

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش هندسه

رساله دکتری

روشهای هندسی پیدا کردن قوانین پایستگی و کاربردهای آن در فیزیک

نگارنده: الهام لشکریان

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

دی ۱۳۹۷



دانشگاه گیلان

مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود خانم الهام لشکریان دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض به شماره دانشجویی ۹۳۰۱۲۷۵ ورودی بهمن ماه سال

۱۳۹۳ در تاریخ ۹۷/۱۰/۲۶ از رساله نظری / عملی خود

با عنوان: روش های هندسی پیدا کردن قوانین پایستگی و کاربردهای آن در فیزیک

دفاع و با اخذ نمره ۲۰ به درجه عالی نائل گردید.

- الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰
- ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷
- ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵
- د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
- ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱-	دکتر سید رضا حجازی	استاد راهنما	استاد	
۲-	دکتر مهدی نجفی خواه	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۳-	دکتر روح الله بخشنده	استاد مدعو خارجی	استاد	
۴-	دکتر احمد معتمدنژاد	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۵-	دکتر مهدی قوتمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استاد	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم الهام لشکریان بعمل آید.



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم عباسی
تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به

استوارترین تکیه گاهم، دستان پرلطف پدرم

مهربانترین نگاه زندگیم، چشمان پر مهر مادرم

بزرگترین عشق زندگیم، پرنیان فرشته ی کوچکم

سپاس‌گزاری...

سپاس ایزد منان که به من این فرصت را داد تا به این مرحله از علم رسیده، از هیچ محبتی دریغ نکرد و در تمام مراحل زندگی مرا قوت قلب بود. در اینجا وظیفه‌ی خود میدانم که نهایت سپاسگزاری را از تمامی عزیزانی که در این راه به من کمک کرده‌اند به عمل آورم:

ابتدا از استاد راهنمای دانشمند و پر مایه‌ام جناب آقای **دکتر سید رضا حجازی** که از محضر پر فیض تدریسشان، بهره‌ها برده‌ام و ایشان در کمال صبر و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننموده‌اند کمال تشکر را دارم.

هم‌چنین، از داوران گرامی، آقایان **دکتر مهدی نجفی خواه**، **دکتر روح الله بخشنده** و **دکتر احمد معتمد نژاد** که زحمت داوری و تصحیح این رساله را برعهده داشتند سپاسگزارم.

در پایان، این رساله را تقدیم می‌کنم به خانواده عزیزم که همیشه یار و همراه من بوده‌اند.

الهام لشکریان

دی ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب الهام لشکریان دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده رساله با عنوان **روشهای هندسی پیدا کردن قوانین پایستگی و کاربردهای آن در فیزیک**، تحت راهنمایی دکترسید رضا حجازی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

الهام لشکریان

دی ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

موضوع محوری و بنیادی رساله دکتری حاضر، بررسی همه جانبه و فراگیر کاربرد گروه‌های لی در هندسه و مطالعه و تبیین قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل می‌باشد. مطالب ارائه شده در این رساله، در شش بخش مجزا ارائه شده است. بعد از مقدمه، بخش دوم به تعاریف و مفاهیم پایه ای که در طی رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند پرداخته شده است. بررسی تبدیلات، تقارنهای لی و جواب‌های معادلات دیفرانسیل تحت این تقارن‌ها از موارد دیگری است که طی این بخش به آن پرداخته ایم. بخش سوم بیشتر به مطالعه قوانین پایستگی و روشهای متفاوت محاسبه ی آنها، اختصاص یافته است. محاسبه تقارن و قوانین پایستگی برای معادلات دیفرانسیل تقریبی و بالاحص دستگاه معادلات دیفرانسیل تقریبی از مهمترین موضوعات بخش چهارم به شمار می‌روند. در فصل پنجم ابتدا به طور مفصل به آشنایی با محاسبات کسری پرداخته سپس نحوه محاسبه تقارن و قوانین پایستگی را برای این دسته از معادلات در طی مقالات چاپ شده توضیح داده ایم. در نهایت برخی از بسته های محاسباتی نرم افزاری که سرعت محاسبات را بهبود می‌بخشند در بخش انتهایی آورده شده است.

کلمات کلیدی: قضیه نوتر، معادلات اوپلر-لاگرانژ، دستگاه بهینه، قوانین پایستگی، روش مستقیم، فرمولهای هوموتوبی، تقارنهای لی، قضیه بویر، معادلات دیفرانسیل تقریبی، معادلات دیفرانسیل کسری.

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi, Noora Habibi, Ahmad Motamednezhad,
Symmetry properties, conservation laws, reduction and numerical approximations of time-fractional cylindrical-Burgers equation.
Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 67(2019) 176-191.
2. Noora Habibi, Elham Lashkarian, Elham Dastranj , S. Reza Hejazi,
Lie symmetry analysis, conservation laws and numerical approximations of time-fractional Fokker–Planck equations for special stochastic process in foreign exchange markets.
Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 513(2019) 750-766.
3. Elham Lashkarian S. Reza Hejazi,
Exact solutions of the time fractional nonlinear Schrödinger equation with two different methods.
Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(7)(2018) 2664–2672.
4. Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi, Elham Dastranj,
Conservation laws of $(3 + \alpha)$ -dimensional time-fractional diffusion equation.
Computers and Mathematics with Applications, 75(3)(2018) 740-754.
5. S. Reza Hejazi, Soleiman Hosseinpour, Elham Lashkarian,
Approximate symmetries, conservation laws and numerical solutions a class of perturbed Linear Wave type system.
Quaestiones Mathematicae, DOI: 10.2989/16073606.2018.1538062, Accepted.
6. Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi,
Group analysis of the time fractional generalized diffusion equation.
Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 479(2017) 572-579.
7. Elham Lashkarian, Elaheh Saberi and S. Reza Hejazi,
Symmetry reductions and exact solutions for a class of nonlinear PDEs.
Asian-European J. Mathematics, 9(2)(2015), 1650061 (11 pages).
8. Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi,
Polynomial and non-polynomial solutions set for wave equation using Lie point sym-

metries.

Computational Methods for Differential Equations, 4(4)(2016) 298-308.

9. Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi,

Exact solutions of a linear fractional partial differential equation via characteristics method.

Computational Methods for Differential Equations, 6(1)(2018) 12-18.

10. S. Reza Hejazi and Elham Lashkarian,

Conservation laws and symmetry analysis of (1+1)-dimensional Sawada-Kotera equation.

Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 19(3)(2017) 10-19.

11. S. Reza Hejazi and Elham Lashkarian,

On The Structure of Conservation Laws of (3+1)-dimensional Wave Equation.

Arab Journal of Mathematical Sciences, 24(2)(2018) 199-224.

12. Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi,

Conservation laws and Lie symmetry approach for perturbed differential equations.

49th Annual Iranian mathematics conferences, University of Science and Technology, August 23-26 (2018).

13. Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi,

Exact solutions of the time fractional nonlinear diffusion equation via invariant subspace method.

48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Ali Sina University, August 22-25 (2017).

14. Elham Lashkarian, Elaheh Saberi, S. Reza Hejazi,

Classification of n-th order ODEs under a given symmetry group.

13th International Seminar on Differential Equations, Dynamical System and Applications, Isfahan University of Technology, July 13-15 (2016).

15. Elham Lashkarian¹, S. Reza Hejazi,

Geometric study of Wave Equation and their Application in Physics.

Iranian Conference on Mathematical Physics, Nov. 5 (2016).

16. S. Reza Hejazi, Elaheh Saberi and Elham Lashkarian,

Intergration of ordinary differential equations.

12nd International Seminar on Differential Equations, Dynamical System and Applications,
University of Tabriz, May 27-29 (2015).

17. Elham Lashkarian, Reza Hejazi,

Exact solutions of time-fractional super KdV system via Lie symmetry theory.

, 14th International Seminar on Differential Equations, Dynamical System and Applications,
Zanjan University of Technology, July 17-20 (2018).

18. S. Reza Hejazi, Elaheh Saberi and Elham Lashkarian,

**Symmetry Group, Hamiltonian Equations and Conservation Laws of General Three-
Dimensional Anisotropic Non-linear Sourceless Heat Transfer Equation.**

Computational Methods for Differential Equations, 7(1)(2019) 54-68.

19. Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi and Noora Habibi,

A new method for constructing exact solution for a time-fractional differential equation.

Computational Methods for Differential Equations, Accepted.

فهرست مطالب

ش	فهرست تصاویر
ث	فهرست جداول
۱	۱ مقدمه
۹	۲ ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل
۹	۱.۲ گروه‌های لی، تبدیلات و جبرهای لی
۱۰	۱.۱.۲ گروه لی
۱۳	۲.۱.۲ جبر لی
۱۵	۳.۱.۲ معرفی انواع تبدیلات
۲۰	۲.۲ فضاهای جت
۲۱	۳.۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل
۲۲	۴.۲ نگاشت نمایی و مولدهای بی نهایت کوچک
۲۵	۵.۲ معرفی و نحوه محاسبه تقارن‌ها
۲۷	۱.۵.۲ محاسبه گروه تقارن معادله $(۱+۳)$ - بعدی موج
۳۱	۶.۲ کاربردهای گروه تقارن
۳۱	۱.۶.۲ کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل معمولی
	۲.۶.۲ طبقه بندی معادلات دیفرانسیل مرتبه n - ام تحت گروه تقارن
۳۳	داده شده
	۳.۶.۲ جواب‌های گروه - ناوردای برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات
۳۶	جزیی
۴۱	۷.۲ گروه‌های حل پذیر
۴۲	۸.۲ محاسبه دسته وسیعی از جواب‌ها با استفاده از خاصیت تقارنی
۴۷	۳ قوانین پایستگی
۴۹	۱.۳ معرفی و مفهوم قانون پایستگی

۵۰	روش مستقیم محاسبه‌ی قوانین پایستگی	۲.۳
۵۶	محاسبه‌ی قوانین پایستگی با استفاده از روش نوتر	۳.۳
۵۷	خود الحاقی دستگاه معادلات دیفرانسیل	۱.۳.۳
۵۸	معادلات اوپلر-لاگرانژ	۲.۳.۳
۵۹	الگوریتم نوتر از قضیه‌ی نوتر	۳.۳.۳
۶۳	تعمیم قضیه‌ی نوتر	۴.۳.۳
۶۶	روش ابراگیموف برای محاسبه قوانین پایستگی	۴.۳
۶۹	فرمولی دقیق برای پیدا کردن قوانین پایستگی به روش ابراگیموف	۱.۴.۳
۷۲	روش هرمان-پل برای محاسبه‌ی قوانین پایستگی	۵.۳
۷۷	رسیدن به قوانین پایستگی جدید با استفاده از قوانین پایستگی محاسبه شده	۶.۳
	محاسبه قوانین پایستگی جدید با تبدیل دستگاه معادلات	۱.۶.۳
۷۷	دیفرانسیل به دستگاه دیگر	
	محاسبه قوانین پایستگی جدید با تبدیل ضرایب پایستگی به	۲.۶.۳
۷۹	ضرایب جدید	
۸۱	یافتن جواب با استفاده از قوانین پایستگی	۷.۳
۸۷	تقارن و قوانین پایستگی تقریبی	۴
۸۸	گروه تبدیلات تقریبی	۱.۴
۸۹	معادلات تقریبی لی	۲.۴
۹۰	نگاشت نمایی تقریبی	۳.۴
۹۱	تقارن های تقریبی	۴.۴
۹۳	محاسبه تقارن های تقریبی برای معادلات دیفرانسیل تقریبی	۱.۴.۴
۹۴	محاسبه تقارن های تقریبی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل	۲.۴.۴
۹۶	قوانین پایستگی تقریبی	۵.۴
	محاسبه قوانین پایستگی تقریبی برای دستگاه معادلات	۱.۵.۴
۹۶	دیفرانسیل تقریبی	
۱۰۵	معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری و کاربردها	۵
۱۰۵	آشنایی با محاسبات کسری	۱.۵
۱۰۶	توابع خاص و کاربردی	۱.۱.۵
۱۱۰	انتگرال و مشتقات کسری	۲.۱.۵
	روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی	۳.۱.۵
۱۲۱	کسری با استفاده از تعریف مشتق ریمان-لیوویل	

۴.۱.۵	روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی
۱۲۸	کسری با استفاده از تعریف مشتق کاپوتو
۲.۵	تحلیل تقارنی معادلات دیفرانسیل کسری
۱۳۳	کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از عملگر کوبر
۱۳۹	جواب های معادلات دیفرانسیل کسری
۱۴۶	قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل کسری
۱۷۰	محاسبه قوانین پایستگی با استفاده از لاگرانژی فرمال
۱۷۰	تعمیم کسری قضیه نوتر برای محاسبه قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل کسری
۱۹۵	تحلیل روش لی و قوانین پایستگی برای دستگاهی از معادلات دیفرانسیل کسری
۱۹۹	کاهش مرتبه و جواب های دقیق دستگاه کسری (۲۶۹.۵)
۲۰۰	قوانین پایستگی از یک دستگاه کسری
۲۰۲	یادداشت
۲۰۵	
۲۰۷	۶ محاسبات نرم افزاری
۲۰۷	۱.۶ پکیج های مورد نیاز
۲۰۸	۱.۱.۶ براکت لی
۲۰۹	۲.۱.۶ امتداد تقارن ها
۲۰۹	۳.۱.۶ حل معادلات دیفرانسیل معمولی
۲۰۹	۴.۱.۶ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
۲۰۹	۵.۱.۶ نحوه محاسبه تقارن ها
۲۱۰	۶.۱.۶ نحوه محاسبه تقارن ها برای دستگاه معادلات دیفرانسیل
۲۱۱	۷.۱.۶ جواب های گروه-ناوردا
۲۱۱	۸.۱.۶ محاسبه تبدیلات ناوردا
۲۱۲	۹.۱.۶ کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل تحت ناوردای مورد نظر
۲۱۲	۱۰.۱.۶ رسم شکل با کمک میپل
۲۱۳	۱۱.۱.۶ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از تقارن داده شده
۲۱۳	۱۲.۱.۶ مشتق گیری و انتگرال گیری از عبارات جبری
۲۱۴	۱۳.۱.۶ تبدیل لاپلاس و معکوس لاپلاس از عبارات جبری
۲۱۴	۱۴.۱.۶ تقارن های معادلات دیفرانسیل تقریبی
۲۱۵	۱۵.۱.۶ پیدا کردن عامل انتگرال
۲۱۶	۱۶.۱.۶ پیدا کردن قوانین پایستگی به روش مستقیم

۲۱۶ معادله الحاقی	۱۷.۱.۶
۲۱۷ یافتن تقارنهای معادلات دیفرانسیل کسری	۱۸.۱.۶
۲۱۹		مقالات برگرفته از رساله
۲۲۵		فهرست نمادها
۲۲۹		مراجع
۲۳۷		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۴۳		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۵۰		نمایه

فهرست تصاویر

۷	تصاویری از دانشمندان غیر معاصر	۱.۱
۸	تصاویری از دانشمندان معاصر	۲.۱
۴۵	شکل برخی از جواب های دقیق معادله موج	۱.۲
۸۴	شکل هایی از جواب های دقیق معادلات کاهش یافته (۸۹.۳)	۱.۳
۱۵۶	شکل تابع $u = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ با $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\delta}$	۱.۵
۱۵۶	شکل تابع $u = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ با $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\delta}$	۲.۵
۱۵۷	شکل تابع $u = \frac{e^t}{\sqrt{x}} [\sinh(A) + \cosh(A)]$ با $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\delta}$	۳.۵
۱۵۷	شکل تابع $u = \frac{t^\alpha}{(1+\sqrt{x})\Gamma(\alpha)}$ با $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\delta}$	۴.۵
۲۰۱	شکلی از تابع $u = c_i t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ با $c_i = 1$	۵.۵

فهرست جداول

۳۹	تبدیلات ناورد و معادلات کاهش یافته برای تقارن های	۱.۲
۳۹	... { $X_i, i = 1, \dots, 10$ }	
۳۹	... جواب های معادله موج (۳۳.۲) تحت تقارن های { $X_i, i = 1, \dots, 6$ }	۲.۲
۴۲	... جدول جابجاگر	۳.۲
۴۳	... جواب های جدید تولید شده توسط براکت لی [X_i, X_{12}]	۴.۲
۴۴	... طبقه بندی جواب های چند جمله ای جدید برای معادله موج (۳۳.۲)	۵.۲
۴۴	... طبقه بندی جواب های چند جمله ای جدید برای معادله موج (۳۳.۲)	۶.۲
۴۶	... طبقه بندی جواب های غیر چند جمله ای جدید برای معادله موج (۳۳.۲)	۷.۲
۴۶	... طبقه بندی جواب های غیر چند جمله ای جدید برای معادله موج (۳۳.۲)	۸.۲
۵۴	... چگالی و شارهای قوانین پایستگی در روش مستقیم	۱.۳
۶۳	... قوانین پایستگی محاسبه شده با استفاده از روش نوتر	۲.۳
۷۰	... قوانین پایستگی محاسبه شده با استفاده از روش ابراگیموف	۳.۳
۷۱	... قوانین پایستگی محاسبه شده با استفاده از روش ابراگیموف	۴.۳
۷۶	... چگالی و شارهای بدست آمده متناظر با ضرایب Λ_i با استفاده از روش هرمان-پل	۵.۳
۸۵	... قوانین پایستگی جدید با استفاده از ضرایب جدید برای تقارن X_4	۶.۳
۸۶	... قوانین پایستگی جدید با استفاده از ضرایب جدید برای تقارن X_6	۷.۳
۱۰۱	... شار و چگالی برای دستگاه غیر اختلال (۳۴.۴)	۱.۴
۱۰۴	... شار و چگالی برای دستگاه اختلال (۳۲.۴)	۲.۴
۱۳۸	... نمایش الحاقی مولدهای معادله انتشار کسری برای $f(u), g(u), h(u)$ دلخواه	۱.۵
	... نمایش الحاقی مولدهای معادله انتشار کسری برای	۲.۵
۱۳۸	... $f(u) = g(u) = h(u) = e^u$	
	... نمایش الحاقی مولدهای معادله انتشار کسری برای	۳.۵
۱۳۹	... $f(u) = g(u) = h(u) = u^a$	

۱۴۱	جواب عمومی و معادلات مشخصه تقارن های V_4 و V_3	۴.۵
۱۴۱	معادلات کاهش یافته تحت تقارن های V_4 و V_3	۵.۵
۱۴۲	جواب عمومی و معادلات مشخصه تقارن های V_{13} و V_{10}	۶.۵
۱۴۲	جواب عمومی و معادلات مشخصه تقارن های V_6 و V_5 و V_2	۷.۵
۱۴۳	معادلات کاهش یافته تحت تقارن $V_2 = X_2$	۸.۵
۱۴۳	معادلات کاهش یافته تحت تقارن $V_5 = X_2 + X_3$	۹.۵
۱۴۳	معادله کاهش یافته تحت تقارن $V_6 = X_3 + X_4$	۱۰.۵
۱۵۱	جواب های معادله (۱۳۶.۵)	۱۱.۵
۱۵۱	جواب های معادله (۱۴۳.۵) تحت تقارن $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$	۱۲.۵
۱۵۲	جواب های معادله (۱۴۳.۵) تحت تقارن $X_3 = u \frac{\partial}{\partial u}$	۱۳.۵
۱۵۴	جواب های معادله کسری (۱۶۰.۵)	۱۴.۵
۱۵۵	نتایج جواب معادله کسری (۱۶۶.۵)	۱۵.۵
۱۵۶	نتایج جواب معادله کسری (۱۶۷.۵)	۱۶.۵
۱۶۱	جواب های معادله (۱۳۶.۵)	۱۷.۵
۱۶۵	محاسبه جواب های جدید با استفاده از جواب های قدیمی بدست آمده	۱۸.۵
۱۷۵	مولفه های پایستگی معادله کسری فوکر-پلانک	۱۹.۵
۱۸۲	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = 1$ و v_1	۲۰.۵
۱۸۳	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = 1$ و v_2	۲۱.۵
۱۸۴	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = 1$ و v_3	۲۲.۵
۱۸۵	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = e^u$ و v_1	۲۳.۵
۱۸۶	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = e^u$ و v_2	۲۴.۵
۱۸۷	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = e^u$ و v_3	۲۵.۵
۱۸۷	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = u^A$ و v_1	۲۶.۵
۱۸۸	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = u^A$ و v_2	۲۷.۵
۱۸۹	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = u^A$ و v_3	۲۸.۵
۱۹۰	چگالی معادله کسری (۲۲۵.۵)	۲۹.۵
۱۹۱	چگالی معادله کسری (۲۲۶.۵) در حالت $0 < \alpha < 1$	۳۰.۵
۱۹۱	چگالی معادله کسری (۲۲۶.۵) در حالت $1 < \alpha < 2$	۳۱.۵
۱۹۲	چگالی معادله کسری (۲۲۷.۵) در حالت $0 < \alpha < 1$	۳۲.۵
۱۹۳	چگالی معادله کسری (۲۲۷.۵) در حالت $1 < \alpha < 2$	۳۳.۵
۱۹۴	چگالی معادله کسری (۲۲۸.۵) در حالت $0 < \alpha < 1$	۳۴.۵
۱۹۵	چگالی معادله کسری (۲۲۸.۵) در حالت $1 < \alpha < 2$	۳۵.۵

فصل ۱

مقدمه

معادلات دیفرانسیل توصیف کننده بسیاری از قوانین عمومی طبیعت (در فیزیک، شیمی، زیست شناسی، ستاره شناسی و ...) می باشد. و می توان گفت طبیعت زیباترین و طبیعی ترین بیان ریاضی خود را در معادلات دیفرانسیل می یابد. کاربردهای معادلات دیفرانسیل در ریاضیات به ویژه هندسه در مهندسی و بسیاری از حوزه های دیگر از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. هر زمان که رابطه ای بین چند متغیر با مقادیر مختلف در حالتها یا زمان های مختلف وجود داشته باشد به این معنا که نرخ تغییرات متغیرها در زمان های مختلف با حالات مختلف شناخته شود، معادلات دیفرانسیل ابزار لازم و دقیق برای تحلیل رویداد توضیح داده شده می باشد. یک مثال آن وابستگی حرکت یک جسم به سرعت و مکان آن می باشد که در فیزیک کلاسیک با معادلات حرکت نیوتن توصیف می شود. در این حالت حرکت یک جسم در غالب یک معادله دیفرانسیل که مکان آن را به زمان مرتبط می سازد بیان می گردد.

