری از جمله آمار توصیفی و استنباطی مشاهده نمود. در آمار توصیفی یکی از مهم‌ترین شاخص‌های تمرکز در مجموعه داده‌های کمی، استفاده از میانگین است. میانگین در صورت وجود یک یا چند داده پرت در مجموعه داده‌ها حساسیت بالایی نسبت به نقاط پرت و تغییرات الگو نشان می‌دهد بنابراین میانه یا میانگین‌های اصلاح شده می‌توانند معیارهای مناسبی برای تعیین تمرکز باشند زیرا نسبت به تغییرات الگو از حساسیت کمتری برخوردار هستند که در محاسبه‌ی آن‌ها آماره‌های مرتب نقش عمده‌ای را ایفا می‌کنند. برای جزئیات بیشتر در مورد کاربرد و خواص آماره‌های ترتیبی می‌توان به دیوید و ناگارا (۲۰۱۳) یا آرنولد و همکاران (۲۰۰۸) رجوع کرد. در آمار استنباطی می‌توان به برخی از کاربردهای آماره مرتب اشاره کرد. در فهرست زیر به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- ۱- برای محاسبه تابع توزیع تجربی و همچنین در آزمون های نیکویی برازش به منظور بررسی تفاوت توزیع تجربی و تابع توزیع فرضی از آماره های مرتب استفاده می کنیم.
- ۲- در بحث مشخصه سازی توزیع ها از آماره های مرتب استفاده می شود.
- ۳- گاهی اوقات به خصوص در استنباط‌های ناپارامتری، آماره‌های مرتب به‌عنوان آماره‌های بسنده معرفی می‌شوند و برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس، فواصل اطمینان و پرتوان ترین آزمون برای پارامترهای مجهول جامعه را فراهم می کنند.
- ۴- در آزمایشات طول عمر، اغلب به دلیل زمان، هزینه و... با داده‌های سانسور شده مواجهه می‌شویم در این مواقع آماره‌های مرتب نقش مهمی در استفاده از سانسورها دارند.
- ۵- در موضوعات مربوط به کنترل کیفیت، برای بررسی در کنترل بودن تولید، اغلب از نمودار میانگین یا نمودار میانه و دامنه تغییرات آن‌ها استفاده می‌شود، که برای محاسبه میانه و دامنه تغییرات ملزم به استفاده از آماره های مرتب هستیم.

پیوست ب

کدهای برنامه نویسی

کدهای برنامه نویسی مربوط به فصل دوم
تابع چگالی توزیع وایبل

```
alpha=0.5
f<- function(x,beta){
beta/alpha^(beta) *x^(beta-1) * exp(-(x/alpha)^beta)
}
curve(f(x,0.5),xlim=c(0,3),ylim=c(0,4),xlab="x",ylab="f(x;0.5,beta)",
      lwd=2 , lty=1, col="red")
curve(f(x,1),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,2),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="black")
curve(f(x,4),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="green")
legend("topright", "(x,y)",legend=c("alpha=0.5","alpha=1","alpha=2","alpha=4"),lty=1:4,
      col=c("red", "blue","black","green"))
```

تابع چگالی توزیع وایبل و ارون

```
rm(list=ls())
```

```
alpha=0.5
f<- function(x,beta){
  beta/alpha^(beta) *x^(beta-1) * exp(-(x/alpha)^beta)
}
curve(f(x,0.5),xlim=c(0,3),ylim=c(0,4),xlab="x",ylab="f(x;0.5,beta)",
      lwd=2 , lty=1, col="red")
curve(f(x,1),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,2),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="black")
curve(f(x,4),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="green")
legend("topright","(x,y)",legend=c("alpha=0.5","alpha=1","alpha=2","alpha=4"),
      lty=1:4,col=c("red", "blue","black","green"))
```

```
rm(list=ls())
alpha=1
f<- function(x,beta){
  beta/alpha^(beta) *x^(-(beta+1)) * exp(-(alpha/x)^beta)
}
curve(f(x,0.5),xlim=c(0,3),ylim=c(0,4),xlab="x",ylab="f(x;1,beta)",
      lwd=2 , lty=1, col="red")
curve(f(x,1),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,2),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="black")
curve(f(x,4),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="green")
legend("topright","(x,y)",legend=c("alpha=0.5","alpha=1","alpha=2","alpha=4"),
      lty=1:4,col=c("red", "blue","black","green"))
```

فصل سوم تابع چگالی توزیع سری‌های توانی وایبل وارون

```
f<- function(x,beta){
  #0.5*beta*(x^-(beta+1))*exp((-x)^(-beta))*(1+20*exp((-19)*x^(-beta)))
  0.5*beta*x^(-beta-1)*exp(-x^(-beta))*(1+20*exp(-19*x^(-beta)))
}
curve(f(x,0.5),xlim=c(0,10),ylim=c(0,.6),xlab="x",ylab="density",
      lwd=2,lty=1, col="red")
```

```

curve(f(x,1),add=TRUE,xlim=c(0,10),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,2),add=TRUE,xlim=c(0,10),lwd=2,lty=3,col="black")
curve(f(x,3),add=TRUE,xlim=c(0,10),lwd=2,lty=4,col="green")
legend("topright","(x,y)",legend=c("beta=0.5","beta=1","beta=2","beta=3"),
      lty=1:4,col=c("red","blue","black","green"))
title(main="Density")

```

نرخ شکست توزیع سری‌های توانی وایبل وارون

```

beta = 3
dens <- function(t, beta=3){
  0.5*beta*t^(-beta-1)*exp(-t^(-beta))*(1+20*exp(-19*t^(-beta)))
}
fbar <- function(t, beta=3){
  fb <- 1-integrate(dens, 0.001 , t)$val
  return(fb)
}
haz <- function(t,beta=3){
  dens(t,beta)/fbar(t,beta)
}
curve(haz(x,beta=3),0,10,ylim=c(0,.7),col="orange",ylab="Hazard")
z = seq(0.01,10,length.out=100)
z2 = haz(z,beta=2)
z3 = haz(z,beta=1)
z4=haz(z,beta=0.5)
lines(z,z3,col="blue")
lines(z,z2,col="green")
lines(z,z4,col="red")
legend("topright","(x,y)",legend=c("beta=0.5","beta=1","beta=2","beta=3"),lty=1:4,
col=c("red","blue","green","orange"))
title(main="Hazard function")

