

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

یک طرح عددی برای مسأله آشوب و کنترل بهینه در پزشکی

نگارنده: فاطمه حسین پور

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

بهمن ۱۳۹۷

تقدیم بہ:

روح پاک پدرم، کہ میل بہ آموختنم بزرگترین میراث اوست،
بہ مادرم، کہ بہشت پروردگارم زیرپای اوست،
و بہ روح پاک برادرم، کہ رفت و الف جہانم را برد.

پاس‌گزاری

^۱ پاس‌خداى را که لطفش بی‌کران و رحمتش بی‌انتهاست.
در ابتدا و فیضی خود می‌دانم از زحمات بی‌دینج خانواده‌ام که علیرغم تحمل سختی‌های فراوان، میرکسب دانش را برایم هموار کردند. شکر و قدر دانی کنم.
و از استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی بابت پیگیری و حمایت بی‌چشمداشت‌شان در زمانی که به دلیل پاره‌ای از مشکلات، در روند تحصیل وقفه ایجاد شد و به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان در تدوین پایان‌نامه ام‌کمال شکر را دارم. از جناب آقای دکتر احسنی و جناب آقای دکتر نورى اسکندری که زحمت داورى این پایان‌نامه را قبول فرمودند، بسیار سپاس‌گزارم.

فاطمه حسین پور

بهمن ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه حسین پور** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **یک طرح عددی برای مسأله آشوب و کنترل بهینه در پزشکی**، تحت راهنمایی **علیرضا ناظمی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه حسین پور

بهمن ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

به دلیل وجود اثرات مخرب شیمی درمانی و تعدیل شدن اثر آن به واسطه ایجاد مقاومت دارویی، به دنبال راهی برای شبیه‌سازی رفتار سلول‌های سرطانی در مواجهه با سیستم ایمنی بدن، سلول‌های سالم و داروها هستیم تا به کمک آن تیم پزشکی بتواند مؤثرترین ترکیب دارویی را برای بیماران سرطانی پیدا کند. در این پایان‌نامه، یک مدل ریاضی سرطان با پارامترهای مجهول ارائه می‌دهیم. سپس به بررسی آشوب و کنترل بهینه در این مدل ریاضی سرطان می‌پردازیم، آنالیز پایداری خطی این مدل در وضعیت تعادل زیستی شدنی را مورد بحث قرار داده، محدوده‌ی پارامترهای سیستم را که موجب رفتار آشوبناک می‌شوند، پیدا می‌کنیم و تخمینی از پارامترهای مجهول سیستم ارائه می‌دهیم.

این پایان‌نامه در پنج فصل تدوین شده است. در فصل اول تعاریف مقدماتی از سیستم‌های دینامیکی و مفاهیمی که در فصل‌های بعد مورد نیاز است را به اختصار بیان می‌کنیم. در فصل دوم یک نگاه کلی به نظریه آشوب و کنترل سیستم‌های آشوبناک خواهیم داشت. در فصل سوم نگاه کوتاهی به مسائل کنترل بهینه و شرایط بهینگی آن خواهیم داشت. در فصل چهارم یک مدل ریاضی برای سرطان با پارامترهای مجهول ارائه داده و به حل عددی آن می‌پردازیم و در فصل پنجم نتیجه‌گیری می‌کنیم.

کلمات کلیدی: آشوب، اصل مینیمم پونتریاگین، اصل پایداری لیاپانوف، مدل‌سازی ریاضی سرطان، مسأله کنترل بهینه غیرخطی، کنترل بهینه.

فهرست مطالب

ف		فهرست تصاویر
۱	تعاریف و مقدمات اولیه	۱
۱	سیستم‌های دینامیکی	۱.۱
۳	ساختارهای ریاضی سیستم‌های دینامیکی	۲.۱
۳	سیستم‌های مستقل	۱.۲.۱
۴	سیستم متعارف	۲.۲.۱
۶	تحلیل پایداری	۳.۲.۱
۱۰	بررسی پایداری نقاط تعادل با توابع لیاپانوف	۴.۲.۱
۱۲	قضیه لسال و اثبات پایداری	۵.۲.۱
۱۳	روش کاربردی برای تشخیص نوع نقطه تعادل	۶.۲.۱
۱۳	شار و سیستم دینامیکی	۳.۱
۱۴	نقاط حدی و دوره‌های حدی	۴.۱
۱۴	پدیده انشعاب و یا دوشاخه‌ای شدن	۵.۱
۱۵	آشوب	۲
۱۶	تاریخچه آشوب	۱.۲
۱۷	سیستم‌های آشوبناک	۲.۲
۱۸	شرایط لازم برای حرکت آشوبناک	۱.۲.۲
۱۹	ویژگی‌های نظریه آشوب	۳.۲
۱۹	اثر پروانه‌ای	۱.۳.۲
۲۰	خودسازماندهی و سازگاری پویا	۲.۳.۲
۲۱	خودمانایی یا خودشبهاهتی	۳.۳.۲
۲۱	جاذب‌های عجیب	۴.۳.۲
۲۲	روش‌های تشخیص رفتار آشوبناک	۴.۲
۲۴	طیف فرکانسی	۱.۴.۲

۲۴ ساختار فضای فاز	۲.۴.۲
۲۵ ابعاد دینامیک‌ها	۳.۴.۲
۲۸ حساسیت به شرایط اولیه	۴.۴.۲
۲۸ توان‌های لیاپانوف	۵.۴.۲
۳۰ کاربرد آشوب	۵.۲
۳۰ قلب و عروق	۱.۵.۲
۳۲ مخابرات امن	۲.۵.۲
۳۳ ژنتیک	۳.۵.۲
۳۳ اقتصاد	۴.۵.۲
۳۴ کنترل آشوب	۶.۲
۳۵ روش‌های کنترل آشوب	۷.۲
۳۷ کاربردهای کنترل آشوب	۸.۲
۳۹	۳ مقدمه‌ای بر مسائل کنترل بهینه و روش‌های حل آن	
۳۹ نظریه کنترل بهینه	۱.۳
۴۰ مسأله کنترل بهینه	۲.۳
۴۲ حساب تغییرات	۳.۳
۴۳ تقریب توابع	۱.۳.۳
۴۳ معادله اویلر-لاگرانژ	۴.۳
۴۴ شرایط لازم برای کنترل بهینه	۵.۳
۴۶ اصل مینیمم پونتریاگین	۶.۳
۴۷ روش‌های عددی حل مسائل کنترل بهینه	۷.۳
۴۷ روش‌های غیرمستقیم	۱.۷.۳
۴۸ روش‌های مستقیم	۲.۷.۳
۵۱	۴ سرطان و آشوب	
۵۱ معرفی	۱.۴
۵۲ مدل ریاضی سرطان	۲.۴
۵۴ آشوب و آنالیز پایداری	۳.۴
۵۹ مسئله‌ی کنترل بهینه	۴.۴
۶۱ حل عددی کنترل بهینه	۵.۴
۶۲ تخمین پارامترهای مجهول	۶.۴
۶۴ جواب عددی	۷.۴
۶۷	۵ نتیجه‌گیری	

۶۹	مراجع
۷۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۸۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۵	فضای فاز آونگ خطی	۱.۱
۶	خاصیت حفظ سطح فضای فاز	۲.۱
۸	تعبیر ترسیمی از پایداری به مفهوم لیاپانوف و پایداری مجانبی	۳.۱
۹	همسایگی های N و N' از مبدا در صفحه برای تعریف (۱.۲.۱۲)	۴.۱
۱۰	نقطه تعادل در (الف) جاذب، در (ب) و (ج) گذر و در (د) دافع	۵.۱
۱۹	اثر پروانه‌ای	۱.۲
۲۳	(الف) جاذب نقطه تعادل، (ب) جاذب دور حدی	۲.۲
۲۳	(ج) جاذب سطحی مارپیچی، (د) جاذب عجیب	۳.۲
۲۵	(a) جاذب یک مدل فرضی، (b) مقطع پوانکاره ایجاد شده، (c) نگاشت برگشتی	۴.۲
۲۶	مقایسه طیف فرکانسی بین دینامیک متناوب (چپ) و دینامیک آشوبناک (راست)	۵.۲
۲۷	روش به دست آوردن بعد همبستگی	۶.۲
۲۸	واگرا شدن پاسخ در اثر اختلاف در شرایط اولیه	۷.۲
۲۹	دور شدن مسیرها از یکدیگر و توان‌های لیاپانوف	۸.۲
۳۱	تأثیر مثبت توان لیاپانوف در یک راستای خاص	۹.۲
۳۱	یک نمونه سیگنال ECG	۱۰.۲
۳۲	یک نمونه سیگنال ECG	۱۱.۲
		تراکم اولیه‌ی $x_1(0) = 0.3, x_2(0) = 1/5, x_3(0) = 0.5$ و تراکم سلول‌های تومور، سلول‌های شکارچی فعال و سلول‌های شکارچی ساکن برای پارامترهای $a_1 = 0.4, a_2 = 5/9, a_3 = 0.1, a_4 = 0.5, a_5 = 0.06, a_6 = 0.05$.	۱.۴
۵۸	با تراکم اولیه‌ی $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1/5, x_3(0) = 0.5$ و سرطان و زیر سیستم‌های همگرا به چرخه‌های حدی درونی پایدار برای پارامترهای $a_1 = 2/5, a_2 = 4/5, a_3 = 0.6, a_4 = 3/5, a_5 = 2, a_6 = 0.1$.	۲.۴
۵۸	با تراکم اولیه‌ی $x_1(0) = 2/5, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0.5$ سه فرکانس بالا چرخه‌ی حدی مطابق با مقادیر پارامترهای سیستم $a_1 = 0.1, a_2 = 1, a_3 = 0.4, a_4 = 2/5, a_5 = 0.2, a_6 = 5/1$.	۳.۴
۵۸	در این شکل تراکم اولیه $x_1(0) = 1/95, x_2(0) = 1/75, x_3(0) = 0.55$ و پارامترهای $a_1 = 5, a_2 = 0.2, a_3 = 0.5, a_4 = 0.2, a_5 = 5, a_6 = 0.2$.	۴.۴
۵۹	$\beta_1 = 8, \beta_2 = 3, \beta_3 = 5$ هستند. $\alpha_1 = 20, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 7, \alpha_4 = 3, \alpha_5 = 15, \alpha_6 = 2/9, \alpha_7 = 4$	

فصل ۱

تعاریف و مقدمات اولیه

۱.۱ سیستم‌های دینامیکی

سیستم‌های دینامیکی یکی از شاخه‌های علوم ریاضی است که به دلیل زیبایی ذاتی و ارتباط وسیع با دیگر شاخه‌های علوم ریاضی، در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است و کاربردهای فراوان آن در سایر علوم بر جذابیت این شاخه از علم افزوده است. سیستم‌های دینامیکی فرآیندهای در حال تغییری را که در همه‌ی علوم یافت می‌شوند، بررسی می‌کنند. بازار سهام، وضعیت آب و هوا، افزایش و کاهش جمعیت، نمونه‌هایی از سیستم‌های دینامیکی هستند. پیدایش مفاهیم مربوط به سیستم‌های دینامیکی، مرهون کارهای وسیع و اساسی پوانکاره درباره مکانیک اجرام آسمانی در سال ۱۸۹۰ میلادی است. پوانکاره پایداری منظومه شمسی را با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی مورد تجزیه و تحلیل قرار داد.

یک سیستم دینامیکی، حالت یک سیستم را توصیف می‌کند. حالت یک سیستم را می‌توانیم با توجه به شرایط سیستم و مجموعه‌ای از متغیرها بیان کنیم. به‌طور خلاصه سیستم دینامیکی از زمان، مجموعه‌ای از متغیرهای حالت و تابعی که تغییرات سیستم را توصیف کند، تشکیل شده است. حال تعریف ریاضی سیستم‌های دینامیکی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

تعریف ۱.۱.۱. [۲] فرض کنید $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ و $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ در این صورت $x(t)$ یک سیستم دینامیکی نامیده می‌شود اگر برای بازه نامتناهی یا نامتناهی t ، $x(t)$ در یک مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی به‌صورت $\dot{x}(t) = f(x(t))$ صدق کند.

سیستم‌های دینامیکی به دو دسته سیستم‌های زمان-پیوسته و سیستم‌های زمان-گسسته تقسیم می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱. [۲] یک سیستم دینامیکی، سیستم دینامیکی زمان-پیوسته نامیده می‌شود اگر مجموعه انتخاب شده برای زمان، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد، یعنی یکی از مجموعه‌های زیر

$$\begin{cases} T = \mathbb{R}, \\ T = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \\ T = (a, b) \subset \mathbb{R}, \quad a < 0 < b, \end{cases}$$

و در فضای حالت به صورت زیر نمایش داده می‌شود. معمولاً تغییر در این سیستم با معادله دیفرانسیل معمولی توصیف می‌شود.

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

تعریف ۳.۱.۱. [۲] یک سیستم دینامیکی، سیستم دینامیکی زمان-گسسته نامیده می‌شود اگر مجموعه انتخاب شده برای زمان، زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد، یعنی یکی از مجموعه‌های زیر

$$\begin{cases} T = \mathbb{N} \cup \{0\} := \mathbb{N}_0, \\ T = \mathbb{Z}. \end{cases}$$

و در فضای حالت به صورت زیر نمایش داده می‌شود. معمولاً تغییر در این سیستم با معادله تفاضلی توصیف می‌شود.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی

بسیاری از سیستم‌ها را می‌توان توسط یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به صورت زیر نشان داد:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (1.1)$$

که در آن t متغیر زمان $x(t)$ یک بردار ستونی متغیر با زمان n - بعدی است که بر حالت^۱ سیستم دلالت دارد و $u(t)$ یک بردار ستونی m - بعدی است که نشانگر متغیر ورودی^۲ یا کنترل^۳ است. تابع f نیز تابع توصیف کننده‌ی سیستم نامیده می‌شود، معادله (۱.۱) معادله

¹State

²Input variable

³Control

حالت نامیده می‌شود. برای بسیاری از سیستم‌ها انتخاب حالت، به صورت طبیعی از ساختار فیزیکی آن برآمده یا اینکه می‌تواند کمیتی صرفاً ریاضی باشد. فرض کنید که $y(t)$ یک بردار l - بعدی سیستم باشد که به توان آن را اندازه گرفته و مشاهده کرد یا اینکه متغیری باشد که سیستم توسط آن بر محیط اطراف تأثیر می‌گذارد. چنین متغیری، متغیر خروجی سیستم نامیده می‌شود و در حالت کلی می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد:

$$y(t) = g(x(t), u(t), t). \quad (2.1)$$

معادله (۲.۱) معادله خروجی نامیده می‌شود و تابع g نیز تابع توصیف‌کننده خروجی سیستم است. به طور کلی معادلات دیفرانسیلی غیرخطی (۱.۱) و (۲.۱) معادلات سیستم نامیده می‌شوند. اگر در معادلات (۱.۱) و (۲.۱) f و g توابع خطی باشند، در این صورت سیستم را خطی می‌نامند. در حالت کلی معادله حالت و خروجی سیستم‌های خطی با مقدار اولیه t_0 را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

که در آن $A(t)$ و $B(t)$ به ترتیب ماتریس‌های متغیر با زمان $n \times n$ و $n \times m$ حالت و کنترل سیستم می‌باشند و $C(t)$ و $D(t)$ به ترتیب ماتریس‌های متغیر با زمان $l \times n$ و $l \times m$ خروجی و انتقالی بین ورودی و خروجی سیستم هستند [۱].

۲.۱ ساختارهای ریاضی سیستم‌های دینامیکی

۱.۲.۱ سیستم‌های مستقل

با بررسی‌های ات^۴ در سال ۱۹۹۴ میلادی مشخص شد که بخش وسیعی از نظریه سیستم‌های غیرخطی مربوط به حالت‌هایی است که هیچ‌گونه وابستگی به زمان ندارند. چنین سیستم‌هایی همگن^۵ نامیده می‌شوند. این حالت، زمانی رخ می‌دهد که بردار ورودی ثابت است. در این حالت معادله دیفرانسیل بردار حالت به صورت زیر است:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4.1)$$

که در آن u یک بردار ثابت است.

⁴Ott

⁵Autonomous Systems

۲.۲.۱ سیستم متعارف

سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax, \quad (۵.۱)$$

این سیستم با تغییر متغیر $x = Py$ به سیستم متعارف تبدیل می‌شود، که در آن A ماتریس ضرایب و J فرم متعارف جردن ماتریس A است به طوری که $J = P^{-1}AP$ است. در واقع ستون‌های P پایه‌ای برای \mathbb{R} تشکیل می‌دهند و y مختصات x نسبت به این پایه است. از آنجایی که ماتریس‌های A و J متشابه هستند و تشابه یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ است، لذا این مجموعه به کلاس‌های هم‌ارزی مجزا افزای می‌شود. برای هر دو ماتریس A و J در یک کلاس هم‌ارزی، جواب‌های سیستم‌های $\dot{x} = Ax$ و $\dot{y} = Jy$ با روابط زیر به هم وابسته هستند.

$$x = Py, \quad P^{-1}AP = J$$

بنابراین اگر یکی از سیستم‌ها حل شود، جواب‌های سایر اعضای کلاس نیز بدست می‌آیند.

تعریف ۱.۲.۱. [۱] سیستم خطی (۵.۱) را **ساده** می‌نامند، هرگاه ماتریس A نامنفرد باشد. اگر سیستم خطی (۵.۱) ساده باشد، آنگاه $x = \circ$ تنها جواب سیستم ذیل است و داریم:

$$\dot{x} = Ax \Leftrightarrow x = \circ$$

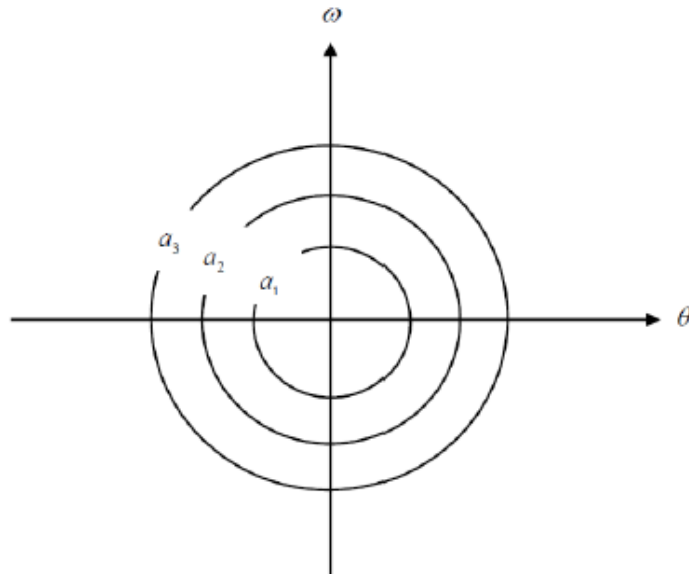
تعریف ۲.۲.۱. [۱] سیستم مستقل (۴.۱) را در نظر بگیرید. **نقطه تعادل** x_e نقطه‌ای است که در معادله $\dot{x} = f(x, u) = \circ$ صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

تعریف ۳.۲.۱. [۱] سیستم خطی (۵.۱) را **غیرساده** گویند هرگاه A منفرد باشد. به عبارت دیگر سیستم غیرساده $Ax = \circ$ دارای جواب‌های غیربدیهی است و سیستم، به غیر از $x = \circ$ نقطه تعادل دیگری ندارد.

تعریف ۴.۲.۱. [۳] **فضای فاز** یک سیستم دینامیکی، یک فضای ریاضی با مختصات متعامد است که نمایانگر متغیرهای لازم برای مشخص کردن حالت لحظه‌ای سیستم می‌باشد. به عنوان مثال، حالت ذره‌ای که در یک بعد حرکت می‌کند با مکان x و سرعت v تعیین می‌شود. بنابراین فضای فاز آن یک صفحه است.

مثال ۱.۲.۱. معادله حرکت آونگ ساده با در نظر گرفتن تقریب $\sin \theta \approx \theta$ به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \theta = \circ,$$



شکل ۱.۱: فضای فاز آونگ خطی

این معادله خطی مرتبه دوم با در نظر گرفتن متغیر سرعت زاویه‌ای $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ به دو معادله مرتبه اول زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

از این رو هر متغیر دینامیکی، معادله دیفرانسیل مرتبه اول خود را خواهد داشت. حال بدون این که از کلیت مسأله کاسته شود می‌توان شرایط اولیه را طوری برگزید که جوابی به صورت زیر داشته باشیم:

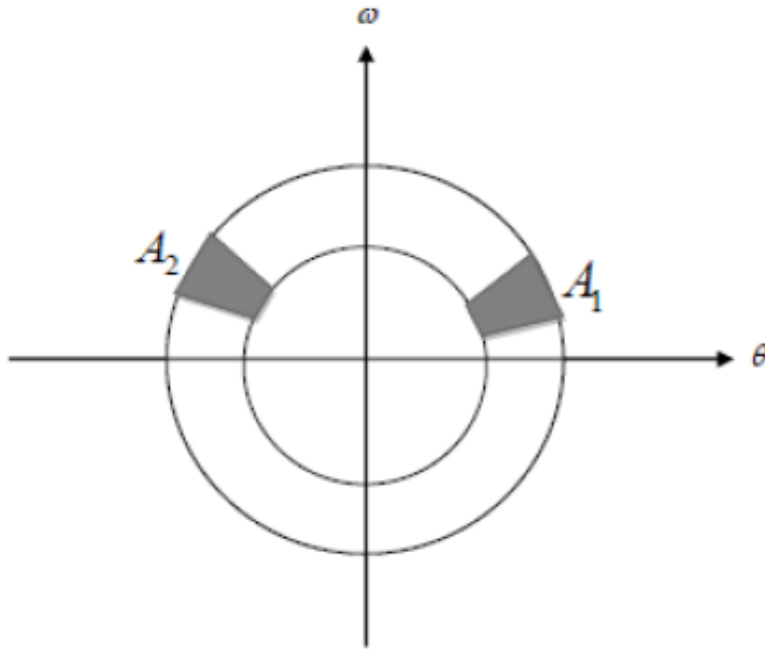
$$\theta = a_i \cos t, \quad \omega = a_i \sin t.$$

که در آن $\{a_i\}$ نمایانگر دامنه‌های مجاز حرکت است. با این مجموعه جواب، یک سری منحنی‌های پارامتری برای ω و θ خواهیم داشت که با حذف پارامتر زمان می‌توان یک نمایش دو بعدی به ازای مقادیر مختلف a_i بدست آورد. نمودار شکل (۱.۱) نمودار فضای فاز این مسأله را نشان می‌دهد.

تعریف ۵.۲.۱. [۳] مسیری که متغیر حالت $x(t)$ با گذشت زمان t طی می‌کند مسیر فاز نامیده می‌شود.

با در نظر گرفتن مثال (۱.۲.۱) هر مقدار a_i یک مدار بسته به ما می‌دهد. این مدار، مسیر فاز نامیده می‌شود. یک ویژگی مهم مسیر این است که دو مسیر نزدیک به هم، علی‌رغم نزدیکی، همدیگر را قطع نخواهند کرد. این خاصیت ناشی از این واقعیت است که حالت‌های گذشته و آینده سیستم را منحصرأ در یک زمان مفروض، معین می‌کند.

تعریف ۶.۲.۱. تصویر فاز شکلی دو بعدی است که نشان دهنده رفتار کیفی سیستم بوده و با تغییر t بر حسب x_1 و x_2 در صفحه فاز نشان داده می‌شود.



شکل ۲.۱: خاصیت حفظ سطح فضای فاز

تعریف ۷.۲.۱. [۱] نقطه تعادل x_e از سیستم (۴.۱) را **منفرد** گویند هرگاه یک همسایگی از نقطه x_e وجود داشته باشد به طوری که x_e تنها نقطه تعادل (۴.۱) باشد.

۳.۲.۱ تحلیل پایداری

بدون شک مهمترین مشخصه یک سیستم کنترل می تواند پایداری آن باشد. بر اهمیت مفهوم پایداری با این واقعیت تأکید می شود، که تقریباً تمامی سیستم های عملی و کاربردی را چنان طراحی می کنند، که پایدار باشند. در عمل، سیستمی که پایدار نباشد عموماً کاربردی نیز ندارد. میزان پیچیدگی تحلیل پایداری سیستم های دینامیکی به سرعت با تغییر مدل های ریاضی سیستم، از خطی تغییرناپذیر با زمان به خطی تغییرپذیر با زمان و غیرخطی افزایش می یابد. تعریف پایداری برای یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان یک مفهوم نسبتاً ساده است [۱]. از این رو طبیعی است که تحلیل های پایداری را به سیستم های غیرخطی و خطی تغییرپذیر با زمان بسط دهیم. یکی از ویژگی های مهم فضای فاز سیستم های پایدار، خاصیت حفظ سطوح است. این به آن معنی است که نقطه های موجود در یک سطح مشخص از فضای فاز در لحظه ای معین، به گونه ای حرکت می کنند که در زمان های بعد، سطحی را که این نقاط اشغال می کنند ثابت باقی می ماند. شکل (۲.۱) این خاصیت را نشان می دهد. خاصیت حفظ سطح و یا حفظ حجم، مشخصه کلی سیستم های پایدار است. این ویژگی سیستم های دینامیکی را بر حسب اینکه حجم های فاز ثابت بماند و یا کاهش یابد به دو گروه پایدار و اتلافی تقسیم می کند [۳]. یکی از کلی ترین روش های تحلیل پایداری سیستم ها، منسوب به دانشمند

روسی قرن نوزدهم میلادی لیاپانوف^۶ است. لیاپانوف دو روش برای تحلیل پایداری پیشنهاد کرد:

- در روش اول یا روش غیرمستقیم لیاپانوف، تحلیل پایداری معادلات دیفرانسیل غیرخطی پس از خطی‌سازی حول نقطه تعادل انجام می‌گیرد.
- روش دوم یا روش مستقیم لیاپانوف^۷، روش عام تحلیل پایداری سیستم‌ها است.