به طور کلی وصف معادلات دیفرانسیل آنچنان گسترده است که هزاران هزار مقاله و کتاب به زبان های مختلف در مورد آن نوشته شده است. از مهمترین و اساسی ترین معادلات دیفرانسیل که بنیان بسیاری از وقایع طبیعی می باشد می توان به معادله قانون دوم نیوتن و همیلتون در فیزیک کلاسیک اشاره کرد. همچنین معادلات واپاشی هسته ای، معادلات ماکسول در الکترومغناطیس، فرمول اینیشتین، معادلات شکار و شکارچی، معادلات مونژ آمپر، لاپلاس و ... از مهمترین معادلاتی هستند که در فیزیک نوین کاربرد فراوان دارند.

مهمترین مساله در هنگام مواجهه با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل حل آن است. معادلات را می توان در دو شاخه دو دسته ای رده بندی کرد، معادلات خطی و غیر خطی و معادلات معمولی^۱ و پاره ای^۲. حل معادلات دیفرانسیل حتی آن هایی که در یک شاخه قرار می گیرند لزوماً از روش خاصی تبعیت نمی کنند. به خصوص هنگامی که با پدیده های غیر خطی یا معادلات پاره ای رو به رو هستیم یافتن روشی سودمند و ثمر بخش برای یافتن جواب ها همیشه میسر نیست. بلکه گاهی لازم است تا آن ها به رده ای هم ارزی از معادلات ساده تر تبدیل شده و معادلات جدید را حل کرد تا بتوان جوابی برای معادلات اولیه ارائه کرد.

مرتبه معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره ای را می توان به صورت کسری نیز در نظر گرفت که از آن به معادلات دیفرانسیل کسری^۳ یاد می شود. این نوع از معادلات دیفرانسیل روش های حل گوناگونی دارند که می توان به روش تجزیه آدومیان، هموتوبی، تکرار تغییرات و ... اشاره کرد.

روش های حل معادلات دیفرانسیل به سه گروه طبقه بندی می شوند. این سه گروه عبارتند از تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی. برخی از معادلات دارای جواب دقیق و فرم تابعی هستند که اینگونه از معادلات را می توان از روش تحلیلی حل کرد و به جواب های دقیق رسید. معادلات دیگر که دارای فرم تابع مشخص نیستند را باید به روش های نیمه تحلیلی یا عددی حل کرد. از روش های نیمه تحلیلی می توان به روش تجزیه آدومیان، آنالیز هموتوبی، تبدیلات دیفرانسیل و ... اشاره کرد. روش های عددی دامنه وسیع تری را برای حل معادلات به کار می گیرند. از آن دسته می توان به روش اویلر، هون، تیلور، رانگ-کوتا، آدامز-بشفورت-مولتون، میلن سیمپسون، طیفی و شبه طیفی، موجکها و ... اشاره کرد. البته بعضی از معادلات را می توان همزمان به هر سه روش حل کرد و محدودیتی وجود ندارد. هدف اصلی این رساله بررسی برخی از روش های تحلیلی و نیمه تحلیلی مبتنی بر آنالیز گروهی معادلات دیفرانسیل است که در ادامه سر بخش های آن بررسی خواهند شد.

تا اوایل قرن نوزدهم بررسی معادلات دیفرانسیل بیشتر متکی به یافتن دسته ای خاص از معادلات مانند معادلات جدایی پذیر، همگن و ... بود. تا اینکه از این مقطع به بعد سوفوس لی^۴ حل معادلات دیفرانسیل را به کمک گروه های تقارنی و ناورداهای تولید شده توسط آن ها مورد بررسی قرار داد. این روش گویای توان اعجاب انگیز لی در گسترش نظریه معادلات دیفرانسیل بر اساس آنالیز گروهی است. اهمیت این روش تحلیل ارتباط گروه های لی با شاخه هایی چون توپولوژی جبری، هندسه دیفرانسیل، نظریه ناورداهای، نظریه انشعاب،

ODE^۱PDE^۲FDE^۳

^۴ Marius Sophus Lie ماریوس سوفوس لی: ۱۸۴۲-۱۸۹۹ در اسلوی نروژ به دنیا آمد، در سال ۱۸۷۲ موفق به دفاع از رساله خود تحت عنوان رده ای از تبدیلات هندسی در دانشگاه اسلو شد و در همان دانشگاه به کرسی استادی دست یافت. از مهمترین افتخارات او کسب مدال لوباجفسکی است. عمده ترین دلیل شهرت لی ابداعات وی در گروه های تبدیلات و کاربرد آن ها می باشد.

مکانیک کلاسیک و کوانتوم، نسبیت و ... است. البته گفتنی است که دیدگاه محض گروه های لی کمتر در علوم کاربردی دیده می شود. این مفهوم بیشتر اوقات تحت عنوان گروه تقارنی یک دستگاه دینامیکی به کار برده می شود که به طور مستقیم و غیر مستقیم رفتار دستگاه را تحلیل می کند.

بنیاد کاربرد گروه های لی بر عمل آن روی فضای حالت فیزیکی مفروض است. این کاربرد اولین بار توسط لی و نوتر^۵ پایه ریزی شد و در پی آن الی کارتان^۶ اولین بار آن را به سبک امروزی خود در هندسه دیفرانسیل معنا بخشید. در پی آن تلاش های بسیاری در تعمیم کاربردهای گروه های لی در معادلات دیفرانسیل انجام شده است و یکی از مهمترین آنها تاسیس مدرسه ای در اتحاد جماهیر شوروی توسط اووزیاناکوف است.

گروه های تقارنی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مجموعه ای از تبدیلات هندسی می باشند که به کمک آن ها می توان دسته وسیعی از جواب ها را از روی یک جواب داده شده بدست آورد. گروه های تقارنی و تبدیلات متناظر با آن ها در یک نگاه کلی به دو دسته پیوسته و گسسته تقسیم بندی می شوند. مزیت دسته اول که موضوع مطالعه ماست آن است که فرآیند محاسبات اگر چه ممکن است گسترده باشد اما بر پایه حساب دیفرانسیل و انتگرال کلاسیک می باشد. در رده دوم استفاده از ابزار های غیر کلاسیک لازمه کار است.

همان طور که در ابتدای مقدمه به آن اشاره شد برخی از معادلات دیفرانسیل را می توان به کمک معادلات ثانویه ای که از معادلات اولیه تحت تبدیلاتی بدست می آیند حل کرد. این تبدیلات متغیرهایی هستند که از مولدهای بی نهایت کوچک متناظر با گروه تقارنی بدست می آیند و شرایط پیچیده حاکم بر دستگاه را به شرایط ساده تری تبدیل می کنند. از سوی دیگر با ساختن دستگاه بهینه نظریه گروه تقارن می توان جواب های دستگاه را تحت شرایطی خاص رده بندی کرد که در شناخت طبقه دیگر جواب ها کمک می کند.

اگر با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی درگیر باشیم، گروه تقارن کمک می کند

^۵ Amalie Emmy Noether آمالی امی نوتر: ۱۸۸۲-۱۹۳۵ متولد باوراین آلمان است. مهمترین ابداعات او تعاریف نوینی است که از حلقه ها و میدان ها در جبر ارائه کرد. به کارگیری جبر مجرد در فیزیک او را در عالم نوابغ ریاضی زبانزد ساخته است. مطالعات ریاضی نوتر را به سه دوره می توان تقسیم بندی کرد، دوره اول از سال ۱۹۰۸ تا ۱۹۱۹ که وی تاثیر قابل توجهی بر نظریه نامتغیرهای جبری و میدان اعداد گذاشت نظریه کاربرد ناوردهای دیفرانسیل نوتر در حسابان تاکنون نقش به سزایی در هدایت و پیشبرد فیزیک مدرن داشته است. در دوره دوم (۱۹۲۶-۱۹۲۰) چهره جدید جبر انتزاعی را در یکی از مقالات خود معرفی کرد و در دوره سوم (۱۹۳۵-۱۹۲۷) آثار مهمی در جبر جابجایی منتشر ساخت و ایده هایش سخاوتمندانه با دیگران به اشتراک می گذاشت و در تحقیقات بسیاری از دانشمندان زمان خود شرکت می کرد. شایان ذکر است یکی از پایه های اصلی این رساله مبتنی بر نظریه نوتر در قوانین بقای معادلات دیفرانسیل در فیزیک است.

^۶ Elie Joseph Cartan الی جوزف کارتان: ۱۸۶۹-۱۹۵۱ استاد دانشگاه سوربون در هندسه منیفلدها، هندسه دیفرانسیل و کاربردهای لی بود. نظریه هم ارزی در ریاضیات که بر اساس روش کنجهای متحرک و حساب دیفرانسیل خارجی می باشد توسط کارتان ابداع و ارائه شده است.

تا با کاهش مرتبه معادله به یک، جواب را با یکبار انتگرال گیری بدست آوریم در صورتی که در معادلات پاره ای لزوماً چنین چیزی برقرار نیست یعنی جواب عمومی این دسته از معادلات را نمی توان لزوماً با داشتن گروه های تقارن بدست آورد. در این وضعیت تنها برخی از جواب ها بدست می آیند که از آن به جواب های گروه ناوردا یاد می شود و در بخش اول مورد بررسی قرار خواهند گرفت. این الگوریتم در رساله پیش رو برای معادلات دیفرانسیل کسری نیز مورد کنکاش قرار گرفته است. یعنی نشان داده شده که تحت شرایطی الگوی فوق را می توان برای معادلات کسری پیاده سازی کرد.

یکی از مهمترین کاربردهای گروه های تقارن در فیزیک، قوانین پایستگی می باشند. یک قانون پایستگی یا اصل بقاء در فیزیک گزاره ای است که بیانگر ثابت ماندن یک کمیت فیزیکی مربوط به یک سیستم مشخص در طی تحول آن است. هر قانون پایستگی قید هایی را در بر دارد که فقط تحت آن ها صادق است. مثلاً اصل پایستگی انرژی کل مکانیکی فقط زمانی صدق می کند که همه نیروهای وارد بر سیستم مورد نظر پایستار باشند. به ازای هر قانون پایستگی حاکم بر سیستم می توان معادله دیفرانسیل را یک مرتبه کاهش داد. نوتر نشان داد که وجود هر قانون پایستگی در سیستم نتیجه وجود یک تقارن در آن می باشد. مهمترین قوانین پایستگی عبارتند از:

۱. پایستگی جرم و انرژی: قبل از ارائه نظریه نسبیت خاص و بیان هم ارزی جرم و انرژی، پایستگی جرم و پایستگی انرژی به عنوان دو اصل جداگانه شناخته می شدند.

۲. پایستگی تکانه (اندازه حرکت خطی)

۳. پایستگی تکانه زاویه ای (اندازه حرکت زاویه ای)

۴. پایستگی بار الکتریکی

نوتر در سال ۱۹۱۸ دو قضیه مهم را ارائه کرد که ارتباط بین گروه تقارن یک انتگرال تغییراتی با ویژگی های معادلات اویلر-لاگرانژ متناظر را نشان می دهد. او در قضیه اول ثابت کرد که چگونه گروه های تقارن تغییراتی یک-پارامتری منجر به تولید قوانین بقاء برای معادلات اویلر-لاگرانژ می شوند. مثلاً قوانین پایستگی انرژی یک مساله تغییراتی یک-پارامتری منجر به تولید قانون پایستگی برای معادلات اویلر-لاگرانژ می شوند. به عنوان مثال قانون پایستگی انرژی یک مساله نوردایی تحت تقارن انتقال نسبت به زمان است در حالیکه پایستگی گشتاور خطی و زاویه ای یک مساله نوردایی تحت تبدیلات انتقال و دوران می باشد. از دیگر کارهای نوتر برقرار کردن یک تناظر یک به یک میان گروه های تقارن و قوانین پایستگی است. این تناظر منجر به ارائه نوعی از تقارن ها به نام تقارن های تعمیم یافته شد که در بخش دوم مورد بحث قرار خواهد گرفت.

از دیگر نتایج نظریه نوتر آن است که هر گروه یک-پارامتری از یک مساله تغییراتی می تواند منجر به تولید قانون پایستگی شود و به طور عکس هر قانون پایستگی به یک

مساله تغییراتی از تقارن ها مربوط می شود. اگر چه این یک نتیجه بسیار مهمی است. اما محدودیت هایی دارد که همان وجود یا عدم وجود مساله تغییراتی مورد نظر است. به همین جهت در دوره معاصر تلاشهای بسیاری برای رفع این قضیه صورت پذیرفته و روش های متفاوتی برای محاسبه قوانین پایستگی ارائه شده است. از مهمترین آن ها روشی است که ابراگیموف^۷ در تحقیقاتش [۳۲] به آن اشاره کرد که صرف نظر از یافتن مساله تغییراتی می توان با روشی که به نوعی تعمیم قضیه اساسی نوتر می باشد قوانین پایستگی را به طور صوری بر پایه تقارن های سیستم مورد نظر بدست آورد. روش دیگر و مهمی که قوانین پایستگی را بدون تقارن متناظرش بررسی می کند روش مستقیم [۷] می باشد که اگر چه مساله تقارن را به میان نمی آورد اما از معایب آن محاسبات بسیار پیچیده ای است که اغلب نیازمند استفاده از بسته های محاسباتی می باشد. روش های دیگری هم موجود است که به برخی از آن ها در طی رساله اشاره خواهد شد.

لازم به ذکر است روش های توصیف شده در ابتدا همگی برای معادلات دیفرانسیل با مرتبه صحیح بیان شده اند. اما اخیراً الگوریتم ها و روش های فوق به معادلات دیفرانسیل کسری و تقریبی نیز تعمیم داده شده اند که در بخش های سه و چهار آن ها را واکاوی خواهیم کرد. در پایان سعی می شود در بخشی مجزا نحوه به کارگیری بسته ها و نرم افزارهای محاسباتی را معرفی کرده و مزایای آن ها را در محاسبات مورد نظر این رساله بیان کنیم. تمامی تلاش و سعی این رساله بر آن است که به کمک معادلات دیفرانسیل کاربرد هندسه را در علوم مختلف پیدا کرده و نشان دهیم روش های هندسی به پشتوانه نظریه ای که در خود جای دارد می توان راهگشای بسیاری از کاستی ها در علوم کاربردی باشد. هر چند نویسنده اذعان می دارد که این کافی نیست زیرا اقیانوسی از تلاشها و تولیدات علمی بزرگانی همچون امی نوتر، لاگرانژ^۸ ژوزف لویی لاگرانژ منجم و ریاضیدان ایتالیایی - فرانسوی است که در ۲۵ ژانویه ۱۷۳۶ در شهر تورن دیده به جهان گشود. ژوزف تا سن ۱۶ سالگی علاقه وافری به ادبیات داشت ولی به یک مرتبه گرایش به ریاضیات پیدا کرد، لاگرانژ در ریاضیات آنچنان پیشرفت نمود که در سن ۱۸ سالگی به معلمی مدرسه توپخانه شهر تورن انتخاب شد. ژوزف چنان شور و شوقی در شاگردان خویش ایجاد نمود که با کمک آنها توانست انجمن علمی را به وجود آورد که این انجمن در سال ۱۷۵۸ به آکادمی پادشاهی علوم تورن تبدیل گردید. او در سن ۱۹ سالگی نبوغ و قدرت فکری خود را با اختراع (حساب تغییرات) آشکار نمود. لاگرانژ در سال ۱۷۹۵ استاد موسسه نوبنیاد اکول نورمال و در سال ۱۷۹۷ استاد مدرسه پلی تکنیک شد و در زمان ناپلئون لقب کنت و سناتور را به دست آورد. ژوزف لویی لاگرانژ نتیجه تحقیقات خود را بصورت رساله برای اویلر فرستاد، اویلر نیز که در همین زمینه تحقیق میکرد آنچنان تحت تأثیر او قرار گرفت که از کار خود دست کشید تا ژوزف لویی لاگرانژ بتواند نتیجه تحقیقات خود را چاپ نماید. اویلر در سال ۱۷۶۶ عازم سن پترزبورگ شد چرا که

ملکه روسیه در آن زمان دانشمندان و نوابغ را به دربار خود دعوت م کرد هنگام عزیمت، اوایل از فردریک خواست تا ژوزف لویی لاگرانژ را به سرپرستی آکادمی برلن بگمارد. و ژوزف لویی لاگرانژ که در آن زمان بیش از ۴۰ سال نداشت به ریاست آکادمی منصوب شد. در سال ۱۷۹۳ ژوزف لویی لاگرانژ با کمک چندتن از دانشمندان دیگر ماموریتی را بر عهده گرفتند که جزئی از نصف النار پاریس را واحد طول قرار دهند و این واحد را متر نام نهادند. بدین ترتیب متر مقیاس رسمی بسیاری از کشورها شد و دقیق ترین سیستم اندازه گیری است که تا کنون عرضه شده است.

از بزرگترین شاهکارهای علمی ژوزف لویی لاگرانژ در سال ۱۷۸۸ مکانیک تحلیلی را می توان نام برد که انتشار داد. او مبدع بسیاری از نظریه های پیشرو در مکانیک تحلیلی، سیالات، آنالیز ریاضی و ... می باشد. وی در ۱۰ آوریل ۱۸۱۳ در پاریس چشم از جهان فرو بست. اوایلر^۹، کارتان و نوابغ معاصر چون اولور، ابراگیموف، بلومن و ... در این راه قرار دارد. اما سعی شده تا با کنار هم قرار دادن آن ها و بکار گیری از دستاوردهای آنان، در برخی مسایل عظمت این تلاشها به علاقه مندان معرفی گردد.

^۹ Leonhard Euler لئونارد اوایلر (۱۵ آوریل ۱۷۰۷ - ۱۸ سپتامبر ۱۷۸۳) از ریاضیدان و فیزیکدان برجسته سوئسی بود. او کشفهای بسیار مهمی در زمینه های حساب دیفرانسیل و انتگرال و نظریه گراف داشته است. اوایلر همچنین اصلاحات مهمی در زمینه های تجزیه و تحلیل ریاضی مانند مفهوم تابع ریاضی انجام داده است و برای کارهای خود در مکانیک، دینامیک سیالات، اپتیک و نجوم شهرت دارد. اوایلر بیشتر سال های زندگی خود را در شهر سن پترزبورگ در روسیه و شهر برلین آلمان به سر برد. او یکی از برجسته ترین ریاضیدانان سده ۱۸ و یکی از بزرگترین دانشمندان تمام دوران شناخته شده است. کشفهایی که در نیمه سده هجدهم در زمینه تحلیل ریاضی انجام گرفته بود به شیوه ای منظم به وسیله اوایلر در مجموعه سه کتاب زیر خلاصه شده است: مدخلی بر تحلیل نامتناهی (۱۷۴۸)، روشهای حساب دیفرانسیل (۱۷۵۵)، روشهای حساب انتگرال (۱۷۷۰-۱۷۶۸). اوایلر به معنای گسترده ای که در سده هجدهم برای کلمه هندسه کار می رفت هندسه دان بود. در کار او ریاضیات بستگی نزدیکی با کاربرد سایر علوم با مسائل فناوری و با زندگی عمومی داشت. در آثار ریاضی اوایلر تحلیل ریاضی جایگاه نخست را دارد؛ هفده جلد از مجموعه آثار او در این زمینه است. او با کشفیات متعدد به تحلیل ریاضی یاری داد. نحوه عرضه آن در کتابهای درسی خود را منظم ساخت در بنیادگذاری رشته های متعدد ریاضی نظیر حساب جامع و فاضل تغییرات، نظریه معادلات دیفرانسیل، نظریه مقدماتی توابع متغیرهای مختلط و نظریه توابع خاص بی اندازه کمک کرد. وی بسیاری از قراردادهای کنونی علائم ریاضی را وارد میدان کرد.



Marius Sophus Lie Leonhard Euler Joseph-Louis Lagrange



Elie Joseph Cartan Joseph Liouville Bernhard Riemann



Amalie Emmy Noether

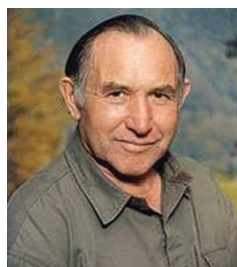
شکل ۱.۱: تصاویری از دانشمندان غیر معاصر



Allen.G Bluman



Peter John Olver



Nail H. Ibragimov



A. Anatoly Kilbas



John M. Lee

شکل ۲.۱: تصاویری از دانشمندان معاصر

فصل ۲

ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل

در این بخش علاوه بر آشنایی با گروه‌های لی و چگونگی ارتباط میان آن‌ها، نحوه‌ی محاسبه تقارن‌های معادلات دیفرانسیل و رسیدن به یک دسته از جواب‌های ناوردا از این معادلات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۲ گروه‌های لی، تبدیلات و جبرهای لی

مطالعه بر روی گروه‌های لی در اواخر قرن نوزدهم توسط ریاضی‌دان نروژی سوفوس لی^۱ با الهام از روش کار ریاضی‌دان و جبريست فرانسوی اواريست گالوا^۲ که مطالعات و مقالاتی در زمینه نظریه گروه‌ها داشت و از آن برای تحلیل معادلات چند جمله‌ای استفاده کرده بود، انجام شد. لی علاقه بسیاری به استفاده از تقارن‌ها و به کاربردن آن‌ها در حیطه عمل گروه برای ساده‌سازی و رفع ابهامات معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی داشت. با وجود محدودیت‌های علمی که در زمان زندگی لی وجود داشت توانست بسیاری از مشکلات را برای درک بهتر ما از گروه‌های لی از سر راه بردارد ولی نتوانست از ابزارهای کلی که امروزه به عنوان گروه‌های لی شناخته می‌شوند برای ساده‌سازی مفاهیم توپولوژیکی همچون منیفلدها و فرموله کردن آن‌ها استفاده کند. آنچه که لی در مطالعاتش انجام داد اساساً یک

Sophus Lie^۱
Evariste Galois^۲

نسخه موضعی از گروه های لی بود که امروزه عنوان گروه های لی موضعی به آن اطلاق می شود. وی در اولین مقاله منتشر شده خود نشان داد که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی دو بعدی خطی از مرتبه دوم حداکثر از یک گروه نوردایی سه پارامتری برخوردار است (به غیر از گروه تقارن بدیهی نامتناهی پارامتر که از خطی بودن ناشی می شود). او همچنین گروه نوردایی ماکسیمال معادله رسانش گرمایی یک بعدی را محاسبه کرد و این تقارن را برای ساخت جواب های صریح معادله مورد استفاده قرار داد.