```

کدهای مربوط به فصل سوم

```

library(DEoptim)
library(splines)

```

```

library(survival)
rm(list=ls())
t=c(12, 15, 22, 24, 24, 32, 32, 33, 34, 38, 38, 43, 44, 48, 52, 53, 54,
,54,55, 56,57, 58, 58,59, 60, 60, 60, 60, 61, 62, 63 , 65, 65, 67,68,
 70, 70, 72, 73, 75, 76, 76, 81, 83, 84, 85, 87, 91, 95, 96, 98, 99,
 109, 110, 121, 127, 129, 131,143, 146, 146, 175, 175, 211, 233, 258,
 258, 263, 297, 341, 341, 376)
t=c(4.2, 1.12, 1.39, 2, 3.99, 2.15, 1.74, 5.81, 1.7, 2.85, 0.5, 0.99, 11.5,
 5.12, 0.9, 1.99, 6.24, 2.6, 3, 12.2, 7.36, 4.75, 11.59, 8.69, 9.8, 1.85,
 1.99, 1.35, 10, 0.65, 1.45)
n=length(t)

```

کدهای مربوط به تابع چگالی و تابع توزیع

```

f_IW=function(x,A,B){
A*B*(x^-(B+1))*exp(-A*(x^(-B)))
}
F_IW=function(x,A,B){
1-exp(-A*(x^(-B)))
}

f_W=function(x,A,B){
A*B*(x^(B-1))*exp(-A*(x^B))
}
F_W=function(x,A,B){
1-exp(-A*(x^B))
}

f_NH=function(x,A,B){
A*B*(1+B*x)^(A-1)*exp(1-(1+B*x)^A)
}
F_NH=function(x,A,B){
1-exp(1-(1+B*x)^A)
}

```

```
f_GIW=function(x,A,B,L){
(A^B)*B*L*(x^-(B+1))*exp(-L*(A/x)^B)
}
```

```
F_GIW=function(x,A,B,L){
1-exp(-L*(A/x)^B)
}
```

```
f_ENH=function(x,A,B,L){
A*B*L*((1+L*x)^(A-1)*exp(1-(1+L*x)^A))/(1-exp(1-(1+L*x)^A))^(1-B))
}
```

```
F_ENH=function(x,A,B,L){
(1-exp(1-(1+L*x)^A))^B
}
```

```
f_EEB=function(x,A,B,L){
((n*A*B*L)/(1-(1-B)^n))*exp(-L*x)*(1-exp(-L*x))^(A-1)*(1-B*(1-exp(-L*x))^A)^(n-1)
}
```

```
F_EEB=function(x,A,B,L){
(1-(1-B*(1-exp(-L*x))^A)^n)/(1-(1-B)^n)
}
```

```
f_EWP=function(x,A,B,L,T){
((A*B^(L)*T*L)/(exp(T)-1))*x^(L-1)*exp(-(B*x)^L)*(1-exp(-(B*x)^L))^(A-1)*
exp(T*(1-exp(-(B*x)^L))^A)
}
```

```
F_EWP=function(x,A,B,L,T){
(exp(T*(1-exp(-(B*x)^L))^A)-1)/(exp(T)-1)
}
```

```
F_IWP=function(x,A,B,T){
(exp(T*exp(-A*(x^(-B))))-1)/(exp(T)-1)
}
```

```
f_IWP=function(x,A,B,T){
((exp(T*exp(-A*(x^(-B)))))/(exp(T)-1))*T*A*B*x^(-B+1)*exp(-A*(x^(-B)))
}
```

}

```
F_IWG=function(x,A,B,T){
(1-T)*exp(-A*(x^(-B)))*(1-T*exp(-A*(x^(-B))))^(-1)
```

}

```
f_IWG=function(x,A,B,T){
(((1-T)/(1-T*exp(-A*(x^(-B))))^2)*A*B*x^(-(B+1))*exp(-A*(x^(-B))))
```

}

```
F_IWL=function(x,A,B,T){
log(1-T*exp(-A*(x^(-B))))/log(1-T)
```

}

```
f_IWL=function(x,A,B,T){
(T*A*B*x^(-(B+1))*exp(-A*(x^(-B))))/(-(1-T*exp(-A*(x^(-B))))*log(1-T))
```

}

```
F_KWGHN=function(x,a,b,A,T){
1-(1-( 2*pnorm((x/T)^A)-1)^a)^b
```

}

```
F_GHN=function(x,A,T){
2*pnorm((x/T)^A)-1
```

}

کدهای مربوط به برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

```
IW_II=function(theta){
a=theta[1]
L=theta[2]
-(n*(log(a)+log(L))-(a+1)*sum(log(t))
-L*sum(t^(-a)))}
lower=c(0,0)
upper=c(100,1000)
controlDE <- list(reltol=.00000001,steptol=500, itermax = 10000,trace =
250, NP=2000)
```

```

start <- Sys.time()
out <- DEoptim(fn = IW_II , lower = lower, upper = upper, control =
controlDE)
out$optim$iter
out$optim$bestval
out$optim$bestmem
end <- Sys.time()
end - start

W=function(theta){
A=theta[1]
B=theta[2]
-(n*log(A)+n*log(B)+(B-1)*sum(log(t))-A*sum(t^B) )
}
lower=c(0,0)
upper=c(100000,100)
controlDE <- list(reltol=.000000001,steptol=500, itermax = 10000,trace
= 250, NP=5000)
start <- Sys.time()
out <- DEoptim(fn = W , lower = lower, upper = upper, control =
controlDE)
out$optim$iter
out$optim$bestval
out$optim$bestmem
end <- Sys.time()
end - start

NH=function(theta){
A=theta[1]
L=theta[2]
-(n+n*log(A)+n*log(L)+(A-1)*sum(log(1+L*t))
-sum((1+L*t)^A) )
}
lower=c(0,0)