تعریف ۸.۲.۱. [۱] معادله دیفرانسیل حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \circ, t),$$

نقطه تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدار^۸ گویند اگر برای هر t_0 و هر $\epsilon > 0$ یک $\delta(\epsilon) > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\|x(t_0) - x_e\| \leq \delta$ آنگاه برای همه $t \geq t_0$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon.$$

در اینجا $\|x(t)\|$ نشان‌دهنده نرم^۹ بردار است و می‌توان از تعریف نرم اقلیدسی^{۱۰} به صورت

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)},$$

که در آن $x_i(t)$ مؤلفه‌های $x(t)$ هستند و یا از هر تعریف دیگری از نرم استفاده کرد. ویژگی فیزیکی پایداری به مفهوم لیاپانوف آن است، که می‌توان با انتخاب حالت اولیه‌ی به اندازه کافی نزدیک به نقطه تعادل از دور شدن حالت از نقطه تعادل جلوگیری کرد. به عبارت دیگر حالت تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف به مفهوم لیاپانوف پایدار گویند اگر پاسخ ناشی از هر حالت اولیه که به اندازه کافی نزدیک x_e باشد و هیچ‌گاه از حالت تعادل x_e دور نشود. این تعریف به‌طور ترسیمی در شکل (۳.۱) نشان داده شده است. پایداری به مفهوم لیاپانوف صورت ضعیفی از پایداری است که در بسیاری از مواقع ارزش علمی ندارد. در واقع اگر پاسخ علاوه بر نزدیک ماندن به حالت تعادل، به سمت آن نیز میل کند در آن صورت نوع قوی و عملی‌تر از پایداری وجود داشته که آن را پایدار مجانبی^{۱۱} نامیده و به تعریف آن می‌پردازیم.

تعریف ۹.۲.۱. [۱] نقطه تعادل معادله دیفرانسیل حالت

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \circ, t),$$

پایداری مجانبی است اگر

⁶Lyapunov

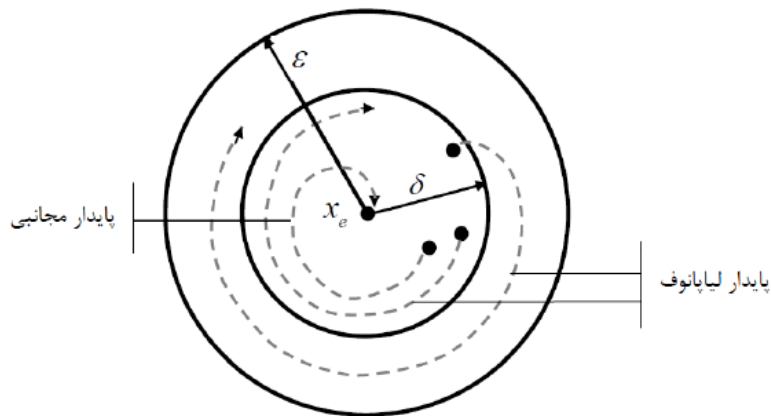
⁷Lyapunov's Second (or Direct) Method

⁸In the Sense of Lyapunov

⁹Norm

¹⁰Euclidean Norm

¹¹Asymptotically Stable



شکل ۳.۱: تعبیر ترسیمی از پایداری به مفهوم لیپانوف و پایداری مجانبی

(۱) پایدار به مفهوم لیپانوف باشد.

(۲) به ازای هر t_0 یک $\rho(t_0) > 0$ وجود داشته باشد که اگر $\|x(t_0) - x_e\| \leq \rho(t_0)$ آنگاه رابطه زیر اگر $t \rightarrow \infty$ برقرار باشد

$$\|x(t) - x_e\| \rightarrow 0.$$

بنابراین پایدار مجانبی باید علاوه بر پایداری به مفهوم لیپانوف، به شرط آن که حالت اولیه سیستم در محدوده تعریف شده در همسایگی نقطه تعادل باشد، همگرایی پاسخ سیستم به نقطه تعادل را تضمین کند. شکل (۳.۱) تعبیر ترسیمی پایدار مجانبی را نشان می‌دهد.

تعریف ۱۰.۲.۱. [۱] نقطه تعادل معادله دیفرانسیل حالت

$$\dot{x}(t) = f(x(t), 0, t),$$

پایداری مجانبی سراسری^{۱۲} است اگر

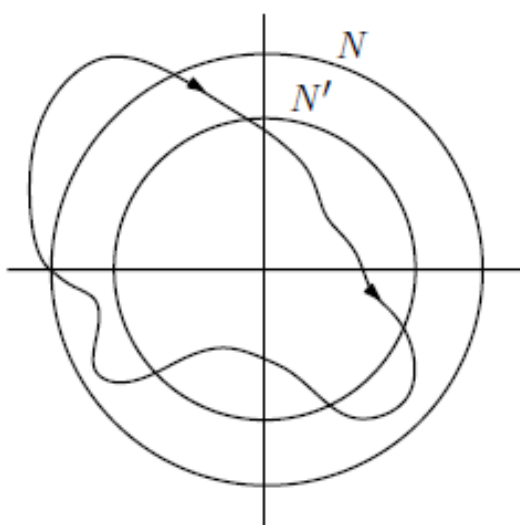
(۱) پایدار به مفهوم لیپانوف باشد.

(۲) برای هر $x(t_0)$ و t_0 رابطه زیر به ازای $t \rightarrow \infty$ برقرار باشد

$$\|x(t) - x_e\| \rightarrow 0.$$

بنابراین جوابی که پایدار مجانبی سراسری باشد دارای این خاصیت است که کلیه پاسخ‌های دیگر نهایتاً به سمت آن میل خواهند کرد. در نتیجه یک شرط لازم برای پایداری مجانبی سراسری آن است که در تمامی فضای حالت تنها یک حالت تعادل وجود داشته باشد. در طراحی سیستم‌های کنترل مطلوب‌ترین نوع پایداری، پایداری مجانبی سراسری است و اگر

¹²global asymptotically stability



شکل ۴.۱: همسایگی‌های N و N' از مبدا در صفحه برای تعریف (۱.۲.۱۲).

این نوع پایداری وجود نداشته یا قابل دسترسی نباشد، آنگاه تعیین بزرگترین محدوده پایداری بسیار مهم خواهد بود. البته پیدا کردن این محدوده از نظر علمی چندان آسان نبوده و در عمل پیدا کردن محدوده پایداری مجانبی به گونه‌ای که هیچ اغتشاشی از آن عبور نکند، کفایت می‌کند.

تعریف ۱۱.۲.۱. [۱] نقطه تعادل سیستم را **ناپایدار**^{۱۳} گویند اگر پایدار به مفهوم لیاپانوف نباشد.

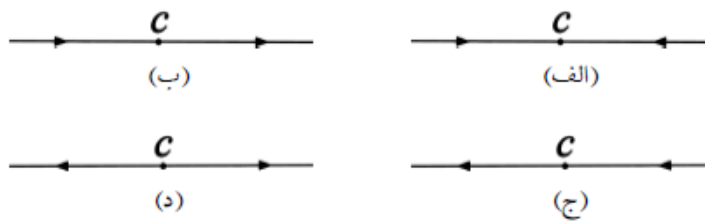
تعریف ۱۲.۲.۱. نقاط تعادل به‌طور مجانبی پایدار را **جاذب** و نقاط تعادل ناپایدار را **دافع** می‌نامند.

نقاط تعادل معادله مستقل (۴.۱) را می‌توان براساس رفتار جواب در نزدیکی این نقاط به سه نوع جاذب، دافع و گذر دسته‌بندی کرد.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید c نقطه تعادل معادله مستقل (۴.۱) باشد. گویند:

- c **جاذب** است هرگاه جواب‌های به اندازه کافی نزدیک به c به آن میل کنند؛
- c **دافع** است هرگاه جواب‌های به اندازه کافی نزدیک به c از آن دور شوند؛
- c **گذر** است هرگاه جواب‌ها از یک طرف به c نزدیک و از طرف دیگر از آن دور شوند.

¹³Unstable



شکل ۵.۱: نقطه تعادل در (الف) جاذب، در (ب) و (ج) گذر و در (د) دافع

۴.۲.۱ بررسی پایداری نقاط تعادل با توابع لیاپانوف

روش دوم یا روش مستقیم لیاپانوف طی دهه‌های گذشته به‌طور گسترده‌ای در تحلیل پایداری تعداد زیادی از سیستم‌ها کاربرد پیدا کرده است. این روش نقش مهمی در تحلیل پایداری سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات فضای حالت ایجاد می‌کند. این روش بدون بدست آوردن پاسخ $x(t)$ پایداری سیستم‌های غیرخطی و خطی را تحلیل می‌کند. روش دوم لیاپانوف برای تعیین رفتار سیستم‌های مرتبه بالا که ممکن است ورودی داشته یا نداشته، خطی یا غیرخطی، تغییرپذیر با زمان یا تغییرناپذیر با زمان باشند، قابل اعمال است. در این روش لزومی برای پیدا کردن جواب معادله دیفرانسیل نیست. اما یک تابع اسکالر $V(x)$ که برای بررسی پایداری مورد نیاز است. اگر $V(x)$ این شرایط را به‌طور موفقیت‌آمیزی برآورده کند تابع لیاپانوف^{۱۴} نامیده می‌شود. مشکل اساسی در اعمال این روش تعیین یک تابع لیاپانوف مناسب است، زیرا عدم موفقیت تابع برای برآورده کردن شرایط پایداری، دلیلی بر وجود نداشتن تابع لیاپانوف واقعی نیست. این مسأله با این واقعیت که تابع لیاپانوف منحصر به فرد نیست پیچیده‌تر می‌شود. با وجود این مشکلات، روش دوم لیاپانوف مورد توجه بسیاری از مهندسين کنترل سیستم قرار گرفته است.

تعریف ۱۴.۲.۱ [۱] تابع حقیقی $V : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را که در آن Ω یک همسایگی از $\circ \in \mathbb{R}^n$ است، در Ω معین مثبت (منفی) گویند هرگاه به ازای هر $x \in \Omega \setminus \{\circ\}$ ، $V(x) > \circ$ ($V(x) < \circ$) و $V(\circ) = \circ$ باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱ [۱] تابع حقیقی $V : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را که در آن Ω یک همسایگی از $\circ \in \mathbb{R}^n$ است در Ω نیمه معین مثبت (منفی) گویند هرگاه به ازای هر $x \in \Omega \setminus \{\circ\}$ ، $V(x) \geq \circ$ ($V(x) \leq \circ$) و $V(\circ) = \circ$ باشد.

قضیه ۱.۲.۱ [۵] (قضیه پایداری لیاپانوف) فرض کنید سیستم غیرخطی $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ ، $\dot{x} = f(x)$ ، یک نقطه تعادل در مبدأ دارد. همچنین یک تابع حقیقی V در همسایگی N از مبدأ وجود داشته باشد به طوری که:

¹⁴Liapunov Function

• $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ موجود و پیوسته باشند،

• V معین مثبت باشد،

در این صورت

(۱) اگر \dot{V} نیمه معین منفی باشد، آنگاه مبدأ یک نقطه تعادل پایدار سیستم است.

(۲) اگر \dot{V} معین منفی باشد، آنگاه مبدأ یک نقطه تعادل به طور مجانبی پایدار است.

تعریف ۱۶.۲.۱. [۵] تابع $V(x)$ را که در شرط (۱) قضیه (۱.۲.۱) صدق کند، **تابع لیپانوف ضعیف** و اگر در شرط (۲) صدق کند، **تابع لیپانوف قوی** گویند.

در سیستم‌های خطی، بررسی پایداری بسیار ساده‌تر از پایداری سیستم غیرخطی است و به راحتی می‌توان از پایداری سیستم‌ها به جای پایداری نقاط تعادل صحبت کرد. در این مورد به بیان دو قضیه زیر می‌پردازیم.

قضیه ۲.۲.۱. [۱] سیستم خطی

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

پایدار به مفهوم لیپانوف است اگر و فقط اگر

(۱) کلیه مقادیر ویژه A قسمت‌های حقیقی غیرمثبت داشته باشند.

(۲) آن دسته از مقادیر ویژه A که قسمت‌های حقیقی آن‌ها صفر هستند، صفرهای ساده^{۱۵} چندجمله‌ای مشخصه A باشند.

قضیه ۳.۲.۱. [۱] سیستم خطی

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه A قسمت‌های حقیقی اکیداً منفی داشته باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. ماتریس $A_{n \times n}$ را در نظر بگیرید. اسکالر λ را یک مقدار ویژه^{۱۶} ماتریس A می‌نامند، اگر یک بردار غیرصفر X وجود داشته باشد به طوری که

$$AX = \lambda X,$$

را برآورده سازد. به بردار غیرصفر X در اینجا بردار ویژه^{۱۷} ماتریس A متناظر با مقدار ویژه λ گفته می‌شود.

¹⁵Simple Zero

¹⁶Eigen Value

¹⁷Eigen Vector

۵.۲.۱ قضیه لسال و اثبات پایداری

تعریف ۱۸.۲.۱. در فضایی که $\dot{V}(x)$ مساوی صفر است اگر معادلات سیستم تنها در مبدأ پایدار باشند در آن صورت مبدأ نقطه تعادل **مجانبی پایدار**^{۱۸} است.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید $x(t)$ جواب $\dot{x} = f(x)$ باشد نقطه p را **نقطه حدی مثبت** $x(t)$ می‌نامند اگر وجود داشته باشد دنباله $\{t_n\}$ با $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ به طوری که اگر $n \rightarrow \infty$ آنگاه $x(t_n) \rightarrow p$.

تعریف ۲۰.۲.۱. مجموعه همه نقطه‌های حدی مثبت $x(t)$ را **مجموعه حدی مثبت** می‌گویند و با L^+ نمایش می‌دهند.

مثال ۲.۲.۱. اگر \bar{x} یک نقطه تعادل **مجانبی پایدار** سیستم $\dot{x} = f(x(t))$ باشد، آنگاه \bar{x} نقطه حدی مثبت $x(t)$ و $L^+ = \bar{x}$ است.

تعریف ۲۱.۲.۱. مجموعه M با توجه به $\dot{x} = f(x)$ یک **مجموعه ناوردا**^{۱۹} است اگر

$$x(\circ) \in M \implies x(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

و مجموعه M **مجموعه ناوردا مثبت** است اگر

$$x(\circ) \in M \implies x(t) \in M, \quad \forall t \geq \circ,$$

لم ۱.۲.۱. اگر $x(t)$ جواب معادله $\dot{x} = f(x)$ به ازای $t \geq \circ$ محدود و متعلق به $D \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد آنگاه مجموعه حدی مثبت آن مجموعه‌ای غیرتهی، فشرده و ناوردا خواهد بود و

$$t \rightarrow \infty \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in L^+$$

قضیه ۴.۲.۱. **قضیه لسال**^{۲۰} فرض کنید $f(x)$ تابع لیبشیتس محلی و $D \subseteq \mathbb{R}^n$ دامنه تغییر متغیرهای حالت و $\Omega \subset D$ مجموعه‌ای فشرده و نسبت به $\dot{x} = f(x)$ ناوردای مثبت باشد، سپس تابع لیاپانوف $V(x)$ را طوری در نظر می‌گیریم که درون ناحیه D پیوسته و مشتق پذیر باشد و در Ω ، $\dot{V}(x) \leq \circ$ باشد. و فرض می‌کنیم E مجموعه تمام نقاط Ω باشد که در آن $\dot{V}(x) = \circ$ است و M را بزرگترین زیر مجموعه ناوردای E در نظر می‌گیریم. آنگاه هر جواب $x(t)$ که درون Ω شروع شود در $t \rightarrow \infty$ درون M قرار می‌گیرد.

قضیه ۵.۲.۱. **قضیه بارباشین-کراسوفسکی**^{۲۱} فرض کنید $x = \circ$ نقطه تعادل $f(\circ) = \circ$ باشد و $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ ، $D \subset \mathbb{R}^n$ تابع مثبت معین، پیوسته، مشتق پذیر و شامل مبدأ

¹⁸asymptotically-stable

¹⁹invariant set

²⁰LaSall's theorem

²¹Barbashin-Krasovskii

باشد به طوری که در D ، $\dot{V}(x) \geq 0$ باشد. فرض کنید $\mathbb{S} = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$ و تنها مبدأ در \mathbb{S} باقی بماند در این صورت مبدأ (نقطه تعادل)، پایدار مجانبی خواهد بود. همچنین اگر $V(x)$ به طور شعاعی بی کران باشد آنگاه مبدأ پایدار مجانبی سراسری خواهد بود.

۶.۲.۱ روش کاربردی برای تشخیص نوع نقطه تعادل

به دلیل دشواری تشخیص نوع نقطه تعادل یک سیستم دینامیکی غیرخطی با استفاده از تعاریف مذکور، روش کاربردی برای این کار پیشنهاد شده است که مطابق گام‌های زیر انجام می‌گیرد [۴].

- (۱) تشکیل ماتریس ژاکوبین سیستم دینامیکی،
- (۲) تخمین مقدار ماتریس ژاکوبین در نقطه تعادل،
- (۳) محاسبه مقادیر ویژه ماتریس به دست آمده در گام ۲،
- (۴) در صورتی که همه مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی باشند نقطه تعادل به طور مجانبی پایدار است و اگر مقدار ویژه‌ای قسمت حقیقی مثبت داشته باشد آنگاه نقطه تعادل ناپایدار است.

۳.۱ شار و سیستم دینامیکی

مساله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0. \quad (۶.۱)$$

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^n$ و $X \in C^1(D)$ ، اگر به ازای $x_0 \in D$ ، $\phi(t, x_0)$ جواب مساله مقدار اولیه (۶.۱) روی I باشد، در این صورت به ازای هر $t \in I$ مجموعه‌ای از نگاشت‌های ϕ_t که به صورت $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ تعریف می‌شوند، شار سیستم $\dot{x} = f(x, u)$ نامیده می‌شوند.

ویژگی‌های شار

تابع ϕ_t که هر $x_0 \in D$ را به نقطه $\phi_t(x_0)$ می‌نگارد، دارای ویژگی‌های زیر است:

$$\phi_0(x) = x \quad (۱)$$

$$\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x)) \quad t, s \in \mathbb{R} \quad (۲)$$

$$\phi_t^{-1} = \phi_{-t} \quad t \in \mathbb{R} \quad (۳)$$

۴.۱ نقاط حدی و دوره‌های حدی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید x نقطه‌ای در تصویر فاز از شار ϕ_t باشد. در این صورت،

• نقطه y را یک نقطه‌ی α -حدی (ω -حدی) از x گویند هرگاه یک دنباله از زمان مانند $\{t_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که وقتی $t_n \rightarrow -\infty$ ($t_n \rightarrow +\infty$) رابطه $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = y$ برقرار باشد.

• مجموعه‌ای شامل همه‌ی نقاط α -حدی (ω -حدی) از x را **مجموعه α -حدی (ω -حدی)** ($L_\alpha(x)$) $L_\omega(x)$) نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۴.۱. مدار بسته l را **دور حدی** گویند هرگاه شامل نقطه تعادل نباشد و برای برخی l هایی که در $l \subset L_\alpha(x)$ یا $l \subset L_\omega(x)$ باشد. به عبارتی، هر مسیر متناوب منفرد را دور حدی می‌نامند.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید l یک دور حدی باشد. در این صورت:

• l یک **دور حدی پایدار** است هرگاه در یک همسایگی از آن $L_\omega(x) = l$ باشد. به عبارت دیگر، در یک همسایگی از l مسیرها به طرف آن جذب شوند.

• l یک **دور حدی ناپایدار** است هرگاه در یک همسایگی از آن $L_\alpha(x) = l$ باشد. به عبارت دیگر، در یک همسایگی از l مسیرها از آن دور شوند.

• l یک **دور حدی نیم‌پایدار** است هرگاه در یک همسایگی از آن l از یک طرف جاذب و از طرف دیگر دافع باشد.

۵.۱ پدیده انشعاب و یا دوشاخه‌ای شدن

اغلب مدل‌های ریاضی علاوه بر متغیر، دارای پارامتر نیز هستند. پارامترها، مؤلفه‌هایی هستند که به زمان بستگی ندارند اما ممکن است با توجه به کاربردهای گوناگون مدل، مقادیر متفاوتی داشته باشند. تغییرات رفتار جواب، هنگامی که پارامترها تغییر می‌کنند، یکی از مهمترین موضوعات مورد مطالعه سیستم‌های دینامیکی است. در اغلب مدل‌ها تنها تقریبی از مقدار پارامتر در دست است. بنابراین برای اینکه مدل مفید باشد، لازم است که تأثیر تغییر جزئی در مقدار پارامتر را روی رفتار جواب بررسی کنیم. اگر رفتار سیستم با تغییر پارامتر به طور ناگهانی عوض شود، می‌گوییم سیستم دست‌خوش **انشعاب** شده است. در یک نقطه‌ی انشعاب، تعداد نقاط تعادل و همچنین پایداری آن‌ها تغییر می‌کند.

فصل ۲

آشوب

می‌دانیم که ابزار تحلیل پدیده‌های طبیعی برای فیزیکدانان و مهندسان و بقیه علوم که نیاز به مدل‌سازی دارند، معادلات دیفرانسیل (یا معادلات تفاضلی) است. این معادلات که می‌توانند به صورت جزئی^۱ یا معمولی^۲ باشند، چارچوب تحلیلی قوی‌ای برای همه‌ی دانشمندان علوم طبیعی فراهم می‌کنند. در بسیاری از موارد برای سادگی تحلیل، مدل‌ها به صورت خطی تقریب زده می‌شوند. در این صورت ابزارهای ریاضی کاملی برای تحلیل این چنین مسائل وجود دارد. با این حال به محض اینکه چنین ساده‌سازی‌ای انجام ندهیم، با معادلات غیرخطی مواجه می‌شویم که پدیده‌های جدیدی چون چرخه حدی^۳ در آن مشاهده می‌شود. اما این تنها رفتار متفاوت دینامیک خطی با غیرخطی نیست. مدت‌ها به دلیل وجود قضیه پوانکاره- بندیکسون^۴ تصور می‌شد که یک سیستم یا دارای نقطه تعادل (چه پایدار و چه ناپایدار) است و یا دارای چرخه حدی است. البته این قضیه تنها برای سیستم‌های مرتبه دوم صادق بود، اما باور عموم بر آن بود که چنین قضیه‌ای برای سیستم‌های مرتبه بالاتر نیز برقرار است. با این حال مشاهده شد که برای سیستم‌های مرتبه سه به بالا، پدیده دیگری نیز علاوه بر این‌ها رخ می‌دهد و آن هم آشوب است. نظریه آشوب، به‌عنوان یک پدیده‌ی بسیار جالب، برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها از علوم مختلف از قبیل علوم پایه، اقتصاد، علوم مهندسی، بیولوژی، هواشناسی و

^۱Partial Differential Equation (PDE)

^۲Ordinary Differential Equation (ODE)

^۳Limit Cycle

^۴Poincare-Bendixon

مدیریت با موفقیت به کار گرفته شده است. برخی آشوب را بعد از نسبیت و فیزیک کوانتومی، سومین انقلاب فیزیک در قرن بیستم نامیده‌اند. تاکنون تعاریف زیادی برای آشوب مطرح شده است. با این وجود، تعریف کلی پذیرفته شده برای آشوب ارائه نشده است ولی غالباً تعریف زیر مورد تأیید است.

تعریف ۱.۰.۲. آشوب یک رفتار طولانی مدت نامتناوب در یک سیستم قطعی است، که وابستگی شدید به شرایط اولیه را نشان می‌دهد.

- منظور از **رفتار طولانی مدت نامتناوب** در سیستم‌های دینامیکی آن است که مسیرهایی وجود دارند که وقتی زمان به بی‌نهایت میل می‌کند، این مسیرها به نقاط تعادل، مدارهای متناوب و مدارهای شبه‌متناوب منتهی نمی‌شوند.

- **قطعی**، گویای آن است که سیستم، پارامترها یا ورودی‌های تصادفی ندارد و رفتار بی‌نظم آن، از غیرخطی بودن آن ناشی می‌شود.

- منظور از **حساس بودن به شرایط اولیه** در سیستم‌های دینامیکی، آن است که مسیرهایی نزدیک به هم، با سرعت و به‌طور نمایی از هم دور می‌شوند. در واقع این خصوصیت تفاوت اصلی سیستم‌های دینامیکی آشوبناک با سیستم‌های دینامیکی غیرآشوبناک است. در سیستم‌های دینامیکی غیرآشوبناک، اختلاف کوچک اولیه در دو مسیر، به‌عنوان خطای اندازه‌گیری بوده و به‌طور خطی با زمان افزایش پیدا می‌کند، در حالیکه در سیستم‌های دینامیکی آشوبناک، اختلاف بین دو مسیر با فاصله بسیار اندک، به‌طور نمایی افزایش می‌یابد.

۱.۲ تاریخچه آشوب

پوانکاره^۵ اولین کسی بود که اثبات کرد مسأله سه جرم (به‌عنوان مثال، خورشید، زمین و ماه) مسأله‌ای آشوبناک و غیرقابل حل است. گفته می‌شود که پیر لاپلاس^۶ و عمر خیام^۷ قبل از پوانکاره، به این مسأله پی‌برده بودند. پوانکاره در سال ۱۹۰۰ هنگامی که مشغول مطالعه روی مسأله جرم ماه، زمین و خورشید بود، پی‌برد این قبیل از مسائل توسط قوانین نیرو و حرکت نیوتن و قوانین کپلر قابل حل نیست و نوعی مسأله آشوب به‌نظر می‌رسد. این مسأله به‌بررسی چگونگی رفتار، مسیرهایی حرکت و سرعت حرکت اجرام می‌پردازد که به‌طور متقابل بر همدیگر اثر می‌گذارند. پس از سال ۱۹۰۰ نظریه آشوب با سرعت بیشتری به‌حرکت خود ادامه داد زیرا رفتارهایی که نظریه خطی امکان پاسخگویی به آنها را نداشت، روز به روز بیشتر می‌شد. به‌علاوه

^۵Henri Poincare

^۶Pierre Laplace

^۷غیاث‌الدین ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیام نیشابوری

با ظهور رایانه‌ها در دفاتر کار و ادارات و توانایی این دستگاه‌ها برای محاسبه اعمال تکراری، بسیاری از مسائل آشوب که درگیر تکرارهای بسیار زیاد و فرمول‌های ساده ریاضی بودند قابل حل به نظر رسید. اولین آزمایش واقعی در زمینه‌ی آشوب توسط یک هواشناس به نام ادوارد لورنز^۸ انجام شد. در سال ۱۹۶۰ وی روی یک مسأله‌ی پیش‌بینی وضع هوا کار می‌کرد که نتایج کار او به‌عنوان اثر پروانه‌ای شناخته شد. لورنز در سال ۱۹۶۳ نتیجه‌ی تحقیقات خود را تحت‌عنوان مقاله‌ای در یک مجله‌ی هواشناسی چاپ کرد که زیاد مورد توجه قرار نگرفت. در سال ۱۹۷۱ روئیل^۹ و تاکند^{۱۰} [۶] در بررسی یک سیستم میرا که تلاطم در سیالات را بیان می‌کرد، مفهوم جاذب‌های عجیب را معرفی کردند. از آن زمان به بعد، گسترش نظریه آشوب مدیون تلاش‌های افرادی چون بنویت مندلبرات^{۱۱}، هنگ‌وان کخ^{۱۲} و میچل فیگن باوم^{۱۳} است. فیگن باوم ضمن مطالعه‌ی نگاشت‌های یک بعدی متوجه به وجود آمدن آشوب از طریق یکسری دوشاخگی‌های دو برابر کننده‌ی پی‌رود شد و در پی آن توانست خواص زیادی را در این نگاشت‌ها در گذر به آشوب به‌دست آورد [۷، ۸، ۹، ۱۰]. در ادامه تحقیقات وسیع‌تری در زمینه آشوب صورت گرفت و به تدریج نظریه آشوب در علوم مختلف راه پیدا کرد.