۱.۱.۲ گروه لی

هدف اصلی این بخش معرفی گروه های لی و فراهم کردن ابزار مناسب برای شناخت گروه تقارن، خواص و کاربردهای آن می باشد. بعد از تعریف گروه لی و معرفی زیر گروه لی به بررسی عمل گروه بر روی منیفلدها می پردازیم [۸۰]. در ادامه با ارائه مثال هایی خواص بیشتری از این گروه قابل درک خواهد شد.

تعریف ۱.۱.۲. منیفلد همواری چون G را یک گروه لی می نامند هرگاه دارای ساختار جبری گروهی باشد و دو عمل ضرب و وارون ساز $i: G \rightarrow G$ و $m: G \times G \rightarrow G$ همراه با ضابطه های

$$m(g, h) = g.h, \quad i(g) = g^{-1}. \quad (1.2)$$

هموار باشند. اگر G یک منیفلد توپولوژیکی و m و i پیوسته باشند، آنگاه G را یک گروه توپولوژیکی می نامند.

گزاره ۲.۱.۲. اگر G یک منیفلد هموار با ساختار گروهی باشد به طوری که نگاشت $G \times G \rightarrow G$ باضابطه $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ هموار باشد، در اینصورت G یک گروه لی خواهد بود.

مثال ۳.۱.۲. هر یک از منیفلد های زیر نمونه هایی از یک گروه لی هستند:

- گروه خطی عام مختلط $GL(n, \mathbb{C})$ که از تمام ماتریس های مختلط وارون پذیر $n \times n$ ساخته شده است، یک گروه لی می باشد. این گروه خود یک منیفلد $2n^2$ - بعدی است و نگاشت m که نگاشت ضرب ماتریس های مربعی و نگاشت i به عنوان نگاشت وارون ماتریس های مربعی شناخته می شود، هموار هستند. بنابراین $GL(n, \mathbb{C})$ یک گروه لی است.

- گروه خطی عام حقیقی $GL(n, \mathbb{R})$ که یک حالت خاص از گروه خطی عام مختلط است با همین استنباط یک گروه لی n^2 - بعدی

خواهد بود.

- گروه خطی خاص $SL(n) = \{A; \det A = 1\}$ ، گروه لی با بعد $n^2 - 1$ می باشد.

- گروه لی که نرم اقلیدسی را حفظ می کند گروه ماتریسهای متعامد $O(n) = \{A; A^T A = I\}$ با بعد $\frac{n(n-1)}{2}$ هستند که حافظ نرم و فاصله اند و از خواص آن ها می توان دوران و انعکاس نام برد.

- گروه ماتریس های متعامد خاص با ویژگی دوران و بعد $\frac{n(n-1)}{2}$ ، از ماتریس های متعامد با دترمینان یک تشکیل شده است. به طور خلاصه $SO(n) = \{A; A^T A = I, \det A = 1\}$.

- گروه تبدیلات آفین $A(n+1) = GL(n) \times \mathbb{R}^n$ با خواص انتقال و وارون پذیری دارای بعد $n(n+1)$ می باشد.

- گروه تبدیلات آفین خاص $SA(n+1) = SL(n) \times \mathbb{R}^n$ با ویژگی های تصویری و انتقال بعدی برابر با $n^2 + n - 1$ دارد.

- گروه تبدیلات اقلیدسی $E(n) = O(n) \times \mathbb{R}^n$ و تبدیلات اقلیدسی خاص

$SE(n) = SO(n) \times \mathbb{R}^n$ با خواص دوران و انتقال، بعد $\frac{n(n+1)}{2}$ را دارند.

● اعداد حقیقی \mathbb{R} و فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n تحت عمل جمع، گروه لی محسوب می گردند.

● $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ و $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ به دلیل وارون پذیری همه عناصرشان تحت عمل ضرب ، به ترتیب گروههای لی یک بعدی و دو بعدی هستند.

● از آنجاییکه برای هر زاویه دلخواه $\theta, \theta_1, \theta_2 \in S^1$ نگاشت های $\theta_1 + \theta_2 \mapsto (\theta_1, \theta_2)$ و $\theta \mapsto -\theta$ تحت ضرب اعداد مختلط تشکیل یک گروه می دهند و دایره S^1 یک منیفلد هموار می باشد، بنابراین S^1 یک گروه لی محسوب می گردد.

● اگر V یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد در این صورت تحت ترکیب $GL(V)$ ، متشکل از کلیه تبدیلات خطی وارون پذیر از V به V تشکیل یک گروه می دهد. اگر V

دارای پایه متناهی باشد آنگاه هر پایه V یک ایزومورفیسم از $GL(V)$ به $GL(n, \mathbb{R})$ یا $GL(n, \mathbb{C})$ تعریف می کند. بنابراین $GL(V)$ خود یک گروه لی و یک منیفلد هموار است.

• اگر n, G_1, G_2, \dots, G_n گروه لی باشند آن گاه به وسیله نگاشت های

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)(h_1, h_2, \dots, h_n) = (g_1 h_1, g_2 h_2, \dots, g_n h_n),$$

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots, g_n^{-1}).$$

$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ تشکیل یک گروه لی می دهد.

قضیه بنیادی زیر تحت عنوان قضیه کارتان بیان می کند تحت چه شرایطی یک زیر گروه از یک گروه لی خود یک گروه لی می شود [۵۹].

قضیه ۴.۱.۲. اگر G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته از آن $H \subseteq G$ باشد، در این صورت H ساختار گروه و منیفلد هموار را از G به ارث می برد، لذا H خود یک زیر گروه لی برای G محسوب می شود.

تعریف ۵.۱.۲. یک گروه تبدیل مانند G که بر روی یک منیفلد هموار مانند M عمل می کند یک گروه لی می باشد با این شرایط که نگاشت $M \times G \rightarrow M$ با ضابطه $(p, g) \mapsto p.g$ همراه با ویژگی های زیر هموار باشد.

$$p.e = p, \quad (p.g_1).g_2 = p.(g_1 g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G, \quad p \in M.$$

در این حالت می گوییم G از راست روی M عمل کرده است. به همین صورت می توان عمل چپ G بر روی M را نیز تعریف کرد.

همچنین اگر M یک منیفلد هموار و G یک گروه لی باشد و نگاشت $M \times G \rightarrow M$ یا همان عمل گروه، نگاشتی هموار باشد در این صورت عمل گروه یک عمل گروه هموار نامیده می شود.

$g \in G$ یک تبدیل است هرگاه G یک گروه تبدیل بر روی M باشد و به ازای هر تبدیل g نگاشت تبدیل ϕ را می توان به شکل $\phi_g : M \rightarrow M$ باز نویسی کرد. اگر $p \in M$ باشد در این صورت مجموعه تمام تبدیلات p تحت گروه G یعنی

$$G.p = \{g.p : g \in G\}.$$

را مدار p تحت تبدیل G می نامند. همه مدارها زیر منیفلد هستند. زیر گروه پایدار ساز p ، آن دسته از اعضای گروه G است که به صورت عضو همانی عمل می کنند و به صورت $G_p = \{g : g.p = p\}$ نمایش می دهند و زیر گروهی از G نیز می باشد.

تعریف ۶.۱.۲. اگر G یک گروه تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می کند در اینصورت تابع حقیقی $I : M \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع G - ناوردا است به قسمی که برای هر $p \in M$ و $g \in G$ داشته باشیم $I(g.p) = I(p)$.

۲.۱.۲ جبر لی

در ادامه بحث، گفته خواهد شد که چطور می توان ایده نگاشت پیوسته از روی یک مجموعه باز مانند $U \subseteq \mathbb{R}^n$ به مجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ را بر روی منیفلدهای هموار تعمیم داد. از آنجاییکه یک میدان برداری از یک منیفلد هموار همچون M به صورت یک نگاشت پیوسته X از M به صفحه مماس بر منیفلد TM خواهد بود، لذا می توان به هر نقطه دلخواه از منیفلد M یک بردار مماس در فضای مماس TM اختصاص داد.

تعریف ۷.۱.۲. فرض کنید که G یک گروه تبدیلات روی منیفلد M باشد. میدان برداری X روی M را یک میدان برداری G - نوردای - چپ گوئیم، هرگاه به ازای هر $p \in M$ و $g \in G$ که $g.p$ تعریف می شود، داشته باشیم: $g_*(X_p) = X_{g.p}$

تعریف ۸.۱.۲. فرض کنید G یک گروه لی باشد که روی خودش از چپ (راست) عمل می کند. در این صورت به مجموعه تمام میدان های برداری نوردای چپ، (راست) جبر لی چپ (راست) G گفته می شود. ثابت می شود که جبر لی چپ و راست با هم یکسان هستند و با نماد \mathfrak{g} نمایش داده می شود.

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنیم G یک گروه لی باشد در این صورت $G \simeq T_e G$.

این قضیه بیان می کند که با ساختن فضای مماس در عضو همانی هر گروه، می توان جبر لی آن گروه را پیدا کرد [۱].

چند مثال کاربردی از جبر لی در ادامه آورده شده است [۷۰]:

- جبر لی گروه خطی عام مختلط $GL(n, \mathbb{C})$ مجموعه ماتریس های مربعی $n \times n$ می باشد.

$$T_{I_n} GL(n, \mathbb{C}) = M(n \times n, \mathbb{C}).$$

- جبر لی گروه لی خطی خاص $SL(n, \mathbb{R})$ مجموعه ماتریس های مربعی $n \times n$ با اثر صفر می باشد یعنی

$$T_{I_n} SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : tr A = 0\}.$$

- جبر لی ماتریسهای متعامد و متعامد خاص، مجموعه ماتریس های مربعی پاد متقارن هستند.

- جبر لی گروه لی S^1 اعداد حقیقی \mathbb{R} است.

- جبر لی فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n خود \mathbb{R}^n می باشد.

در ادامه عملگر براکت لی که راهی برای ترکیب دو میدان برداری هموار بوده و خود تشکیل یک میدان برداری جدید می دهند را معرفی می کنیم.

تعریف ۱۰.۱.۲. اگر X و Y میدان های برداری هموار بر روی منیفلد هموار M باشند و تابع هموار $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ مفروض باشد، می توان با اثر میدان برداری X بر روی تابع f تابع هموار دیگری تولید کرد. همچنین با اثر میدان برداری Y بر تابع جدید Xf تابع هموار جدید دیگری به صورت $YXf = Y(Xf)$ ساخته می شود.

عملگر $[X, Y]: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ عملگر براکت لی دو میدان برداری X و Y شناخته و به صورت $[X, Y]f = XYf - YXf$ تعریف می شود.

نشان داده می شود که عمل براکت لی از یک جفت میدان های برداری هموار، همواره یک میدان برداری هموار خواهد بود و داریم:

$$[X, Y](fg) = f[X, Y]g + g[X, Y]f$$

. اثبات: به [۶۰] مراجعه شود.

گزاره ۱۱.۱.۲. خواص براکت لی:

• خطی

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], \quad [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y], \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

• یاد تقارن

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

• اتحاد ژاکوبی

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

•

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

اثبات در [۶۰].

می توان نتیجه گرفت که مجموعه تمام میدان های برداری هموار از یک گروه لی که تحت عمل ضربی چپ با عمل براکت لی بسته باشند، تشکیل یک جبر لی می دهند.

۳.۱.۲ معرفی انواع تبدیلات

برای رسیدن به جواب هایی (جوابهای گروه - ناورد) که در ادامه از آن صحبت خواهد شد) از یک معادله دیفرانسیل نیاز به شناخت و نحوه ایجاد انواع تقارن ها داریم ولی از آنجاییکه لازمه بررسی انواع تقارن ها، شناخت تبدیلاتی هستند که تقارن ها را با استفاده از آن ها بدست می آوریم. از اینرو در این بخش نگاهی مختصر به انواع تبدیلات خواهیم کرد. به طور کلی انواع متفاوت و متنوعی از تبدیلات وجود دارند که از میان آن ها می توان به تبدیلات نقطه ای، تبدیلات برخوردی، تبدیلات مراتب بالاتر، تبدیلات موضعی، تبدیلات پتانسیلی، تبدیلات آینه ای، تبدیلات پایه ای، تبدیلات حافظ تار، تبدیلات عمودی و بسیاری تبدیلات دیگر اشاره کرد.

تبدیلات نقطه ای

فرض کنیم $x = (x^1, \dots, x^n)$ ، n تا متغیر مستقل و $u = (u^1(x), \dots, u^m(x))$ ، m تا متغیر وابسته با مشتقات جزئی $w_i^\mu = \frac{\partial u^\mu(x)}{\partial x^i}$ باشند که نماد $\partial^p u$ نمایش مجموعه تمام مشتقات جزئی از مرتبه p می باشد.

$$\begin{aligned} \partial^p u &= \left\{ u_{i_1 \dots i_p}^\mu \mid \mu = 1, \dots, m; \quad i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n \right\}, \\ &= \left\{ \frac{\partial^p u^\mu(x)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p}} \mid \mu = 1, \dots, m; \quad i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

تبدیل یک به یکی که بر روی فضای $(n+m)$ -بعدی (x, u) عمل میکند یک تبدیل نقطه ای می نامیم و به فرم

$$\begin{aligned} x^* &= f(x, u), \\ u^* &= g(x, u). \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

نمایش داده می شود .

گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای (۳.۲) به شکل

$$\begin{aligned} (x^*)^i &= f^i(x, u; \varepsilon) = x^i + \varepsilon \xi^i(x, u) + O(\varepsilon^2), & i = 1, \dots, n, \\ (u^*)^\mu &= g^\mu(x, u; \varepsilon) = u^\mu + \varepsilon \eta^\mu(x, u) + O(\varepsilon^2), & \mu = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (۴.۲)$$

با عملگر بی نهایت کوچک

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\mu}. \quad (۵.۲)$$

خواهد بود.

امتداد k -ام مولد بی نهایت کوچک (۵.۲) به صورت

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \eta_i^{(1)\mu}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_i^\mu} \\ &+ \dots + \eta_{i_1 \dots i_k}^{(k)\mu}(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_k}^\mu}. \end{aligned} \quad (۶.۲)$$

می باشد که داریم:

$$\begin{aligned} \eta_i^{(1)\mu} &= D_i \eta^\mu - (D_i \xi^j) u_j^\mu, \\ \eta_{i_1 \dots i_k}^{(k)\mu} &= D_{i_k} \eta_{i_1 \dots i_{k-1}}^{(k-1)\mu} - (D_{i_k} \xi^j) u_{i_1 \dots i_{k-1} j}^\mu, \\ \mu &= 1, \dots, m \quad i_j = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, k \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (۷.۲)$$

به طور خیلی ساده می توان اینطور بیان کرد که در تبدیلات نقطه ای متغیر مستقل جدید تابعی از متغیرهای مستقل و وابسته قدیمی هستند و متغیرهای وابسته جدید نیز به همین صورت تابعی از متغیرهای مستقل و وابسته قدیمی به فرم

$$G \times E \rightarrow E \quad \text{به طوری که} \quad g.(x, u) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{u}) = (f(x, u), g(x, u)).$$

شکل می گیرند.

تبدیلات برخوردی

با در نظر گرفتن تنها یک متغیر وابسته u ($m=1$)، تبدیل برخوردی تبدیلی به فرم

$$(x^*)^i = f^i(x, u, \partial u),$$

$$\begin{aligned}(u^*)^\mu &= g(x, u, \partial u), \\ (u^*)^\mu_i &= h_i(x, u, \partial u).\end{aligned}\tag{۸.۲}$$

است که بر روی دامنه D و فضای $(x, u, \partial u)$ یک به یک می باشد و شرط برخوردی قابل توجه است که توابع f و g وابستگی به مشتق اول تابع u دارند زیرا در غیر این صورت به جای تبدیل برخوردی یک تبدیل نقطه ای خواهیم داشت. گروه لی یک پارامتری از تبدیلات برخوردی به فرم

$$\begin{aligned}(x^*)^i &= f^i(x, u, \partial u) = x^i + \varepsilon \xi^i(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2), \\ (u^*)^\mu &= g(x, u, \partial u) = u + \varepsilon \eta(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2), \\ (u^*)^\mu_i &= h_i(x, u, \partial u) = u_i + \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

هستند. و مولد بی نهایت کوچک X برای این تبدیلات به شکل

$$X = \xi^i(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

تعریف می شود. که

$$\begin{aligned}\xi^j &= \frac{\partial W}{\partial u_j}, \quad \eta = u_i \frac{\partial W}{\partial u_i} - W, \\ \eta_j^{(1)} &= -\frac{\partial W}{\partial x^j} - u_j - \frac{\partial W}{\partial u}, \quad W = \xi^i u_i - \eta, \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{۹.۲}$$

تبدیلات مراتب بالاتر

فرض کنیم $x = (x^1, \dots, x^n)$ ، n تا متغیر مستقل و $u = (u^1(x), \dots, u^m(x))$ ، m تا متغیر وابسته باشند. تبدیلی که بر روی برخی از فضاها با بعد متناهی $(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u)$ عمل کند و در شرایط ناوردایی تبدیلات برخوردی نیز صدق کند، یک تبدیل مرتبه بالاتر به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}(x^*)^i &= f^i(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u) = x^i + \varepsilon \xi^i(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u) + O(\varepsilon^2), \\ (u^*)^\mu &= g^\mu(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u) = u^\mu + \varepsilon \eta^\mu(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{۱۰.۲}$$

که داریم $i = 1, \dots, n$ و $\mu = 1, \dots, m$.

البته توجه کنید که اگر تبدیل مراتب بالاتر (۱۰.۲) بر روی فضای $(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u)$ یک به یک باشد و k متناهی باشد در اینصورت به جای یک تبدیل مرتبه بالاتر یک تبدیل نقطه ای یا تبدیل برخوردی به فرم (۳.۲) و (۸.۲) خواهیم داشت.

تبدیلات موضعی

گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای با مولد بی نهایت کوچک

$$\hat{X} = \hat{\eta}^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\mu} = (\eta^\mu(x, u) - u_i^\mu \xi^i(x, u)) \frac{\partial}{\partial u^\mu} \quad (11.2)$$

و یا گروه لی یک پارامتری از تبدیلات برخورداری با مولد بی نهایت کوچک

$$\hat{X} = \hat{\eta}^\mu(x, u, \dots, \partial^s u) \frac{\partial}{\partial u^\mu} = (\eta^\mu(x, u, \dots, \partial^s u) - u_i^\mu \xi^i(x, u, \dots, \partial^s u)) \frac{\partial}{\partial u^\mu} \quad (12.2)$$

به عنوان یک تبدیل موضعی شناخته می شود.

دقت کنید که $\hat{\eta}^\mu$ در تبدیلات نقطه ای نسبت به u_i خطی است و هیچ وابستگی نسبت به مشتقات مرتبه اول و دوم و ... از u ندارد. ولی $\hat{\eta}^\mu$ در تبدیلات برخورداری ممکن است مشتقات مرتبه اول و دوم و ... از u تا مرتبه متناهی در آن ها ظاهر شوند. در واقع اگر تنها یک متغیر مستقل x و m تا متغیر وابسته u داشته باشیم خانواده یک پارامتری از تبدیلات

$$\begin{aligned} (x^*)^i &= x^i, & i &= 1, \dots, n, \\ (u^*)^\mu &= u^\mu + \varepsilon [\eta^\mu(x, u) - u_i^\mu \xi^i(x, u)] + O(\varepsilon^2), & \mu &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

و یا

$$\begin{aligned} (x^*)^i &= x^i, & i &= 1, \dots, n, \\ (u^*)^\mu &= u^\mu + \varepsilon [\eta^\mu(x, u, \dots, \partial^s u) - u_i^\mu \xi^i(x, u, \dots, \partial^s u)] + O(\varepsilon^2), & \mu &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

تشکیل یک تبدیل موضعی خواهند داد.

امتداد مولد بی نهایت کوچک (۱۲.۲) نیز به صورت

$$\begin{aligned} \hat{X}^\infty &= \hat{\eta}^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \hat{\eta}_i^{(1)\mu} \frac{\partial}{\partial u_i^\mu} + \dots + \hat{\eta}_{i_1 \dots i_p}^{(p)\mu} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_p}^\mu} + \dots \\ \hat{\eta}_i^{(1)\mu} &= D_i \hat{\eta}^\mu, \\ \hat{\eta}_{i_1 \dots i_p}^{(p)\mu} &= D_{i_p} \hat{\eta}_{i_1 \dots i_{p-1}}^{(p-1)\mu}, & \mu &= 1, \dots, m & i_j &= 1, \dots, n & p &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (13.2)$$

نوشته می شود.