```



```
upper=c(1000,1000)
controlDE <- list(reltol=.000000001,steptol=500, itermax = 10000,trace
= 250, NP=5000)
start <- Sys.time()
out <- DEoptim(fn = NH , lower = lower, upper = upper, control =
controlDE)
out$optim$iter
out$optim$bestval
out$optim$bestmem
end <- Sys.time()
end - start
```

```
GIW=function(theta){
a=theta[1]
b=theta[2]
L=theta[3]
-(n*log(b)+n*log(L)+n*b*log(a)-(b+1)*sum(log(t))
-L*sum((a/t)^b))
}
lower=c(0,0,0)
upper=c(1000000,1000,1000)
controlDE <- list(reltol=.000000001,steptol=500, itermax = 10000,trace
= 250, NP=8000)
start <- Sys.time()
out <- DEoptim(fn = GIW , lower = lower, upper = upper, control =
controlDE)
out$optim$iter
out$optim$bestval
out$optim$bestmem
end <- Sys.time()
end - start
```

```
ENH=function(theta){
A=theta[1]
```

```

B=theta[2]
L=theta[3]
-(n+n*log(A)+n*log(B)+n*log(L)+(A-1)*sum(log(1+L*t))
  -sum((1+L*t)^A)+(B-1)*sum(log(1-exp( 1-(1+L*t)^A ))))
}
lower=c(0,0,0)
upper=c(1000,1000,1000)
controlDE <- list(reltol=.000000001,steptol=500, itermax = 10000,trace
= 250, NP=5000)
start <- Sys.time()
out <- DEoptim(fn = ENH , lower = lower, upper = upper, control =
controlDE)
out$optim$iter
out$optim$bestval
out$optim$bestmem
end <- Sys.time()
end - start

EEB=function(theta){
A=theta[1]
L=theta[2]
T=theta[3]
-(n*(log(L)+log(A)+log(n)+log(T)-log(1-(1-T)^n))-L*sum(t)
  +(A-1)*sum(log(1-exp(-L*t)))+(n-1)*sum(log(1-T*((1-exp(-L*t))^A)))
)
}
lower=c(0,0,0)
upper=c(1000,100,1)
controlDE <- list(reltol=.000000001,steptol=500, itermax = 10000,trace
= 250,NP=8000)
start <- Sys.time()
out <- DEoptim(fn = EEB , lower = lower, upper = upper, control =
controlDE)
out$optim$iter

```

```

out$optim$bestval
out$optim$bestmem
end <- Sys.time()
end - start

EWP=function(theta){
A=theta[1]
B=theta[2]
L=theta[3]
T=theta[4]
-(-n*log(exp(T)-1)+n*log(A)+n*L*log(B)+n*log(L)+n*log(T)
  +(L-1)*sum(log(t))-sum((B*t)^L)
  +(A-1)*sum(log(1-exp( -(B*t)^L ) ) ) +T*sum( (1-exp( -(B*t)^L ))^A ))
}
lower=c(0,0,0,0)
upper=c(1000,1000,1000,1000)
controlDE <- list(reltol=.000000001,steptol=500, itermax = 10000,trace
= 250, NP=5000)
start <- Sys.time()
out <- DEoptim(fn = EWP , lower = lower, upper = upper, control =
controlDE)
out$optim$iter
out$optim$bestval
out$optim$bestmem
end <- Sys.time()
end - start

IW_P=function(theta){
T=theta[1]
a=theta[2]
b=theta[3]
-(n*(log(T/(exp(T)-1))+log(a)+log(b))-(b+1)*sum(log(t))
-a*sum(t^(-b))+T*sum(exp(-a*t^(-b))))
}

```

```

lower=c(-50,0,0)
upper=c(50,100,100)
controlDE <- list(reltol=.0000000001,steptol=500, itermax = 10000,
trace = 250, NP=10000)
start <- Sys.time()
out <- DEoptim(fn = IW_P , lower = lower, upper = upper, control =
controlDE)
out$optim$iter
out$optim$bestval
out$optim$bestmem
end <- Sys.time()
end - start

```

```

IW_G=function(theta){
T=theta[1]
a=theta[2]
b=theta[3]
-(n*(log(1-T)+log(a)+log(b))-(b+1)*sum(log(t))
-a*sum(t^(-b))-2*sum(log(1-T*exp(-a*t^(-b))))))
}
lower=c(-100,0,0)
upper=c(1,1000,100)
controlDE <- list(reltol=.000000000001,steptol=500, itermax =
10000,trace = 250,
NP=10000)
start <- Sys.time()
out <- DEoptim(fn = IW_G , lower = lower, upper = upper, control =
controlDE)
out$optim$iter
out$optim$bestval
out$optim$bestmem
end <- Sys.time()
end - start

```

```

IW_L=function(theta){
T=theta[1]
a=theta[2]
b=theta[3]
-(n*(log(T/-log(1-T))+log(a)+log(b))-(b+1)*sum(log(t))
-a*sum(t^(-b))-sum(log(1-T*exp(-a*t^(-b))))))
}
lower=c(-1000,0,0)
upper=c(1,1000,1000)
controlDE <- list(reltol=.000000001,steptol=500, itermax = 10000,trace
= 250,
NP=5000)
start <- Sys.time()
out <- DEoptim(fn = IW_L , lower = lower, upper = upper, control
=controlDE)
out$optim$iter
out$optim$bestval
out$optim$bestmem
end <- Sys.time()
end - start

```

کدهای مربوط به آماره کرامر فن میسز و آندرسون دارلینگ

```

rm(list=ls())
Y=sort(t)
V=numeric(n)
y=numeric(n)
for(i in 1:n){
V[i]=F_IW(Y[i], 2.153039 , 1.214805 )
y[i]=qnorm(V[i])
}
s2_y=(1/(n-1))*sum((y-mean(y))^2)
U=numeric(n)
for(i in 1:n){
U[i]=pnorm((y[i]-mean(y))/sqrt(s2_y))

```

```

}
W=numeric(n)
for(i in 1:n){
W[i]=(U[i]-(2*i-1)/(2*n))^2
}
W2=sum(W)+1/(12*n)
W_S=W2*(1+(0.5/n))
A=numeric(n)
for(i in 1:n){
A[i]=(2*i-1)*log(U[i])+(2*n+1-2*i)*log(1-U[i])
}
A2=-n -(1/n)*sum(A)
A_S=A2*(1+(0.75/n)+(2.25/(n^2)))
W_S
A_S

Y=sort(t)
V=numeric(n)
y=numeric(n)
for(i in 1:n){
V[i]=F_W(Y[i], 0.1552904 , 1.2279963 ) # cdf
y[i]=qnorm(V[i])
}
s2_y=(1/(n-1))*sum((y-mean(y))^2)
U=numeric(n)
for(i in 1:n){
U[i]=pnorm((y[i]-mean(y))/sqrt(s2_y))
}
W=numeric(n)
for(i in 1:n){
W[i]=(U[i]-(2*i-1)/(2*n))^2
}
W2=sum(W)+1/(12*n)