۲.۲ سیستم‌های آشوبناک

سیستم‌های آشوبناک دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی هستند که حساسیت زیادی به شرایط اولیه و تغییر در مقادیر پارامترهای سیستم از ویژگی‌های آن است. این سیستم‌ها به‌ازای شرایط اولیه متفاوت، پاسخ‌های متفاوتی دارند و رفتار قبلی خود را تکرار نمی‌کنند. با توجه به‌اینکه سیستم‌های آشوبناک دارای ساختاری معین بوده، دارای رفتارهای تصادفی نیز می‌باشند. هنگامی که ساختار سیستم معین باشد، سیستم به‌ازای یک ورودی فقط یک خروجی دارد در حالیکه در ساختار تصادفی به‌ازای یک ورودی خروجی‌های متعددی داریم. در یک سیستم آشوبناک، اطلاعات به‌صورت نمایی از هم دور می‌شوند یعنی اگر خطای کوچکی در شرایط اولیه وجود داشته باشد، این خطا به‌صورت نمایی رشد می‌کند و پس از مدتی تقریباً همه اطلاعات از هم دور می‌شوند و سبب ایجاد خطای بزرگی در نتایج می‌گردد. اگر خطا را در شرایط اولیه کاهش دهیم الزاماً خطا در نتایج نهایی کاهش نمی‌یابد بلکه ممکن است نتیجه عکس بدهد. این رفتار تصادفی سیستم را نشان می‌دهد که به‌ازای شرایط اولیه یکسان، نتایج متفاوتی حاصل می‌شود. سیستم‌های دینامیکی آشوبناک همانند سیستم‌های دینامیکی به دو دسته سیستم‌های آشوبناک زمان – پیوسته و سیستم‌های آشوبناک زمان – گسسته تقسیم

^۸Edward Lorentz

^۹Ruelle

^{۱۰}Takens

^{۱۱}Benoit Mandelbrot

^{۱۲}Koch

^{۱۳}Feigen Baum

می‌شوند. نوسانگر لورنز و نوسانگر راسلر نمونه‌هایی از سیستم‌های آشوبناک زمان-پیوسته هستند. سیستم‌های آشوبناک زمان-گسسته مانند نگاشت لجستیک^{۱۴}، نگاشت تنت^{۱۵} یا مثلثی و نگاشت بیکر^{۱۶} به صورت نگاشت هستند.

۱.۲.۲ شرایط لازم برای حرکت آشوبناک

سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.2)$$

شرایط لازم برای حرکت آشوبناک این سیستم عبارتند از:

(۱) سیستم حداقل سه متغیر دینامیکی متمایز داشته باشد.

(۲) معادله حرکت سیستم شامل حداقل یک جمله‌ی غیرخطی باشد.

یعنی در سیستم (۱.۲) مقدار n باید حداقل برابر با سه باشد و همین‌طور در مورد شرط دوم نمونه‌هایی از معادله‌های غیرخطی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2x_2 + \dots + cx_n, \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = ax_1 + b \sin x_2 + \dots + cx_n, \end{cases} \quad (2.2)$$

که a, b, c و مقادیر ثابتی هستند. چنین سیستم‌هایی اغلب به‌ازای برخی از مقادیری که ثابت‌ها به‌خود می‌گیرند آشوبناک هستند. شرایط گفته شده در بالا وجود آشوب را ممکن می‌سازد اما آن را تضمین نمی‌کند. وجود دو شرط زیر علاوه‌بر شرایط لازم مذکور، وجود آشوب در سیستم‌های دینامیکی را تضمین می‌نماید:

(۱) سیستم مورد نظر اتلافی باشد،

(۲) سیستم دارای نقطه تعادل ناپایدار باشد.

¹⁴Logistic Map

¹⁵Tent

¹⁶Baker



شکل ۱.۲: اثر پروانه‌ای

۳.۲ ویژگی‌های نظریه آشوب

نظریه آشوب دارای ویژگی‌های منحصربه‌فردی است که عبارتند از:

- اثر پروانه‌ای،
 - خودسازماندهی یا سازگاری پویا،
 - خودمانایی یا خودشباهتی،
 - جاذب‌های عجیب.
- حال هر کدام از این ویژگی‌ها را شرح می‌دهیم.

۱.۳.۲ اثر پروانه‌ای

چند نفر از دانشمندان آب و هواشناسی به بررسی شرایط آب و هوایی در یک منطقه خاص که در آن‌جا آب و هوا نسبتاً منظم و بی‌تغییر بود پرداختند. آن‌ها به مدت دو سال مشغول بررسی آب و هوای این منطقه بودند. در سال اول پدیده‌ای مشاهده نگردید. اما در پاییز سال دوم ناگهان دستگاه اندازه‌گیری آب و هوا، به هم ریختگی آب‌وهوا را نشان داد اما آثار این به هم ریختگی در آب و هوا مشاهده نگردید. دانشمندان بر آن شدند که این بی‌نظمی ایجاد شده در آب و هوا و دستگاه اندازه‌گیری را به گونه‌ای توجیه کنند اما این امر میسر نشد. دانشمندان یک سال دیگر به این شرایط ادامه داده تا به موفقیت دست یافتند و آن این بود که در آن سال به علت هجوم پرندگان به دریاچه‌ای در آن نزدیکی و پرزدن آن‌ها در فراز این دریاچه

فشاری به جو آمده که این فشار باعث آن گردیده است که دستگاه‌های اندازه‌گیری برخلاف آنچه دیده شده ثبت کنند. دانشمندان بر آن شدند که با استفاده از دستگاه‌ها، نبود پرندگان بر فراز این دریاچه را شبیه‌سازی کرده و نتایج را بررسی کنند. آن‌ها پس از بررسی به این نتیجه رسیدند که اگر این پرندگان آن سال به بالای دریاچه هجوم نمی‌آوردند طوفانی بزرگ در آن منطقه شکل می‌گرفت و باعث تخریب ۱۲ هکتار از این منطقه می‌گردید. در حقیقت پر زدن آن پرندگان باعث شده است که شرایط شکل‌گیری این طوفان پیش نیاید و در واقع مهم‌ترین اصل نظریه آشوب ایجاد گردید. این اصل بیان می‌کند که کوچک‌ترین تغییر در این جهان باعث بی‌نظمی‌های بزرگی خواهد گردید. این اثر به‌عنوان اثر پروانه‌ای شکل (۱.۲) شناخته شد. در سال ۱۹۶۵ هنگامی که لورنتس مشغول پژوهش روی مدل ریاضی بسیار ساده‌ای از آب و هوای زمین بود، به یک معادله دیفرانسیل غیر قابل حل رسید. وی برای حل این معادله به روش‌های عددی با رایانه متوسل گردید. او برای اینکه بتواند این کار را در روزهای متوالی انجام دهد، نتیجه خروجی هر شب را به‌عنوان ورودی روز بعد در نظر می‌گرفت. لورنتس در نهایت مشاهده کرد که نتیجه بررسی شده توسط رایانه او خروجی تا ۴ رقم اعشار دارد که این محال بود، چون رایانه او اعداد را تا ۶ رقم اعشار نشان می‌داد. پس به بی‌نظمی ایجاد شده در رایانه و آب و هوا دست یافت. این واقعیت، غیر ممکن بودن پیش‌بینی آب و هوا در درازمدت را نشان می‌داد. این مسأله، سنگ بنای نظریه آشوب است، زیرا براساس نظریه آشوب در تمامی پدیده‌های آشوبناک، نقاطی وجود دارد که تغییر اندک در آنها، باعث تغییرات عظیم می‌شود. به‌عبارت‌دیگر اثر پروانه‌ای این نظریه، به‌گونه‌ای است که یک تغییر جزئی در ابتدا منجر به یک دگرگونی بسیار بزرگ در پایان کار خواهد شد، بدین مفهوم که مثلاً، اگر پروانه‌ای در پکن^{۱۷} بر بزند ممکن است بر اثر این پرزدن، در نیویورک طوفانی ایجاد شود. اثر پروانه‌ای می‌تواند بر تعامل انسان‌ها با یکدیگر تأثیرگذار باشد. براساس این نظریه، هر عمل ما، آغازگر واکنشی است که انعکاس و انبساط یافته و بر آینده مؤثر واقع خواهد شد.

۲.۳.۲ خودسازماندهی و سازگاری پویا

سیستم‌های بی‌نظم در ارتباط با محیط‌شان مانند موجودات زنده عمل می‌کنند و نوعی تطابق و سازگاری پویا بین خود و محیط پیرامون‌شان ایجاد می‌کنند. این سیستم‌ها که والدراپ^{۱۸} آن‌ها را سیستم‌های پیچیده سازگار شونده^{۱۹} نام نهاده است در طبیعت بسیار موفق بوده و از طریق سازگاری پویا بقای خود را در طول زمان حفظ می‌کنند. مورگان^{۲۰} معتقد است که آشفستگی، سازگاری و انطباق را در هم می‌شکند و باعث خلاقیت مستمر در سایه تخریب خلاقیت پیشین می‌شود [۱۱].

¹⁷Beijing

¹⁸M. Waldrap

¹⁹Complex Adaptive systems

²⁰Morgan

ویژگی‌های سیستم‌های سازگار شونده عبارتند از:

- **خود کنترل و خود نظم‌اند**، یعنی هر کدام از سیستم‌های پویا دارای اجزای مستقلی هستند، که بدون گرفتن دستور از واحد مرکزی به‌طور خودگردان عمل می‌کنند.
- **سیستم جزئی از محیط خود است**، یعنی سیستم توانایی احساس و درک محیط خود و جذب اطلاعات از آن را دارد.
- **خاصیت یادگیرندگی**، یعنی این سیستم‌ها می‌توانند از طریق بازخورد یاد بگیرند، این ویژگی درونشان تعبیه شده است و جنبه خارجی ندارد، از طرف دیگر در مقابل محرک‌های بیرونی مختلف آرایش و سازماندهی متفاوتی از خود نشان می‌دهند.
- **سیستم، پیچیده است**، یعنی دارای اجزای زیادی است و اجزای آن با یکدیگر مرتبط هستند.

۳.۳.۲ خودمانایی یا خودشابهتی

در نظریه آشوب، نوعی شباهت بین اجزاء و کل قابل تشخیص است. بدین ترتیب که هر جزئی از الگو همانند و مشابه کل می‌باشند. به این خاصیت، خودشابهتی گفته می‌شود. خودشابهتی اولین بار در سال ۱۹۴۸ توسط دنیس گابور^{۲۱} مطرح شد [۱۲].

۴.۳.۲ جاذب‌های عجیب

در ابتدا مجموعه جاذب را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۲. مجموعه بسته A را جاذب گویند هرگاه:

(۱) A یک مجموعه ثابت باشد یعنی هر مسیری که از A شروع شود، برای همیشه در آن باقی بماند.

(۲) A یک مجموعه باز از شرایط اولیه را جذب کند. به عبارتی، مجموعه باز U شامل A وجود داشته باشد به طوری که اگر $x(0) \in U$ آنگاه فاصله $x(t)$ از A با گذشت زمان به صفر میل کند. یعنی A همه مسیرهایی را که از نقاطی به اندازه کافی نزدیک به آن شروع می‌شوند، جذب کند.

(۳) A مینیمال باشد، یعنی هیچ زیرمجموعه محض A وجود نداشته باشد که دارای خواص (۱) و (۲) باشد.

²¹Dennis Gabor

جاذب‌های عجیب در همه جا حضور دارند، همه آنچه را که ما در نظر اول بی نظم و آشوبناک می‌یابیم در دراز مدت و با تکرار، الگویی منظم از خود نشان می‌دهد. جاذب‌های عجیب از الگویی پیروی می‌کنند که این الگو به آنان معنی و مفهوم می‌بخشد. خلاصه آن که آشوبناک بودن روندها همه خیر از نظمی پنهان و کشف نشده می‌دهند. از مثال‌های این پدیده می‌توان به الگوی پاندولی اشاره کرد. جاذب‌ها انواع مختلف دارند مانند:

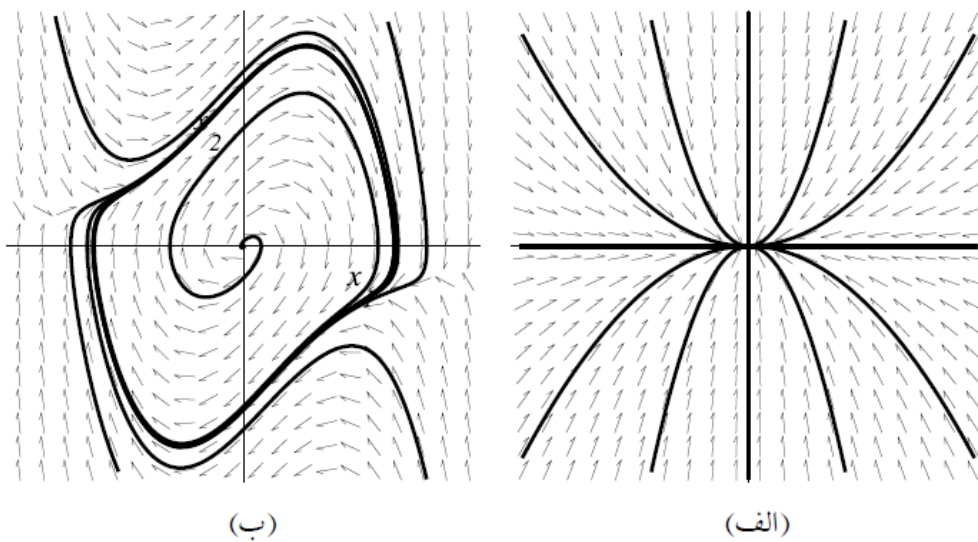
- جاذب نقطه تعادل،
- جاذب دور حدی،
- جاذب سطحی مارپیچی،
- جاذب عجیب.

جاذب‌های عجیب برخلاف جاذب‌های قبلی که نوعی نظم و قابلیت پیش‌بینی دارند، بی‌نظم هستند و به همین خاطر برخی آن‌ها را جاذب‌های بی‌نظم نیز نامیده‌اند. البته باید توجه داشت که صفت عجیب، اشاره به الگوی هندسی جاذب‌ها دارد در حالی که بی‌نظمی، دینامیک جاذب‌ها را مد نظر دارد و این دو باهم متفاوت هستند و از سوی دیگر باید توجه داشت که جاذب‌های بی‌نظم، عجیب هستند اما همه‌ی جاذب‌های عجیب، بی‌نظم نیستند. از این رو اصطلاح جاذب‌های عجیب برای این ویژگی صحیح‌تر می‌باشد. جاذب‌های عجیب بدون الگو نیستند و از الگوی خاصی پیروی می‌کنند و ارزش آنها هم در همین الگو داشتن است. این جاذب‌ها ویژگی‌های هندسی پیچیده‌ای دارند و دارای ابعاد غیرصحیح می‌باشند و مسیر آنها به هم چسبیده، چندجهته و گسترده است. در جاذب‌های عجیب هیچ مسیری تکرار نمی‌شود و هر مسیر برای خود مسیری جدید است. جاذب‌های عجیب در همه جا وجود دارند.

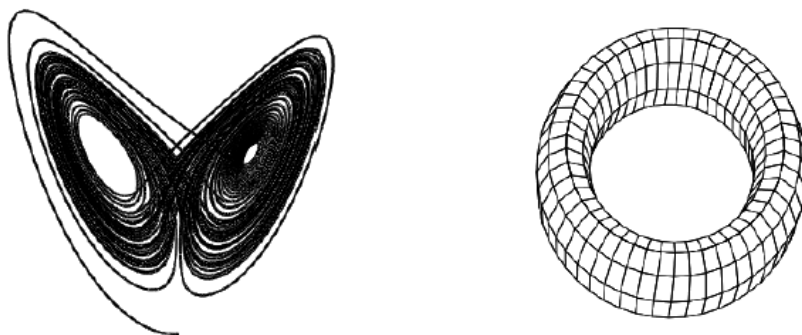
۴.۲ روش‌های تشخیص رفتار آشوبناک

دینامیک‌های آشوب‌گونه براساس قوانین مشخصی رخ می‌دهند که در ظاهر تصادفی هستند و در مقابل برای دینامیک‌هایی که با فرآیندهای تصادفی درست می‌شوند هیچ ساختاری به جز توزیع احتمال آن نمی‌توان به دست آورد. از روی مشاهده سری زمانی حاصل از یک فرآیند، تشخیص وجود طبیعت غیرخطی و آشوب‌گونه تقریباً غیرممکن است. به همین دلیل سعی شده‌است ابزارهایی برای تعیین الگوهای مشخصه و علامت‌هایی از وجود آشوب و یا رفتارهای خاص در مدل‌ها و اطلاعات تجربی فراهم شود. این روش‌ها عبارتند از:

- طیف فرکانسی،
- ساختار فضایی فاز،
- ابعاد دینامیک‌ها،



شکل ۲.۲: (الف) جاذب نقطه تعادل، (ب) جاذب دور حدی



شکل ۳.۲: (ج) جاذب سطحی مارپیچی، (د) جاذب عجیب

- حساسیت به شرایط اولیه،
- توان‌های لیاپانوف.

در ادامه هر یک از این روش‌ها را مختصراً مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۴.۲ طیف فرکانسی

یکی از ابزارهای تشخیص رفتار آشوبناک از رفتارهای متناوب تحلیل در حوزه فرکانس است. با رسم طیف فرکانسی^{۲۲} یک سری زمانی، مشخصاتی که در حوزه زمان، رسیدن به آن‌ها دشوار است ظاهر می‌شوند. در سیگنال‌های متناوب انرژی بر روی فرکانس‌های خاصی متمرکز است در صورتی که در رفتارهای آشوبناک، طیف فرکانسی در فرکانس‌های مختلف مقدار غیرصفر دارد و دارای باند پهن است. در سیستم‌های قطعی^{۲۳} وجود طیفی با باند وسیع می‌تواند نشان دهنده شروع آشوب باشد. گاهی برای تحلیل در حوزه فرکانس از مشخصات طیف توانی هم استفاده می‌شود. طیف فرکانسی حاصل از یک سری زمانی تصادفی و سری زمانی مربوط به سیستم‌های دینامیکی حقیقی آمیخته با نویز نیز دارای باند گسترده است، که تشخیص این موارد صرفاً از روی طیف فرکانسی امکان‌پذیر نیست. در کل تحلیل فرکانسی به‌تنهایی ابزار دقیقی برای تشخیص وجود آشوب نیست.

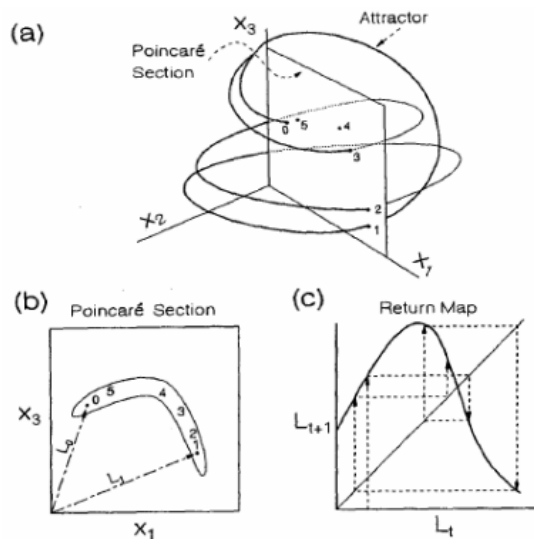
۲.۴.۲ ساختار فضای فاز

رفتار سیستم‌های آشوبناک در فضای فاز رفتاری بسیار پیچیده و غیرقابل پیش‌بینی است. فضای فاز در سیستم‌های غیرآشوبناک با سه متغیر حالت در یک صفحه قرار می‌گیرد. وقتی دینامیک، آشوبناک می‌شود جاذب بُعد بالاتری پیدا می‌کند و مسیرهای زمانی در یک صفحه باقی نمی‌مانند.

یک روش ساده برای تشخیص وجود آشوب این است که سری زمانی را در فضای فاز رسم کنیم و از طریق مشاهده الگوی ایجاد شده رفتار را مشخص کنیم. اولین مسأله‌ای که در اینجا خودنمایی می‌کند مشخص نبودن متغیر حالت سری زمانی برای تشکیل فضای حالت است. برای برطرف کردن این مشکل از مقادیر زمان‌های گذشته سری استفاده می‌شود یعنی مسیر حرکت در فضای N_t, N_{t-1}, N_{t-2} رسم می‌شود. این روش تنها به سه بُعد محدود نیست و می‌توان ابعاد بالاتر را هم با افزایش تعداد تأخیرها در نظر گرفت ولی نمایش گرافیکی آن بسیار دشوار می‌شود. اگر تعداد تأخیر را برابر دو در نظر بگیریم به یک فضای سه بعدی می‌رسیم که تحلیل گرافیکی آن نیز مشکل است. برای ساده‌تر کردن مسأله، مطالعه را به مقاطع پوانکاره و ساختمان نگاشت پوانکاره متناظر، محدود می‌کنیم. مقطع پوانکاره در فضای سه بعدی از قطع

²²Frequency Spectra

²³Deterministic



شکل ۴.۲: (a) جاذب یک مدل فرضی، (b) مقطع پوانکاره ایجاد شده، (c) نگاشت برگشتی

کردن یک صفحه با جاذب و در نظر گرفتن نقاط تقاطع در این صفحه حاصل می‌شود. چنانچه شکل (۴.۲) (a) نشان می‌دهد مقطع پوانکاره یک برش صفحه‌ای، داخل جاذب است. نقاط شماره‌گذاری شده در شکل نقاط برخورد را به ترتیب رخ دادن در طول زمان نشان می‌دهد. در شکل (۴.۲) (b) مقطع پوانکاره و نقاط تقاطع روی آن نشان داده شده است، و منحنی بسته مجموعه نقاط تقاطع را مشخص می‌کند. همان‌طور که در مدل فرضی نشان داده شده است این منحنی یک ساختار سازمان یافته را بر روی جاذب نشان می‌دهد در حالیکه دینامیک‌های تصادفی نقاط نامنظم و پراکنده در صفحه ایجاد می‌کنند. برای مطالعه دقیق‌تر ساختار جاذب می‌توان نگاشت برگشت^{۲۴} را تشکیل داد. همان‌طور که در شکل (۴.۲) (c) نشان داده می‌شود برای ساختن این نگاشت باید به هر نقطه تقاطع در مقطع پوانکاره یک مقدار L_i نسبت داده و سپس نمودار L_{t+1} بر حسب L_t رسم شود. نگاشتی که ارتباط مقادیر این دنباله را با یکدیگر نشان می‌دهد، بیان‌کننده رابطه مشخصی برای سری است.

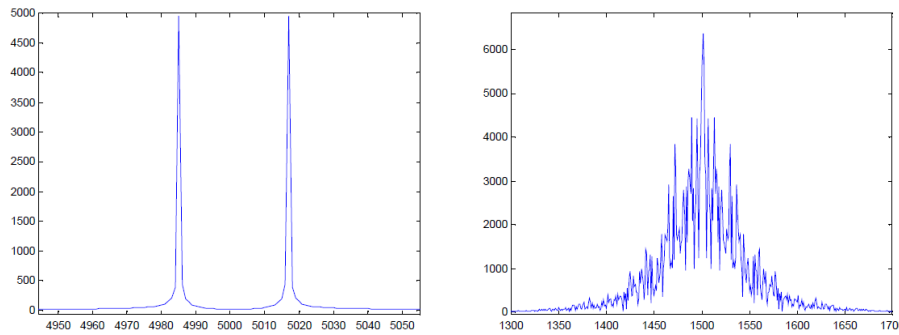
۳.۴.۲ ابعاد دینامیک‌ها

دینامیک‌های آشوبناک، جاذب‌های پیچیده‌ای ایجاد می‌کنند (۵.۲) که محدود به قسمتی از فضا هستند و نمی‌توانند کل فضا را پوشش دهند. جاذب‌های عجیب ابعاد غیر صحیح دارند. روش‌های مختلفی برای محاسبه بُعد آشوب و دینامیک‌های پنهان، پیشنهاد شده است از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- بعد همبستگی،^{۲۵}

²⁴Return Map

²⁵Correlation Dimension



شکل ۵.۲: مقایسه طیف فرکانسی بین دینامیک متناوب (چپ) و دینامیک آشوبناک (راست)

• بعد فرکتال،^{۲۶}

• بعد اطلاعات،^{۲۷}

• بعد لیاپانوف،^{۲۸}

در این قسمت در مورد بعد همبستگی که به علت زمان بری کمتر، بیشتر از سایر روش‌ها استفاده می‌شود مختصراً توضیح می‌دهیم.