تبدیلات افقی

فرض کنیم G یک گروه تبدیلات باشد که روی E عمل می کند. G گروهی از تبدیلات افقی است هر گاه متغیر مستقل جدید تابعی از متغیر مستقل قدیم بوده و متغیر وابسته ثابت بماند. به بیان دیگر به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم:

$$g.(x, u) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{u}) = (f(x), u).$$

بنابراین مولد بی نهایت کوچک این تبدیل فرمی به شکل

$$X = \sum_{i=1}^p \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

خواهد داشت.

تبدیلات عمودی

در تبدیلات عمودی، عمل تبدیل فقط بر روی متغیرهای وابسته انجام می شود به این صورت که متغیرهای وابسته جدید فقط تابعی بر حسب متغیرهای وابسته قدیم هستند ولی متغیرهای مستقل بدون تغییر ثابت باقی خواهند ماند. به این معنا که:

$$G \times E \longrightarrow E,$$

$$g.(x, u) \longmapsto (\tilde{x}, \tilde{u}) = (x, g(u)).$$

لذا عملگر بی نهایت کوچک این تبدیل به صورت

$$X = \sum_{\alpha=1}^q \eta^\alpha(u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

محاسبه خواهد شد.

تبدیلات تصویری (حافظ تار)

در این نوع از تبدیل که به صورت

$$G \times E \longrightarrow E,$$

$$g.(x, u) \longmapsto (\tilde{x}, \tilde{u}) = (f(x), g(x, u)).$$

تعریف می شود متغیرهای مستقل جدید تنها تابعی از متغیرهای مستقل قدیم و متغیرهای وابسته جدید تابعی از متغیرهای مستقل و وابسته قبل از عمل تبدیل با عملگر بی نهایت کوچک

$$X = \sum_{i=1}^p \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

می باشند.

به طور مثال تبدیل زیر یک تبدیل تصویری و یا حافظ تار می باشد.

$$g.(x, t, u) \longmapsto (x + 2\varepsilon t, t - \varepsilon, e^{\varepsilon x + \varepsilon^2 t} u). \quad (۱۴.۲)$$

تعریف ۱۲.۱.۲. نگاشت $\Gamma_f : X \rightarrow E$ از فضای متغیرهای مستقل X به فضای کامل که شامل تمام متغیرهای مستقل و وابسته می باشد با ضابطه

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)); \quad x \in X\} \subseteq X \times U.$$

را گراف تابع f می نامند که گراف Γ_f یک زیر منیفلد p -بعدی منظم ایمرشن از E است و بعد آن برابر با بعد متغیرهای مستقل می باشد.

همچنین گراف Γ_f توسط گروه تبدیلات G انتقال نیز می یابد یعنی

$$g.\Gamma_f = \{(x\tilde{a}, \tilde{u}) = g.(x, u); \quad (x, u) \in \Gamma_f\}.$$

لازم به ذکر است تنها زمانی اثر عمل گروه بر روی گراف Γ_f ، تشکیل یک گراف جدید می دهد که G یک عمل هموار باشد و عضو همانی گروه G ، گراف را بدون تغییر ثابت نگه دارد، در این صورت $\Gamma_{\tilde{f}} = g.\Gamma_f$ یک گراف جدید خواهد بود که \tilde{f} انتقال تابع f توسط g می باشد.

به عنوان مثال گراف جدید برای تبدیل تصویری (۱۴.۲) به صورت

$$\begin{aligned} u &= e^{(x-\varepsilon t-\varepsilon^2)} f(x - 2t\varepsilon - 2\varepsilon^2, t + \varepsilon), \\ x &= \tilde{x} - 2\varepsilon(\tilde{t} + \varepsilon). \end{aligned}$$

نوشته می شود.

۲.۲ فضاهای جت

اگر یک تابع حقیقی مقدار و هموار با p متغیر مستقل (x^1, \dots, x^p) داشته باشیم تعداد مشتقات جزئی متمایز مرتبه k - ام برابر با

$$P_k = \binom{p+k-1}{k}.$$

خواهد بود.

مشتق جزئی تابع $f(x)$ نسبت به J را با نماد $\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_k}}$ نمایش می دهند که $J = (j_1, \dots, j_k)$ مرتبه اندیس چندگانه می باشد و مشخص می کند که تا چه مرتبه ای از تابع $f(x)$ مشتق گرفته شده است. واضح است که $j_1 + \dots + j_k = k$.

بحث فوق را کمی بسط داده و بر روی توابع هموار q متغیره با p متغیر مستقل پی میگیریم. فرض کنیم $f : X \rightarrow U$ که $X \simeq \mathbb{R}^p$ و $U \simeq \mathbb{R}^q$ یک تابع هموار باشد، از آنجاییکه تابع $f(x^1, \dots, x^p)$ دارای q مقدار است و برای هر مقدار، تعداد p_k تا مشتق جزئی وجود دارد بنابراین تعداد مشتقات جزئی تابع $f(x)$ ، برابر با $q p_k = q \binom{p+k-1}{k}$ خواهد بود.

حال فرض کنید که $U_k \simeq \mathbb{R}^{qp_k}$ فضای لازم برای نشان دادن مشتقات جزئی تا مرتبه k -ام و

$U^{(n)} = U \times U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ فضای تمام مشتقات جزئی تا مرتبه n -ام برای تابع $f(x)$ باشد در اینصورت داریم

$$\begin{aligned} \dim U^{(n)} &= \dim U + \dim U_1 + \dim U_2 + \dots + \dim U_n \\ &= q + qp_1 + qp_2 + \dots + qp_n = q \binom{p+n}{n} \equiv qp^{(n)}. \end{aligned}$$

با اضافه کردن فضای p -بعدی متغیرهای مستقل X به فضای تمام مشتقات جزئی $U^{(n)}$ فضای n -ام، $J^n = X \times U^{(n)}$ ، برای تابع $f(x)$ تشکیل می شود که بعد آن برابر با $p + qp^{(n)}$ خواهد بود.

همچنین اگر تابع هموار $f: X \rightarrow U$ با ضابطه $u = f(x)$ در نظر بگیریم، در این صورت امتداد مرتبه n -ام تابع $f(x)$ بر روی فضای تمام مشتقات جزئی $U^{(n)}$ به صورت

$$pr^{(n)} f = f^{(n)} : X \rightarrow U^{(n)},$$

تعریف می شود و داریم:

$$\dim(f^{(n)}) = \dim J^{(n)} - p = qp^{(n)}.$$

۳.۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل نقش مهم و کلیدی در تمام علوم و گرایش ها دارند، با استفاده از تجزیه و تحلیل همین معادلات دیفرانسیل است که می توان رفتارهای فیزیکی و نحوه تعامل و ارتباط با دنیای پیرامون خود را کشف کنیم. برای درک پدیده های طبیعی جهان اطراف خود چاره ای جز مدل بندی و فرموله کردن این پدیده ها در قالب معادلات دیفرانسیل نداریم. معادلاتی که تمام رفتارهای گرمایی، حرارتی، موجی و سیالی را در خود گنجانده اند. تاکنون محققان تلاشهای زیادی برای رسیدن به جواب معادلات دیفرانسیل اعم از معادلات خطی و غیر خطی، همگن و ناهمگن، معادلات با تقریب اضافی، معادلات دیفرانسیل با منبع و یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری انجام داده اند. یکی از راه های رسیدن به جواب، تحلیل تقارنی معادلات دیفرانسیل می باشد. در ادامه مقدمات بررسی این روش را فراهم می آوریم.

تعریف ۱.۳.۲. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با p - متغیر مستقل $x = (x^1, x^2, \dots, x^p)$ و q - متغیر وابسته $u = (u^1, u^2, \dots, u^q)$ مرتبه n - ام تابعی هموار به صورت

$$\Delta : J^n \rightarrow \mathbb{R}^l. \quad (15.2)$$

می باشد. اگر $p > 1$ ، دستگاه یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره ای می باشد و اگر $p = 1$ دستگاه یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نام دارد.

تعریف ۲.۳.۲. یک جواب هموار برای معادله دیفرانسیل (۱۵.۲) تابعی هموار به فرم $u = f(x)$ می باشد بطوریکه

$$\Delta_\nu(x, f(x)^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l.$$

به طور مثال، تابع چند جمله ای $u(t, x) = t^2 + x^2$ و تابع غیر چند جمله ای $u(t, x) = \ln\left(\frac{x-t}{x+t}\right)$ نمونه هایی از جوابهای معادله موج (۱+۱) - بعدی $u_{tt} - u_{xx} = 0$ هستند.

فرض کنیم یک دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه n - ام و یا به طور معادل یک مجموعه جواب از فضای جت مرتبه n - ام $M^{(n)} \subseteq X \times U^{(n)}$ داشته باشیم. یک گروه تقارن برای این دستگاه به صورت یک گروه موضعی از تبدیلات مانند G تعریف می شود که روی $M \subseteq X \times U$ عمل می کند و جواب های دستگاه را به جواب های دیگر منتقل می کند.

۴.۲ نگاشت نمایی و مولدهای بی نهایت کوچک

تعریف ۱.۴.۲. اگر G یک گروه لی و \mathfrak{g} جبر لی متناظر با آن باشد در اینصورت توسط نگاشت نمایی

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G.$$

هر میدان برداری $v \in \mathfrak{g}$ به یک منحنی $\exp(\varepsilon v)$ در گروه لی متناظر می شود. لذا هر عضو از گروه مانند $g \in G$ می تواند به طور یکتایی به صورت $g = \exp(v)$ یا به صورت ضرب متناهی از آن ها نوشته شود.

قضیه ۲.۴.۲. فرض کنید G یک گروه لی همبند با جبر لی \mathfrak{g} باشد. در این صورت، به ازای هر $v_1, \dots, v_k \in \mathfrak{g}$ هر عضو G مانند g به صورت ضرب نگاشت های نمایی به شکل

$$g = \exp(v_1) \circ \exp(v_2) \circ \dots \circ \exp(v_k), \quad v_1, \dots, v_k \in \mathfrak{g}.$$

بیان خواهد شد [۷۱].

می توان این طور نتیجه گرفت که با در اختیار داشتن اعضای یک جبر لی و محاسبه نگاشت های نمایی متناظر با هر عضو و ضرب کردن آن ها در هم، به راحتی به ضابطه تبدیل گروه خواهیم رسید.

گزاره ۳.۴.۲. فرض کنیم G یک گروه لی با جبر لی \mathfrak{g} و $\{exp(tv)\}$ زیر گروه یک - پارامتری متناظر با عضو $v \in \mathfrak{g}$ باشد. اگر G روی M عمل کند در این صورت مولد بی نهایت کوچک نظیر عضو v با مشتقگیری از شار $exp(tv)$ به صورت زیر بدست می آید.

$$\hat{v}|_x = \frac{d}{dt} exp(tv)x|_{t=0}, \quad x \in M, \quad v \in \mathfrak{g}.$$

لازم به ذکر است که اگر نگاشت $\Phi_x : G \rightarrow M$ با ضابطه $\Phi_x(g) = g.x$ تعریف شده باشد، در این صورت رابطه $\hat{v}|_x = d\Phi_x(v|_e)$ برقرار است. و با در اختیار داشتن $\Phi_x \circ R_h = \Phi_{h.x}$ و میدان برداری ناوردای راست $v \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_R$ داریم $d\Phi_x(v|_g) = \hat{v}|_{g.x}$.

قضیه ۴.۴.۲. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات همبند باشد که روی M عمل می کند. در این صورت، تابع حقیقی $I : M \rightarrow R$ تحت عمل گروه G ناوردا است اگر و تنها اگر به ازای هر $V \in \mathfrak{g}$ و $p \in M$ داشته باشیم

$$V_p(I) = 0.$$

اثبات: در مرجع [۷۱] اشاره شده است.

همان طور که در گزاره بالا اشاره شد می توان به هر شار موضعی تولید شده توسط یک مولد بی نهایت کوچک، یک میدان برداری به شکل زیر نسبت داد

$$V|_{(x,u)} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} g_{\varepsilon} \cdot (x, u) = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \varphi^{\alpha}(x, u) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}},$$

که بر روی فضای متغیرهای مستقل و وابسته X و U تعریف شده است، همچنین می توان با حل دستگاه مشخصه

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \dots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)}.$$

به یک دسته ناوردا برای گروه تبدیل G رسید.

مثال ۵.۴.۲. در این مثال، جبر لی و گروه لی از ماتریس خطی خاص $SL(2)$ را با استفاده از مفهوم نگاشت مداری و مطالبی که در این بخش آمده است، بدست می آوریم. همان طور که می دانیم ماتریس های j_1, j_2 و j_3

$$j_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

یک پایه برای جبر $\mathfrak{SL}(2)$ می باشند. با تعریف نگاشت χ به صورت

$$\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot x \rightarrow \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

مولدهای بی نهایت کوچک به شکل

$$X_1 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \chi(I + t j_1) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x + t) = 1 \implies X_1 = 1 \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_2 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \chi(I + t j_2) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{x}{xt + 1} = -x^2 \implies X_2 = -x^2 \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_3 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \chi(I + t j_3) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{x(1+t)}{1-t} = 2x \implies X_3 = 2x \frac{\partial}{\partial x}.$$

بدست می آیند.

که X_1, X_2, X_3 اعضای جبر لی χ هستند و بنا بر آنچه در تعریف (۱.۴.۲) آمده است می توان با استفاده از اعضای جبر لی، عمل گروه را نیز برای $\mathfrak{SL}(2)$ بدست آورد.

$$\begin{aligned} X_1 &: \frac{dx}{d\varepsilon} = 1 \xrightarrow{f} \bar{x} = x + \varepsilon \implies \exp(\varepsilon X_1) = x + \varepsilon, \\ X_2 &: \frac{dx}{d\varepsilon} = -x^2 \xrightarrow{f} \bar{x} = \frac{x}{\varepsilon x + 1} \implies \exp(\varepsilon X_2) = \frac{x}{\varepsilon x + 1}, \\ X_3 &: \frac{dx}{d\varepsilon} = 2x \xrightarrow{f} \bar{x} = x e^{2\varepsilon} \implies \exp(\varepsilon X_3) = x e^{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \exp(\varepsilon X_3) \left(\exp(\varepsilon X_2) \left(\exp(\varepsilon X_1) \right) \right) = \exp(\varepsilon X_3) \left(\exp(\varepsilon X_2) (x + \varepsilon) \right) \\ &= \exp(\varepsilon X_3) \left(\frac{x + \varepsilon}{(x + \varepsilon)\varepsilon + 1} \right) = \frac{x + \varepsilon}{(x + \varepsilon)\varepsilon + 1} e^{2\varepsilon} = \psi(\varepsilon, x) \in G. \end{aligned}$$

با مشتق گیری از نگاشت مداری $\psi(\varepsilon, x)$ ، جبر لی $\mathfrak{SL}(2)$ عبارت خواهد بود با:

$$X = \frac{d}{d\varepsilon} \psi(\varepsilon, x) = (1 + 2x - x^2) \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{SL}(2).$$

مثال ۶.۴.۲. برای گروه دوران $\mathfrak{SO}(2)$ با نگاشت

$$\mathfrak{SO}(2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - u \sin \theta \\ x \sin \theta + u \cos \theta \end{pmatrix}.$$

می توان مولد

$$X = \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} (x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta) = (-u, x),$$

$$= -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} \in \mathfrak{SD}(2).$$

را تعریف کرد که با حل معادله مشخصه

$$\frac{dx}{-u} = \frac{du}{x},$$

ناوردای معمولی از این گروه تقارن به شکل $c = x^2 + u^2$ بدست می آید.

۵.۲ معرفی و نحوه محاسبه تقارن ها

در قرن نوزدهم ریاضیدان نروژی به نام سوفوس لی با معرفی مفهوم گروه لی و تقارن ها برای معادلات دیفرانسیل انقلاب بزرگی در علم ایجاد کرد. به طوری که از میان روشهای به کار گرفته شده برای رسیدن به جواب معادلات دیفرانسیل غیرخطی، روش تحلیل گروهی لی یک روش سیستماتیک و نظام مند بوده و نقش مهمی را در حل این مشکل ایفا می کند. این روش نه تنها با استفاده از فراهم کردن ابزار مناسب برای رسیدن به جواب معادلات دیفرانسیل قدم بزرگی برداشته است بلکه با ارتباط دادن مفاهیمی همچون قوانین بقاء و تقارن های لی کاربردی بودن خود را در زمینه های فیزیک و مکانیک و دیگر علوم به اثبات رسانده است.

برای هر یک از انواع تبدیلاتی که در بخش قبل از همین فصل توضیح داده شد، می توان تقارن تعریف کرد. در ادامه تعریفی از تقارن نقطه ای، نحوه محاسبه آن همراه با ذکر یک مثال آورده شده است [۲۸].

قضیه ۱.۵.۲. فرض کنید (۵.۲) یک مولد بی نهایت کوچک برای گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای (۴.۲) باشد. اگر (۶.۲) امتداد k -ام مولد بی نهایت کوچک باشد در این صورت تبدیلات (۴.۲) یک تقارن نقطه ای برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta(x, u) = 0$ خواهد بود اگر و فقط اگر برای هر $\alpha = 1, \dots, n$ داشته باشیم [۷]

$$X^k \Delta^\alpha(x, u, \dots, \partial^k u) = 0, \quad \Delta^\alpha(x, u, \dots, \partial^k u) = 0. \quad (16.2)$$

قضیه ۲.۵.۲. (گروه تقارن) - گروه همبند از تبدیلات G یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta(x, u) = 0$ شناخته می شود اگر و فقط اگر شرط تقارن بی نهایت کوچک (۱۶.۲) برای هر مولد بی نهایت کوچک $v \in \mathfrak{g}$ از گروه G برقرار باشد [۷].

تعریف ۳.۵.۲. فرض کنیم $\Omega \subset E$ یک مجموعه باز و $F(x, u^n)$ یک تابع هموار بر روی فضای جت مرتبه n -ام باشد، مشتق کامل F نسبت به x^i را با نماد $D_i F(x, u^{(n+1)})$ نشان می دهیم که تابعی هموار بر روی فضای جت مرتبه $n+1$ -ام Ω است و به صورت

$$D_i F(x, u^{(n+1)}) = \frac{\partial}{\partial x^i} F(x, u^n) + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial F}{\partial u_J^\alpha}. \quad (17.2)$$

تعریف می شود.

به طور مثال اگر فضای کامل را به صورت $E \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ با مختصات (x, y, z, u) در نظر بگیریم مشتق کامل D_x عبارتست از:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{xz} \frac{\partial}{\partial u_z} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \dots$$

مشتق کامل مراتب بالاتر نسبت به اندیس چندگانه $J = (j_1, \dots, j_k)$ به شکل

$$D_J = D_{j_1} \dots D_{j_k}.$$

قابل محاسبه هستند.

قضیه ۴.۵.۲. اگر

$$X = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (18.2)$$

یک میدان برداری تعریف شده روی زیر مجموعه باز $\Omega \subset E$ باشد. امتداد مرتبه n -ام میدان برداری X ، میدان برداری به شکل

$$X^{(n)} = X + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad (19.2)$$

می باشد که ضرایب ϕ_α^J با رابطه

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J \left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha. \quad (20.2)$$

شناخته می شوند و $Q_\alpha = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha$ مشخصه میدان برداری X می نامیم [۷۱، ۷۰].

تعریف ۵.۵.۲. یک گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای (۴.۲)، دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta(x, u) = 0$ را به صورت ناورد حفظ می کند اگر و فقط اگر امتداد مرتبه k -ام (۶.۲) جواب های معادله دیفرانسیل $\Delta(x, u) = 0$ را روی فضای $(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u)$ به صورت ناورد حفظ کند. یا به عبارتی گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای یک تقارن نقطه ای نامیده می شود هرگاه خانواده ای از جواب های دستگاه به خانواده ای دیگر از جواب های دستگاه نگاشته شود و جواب ها ناورد باقی بمانند.

به طور مثال گروه دوران در صفحه با مولد $X = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}$ ، تابع $u_{xx} = 0$ را به صورت ناورد حفظ می کند زیرا

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{(2)}(X)(u_{xx}) &= \left(-u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2) \frac{\partial}{\partial u_x} + 2u_x u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \right) (u_{xx}) \\ &= 2u_x u_{xx} |_{u_{xx}=0} = 0. \end{aligned}$$

بنابراین جواب های معادله $u_{xx} = 0$ تحت گروه دوران ناورد هستند. که در واقع همین طور هم می باشد چون از آنجاییکه جواب های این دسته از معادلات خطوطی به شکل $u = ax + b$ هستند، هر چقدر یک خط راست را تحت زاویه θ دوران دهیم همچنان بدون تغییر یک خط راست باقی می ماند.