```

```

W_S=W2*(1+(0.5/n))
A=numeric(n)
for(i in 1:n){
A[i]=(2*i-1)*log(U[i])+(2*n+1-2*i)*log(1-U[i])
}
A2=-n -(1/n)*sum(A)
A_S=A2*(1+(0.75/n)+(2.25/(n^2)))
W_S
A_S

Y=sort(t)
V=numeric(n)
y=numeric(n)
for(i in 1:n){
V[i]=F_NH(Y[i], 1.88112239 , 0.09628105 ) # cdf
y[i]=qnorm(V[i])
}
s2_y=(1/(n-1))*sum((y-mean(y))^2)
U=numeric(n)
for(i in 1:n){
U[i]=pnorm((y[i]-mean(y))/sqrt(s2_y))
}
W=numeric(n)
for(i in 1:n){
W[i]=(U[i]-(2*i-1)/(2*n))^2
}
W2=sum(W)+1/(12*n)
W_S=W2*(1+(0.5/n))
A=numeric(n)
for(i in 1:n){
A[i]=(2*i-1)*log(U[i])+(2*n+1-2*i)*log(1-U[i])
}
A2=-n -(1/n)*sum(A)

```

```

A_S=A2*(1+(0.75/n)+(2.25/(n^2)))
W_S
A_S

Y=sort(t)
V=numeric(n)
y=numeric(n)
for(i in 1:n){
V[i]=F_GIW(Y[i], 454.70806423, 1.21512843, 0.00126996 ) # cdf
y[i]=qnorm(V[i])
}
s2_y=(1/(n-1))*sum((y-mean(y))^2)
U=numeric(n)
for(i in 1:n){
U[i]=pnorm((y[i]-mean(y))/sqrt(s2_y))
}
W=numeric(n)
for(i in 1:n){
W[i]=(U[i]-(2*i-1)/(2*n))^2
}
W2=sum(W)+1/(12*n)
W_S=W2*(1+(0.5/n))
A=numeric(n)
for(i in 1:n){
A[i]=(2*i-1)*log(U[i])+(2*n+1-2*i)*log(1-U[i])
}
A2=-n -(1/n)*sum(A)
A_S=A2*(1+(0.75/n)+(2.25/(n^2)))
W_S
A_S

Y=sort(t)

```



```

V=numeric(n)
y=numeric(n)
for(i in 1:n){
V[i]=F_ENH(Y[i], 0.3924553, 6.4146192,6.8423875 ) # cdf
y[i]=qnorm(V[i])
}
s2_y=(1/(n-1))*sum((y-mean(y))^2)
U=numeric(n)
for(i in 1:n){
U[i]=pnorm((y[i]-mean(y))/sqrt(s2_y))
}
W=numeric(n)
for(i in 1:n){
W[i]=(U[i]-(2*i-1)/(2*n))^2
}
W2=sum(W)+1/(12*n)
W_S=W2*(1+(0.5/n))
A=numeric(n)
for(i in 1:n){
A[i]=(2*i-1)*log(U[i])+(2*n+1-2*i)*log(1-U[i])
}
A2=-n -(1/n)*sum(A)
A_S=A2*(1+(0.75/n)+(2.25/(n^2)))
W_S
A_S

Y=sort(t)
V=numeric(n)
y=numeric(n)
for(i in 1:n){
V[i]=F_EEB(Y[i], 1.73148771, 0.03608238 ,0.26399939) # cdf
y[i]=qnorm(V[i])
}

```

```

s2_y=(1/(n-1))*sum((y-mean(y))^2)
U=numeric(n)
for(i in 1:n){
U[i]=pnorm((y[i]-mean(y))/sqrt(s2_y))
}
W=numeric(n)
for(i in 1:n){
W[i]=(U[i]-(2*i-1)/(2*n))^2
}
W2=sum(W)+1/(12*n)
W_S=W2*(1+(0.5/n))
A=numeric(n)
for(i in 1:n){
A[i]=(2*i-1)*log(U[i])+(2*n+1-2*i)*log(1-U[i])
}
A2=-n -(1/n)*sum(A)
A_S=A2*(1+(0.75/n)+(2.25/(n^2)))
W_S
A_S

Y=sort(t)
V=numeric(n)
y=numeric(n)
for(i in 1:n){
V[i]=F_EWP(Y[i], 356.1527363,44.6061183,0.2495428,4.0839639 ) #cdf
y[i]=qnorm(V[i])
}
s2_y=(1/(n-1))*sum((y-mean(y))^2)
U=numeric(n)
for(i in 1:n){
U[i]=pnorm((y[i]-mean(y))/sqrt(s2_y))
}
W=numeric(n)

```

```

for(i in 1:n){
W[i]=(U[i]-(2*i-1)/(2*n))^2
}
W2=sum(W)+1/(12*n)
W_S=W2*(1+(0.5/n))
A=numeric(n)
for(i in 1:n){
A[i]=(2*i-1)*log(U[i])+(2*n+1-2*i)*log(1-U[i])
}
A2=-n -(1/n)*sum(A)
A_S=A2*(1+(0.75/n)+(2.25/(n^2)))
W_S
A_S

Y=sort(t)
V=numeric(n)
y=numeric(n)
for(i in 1:n){
V[i]=F_IWP(Y[i], 5.6285033,0.3319636,-34.4922165 ) # cdf
y[i]=qnorm(V[i])
}
s2_y=(1/(n-1))*sum((y-mean(y))^2)
U=numeric(n)
for(i in 1:n){
U[i]=pnorm((y[i]-mean(y))/sqrt(s2_y))
}
W=numeric(n)
for(i in 1:n){
W[i]=(U[i]-(2*i-1)/(2*n))^2
}
W2=sum(W)+1/(12*n)
W_S=W2*(1+(0.5/n))
A=numeric(n)