این روش در سال ۱۹۸۳ توسط گراسبرگر^{۲۹} و پروکاسیا^{۳۰} معرفی گردید. فرض کنید جواب‌های معادله بر روی یک جاذب عجیب در فضای n بعدی قرار دارد که در زمان‌های مشخصی نمونه برداری شده است. در این فضا جمع همبستگی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_r = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \theta(r - |X_i - X_j|)$$

که در آن

r : شعاع یک ابر دایره n بعدی، به مرکز X_i

X_i : یک بردار n بعدی، نشان دهنده نقاط نمونه برداری شده روی جاذب

N : تعداد نقاط نمونه برداری شده روی جاذب

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{اگر } r > |X_i - X_j| \\ 0 & \text{اگر } r \leq |X_i - X_j|. \end{cases}$$

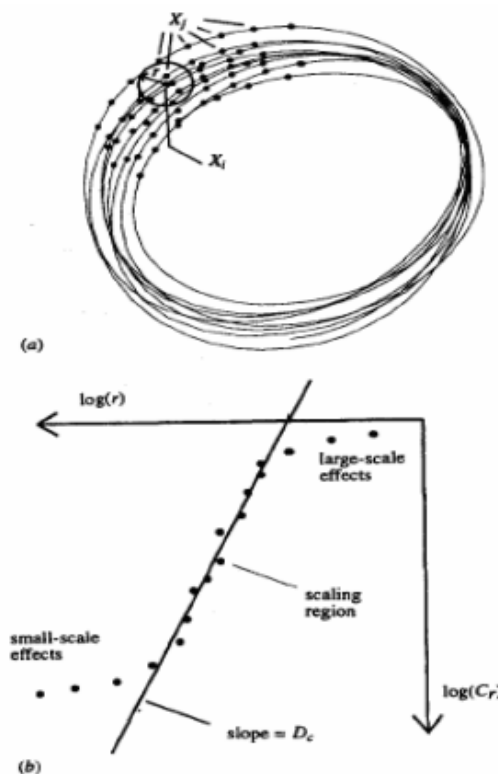
²⁶Fractal Dimension

²⁷Information Dimension

²⁸The Lyapunov Dimension

²⁹Grassberger

³⁰Procaccia



شکل ۶.۲: روش به‌دست آوردن بعد همبستگی

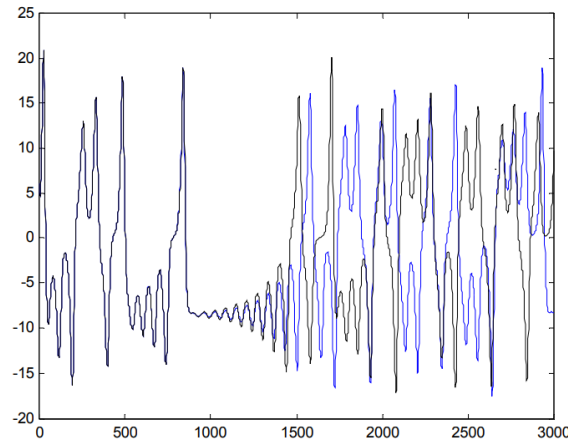
شکل (۶.۲) روش به‌دست آوردن C_r را در فضای سه بعدی نشان می‌دهد. ابتدا به مرکز هر نقطه X_i از نقاط روی جذب، یک دایره به شعاع r رسم می‌کنیم. کاری که تابع θ انجام می‌دهد در واقع شمارش تعداد نقاط نمونه برداری شده روی جذب است که در این دایره قرار می‌گیرند. با انجام این کار برای تمام نقاط نمونه‌برداری شده روی جذب و جمع کردن تمام مقادیر و نرمالیزه کردن حاصل نسبت به بیشترین مقدار ممکن برای این جمع، مقدار C_r بدست می‌آید. با این روش، بیشترین مقدار C_r برابر یک خواهد بود و این زمانی اتفاق می‌افتد که r بزرگتر از بیشترین قطر جذب در نظر گرفته شود به‌طوری‌که در هر N دایره رسم شده، تمام $N - 1$ نقطه دیگر قرار گیرند. کمترین مقدار C_r برابر $\frac{2}{N(N-1)}$ خواهد بود و زمانی بدست می‌آید که r به اندازه‌ای کوچک باشد که تنها دو نقطه در همسایگی یکدیگر قرار گیرند. در این صورت داریم:

$$C_r \propto D_c \log(r)$$

که در آن D_c بعد همبستگی است. اگر از دو طرف رابطه بالا \log بگیریم، خواهیم داشت:

$$\log(C_r) \propto D_c \log(r)$$

اگر مقدار D_c را به‌ازای مقادیر مختلف r حساب کنیم و حاصل را به‌صورت منحنی $\log(r)$ برحسب $\log(C_r)$ رسم کنیم، منحنی شبیه به شکل (۶.۲) (b) حاصل خواهد شد. شیب مماس



شکل ۷.۲: واگرا شدن پاسخ در اثر اختلاف در شرایط اولیه

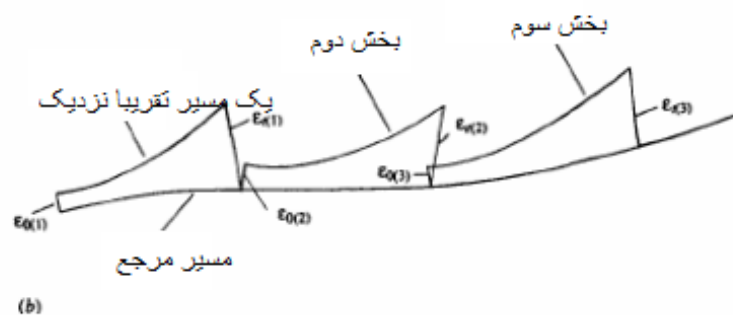
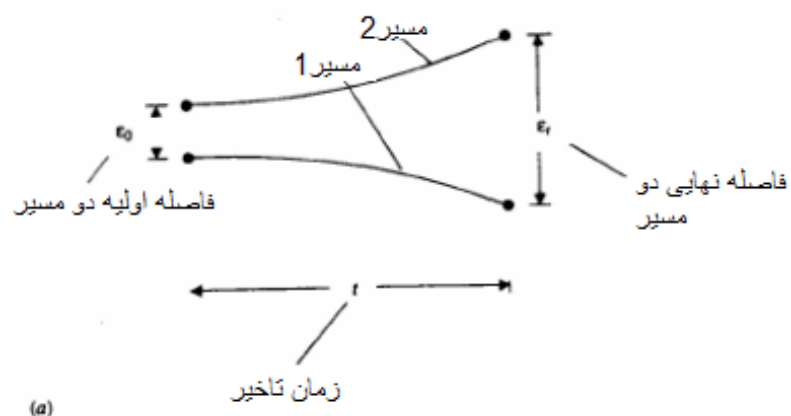
بر منحنی در ناحیه‌ای که رفتار منحنی همبستگی، تقریباً خطی است مبین بعد همبستگی خواهد بود.

۴.۴.۲ حساسیت به شرایط اولیه

سری‌های آشوبناک خصوصیتی دارند که آنها را از سایر دینامیک‌ها متمایز می‌کند. وقتی سیستمی در فضای پارامترها در ناحیه آشوب قرار دارد، کوچکترین تغییر در مقدار اولیه باعث می‌شود سیستم رفتار کاملاً متفاوتی را بعد از گذشت زمان‌های طولانی از خود نشان دهد. اگر دو جواب مختلف یک معادله مشخص، واقع در ناحیه آشوب را در نظر بگیریم که تفاوتشان تنها اختلاف در مقدار جزئی مقادیر اولیه است، دو جواب با گذشت زمان نسبت به یکدیگر واگرا می‌شوند درحالی‌که هر دو در ناحیه محدودی از فضای حالت باقی می‌مانند. این خصوصیت به‌عنوان حساسیت به شرایط اولیه نامیده می‌شود. در شکل (۷.۲) برای مقادیر مختلف خروجی دینامیک لورنز، به‌ازای دو نقطه شروع مختلف که تنها 0.0001 با هم اختلاف دارند کاملاً مشهود است. چنانچه دیده می‌شود رفتار دینامیکی سیستم در لحظات آغازین برای دو حالت تقریباً یکسان است و با گذشت زمان، تفاوت در رفتار ظاهر می‌شود. زیرا به‌علت رفتار آشوبناک، نقاط آغازین که در ابتدا به هم نزدیک هستند با گذشت زمان از هم دور خواهند شد.

۵.۴.۲ توان‌های لیپانوف

توان‌های لیپانوف، معیاری عددی است که میزان آشوبناک بودن رفتار سیستم را نشان می‌دهد. در جاذب‌های عجیب مسیرهای نزدیک به هم با گذشت زمان از یکدیگر دور می‌شوند و این فاصله با گذشت زمان به‌طور نمایی افزایش می‌یابد. در شکل (۸.۲) فاصله گرفتن مسیرها در طول زمان دیده می‌شود. در این شکل ϵ نشان دهنده‌ی اختلاف اولیه در نقطه شروع دو مسیر نزدیک به هم، روی جاذب است. بعد از گذشت زمان t این مسیرها از یکدیگر دور



شکل ۸.۲: دور شدن مسیره‌ها از یکدیگر و توان‌های لیاپانوف

می‌شوند و فاصله آنها به ε_t می‌رسد، پس داریم:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 e^{\lambda t}$$

و

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0}\right).$$

اگر $\lambda < 0$ مسیره‌ها به هم نزدیک می‌شوند و اگر $\lambda > 0$ مسیره‌ها از هم دور خواهند شد. به‌طور کلی، توان لیاپانوف را برای کل مسیر حرکت بدست می‌آوریم. لذا میانگین توان‌های لیاپانوف که در نقاط مختلف روی مسیر محاسبه شده‌اند، در نظر گرفته می‌شود. مثالی که در شکل (۹.۲) (c) دیده می‌شود نمونه‌ای از یک سیستم یک بعدی است. برای ابعاد بالاتر به اندازه بعد فضا، توان لیاپانوف برای جاذب بدست خواهد آمد که هر کدام میزان دور یا نزدیک شدن مسیره‌ها را در یک جهت خاص مشخص می‌کنند. در سیستم‌های آشوبناک حداقل یکی از توان‌های به‌دست آمده مقداری مثبت خواهد داشت. (۹.۲) (d) تأثیر مثبت توان لیاپانوف در یک راستای خاص دیده می‌شود. در جهتی که توان لیاپانوف مقداری مثبت دارد، پیش‌روی در طول مسیر کشیدگی ایجاد می‌شود. در فضای سه بعدی از سه توان لیاپانوف استفاده می‌کنیم که برای جاذب‌های مختلف این توان‌ها به صورت زیر خواهند بود:

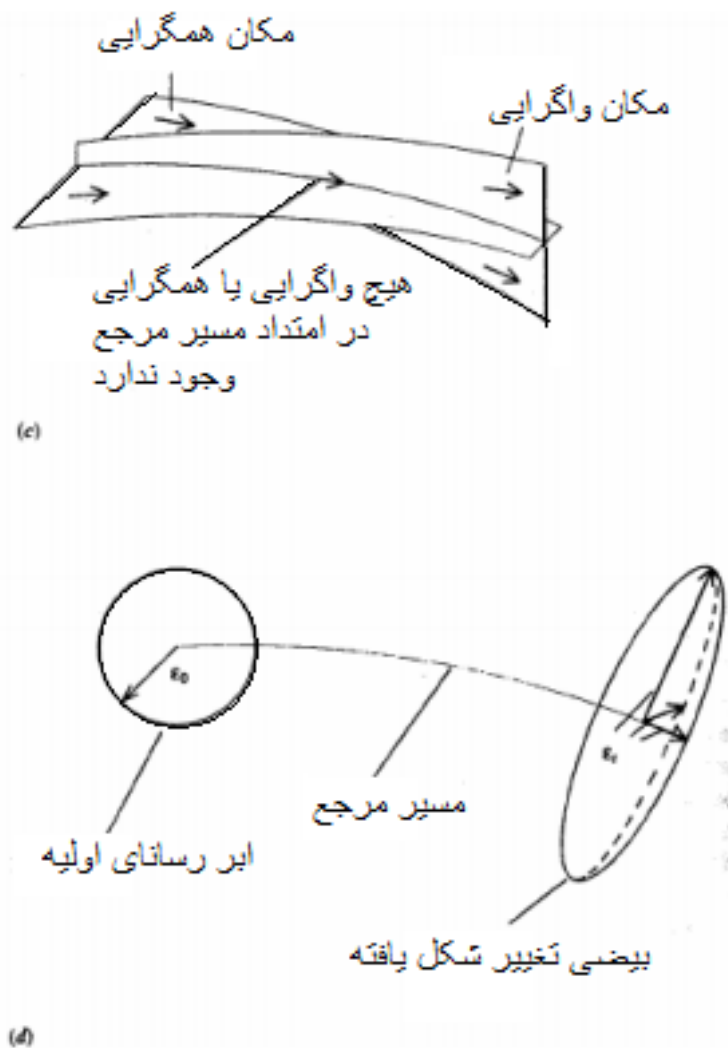
- جاذب نقطه تعادل: $(-, -, -)$ ،
- دور حدی: $(0, -, -)$ ،
- شبه متناوب $(0, 0, -)$ ،
- جاذب آشوبناک $(+, 0, -)$.

۵.۲ کاربرد آشوب

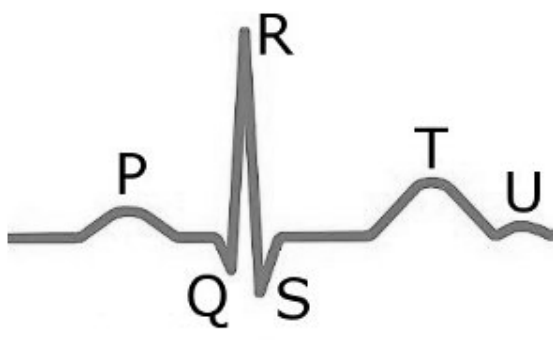
نظریه آشوب دانش نوینی است که برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها با موفقیت به کار گرفته شده است. در این بخش چند نمونه از کاربردهای نظریه آشوب ارائه شده است.

۱.۵.۲ قلب و عروق

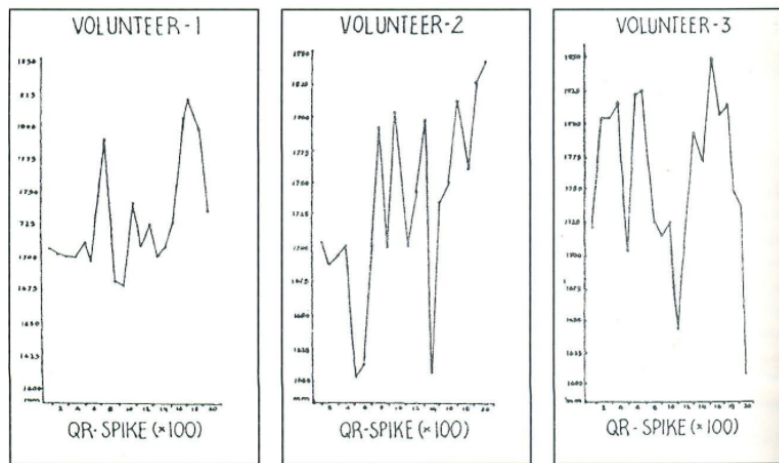
قلب انسان دارای یک الگوی آشوبناک است. زمان بین ضربان‌ها ثابت باقی نمی‌ماند و مقدار این ضربان به فعالیت که شخص در حال انجام آن است، بستگی دارد. ضربان قلب می‌تواند تحت شرایط خاصی، سرعت بگیرد. در شرایط مختلف، ضربان قلب نامنظم و غیرقابل پیش‌بینی است لذا در اغلب اوقات ضربان قلب به‌عنوان یک پدیده آشوبناک شناخته می‌شود. تجزیه و تحلیل یک ضربان قلب به محققان پزشکی کمک می‌کند تا به‌جای مواجهه با یک سیستم



شکل ۹.۲: تأثیر مثبت توان لیبانوف در یک راستای خاص



شکل ۱۰.۲: یک نمونه سیگنال ECG



شکل ۱۱.۲: یک نمونه سیگنال ECG

آشوبناک غیرقابل کنترل، راهکارهایی برای بهبود ضربان قلب غیرطبیعی پیدا کنند و آن را دوباره در حالت پایدار قرار دهند. با استفاده از ضبط ECG نرمال، شکل (۱۰.۲) در ۱۰۰ سیکل و فقط اندازه‌گیری ارتفاع پیک OR نوسانات بسیار گسترده‌ای مشاهده می‌گردد، که این مشاهده میزان اتفاقی بودن فعالیت الکتریکی قلب را نشان می‌دهد. نتایج این تحقیق در شکل (۱۱.۲) به‌نمایش درآمده‌است. ارتفاع نامنظم که معرف ضربه‌های الکتریکی هزارم ولت از گره سینوسی است به‌وضوح نشان می‌دهد که رفتار اتفاقی و یا آشوبناک در این ارگان حیاتی معمول است و این امروزه به‌معنای سلامت قلب است. در واقع به‌بیان علمی‌تر، سیگنال ECG فقط باید زمانی که حالت استاتیک دارد منظم باشد. به‌همین دلیل است که از قلب انسان مرده، سیگنال ECG ثبت شده خیلی صاف و منظم است. نتایج متناقض و نامتوازن در پروسه‌های به‌ظاهر عادی، هنگامی که همان سیستم به‌عنوان یک سیستم آشوبناک مورد مطالعه قرار می‌گیرد، نشان می‌دهد که اعتماد به معادلات و روابط خطی و ساده‌سازی‌ها در مسائل با ماهیت غیرخطی چه مشکلات و پیامدهای جبران‌ناپذیری در پی دارد. برای مطالعه بیشتر در مورد کاربرد آشوب در قلب و عروق می‌توان به [۱۳] مراجعه کرد.

۲.۵.۲ مخابرات امن

در سال‌های اخیر دنیای رسانه مرهون تصاویر دیجیتالی است که انتقال ایمن آن‌ها مبحثی بسیار مهم در مخابرات ایمن است. کاربردهای زیادی نظیر پایگاه داده‌های ارتش، کنفرانس‌های ویدیویی محرمانه، سیستم تصویری پزشکی، کابل‌های تلویزیون، آلبوم‌های تصویری شخصی اینترنتی و مانند این‌ها، نمایانگر نیاز مبرم به تکنیک‌های مناسب رمز کردن تصاویر است که به‌اندازه کافی ایمن، قابل اطمینان، سریع و مستحکم بوده و به‌توان با اطمینان لازم اقدام به نگهداری و انتقال این‌گونه از داده‌ها نمود. در طول دهه‌ی گذشته الگوریتم‌های رمزسازی متعددی در تحقیق‌های مختلف، پیشنهاد شده‌است. از میان آن‌ها، تکنیک رمزسازی بر مبنای

آشوب، یک روش عملی و خوب است که ترکیبی از سرعت، امنیت بالا، پیچیدگی، محاسبات معقول و برتری محاسباتی است.

۳.۵.۲ ژنتیک

همواره در سلامتی تنوع و گوناگونی است و در بیماری این گستره باریک‌تر است. محدودیت‌ها را در بیماری می‌توان جستجو کرد. مشکلات غده هیپوفیز، کوتاه قدی، رشد غیرعادی و آکندروپلازی از جمله اختلالات هورمونی و ژنتیکی شناخته شده‌است. مواجه طولانی مدت با باکتری‌ها، توکسین‌ها و یا مواد سمی نیز اثرات ژنتیکی همانند چهره شیرگون در هانسن‌ها، چانه باریک در کار کردن با فسفر، پایین آمدن ارتفاع پل بینی به علت سفلیس مادرزادی را ایجاد می‌کند.

جمجمه سنجی، اندازه گیری دقیق جمجمه می‌باشد که به نظر می‌رسد توسط آن به‌توان کلید ایجاد بیماری و تشخیص آن را پیدا کرد. با کمی نگهداری سوابق مناسب در یک نفر می‌توان یک بیمار مبتلا به سفلیس، سرطان یا (HIV) را صرفاً با مشاهده چک لیست‌های رایج، تشخیص داد. همچنین با رویکردی دیگر که نهفته در نظریه آشوب است، توسط سنجش صفات قابل اندازه گیری مثل طول بدن، صورت و چگونگی تغییرات آن نیز می‌توان به نتایج مشابهی رسید.

۴.۵.۲ اقتصاد

یکی از افق‌هایی که آشوب به‌زیبایی در آن بروز می‌کند، اقتصاد است. تا مدت‌ها و بر اساس نظر اقتصاددان‌های کلاسیک، سیستم‌های اقتصادی به‌طور باور نکردنی ساده بود، شما محصولی را تولید می‌کنید که مورد نیاز مردم است. تقاضا زیاد می‌شود، تولید شما بالاتر می‌رود و ارزش سهام شرکت شما در بورس زیاد می‌شود. برای پاسخ به نیاز جامعه باید تولید خود را افزایش دهید تا به سود بیشتری دست پیدا کنید. چقدر خوب! اما داستان جور دیگری است. چرخه تولید و روند توزیع به‌شدت زیر نفوذ پدیده آشوب قرار دارند. چرا که پدیده‌ای به نام بازتاب یا بازخورد وجود دارد. اتفاقات کوچکی که در اولین قدم‌ها می‌افتد، تبلیغات و عوامل نامعلوم دیگر، محاسبات شما را بر هم می‌زند. اگر شما این عوامل را به‌خوبی نشناسید، ناگهان رقیب گمنام شما از شما پیشی می‌گیرد و شما را تا آستانه سقوط می‌کشاند. در نظریات جدید اقتصادی، به پدیده آشوب توجه ویژه‌ای نشان داده می‌شود. پیش‌بینی ناپذیری بازارهای بورس و تاثیراتی که به‌عنوان مثال گرم شدن هوا در جنوب شرقی آسیا بر صنایع هواپیما سازی آمریکا می‌گذارد، به‌دلیل حضور این پدیده است. به‌عنوان مثال، از تابع لجستیک برای مدل‌سازی قیمت روزانه نفت در بازه زمانی ۱۹۹۸-۲۰۰۰ استفاده شده است [۱۴، ۱۵، ۱۶].

۶.۲ کنترل آشوب

همان‌طور که قبلاً گفته شد، سیستم‌های آشوبی دارای ویژگی‌های مختلفی هستند که یکی از مهمترین آن‌ها حساسیت زیاد به شرایط اولیه است. تفاوت بسیار کوچکی در شرایط اولیه باعث تفاوت بسیار در وضعیت آن در لحظات بعد خواهد شد. درست به همین دلیل، ابتدا تصور می‌شد که کنترل سیستم‌های آشوبی ممکن نباشد و آن‌ها دارای دینامیک کنترل‌ناپذیر و پیش‌بینی‌ناپذیری باشند. اما در مقاله‌ای از اُت^{۳۱}، گری‌بوجی^{۳۲} و یورک^{۳۳} که از افراد شاخص آشوب و کنترل هستند در سال ۱۹۹۰ امکان چنین چیزی اثبات شد [۱۷]. در واقع کنترل آشوب به معنای پایدارسازی^{۳۴} سیستم حول نقطه تعادل است. اهداف مختلف کنترلی برای یک سیستم آشوبی قابل تصور است، که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- **حذف رفتار آشوبناک و پایدارسازی به نقطه تعادل:** یعنی سیستمی دارای رفتار آشوبناک است و این رفتار برای ما مطلوب نیست. پس حذف چنین چیزی لازم است.
- **هم‌زمانی^{۳۵} دو سیستم آشوبناک:** هم‌زمانی دو سیستم آشوبناک نیز به معنای این است که بخواهیم حالت دو سیستم آشوبناک دقیقاً مشابه هم شوند. کاربردهای این کار برای مثال، در مخابرات امن مطرح می‌شود.
- **پادکنترل آشوب^{۳۶} (ضدکنترل آشوب-آشوب‌سازی^{۳۷}):** چنین کاری به آن معناست که سیستمی را که به خودی خود دارای رفتار آشوبناک نیست (مثلاً در نقطه تعادل پایدار است) رفتار آشوبناک پیدا کند. وجود آشوب در بعضی از موارد چون میکس کردن مواد مختلف و کنترل ضربان قلب لازم است.
- **پایدارسازی یکی از مسیرهای متناوب ناپایدار^{۳۸} (و ایجاد چرخه حدی پایدار):** همانند مورد اول یعنی سیستمی دارای رفتار آشوبناک است و این رفتار برای ما مطلوب نیست. پس حذف چنین چیزی لازم است.
- **کنترل دوشاخگی^{۳۹} (انشعاب):** دوشاخگی یکی از پدیده‌هایی است که پیش از آشوبناک شدن سیستم رخ می‌دهد. در کنترل دوشاخگی یکی از دو هدف زیر مورد نظر است:
 - (۱) به عقب انداختن (یا جلو انداختن) دوشاخگی

³¹Ott

³²Grebogi

³³Yorke

³⁴Stabilization

³⁵Synchronization

³⁶Anticontrol of Chaos

³⁷Chaotification

³⁸Unstable Periodic Orbit

³⁹Bifurcation Control

(۲) تغییر نوع دوشاخگی (پایدار، ناپایدار و غیره)

ارتباط دوشاخگی با آشوب از آنجا که معمولاً پیش از آشوبناک شدن یک سیستم، چندین و چند دوشاخگی رخ می‌دهد، مشخص است. با عقب انداختن دوشاخگی می‌توان آشوب را به تأخیر انداخت.

۷.۲ روش‌های کنترل آشوب

روش‌های مختلفی برای کنترل آشوب وجود دارد.

(۱) روش‌هایی که از ویژگی‌های ذاتی سیستم آشوبناک استفاده می‌شود، این روش‌ها معمولاً از سه ویژگی استفاده می‌کنند:

(الف) حساسیت بسیار زیاد آشوب به اختلال،^{۴۰}

(ب) ارگودیکی دینامیک آشوبناک،

(ج) بازگشتی بودن^{۴۱} سیستم‌های آشوبناک،

حساسیت آشوب به اختلاف کوچک باعث می‌شود که ما بتوانیم با تغییر کوچک در ورودی، تغییرات قابل توجه‌ای در حالت آینده سیستم داشته باشیم. پس با انتخاب مناسب ورودی می‌توان از دینامیک آشوب استفاده کرد و تغییرات بزرگی در رفتار کلی سیستم ایجاد کرد. دینامیک آشوبناک به همه نقاط جاذب عجیب خود سر می‌زند و می‌توان مطمئن بود که در صورت به‌اندازه کافی صبر کردن، حتماً به همسایگی نقطه مورد نظر می‌رسیم. با استفاده از این خاصیت می‌توان کنترلی را طراحی کرد که تنها در نزدیکی هدف مورد نظر، فعال شود و در بقیه نقاط هیچ تأثیری بر دینامیک نداشته باشد. به اندازه دلخواه نزدیک شدن به نقطه مورد نظر در سیستم‌های آشوبناک به شرط آن‌که نقطه در محدوده جاذب عجیب آن باشد، تضمین شده است. بازگشتی بودن دینامیک در سیستم‌های آشوبناک خاصیت دیگری است که می‌توان از آن برای کنترل سیستم‌های آشوبناک استفاده کرد. بازگشتی بودن این تضمین را به ما می‌دهد که در صورتی که نگاشت پوانکاره را^{۴۲} از دینامیک تشکیل دهیم، بعد از طی شدن زمان T دوباره به نقطه‌ای در همسایگی نقطه پیشین می‌رسیم. از این خاصیت می‌توان برای طراحی کنترل‌کننده استفاده کرد.

برخی از این روش‌ها عبارتند از:

⁴⁰Perturbation

⁴¹Recurrence

⁴²Poincare Map

- خطی‌سازی نگاشت پوانکاره (روش OGY)،^{۴۳}
- کنترل فیدبک تاخیری (روش TDFC)،^{۴۴}
- کنترل ضربه‌ای^{۴۵} و کنترل OPF،^{۴۶}

حال هر کدام از این روش‌ها را شرح می‌دهیم.