۱.۵.۲ محاسبه گروه تقارن معادله (۱+۳) - بعدی موج

معادله موج در حالت کلی، یک معادله غیر خطی به فرم [۲۷]

$$u_{tt} - (f(u)u_x)_x - (g(u)u_y)_y - (h(u)u_z)_z = 0, \quad (21.2)$$

می باشد که با در نظر گرفتن $f(u) = g(u) = h(u) = 1$ معادله موج را در حالت خاص به فرم

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, \quad (22.2)$$

خواهیم داشت. اگر گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه ای برای معادله موج (۲۲.۲) را به شکل

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \varepsilon \xi_1(t, x, y, z, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{x} &= x + \varepsilon \xi_2(t, x, y, z, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{y} &= y + \varepsilon \xi_3(t, x, y, z, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{z} &= z + \varepsilon \xi_4(t, x, y, z, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u} &= u + \varepsilon \phi(t, x, y, z, u) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (23.2)$$

در نظر بگیریم آنگاه مولد بی نهایت کوچک نظیر تبدیل (۲۳.۲) عبارتست از:

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial y} + \xi_4 \frac{\partial}{\partial z} + \phi \frac{\partial}{\partial u}. \quad (24.2)$$

چون معادله (۲۲.۲) مرتبه دوم می باشد بنابراین لازم است که مولد (۲۴.۲) به شکل

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= X + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^y \frac{\partial}{\partial u_y} + \phi^z \frac{\partial}{\partial u_z} \\ &+ \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{tx} \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \phi^{ty} \frac{\partial}{\partial u_{ty}} + \phi^{tz} \frac{\partial}{\partial u_{tz}} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \\ &+ \phi^{xy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \phi^{xz} \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + \phi^{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \phi^{yz} \frac{\partial}{\partial u_{yz}} + \phi^{zz} \frac{\partial}{\partial u_{zz}}. \end{aligned} \quad (25.2)$$

تا مرتبه دوم امتداد داده شود. بنا بر آنچه در قضیه (۱.۵.۲) آمده است، چنانچه X یک تقارن برای (۲۲.۲) باشد باید:

$$X^{(2)}(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz}) = \phi^{tt} - \phi^{xx} - \phi^{yy} - \phi^{zz} \Big|_{(2.22)} = 0. \quad (26.2)$$

با استفاده از دستورات نرم افزاری در میپل (در فصل انتهایی در این مورد توضیح داده شده است)، مجهولات $\phi, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ محاسبه می شوند که با جایگذاری آنها در میدان برداری (۲۴.۲) و دسته بندی بر اساس ضرایب ثابت می توان به تقارن های لی معادله موج دست یافت [۵۲].

این تقارن ها عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & X_4 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
 X_5 &= u \frac{\partial}{\partial u}, & X_6 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, & X_7 &= t \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial t}, \\
 X_8 &= z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z}, & X_9 &= t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}, & X_{10} &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \\
 X_{11} &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, & X_{12} &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial t}, \\
 X_{13} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y^2 + z^2 - x^2 - t^2) \frac{\partial}{\partial x} - xy \frac{\partial}{\partial y} - xz \frac{\partial}{\partial z} - xt \frac{\partial}{\partial t} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \\
 X_{14} &= zx \frac{\partial}{\partial x} + zy \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{2}}(t^2 + z^2 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial z} + zt \frac{\partial}{\partial t} - zu \frac{\partial}{\partial u}, \\
 X_{15} &= yx \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}}(y^2 + t^2 - x^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial y} + yz \frac{\partial}{\partial z} + yt \frac{\partial}{\partial t} - yu \frac{\partial}{\partial u}, \\
 X_{16} &= tx \frac{\partial}{\partial x} + ty \frac{\partial}{\partial y} + tz \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + t^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial t} - tu \frac{\partial}{\partial u}. \quad (27.2)
 \end{aligned}$$

همان طور که گفته شده است مجموعه تمام تقارن های بی نهایت کوچک از یک دستگاه معادله دیفرانسیل، تشکیل یک جبر لی از میدان های برداری می دهند. لذا اگر این جبر لی دارای بعد متناهی باشد، گروه تقارن از دستگاه، یک گروه لی موضعی از تبدیلات است که بر روی زیرمجموعه ای از فضای کامل $X \times U$ عمل می کند.

اگر از مولدهای بی نهایت کوچک بدست آمده انتگرال بگیریم فلو یا همان شار گروه حاصل می شود که هر یک از آنها یک گروه تقارن نیز می باشند. با ترکیب هر یک از فلو ها با هم به گروه تقارن کلی معادله موج خواهیم رسید. در ادامه روند رسیدن به شار گروه را برای دو مولد X_1 و X_{12} آورده ایم.

• برای مولد X_1 داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{\sqrt{}} &= d\varepsilon \xrightarrow{f} x = \varepsilon + c|_{\varepsilon=0} \implies x = c, \\
 x^* &= x + \varepsilon \implies G_1 = (t, x + \varepsilon, y, z, u). \quad (28.2)
 \end{aligned}$$

• برای مولد X_{12} خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \frac{dt}{t} &= \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = d\varepsilon \xrightarrow{f} t = ce^\varepsilon|_{\varepsilon=0} \implies t = c, \\
 t^* &= te^\varepsilon \implies G_{12} = (te^\varepsilon, xe^\varepsilon, ye^\varepsilon, ze^\varepsilon, u). \quad (29.2)
 \end{aligned}$$

شار گروه برای مابقی مولد ها نیز به همین ترتیب پیدا می شوند. همچنین با دستورات نرم افزاری میپل که در فصل آخر به آن اشاره شده است، می توان به راحتی به شار گروه برای هر مولد دست یافت.

$$X_2 : G_2 = (t, x, \varepsilon + y, z, u),$$

$$\begin{aligned}
 X_3 : G_3 &= (t, x, y, \varepsilon + z, u), \\
 X_4 : G_4 &= (t = \varepsilon + t, x, y, z, u), \\
 X_5 : G_5 &= (t, x, y, z, ue^\varepsilon), \\
 X_6 : G_6 &= (t, x, z \sin(\varepsilon) + y \cos(\varepsilon), z \cos(\varepsilon) - y \sin(\varepsilon), u), \\
 X_7 : G_7 &= \left(\frac{t-y}{\sqrt{2}} e^{-\varepsilon} + \frac{t+y}{\sqrt{2}} e^\varepsilon, x, \frac{y-t}{\sqrt{2}} e^{-\varepsilon} + \frac{y+t}{\sqrt{2}} e^\varepsilon, z, u \right), \\
 X_8 : G_8 &= \left(\frac{t-z}{\sqrt{2}} e^{-\varepsilon} + \frac{t+z}{\sqrt{2}} e^\varepsilon, x, y, \frac{z-t}{\sqrt{2}} e^{-\varepsilon} + \frac{z+t}{\sqrt{2}} e^\varepsilon, u \right), \\
 X_9 : G_9 &= \left(\frac{t-x}{\sqrt{2}} e^{-\varepsilon} + \frac{t+x}{\sqrt{2}} e^\varepsilon, \frac{x-t}{\sqrt{2}} e^{-\varepsilon} + \frac{x+t}{\sqrt{2}} e^\varepsilon, y, z, u \right), \\
 X_{10} : G_{10} &= (t, z \sin(\varepsilon) + x \cos(\varepsilon), y, z \cos(\varepsilon) - x \sin(\varepsilon), u), \\
 X_{11} : G_{11} &= (t, y \sin(\varepsilon) + x \cos(\varepsilon), y \cos(\varepsilon) - x \sin(\varepsilon), z, u). \quad (30.2)
 \end{aligned}$$

اگر $u = f(t, x, y, z)$ یک جواب برای معادله موج باشد در این صورت هر یک از جواب های بدست آمده از گروه تقارن G_i نیز یک جواب برای معادله موج خواهند بود. با ترکیب تمامی جواب های بدست آمده می توان به یک جواب کلی از معادله موج رسید [۲۷].

۶.۲ کاربردهای گروه تقارن

با در اختیار داشتن یک تقارن از یک معادله دیفرانسیل و یا دستگاهی از معادلات دیفرانسیل علاوه بر کاهش مرتبه از آن معادله و یا دستگاه، می توان به جواب های دقیق و صریحی از آن دست یافت. از دیگر کاربردهای این بخش مهم از هندسه طبقه بندی و دسته بندی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، دوم، سوم و ... بر اساس ناوردهای معمولی و مراتب بالاتر که از امتداد تقارن ها و یا عمل گروه حاصل شده است، می باشد که این امر خود یکی از دلایلی است که ما را هر چه بیشتر در به بدست آوردن تقارن های یک معادله دیفرانسیل تشویق می کند. علاوه بر این دستاوردهای مهم، با کمک تقارن ها و تبدیلاتی همچون تبدیلات تصویری، گالیلله ای، تجانس و ... می توان دسته ای خاص از جواب های یک معادله دیفرانسیل معروف به جواب های گروه-ناوردا را بدست آورد [۷۱]. در ادامه فصل در مورد کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل، رسیدن به جواب های دقیق با استفاده از تقارن ها، طبقه بندی معادلات دیفرانسیل و جواب های گروه-ناوردا از یک معادله دیفرانسیل بحث خواهیم کرد.

۱.۶.۲ کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل معمولی

اگر یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا دستگاهی از معادلات اعم از همگن و ناهمگن یا خطی و غیر خطی و یا حتی تقریبی و کسری در اختیار داشته باشیم می توان با کاهش مرتبه معادله دیفرانسیل به معادله با مراتب پایین تر دست یافت که رسیدن به جواب های معادله کاهش یافته آسانتر می باشد. تا جایی که برای معادلات دیفرانسیل معمولی، انتگرال گیری از جواب های معادله کاهش یافته می تواند ما را به جواب های معادله اولیه برساند. تحت شرایط حل پذیری که در ادامه بخش توضیح داده خواهد شد می توان جواب های معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را نیز با انتگرال گیری از جواب های معادلات کاهش یافته نظیرش محاسبه کرد [۵۵].

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

اگر یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول $\frac{dU}{dx} = P(x, U)$ در فضای کامل $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q$ با مولد $X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^q \varphi_i \frac{\partial}{\partial u_i}$ در نظر بگیریم، با حل معادله مشخصه

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{du_1}{d\varphi_1} = \dots = \frac{du_q}{d\varphi_q} = \frac{dv}{1}.$$

ناوردهای معمولی $y = \eta(x, U)$ و $w = \zeta(x, U)$ پیدا می شوند.

با جایگذاری ناوردهای بدست آمده در دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول $\Delta(x, U^{(1)}) = 0$ به دستگاه جدید $\tilde{\Delta}(y, w^{(1)}) = 0$ با مولد $X^* = \frac{\partial}{\partial w}$ خواهیم رسید و از آنجاییکه دستگاه جدید معادله فاقد متغیر w می باشد، می توانیم دستگاه را به صورت $\frac{\partial w}{\partial y} = H(y)$ که یک معادله خطی مرتبه اول است بازنویسی کنیم. برای مثال دستگاه معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} u_t = (1+t)v - u, \\ v_t = u - tv. \end{cases} \quad (31.2)$$

را با مولد $X = t\partial_u + \partial_v$ در نظر بگیرید. با جایگذاری ناوردهای $\{w = v, y = u - tv\}$ که از دستگاه لاگرانژی

$$\frac{dt}{0} = \frac{du}{t} = \frac{dv}{1} = \frac{dw}{1},$$

بدست آمده اند، در دستگاه معادله دیفرانسیل (31.2)، به دستگاه تبدیل یافته

$$\begin{cases} y_t = -(1+t)y, \\ w_t = y. \end{cases}$$

خواهیم رسید. دستگاه فوق جوای به شکل

$$w(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2t} + \sqrt{2}}{2}\right) + c_1, \quad y(t) = e^{-\frac{(1+t)^2}{2}}.$$

خواهد داشت که $\operatorname{erf}(x)$ تابع خطا می باشد.

معادلات دیفرانسیل معمولی مراتب بالاتر

یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n -ام، $\Delta(x, U^{(n)}) = \Delta(x, U, U_x, \dots, U_n) = 0$ در نظر بگیرید که یک گروه تقارن با مولد بی نهایت کوچک $X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \varphi \frac{\partial}{\partial U}$ دارد. با تغییر متغیرهای $y = \theta(x, U)$ و $w = \psi(x, U)$ (ناوردهای معمولی دستگاه) و جایگذاری در دستگاه معادله دیفرانسیل $\Delta(x, U^{(n)}) = 0$ ، به دستگاه تبدیل یافته $\tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = 0$ خواهیم رسید. از آنجاییکه G یک گروه تقارن برای دستگاه اولیه $\Delta(x, U^{(n)}) = 0$ می باشد بنابراین دستگاه تبدیل یافته جدید بر حسب مختصات (y, w) نیز، G را به عنوان یک گروه ناوردا می پذیرد و مولد بی نهایت کوچک به فرم $X = \frac{\partial}{\partial w}$ خواهد داشت.

این مساله به این معناست که دستگاه تبدیل یافته $\tilde{\Delta}(y, w^{(n)}) = 0$ تحت تغییرات w ناوردا باقی می ماند و فاقد متغیر w است. بنابراین دستگاه تبدیل یافته شکلی به فرم $\tilde{\Delta}(y, w^{(s)}, w^{(s+1)}, \dots, w^{(n)}) = 0$ خواهد داشت که می توان با تغییر متغیرهای

$$z = \frac{\partial^s}{\partial y^s} = w^{(s)}, \quad z^{(1)} = \frac{\partial^{s+1}}{\partial y^{s+1}} = w^{(s+1)}, \quad \dots$$

به دستگاه معادله دیفرانسیل کاهش یافته $\bar{\Delta}(y, z^{(n-s)}) = 0$ برسیم.

مثال ۱.۶.۲. معادله وبر-هرمیت

$$u_{xx} + \left(a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x^2\right)u = 0.$$

که a یک ضریب ثابت است را در نظر بگیرید، از آنجاییکه با تبدیل $\lambda u \rightarrow u$ معادله بدون تغییر ثابت باقی می ماند لذا $X = u \frac{\partial}{\partial u}$ یک تقارن برای معادله دیفرانسیل وبر-هرمیت محسوب می شود. با محاسبه ناوردهای معمولی معادله به فرم $y = x$ و $w = \ln u$ و جایگذاری آن ها در معادله وبر-هرمیت، می توان به معادله تبدیل یافته $w_{yy} + w_y^2 + a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}y^2 = 0$ رسید.

با تغییر متغیرهای $z = w_y$ و $z_y = w_{yy}$ معادله تبدیل یافته را به معادله

$$z_y + z^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}y^2 = 0,$$

کاهش مرتبه می دهیم که این معادله نیز جوابی به صورت

$$z(y) = -\frac{y}{2} - \frac{e^{\frac{y^2}{4}}}{c_1 + \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi \operatorname{erf}\left(\frac{1}{4}y\sqrt{2}\right)},$$

دارد. با توجه به تغییر متغیر $z = w_y$ داریم

$$w = \int z(y)dy = \ln \left[\frac{-\sqrt{2}}{2} \frac{\left(-\sqrt{2}\pi \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}y}{4}\right) + 2Ic_1\right)}{\sqrt{\pi}} \right] - \frac{y^2}{4},$$

که در نهایت با استفاده از ناوردهای $y = x$ و $w = \ln u$ جواب معادله وبر-هرمیت به صورت

$$u = \frac{-\sqrt{2}}{2} \frac{\left(-\sqrt{2}\pi \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}x}{4}\right) + 2Ic_1\right)}{\sqrt{\pi}} - e^{\frac{x^2}{4}}.$$

بدست می آید (c_1 ثابت دلخواه و $I^2 = 1$ می باشد) [۲۵].

۲.۶.۲ طبقه بندی معادلات دیفرانسیل مرتبه n - ام تحت گروه

تقارن داده شده

گروه تقارن از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، بزرگترین گروه موضعی از تبدیلات است که بر متغیرهای مستقل و وابسته دستگاه عمل کرده و جواب های منیفلد از دستگاه را به طور ناوردا حفظ می کند به این معنا که آن گراف هر جواب از دستگاه معادلات دیفرانسیل را به یک جواب دیگر از دستگاه معادلات دیفرانسیل می نگارد. همچنین می توان گروه های تقارنی را به دو دسته گروه های تقارنی شامل تبدیلات پیوسته و گروه های تقارنی شامل

تبدیلات گسسته رده بندی کرد. با در اختیار داشتن گروه تقارن از یک دستگاه معادله دیفرانسیل می توان جواب های نظیر آن دستگاه را طبقه بندی کرده به طوریکه اگر دو جواب در یک دسته قرار بگیرند می توان توسط بعضی از مولدهای گروه تقارن به یکدیگر تبدیل شوند. همچنین با در اختیار داشتن گروه تقارن از یک معادله دیفرانسیل و کاهش مرتبه از آن می توان به شرط حل پذیر بودن گروه با انتگرال گیری های مکرر به جواب های صریحی از معادله دیفرانسیل پاره ای دست یافت.

گروه تقارن یک پارامتری

تعریف ۲.۶.۲. فرض کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که بر روی زیر فضایی از فضای کامل $M \subseteq X \times U$ عمل می کند، نوردای دیفرانسیل مرتبه n -ام از گروه G یک تابع هموار مانند $\eta(x, u, u_x, \dots, u^{(n)})$ است که برای عمل امتداد داده شده گروه یعنی $G^{(n)}$ نیز یک ناوردا محسوب می شود و داریم

$$g^{(n)}.(x, u^{(n)}) = \eta(x, u^{(n)}), \quad (x, u^{(n)}) \in M^{(n)}, \quad \forall g \in G.$$

با استفاده از تعریف فوق، اگر G یک گروه یک پارامتری از تبدیلات باشد که بر روی فضای M عمل می کند و $y = \eta(x, u)$ و $w = \zeta(x, u, u_x)$ یک مجموعه کامل از ناوردهای مستقل تابعی برای امتداد مرتبه اول عمل گروه $G^{(n)}$ باشند. در این صورت معادلات دیفرانسیل مرتبه n -ام، G را به عنوان گروه تقارن می پذیرند اگر فقط اگر معادلات دیفرانسیل مرتبه n -ام را بتوان بر حسب ناوردهای دیفرانسیلی بازنویسی کرد یعنی:

$$\tilde{\Delta}(\eta^1(x, u^{(n)}), \dots, \eta^k(x, u^{(n)})) = 0.$$

به بیان دیگر معادله دیفرانسیل مرتبه n -امی که ناوردهای $y = \eta(x, u)$ و $w = \zeta(x, u, u_x)$ را دارد، می تواند به شکل معادله دیفرانسیل مرتبه $n-1$ -ام، $\tilde{\Delta}(y, w, \frac{dw}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}w}{dy^{n-1}}) = 0$ ، بازنویسی شود. در واقع با این روند و با کمک ناوردهای معمولی و مرتبه اول، می توان یک مرتبه از مرتبه معادله کاهش داده و طبقه بندی معادلات دیفرانسیل را به سرانجام رسانید.

گروه دوران $SO(2)$ با مولد $X = -u\partial_x + x\partial_u$ و امتداد مرتبه اول

$$X^{(1)} = -u\partial_x + x\partial_u + (1 + u_x^2)u_{xx}\partial_{u_x},$$

و امتداد مرتبه دوم

$$X^{(2)} = -u\partial_x + x\partial_u + (1 + u_x^2)u_{xx}\partial_{u_x} + 3u_x u_{xx}\partial_{u_{xx}}.$$

در نظر بگیرید. با حل معادلات مشخصه حاصل از هر امتداد نوردای معمولی، نوردای مرتبه

اول و ناوردای مرتبه دوم عبارت خواهند بود با:

$$y = \sqrt{x^2 + u^2}, \quad w = \frac{xu_x - u}{uu_x + x},$$

$$z = u_{xx} \exp \left\{ -\int^x \left(\frac{-1}{\sqrt{x^2 + u^2 - a^2}} \tan \left(-\arctan \left(\frac{a}{\sqrt{x^2 + u^2 - a^2}} \right) \right) + \arctan \frac{x}{u} + \arctan u_x \right) da \right\}.$$

می توان با استفاده از ناورداها، معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، سوم و ... که گروه دوران را به عنوان گروه تقارن می پذیرند به فرم زیر طبقه بندی کرد [۵۱].

$$\frac{dw}{dy} = \frac{\sqrt{x^2 + u^2}}{x + uu_x} \left(\frac{x \cdot u_{xx}}{uu_x + x} - \frac{(xu_x - u)(u_x^2 + uu_{xx} + 1)}{(uu_x + x)^2} \right),$$

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{\sqrt{x^2 + u^2}}{x + uu_x} \left(\frac{u_{xx}}{u + x} + \frac{xu_{xxx}}{uu_x + x} - \frac{2xu_{xx}(u_x^2 + uu_{xx} + 1)}{(uu_x + x)^2} \right)$$

$$+ \frac{2(xu_x - u)(u_x^2 + uu_{xx} + 1)^2}{(uu_x + x)^3} - \frac{(xu_x - u)(3u_x u_{xx} + uu_{xxx})}{(uu_x + x)^2}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x^2 + u^2}} \left(\frac{xu_{xx}}{uu_x + x} - \frac{(xu_x - u)(u_x^2 + uu_{xx} + 1)}{(uu_x + x)^2} \right)$$

$$- \frac{2\sqrt{x^2 + u^2}(2 + 2(u_x)^2 + 2uu_{xx})}{(2x + 2uu_x)^2} \left(\frac{xu_{xx}}{uu_x + x} - \frac{(xu_x - u)(u_x^2 + uu_{xx} + 1)}{(uu_x + x)^2} \right).$$

با توجه به مثال آورده شده می توان این طور بیان کرد که دسته ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که گروه دوران را به عنوان گروه تقارن می پذیرند شکلی به صورت $w = H(y)$ دارند که y ناوردای معمولی و w ناوردای مرتبه اول می باشد. به همین صورت معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و سوم که گروه دوران به عنوان گروه تقارن آن ها می باشد به فرم $\frac{dw}{dy} = H(y, w)$ و $\frac{d^2 w}{dy^2} = H(y, w, \frac{dw}{dy})$ خواهند بود که در مثال بالا نتیجه محاسبات آورده شده است.