```

```

for(i in 1:n){
A[i]=(2*i-1)*log(U[i])+(2*n+1-2*i)*log(1-U[i])
}
A2=-n -(1/n)*sum(A)
A_S=A2*(1+(0.75/n)+(2.25/(n^2)))
W_S
A_S

Y=sort(t)
V=numeric(n)
y=numeric(n)
for(i in 1:n){
V[i]=F_IWG(Y[i], 0.8044482,1.6725576 ,0.8447739 ) # cdf
y[i]=qnorm(V[i])
}
s2_y=(1/(n-1))*sum((y-mean(y))^2)
U=numeric(n)
for(i in 1:n){
U[i]=pnorm((y[i]-mean(y))/sqrt(s2_y))
}
W=numeric(n)
for(i in 1:n){
W[i]=(U[i]-(2*i-1)/(2*n))^2
}
W2=sum(W)+1/(12*n)
W_S=W2*(1+(0.5/n))
A=numeric(n)
for(i in 1:n){
A[i]=(2*i-1)*log(U[i])+(2*n+1-2*i)*log(1-U[i])
}
A2=-n -(1/n)*sum(A)
A_S=A2*(1+(0.75/n)+(2.25/(n^2)))
W_S

```

```

A_S

Y=sort(t)
V=numeric(n)
y=numeric(n)
for(i in 1:n){
V[i]=F_IWL(Y[i], 0.2450443, 3.5808084 ,0.9999602 ) # cdf
y[i]=qnorm(V[i])
}
s2_y=(1/(n-1))*sum((y-mean(y))^2)
U=numeric(n)
for(i in 1:n){
U[i]=pnorm((y[i]-mean(y))/sqrt(s2_y))
}
W=numeric(n)
for(i in 1:n){
W[i]=(U[i]-(2*i-1)/(2*n))^2
}
W2=sum(W)+1/(12*n)
W_S=W2*(1+(0.5/n))
A=numeric(n)
for(i in 1:n){
A[i]=(2*i-1)*log(U[i])+(2*n+1-2*i)*log(1-U[i])
}
A2=-n -(1/n)*sum(A)
A_S=A2*(1+(0.75/n)+(2.25/(n^2)))
W_S
A_S

```

کد مربوط به معیار اطلاع آکاییک و بیزی

$$AIC=2 K - 2 \log L$$

AIC

$$BIC=K \log n- 2 \log L$$

BIC

کد تابع چگالی مربوط به توزیع دوجمله‌ای وایبل وارون

```
rm(list=ls())
m=5
f<- function(x,alpha,beta,theta){
  (m*theta*alpha*beta*(x^(-beta-1))*exp(-alpha*(x^(-beta))))
  *(theta*exp(-alpha*x^(-beta))+1)^(m-1))/
  (((theta+1)^m)-1)
}
curve(f(x,0.4,0.4,0.1),xlim=c(0,3),ylim=c(0,4),xlab="x",ylab="density",
lwd=2 , lty=1, col="red")
curve(f(x,0.4,0.4,1),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,0.4,0.4,2),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=3,col="black")
legend("topright","(x,y)",legend=c("theta=0.1","theta=1","theta=2"),lty=1:3,
col=c("red", "blue","black"))
title(main="alpha=0.4,beta=0.4")

rm(list=ls())
m=5
f<- function(x,alpha,beta,theta){
  (m*theta*alpha*beta*x^(-beta-1))*exp(-alpha*x^-beta)
  *(theta*exp(-alpha*x^-beta)+1)^(m-1))/
  (((theta+1)^m)-1)
}
curve(f(x,0.5,0.8,0.1),xlim=c(0,3),xlab="x",ylab="density", lwd=2 ,
lty=1, col="red")
curve(f(x,0.5,0.8,1),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,0.5,0.8,2),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=3,col="black")
legend("topright","(x,y)",legend=c("theta=0.1","theta=1","theta=2"),lty=1:3,
col=c("red", "blue","black"))
title(main="alpha=0.5,beta=0.8")

rm(list=ls())
```

```

m=5
f<- function(x,alpha,beta,theta){
(m*theta*alpha*beta*x^(-beta-1)*exp(-alpha*x^-beta)*(theta*exp(-
alpha*x^-beta)+1)^(m-1))/
(((theta+1)^m)-1)
}
curve(f(x,1,2,0.1),xlim=c(0,7),xlab="x",ylab="density", lwd=2 , lty=1,
col="red")
curve(f(x,1,2,1),add=TRUE,xlim=c(0,7),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,1,2,2),add=TRUE,xlim=c(0,7),lwd=2,lty=3,col="black")
legend("topright","(x,y)",legend=c("theta=0.1","theta=1","theta=2"),lty=1:3,
col=c("red", "blue","black"))
title(main="alpha=1,beta=2")

```

کد تابع چگالی توزیع هندسی وایبل وارون

```

rm(list=ls())
m=5
f<- function(x,alpha,beta,theta){
((1-theta)*(alpha*beta*x^(-beta-1)*exp(-alpha*x^-beta))/
(1-theta*exp(-alpha*x^-beta))^2)
}
curve(f(x,0.4,0.4,0.1),xlim=c(0,3),ylim=c(0,4),xlab="x",ylab="density",
lwd=2 , lty=1, col="red")
curve(f(x,0.4,0.4,0.4),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,0.4,0.4,0.8),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=3,col="black")
legend("topright","(x,y)",legend=c("theta=0.1","theta=0.4","theta=0.8"),lty=1:3,
col=c("red", "blue","black"))
title(main="alpha=0.4,beta=0.4")

rm(list=ls())
m=5
f<- function(x,alpha,beta,theta){
((1-theta)*(alpha*beta*x^(-beta-1)*exp(-alpha*x^-beta))/
(1-theta*exp(-alpha*x^-beta))^2)
}

```

```

}
curve(f(x,0.5,0.8,0.1),xlim=c(0,3),xlab="x",ylab="density", lwd=2 ,
lty=1, col="red")
curve(f(x,0.5,0.8,0.4),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,0.5,0.8,0.8),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=3,col="black")
legend("topright","(x,y)",legend=c("theta=0.1","theta=0.4","theta=0.8"),lty=1:3,
col=c("red", "blue","black"))
title(main="alpha=0.5,beta=0.8")

rm(list=ls())
m=5
f<- function(x,alpha,beta,theta){
  ((1-theta)/(1-theta*exp(-alpha*x^-beta))^2 )*alpha*beta
  *x^(-beta-1)*exp(-alpha*x^-beta)
}
curve(f(x,1,2,0.1),xlim=c(0,7),xlab="x",ylab="density", lwd=2 , lty=1,
col="red")
curve(f(x,1,2,0.4),add=TRUE,xlim=c(0,7),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,1,2,0.8),add=TRUE,xlim=c(0,7),lwd=2,lty=3,col="black")
legend("topright","(x,y)",legend=c("theta=0.1","theta=0.4","theta=0.8"),lty=1:3,
col=c("red", "blue","black"))
title(main="alpha=1,beta=2")