روش (OGY)

اولین روش کنترل سیستم‌های آشوبناک، روشی موسوم به (OGY) است [۱۷]. این روش از خواص سیستم‌های آشوبناک یعنی حساسیت، ارگودیک و بازگشتی بودن برای طراحی کنترل‌کننده مؤثر آشوب بهره می‌برد. اساس کار آن بر خطی‌سازی حول نگاشت پوانکاره است. (TDFC) یکی از روش‌های متداول کنترل سیستم‌های آشوبناک، استفاده از فیدبک تأخیردار است. برخلاف اغلب کاربردهای کنترلی که در آن‌ها وجود تأخیر نامطلوب است و تحلیل را بسیار پیچیده می‌کند، در این روش وجود تأخیر باعث به‌وجود آمدن روشی ساده و مؤثر برای کنترل (UPO) سیستم‌های آشوبناک می‌شود. ایده اولیه به‌کارگیری تأخیر برای کنترل آشوب توسط پایراگاس^{۴۷} در سال ۱۹۹۲ مطرح شد [۱۸].

روش کنترل ضربه

یکی از روش‌های دیگر کنترل سیستم‌های آشوبناک، روش (OPF) است. اساس این روش بسیار شبیه به ایده (OGY) است و حتی می‌توان تفسیری (OGY) – گونه از آن داشت. درست همان‌طور که (OPF) را می‌توان به‌عنوان حالت خاص و یک بعدی روش (OGY) دانست، می‌توان به‌عنوان روشی از روش‌های کنترل ضربه‌ای نیز در نظر گرفت. کنترل ضربه‌ای، کنترلی است که اعمال سیگنال کنترلی به‌صورت ضربه‌هایی است که تنها در زمان گسسته صورت می‌گیرد و می‌توان حالت دینامیک را ناگهان تغییر دهد. تئوری ریاضی این روش‌ها، معادلات دیفرانسیل ضربه‌ای^{۴۸} است که توسط لچمیکان دم^{۴۹}، بی‌نوف^{۵۰} و سی‌میونوف^{۵۱} معرفی شده است [۱۹].

⁴³Linearization of Poincare(OGY method)

⁴⁴Time-Delayed Feedback Control(TDFC)

⁴⁵Impulsive Control

⁴⁶Occasional Proportional Feedback(OPF)

⁴⁷Pyragas

⁴⁸Impulsive Differential Equation

⁴⁹Lakshmikantham

⁵⁰Bainov

⁵¹Simeonov

۲) روش‌های کنترل کلاسیک و ترکیبی، بسیاری از روش‌های متداول کنترل غیرخطی نیز برای کنترل آشوب استفاده شده‌است. در واقع، در این روش‌ها بدون در نظر گرفتن ویژگی‌های خاص سیستم آشوبناک، طراحی، مانند یک سیستم با دینامیک غیرخطی صورت می‌گیرد. ویژگی بارز این روش‌ها این است که در صورتی که برای حالت کلی‌شان اثبات پایداری و غیره وجود داشته باشد، برای حالت خاص آشوبناک نیز چنین اثباتی برقرار خواهد بود و از آنجا که نظریه کنترل کلاسیک، تاکنون پیشرفت قابل ملاحظه‌ای کرده‌است، معمولاً چنین طراحی‌هایی، این ویژگی‌ها را خواهند داشت. اما از طرف دیگر چون ویژگی‌های آشوب در نظر گرفته نشده‌است، نتیجه مؤثر و خوب طراحی‌های ویژه آشوب مانند روش (OGY) و (TDFC) را نخواهد داشت. به‌طور مشخص ویژگی کنترل سیگنال کوچک، معمولاً برای آن‌ها برقرار نیست. به‌عنوان نمونه‌ای از این روش‌ها می‌توان طراحی با استفاده از روش پس‌گام را مثال زد که آشوب حذف شده و سیستم دارای نقطه تعادل پایدار است [۲۰، ۲۱].

ایده‌ای که برای ترکیب روش‌های کلاسیک و ویژگی‌های دینامیک آشوب استفاده می‌شود، استفاده از خاصیت ارگودیکی آشوب است. بدین‌صورت که سیگنال کنترل اعمال نمی‌شود، مگر اینکه وضعیت سیستم، به یک همسایگی به‌اندازه‌ی کافی کوچکش نزدیک شده باشد. اگر نقطه مورد نظر جزء جاذب عجیب دینامیک باشد، مطمئن هستیم که در زمان محدود به‌اندازه کافی به آن نقطه نزدیک خواهیم شد. این ایده با استفاده از طراحی بهینه خطی محلی (LQR) برای پاندول معکوس آشوبناک شده با استفاده از سیگنال تحریک خارجی در [۲۲] به کار گرفته شده است. همچنین چنین ایده‌ای برای کنترل آشوب دینامیک‌های زمان-گسسته نیز به کار رفته است [۲۳]. بدین‌صورت که خطی‌سازی حول نقطه تعادل ناپایدار دینامیک آشوبناک صورت گرفته و با استفاده از آن طراحی کنترل‌کننده (LGR) انجام گرفته‌است.

۸.۲ کاربردهای کنترل آشوب

در سال‌های اخیر، کنترل آشوب با توجه به برنامه‌های کاربردی بالقوه خود در زمینه ارتباطات امن، سیستم‌های نوری، شیمیایی، فیزیکی، بیولوژیکی و شبکه‌های عصبی مورد توجه قرار گرفته‌است [۲۴، ۲۵]. یکی از اولین کاربردهای کنترل آشوب پایداری‌سازی شدت روشنایی^{۵۲} خروجی آشوبناک لیزر است که در [۲۶] گزارش شده‌است. با استفاده از روش (OPF) توانستند تا حد ۱۵ برابر توان خروجی را افزایش دهند. از روش‌های کنترل آشوب برای پایداری‌سازی (UPO) در مدارهای الکترونیک قدرت نیز استفاده شده‌است. به‌عنوان مثال به [۲۷] مراجعه کنید. علاوه بر این‌ها از کنترل آشوب برای موارد پزشکی نیز استفاده شده است. به‌عنوان

⁵²Intensity

نمونه در [۲۸] از تکنیک‌های کنترل آشوب برای حذف آریتمی^{۵۳} قلبی استفاده شده است. همچنین در [۲۹] از روش (TDFC) برای کنترل مدلی از فیبری^{۵۴} شدن استفاده شده است. همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، کنترل آشوب اخیراً در مخابرات کاربرد بسیار زیادی پیدا کرده است. برای خلاصه‌ای از کاربردهای آن در مخابرات ایمن به [۳۰] مراجعه کنید. همچنین فهرستی از کاربردهای روش کنترل ضربه‌ای در مخابرات در [۳۱] بیان شده است. در [۲۲] ابتدا آونگ معکوسی را با تزریق سیگنال خارجی آشوبناک می‌کنند و سپس با روش‌های کنترل آشوبناک آن را کنترل می‌کنند. هدف از چنین کاری، انجام طراحی محلی برای سیستم ذاتاً غیرخطی است. طراحی محلی تضمین می‌کند که در صورت نزدیک شدن به اندازه‌ی کافی به نقطه کار، پایداری صورت می‌گیرد و با استفاده از آشوبناک‌سازی می‌توان مطمئن بود که چنین نزدیک شدن رخ خواهد داد. برای اطلاعات بیشتر در مورد کاربردهای کنترل آشوب به [۳۲] رجوع کنید. در این مقاله از میان کاربردهای معرفی شده می‌توان به مواردی چون کنترل آونگ‌ها، ژيروسکوپ، توپ جهنده، مقابله با نوسانات کشتی، تلاطم در مایعات، کنترل رفتار چند-مدی^{۵۵} در لیزر، حذف یا ایجاد حالت آشوبناک در واکنش شیمیایی و همچنین هم‌زنی آشوبناک برای سرعت‌یافتن فرآیند مخلوط شدن، کنترل جمعیت حشرات با تغییر اندک در تعداد حشرات بالغ و حذف حالت صرع در حیوانات اشاره کرد.

⁵³ Arrhythmias

⁵⁴ Ventricular Fibrillation

⁵⁵ Multimode behavior

فصل ۳

مقدمه‌ای بر مسائل کنترل بهینه و روش‌های حل آن

۱.۳ نظریه کنترل بهینه

کنترل بهینه شاخه‌ای از ریاضیات است که به مسائل کاربردی می‌پردازد و با اصول تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل سروکار دارد. کنترل بهینه در بسیاری از رشته‌های مختلف از قبیل مهندسی، اقتصاد و علوم زیستی و ... کاربردهای زیادی دارد. در کنترل بهینه منظور از کنترل آن است که عاملی روی نحوه عملکرد سیستم تأثیر بگذارد تا عملکرد مطلوبی حاصل شود. این اثرگذاری و کنترل می‌تواند توسط خود سیستم و یا شخصی خارج و مستقل از سیستم انجام شود. برای مثال:

- در تهویه هوا هدف، کنترل دمای اتاق و حفظ آن در یک سطح مناسب است.
- در سیستم‌های هوابرد هدف، کنترل ارتفاع در هر نقطه از زمان است تا مسیر مطلوب توسط سیستم پیموده شود.

در حالت کلی، جواب مسئله کنترل بهینه جز در حالت‌های ساده، معمولاً به صورت عددی محاسبه می‌شود. در چند دهه‌ی اخیر روش‌های عددی بسیاری برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه شده‌است. برخی از این روش‌ها بر پایه پیدا کردن جواب‌هایی است که در معادلات

اویلر-لاگرانژ^۱ [۳۵] که شرایط لازم بهینگی هستند و یا در معادلات همیلتن-ژاکوبی-بلمن^۲ [۳۵] که شرایط کافی بهینگی هستند، صدق کنند. این روش‌ها، روش‌های غیرمستقیم نامیده می‌شوند. استفاده از روش غیرمستقیم به دلیل:

- پیچیدگی حل معادلات همیلتن-ژاکوبی-بلمن،
- وابستگی شروع تکرارها به یک جواب موضعی،
- نیاز به تسلط بر مفاهیم ریاضیات پیشرفته و فیزیکی برای حل مسئله،

مشکل است. به همین دلیل بسیاری از محققان روش‌های مستقیم را برای حل مسائل کنترل بهینه مناسب‌تر می‌دانند. در روش‌های مستقیم جواب بهینه با حداقل‌سازی مستقیم تابع هدف نسبت به قیود حاصل می‌شود. روش‌های مستقیم با استفاده از فنون پارامترسازی [۳۶، ۳۷] و گسسته‌سازی [۳۸] به کار گرفته می‌شوند. هدف از کنترل بهینه تعیین متغیرهای کنترلی است که در محدودیت‌ها یا قیود مسأله صدق کرده و نحوه عملکرد یا معیار معینی را حداقل یا حداکثر نماید.

۲.۳ مسأله کنترل بهینه

در یک مسئله کنترل بهینه، هدف پیدا کردن ورودی یک سیستم به‌عنوان کنترل‌کننده است، که در شرایط فیزیکی دستگاه صدق کند و تابع هدف را کمینه یا بیشینه کند [۴۶، ۳۹]. مسأله کنترل بهینه از قسمت‌های اساسی زیر تشکیل شده است:

• دستگاه با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

دستگاه با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، توسط معادلات حالت توصیف می‌شود و به‌شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = g_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \end{cases}$$

که در آن بردار $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت دستگاه و بردار $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ بردار کنترل نامیده می‌شود. لذا داریم:

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t), \quad (1.3)$$

و در آن $u \in (C[t_0, t_f]^m)$ است، به این معنا که هر مؤلفه u تابعی قطعه‌ای پیوسته (توابعی اندازه‌پذیر) روی $[t_0, t_f]$ است.

¹Euler - Lagrange

²Hamilton - Jacobi - Bellman

● تابعی معیار^۳

به منظور ارزیابی کمی عملکرد یک دستگاه، باید تابعی معیار یا نحوه‌ی ارزیابی عملکرد را انتخاب کرد. دستگاه بهینه را دستگاهی تعریف می‌کنیم که این تابعی معیار را حداکثر یا حداقل نماید. تابعی معیار به زبان ریاضی به صورت یک تابع کمیتی ظاهر می‌شود و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.3)$$

که در آن t_0 زمان شروع، t_f زمان نهایی، h تابع اسکالر و $f : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد.

● شرایط مرزی

به شرایطی که مقادیر سیستم را در نقاط آغازین و پایانی نشان می‌دهد، شرایط مرزی گفته می‌شود. یعنی:

$$\begin{cases} \varphi(x(t_0), t_0) = 0, \\ x(x(t_f), t_f) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

● محدودیت‌ها یا قيود فیزیکی

پس از انتخاب مدل ریاضی دستگاه، باید محدودیت‌های فیزیکی بر روی وضعیت‌ها و کنترل‌ها تعریف شود.

شکل کلی یک مسئله کنترل بهینه به صورت زیر است:

$$\text{Minimize } J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt, \quad (4.3)$$

$$\text{subject to } \dot{x} = g(x(t), u(t), t), \quad (5.3)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (6.3)$$

که در آن u^* کنترل بهینه و x^* منحنی مسیر بهینه می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۳. [۳۳] زوج $P = (x(t), u(t))$ را قابل قبول گوئیم هرگاه:

- تابع حالت $x(t) \in \mathbb{R}^n$ در $[t_0, t_f]$ مشتق‌پذیر باشد،
- تابع کنترل u مقادیرش را در مجموعه فشرده $U \in \mathbb{R}^m$ گرفته و مولفه‌هایش در بازه $[t_0, t_f]$ اندازه‌پذیر باشد،
- زوج $P = (x(t), u(t))$ در معادلات (۱.۳) و (۳.۳) صدق کند.

³functional criteria

تعریف ۲.۲.۳. [۳۳] کنترلی که در تمام مدت $[t_0, t_f]$ در محدودیت‌های کنترل صدق نماید، کنترل قابل قبول^۴ نامیده شده و مجموعه‌ی این کنترل‌های قابل قبول با U نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۳. [۳۳] منحنی مسیر متغیر وضعیت که در تمام مدت $[t_0, t_f]$ در محدودیت‌های متغیر وضعیت صدق می‌کند، منحنی مسیر قابل قبول^۵ نامیده شده و مجموعه‌ی این منحنی‌های قابل قبول با X نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۳. [۳۳] دستگاه (۱.۳) را برای $t \geq t_0$ با وضعیت اولیه $x(t_0) = x_0$ در نظر می‌گیریم. اگر زمان محدود $t_1 \geq t_0$ و کنترل $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ وجود داشته باشد که در زمان t_1 وضعیت x_0 را به مبدأ مختصات منتقل کند، آنگاه وضعیت x_0 را در زمان t_0 کنترل پذیر^۶ می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۳. [۳۳] اگر بتوانیم با مشاهده‌ی خروجی $x(t)$ در بازه‌ی زمانی محدود $[t_0, t_f]$ وضعیت $x(t_0) = x_0$ را تعیین کنیم، وضعیت x_0 در زمان t_0 مشاهده پذیر^۷ نامیده می‌شود.

۳.۳ حساب تغییرات

حساب تغییرات به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات نوعی تعمیم محاسبات است و در حل مسائل بهینه‌سازی بسیار مفید می‌باشد. در حساب تغییرات هدف یافتن مجموعه‌ای از مسیرها، خم‌ها، منحنی‌ها و غیره است که به‌عنوان توابعی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای اکسترمم هستند. حساب تغییرات از مسئله پیشنهاد شده (مسئله بارچيستوچرون)^۸ در سال ۱۶۹۶ به وسیله ریاضیدان سوئیسی جان برنولی^۹ ناشی شده است. او به یک منحنی بین دو نقطه ثابت A و B در صفحه قائم احتیاج داشت که جسمی در آن (تحت نیروی ثقل و بدون اصطکاک) بلغزد و در حداقل زمان به پایین بیاید. جواب این مسأله بدیهی نبود. خط مستقیم بین A و B جواب مسأله نیست، این مطلب را به‌طور تجربی با سر دادن مهره‌های سیمی به شکل‌های مناسب می‌توان دریافت. در حساب تغییرات، ساده‌ترین نوع مسأله به‌صورت زیر بیان می‌شود:

پیدا کردن منحنی $x = x(t)$ که نقطه ثابت $(t, x) = (a, b)$ را به نقطه ثابت $(t, x) = (c, d)$ وصل می‌کند و کمترین مقدار را به تابعی معیار زیر نسبت می‌دهد [۳۹].

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt.$$

⁴Admissible Control

⁵Admissible Trajectory

⁶Controllable

⁷Observables

⁸Barchistochrone

⁹John Bernoulli

۱.۳.۳ تقریب توابع

تعریف ۱.۳.۳. [۳۳] اگر q و $q + \Delta q$ عناصری باشند که تابع f بر آنها تعریف شده باشد، آنگاه نمو^{۱۰} f با Δf نشان داده می‌شود و عبارت است از:

$$\Delta f \triangleq f(q + \Delta q) - f(q).$$

تعریف ۲.۳.۳. [۳۳] اگر x و $x + \Delta x$ عناصری باشند که تابع J بر آنها تعریف شده باشد، آنگاه نمو J با ΔJ نشان داده می‌شود و عبارت است از:

$$\Delta J \triangleq J(x + \Delta x) - J(x).$$

تعریف ۳.۳.۳. [۳۳] نمو تابعی را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \|\delta x\|,$$

که در آن δJ قسمت خطی بر حسب δx می‌باشد. و اگر $\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} g(x, \delta x) = 0$ آنگاه J را دیفرانسیل پذیر^{۱۱} گویند و δJ تغییرات تابعی J نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۳.۳. [۳۳] (قضیه اساسی حساب تغییرات) اگر x^* یک منحنی اکستریم باشد، تغییرات J روی x^* باید صفر شود، یعنی به ازای هر δx قابل قبول داریم:

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0.$$

لم ۱.۳.۳. [۳۳] (لم اساسی حساب) اگر تابع h پیوسته بوده و برای هر تابع پیوسته مانند δx در محدوده $[t_0, t_f]$ داشته باشیم:

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t) \delta x(t) dt = 0,$$

آنگاه h باید در تمام محدوده $[t_0, t_f]$ صفر باشد.

۴.۳ معادله اویلر- لاگرانژ

تابع زیر را با فرض اینکه f دارای مشتقات نسبی مرتبه اول و دوم پیوسته نسبت به هر یک از متغیرهای خود باشد و t_0 و t_f ثابت و نقاط انتهایی منحنی به صورت x_0 و x_f باشند را در نظر می‌گیریم:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), \dot{x}(t), t) dt. \quad (7.3)$$

¹⁰Increment

¹¹Differentiable

در جستجوی یک منحنی هستیم (در صورت وجود) که $J(x)$ را به اکستریم خود ببرد. تغییرات $\delta J(x, \delta x)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial f_0}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta \dot{x} \right\} dt,$$

اگر منحنی اکستریمی مانند x^* را در نظر بگیریم با اعمال قضیه اساسی حساب تغییرات داریم:

$$\delta J(x, \delta x) = 0 = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt,$$

حال با اعمال لم اساسی حساب تغییرات شرط لازم برای اینکه x^* به‌ازای هر $t \in [t_0, t_f]$ اکستریم باشد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] = 0, \quad (۸.۳)$$

معادله (۸.۳) شرط لازم بهینگی برای (۷.۳) می‌باشد و معادله‌ی اوایلر-لاگرانژ نامیده می‌شود [۳۹].

۵.۳ شرایط لازم برای کنترل بهینه

هدف تعیین کنترل قابل قبول مانند u^* است که باعث شود دستگاه (۱.۳) با طی کردن منحنی مسیر قابل قبول x^* ، تابعی معیار زیر را کمینه کند.

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt, \quad (۹.۳)$$

در بخش قبل نشان دادیم شرط لازم برای اینکه x^* به‌ازای هر $t \in [t_0, t_f]$ تابعی $J(x)$ را اکستریم کند، معادله اوایلر-لاگرانژ است. لذا برای تشخیص اینکه x^* منحنی بهینه است، باید شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) اگر t_f مشخص و x_f آزاد باشد، شرایط لازم برای تابع x^* که اکستریم تابعی $J(x) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), \dot{x}(t), t) dt$ باشد، عبارتند از برقراری معادله‌ی اوایلر و همچنین برقراری رابطه‌ی $\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0$. این معادله شرط مرزی طبیعی^{۱۲} نامیده می‌شود.

(۲) اگر t_f آزاد و x_f مشخص باشد، شرایط لازم عبارتند از برقراری معادله‌ی اوایلر و برقراری معادله $f_0(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right] \dot{x}^*(t_f) = 0$.

(۳) در مسائلی که t_f و $x(t_f)$ هر دو آزاد باشند، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

¹²Natural boundary condition

الف) x_f و t_f مرتبط نمی‌باشند. در این صورت شرایط لازم عبارتند از برقراری معادله‌ی اویلر و برقراری معادله‌ی $f_0(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0$ و $\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0$.

ب) x_f و t_f مرتبط می‌باشند. به عنوان مثال $x_f = \theta(t_f)$. در این حالت نیز باید علاوه بر برقراری معادله‌ی اویلر، معادله‌ی

$$\left[\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right] \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) - \dot{x}^*(t_f) \right] + f_0(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0,$$

که شرط اریبی^{۱۳} نامیده می‌شود، برقرار باشد.

برای تعیین کنترل قابل قبول u^* ، فرض می‌کنیم تابع h دیفرانسیل پذیر باشد و با استفاده از قاعده زنجیره‌ای دیفرانسیل گیری، $J(u)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t) dt. \quad (10.3)$$

با معرفی ضرایب لاگرانژ $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ و تعریف $g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)$ به صورت زیر

$$g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq f_0(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) [g(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)] + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t),$$

داریم:

$$J_a(u) = \int_{t_0}^{t_f} g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) dt,$$

حال با اعمال قضیه اساسی حساب تغییرات و تعریف تابع $\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t)$ به نام تابع هامیلتونی به صورت زیر، شرایط لازم به دست می‌آیند [۳۹].

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq f_0(x(t), u(t), t) + \lambda^T \cdot g(x(t), u(t), t). \quad (11.3)$$

شرایط لازم عبارتند از:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = -\dot{\lambda}(t), \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = 0, \quad (13.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = \dot{x}(t), \quad (14.3)$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[\mathcal{H}(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \quad (15.3)$$

¹³bias condition

۶.۳ اصل مینیمم پونتریاگین

در دستگاه‌های واقعی اغلب محدودیت‌هایی روی کنترل‌ها و وضعیت‌های قابل قبول وجود دارد. می‌خواهیم ببینیم این محدودیت‌ها چگونه بر شرایط لازم که با فرض غیرمقید بودن مقادیر کنترل‌های قابل قبول به دست آمده‌است، تأثیر می‌گذارد. طبق تعریف، اگر برای کنترل‌های قابل قبولی که به اندازه‌ی کافی نزدیک u^* هستند، داشته باشیم:

$$J(u) - J(u^*) = \Delta J \geq 0$$

آنگاه کنترل u^* باعث می‌شود تابعی J مینیمم نسبی داشته باشد. اگر $u = u^* + \delta u$ نمو J با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$\Delta J(u^*, \delta u) = \delta J(u^*, \delta u) + \text{جملات مراتب بالاتر}$$

δJ بر حسب δu خطی است و جملات مراتب بالاتر زمانی که δu به سمت صفر میل می‌کند، همگی به سمت صفر میل می‌کنند.

اگر کنترل نامقید باشد، با استفاده از این که δJ بر حسب δu خطی است و δu می‌تواند به صورت اختیاری تغییر کند می‌توان نشان داد شرایط لازم برای اینکه u^* منحنی کنترل اکسترمم باشد این است که تغییرات $\delta J(u^*, \delta u)$ برای تمام δu های قابل قبول که نرم کوچکی دارند صفر شود. اما چون فرض شده‌است که کنترل‌های قابل قبول محدود باشند، δu ، فقط زمانی اختیاری است که کنترل اکسترمم در تمام بازه‌ی زمانی $[t_0, t_f]$ بین دو حد تعیین شده باشد. با بررسی تمام تغییرات قابل قبول با $\|\delta u\|$ به اندازه‌ی کافی کوچک، به طوری که علامت ΔJ توسط δu تعیین شود، نتیجه می‌گیریم شرط لازم برای اینکه u^* تابعی J را حداقل کند، این است که داشته باشیم:

$$\delta J(u^*, \delta u) \geq 0$$

. حال باید ببینیم این تغییرات چگونه بر شرایط لازمی که با فرض غیر مقید بودن مقادیر کنترل‌های قابل قبول به دست آمده‌است، تأثیر می‌گذارد. نمو J به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^*, \delta u) = & \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f \\ & + \left[H(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[p^*(t) + \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right]^T \delta x(t) \right. \\ & + \left[\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right]^T \delta u(t) \\ & \left. + \left[\frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) - \dot{x}^*(t) \right]^T \delta p(t) \right\} dt + \text{جملات مراتب بالاتر} \end{aligned}$$

اگر معادلات حالت برقرار باشند و $p^*(t)$ چنان انتخاب شود که ضرایب $\delta x(t)$ در انتگرال صفر شوند و معادلات شرایط حدی برقرار باشند، داریم:

$$\Delta J(u^*, \delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right]^T \delta u(t) dt + \text{جملات مراتب بالاتر}$$

از طرفی می‌دانیم که

$$\left[\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right]^T \delta u(t) = H(x^*(t), u^*(t), \delta u(t), p^*(t), t) - H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$$

در نتیجه داریم:

$$\Delta J(u^*, \delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ H(x^*(t), u^*(t), \delta u(t), p^*(t), t) - H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right\} dt + \text{جملات مراتب بالاتر}$$

بنابراین برای اینکه u^* کنترل حداقل کننده‌ای باشد، باید به ازای هر مقدار قابل قبول δu داشته باشیم:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ H(x^*(t), u^*(t), \delta u(t), p^*(t), t) - H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right\} dt \geq 0$$

که ایجاب می‌کند برای هر δu قابل قبول داشته باشیم:

$$H(x^*(t), u^*(t), \delta u(t), p^*(t), t) \geq H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که شرط لازم برای اینکه u^* تابعی J را حداقل کند این است که به ازای تمام کنترل‌های قابل قبول داشته باشیم:

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \leq H(x^*(t), u(t), p^*(t), t)$$

این معادله نمایانگر این مطلب است که کنترل بهینه باید هامیلتونین را حداقل کند و به اصل مینیمم پونتریاگین^{۱۴} معروف می‌باشد.