گروه تقارن چند پارامتری

اگر $y = \eta(x, u)$ ناوردای معمولی و $w = \zeta(x, u^{(r)})$ ناوردای مرتبه r -ام باشد، در این صورت با r مرتبه کاهش می توان معادله دیفرانسیل مرتبه n -ام را به معادله دیفرانسیل مرتبه $n - r$ زیر که هم ارز نیز می باشند تبدیل کرد.

$$\tilde{\Delta}(y, w, dw/dy, \dots, d^{n-r}w/dy^{n-r}) = 0$$

به طور مثال گروه تصویری $SL(2)$ با عمل گروه

$$(x, u) \mapsto \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, u \right)$$

و مولدهای ∂x ، $x\partial x$ و $x^2\partial x$ را در نظر بگیرید. ناوردهای معمولی و مرتبه سوم از این گروه عبارتند از:

$$y = u, \quad w = 2 \frac{u_{xxx}}{u_x^3} - 3 \frac{u_{xx}^2}{u_x^4},$$

با توجه به اینکه w ناوردهای مرتبه سه می باشد بنابراین معادلات دیفرانسیل مرتبه چهارم به فرم

$\frac{dw}{dy} = H(y, w)$ خواهند بود. به همین صورت معادلات مراتب پنجم و ششم نیز به شکل $\frac{d^3 w}{dy^3} = H(y, w, \frac{dw}{dy}, \frac{d^2 w}{dy^2})$ و $\frac{d^4 w}{dy^4} = H(y, w, \frac{dw}{dy}, \frac{d^2 w}{dy^2}, \frac{d^3 w}{dy^3})$ می باشند. با استفاده از ناوردهای بدست آمده دسته بندی معادلات دیفرانسیل مرتبه چهارم، پنجم و ششمی که گروه تصویری را به عنوان گروه تقارن می پذیرند به شکل زیر انجام می پذیرد [۵۱]. می توان با همین روند معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتری که گروه تصویری را به عنوان گروه تقارن می پذیرند طبقه بندی کرد.

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dy} &= \frac{1}{u_x} \left(-12 \frac{u_{xxx} u_{xx}}{u_x^4} + 2 \frac{u_{xxxx}}{u_x^3} + 12 \frac{u_{xx}^2}{u_x^5} \right), \\ \frac{d^2 w}{dy^2} &= \frac{1}{u_x} \left(\frac{1}{u_x} \left(84 \frac{u_{xxx} u_{xx}^2}{u_x^5} - 18 \frac{u_{xxxx} u_{xx}}{u_x^4} - 12 \frac{u_{xxx}^2}{u_x^4} + 2 \frac{u_{xxxxx}}{u_x^3} - 60 \frac{u_{xx}^3}{u_x^6} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_{xx}}{u_x^2} \left(-12 \frac{u_{xxx} u_{xx}}{u_x^4} + 2 \frac{u_{xxxx}}{u_x^3} + 12 \frac{u_{xx}^2}{u_x^5} \right) \right), \\ \frac{d^3 w}{dy^3} &= \frac{1}{u_x} \left(\frac{1}{u_x} \left(\frac{1}{u_x} \left(156 \frac{u_{xxxx} u_{xx}^2}{u_x^5} + 216 \frac{u_{xxx}^2 u_{xx}}{u_x^5} - 660 \frac{u_{xxx} u_{xx}^3}{u_x^6} - 24 \frac{u_{xxxxx} u_{xx}}{u_x^4} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 42 \frac{u_{xxxx} u_{xxx}}{u_x^4} + 2 \frac{u_{xxxxx}}{u_x^3} + 360 \frac{u_{xx}^4}{u_x^7} \right) - 2 \frac{u_{xx}}{u_x^2} \left(84 \frac{u_{xxx} u_{xx}^2}{u_x^5} - 18 \frac{u_{xxxx} u_{xx}}{u_x^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 12 \frac{u_{xxx}^2}{u_x^4} + 2 \frac{u_{xxxxx}}{u_x^3} - 60 \frac{u_{xx}^3}{u_x^6} \right) - \frac{u_{xxx}}{u_x^2} \left(-12 \frac{u_{xxx} u_{xx}}{u_x^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{u_{xxxxx}}{u_x^3} + 12 \frac{u_{xx}^2}{u_x^5} \right) + 2 \frac{u_{xxx}}{u_x^2} \left(-12 \frac{u_{xxx} u_{xx}}{u_x^4} + 2 \frac{u_{xxxxx}}{u_x^3} + 12 \frac{u_{xx}^2}{u_x^5} \right) \right) \\ &\quad \left. - \frac{u_{xx}}{u_x^2} \left(\frac{1}{u_x} \left(84 \frac{u_{xxx} u_{xx}^2}{u_x^5} - 18 \frac{u_{xxxx} u_{xx}}{u_x^4} - 12 \frac{u_{xxx}^2}{u_x^4} + 2 \frac{u_{xxxxx}}{u_x^3} - 60 \frac{u_{xx}^3}{u_x^6} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{u_{xx}}{u_x^2} \left(-12 \frac{u_{xxx} u_{xx}}{u_x^4} + 2 \frac{u_{xxxxx}}{u_x^3} + 12 \frac{u_{xx}^2}{u_x^5} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

۳.۶.۲ جواب های گروه-ناوردا برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

یک روش تعمیم یافته برای پیدا کردن جواب های مشابه یک دستگاه معادله دیفرانسیل، یافتن جواب های گروه-ناوردا برای آن دستگاه می باشد. هر چند روش های متفاوتی

همچون روش های عددی و آزمایشات فیزیکی برای رسیدن به جواب های یک دستگاه معادله دیفرانسیل ارائه شده است، ولی روش جواب های گروه-ناوردا این امکان را به ما می دهد که با استفاده از گروه تقارن و تبدیلات تصویری، گالیله ای و یا هر تبدیل دلخواه دیگر به جواب های صریح و دقیق برای آن دستگاه معادله دیفرانسیل مورد نظر دست پیدا کنیم. فرض کنیم یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با بیش از یک متغیر مستقل $p > 1$ در اختیار داشته باشیم که G گروه تقارن از مرتبه r با مدارهای s -بعدی برای آن ها باشد، در این صورت اگر مرتبه گروه تقارن G ، یکی کمتر از تعداد متغیرهای مستقل معادله باشد $(r = p - 1)$ ، با یک تبدیل مناسب می توان معادله را تا $p - s$ مرتبه کاهش مرتبه داد. که جواب های معادله $p - s$ بار کاهش یافته با جایگذاری تغییر متغیرهای اعمال شده (ناورداهای)، قابل تبدیل به معادله با مشتقات جزئی با p متغیر مستقل می باشند. از آنجاییکه تعداد ناورداهای مستقل تابعی یک عمل گروه مانند G با مدارهای s -بعدی روی فضای کامل $p + q$ -بعدی برابر با $p + q - s$ می باشد، اگر تبدیل اعمال شده روی دستگاه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را تبدیل تصویری فرض کنیم، ناورداهای دستگاه به صورت

$$y = \eta(x, t) = (\eta_1(x, t), \dots, \eta_{p-s}(x, t)),$$

$$w = \zeta(x, u, t) = (\zeta_1(x, u, t), \dots, \zeta_q(x, u, t)).$$

خواهند بود. با در نظر گرفتن $X = \tau \partial_t + \xi^i \partial_{x_i} + \varphi \partial_u$ به عنوان مولد بی نهایت کوچک گروه تقارن G ، ناورداهای مستقل تابعی از حل دستگاه معادله مشخصه $\frac{dt}{\tau} = \frac{dx_i}{\xi^i} = \frac{du}{\varphi}$ بدست خواهند آمد.

مثال ۳.۶.۲. معادله موج $(1 + 3)$ -بعدی (۲۲.۲) با تبدیل تصویری $(t, x, y, z, u) \rightarrow (\lambda t, \lambda x, \lambda y, \lambda z, u)$ و مولد بی نهایت کوچک $X = t \partial_t + x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z$ را در نظر می گیریم. با حل معادله مشخصه $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ ناورداهای حاصل عبارتند از.

$$p = \frac{x}{t}, \quad r = \frac{y}{t}, \quad q = \frac{z}{t}, \quad w = u.$$

با استفاده از ناورداهای بدست آمده خواهیم داشت:

$$u_{xx} = \frac{1}{t^2} w_{pp}, \quad u_{yy} = \frac{1}{t^2} w_{rr}, \quad u_{zz} = \frac{1}{t^2} w_{qq}, \quad u_{tt} = \frac{p^2}{t^2} (w_{pp} + \frac{2}{p} w_p).$$

با جایگذاری تغییر متغیرهای بدست آمده در معادله موج (۲۲.۲)، به معادله کاهش یافته $(1 + 2)$ -بعدی

$$\tilde{\Delta}(p, q, r, w) = (p^2 - 1)w_{pp} + 2pw_p - w_{rr} + w_{qq} = 0 \quad (32.2)$$

خواهیم رسید [۲۷].

مثال ۴.۶.۲. معادله موج (۲+۱) - بعدی

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0. \quad (33.2)$$

را با تقارنهای

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_4 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, & X_5 &= t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_6 &= t \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial t}, & X_7 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_8 &= (t^2 + x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y} + 2xt \frac{\partial}{\partial t} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_9 &= 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (t^2 - x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} + 2yt \frac{\partial}{\partial t} - yu \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_{10} &= 2xt \frac{\partial}{\partial x} + 2yt \frac{\partial}{\partial y} + (t^2 + x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial t} - tu \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_{11} &= u \frac{\partial}{\partial u}, & X_{12} &= f(x, y, t) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

در نظر بگیرید که $f(t, x, y)$ یک جواب برای معادله (۳۳.۲) می باشد [۵۶]. می توان تحت هر یک از تقارن های بدست آمده، معادله موج (۳۳.۲) را کاهش مرتبه داد تا به جواب هایی از آن رسید. به طور مثال اگر تقارن $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ را در نظر بگیریم با حل دستگاه لاگرانژی (دستگاه مشخصه)،

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = 1, \quad \frac{dt}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{du}{d\varepsilon} = 0.$$

که ε پارامتر گروه تقارن G می باشد، $u = g(t, y)$ را به عنوان جوابی از آن بدست می آوریم. به راحتی دیده می شود که با جایگذاری جواب بدست آمده در معادله موج (۳۳.۲)، معادله کاهش یافته $g_{tt} - g_{yy} = 0$ با جواب های چند جمله ای $g(t, y) = t^2 + y^2$ و غیر چند جمله ای $g(t, y) = \ln \frac{y-t}{y+t}$ به دست خواهد آمد.

ناورداها و معادلات کاهش یافته، تحت هر یک از تقارن های $\{X_i, i = 1, \dots, 10\}$ برای معادله موج (۲+۱) - بعدی در جدول (۱.۲) خلاصه شده است [۲۷]. به عنوان یک مثال دیگر، اگر تقارن X_5 را در نظر بگیریم با حل دستگاه

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = t, \quad \frac{dt}{d\varepsilon} = x, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{du}{d\varepsilon} = 0.$$

به ناوردهای u, y و $t^2 - x^2$ خواهیم رسید. به عبارت دیگر $\{u = g(r, y), r = t^2 - x^2\}$ یک مجموعه جواب برای دستگاه لاگرانژی فوق می باشند که با جایگذاری آن ها در معادله موج (۲+۱) - بعدی به معادله $4rg_{rr} + 4g_r + g_{yy} = 0$ با جواب های چند جمله ای $g(r, y) = r + 2y^2$ و غیر چند جمله ای $g(r, y) = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{y^2+r}{y^2}}$ خواهیم رسید.

جواب های چند جمله ای و غیر چند جمله ای تحت تقارن های $\{X_i, i = 1, \dots, 6\}$ در جدول (۲.۲) آورده شده است [۵۶].

جدول ۱.۲: تبدیلات ناوردای و معادلات کاهش یافته برای تقارن های $\{X_i, i = 1, \dots, 10\}$

تقارن ها	تبدیلات ناوردای	معادلات کاهش یافته
X_1	$q = t, r = y, g = u$	$g_{qq} - g_{rr} = 0$
X_2	$q = t, r = x, g = u$	$g_{qq} - g_{rr} = 0$
X_3	$q = x, r = y, g = u$	$g_{qq} + g_{rr} = 0$
X_4	$q = t, r = x^2 + y^2, g = u$	$g_{qq} - 4g_r - 4rg_{rr} = 0$
X_5	$q = y, r = t^2 - x^2, g = u$	$g_{qq} + 4g_r + 4rg_{rr} = 0$
X_6	$q = x, r = y^2 - t^2, g = u$	$g_{qq} + 4g_r + 4rg_{rr} = 0$
X_7	$q = \frac{t}{x}, r = \frac{y}{x}, g = u$	$r^2 g_{rr} + q^2 g_{qq} + 2qr g_{rq} + 2qg_q + 2rg_r - g_{rr} + g_{qq} = 0$
X_8	$q = \frac{x^2 + y^2 - t^2}{y}, r = \frac{t}{y}, g = u\sqrt{y}$	$4r^2 q_{rr} + 8gr q_{gr} + 4g^2 q_{gg} + 12gq_g + 12rq_r - 4q_{gg} + 3q = 0$
X_9	$q = \frac{x^2 + y^2 - t^2}{x}, r = \frac{t}{x}, g = u\sqrt{x}$	$4r^2 q_{rr} + 8gr q_{gr} + 4g^2 q_{gg} + 12gq_g + 12rq_r - 4q_{gg} + 3q = 0$
X_{10}	$q = \frac{t^2 - y^2 - x^2}{x}, r = \frac{y}{x}, g = u\sqrt{x}$	$4r^2 q_{rr} + 8gr q_{gr} + 4g^2 q_{gg} + 12gq_g + 12rq_r + 4q_{gg} + 3q = 0$

جدول ۲.۲: جواب های معادله موج (۳۳.۲) تحت تقارن های $\{X_i, i = 1, \dots, 6\}$

تقارن ها	تبدیلات ناوردای	جواب های چند جمله ای	جواب های غیر چند جمله ای
X_1	t, y, u	$t^2 + y^2$	$\ln \frac{y-t}{y+t}$
X_2	t, x, u	$t^2 + x^2$	$\ln \frac{x-t}{x+t}$
X_3	x, y, u	$x^2 - y^2$	0
X_4	$t, x^2 + y^2, u$	$2t^2 + x^2 + y^2$	$\arctan \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - t^2}{t^2}}$
X_5	$t^2 - x^2, y, u$	$t^2 - x^2 + 2y^2$	$\operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{y^2 + t^2 - x^2}{y^2}}$
X_6	$x, y^2 - t^2, u$	$y^2 - t^2 - 2x^2$	$\operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{y^2 + x^2 - t^2}{x^2}}$

مثال ۵.۶.۲. به عنوان یک مثال دیگر، یک نوع از معادله KdV مرتبه ۵

$$\Delta := u_t - 2u^2 u_x - 25u_x u_{xx} - 10u u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \quad (34.2)$$

را که توسط ساوادا^۳ و کوترا^۴ و سپس توسط داد^۵، کاندیری^۶ و گیبون^۷ معرفی شده است را مورد بررسی قرار می دهیم. اساس کار این معادله توصیف طول موج در آب های نسبتا کم عمق می باشد که در اینجا با معرفی تقارن های معادله، درصد کاهش مرتبه معادله

۳ Sawada
 ۴ Kotera
 ۵ Dodd
 ۶ Caundery
 ۷ Gibbon

دیفرانسیل تحت تبدیلات پیدا شده و رسیدن به جواب های دقیق برای آن هستیم [۲۶].
اگر $X = \xi \partial_x + \tau \partial_t + \eta \partial_u$ یک مولد بی نهایت کوچک برای (۳۴.۲) باشد، باید داشته باشیم

$$\text{Pr}^{(\Delta)}(X)(\Delta) = 0,$$

با حل معادلات مشخصه حاصل از رابطه بالا، معادله (۳۴.۲) یک جبر لی ۳-بعدي با مولدهای

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = \frac{x}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2u}{\Delta} \frac{\partial}{\partial u},$$

می پذیرد.

• با در نظر گرفتن مولد $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ، ناورداها را به فرم

$$r = x, \quad s = t, \quad u = \varphi(r, s), \quad (35.2)$$

خواهیم داشت که با جایگذاری (۳۵.۲) در معادله (۳۴.۲)، معادله تبدیل یافته

$$\varphi_r^{(\Delta)} + 1^0 \varphi_r^{(3)} + 2\Delta \varphi_r^{(2)} + 2^0 \varphi_r^2 = 0,$$

بدست می آید.

• تحت تبدیلات حاصل از مولد $X_2 = \frac{\partial}{\partial t}$ ، ناوردای

$$r = t, \quad s = x, \quad u = \varphi(r, s), \quad (36.2)$$

معادله مرتبه ۵ را به یک معادله دیفرانسیل معمولی $\varphi_r = 0$ کاهش می دهد.

• ناوردهای

$$r = -\frac{x^2}{\Delta} + t^2, \quad s = -\ln(\sqrt{\Delta}(\sqrt{\Delta}x - \Delta t)).$$

متعلق به تقارن $X_3 = \frac{x}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2u}{\Delta} \frac{\partial}{\partial u}$ معادله KdV (۱۶۰.۵) را به معادله

$$\begin{aligned} & \exp\left(s(\sqrt{\Delta} - \frac{x}{\Delta})\right) \left[15625000 \exp\left(-\frac{fs}{\sqrt{\Delta}}\right) \varphi_r^{(3)} \right. \\ & + 187500000 \exp\left(-\frac{fs(\sqrt{\Delta}-1)}{\Delta}\right) \varphi_r^{(2)} - 25000 \exp\left(-\frac{fs(3\sqrt{\Delta}-2)r}{\Delta}\right) \varphi_r^{(4)} \\ & + 25^0 \exp\left(-\frac{fs(2\sqrt{\Delta}-1)}{\Delta}\right) \varphi_r^{(4)} + \dots - 17187500 \exp\left(-\frac{fs(2\sqrt{\Delta}-1)}{\Delta}\right) r \varphi_r^{(2)} \\ & - 234375000 \sqrt{\Delta} \exp\left(\frac{fs}{\Delta}\right) r^2 \varphi_r^{(2)} + 460937500 \sqrt{\Delta} \exp\left(\frac{fs}{\Delta}\right) r^3 \varphi_r^{(3)} \\ & \left. + 9765625 \exp\left(\frac{fs}{\Delta}\right) r^5 \varphi_r^{(5)} \right] = 0. \end{aligned}$$

تبدیل می کند.

• همچنین می توان معادلات دیفرانسیل را تحت ترکیب هر یک از مولدها، کاهش داد.

اگر $X^* = X_1 + X_2$ با ناوردهای

$$r = t - s, \quad s = x, \quad u = \varphi(r, s). \quad (۳۷.۲)$$

در نظر بگیریم، معادله تبدیل یافته تحت مولد $X^* = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$ عبارتست از

$$\varphi_r^{(5)} + 10\varphi_r^{(3)} + 25\varphi_r^{(2)} + (20\varphi^2 + 1)\varphi_r = 0.$$

۷.۲ گروه های حل پذیر

همان طور که در بخشهای قبلی گفته شد برای حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه n - ام تحت عمل گروه داده شده معادله را کاهش مرتبه می دهیم، به عنوان مثال می توان با استفاده از ناوردهای مرتبه r - ام معادله را r بار کاهش داده و معادله را به یک معادله دیفرانسیل با مرتبه $n - r$ تبدیل کرد. حال سوال اساسی در اینجا مطرح می شود که آیا می توان با r بار انتگرال گیری از جواب های بدست آمده به جواب معادله دیفرانسیل مرتبه n - ام رسید؟ پاسخ این مساله در حل پذیر و یا حل ناپذیر بودن معادله دیفرانسیل است، یعنی هرگاه معادله دیفرانسیلی حل پذیر باشد می توان با r بار انتگرال گیری از جواب های معادله کاهش یافته، به جواب معادله دیفرانسیل مرتبه n - ام رسید.

تعریف ۱.۷.۲. اگر G یک گروه لی و \mathfrak{g} جبر لی نظیر آن باشد، در این صورت G یک گروه حل پذیر است هرگاه زنجیری از زیرگروه های لی با این خاصیت که هر زیر گروه لی در زیر گروه لی بعدی خود نرمال باشد، بنابراین در زنجیر

$$\{e\} = G^0 \subseteq G^1 \subseteq G^2 \subseteq \dots \subseteq G^{r-1} \subseteq G^r = G.$$

G^i/G^{i-1} یک گروه ساده است.

به طور معادل، اگر یک زنجیر ایده ال از زیر جبرهای لی داشته باشیم که هر \mathfrak{g}^{k-1} در \mathfrak{g}^k نرمال است و در زنجیر

$$\{e\} = \mathfrak{g}^0 \subseteq \mathfrak{g}^1 \subseteq \mathfrak{g}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{g}^{r-1} \subseteq \mathfrak{g}^r = \mathfrak{g},$$

$\mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i-1}$ یک جبر لی ساده می باشد. به بیان دیگر اگر $\{X_1, \dots, X_r\}$ پایه ای برای جبر لی \mathfrak{g} باشند در این صورت $\{X_i, 1 \leq i \leq r\}$ پیچشی هستند هرگاه

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{j-1} c_{ij}^k X_k, \quad \forall 1 \leq i, j, k \leq r, \quad i < j, \quad X_i, X_j, X_k \in \mathfrak{g}. \quad (۳۸.۲)$$

مثال ۲.۷.۲. تقارن های معادله موج (۳۳.۲) در شرط پیچشی بودن (۳۸.۲) صدق می کنند لذا G یک گروه تقارن حل پذیر برای معادله موج می باشد و می توان با انتگرال گیری های مرتب از جواب های معادلات کاهش یافته، به جواب معادله موج رسید. جدول جابجاگر تقارن های معادله موج (۳۳.۲) در جدول (۳.۲) آورده شده است.