```

کد تابع چگالی مربوط به توزیع لگاریتم وایبل و آرون

```

rm(list=ls())
m=5
f<- function(x,alpha,beta,theta){
  (theta*alpha*beta*x^(-(beta+1))*exp(-alpha*(x^(-beta))))/
  (-((1-theta*exp(-alpha*(x^(-beta))))*log(1-theta)))
}
curve(f(x,0.8,0.4,0.1),xlim=c(0,2),ylim=c(0,1.5),xlab="x",ylab="density",
lwd=2 , lty=1, col="red")
curve(f(x,0.8,0.4,0.4),add=TRUE,xlim=c(0,2),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,0.8,0.4,0.8),add=TRUE,xlim=c(0,2),lwd=2,lty=3,col="black")

```



```

legend("topright", "(x,y)", legend=c("theta=0.1", "theta=0.4", "theta=0.8"), lty=1:3,
      col=c("red", "blue", "black"))
title(main="alpha=0.5, beta=0.4")

rm(list=ls())
m=5
f<- function(x, alpha, beta, theta){
  (theta*alpha*beta*x^(-(beta+1))*exp(-alpha*(x^(-beta))))/
  (- (1-theta*exp(-alpha*(x^(-beta))))*log(1-theta))
}
curve(f(x,0.5,0.4,0.1), xlim=c(0,3), ylim=c(0,1.2), xlab="x", ylab="density",
      lwd=2, lty=1, col="red")
curve(f(x,0.5,0.4,0.4), add=TRUE, xlim=c(0,3), lwd=2, lty=2, col="blue")
curve(f(x,0.5,0.4,0.8), add=TRUE, xlim=c(0,3), lwd=2, lty=3, col="black")
legend("topright", "(x,y)", legend=c("theta=0.1", "theta=0.4", "theta=0.8"), lty=1:3,
      col=c("red", "blue", "black"))
title(main="alpha=0.5, beta=0.4")

```

```

rm(list=ls())
m=5
f<- function(x, alpha, beta, theta){
  (theta*alpha*beta*x^(-(beta+1))*exp(-alpha*(x^(-beta))))/
  (- (1-theta*exp(-alpha*(x^(-beta))))*log(1-theta))
}
curve(f(x,1,2,0.1), xlim=c(0,5), ylim=c(0,0.8), xlab="x", ylab="density",
      lwd=2, lty=1, col="red")
curve(f(x,1,2,0.4), add=TRUE, xlim=c(0,5), lwd=2, lty=2, col="blue")
curve(f(x,1,2,0.8), add=TRUE, xlim=c(0,5), lwd=2, lty=3, col="black")
legend("topright", "(x,y)", legend=c("theta=0.1", "theta=0.4", "theta=0.8"), lty=1:3,
      col=c("red", "blue", "black"))
title(main="alpha=1, beta=2")

```

کد تابع چگالی مربوط به توزیع پواسون وایبل وارون

```
rm(list=ls())
```

\o\

```
m=5
f<- function(x,alpha,beta,theta){
  ((exp(theta*exp(-alpha*(x^(-
beta)))))/(exp(theta)-1))*theta*alpha*beta*
  x^(-(beta+1))*exp(-alpha*(x^(-beta)))
}
curve(f(x,0.4,0.4,0.1),xlim=c(0,3),ylim=c(0,4),xlab="x",ylab="density",
  lwd=2 , lty=1, col="red")
curve(f(x,0.4,0.4,3),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,0.4,0.4,5),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=3,col="black")
legend("topright","(x,y)",legend=c("theta=0.1","theta=3","theta=5"),lty=1:3,
  col=c("red", "blue","black"))
title(main="alpha=0.4,beta=0.4")
```

```
rm(list=ls())
```

```
m=5
f<- function(x,alpha,beta,theta){
  ((exp(theta*exp(-alpha*(x^(beta)))))/
  (exp(theta)-1))*theta*alpha*beta*x^(-(beta+1))*
  exp(-alpha*(x^(-beta)))
}
curve(f(x,0.5,0.8,0.1),xlim=c(0,3),ylim=c(0,1.2),xlab="x",ylab="density",
  lwd=2 , lty=1, col="red")
curve(f(x,0.5,0.8,3),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,0.5,0.8,5),add=TRUE,xlim=c(0,3),lwd=2,lty=3,col="black")
legend("topright","(x,y)",legend=c("theta=0.1","theta=3","theta=5"),lty=1:3,
  col=c("red", "blue","black"))
title(main="alpha=0.5,beta=0.8")
```

```
rm(list=ls())
```

```
m=5
f<- function(x,alpha,beta,theta){
  ((exp(theta*exp(-alpha*(x^(beta)))))/
  (exp(theta)-1))*theta*alpha*beta*x^(-(beta+1))*
```

```

exp(-alpha*(x^(-beta)))
}
curve(f(x,1,2,0.1),xlim=c(0,7),ylim=c(0,0.8),xlab="x",ylab="density",
lwd=2 , lty=1, col="red")
curve(f(x,1,2,3),add=TRUE,xlim=c(0,7),lwd=2,lty=2,col="blue")
curve(f(x,1,2,5),add=TRUE,xlim=c(0,7),lwd=2,lty=3,col="black")
legend("topright","(x,y)",legend=c("theta=0.1","theta=3","theta=5"),lty=1:3,
col=c("red", "blue","black"))
title(main="alpha=1,beta=2")

```

کد مربوط به نمودار زمان کل مجموعه داده‌های اول (a)

```

n=length(t)
Y=sort(t)
SUM=function(r){
S=0
for(i in 1:r){
S=S+Y[i]
}
return(S)
}
Z=numeric(n)
for(r in 1:n){
Z[r]=(SUM(r)+(n-r)*Y[r])/sum(Y)
}
RR=numeric(n)
for(r in 1:n){
RR[r]=r/n
}
plot(RR,Z,type="l",lwd=2,xlab="r/n",ylab="T(r/n)",main="(a)",ylim=c(0,1),xlim=c(0,1))
abline(0,1,lty=2)

```

کد مربوط به نمودار زمان کل مجموعه داده‌های دوم (شکل b) مشابه کد مربوط به a است.

```
rm(list=ls())
plot(survfit(Surv(Y)~1,data=data.frame(Y)),conf.int=FALSE,
     lty=1,main="(a)",col=1,xlab="x",ylab="Survival")
lines(Y,1-F_IWG(Y, 723.54, 2.4810, 0.9838),type="l",lty=2,col=2,lwd=2)
legend(250,1,c("K-M","IWG model"),lty=c(1,2),col=c(1,2),lwd=c(1,2))
```

کد مربوط به نمودار بقای تجربی و برآورد تابع بقای داده‌های دوم مشابه شکل a است.