۷.۳ روش‌های عددی حل مسائل کنترل بهینه

۱.۷.۳ روش‌های غیرمستقیم

روش‌های غیرمستقیم بر مبنای حساب تغییرات یا اصل بیشینه هستند. با در نظر داشتن مفروضات معلوم شرایط لازم مرتبه اول برای مسائل کنترل بهینه به صورت زیر تعیین می‌شوند.

¹⁴Pontryagin's Minimum Principle

تابع برداری n متغیره از متغیرهای الحاقی $\lambda(t)$ و تابع برداری m متغیره $V(t)$ موجوداند به طوری که با توجه به تابع معروف همیلتونی

$$H = \lambda^T f_0 + V^T g,$$

و مسأله مقدار مرزی چند نقطه‌ای به همراه معادلات دیفرانسیل روابط زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x} = f_0, g < 0,$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda^T \frac{\partial f_0}{\partial x} - V^T \frac{\partial g}{\partial x},$$

در این روش، کنترل بهینه از مینیمم‌سازی H نسبت به u تعیین می‌شود. به‌عنوان مثال، در حالتی که H به‌ازای $t_0 < t < t_f$ نسبت به u غیرخطی باشد از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda^T \frac{\partial f_0}{\partial u} - V^T \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

برای به‌دست آوردن جواب، این شرایط لازم است از روش‌هایی که براساس ساختار خاص این شرایط هستند، استفاده شود. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های معروف گرادیان اشاره کرد. از طرف دیگر با استفاده از روش‌های نیوتن می‌توان کنترل‌های u را از رابطه‌ی زیر به‌صورت عددی و تحلیلی به‌دست آورد.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

برخلاف سایر روش‌ها این روش دارای چند مزیت است که برای نمونه می‌توان به امکان استفاده از انواع محدودیت‌ها و دقت بالای این روش اشاره کرد. با این حال این روش دارای معایبی نیز هست. از جمله این معایب می‌توان به نیاز به یک تقریب آغازین خوب برای مسأله بهینه و نیاز به تلاش بسیار برای به‌دست آوردن معادلات دیفرانسیل الحاقی اشاره کرد. علاوه‌براین فرد باید اطلاعات اولیه از ساختار تغییر یافتن محدودیت‌ها را داشته باشد. این امر در قالب تکنیک‌های هموتوپی مطرح می‌شود. در مجموع در این روش‌ها فرد باید اطلاعات دقیقی از ماهیت فیزیکی و ریاضی مسأله بهینه‌سازی داشته باشد [۴۰].

۲.۷.۳ روش‌های مستقیم

در اکثر مواقع یافتن یک جواب تحلیلی مناسب برای مسائل کنترل بهینه وجود ندارد. بنابراین یافتن یک جواب تقریبی معقولانه‌ترین روش برای حل مسأله کنترل بهینه است. مطالعات و تحقیقات انجام شده در روش‌های عددی، الگوریتم‌های کارآمد و مناسبی را برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه کرده است [۴۱]. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های گسسته‌سازی و پارامترسازی اشاره کرد. با استفاده از این روش‌ها مسأله کنترل بهینه به یک مسأله برنامه ریزی ریاضی تبدیل می‌شود.

روش گسسته سازی

در این روش بازه زمانی $[t_0, t_f]$ به $n + 1$ زیر بازه به صورت زیر تقسیم می‌شود:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_f,$$

این نقاط به‌عنوان گره یا شبکه در نظر گرفته می‌شوند. یکی از روش‌های تکنیک گسسته‌سازی، گسسته کردن متغیرهای حالت و کنترل می‌باشد، لذا دنباله زیر از مقادیر نامعلوم متغیرهای حالت و کنترل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$Z = (x_0, x_1, \dots, x_n, u_0, u_1, \dots, u_n),$$

هچنین سیستم معادلات حالت با یک مجموعه از معادلات جبری که به صورت تساوی هستند جایگزین می‌شوند. بدین ترتیب مساله کنترل بهینه به یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی تبدیل می‌شود. یکی دیگر از روش‌های تکنیک گسسته‌سازی، گسسته کردن متغیر کنترل به صورت زیر است:

$$Z = (u_0, \dots, u_n),$$

که در این روش متغیرهای حالت به‌عنوان تابعی از متغیرهای کنترل با انتگرال گیری از سیستم معادلات حالت به دست می‌آیند [۴۲].

روش پارامترسازی

یکی از کارآمدترین روش‌های عددی برای حل مسائل کنترل بهینه روش پارامترسازی است. هدف اصلی این روش، پارامترسازی کنترل، حالت و یا هر دوی آنهاست. در این روش تابع کنترل، تابع حالت و یا هر دوی آنها با به‌کاربردن ترکیب خطی از توابع پایه تقریب زده می‌شوند. در این روش مساله کنترل به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی با تعداد متناهی متغیر تصمیم‌گیری تبدیل می‌شود [۴۳].

پارامترسازی کنترل

پارامترسازی کنترل بر پایه تقریب زدن متغیرهای کنترل به وسیله انتخاب یک ساختار مناسب با پارامترهای نامعلوم متناهی به صورت زیر است:

$$u_l(t) = \sum_{i=0}^N b_i^{(l)} \varphi_i(t), \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

که در آن b_i ها پارامترهای نامعلوم و $\varphi_i(t)$ نشان‌دهنده‌ی یک مجموعه مناسب از توابع تشکیل‌دهنده پایه‌ی فضای کنترل با بعد متناهی است. متغیرهای حالت به‌عنوان تابعی از پارامترهای نامعلوم متغیرهای کنترل، با انتگرال گیری از سیستم معادلات حالت به دست می‌آیند و توسط جایگذاری متغیرهای کنترل و متغیرهای حالت متناظر در تابع

هدف، مسأله کنترل بهینه به مسأله برنامه‌ریزی تبدیل می‌شود. برخی از توابعی که برای تقریب متغیرهای کنترل استفاده می‌شوند عبارتند از: توابع ثابت تکه‌ای، توابع خطی تکه‌ای، چندجمله‌های تکه‌ای توابع اسپلاین [۴۴].

پارامترسازی کنترل-حالت

روش پارامترسازی کنترل-حالت برپایه تقریب زدن متغیرهای حالت و کنترل به وسیله دنباله‌ای از توابع شناخته شده با پارامترهای نامعلوم به صورت ذیل است:

$$x_j(t) = \sum_{i=0}^N a_i^{(j)} \varphi_i(t), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_l(t) = \sum_{i=0}^N b_i^{(l)} \varphi_i(t), \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

که در آن a_i و b_i پارامترهای نامعلوم و $\varphi_i(t)$ یک مجموعه مناسب از توابع است. با استفاده از این روش و جایگذاری متغیرهای حالت و کنترل در مسأله، مسأله به برنامه‌ریزی ریاضی تبدیل می‌شود [۴۵].

پارامترسازی حالت

منظور از پارامترسازی حالت، تقریب متغیرهای حالت به وسیله دنباله‌ای از توابع شناخته شده به پارامترهای نامعلوم می‌باشد. لذا داریم:

$$x_j(t) = \sum_{i=0}^N a_i^{(j)} \varphi_i(t), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

بنابراین متغیرهای کنترل را به کمک متغیرهای حالت به دست می‌آوریم [۴۶].

فصل ۴

سرطان و آشوب

۱.۴ معرفی

سرطان یکی از بزرگترین علل مرگومیر در جهان است و کنترل رشد تومور نیاز به دقت ویژه دارد. پاسخ تومور به درمان به عوامل متعددی چون شدت تومور، عملکرد سیستم ایمنی بدن بیمار و غیره بستگی دارد. در چند دهه گذشته محققان با استفاده از مدل‌های ریاضی متنوع، مدل ریاضی خود-ایمنی سرطان^۱ و تومور را ارائه کرده‌اند [۴۸، ۵۰]. سلول‌های تومور توسط تعداد زیادی رویدادهای ژنتیکی^۲ و اپی‌ژنتیکی^۳ تعریف می‌شوند که منجر به ظهور آنتی‌ژن‌های^۴ خاصی بنام نئوآنتی‌ژن‌ها^۵ می‌شود، که راه‌اندازی آنتی‌تومورال^۶ بوسیله‌ی سیستم ایمنی بدن را در پی خواهد داشت [۵۲، ۵۳]. توانایی حمله و تغییر مکان از ویژگی‌های سرطان است که موجب اختلال در بافت می‌شود (مشابه سیستم ایمنی بدن انسان).

مشاهدات فوق موجب تدوین فرضیه مدل ریاضی تومورهای سرطانی، در جهت کمک به اثربخشی بیشتر درمان و امکان از بین بردن تومور شده‌است [۶۵].

تعدادی از محققان مسئله آشوب و آنالیز پایداری را، در مدل‌های بیولوژیکی مانند مدل سرطان

¹cancer self-remission

²genetic

³epigenetic

⁴antigen

⁵neoantige

⁶antitumoral

و تومور مطرح کرده‌اند. در این زمینه مدل‌های ریاضی زیادی از جمله مدل شکار-شکارچی^۷ را می‌توان مثال زد. مدل‌های دیگر را می‌توانید در [۵۳، ۵۶، ۵۹] ببینید. استفاده از روش کنترل فیدبک^۸ در کنترل بهینه‌ی حالت تعادل ناپایدار، خود-ایمنی سرطان و سیستم تومور، توسط ال-گوهری^۹، بنرجی^{۱۰} و ساکارا^{۱۱} مورد مطالعه قرار گرفته‌است [۴۷، ۴۸]. آشوب و کنترل تطبیقی^{۱۲} در سه نمونه مدل شکار-شکارچی زمان-پیوسته در [۴۹، ۵۵] مورد مطالعه قرار گرفته‌است. از طرف دیگر مدل ریاضی رادیوویروتراپی^{۱۳} (پرتوویروس درمانی) در [۶۳] بررسی شده‌است. در چند سال اخیر تعداد زیادی از منابع انسانی و اقتصادی به تحقیق درباره‌ی سرطان با تأکید بر آزمون، آزمایش و ایمنی‌شناسی^{۱۴} اختصاص یافته‌است [۵۸، ۶۴]. عکس‌العمل رقابتی بین سلول‌های تومور و سیستم ایمنی، که تعداد قابل توجهی از ملکول‌ها را شامل می‌شود، بسیار پیچیده‌است در نتیجه سیستم ایمنی در تمام موارد قادر به از بین بردن تومور نیست [۵۱، ۵۷]. نتایج مکمل توسط ال-گوهری و همکارانش در [۵۳، ۵۴، ۴۹] و ساکارا در [۴۸] قابل مشاهده‌است. به طور خاص، محققان در این مقالات تحلیل پایداری خطی در خود-ایمنی سرطان و سیستم تومور و کنترل بهینه‌ی مدل شکار-شکارچی را استدلال می‌کنند. آنها درباره‌ی آشوب، کنترل بهینه، آنالیز پایداری و کنترل تطبیقی بسیاری از مدل‌های دینامیکی غیرخطی بحث کرده‌اند.

در این فصل به بررسی آشوب و کنترل بهینه در مدل‌سازی سرطان با پارامترهای کاملاً ناشناخته می‌پردازیم. آنالیز پایداری خطی این مدل در وضعیت تعادل زیستی محتمل را مورد بحث قرار داده، محدوده‌ی پارامترهای سیستم را که موجب رفتار آشوبناک می‌شوند، پیدا می‌کنیم و تخمینی از پارامترهای مجهول سیستم را ارائه می‌دهیم.

۲.۴ مدل ریاضی سرطان

مدل پسروری و پیشروی خودبخودی تومور را که واکنشی است به سلول عامل ضدسرطان، لنفوسیت‌ها^{۱۵} و ماکروفاژها^{۱۶} که سلول‌های قاتل طبیعی بوده و سلول‌های بدخیم را نابود می‌کنند، گسترش می‌دهیم. در این بخش پیشروی و پسروری خودبخودی تومور را به صورت سیستمی شبیه به سیستم شکار-شکارچی طراحی می‌کنیم [۴۷، ۴۸].

⁷prey-predator

⁸feedback control

⁹El-Gohary

¹⁰Banerjee

¹¹Sakara

¹²adaptive control

¹³radiovirotherapy

¹⁴immunology

¹⁵lymphocyte

¹⁶macrophage

مفروضات زیر در این فصل در نظر گرفته شده است:

(۱) شکارچی: تی- لنفوسیت‌ها^{۱۷} و ماکروفاژهای سیتوکسیک^{۱۸} (سلول‌های کشنده طبیعی در سیستم ایمنی) که در دو حالت فعال و ساکن وجود داشته و به‌طور مداوم تمام نقاط بدن از سر تا نوک انگشتان پا را می‌گردند.

(۲) شکار: سلول‌های تومور که مورد حمله‌ی سلول‌های ایمنی بدن قرار گرفته، از بین می‌روند. شکارچی دو حالت دارد، فعال و ساکن، و شکار را از بین می‌برد. سلول‌های تومور به وسیله‌ی ماکروفاژهایی شکار می‌شوند که در تمام بافت‌های بدن و سیستم گردش خون پیدا می‌شوند [۴۸، ۵۹].

(۳) ماکروفاژها سلول‌های تومور را بلعیده و با آزاد کردن مجموعه‌ای از سیتوکسین‌ها، موجب فعال شدن تی- لنفوسیت‌های ساکنی می‌شوند، که هماهنگ کننده‌ی ضدحمله هستند. سلول‌های شکارچی ساکن نیز می‌توانند به‌طور مستقیم برای ارتباط با آنتی‌ژن‌ها شبیه‌سازی شوند. سلول‌های ساکن برای از بین بردن سلول‌های تومور باید تبدیل به سلول‌های فعال شوند.

(۴) تبدیل سلول‌های ساکن به سلول‌های فعال منجر به تخریب سلول‌های ساکن در حال رشد طبیعی شده، سلول‌های فعال را تحریک کرده و فعالیت آنها را افزایش می‌دهد.

(۵) برای معرفی مدل ریاضی فرض می‌کنیم:

- بنا به قانون اثر جرم^{۱۹} (قانون واکنش چگالی)، تخریب سلول‌های تومور با سرعتی متناسب با چگالی سلول‌های تومور صورت می‌پذیرد.

- سلول‌های شکارچی ساکن در اثر تماس مستقیم با سلول‌های شکارچی فعال یا به‌موجب تماس با ماده‌ای که سلول‌های شکارچی فعال منتشر کرده‌اند به سلول‌های شکارچی فعال تبدیل می‌شوند. می‌دانیم که هر سلول تبدیل شده هرگز به حال ساکن برنمی‌گردد و همچنین سلول‌های فعال با یک احتمال ثابت نسبت به زمان می‌میرند.

(۶) اگر $M(t)$ ، $N(t)$ و $Z(t)$ به ترتیب نشان دهنده‌ی تراکم سلول‌های تومور، سلول‌های شکارچی فعال و سلول‌های شکارچی ساکن در زمان t باشند، می‌توانیم سیستم دینامیکی زیر را که مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی است، تعریف کنیم:

¹⁷T-lymphocyte

¹⁸cytotoxic macrophage

¹⁹law of mass action

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = q + rM(1 - k_1^{-1}M) - \alpha MN \\ \frac{dN}{dt} = \beta NZ - d_1 N \\ \frac{dZ}{dt} = sZ(1 - k_2^{-1}Z) - \beta NZ - d_2 Z \end{cases} \quad (1.4)$$

که در آن داریم:

- q تبدیل شدن سلول‌های طبیعی به بدخیم،
 - r سرعت رشد سلول‌های تومور،
 - k_1 حداکثر ظرفیت حمل سلول‌های تومور،
 - β سرعت تبدیل سلول‌های شکارچی ساکن به فعال،
 - d_1 مرگ طبیعی سلول‌های شکارچی فعال،
 - s رشد سلول‌های شکارچی ساکن،
 - k_2 حداکثر ظرفیت حمل سلول‌های شکارچی ساکن،
 - d_2 مرگ طبیعی سلول‌های شکارچی ساکن،
- سیستم سرطان را با شرایط اولیه مثبت زیر بررسی می‌کنیم:

$$M(0) > 0, N(0) > 0, Z(0) > 0$$

۳.۴ آشوب و آنالیز پایداری

در این بخش می‌خواهیم پارامترهای سیستم (۱.۴) را به کمک متغیرها و پارامترهای جدید کاهش داده، آشوب و آنالیز پایداری مدل سرطان و تومور را مورد بحث قرار دهیم. در ادامه، با استفاده از اصلاح و تعدیل زمان و تعریف متغیرهای جدید، تعداد پارامترهای سیستم را به صورت زیر از ۸ به ۶ کاهش می‌دهیم:

$$\tau = \frac{qt}{k_1}, x_1 = \frac{M}{k_1}, x_2 = \frac{\alpha k_1 N}{q}, x_3 = \frac{Z}{k_2} \quad (2.4)$$

با جایگزینی (۲.۴) در (۱.۴) داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 + x_1[a_1(1 - x_1) - x_2], \\ \dot{x}_2 = x_2[a_2 x_3 - a_3], \\ \dot{x}_3 = x_3[a_4(1 - x_3) - a_5 x_2 - a_6], \end{cases} \quad (3.4)$$

در (۳.۴) داریم:

$$a_1 = \frac{rk_1}{q}, a_2 = \frac{\beta k_1 k_2}{q}, a_3 = \frac{k_1 d_1}{q}, a_4 = \frac{sk_1}{q}, a_5 = \frac{\beta}{\alpha}, a_6 = \frac{d_2 k_1}{q} \quad (4.4)$$

سپس تمام حالت‌های پایداری سیستم سرطان (۳.۴) را پیدا کرده، به تحلیل پایداری آن‌ها می‌پردازیم. حالات پایداری سیستم (۳.۴) به شرح زیر است:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = \left[\frac{1}{\beta} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\beta}{a_1}} \right), 0, 0 \right], \\ E_2 = \left[\frac{1}{\beta} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\beta}{a_1}} \right), 0, \left(1 - \frac{a_6}{a_4} \right) \right], \\ E_3 = \left\{ \frac{1}{\beta a_1} \left[(a_1 - x_2) + \sqrt{(a_1 - x_2)^2 + \beta a_1} \right], \left[\frac{a_4}{a_5} \left(1 - \frac{a_3}{a_2} \right) - \frac{a_6}{a_5} \right], \frac{a_3}{a_2} \right\}, \\ E_4 = \left[\frac{1}{\beta} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\beta}{a_1}} \right), 0, 0 \right], \\ E_5 = \left[\frac{1}{\beta} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\beta}{a_1}} \right), 0, \left(1 - \frac{a_6}{a_4} \right) \right], \\ E_6 = \left\{ \frac{1}{\beta a_1} \left[(a_1 - x_2) - \sqrt{(a_1 - x_2)^2 + \beta a_1} \right], \left[\frac{a_4}{a_5} \left(1 - \frac{a_3}{a_2} \right) - \frac{a_6}{a_5} \right], \frac{a_3}{a_2} \right\}. \end{array} \right. \quad (5.4)$$

توجه کنید حالت پایدار E_1 در مرز یک هشتم اول قرار دارد و اگر داشته باشیم $a_6 < a_4$ آنگاه E_2 نیز پایدار می‌شود، پس در صورت برقراری این شرایط به پایداری رسیدن سیستم از لحاظ زیستی شدنی خواهد بود. این به آن معنی است که E_2 وجود دارد و از نظر زیستی قابل پذیرش است، اگر میزان مرگ طبیعی سلول‌های ساکن از نرخ رشد سلول‌های شکارچی ساکن کمتر باشد.

از بین حالت‌های پایداری $E_i (i = 1, \dots, 6)$ تنها E_1, E_2, E_3 حالت تعادل مثبت دارند و این حالت‌ها وضعیت پایداری بیولوژیکی را میسر می‌کنند. بنابراین شرایط شدنی بودن بیولوژیکی برای سه نقطه تعادل اول به صورت زیر است:

$$\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_6}{a_4} < 2 \quad (6.4)$$

اولین شرط بیان می‌کند که سرعت مرگ طبیعی سلول‌های ساکن نسبت به رشد سلول‌های ساکن شکارچی باید کمتر از یک باشد. حال به بررسی پایداری موضعی حالت‌های پایدار E_1, E_2, E_3 می‌پردازیم.

مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین مطابق با E_1 به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \lambda_{11} = -\sqrt{a_1^2 + 4a_1}, \\ \lambda_{12} = -a_3, \\ \lambda_{13} = a_4 - a_6, \end{cases} \quad (7.4)$$

با توجه به شرط $a_6 < a_4$ مشاهده می شود λ_{13} در وضعیت تعادل E_1 مثبت است، لذا E_1 به طور مطلق ناپایدار است.

مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین مطابق با E_2 به صورت زیر داده می شود:

$$\begin{cases} \lambda_{21} = -\sqrt{a_1^2 + 4a_1}, \\ \lambda_{22} = \frac{a_2 a_4 - a_3 a_4 - a_2 a_6}{a_4}, \\ \lambda_{23} = a_6 - a_4, \end{cases} \quad (8.4)$$

می بینیم که مقدار ویژه λ_{22} از شروط اثبات حالت تعادل E_2 مثبت است، لذا E_2 بطور مطلق نقطه زینی $^{\circ} 2$ ناپایدار است.

مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین مطابق با E_3 عبارتند از:

$$\begin{cases} \lambda_{31} = \bar{x}_2 - k, \\ \lambda_{32} = \frac{-a_3 a_4 + \sqrt{a_4^2 a_4^2 - 4a_4^2 a_3 a_5 \bar{x}_2}}{2a_4}, \\ \lambda_{33} = \frac{-a_3 a_4 - \sqrt{a_4^2 a_4^2 - 4a_4^2 a_3 a_5 \bar{x}_2}}{2a_4}, \end{cases} \quad (9.4)$$

که در آن داریم:

$$\bar{x}_2 = \frac{a_4(a_2 - a_3) - a_2 a_6}{a_2 a_5} \quad \text{و} \quad k = \sqrt{(a_1 - \bar{x}_2)^2 + 4a_1}$$

مقدار ویژه λ_{31} منفی است و مقدار ویژه های λ_{32} و λ_{33} بخش های حقیقی منفی دارند پس E_3 پایدار است.

استفاده از جاذب ها (گره ها، کانون ها، چرخه حدی، ...) برای پایداری سیستم میرا از روش های شناخته شده است. معادله دیورژانس سیستم (۳.۴) به صورت زیر است:

$$\nabla \cdot \vec{F}(t) = a_1 + a_4 - a_3 - a_6 - 2a_1 x_1(t) - (1 + a_5)x_2(t) + (a_3 - a_4)x_3(t) \quad (10.4)$$

که در آن $\vec{F} = (x_1, x_2, x_3)$ است. معادله دیورژانس سیستم (۳.۴) در حالت تعادل E_1 به صورت زیر درمی آید:

$$\nabla \cdot \vec{F}|_{E_1} = - \left(a_1 \sqrt{1 + \frac{4}{a_1}} + a_3 + a_4 + a_6 \right) < 0, \quad (11.4)$$

لذا سیستم (۳.۴) یک سیستم میرا شبیه سیستم لورنز است. در نتیجه در فضای فاز عنصر حجم $V(t)$ با جریان درون عنصر حجم زیر فشرده می شود:

$$V(t) = V_0 \exp \left[- \left(\sqrt{a_1^2 + 4a_1 a_3} + a_4 + a_5 \right) t \right] \quad (12.4)$$

پس از زمان t بسته به شرایط اولیه، سیستم جاذب های مختلفی را می پذیرد [۶۰]. معادله دیورژانس سیستم (۳.۴) در حالت تعادل E_2 به صورت زیر است:

$$\nabla \cdot \vec{F}|_{E_2} = - \sqrt{a_1^2 + 4a_1 a_3} - \frac{a_2 a_6}{a_4} + a_2 + a_6, \quad (13.4)$$

که بنابه مقادیر پارامترهای سیستم، مثبت یا منفی است. در نتیجه بنابه مقادیر پارامترها، سیستم میرا یا پایستار است.

معادله دیورژانس سیستم (۳.۴) در حالت تعادل E_3 به صورت زیر است:

$$\nabla \cdot \vec{F}|_{E_3} = \bar{x}_2 - k - \frac{a_3 a_4}{a_2} < 0, \quad (14.4)$$

که به ازای تمام مقادیر پارامترهای سیستم منفی است. بنابراین، اگر پارامترهای سیستم شرایط شدنی بودن از نظر زیستی را طوری برآورده کنند که داشته باشیم:

$$a_6 > a_4 > \frac{a_2 a_6}{a_2 - a_3}, \quad (15.4)$$

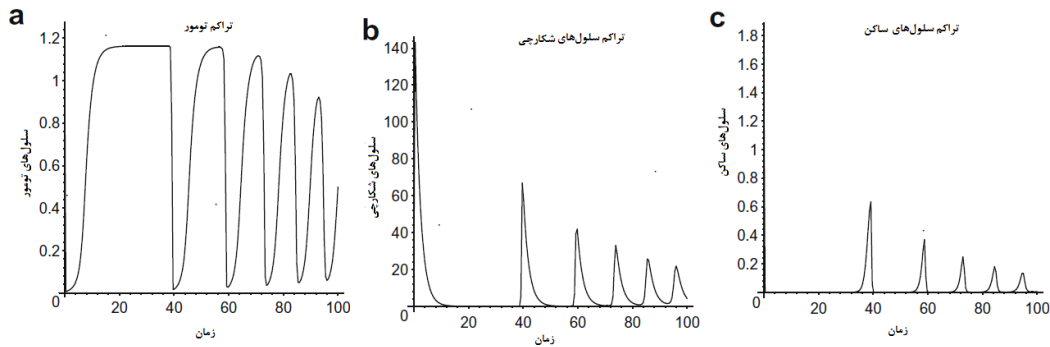
آنگاه E_3 تنها نقطه تعادل پایدار سیستم (۳.۴) است.

در نهایت نتیجه می گیریم:

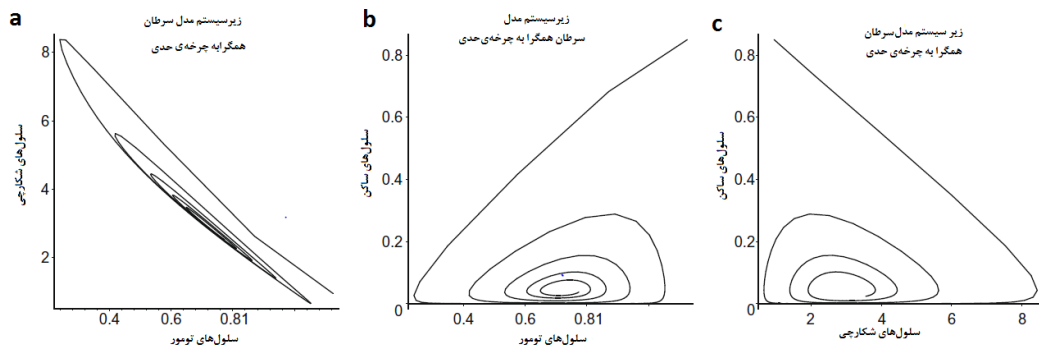
• دو حالت پایدار E_1 ، E_2 از لحاظ زیستی شدنی هستند.