جدول ۳.۲: جدول جابجاگر

$[X_i; X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
X_1	۰	۰	۰	X_2	X_3	۰	X_1	$2X_7 - X_{11}$	$-2X_4$	$2X_5$	۰
X_2	۰	۰	۰	$-X_1$	۰	X_3	X_2	$2X_4$	$2X_7 - X_{11}$	$2X_6$	۰
X_3	۰	۰	۰	۰	X_1	X_2	X_3	$2X_5$	$2X_6$	$2X_7 - X_{11}$	۰
X_4	$-X_2$	X_1	۰	۰	$-X_6$	X_5	۰	$-X_9$	X_8	۰	۰
X_5	$-X_3$	۰	$-X_1$	X_6	۰	X_4	۰	X_{10}	۰	X_8	۰
X_6	۰	$-X_2$	$-X_2$	$-X_5$	$-X_4$	۰	۰	۰	X_{10}	X_9	۰
X_7	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	۰	۰	۰	۰	X_8	X_9	X_{10}	۰
X_8	$X_{11} - 2X_7$	$-2X_4$	$-2X_5$	X_9	$-X_{10}$	۰	$-X_8$	۰	۰	۰	۰
X_9	$2X_4$	$X_{11} - 2X_7$	$-2X_6$	$-X_8$	۰	$-X_{10}$	$-X_9$	۰	۰	۰	۰
X_{10}	$-2X_5$	$-2X_6$	$X_{11} - 2X_7$	۰	$-X_8$	$-X_9$	$-X_{10}$	۰	۰	۰	۰
X_{11}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

۸.۲ محاسبه دسته وسیعی از جواب ها با استفاده از خاصیت تقارنی

همان طور که می دانیم یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تعداد نامتناهی جواب دارد که با طبقه بندی جواب ها در دسته های متفاوت، تحت یک گروه تقارن خاص می توان جواب $u_1 = f_1(x, u)$ را به جواب $u_2 = f_2(x, u)$ در همان دسته منتقل کرد. به عبارت دیگر می توان با استفاده از یک تقارن از معادله، از جوابی به جواب جدید دیگری رسید. در این روش براکت لی هر یک از تقارن های معادله با تقارن $X_i = f(x, u)\partial_u$ تشکیل یک تقارن جدید برای معادله دیفرانسیل خواهند داد که با استفاده از آن می توان به راحتی به جواب جدیدی برای معادله دیفرانسیل رسید. نتیجه کار برای معادله موج (۳۳.۲) در جدول (۴.۲) آورده شده است. به طور مثال اگر جواب $g(t, y) = \ln \frac{y-t}{y+t}$ در نظر بگیریم در این صورت تحت تقارن X_1 و X_2 جوابهای جدید به صورت زیر خواهند بود [۵۶].

$$f_{\text{new}} = \frac{\partial f_{\text{old}}}{\partial x} = 0,$$

$$f_{\text{new}} = f^1(x, y, t) = \frac{\partial f_{\text{old}}}{\partial y} = \frac{-2t}{t^2 - y^2},$$

$$f_{\text{new}} = f^2(x, y, t) = \frac{\partial f^1}{\partial y} = -2 \frac{t(y+t)}{(y-t)^2} + 2 \frac{t}{y-t},$$

جدول ۴.۲: جواب های جدید تولید شده توسط براکت لی $[X_i, X_{12}]$

$[X_i, X_{12}]$	تقارن جدید	جواب های جدید
$[X_1, X_{12}]$	$\frac{\partial f_{old}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u}$	$f_{new} = \frac{\partial f_{old}}{\partial x}$
$[X_2, X_{12}]$	$\frac{\partial f_{old}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u}$	$f_{new} = \frac{\partial f_{old}}{\partial y}$
$[X_3, X_{12}]$	$\frac{\partial f_{old}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u}$	$f_{new} = \frac{\partial f_{old}}{\partial t}$
$[X_4, X_{12}]$	$\left(-y \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + x \frac{\partial f_{old}}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial u}$	$f_{new} = -y \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + x \frac{\partial f_{old}}{\partial y}$
$[X_5, X_{12}]$	$\left(t \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + x \frac{\partial f_{old}}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial u}$	$f_{new} = t \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + x \frac{\partial f_{old}}{\partial t}$
$[X_6, X_{12}]$	$\left(t \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial u}$	$f_{new} = t \frac{\partial f_{old}}{\partial y} + y \frac{\partial f_{old}}{\partial t}$
$[X_7, X_{12}]$	$\left(x \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + y \frac{\partial f_{old}}{\partial y} + t \frac{\partial f_{old}}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial u}$	$f_{new} = x \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + y \frac{\partial f_{old}}{\partial y} + t \frac{\partial f_{old}}{\partial t}$
$[X_8, X_{12}]$	$\left(x f_{old} + (t^\gamma + x^\gamma - y^\gamma) \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + \gamma xy \frac{\partial f_{old}}{\partial y} + \gamma xt \frac{\partial f_{old}}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial u}$	$f_{new} = x f_{old} + (t^\gamma + x^\gamma - y^\gamma) \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + \gamma xy \frac{\partial f_{old}}{\partial y} + \gamma xt \frac{\partial f_{old}}{\partial t}$
$[X_9, X_{12}]$	$\left(y f_{old} + \gamma xy \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + (t^\gamma - x^\gamma + y^\gamma) \frac{\partial f_{old}}{\partial y} + \gamma yt \frac{\partial f_{old}}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial u}$	$f_{new} = y f_{old} + \gamma xy \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + (t^\gamma - x^\gamma + y^\gamma) \frac{\partial f_{old}}{\partial y} + \gamma yt \frac{\partial f_{old}}{\partial t}$
$[X_{10}, X_{12}]$	$\left(t f_{old} + \gamma xt \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + \gamma yt \frac{\partial f_{old}}{\partial y} + (t^\gamma + x^\gamma + y^\gamma) \frac{\partial f_{old}}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial u}$	$f_{new} = t f_{old} + \gamma xt \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + \gamma yt \frac{\partial f_{old}}{\partial y} + (t^\gamma + x^\gamma + y^\gamma) \frac{\partial f_{old}}{\partial t}$

$$f_{new} = f^\gamma(x, y, t) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial y} = \gamma \frac{t(y+t)}{(y-t)^\gamma} - \gamma \frac{t}{(y-t)^\gamma}, \dots$$

$$f_{new} = f^n(x, y, t) = \frac{\partial f^{n-1}}{\partial y} = \gamma tn! \left[\left(\frac{(-1)^n t(y+t)}{(y-t)^{(n+1)}} \right) + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(y-t)^n} \right) \right].$$

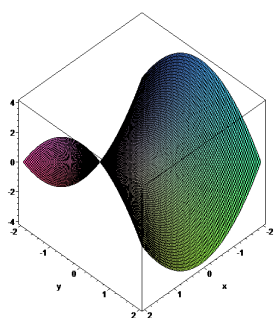
در ادامه فهرستی از جواب های جدید معادله موج تحت تقارن های X_i بدست آورده ایم که در جدول های (۵.۲)، (۶.۲)، (۷.۲) و (۸.۲) خلاصه شده اند. این روش برای هر معادله دیفرانسیلی که تقارنی به فرم $X_j = f(x, u) \frac{\partial}{\partial u}$ داشته باشد قابل اجرا است. در ادامه شکل برخی از توابع جواب، رسم شده است.

جدول ۵.۲: طبقه بندی جواب های چند جمله ای جدید برای معادله موج (۳۳.۲)

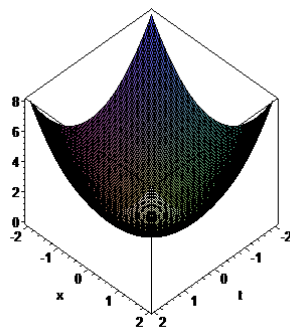
$f_{old} = x^\gamma - y^\gamma$	$f_{old} = x^\gamma + t^\gamma$	$f_{old} = y^\gamma + t^\gamma$
$f_{new} = \gamma x$	$f_{new} = \gamma x$	$f_{new} = \gamma y$
$f_{new} = \gamma y$	$f_{new} = \gamma t$	$f_{new} = \gamma t$
$f_{new} = c$	$f_{new} = c$	$f_{new} = c$
$f_{new}^n = (-1)^n (\gamma^\gamma)^n xy$	$f_{new}^n = (-1)^{n+1} (\gamma^\gamma)^{n+1} xy$	$f_{new}^n = (-1)^n (\gamma^\gamma)^{n+1} xy$
$f_{new}^n = (-1)^n (\gamma^\gamma)^n xy$	$f_{new}^n = (-1)^{n+1} (\gamma^\gamma)^{n+1} xy$	$f_{new}^n = (-1)^n (\gamma^\gamma)^{n+1} xy$
$f_{new}^n = (\gamma^\gamma)^{n+1} xt$	$f_{new}^n = (\gamma^\gamma)^n xt$	$f_{new}^n = (\gamma^\gamma)^{n+1} xt$
$f_{new}^n = (\gamma^\gamma)^{n+1} (x^\gamma + t^\gamma)$	$f_{new}^n = (\gamma^\gamma)^n (x^\gamma + t^\gamma)$	$f_{new}^n = (\gamma^\gamma)^{n+1} (x^\gamma + t^\gamma)$
$f_{new} = \gamma xt^\gamma + \gamma x^\gamma - \gamma xy^\gamma$	$f_{new} = \gamma xt^\gamma + \gamma x^\gamma - \gamma xy^\gamma$	$f_{new} = \delta xt^\gamma + \delta xy^\gamma$
$f_{new} = \gamma yx^\gamma - \gamma yt^\gamma - \gamma y^\gamma$	$f_{new} = \delta yt^\gamma + \delta yx^\gamma$	$f_{new} = \gamma yt^\gamma - \gamma yx^\gamma + \gamma y^\gamma$
$f_{new} = \delta tx^\gamma - \delta ty^\gamma$	$f_{new} = \gamma tx^\gamma + \gamma ty^\gamma + \gamma t^\gamma$	$f_{new} = \gamma tx^\gamma + \gamma ty^\gamma + \gamma t^\gamma$

جدول ۶.۲: طبقه بندی جواب های چند جمله ای جدید برای معادله موج (۳۳.۲)

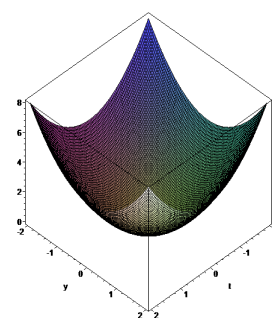
$f_{old} = y^\gamma - t^\gamma - \gamma x^\gamma$	$f_{old} = \gamma y^\gamma + t^\gamma - x^\gamma$	$f_{old} = y^\gamma + \gamma t^\gamma + x^\gamma$
$f_{new} = \gamma x$	$f_{new} = \gamma x$	$f_{new} = \gamma x$
$f_{new} = \gamma y$	$f_{new} = \gamma t$	$f_{new} = \gamma t$
$f_{new} = \gamma t$	$f_{new} = \gamma y$	$f_{new} = c$
$f_{new}^n = (-1)^{n+1} (\gamma^\gamma)^{n+1} (x^\gamma - y^\gamma)$	$f_{new}^n = (-1)^n (\gamma^\gamma)^{n+1} (x^\gamma - y^\gamma)$	$f_{new}^n = \gamma (-1)^n (\gamma^\gamma)^{n+1} (x^\gamma - y^\gamma)$
$f_{new}^n = \gamma (-1)^n (\gamma^\gamma)^{n+1} (x^\gamma - y^\gamma)$	$f_{new}^n = \gamma (-1)^n (\gamma^\gamma)^{n+1} xy$	$f_{new}^n = (-1)^n (\gamma^\gamma)^n (x^\gamma + t^\gamma)$
$f_{new}^n = (-\gamma) (\gamma^\gamma)^{n+1} xt$	\circ	$f_{new}^n = (\gamma^\gamma)^{n+1} yt$
$f_{new}^n = (-\gamma) (\gamma^\gamma)^{n+1} (x^\gamma + t^\gamma)$	$f_{new}^n = \gamma (\gamma^\gamma)^{n+1} yt$	$f_{new}^n = \gamma (\gamma^\gamma)^{n+1} (y^\gamma + t^\gamma)$
$f_{new} = \gamma xy^\gamma - \gamma xt^\gamma - \gamma x^\gamma$	$f_{new} = \gamma xt^\gamma + \gamma xy^\gamma - \gamma x^\gamma$	$f_{new} = \gamma xt^\gamma + \gamma xy^\gamma + \gamma x^\gamma$
$f_{new} = \gamma y^\gamma - \gamma yx^\gamma - \gamma yt^\gamma$	$f_{new} = \gamma yt^\gamma - \gamma yx^\gamma + \gamma y^\gamma$	$f_{new} = \gamma yt^\gamma + \gamma yx^\gamma + \gamma y^\gamma$
$f_{new} = \gamma ty^\gamma - \gamma tx^\gamma - \gamma t^\gamma$	$f_{new} = \gamma ty^\gamma - \gamma tx^\gamma + \gamma t^\gamma$	$f_{new} = \gamma ty^\gamma + \gamma tx^\gamma + \gamma t^\gamma$



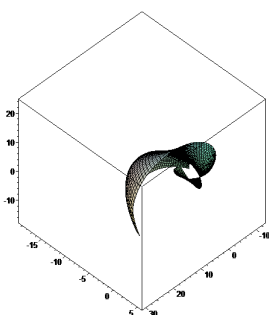
$$u = x^2 - y^2$$



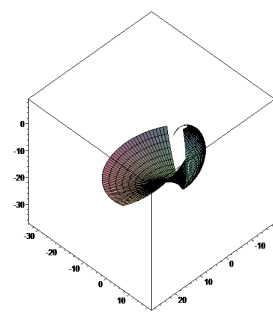
$$u = t^2 + x^2$$



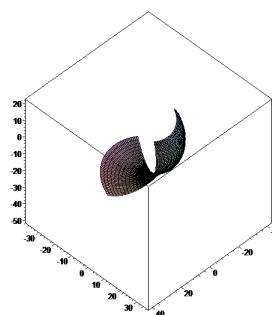
$$u = t^2 + y^2$$



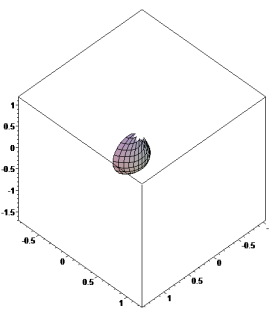
$$u = y^2 - t^2 - 2x^2$$



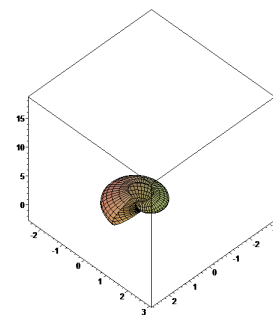
$$u = t^2 - x^2 + 2y^2$$



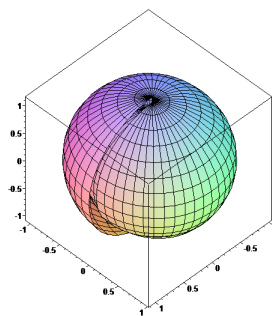
$$u = 2t^2 + x^2 + y^2$$



$$u = \log\left(\sqrt{\frac{t^2}{x^2+y^2}} + \sqrt{\frac{t^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)$$



$$u = \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2-t^2}{x^2}}\right)$$



$$u = \arctan\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2-t^2}{t^2}}\right)$$

شکل ۱.۲: شکل برخی از جواب های دقیق معادله موج

جدول ۷.۲: طبقه بندی جواب های غیر چند جمله ای جدید برای معادله موج (۳۳.۲)

X_i	$f_{old} = \ln \frac{x-t}{x+t}$	X_i	$f_{old} = \ln \frac{y-t}{y+t}$
X_1	$f_{new} = -2 \frac{t}{t^2-x^2}, -\mathcal{F} \frac{xt}{(t^2-x^2)^2}, -\mathcal{F} \frac{t(t^2+x^2)}{(t^2-x^2)^2}$	X_1	$f_{new} = \circ$
X_2	$f_{new} = \circ$	X_2	$f_{new} = \mathcal{Y} \ln \left[\frac{(-1)^n t(y+t)}{(y-t)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(y-t)^n} \right]$
X_3	$f_{new} = \mathcal{Y} \frac{x}{t^2-x^2}, -\mathcal{F} \frac{xt}{(t^2-x^2)^2}, \mathcal{F} \frac{x(t^2+x^2)}{(t^2-x^2)^2}$	X_3	$f_{new} = \mathcal{Y} \ln \left[\frac{(-1)^n t(y+t)}{(y-t)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(y-t)^n} \right]$
X_4	$f_{new} = \mathcal{Y} \frac{ty}{t^2-x^2}, -\mathcal{Y} \frac{xt(t^2-x^2-\mathcal{Y}y^2)}{(t^2-x^2)^2}, -\mathcal{F} \frac{y(\mathcal{Y}t^2x^2-t^2y^2-\mathcal{Y}x^2-x^2y^2)}{(t^2-x^2)^2}$	X_4	$f_{new} = -\mathcal{Y} \frac{tx}{t^2-y^2}, \mathcal{Y} \frac{t(yt^2-\mathcal{Y}tx^2-y^2)}{(y-t)^2}, \mathcal{Y} \frac{tx(t^2+\Delta y^2-\mathcal{F}tx^2-\mathcal{Y}ty^2+y^2)}{(y-t)^2}$
X_5	$f_{new} = -2, \circ$	X_5	$f_{new} = \mathcal{Y} \frac{yx}{t^2-y^2}, \mathcal{Y} \frac{yt(t^2-\mathcal{Y}x^2-y^2)}{(t^2-y^2)^2}, -\mathcal{Y} \frac{yx(\Delta t^2-\mathcal{F}t^2x^2-\mathcal{F}t^2y^2-\mathcal{Y}x^2y^2-y^2)}{(t^2-y^2)^2}$
X_6	$f_{new} = \circ$	X_6	$f_{new} = \circ$
X_7	$f_{new} = -2, \frac{t(t^2-x^2-y^2)}{(t^2-x^2)}$	X_7	$f_{new} = \circ$

جدول ۸.۲: طبقه بندی جواب های غیر چند جمله ای جدید برای معادله موج (۳۳.۲)

X_i	$f_{old} = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{y^2+x^2-t^2}{x^2}}$	X_i	$f_{old} = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{y^2+t^2-x^2}{y^2}}$	X_i	$f_{old} = \arctan \sqrt{\frac{x^2+y^2-t^2}{t^2}}$
X_1	$f_{new} = \frac{y^2x}{\sqrt{t^2-x^2+y^2}(-y^2+t^2-x^2+y^2)}$	X_1	$f_{new} = \frac{xy^2}{\sqrt{t^2-x^2+y^2}(-y^2+t^2-x^2+y^2)}$	X_1	$f_{new} = \frac{xt^2}{\sqrt{-t^2+x^2+y^2}(t^2-t^2+x^2+y^2)}$
X_2	$f_{new} = \frac{yxt^2}{\sqrt{-t^2+x^2+y^2}(x^2+t^2-x^2-y^2)}$	X_2	$f_{new} = \frac{y^2t^2}{\sqrt{t^2-x^2+y^2}(-y^2+t^2-x^2+y^2)}$	X_2	$f_{new} = \frac{t^2y}{\sqrt{-t^2+x^2+y^2}(t^2-t^2+x^2+y^2)}$
X_3	$f_{new} = \frac{-tx^2}{\sqrt{-t^2+x^2+y^2}(x^2+t^2-x^2-y^2)}$	X_3	$f_{new} = -\frac{ty^2}{\sqrt{t^2-x^2+y^2}(-y^2+t^2-x^2+y^2)}$	X_3	$f_{new} = \frac{\circ}{\sqrt{-t^2+x^2+y^2}(t^2-t^2+x^2+y^2)}$
X_4	$f_{new} = \frac{\mathcal{Y}yx\sqrt{-t^2+x^2+y^2}}{(x^2+t^2-x^2-y^2)}$	X_4	$f_{new} = \mathcal{Y} \frac{xy(t^2-x^2)}{\sqrt{t^2-x^2+y^2}(-y^2+t^2-x^2+y^2)}$	X_4	$f_{new} = \circ$
X_5	$f_{new} = \frac{-\mathcal{Y}tx\sqrt{-t^2+x^2+y^2}}{(x^2+t^2-x^2-y^2)}$	X_5	$f_{new} = \circ$	X_5	$f_{new} = -\mathcal{Y} \frac{xt\sqrt{-t^2+x^2+y^2}}{t^2-t^2+x^2+y^2}$
X_6	$f_{new} = \frac{-x^2\sqrt{-t^2+x^2+y^2}}{(x^2+t^2-x^2-y^2)}$	X_6	$f_{new} = \frac{\sqrt{t^2-x^2+y^2}}{-y^2+t^2-x^2+y^2}$	X_6	$f_{new} = -\frac{t^2\sqrt{-t^2+x^2+y^2}}{t^2-t^2+x^2+y^2}$
X_7	$f_{new} = \frac{xy^2(\mathcal{Y}t^2-\mathcal{Y}x^2+y^2)}{\sqrt{t^2-x^2+y^2}(-y^2+t^2-x^2+y^2)}$	X_7	$f_{new} = \frac{xy^2(\mathcal{Y}t^2-\mathcal{Y}x^2+y^2)}{\sqrt{t^2-x^2+y^2}(-y^2+t^2-x^2+y^2)}$	X_7	$f_{new} = -\mathcal{Y} \frac{xt^2\sqrt{-t^2+x^2+y^2}}{t^2-t^2+x^2+y^2}$

فصل ۳

قوانین پایستگی

قانون پایستگی یا همان اصل بقاء در فیزیک، گزاره ایست که بیانگر ثابت ماندن یک کمیت فیزیکی مرتبط با یک سیستم مشخص در حین تحول آن سیستم می باشد. همان طور که قبلاً گفته شد چندین نوع قانون پایستگی وجود دارد از جمله یکی از آن ها قانون پایستگی انرژی است. قانون پایستگی انرژی می گوید که مقدار انرژی در یک سیستم ایزوله (منزوی) ثابت می ماند. پیامد این قانون این است، که انرژی از بین نمی رود و به وجود نمی آید و تنها از شکلی به شکل دیگر تبدیل می شود؛ مثلاً انرژی جنبشی به انرژی گرمایی تبدیل می شود. از آن جا که در نظریه نسبیت خاص انرژی و جرم به هم وابسته اند، پایستگی انرژی در حالت کلی اینطور بیان می شود که مجموع انرژی و جرم یک سیستم تک افتاده پایسته خواهد بود.