مراجع

- [۱] اسدی م، (۱۳۸۷)، ”قابلیت اعتماد” انتشارات دانشگاه اصفهان، صفحه ۵۲
- [2] Aarset MV. (1967), ”How to identify bathtub hazard rate” **IEEE Trans Reliab**, 36, pp 106–108
- [3] Adamidis K. and Loukas S. (1998), ”A lifetime distribution with decreasing failure rate” **Statistics and Probability Letters**, 39, pp 35-42
- [4] Akaike H. (1974), ”A New Look at the Statistical Model Identification”, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 19, pp 716–723
- [5] Anderson, T. W. (1962), ”On the Distribution of the Two-Sample Cramer–von Mises Criterion” **Annals of Mathematical Statistics. Institute of Mathematical Statistics**, 3, 33 pp 1148–1159
- [6] Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1952), ”Asymptotic theory of certain ”goodness-of-fit criteria based on stochastic processes” **Annals of Mathematical Statistics**, 23 pp 193–212
- [7] A.Z. Keller, M.T. Giblin and N.R. Farnworth. (1985), ”Reliability analysis of commercial vehicle engines” **Reliab. Eng**, 10 , pp 15–25
- [8] Bakouch HS, Risti’c MM, Asgharzadeh A, Esmaily L and Al-Zahrani BM. (2012), ”An exponentiated exponential binomial distribution with application” **Stat Probab Lett**, 82, pp 1067–1081
- [9] Calabria R and Pulcini G. (1990), ”On the maximum likelihood and least squares estimation in inverse Weibull distribution” **Statistica Applicata** ,2, pp 53–66
- [10] Calabria R and Pulcini G. (1994), ”Bayes 2-sample prediction for the inverse Weibull distribution” **Communications in Statistics-Theory and Methods**, 23,6, pp 1811–1824

- [11] Calabria R and Pulcini G. (1989), "Confidence limits for reliability and tolerance limits in the inverse Weibull distribution" **Eng. Syst. Saf**, 24, pp 77–85
- [12] Cancho VG, Louzada F and Barriga GDC. (2012), "The Geometric Birnbaum–Saunders regression model with cure rate" **J Statist Plan Inference**, 142,4, pp 993–1000
- [13] Chahkandi M and Ganjali M. (2009), "On some lifetime distributions with decreasing failure rate" **Comput Stat Data Anal**, 53, pp 4433–4440
- [14] Chen G and Balakrishnan N. (1995), "A general purpose approximate goodness-of-fit test" **J Qual Technol**, 27, pp 154–161
- [15] Cordeiro GM, Pescim RR and Ortega EMM. (2012), "The Kumaraswamy generalized halfnormal distribution for skewed positive data" **J Data Sci**, 10,2, pp 195–224
- [16] Cramer, H. (1928), "On the Composition of Elementary Errors". **Scandinavian Actuarial Journal**, 1, pp 13–74
- [17] Dempster AP, Laird NM and Rubin DB. (1977), "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion)" **J R Statist Soc**, Ser B 39, pp 1–38
- [18] Erto P and Rapone M. (1984), "Non-informative and practical Bayesian confidence bounds for reliable life in the Weibull model" **Reliab. Eng**, 7, 3, pp 181–191
- [19] Frechet, Maurice. (1927), "Sur la loi de probabilité de l'écart maximum" **Annales de la Société Polonaise de Mathématique**, 6, pp 93–116
- [20] Glänzel W. (1987), "A characterization theorem based on truncated moments and its application to some distribution families" **Math Stat Probab: Statist Inference Methods**, Vol B, pp 75–84
- [21] Glänzel W and Hamedani GG. (2001), "Characterizations of univariate continuous distributions" **Studia Sci Math Hung**, 37,1-2, pp 83–118
- [22] Gurvich M., DiBenedetto A. and Ranade S. (1997), "A new statistical distribution for characterizing the random strength of brittle materials" **Journal of Materials**, 32, pp 2559–2564
- [23] Hamedani GG. (2002), "Characterizations of univariate continuous distributions. II" **Studia Sci Math Hung**, 39,3-4, pp 407–424
- [24] Hamedani GG. (2002), "Characterizations of univariate continuous distributions. II" **Studia Sci Math Hung**, 39,3-4, pp 407–424

- [25] Hamedani GG and Hamedani GG. (2006), "Characterizations of univariate continuous distributions. III" **Studia Sci Math Hung**, 43,3, pp 361–385
- [26] Hartley, R. V. (1928), "Transmission of information1" **Bell System technical journal**, 7,3, pp 535-563
- [27] Jaynes ET. (1957), "Information theory and statistical mechanics" **Phys Rev**, 106,4, pp 620–630
- [28] Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951), "On information and sufficiency" **The annals of mathematical statistics**, 1, 22, pp 79-86
- [29] Kus C. (2007), "A new lifetime distribution" **Comput Stat Data Anal**, 51, pp 4497–4509
- [30] Kundu D and Howlader H. (2010), "Bayesian inference and prediction of the inverse Weibull distribution for Type-II censored data" **Comput Stat Data Anal**, 54,6, pp 1547–1558
- [31] Louzada F, Roman M and Cancho VG. (2011), "The complementary exponential geometric distribution: model, properties, and a comparison with its counterpart" **Comput Stat Data Anal**, 55,8, pp 2516–2524
- [32] Lemonte JA. (2013), "A new exponential-type distribution with constant, decreasing, increasing, upside-down bathtub and bathtub-shaped failure rate function" **Comput Stat Data Anal**, 62, pp 149–170
- [33] Louis TA. (1982), "Finding the observed information matrix when using the EM algorithm" **J R Statist Soc B**, 44, 2, pp 226–233
- [34] Morais A.L. and Barreto-Souza W. (2011), "A compound class of Weibull and power series distributions" **Comput Stat Data Anal**, 55,3, pp 1410–1425
- [35] Moors JJA. (1988), "A quantile alternative for kurtosis" **Statistician**, 37, pp 25–32
- [36] M.S. Khan, G.R. Pasha and A.H. Pasha. (2008), "Theoretical analysis of inverse Weibull distribution, WSEAS Trans" **Math**, 7, pp 30–38
- [37] Nadarajah S and Haghghi F. (2011), "An extension of the exponential distribution" **Statistics**, 45,6, pp 543–558
- [38] Noack A. (1950), "A class of random variables with discrete distributions" **Annals of Mathematical Statistics**, 21, pp 127–132