• در شرایط وجود زیستی، به طور مطلق ناپایدار هستند.

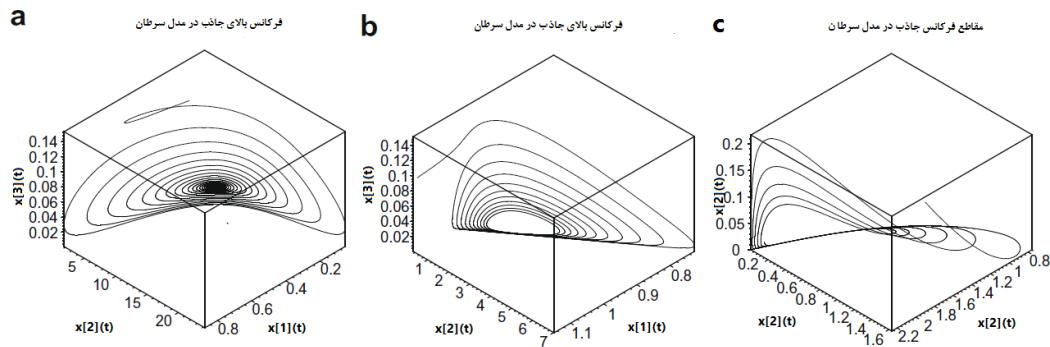
سیستم سرطان می تواند ارائه کننده ی چرخه ی حدی، شبه-تناوبی و جاذب آشوب باشد. لذا ما از روش کنترل بهینه برای بطور مجانبی پایدار کردن این دو حالت استفاده می کنیم (شکل های ۱.۴ - ۳.۴).



شکل ۱.۴: تراکم اولیه‌ی $x_1(0) = 0.3, x_2(0) = 1/5, x_3(0) = 0.5$ و تراکم سلول‌های تومور، سلول‌های شکارچی فعال و سلول‌های شکارچی ساکن برای پارامترهای $a_1 = 0.4, a_2 = 5/9, a_3 = 0.1, a_4 = 0.5, a_5 = 0.06, a_6 = 0.05$.

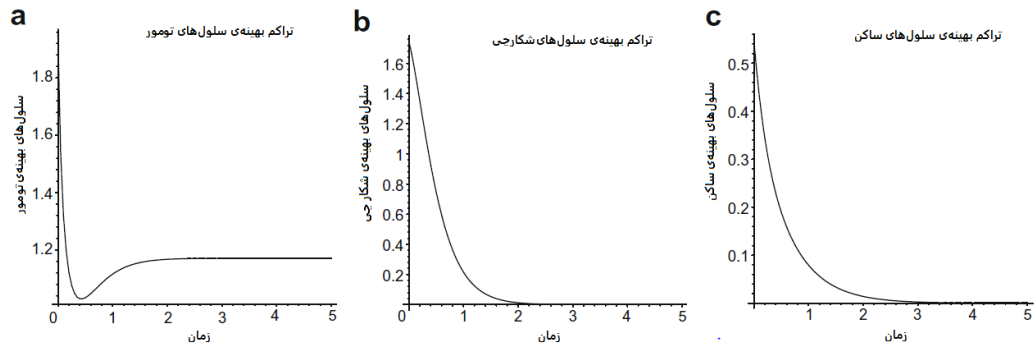


شکل ۲.۴: با تراکم اولیه‌ی $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 1, x_3(0) = 1/5$ و سرطان و زیر سیستم‌های همگرا به چرخه‌ی حدی درونی پایدار برای پارامترهای $a_1 = 2/5, a_2 = 4/5, a_3 = 0.6, a_4 = 3/5, a_5 = 2, a_6 = 0.1$.

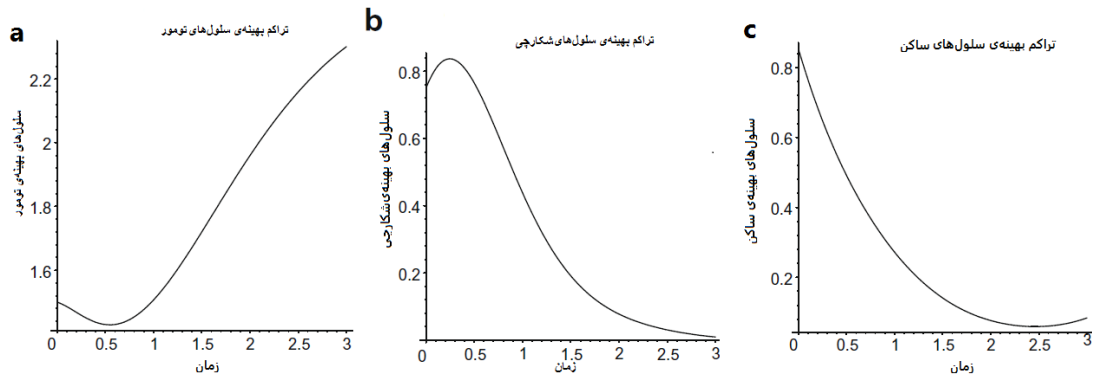


شکل ۳.۴: با تراکم اولیه‌ی $x_1(0) = 2/5, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0.5$ سه فرکانس بالا چرخه‌ی حدی مطابق با مقادیر پارامترهای سیستم $a_1 = 0.1, a_2 = 1, a_3 = 0.4, a_4 = 3/5, a_5 = 5/1, a_6 = 0.2$.

در شکل ۴.۴ قسمت c و b خود-ایمنی سرطان و نمودار سه‌بعدی تومور را که به ترتیب دو نوع متفاوت جاذب را برای مقادیر اولیه‌ی $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1$ با پارامترهای سیستم $a_1 = 10, a_2 = 15, a_3 = 0.5, a_4 = 3/5, a_5 = 0.1, a_6 = 0.2$ و مقادیر اولیه‌ی $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1$ با پارامترهای سیستم $a_1 = 5, a_2 = 15, a_3 = 0.5, a_4 = 6/5, a_5 = 0.1, a_6 = 0.21$ است را نشان می‌دهند. در ادامه، مسئله‌ی کنترل بهینه در خود-ایمنی سرطان و حالت تعادل مثبت ناپایدار سیستم تومور، را با استفاده از قضیه‌ی پونتریاگین بررسی می‌کنیم. (شکل ۵.۴)



شکل ۴.۴: در این شکل تراکم اولیه $x_1(0) = 1/95$, $x_2(0) = 1/75$, $x_3(0) = 5/55$ و پارامترهای $a_1 = 5$ و $a_2 = 1/5$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5$, $a_5 = 5$, $a_6 = 5$, $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 5$ هستند.



شکل ۵.۴: در این شکل تراکم اولیه $x_1(0) = 1/5$, $x_2(0) = 1/75$, $x_3(0) = 5/855$ و پارامترهای $a_1 = 5/5$ و $a_2 = 1/25$, $a_3 = 5$, $a_4 = 5$, $a_5 = 1$, $a_6 = 5/5$, $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 5$ و $\beta_3 = 4$ هستند.

۴.۴ مسئله‌ی کنترل بهینه

در این بخش، ما مسئله‌ی کنترل بهینه در مدل سرطان را بررسی می‌کنیم. برای رسیدن به کنترل بهینه قضیه‌ی مینیمم پونتری‌اگین را به کار خواهیم برد [۶۱]. در قضیه‌ی مینیمم پونتری‌اگین $x_i(t)$ متغیر حالت با حالت پایدار $x_i = \bar{x}_i$ ($i = 1, 2, 3$) است. سیستم مدل سرطان را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 + a_1 x_1(1 - x_1) - x_1 x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 x_3 - a_3 x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = a_4 x_3(1 - x_3) - a_5 x_2 x_3 - a_6 x_3 + u_3, \end{cases} \quad (16.4)$$

که در آن u_i ها ($i = 1, 2, 3$) ورودی‌های کنترل هستند که مناسب شرایط بهینه‌ی سیستم دینامیکی (۱۶.۴) با توجه به تابع هزینه^{۲۱}، درباره‌ی حالت‌های پایدار E_1 و E_2 در نظر گرفته می‌شوند.

هدف این بخش، رسیدن به حالت پایدار با ورودی‌های کنترل بهینه در زمان معین T است.

²¹cost function

بنابراین شرایط اولیه و نهایی عبارتند از:

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad x_i(T) = \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (17.4)$$

مبنای نظریه برنامه‌ریزی پویا^{۲۲} اصل بهینگی است، که می‌توانیم آنرا به شرح ذیل بیان کنیم:

- قانون کنترل بهینه دارای این خاصیت است که شرایط اولیه و یا تصمیم‌گیری اولیه هرچه باشد، تصمیم‌گیری باقی‌مانده نیز باید یک قانون کنترل بهینه را با توجه به حالت ایجاد شده، از اولین تصمیم‌گیری بسازد.

حال، تابع هزینه را بعنوان جریمه‌ای برای استفاده از کنترل با مقدار بزرگ انتخاب کرده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J = \frac{1}{\gamma} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^3 \alpha_i (x_i - \bar{x}_i)^2 + \beta_i (u_i - \bar{u}_i)^2 \right] dt, \quad (18.4)$$

که در آن α_i و β_i ($i = 1, 2, 3$) ثابت‌های مثبت هستند. به آسانی می‌توانیم تابع هزینه را تابع معین مثبت از متغیرهای x_i و u_i ($i = 1, 2, 3$) در نظر بگیریم. این تابع، مقدار صفر را فقط در نقطه‌ی $x_i = \bar{x}_i$ و $u_i = \bar{u}_i$ دارا می‌باشد. برای بکاربردن اصل مینیمم پونتریاگین، در ابتدا انتگرال تابع هزینه (۱۸.۴) را با متغیر کمکی $x_0(t)$ که در معادله حالت صدق می‌کند، جایگزین می‌کنیم:

$$\dot{x}_0(t) = \sum_{i=1}^3 \left[\alpha_i (x_i - \bar{x}_i)^2 + \beta_i (u_i - \bar{u}_i)^2 \right]. \quad (19.4)$$

در ادامه، با معرفی چهار متغیر هم‌وضعیت^{۲۳} p_s ($s = 0, 1, 2, 3$) تابع همیلتونی^{۲۴} به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$H = p_0 \dot{x}_0 + \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i, \quad (20.4)$$

باجایگزین کردن (۱۶.۴) و (۱۹.۴) در (۲۰.۴) داریم:

$$H = \frac{p_0}{\gamma} \left[\sum_{i=1}^3 \alpha_i (x_i - \bar{x}_i)^2 + \beta_i (u_i - \bar{u}_i)^2 \right] + p_1 [1 + a_1 x_1 (1 - x_1) - x_1 x_2 + u_1] + p_2 x_2 [a_2 x_3 - a_3 + u_2] + p_3 x_3 [a_4 (1 - x_3) - a_5 x_2 - a_6 + u_3] \quad (21.4)$$

²²dynamic programming

²³co-state

²⁴Hamiltonian function

معادلات هیلتون عبارتند از:

$$\dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (22.4)$$

زوج دیگر معادلات همیلتون فقط معادلات حالت (۱۶.۴) و (۱۹.۴) هستند. بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم $p_0 = -1$ را انتخاب کنیم. با جایگزین کردن (۲۱.۴) در (۲۲.۴) معادلات هم‌وضعیت را به فرم زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \alpha_1(x_1 - \bar{x}_1) - (a_1 - 2a_1x_1 - x_2)p_1, \\ \dot{p}_2 = \alpha_2(x_2 - \bar{x}_2) - x_1p_1 - p_2(a_2x_3 - a_3) + a_5p_3x_3, \\ \dot{p}_3 = \alpha_3(x_3 - \bar{x}_3) - a_2p_2x_2 - p_3(a_4 - 2a_4x_3 - a_5x_2 - a_6), \end{cases} \quad (23.4)$$

توابع کنترل بهینه‌ای که باید مورد استفاده قرار گیرند از شرایط $\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) تعیین می‌شوند. لذا داریم:

$$u_i = \bar{u}_i + \frac{p_i}{\beta_i}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (24.4)$$

با جایگزینی (۲۴.۴) در (۱۶.۴) معادلات حالت کنترل‌شده‌ی غیرخطی را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 + a_1x_1(1 - x_1) - x_1x_2 + \bar{u}_1 + \frac{p_1}{\beta_1}, \\ \dot{x}_2 = a_2x_2x_3 - a_3x_2 + \bar{u}_2 + \frac{p_2}{\beta_2}, \\ \dot{x}_3 = a_4x_3(1 - x_3) - a_5x_2x_3 - a_6x_3 + \bar{u}_3 + \frac{p_3}{\beta_3}, \end{cases} \quad (25.4)$$

این سیستم معادلات دیفرانسیل غیرخطی علاوه‌بر (۲۳.۴) سیستم کامل برای حل کنترل بهینه‌ی سیستم سرطان را تشکیل می‌دهند، این سیستم دارای شرایط مرزی زیر است:

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad x_i(T) = \bar{x}_i, \quad p_i(T) = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (26.4)$$

سپس، حل عددی سیستم غیرخطی (۲۳.۴) و (۲۵.۴) را با استفاده از روش انتگرال عددی رانگ-کوتا^{۲۵} بررسی می‌کنیم.

۵.۴ حل عددی کنترل بهینه

مسئله در بخش ۴، یک مسئله مقدار مرزی دو نقطه‌ای با حالات اولیه و نهایی معلوم است. ما از روش حل عددی رانگ-کوتا با طول گام 0.01 استفاده می‌کنیم. جواب‌های عددی با شکل ارائه خواهند شد. واضح است که افزایش تبدیل سلول‌های طبیعی به بدخیم در حداکثر ظرفیت حمل ثابت سلول‌های تومور، موجب افزایش رشد تومور می‌شود.

²⁵Runge-Kutta

۶.۴ تخمین پارامترهای مجهول

برای مطالعه‌ی کنترل در سیستم آشوبناک سرطان با پارامترهای مجهول، به روش کنترل فیدبک (پس خورد)، یک سیستم کنترل شده با تخمین‌های پارامترهای مجهول a_i را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 + \hat{a}_1 x_1 (1 - x_1) - x_1 x_2 + v_1, \\ \dot{x}_2 = \hat{a}_2 x_2 x_3 - \hat{a}_3 x_2 + v_2, \\ \dot{x}_3 = \hat{a}_4 x_3 (1 - x_3) - \hat{a}_5 x_2 x_3 - \hat{a}_6 x_3 + v_3, \end{cases} \quad (27.4)$$

که در آن تخمین‌های پارامترهای مجهول a_i ($i = 1, \dots, 6$) و v_1, v_2, v_3 ورودی‌های کنترل هستند و به گونه‌ای در نظر گرفته خواهند شد که مناسب برای بدست آوردن مسیر تعیین شده سیستم، توسط حالت‌های پایدار E_1, E_2, E_3 به هریک از این حالت‌های سیستم کنترل نشده باشند.

اگر $v_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) باشد سیستم (۲۷.۴) دارای یک جواب ویژه‌ی ناپایدار است.

$$x_i = \bar{x}_i \quad \hat{a}_i = a_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (28.4)$$

که \bar{x}_i ها ($i = 1, 2, 3$) حالت‌های پایدار سیستم کنترل نشده‌ی (۳.۴) هستند که باید با پیدا کردن کنترل v_i ($i = 1, 2, 3$) پایدار شوند، و این امر باعث می‌شود سیستم (۲۷.۴) مسیر پایداری را دنبال کند. لذا این مسئله هم‌ارز با تثبیت حالات پایداری (۲۸.۴) و تعیین قانون بروزرسانی تخمین‌های $\hat{a}_i(t)$ از پارامترهای مجهول سیستم به کمک کنترل‌کننده‌های v_i ($i = 1, 2, 3$) است.

در ادامه، ما از پایداری لیپانوف برای تعیین قوانین کنترل‌کننده‌ها و همچنین قانون بروزرسانی پارامترهای مجهول سیستم (۲۷.۴) استفاده می‌کنیم. تابع لیپانوف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$2V(x_1, x_2, x_3, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_6, t) = \sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x}_i)^2 + \sum_{s=1}^6 (\hat{a}_s - a_s)^2, \quad (29.4)$$

با مشتق‌گیری تابع (۲۹.۴) در امتداد مسیره‌های سیستم (۲۷.۴) داریم:

$$\dot{V} = \left. \begin{aligned} & (x_1 - \bar{x}_1)[1 + \hat{a}_1 x_1 (1 - x_1) - x_1 x_2 + v_1] + (x_2 - \bar{x}_2)[\hat{a}_2 x_2 x_3 \\ & - \hat{a}_3 x_2 + v_2] + (x_3 - \bar{x}_3)[\hat{a}_4 x_3 (1 - x_3) - \hat{a}_5 x_2 x_3 - \hat{a}_6 x_3 + v_3] \\ & + \sum_{s=1}^6 (\hat{a}_s - a_s) \hat{a}_s \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

برای انتخابی مناسب از کنترل کننده‌ها و همین‌طور قانون بروزرسانی پارامترهای مجهول، داریم:

$$\begin{cases} v_1 = -l_1(x_1 - \bar{x}_1) - a_1 x_1(1 - x_1) + x_1 x_2 - 1, \\ v_2 = -l_2(x_2 - \bar{x}_2) - a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2, \\ v_3 = -l_3(x_3 - \bar{x}_3) - a_4 x_3(1 - x_3) + a_5 x_2 x_3 + a_6 x_3, \end{cases} \quad (31.4)$$

و

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}}_1 = -m_1(\hat{a}_1 - a_1) - x_1(1 - x_1)(x_1 - \bar{x}_1), \\ \dot{\hat{a}}_2 = -m_2(\hat{a}_2 - a_2) - (x_2 - \bar{x}_2)x_2 x_3, \\ \dot{\hat{a}}_3 = -m_3(\hat{a}_3 - a_3) + x_2(1 - x_1)(x_2 - \bar{x}_2), \\ \dot{\hat{a}}_4 = -m_4(\hat{a}_4 - a_4) - x_3(1 - x_3), \\ \dot{\hat{a}}_5 = -m_5(\hat{a}_5 - a_5) - x_2 x_3(x_3 - \bar{x}_3), \\ \dot{\hat{a}}_6 = -m_6(\hat{a}_6 - a_6) + x_3(x_3 - \bar{x}_3), \end{cases} \quad (32.4)$$

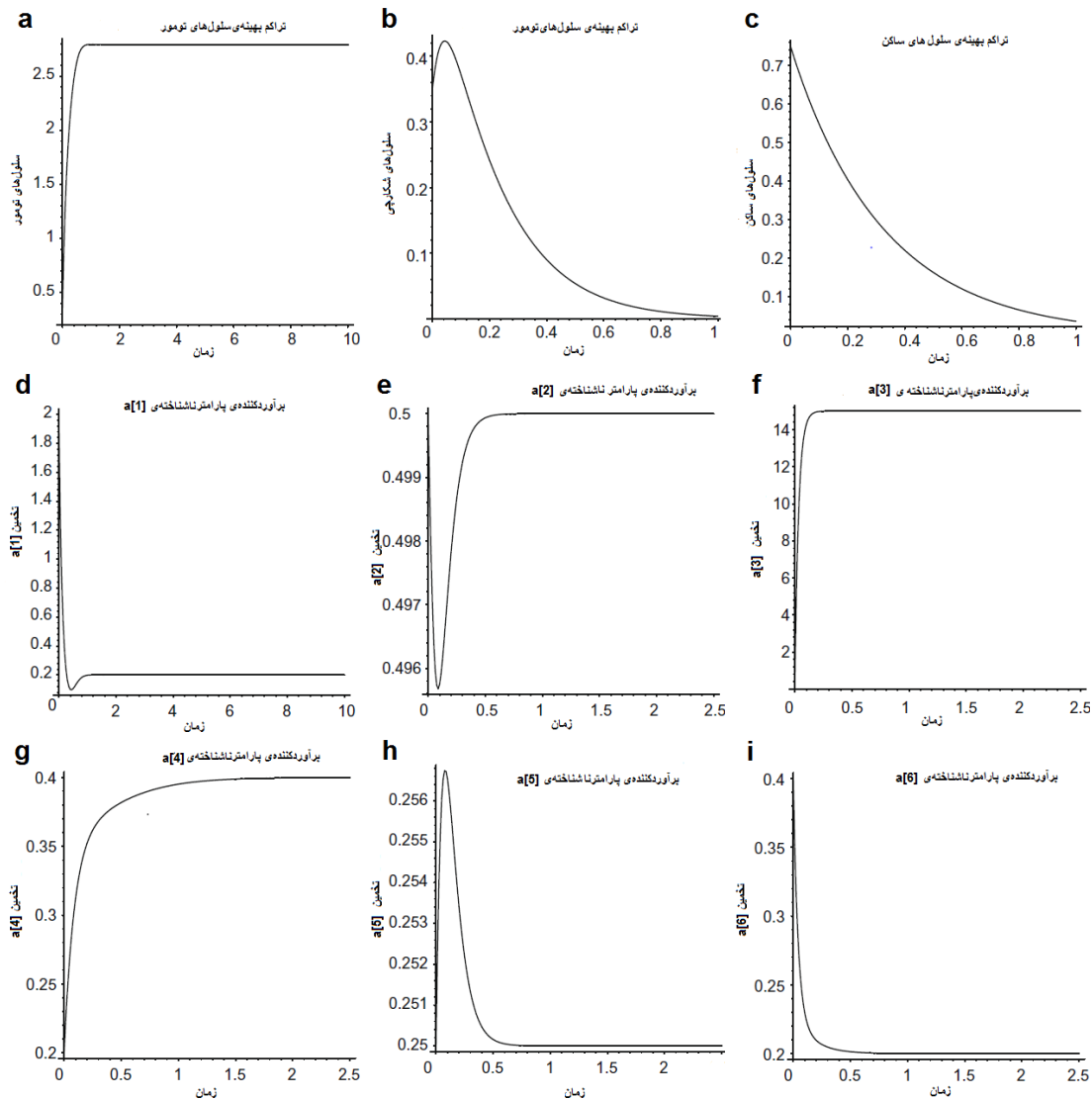
که در آن‌ها l_i ($i = 1, 2, 3$) و m_s ($s = 1, \dots, 6$) ثابت هزینه‌های نامنفی کنترل هستند. مشتق تابع لیاپانوف (۳۰.۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^3 l_i (x_i - \bar{x}_i)^2 - \sum_{s=1}^6 m_s (\hat{a}_s - a_s)^2, \quad (33.4)$$

که اگر $l_i > 0$ تابع \dot{V} معین منفی و اگر $l_i = 0$ نیمه معین منفی است. این نشان می‌دهد که، جواب صفر (۲۸.۴) سیستم‌های (۲۷.۴) و (۳۲.۴) تحت تأثیر کنترل کننده‌های (۳۱.۴) و قانون به‌روزرسانی پارامترهای مجهول سیستم (۳۲.۴) به مفهوم لیاپانوف پایدار مجانبی است. اگر $l_i > 0$ و $m_s > 0$ باشد و اگر $l_i = 0$ ، $m_s = 0$ لزوماً پایدار مجانبی نیست و تنها پایدار است. چون V بطور شعاعی بی کران است، نتیجه می‌گیریم که همه‌ی مسیرها متناهی هستند. بعلاوه چون $\dot{V} = 0$ لذا $x_i = \bar{x}_i$ که بر $\dot{x}_i = 0$ ، $v_i = 0$ و $\dot{\hat{a}}_s = 0$ ($s = 1, \dots, 6$) دلالت دارد، در سیستم سرطان (۲۷.۴) نتیجه گرفتیم که تخمین‌های \hat{a}_i ثابت هستند لذا $\hat{a}_i = a_i$ است. بنابراین از قضیه‌ی لسال [۶۲] نتیجه می‌گیریم که راه‌حل (۲۸.۴) سیستم حلقه‌بسته^{۲۶} (۲۷.۴) و (۳۲.۴) پایدار مجانبی سراسری^{۲۷} است، که اثبات را کامل می‌کند. از این پس به بررسی عددی سیستم‌های غیرخطی (۲۷.۴) و (۳۲.۴) با روش رانگ-کوتا، با طول گام ۱٪ می‌پردازیم.