- [39] Nyquist, H. (1932), "Regeneration theory" **Bell system technical journal**, 1, 11, pp 126-147
- [40] Mahmoudi E and Sepahdar A.(2013), "Exponentiated Weibull-Poisson distribution: model, properties and applications" **Math Comput Simul**, 92, pp76-97
- [41] Shannon CE. (1948), "A mathematical theory of communication" **Bell Syst Tech J**, 27,3, pp 379-423
- [42] Rodrigo B. Silvaa, Marcelo B. Pereiraa, cicero R. B. Diasa and Gauss M. Cordeiroa. (2013), "The compound class of extended Weibull power series distributions " **Comput Stat Data Anal**, 58, pp 352-367
- [43] Rosin, P. (1933), "The Laws Governing the Fineness of Powdered Coal Rammler, E " **Journal of the Institute of Fuel**, 7, pp 29-36
- [44] Shore JE and Johnson RW.(1980), "Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entropy" **IEEE Trans Inf Theory** ,26, pp 26-37
- [45] Shafiei S. Darijani S. and Sabooric H. (2015), "Inverse Weibull power series distributions: properties and applications " **Stat Comput Simul**,86,6, pp 1069-1094
- [46] Soofi ES. (2000), "Principal information theoretic approaches" **J Am Statist Assoc** ,452,95, pp 1349-1353
- [47] Tahmasbi R and Rezaei S. (2008), "A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate" **Comput Stat Data Anal**, 52, pp 3889-3901
- [48] von Mises, R. E. (1928), "Wahrscheinlichkeit", **Statistic and Wahrheit**, Julius Springer
- [49] Wu, C. F. J. (1983) ,"On the Convergence Properties of the EM Algorithm" **The Annals of Statistics**, 11, pp 95-103
- [50] Zografos K and Balakrishnan N. (2009), "On families of beta- and generalized gammagen-erated distributions and associated inference" **Statist Meth**, 6,4, pp 344-362
- [51] Balakrishnan. N and Chohen. A.C. (1991), " **Order statistics and Infernce: Estimation Methods, Academic Press, San Diego** "
- [52] Bickel P. and Doksum K. (2001), "Basic Ideas and Selected Topics" **Math Stat**, University of California, Vol.1, Second edition

- [53] Cover TM and Thomas JA. (1991), "**Elements of information theory**", Wiley:New York
- [54] Cohen. A.C. (1991), "**Truncated and Censored Sample- Theory and Applications**", Marcel Dekker, New York
- [55] Kapur JN. (1989), "**Maximum entropy models in science and engineering**", Wiley: New York
- [56] Kenney JF and Keeping ES. (1962), "**Mathematics of statistics**", Princeton, NJ: Van Nostrand, Part 1. 3rd ed
- [57] Lawless J. F. (1982), "**Statistical Models and Methods for life time data**", John Wiley and Sons, Hoboken
- [58] Nelson W. (1982), "**Applied lifetime data analysis**", Vol. 577, University New York
- [59] Nelson.W. (1990), "**Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis**", John Wiley and Sons, Inc, New York
- [60] N.L. Johnson and S. Kotz and N. Balakrishnan. (1984), "**Continuous Univariate Distributions**", Vol.1, second edition, John Wiley and Sons
- [61] Shaked M and Shanthikumar JG. (1994), "**Stoch Orders Appl**", Boston MA: Academic Press
- [62] The Open University. (1963), "**MDST242 Statistics in Society Unit A0: Introduction**", Milton Keynes , The Open University, 2end ed, table 3.1

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

entropy	آنتروپی
Probability	احتمال
empirical survival	بقای تجربی
distribution	توزیع
survival analysis	تحلیل بقا
censored data	داده‌های سانسور شده
life time	طول عمر
left censoring	سانسور از چپ
right censoring	سانسور از راست
reliability	قابلیت اعتماد
truncated moments	گشتاورهای بریده
hazard rate	نرخ خطر

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

censored data	داده های سانسور شده
distribution	توزیع
empirical survival	بقای تجربی
entropy	آنتروپی
hazard rate	نرخ خطر
left censoring	سانسور از چپ
life time	طول عمر
Probability	احتمال
reliability	قابلیت اعتماد
right censoring	سانسور از راست
survival analysis	تحلیل بقا
truncated moments	گشتاورهای بریده

Aabstract

Inverse Weibull (IW) distribution is one of the widely used probability distributions for non-negative data modelling, specifically, for describing degradation phenomena of mechanical components. this distribution can not provide an appropriate fit for distributions with an increasing and upside down failure rate in reliability. In this payanname, with hazard function increasing, decreasing, upside down bathtub forms, we introduce a new lifetime distribution. new lifetime distribution is three parameters and by compounding IW and power series distributions. We provide mathematical properties of this new distribution such as moments, estimation by maximum likelihood with censored data, inference for a large sample and the EM algorithm to determine the maximum likelihood estimates of the parameters. Finally, to show the flexibility of this type of distributions, we demonstrate applications of two real data sets.

keywords :Weibull distribution; Inverse Weibull distribution; power series distribution; EM-algorithm; Shannnon entropy; Statistics ordering



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Partial Differential equations

**Inverse Weibull power series distributions:
properties and applications**

By: Mahla Alimardani

Supervisor

Ahmad Nezakati rezazade

Advisor

Hossein Baghishani

January 2018