²⁶closed-loop

²⁷globally asymptotically stable

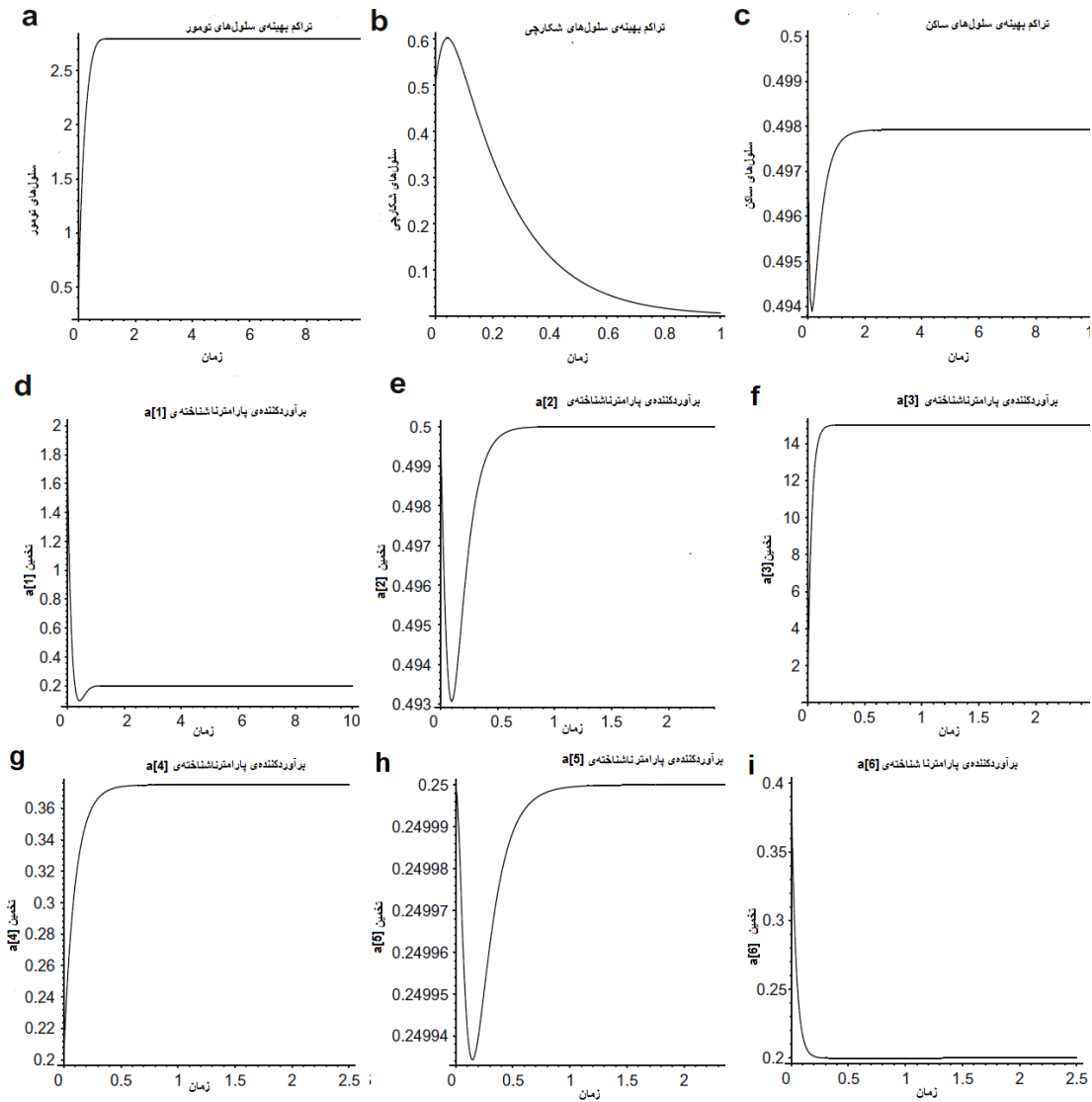


شکل ۶.۴: تراکم بهینه‌ی سلول‌های تومور، سلول‌های شکارچی فعال، سلول‌های شکارچی ساکن و تخمین‌های \hat{a}_i ، $i = 1, \dots, 6$ از پارامترهای مجهول سیستم برای مقادیر تعیین شده‌ی پارامترهای سیستم و تراکم اولیه‌ی $a_1 = 0.5, a_2 = 0.15, a_3 = 0.4, a_4 = 0.25, a_5 = 0.2, a_6 = 1.0, m_1 = 20, m_2 = 30, m_3 = 25, m_4 = 10, m_5 = 20, m_6 = 25$.

۷.۴ جواب عددی

هدف در این بخش ارائه جواب عددی برای سیستم غیرخطی سرطان مهارشده و ارائه تخمین برای پارامترهای مجهول سیستم است، تا نشان دهیم چگونه وجود جواب بهینه برای این سیستم امکان‌پذیر (شدنی) است. مثال‌های عددی زیادی برای سیستم سرطان مهارشده با تراکم‌های اولیه مختلف و مقدار پارامترهای گوناگون انجام شده‌است. شکل‌های زیر جواب‌های عددی دو سرطان، با پارامترهای معلوم و مجهول را نشان می‌دهند. در شکل‌های ۶.۴ و ۷.۴ تراکم‌های بهینه‌ی سلول‌های تومور، سلول‌های شکارچی فعال و سلول‌های شکارچی ساکن برای پارامترهای سیستم و تراکم‌های اولیه‌ی $a_1 = 3, a_2 = 5$.

می‌شوند. توجه داشته باشید برخی از این تراکم‌ها به صورت نمایی پایدارمجانبی‌اند. همچنین برآوردکننده‌های پارامترهای مجهول سیستم برای تعدادی از پارامترهای سیستم و حالات اولیه نمایش داده می‌شوند. علاوه بر این شکل ۷.۴ رفتار پایدار شده‌ی سیستم خود-ایمنی سرطان در حالت تعادل ناپایدار دوم و ورودی‌های کنترل ضروری آن‌ها را نمایش می‌دهند. نتیجه می‌گیریم که تمام حالات تعادل ناپایدار سیستم خود-ایمنی سرطان و تومور را می‌توان تحت شرایط $a_4 > a_6$ ، $a_2 > \frac{a_4}{(a_4 - a_6)q}$ و ورودی کنترل غیرخطی بطور بهینه پایدارشده مجانبی کنیم. همچنین تمام اختلالات تراکم‌ها فقط توسط مقادیر مثبت به صفر گرایش دارد. البته تحقق ورودی‌های کنترل به داروها، شیمی درمانی و پرتودرمانی نیاز دارد.



شکل ۷.۴: تراکم بهینه‌ی سلول‌های تومور، سلول‌های شکارچی فعال، سلول‌های شکارچی ساکن و تخمین‌های \hat{a}_i از پارامترهای مجهول سیستم برای مقادیر تعیین شده‌ی پارامترهای سیستم و تراکم اولیه‌ی $m_1 = 10, m_2 = 20, m_3 = 30, m_4 = 10, m_5 = 20, m_6 = 25,$

فصل ۵

نتیجه‌گیری

اگر چه سرطان به‌عنوان یکی از بزرگترین عوامل مرگ و میر در جهان شناخته شده‌است اما در علم پزشکی درمان قطعی تومور و یا کنترل رشد آن چالشی بزرگ است. برخلاف آزمایشات کلینیکی، مدل‌سازی‌های بیولوژیکی با دقت و هزینه‌ی ناچیز قادر به آنالیز روش‌های درمانی متفاوت برای مبارزه با سلول‌های تومور می‌باشند. این پایان‌نامه در ارتباط با مسئله‌ی کنترل بهینه در بی‌ثباتی حالت‌های پایدار خود-ایمنی سرطان و تومور با استفاده از رویکرد کنترل غیرخطی است. حالت‌های پایدار مثبت مورد بررسی قرار گرفته و با استفاده از روش پایدارسازی خطی، ثبات و بی‌ثباتی حالات پایدار سیستم سرطان مورد مطالعه قرار گرفته‌است. همچنین مسأله کنترل بهینه مدل سرطان مورد نظر بررسی نشده و نتایج شبیه‌سازی شده‌است.

مراجع

- [۱] خاکی صدیق ع، (۱۳۸۶) ”اصول کنترل مدرن“، جلد اول، چاپ چهارم، انتشارات دانشگاه تهران، صص ۴۰-۴۱.
- [2] Brin M., Stuck G. (2002), ”**Introduction to Dynamical Systems**”, Cambridge University Press, New York.
- [3] Baker G.L. and Gollub J.P. (1996), ”**Chaotic Dynamics an Introduction. Second edition**”, Cambridge University Press, New York.
- [4] Sanchez D.A. (1968), ”Ordinary Differential Equations and Stability Theory on Introduction”, **Dover Publications**, New York.
- [5] Elishakoff, Isaac. (2001), ”Dynamical systems with applications using Maple”, ”**Shock and Vibration**”, Vol. 8, PP. 369. .
- [6] Ruelle D. and Takens F. (1971), ”On the nature of turbulence”, ”**Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25**”, Vol. 12, PP. 1-44.
- [7] Feigenbaum M.J. (1978), ”Quantitative Universality for a Class of NonLinear Transformations”, ”**Stat. Phys.**”, Vol. 19, PP. 25-52.
- [8] Feigenbaum M.J. (1979), ”The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations”, ”**Stat. Phys.**”, Vol. 21, PP. 669-706.
- [9] Feigenbaum M.J. (1980), ”The Metric Universal Properties of Period Doubling Bifurcations and the Spectrum for a Route to Turbulence”, ”**Ann. New York. Acad. Sci.**”, Vol. 357, PP. 330-336.
- [10] Feigenbaum M.J. (1988), ”Presentation Functions, Fixed Points, and a Theory of Scaling Function Dynamics”, ” **Stat. Phys.**”, Vol. 52, PP. 527-569.

-
- [11] Morgan G. (1998), "Images of organization, Berrett-Koehler: The executive edition", **"Better-Koehler"**.
- [12] Gaborone D. (1948), "A new microscopic principle", **Nature**, Vol .161, PP. 563-564.
- [13] Goldberger A.L. (1990), Nonlinear dynamics, fractals and chaos, **"Annals of Biomedical Engineering"**, Vol .18, PP. 195-198.
- [14] Benhabib J. (1992), **"Cycles and chaos in economic equilibrium"**, Princeton University Press.
- [15] Seydel R, (1991), **"Bifurcation and chaos: analysis, algorithms, applications"**, Birkhauser, Vol. 97.
- [16] Zhang W.B. (2006), "Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics", **"Mathematics in science and engineering"**, Vol. 204, PP. 1-437.
- [17] Ott E., Grobogi C. and Yorke J. (1990), "controlling chaos", **"Phys.Rev.Lett"**, Vol. 64, PP.1196.
- [18] Pyragas K. (1992), "continuous control of chaos by self-controlling feedback", **"Phys. Lett. A."**, vol. 170, PP. 421-428.
- [19] Lakshmikantham V, Bainov D.D, and simeonov P.S. (1989), "theory of Impulsive Differential Equation" , **"London U. K: World Scientific"**.
- [20] Harb A., Zaher A. and Zohdy M. (2002), "Nonlinear Recursive chaos control", **"Proc. American Control Conf"**, Vol. 3, PP.2251-2254.
- [21] Harb A. and Zohdy M. (2002), "Chaos and Bifurcation Control Useing Nonlinear Recursive Controller", **"Nonlinear Analysis: Modeling and Control"**, Vol. 7, PP. 37-43.
- [22] Vincent T.L. (2000), "Utilizing Chaos Control System Design", **in G. Chen (ed.), Controlling Chaos and Bifurcation in Engineering System, CRC Press.**
- [23] A.M. Farahmand and P. Jebehdar Maralani, "Stabilizing Chaotic Systems With Control Signal", **unpublished.**
- [24] Chen G. R. and Dong X. (1998), **"From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications"**, "World Scientific Singapore".

- [25] Das A., Roy A.B. and Das P. (2000), "Chaos in a three dimensional neural network", " **Appl. Math. Model**", Vol .24, PP. 511-522.
- [26] Roy r.,Murphy W., Maier T.D., Gillis Z. and Hunt E.R. (1993),"Dynamical Control of a Chaotic Laser: Experimental Stabilization of a Globally coupled System", " **Physical Review letters**", Vol. 68, PP. 1259.
- [27] Kousaka T., Tahara S., Ueta T. Abe M. and Kawakami H. (2001),"Chaos in simple hybrid system and its control", " **Electronic Letters**", Vol. 37, PP. 1-2.
- [28] Garfinkel A., Spano M.L., Ditto W.L. and Weiss J.N. (1992), "Controlling Cardiac Chaos", " **Science**", Vol. 257, PP. 1230-1235.
- [29] Brandt M.E. and Chen G. (2000), " **Delay Feedback Control of Cardiac Activity Models**", in G Chen (ed), *Controlling Chaos and Bifurcation in Engineering System*, CRC Press.
- [30] Yang T. (2004),"A Survey of Chaotic Secure Communication System", " **International Journal of Computational Cognition**", Vol. 2, PP. 81-130.
- [31] Suykenc J.A.K., Yang T., Vandewalle J. and Chua L.O. (1999), "Impulsive Control and synchronization of Chaos", " **Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems**", PP. 275-298.
- [32] Andrievskii, BR and Fradkov, AL. (2004), "Control of Chaos: Methods and Applications. II. Applications", " **Automation and Remote Control**", Vol. 65, PP. 505-533.
- [33] Kirk D.E. (1970), " **Optimal Control Theory**", An Introduction, Englewood Cliffs, New York,
- [34] Keckman V. (2001), " **Learning and soft computing**", MIT press, Cambridge, MA.
- [35] Hager W., paradolas P. M. (2013)," **Optimal Control:Theory, Algorithms and applications**", Springer Science & Business Media.
- [36] Mehne H.H., and borzabadi A.H. (2006), "A numerical method for solving optimal control problem using state parametrization" **Numerical Algorithms**, Vol. 42, PP. 165-169.
- [37] Teo K.L., Jenings L.S., Lee H.W. and Rehbock J.V. (1999), "Control parameterization enhancing technique for constrained optimal control problems" **The ANZIAM Journal**, Vol. 40

-
- [38] Bachman G., Narici L. and Beckenstein E. (2012), "**Fourier and wavelet analysis**", Springer Science & Business Media.
- [39] Pinch E.R. (1995), "**Optimal control and the calculus of variations**", Oxford University Press.
- [40] Stryk O.V. and Bulirsch R. (1992), "Direct and indirect methods for trajectory optimization", **Annals of Operations Research**, vol. 37, PP. 357-373.
- [41] Kafash B. and Delavarkhalafi A. (2015), "Restarted State Parameterization Method for Optimal Control Problems" **mathematics and computer science**, Vol. 14, PP. 151-161.
- [42] Ploak E., (1971), "**computational methods in optimization**", New York: Academic Press.
- [43] Lin Q., Loxton R. and Teo K.L. (2014), "The Control Parameterization Method For Nonlinear Optimal Control: A Survey" **Journal of Industrial and Management Optimization**, Vol. 10, PP. 275-309.
- [44] Troch I., Breiteneker F. and Graeff M. (1989), "computing optimal controls for systems with state and control constraints." **IFAC Proceedings Volumes**, Vol. 22, PP. 67-72.
- [45] Vlassenbroeck J, (1998), "A chebyshev polynomial method for optimal control with state constraints." **Automatica**, Vol. 24, PP. 499-506.
- [46] Jaddu H.M. (1998), PhD thesis, "**Numerical methods for solving optimal control problems using chebyshev polynomials**", Minamiuonuma, Advanced institute of science and technology. University of japan.
- [47] El-Gohary A. (2008), "Chaos and optimal control of cancer self-remission and tumor system steady states", "**Chaos, Solitons & Fractals**", Vol. 37, PP. 1305-1316.
- [48] Sarkar R, Banerjee S. (2005), "Cancer and self remission and tumor stability, a stochastic approach", "**Mathematical Biosciences**", Vol, 196, PP. 65-81.
- [49] El-Gohary A, Al-Ruzaiza A. (2007), "Chaos and adaptive control in two prey, one predator system with nonlinear feedback", "**Chaos, Solitons & Fractals**", Vol. 34, PP. 443-453.
- [50] Kuang Y. (2004), "Biological stoichiometry of tumor dynamics: mathematical Models and Analysis", "**Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B**", Vol. 4, PP. 221-240.
- [51] DePillis L, Radunskaya A. (2003), "The dynamics of an optimally controlled tumor model: a case study", "**Mathematical and computer modelling**", Vol. 37, PP. 1221-1244.

- [52] El-Gohary A. (2001), "Optimal control of the genital herpes epidemic", **"Chaos, Solitons & Fractals"**, Vol. 12, PP.1817-1822.
- [53] El-Gohary A, Bukhari F. (2003), "Optimal control of stochastic prey–predator models". **"Applied mathematics and computation"**, Vol. 146, PP. 403–415.
- [54] El-Gohary A, Al-Ruzaiza A. (2002), "Optimal control of equilibrium state of prey–predator model", **"Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences"**, Vol. 6, PP. 27-36.
- [55] Satulovsky JE, Tome T. (1994), "Stochastic Lattice gas model for a predator–prey system". **"Physical Review E"**, Vol. 49, PP. 5073.
- [56] Sugie J, Katayama M. (1999), "Global asymptotic stability of a predator–prey system of holling type", **"Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications"**, Vol. 38, PP. 105–121.
- [57] Logofet, Dmitrii O. (1983), **"Stability of biological communities"**, "Mir publishers".
- [58] Pillis L, Radunskaya A. (2001), "A mathematical tumor model with immune resistance and drug therapy: an optimal control approach", **"Computational and Mathematical Methods in Medicine"**, Vol. 3, PP. 79-100.
- [59] Dingli D, Cascino M, Josic K, Russell S, Bajzer Z. (2006), "Mathematical modeling of cancer radiotherapy", **"Mathematical biosciences"**, Vol. 199, PP. 55-78.
- [60] Lakshmanan M, Rajaseker S. (2012), **"Nonlinear dynamics: integrability and chaos patterns"**, "Springer Science & Business Media".
- [61] Ogata K. (1990), "Modern control engineering, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc".
- [62] LaSalle JP, Hale KJ. (1967), **"Differential equations and dynamical systems"**, "London: Academic Press Inc".
- [63] Dingli D, Cascino DM, Josic K, Russell J, Bajzer Z. (2006), "Mathematical modeling of cancer radiotherapy", **"Mathematical biosciences"**, Vol. 199, PP. 55-78.
- [64] Ramosand CA. (2007), "Modeling subspecies and the tumor-immune system interaction: steps toward understanding therapy", **"Physica A: Statistical Mechanics and its Applications"**, vol. 386, PP. 713-719.

- [65] Misra, JC and Mitra, A. (2008), "Synchronization among tumour-like cell aggregations coupled by quorum sensing: A theoretical study", "**Computers & Mathematics with Applications**", Vol. 55, PP. 1842-1853.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Hyper Chaotic	ابر آشوب
Butterfly Effect	اثر پروانه‌ای
Chaos	آشوب
Minimim Principle	اصل مینیمم
Optimization Algorithm	الگوریتم بهینه‌سازی
Steepest Descent Algorithm	الگوریتم تندترین کاهش
Genetic Algorithm	الگوریتم ژنتیک
Initial	اولیه
Attractive dimension	بعد جاذب
Basis Of Attraction	بستر جذب
Nonlinear Programming	برنامه‌ریزی غیرخطی
Optimal Path Planing	برنامه‌ریزی مسیر بهینه
Optimization	بهینه‌سازی
Anti-Synchronization	پادهمزمان‌سازی
Parametrization	پارامترسازی
Stable	پایدار
Stable Limit Cycle	پایداری دور حدی
Lyapunov Stability theorem	پایداری لیاپانوف
Stable Equilibrium Point	پایداری نقطه تعادل
Basis	پایه
Poincare	پوانکاره
Trial Function	تابع آزمایشی
Errore Finction	تابع خطا
Control Function	تابع کنترل
Lyapunov Function	تابع لیاپانوف
Strong Lyapunov Function	تابع لیاپانوف قوی

Trajectory Function	تابع مسیر
Weight Function	تابع وزن
Objective Function	تابع هدف
Functional	تابعی
Estimation	تخمین
Phase Portrait	تصویر فاز
Approximation	تقریب
Trodal attractor	جاذب سطحی مارپیچی
Strange Attractor	جاذب عجیب
Point Attractor	جاذب نقطه‌ای
Optimal Solution	جواب بهینه
Trial Solution	جواب‌های آزمایشی
State	حالت
Limit	حدی
Variational Calcalus	حساب تغییرات
Sensitivity To Initial Condition	حساسیت به شرایط اولیه
Phase Line	خط فاز
Dynamic Adaption	خودسازماندهی
Self Similarity	خودشبه‌بندی
Limit cycle	دور حدی
Un Stable Limit	دور حدی ناپایدار
Numerical Method	روش عددی
Indirect Method	روش غیر مستقیم
Quasi Newton Method	روش‌های شبه‌نیوتن
Simple	ساده
Chaotic System	سیستم آشوبناک
Dynamic System	سیستم دینامیکی
Cononical System	سیستم متعارف
autonomous System	سیستم مستقل
Response System	سیستم واکنش
Initial Candition	شرایط اولیه
Boundary Condition	شرایط مرزی
Phase Plane	صفحه فاز
Lagrangian Multipliers	ضرایب لاگرانژ

Phase	فاز
Acceptable	قابل قبول
Deterministic	قطعی
Complete	کامل
Control	کنترل
Optimal Control	کنترل بهینه
Fraction Optimal control	کنترل بهینه کسری
Aduptive Control	کنترل تطبیقی
Linear Feedback Control	کنترل خطی فیدبک
Node	گره
Discretization	گسسته‌سازی
Lyapunov	لیاپانوف
Differential	ماتریس مشتقات
StateVariable	متغیر حالت
Limit Set	مجموعه حدی
Constraint	محدودیت
secure Commnuication	مخابرات امن
Cordinate	مختصات
Orbit	مدار
Boundary	مرزی
Trajectory	مسیر
Nonlinear Optimal Control Problem	مسأله کنترل بهینه غیرخطی
Differential	معادله دفرانسیل
Ordinary Differential Equation	معادله دیفرانسیل معمولی
Bifurcation Value	مقدار انشعاب
Optimal control	مقدار بهینه
Poincare Section	مقطع
Unstable	ناپایدار
Aperiodic	نامتناوب
Critical Point	نقطه بحرانی
Equilibrium	نقطه تعادل
Asymptotically State Equilibrium Point	نقطه تعادل به‌طور مجانبی
Attractive Equilibrium Point	نقطه تعادل جذب
Reppler Equilibrium Point	نقطه تعادل دافع

Simple Equilibrium Point	نقطه تعادل ساده
Nonsimple Equilibrium Point	نقطه تعادل غیرساده
Singular Equilibrium Point	نقطه تعادل منفرد
UnStable Equilibrium Point	نقطه تعادل ناپایدار
Limit Point	نقطه حدی
Ordinary Point	نقطه معمولی
Poincare Map	نگاشت پوانکاره
Bifurcation Diagram	نمودار انشعاب

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Acceptable	قابل قبول
Aduptive	کنترل تطبیقی
Anti-Synchronization	پادهمزمان سازی
Aperiodic	نامتناوب
Approximation	تقریب
Asymptotically Stable Equilibrium Point	نقطه تعادل به طور مجانبی
Attractive Dimension	بعد جاذب
Attractive Equilibrium point	نقطه تعادل جاذب
Autonomous System	سیستم مستقل
Basis	پایه
Basis Of Attraction	بستر جذب
Bifurcation	انشعاب
Bifurcation Diagram	نمودار انشعاب
Bifurcation Value	مقدار انشعاب
Boundary	مرزی
Boundary Condition	شرایط مرزی
Butterfly Effect	اثر پروانه‌ای
Canonical System	سیستم متعارف
Chaos	آشوب
Chaotic System	سیستم آشوبناک
Complete	کامل
Constraint	محدودیت
Control	کنترل
Control Function	تابع کنترل
Cordinate	مختصات
Critical Point	نقطه بحرانی

Deterministic	قطعی
Differential Equation	معادله دیفرانسیل
Differential Matrix	ماتریس مشتقات
Discretization	گسسته‌سازی
Dynamic Adaption	خودسازماندهی
Equilibrium Poin	نقطه تعادل
Errore Function	تابع خطا
Estimation	تخمین
Functional	تابعی
Genetic Algorithm	الگوریتم ژنتیک
Hyperchaotic	ابراشوبناک
Initial	اولیه
Initial Condition	شرایط اولیه
Indirect Method	روش غیرمستقیم
Lagrangian Multipliers	ضرایب لاگرانژ
Limit	حدی
Limit Cycle	دور حدی
Limit Point	نقطه حدی
Limit Set	مجموعه حدی
Liner Feedback Control	کنترل خطی فیدبک
Lyapunov	لیاپانوف
Lyapunov Function	تابع لیاپانوف
Lyapunov Stability Theorem	قضیه پایداری لیاپانوف
Minimum Principle	اصل مینیمم
Node	شبکه
Nanlinear progaraming	برنامه‌ریزی غیرخطی
Nonlinear Optimal Control Problem	مساله کنترل بهینه غیرخطی
Nonsimple Equilibrium Point	نقطه تعادل غیرساده
Numerical method	روش عددی
Objective Function	تابع هدف
Optimal Control	کنترل بهینه
Optimal Path Planing	برنامه‌ریزی مسیر بهینه
Optimal Solution	جواب بهینه
Optimal Value	مقدار بهینه

Optimization	بهینه‌سازی
optimization Algorithm	الگوریتم بهینه‌سازی
Orbit	مدار
Ordinary Differential Equation	معادله دیفرانسیل معمولی
ordinary Point	نقطه معمولی
Parametrization	پارامترسازی
Path	مسیر
Phase	فاز
Phase Line	خط فاز
Phase Plane	صفحه فاز
Phase Prtrait	تصویر فاز
Poincare	پوانکاره
Poincare Map	نگاشت پوانکاره
Poincare Section	مقطع پوانکاره
Point Attractor	جاذب نقطه‌ای
Quasi Newton Method	روش شبه نیوتن
Reppler Equilibrium Point	نقطه تعادل دافع
Response System	سیستم واکنش
Secure Commnunication	مخابرات امن
Self Similarity	خودشباهتی
Sensitivily Ti Initial Condition	حساسیت به شرایط اولیه
Simple	ساده
Simple Equilibrium Point	نقطه تعادل ساده
Singular	نقطه تعادل منفرد
Stable	پایدار
Stable Equilibrium Point	پایداری نقطه تعادل
Stable Limit Cycle	پایداری دور حدی
State	حالت
State Variable	متغیر حالت
Steepest Descent Algorithm	الگوریتم تندترین کاهش
Strange Attractor	جاذب عجیب
Strong Lyapunov	تابع لیپانوف قوی
Trajectory	مسیر
Trajectory Function	تابع مسیر

Trial Function	تابع آزمایشی
Trial Solution	جواب آزمایشی
Troidal Attractor	جاذب سطحی مارپیچی
Unstable	ناپایدار
Unstable Equilibrium Point	نقطه تعادل ناپایدار
Unstable Limit Cycle	دور حدی ناپایدار
Variational	حساب تغییرات
Weak Lyapunov Function	تابع لیاپانوف ضعیف
Weight Function	تابع وزن

Aabstract

Because of the destructive effects of chemotherapy and the moderating its effect by the creation of the drug resistance, we seek a way to simulate the behavior of cancer cells in the face of the immune system, healthy cells and medications, in order to help the medical team find the most effective pharmaceutical compounds for cancer patients.

In present thesis, we propose a mathematical model of cancer with unknown parameters. then study the chaos and optimal control of cancer model with complete unknown parameters. The linear stability analysis of the biologically feasible equilibrium states of this model will be discussed. The ranges of the system parameters for which the system has chaotic behavior will be found. The estimation of the system unknown parameters will be presented.

The present thesis has been arranged in 5 chapter. This first chapter has be summarize to introduction definition of dynamic system and the conceptions which is needed in the next chapters. In chapter 2, we have a general look at chaos theory and chaotic systems control. In chapter 3, we will have a brief look at the calculus of variations and optimal control problem and optimization conditions. In chapter 4, we propose a mathematical model of cancer with unknown parameters and we use numerical methods. In chapter 5, we conclude.

Keywords: Chaos, Pontryagin's Minimum Principle, Lyapunov Stability Principle, Mathematical Modeling of Cancer, Optimal Control, Nonlinear Optimal Control Problem.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Partial Differential equations

**The numerical scheme for chaos and optimal
control in medicine**

By: Fatemeh Hosienpour

Supervisor

Dr Alireza Nazemi

January 2019