پیامد دیگر این قانون این است که ماشین در حرکت دائمی تنها هنگامی کار می کند که هیچ انرژی ای به پیرامون خود ندهد. اگر انرژی ای که دستگاه به پیرامون خود می دهد بیشتر از انرژی ای باشد که می گیرد و جرم دستگاه هم ثابت بماند، چنین دستگاهی نمی تواند برای همیشه کار کند.

از دیگر قوانین پایستگی مهم قانون پایستگی جرم می باشد. قانون پایستگی جرم یا پایستگی ماده که یکی از قوانین بنیادین فیزیک و شیمی است، بیان می کند که جرم و تعداد عناصر موجود در هر گونه شیمیایی در یک سیستم بسته (و نه در سیستم های باز و سیستم هایی که صورت های متفاوتی از ماده و انرژی به سیستم وارد شده و یا از آن خارج می شوند.) صرف نظر از فرایندهایی که در درون آن در حال وقوع است، ثابت و تغییرناپذیر

باقی می‌مانند. (این قانون در مورد واکنش‌های هسته ای صادق نیست.) این قانون امروزه با قانون پایستگی انرژی ترکیب شده و قانون پایستگی جرم و انرژی تولید می‌کند. هر چند پیش از لاووازیه^۱ افرادی از جمله حکیم مجریطی^۲ این قانون را توضیح دادند اما این نتایج تحقیقات آنتوان لاووازیه بود که با به کارگیری ترازو به شکل تجربی انقلابی در شیمی پدید آورد و تعدادی از پدیده‌های شیمیایی را از طریق این قانون توجیه کرد. این نظریه در شیمی، مکانیک و دینامیک سیالات کاربردهای فراوانی دارد.

نوع دیگر اصل بقاء قانون پایستگی بار الکتریکی است که در فیزیک، پایستگی بار قانونی است که بیان می‌دارد بار الکتریکی نه به وجود می‌آید نه از بین می‌برد. یکسان بودن مجموع بارهای کل جهان باعث می‌شود که به آن یک کمیت پایسته اطلاق شود. پایستگی بار مستقیماً به قانون‌های مداری کیرشهف می‌انجامد. اولین بار این قانون توسط فیزیک‌دان آمریکایی بنجامین فرانکلین^۳ در ۱۷۴۷ بیان شد.

در مورد پاستگی تکانه خطی، ناظرهای واقع در چارچوبهای مختلف، مقادیر متفاوتی به تکانه خطی نسبت می‌دهند، اما همه آنها با این فرض که برآیند نیروهای وارد بر دستگاه صفر است، قبول دارند که هنگام حرکت ذرات تشکیل دهنده دستگاه، مقدار تکانه خطی اندازه گیری شده در دستگاه خودشان بدون تغییر باقی می‌ماند. یکی از بارزترین کاربردهای قانون پایستگی تکانه خطی در بررسی حرکت پرتابی با فرض صفر بودن نیروی مقاومت هواست. کاربرد دیگر قانون بقای تکانه خطی در تشریح مسائل برخورد است. هنگامی که دو ذره با یکدیگر برخورد می‌کنند، چون برآیند نیروهای وارد بر سیستم صفر است، بنابراین اندازه حرکت خطی بقاء وجود خواهد داشت. البته قانون بقای اندازه حرکت خطی کاربردهای دیگری نیز دارد که در اینجا به خاطر طولانی شدن مطلب از ذکر آنها خودداری می‌کنیم.

بر خلاف تکانه خطی، تکانه زاویه ای هم به جرم دوران کننده و هم به نحوه توزیع آن اطراف جرم، وابسته است. به عبارتی قانون پایستگی تکانه زاویه ای این طور بیان می‌شود که در صورتی که گشتاوری به سیستم دورانی وارد نشود، تکانه زاویه ای آن ثابت می‌ماند.

^۱ de Antoine-Laurent Lavoisier آنتوان لوران لاووازیه (زاده ۲۶ اوت ۱۷۴۳ - اعدام ۸ مه ۱۷۹۴) دانشمند فرانسوی و بنیان‌گذار شیمی نوین بود. وی نخستین کسی بود که ترازو را جهت سنجش و تحقیق در فعل و انفعالات شیمیایی در آزمایشگاه وارد عمل کرد و تجربه و سنجش توأم با نتیجه‌گیری صحیح را پایه و اساس این علم قرار داد.

^۲ Majriti al-Maslama مسلّمه مجریطی معروف به حکیم مجریطی (درگذشته به سال ۳۹۷ ق) از فلاسفه و ریاضی دانان بزرگ تمدن اسلامی در قرن چهارم هجری (قرن نهم میلادی) بود.

^۳ Benjamin Franklin

۱.۳ معرفی و مفهوم قانون پایستگی

یک قانون پایستگی از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، یک عبارت ریاضی از قوانین فیزیکی می باشد که نقش بسیار موثری در تحلیل خواص معادلات دیفرانسیل به ویژه دست یافتن به جواب های دقیق، تحلیل وجود و یکتایی جواب ها، توسعه روش های عددی به منظور رسیدن به جواب های دقیق تر و یافتن دستگاههای وابسته غیر موضعی ایفا می کند. مدل سازی مسایل فازی و تحقیق انتگرال پذیری برای اثبات وجود، پایداری و یکتایی جواب ها، مطالعه خواصی همچون ساختار همیلتونی و عملگرهای بازگشتی به هدف کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل از دیگر کاربردهای مهم این کمیت دیفرانسیلی می باشد. علاوه بر این، بررسی کمیتهایی همچون جرم، انرژی، تکانه، تکانه زاویه ای، بار الکتریکی و ثابتهای حرکت بر عهده این قوانین فیزیکی می باشد.

روش های متفاوتی برای پیدا کردن قوانین پایستگی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از جمله روش کلاسیک گروه های لی با رویکرد استفاده از تقارن های لی وجود دارد. که می توان از یک تقارن بدست آمده از دستگاه معادلات دیفرانسیل، یک یا چند قانون پایستگی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل ساخت.

البته در این مسیر نیز از روش های متفاوتی برای رسیدن به قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل همچون روش مستقیم، روش نوتر، روش بویلر، روش ابراگیموف با کمک مفهوم خود الحاق غیر خطی، روش تقارن های وردشی و روش هرمان-پل می توان استفاده کرد که در ادامه بخش به طور مفصل هر کدام از روش ها به همراه مثال توضیح داده خواهد شد.

دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$R^\sigma[u] = R^\sigma(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) = 0, \quad \sigma = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

با n - متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^n)$ و m - متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^m)$ در نظر می گیریم.

تعریف ۱.۱.۳. یک قانون پایستگی موضعی، برای دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱.۳)، یک عبارت دیورژانسی به شکل

$$D_i \phi^i[u] = D_1 \phi^1[u] + \dots + D_n \phi^n[u] = 0. \quad (2.3)$$

می باشد که عبارت دیورژانسی (۲.۳) می بایست روی همه جوابهای دستگاه (۱.۳) صدق کند. که $\{D_i, 1 \leq i \leq n\}$ معرف مشتق کامل نسبت به متغیرهای مستقل می باشد.
در اینجا

$$\phi^i[u] = \phi^i(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u),$$

شار قوانین پایستگی است و بیشترین مرتبه مشتق که در شار $\phi^i[u]$ دیده می شود، مرتبه قانون پایستگی نامیده می شود.

تذکر ۲.۱.۳. قوانین پایستگی دستگاه معادلات دیفرانسیلی که دارای متغیر مستقل زمان t می باشد را می توان به شکل

$$D_t \psi^t[u] + \sum_{i=1}^{(n-1)} D_i \phi^i[u] = 0. \quad (3.3)$$

نوشت که $\psi^t[u]$ ، چگالی و $\phi^i[u]$ ها، شارهای قوانین پایستگی نامیده می شوند.

تعریف ۳.۱.۳. قانون پایستگی (۳.۲)، یک قانون پایستگی بدیهی نامیده می شود هرگاه بتوان هر شار $\phi^i[u]$ را به صورت $\phi^i[u] = M^i[u] + H^i[u]$ نوشت که $M^i[u]$ به عنوان جواب در معادله صدق کرده و $D_i(H^i[u]) = 0$ برقرار باشد.

تعریف ۴.۱.۳. قانون پایستگی (۳.۲)، یک قانون پایستگی غیربدیهی نامیده می شود هرگاه شاری مانند $\phi^i[u]$ وجود داشته باشد که روی جواب های دستگاه (۱.۳) صفر نشود.

تعریف ۵.۱.۳. قوانین پایستگی ϕ^1 و ϕ^2 را قوانین پایستگی هم ارز گویند، هرگاه تفاضل آن دو نیز یک قانون پایستگی باشد به عبارتی داشته باشیم $D_i(\phi^2 - \phi^1) = 0$.

تعریف ۶.۱.۳. دسته $\{\phi^1, \dots, \phi^k\}$ از قوانین پایستگی را یک دسته قوانین پایستگی هم ارز گویند هرگاه هر یک از $\phi^i[u]$ ها با یک قانون پایستگی غیر بدیهی مانند $\phi^*[u]$ دارای صورت دیورژانسی باشد، به عبارتی داشته باشیم $\{D_i(\phi^i[u] - \phi^*[u]) = 0, \quad 1 \leq i \leq k\}$. در این صورت $\{\phi^1, \dots, \phi^k\}$ را یک دسته قوانین پایستگی هم ارز می نامیم.

۲.۳ روش مستقیم محاسبه قوانین پایستگی

همان طور که در تعریف (۱.۱.۳) گفته شد قانون پایستگی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، نمایشی به فرم دیورژانسی است که روی تمام جوابهای دستگاه (۱.۳) صفر می شود. در حالت کلی هر نمایش دیورژانسی غیر بدیهی که یک قانون پایستگی موضعی از دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نتیجه دهد، از ضرایب یا همان عاملهای انتگرال که وابسته به متغیرهای مستقل، متغیرهای وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته می باشند، بدست می آید.

ثابت می شود که هر نمایش دیورژانسی، توسط عملگر اویلر- لاگرانژ صفر می شود و اگر عملگرهای اویلر- لاگرانژ، عبارتی را که شامل متغیرهای مستقل و متغیرهای وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته است را صفر کنند، آنگاه آن عبارت، یک عبارت دیورژانسی خواهد بود. لذا هر دستگاه معادلات دیفرانسیل دارای قانون پایستگی است، اگر و تنها اگر

مجموعه‌ی ای از ضرایب موجود باشند که ترکیب خطی آنها باهریک از معادلات دستگاه، توسط عملگرهای اویلر-لاگرانژ صفر شود. بنابراین مساله‌ی یافتن قوانین پایستگی دستگاه، به مساله‌ی یافتن مجموعه ضرایب، منتهی می‌شود. علاوه بر این برای هر مجموعه‌ی ای از ضرایب که باعث تولید قوانین پایستگی می‌شوند، یک فرمول انتگرالی برای محاسبه چگالی و شارهای قوانین پایستگی وجود دارد که اغلب آن‌ها، بعد از مشخص شدن ضرایب از محاسبه‌ی مستقیم بدست می‌آیند، که معمولاً از آن به عنوان روش مستقیم، برای محاسبه قوانین پایستگی یاد می‌کنند [۲، ۳، ۶، ۷، ۲۸].

تعریف ۱.۲.۳. عملگر اویلر-لاگرانژ نسبت به U^j ، عملگری به فرم

$$E_{U^j} = \frac{\partial}{\partial U^j} - D_i \frac{\partial}{\partial U^j_i} + \dots + (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial U^j_{i_1 \dots i_s}} + \dots, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

می‌باشد که عبارت دیورژانسی $D_i \phi^i[U]$ را صفر می‌کند. به طور کلی رابطه

$$E_{U^j} (D_i \phi^i(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u)) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5.3)$$

برای هر $U(x)$ دلخواهی برقرار می‌باشد.

قضیه ۲.۲.۳. روابط

$$E_{U^j} F(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، اگر و تنها اگر هم ارزی دیورژانسی

$$F(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U) \equiv D_i \psi^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^{s-1} U),$$

برای توابع $\psi^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^{s-1} U)$ ، $i = 1, \dots, n$ برقرار باشند.

اثبات در مرجع [۷] آمده است.

قضیه ۳.۲.۳. مجموعه‌ی ای از ضرایب موضعی

$$\Lambda_\sigma[U]_{\sigma=1}^N = \Lambda_\sigma(x, U, \partial U, \dots, \partial^l U)_{\sigma=1}^N, \quad (6.3)$$

با مرتبه دلخواه l ، یک قانون پایستگی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) نتیجه می‌دهد، اگر و تنها اگر رابطه

$$E_{U^j} [(\Lambda_\sigma(x, U, \partial U, \dots, \partial^l U)) R^\sigma(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u)] \equiv 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (7.3)$$

برای هر تابع دلخواه $U(x)$ ، برقرار باشد.

معادلات بدست آمده از (۷.۳) یک دسته از معادلات مشخصه خطی هستند، که از حل

آن‌ها می‌توان به مجموعه‌ی تمام ضرایب (۶.۳) دست یافت.

اثبات در مرجع [۷] آمده است.

از دو قضیه ای که در بالا آورده شد می توان نتیجه گرفت مجموعه ی ضرایب (۶.۳) در رابطه $\Lambda_\sigma[U]R^\sigma[U] \equiv D_i\phi^i[U]$ برای هر تابع دلخواه $U(x)$ ، صدق می کند. در واقع با برابر قراردادن ترکیب خطی ضرایب (۶.۳) و دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳)، با عبارت دیورژانسی $D_i\phi^i[U]$ می توان قوانین پایستگی را محاسبه کرد.

تعریف ۴.۲.۳. تابع یک متغیره $f(x)$ در نقطه x تکین است هر گاه مشتق آن در نقطه x صفر شود. اما از آنجایی که در ضرایب $\Lambda_\sigma[U]$ مشتقات چند متغیره به کار گرفته شده است با مبحث ژاکوبین مواجه هستیم. بنابراین ضرایب Λ_σ تکین هستند هر گاه ماتریس ژاکوبین آن ها در نقطه جواب $U(x) = u(x)$ از دستگاه (۱.۳) صفر شود.

با توجه به تعاریف و قضایای آورده شده، مسیر رسیدن به قوانین پایستگی از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را می توان در چند مرحله خلاصه کرد:

- مجموعه ضرایب $\Lambda_\sigma(x, U, \partial U, \dots, \partial^l U)_{\sigma=1}^N$ با مرتبه دلخواه l را برای دستگاه معادله دیفرانسیل $R\{x; u\}$ از مرتبه k در نظر می گیریم، به طوری که تعداد این مجموعه ضرایب برابر با تعداد معادلات دستگاه و انتخاب مرتبه آن مستقل از مرتبه دستگاه می باشد.
- با حل معادلات مشخصه (۷.۳)، ضرایب $\Lambda_\sigma[U]$ برای توابع دلخواه $U(x)$ بدست می آیند.
- با استفاده از ضرایب تابعی پیدا شده و اتحاد

$$\Lambda_\sigma(x, U, \partial U, \dots, \partial^l U)R^\sigma(x, U, \partial U, \dots, \partial^k U) \equiv D_i\phi^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^r U). \quad (۸.۳)$$

شارهای $\phi^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^r U)$ محاسبه می شوند.

- هر مجموعه از شارها ی $\phi^i[U]$ به همراه ضرایب شان، یک قانون پایستگی به شکل $D_i\phi^i(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u) = 0$ را معرفی می کنند که برای تمام جواب های $u(x)$ از دستگاه $R\{x; u\}$ صادق می باشد.

مثال ۵.۲.۳. معادله موج $(۳ + ۱)$ - بعدی

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, \quad (۹.۳)$$

با ضرایب تابعی مرتبه اول

$$\Lambda = \Lambda(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t),$$

و عملگر اویلر- لاگرانژ به فرم

$$E_u = \frac{\partial}{\partial u} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} - D_y \frac{\partial}{\partial u_y} - D_z \frac{\partial}{\partial u_z} - D_t \frac{\partial}{\partial u_t}$$

$$+ D_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + D_{zz} \frac{\partial}{\partial u_{zz}} + D_{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \quad (10.3)$$

را در نظر می‌گیریم [۲۷، ۵۲].

با حل معادلات مشخصه بدست آمده از اتحاد

$$E_u [\Lambda(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t)(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz})] \equiv 0, \quad (11.3)$$

به کمک نرم افزارهای میپل و متمتیکا، ضرایب تابعی مرتبه اول عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= u_t, & \Lambda_2 &= u_x, \\ \Lambda_3 &= u_y, & \Lambda_4 &= u_z, \\ \Lambda_5 &= tu_x + xu_t, & \Lambda_6 &= tu_y + yu_t, \\ \Lambda_7 &= -xu_y + yu_x, & \Lambda_8 &= tu_z + zu_t, \\ \Lambda_9 &= u_x \left(\frac{y^2 + z^2 - t^2 - x^2}{\sqrt{\quad}} \right) - x(tu_t + yu_y + zu_z + u), \\ \Lambda_{10} &= u_z \left(\frac{t^2 + z^2 - y^2 - x^2}{\sqrt{\quad}} \right) + z(tu_t + yu_y + zu_z + u), \\ \Lambda_{11} &= u_y \left(\frac{y^2 + t^2 - z^2 - x^2}{\sqrt{\quad}} \right) + y(tu_t + yu_y + zu_z + u), \\ \Lambda_{12} &= u_t \left(\frac{y^2 + z^2 + t^2 + x^2}{\sqrt{\quad}} \right) + t(tu_t + yu_y + zu_z + u). \end{aligned} \quad (12.3)$$

با استفاده از اتحاد (۸.۳)، چگالی و شارهای متناظر با هر یک از ضرایب تابعی بدست آمده در (۱۲.۳)، محاسبه می‌شوند.
با فرض

$$A = \frac{1}{\sqrt{\quad}} (u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \quad B = \frac{1}{\sqrt{\quad}} (u_y^2 + u_z^2 - u_x^2 - u_t^2)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\quad}} (u_x^2 + u_z^2 - u_y^2 - u_t^2) \quad D = \frac{1}{\sqrt{\quad}} (u_y^2 + u_x^2 - u_z^2 - u_t^2)$$

نتایج مورد نظر در جدول (۱.۳) آورده شده است.

جدول ۱.۳: چگالی و شارهای قوانین پایستگی در روش مستقیم

$\Lambda_{(i)}$	$\phi^z[u]$	$\phi^y[u]$	$\phi^x[u]$	$\psi^t[u]$
$\Lambda_{(1)}$	$-u_z u_t$	$-u_y u_t$	$-u_x u_t$	A
$\Lambda_{(2)}$	$-u_z u_x$	$-u_y u_x$	B	$u_x u_t$
$\Lambda_{(3)}$	$-u_z u_y$	C	$-u_x u_y$	$u_y u_t$
$\Lambda_{(4)}$	D	$-u_y u_z$	$-u_x u_z$	$u_z u_t$
$\Lambda_{(5)}$	$-u_z (tu_x + xu_t)$	$-u_y (tu_x + xu_t)$	$-xu_x u_t - xB$	$tu_x u_t + xA$
$\Lambda_{(6)}$	$-u_z (tu_y + yu_t)$	$-yu_y u_t + tC$	$-u_x (tu_y + yu_t)$	$tu_y u_t + yA$
$\Lambda_{(7)}$	$-u_z (yu_x - xu_y)$	$-yu_y u_x - xC$	$xu_x u_y + yB$	$u_t (yu_x - xu_y)$
$\Lambda_{(8)}$	$-zu_z u_t + tD$	$-u_y (tu_z + zu_t)$	$-u_x (tu_z + zu_t)$	$tu_z u_t + zA$

مثال ۶.۲.۳. در این مثال قوانین پایستگی معادله (۳۴.۲) را به روش مستقیم محاسبه می کنیم.

معادله (۳۴.۲) با عملگر اویلر لاگرانژ

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} - D_t \frac{\partial}{\partial u_t} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots - D_x^\Delta \frac{\partial}{\partial u_{xxxxx}}. \quad (13.3)$$

دارای معادله مشخصه ای به فرم

$$\Lambda_t + \Lambda_{xxxxx} + \mathcal{L}^0 u \Lambda_x + \mathcal{L} \Lambda_u u_{xxxxx} + \dots + \mathcal{L}^0 u \Lambda_u u_{xxx} + \mathcal{L} \Lambda_u u_x u_{xx} = 0. \quad (14.3)$$

است که از حل دستگاه

$$\frac{\delta}{\delta u} (\Lambda(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}) \Delta) \equiv 0, \quad (15.3)$$

بدست آمده است.

قوانین پایستگی برای معادله مرتبه ۵ (۱۰۴.۵)، عبارتند از [۲۶]:

$$\begin{aligned}
 &D_x(-u_{xt} - u_t) + D_t(u_{xx} + u_x) = \circ, \\
 &D_x\left(-x - u_{xxxx} - \overset{15}{\underset{\circ}{\vee}}uu_{xx} - \frac{\overset{15}{\underset{\circ}{\vee}}}{\underset{\circ}{\vee}}u_x^2 - \frac{\overset{20}{\underset{\circ}{\vee}}}{\underset{\circ}{\vee}}u^3\right) + D_t(t + u) = \circ, \\
 &D_x(-u_{tttt} - u_{xtt} - tu_{xtt} + u_{ttt} - xu_{xtt}) + D_t(u_{xtt} + tu_{xtt} + xu_{xtt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xxx}u_{tttt} - u_{ttt}u_{xxx} - u_{xtt}) + D_t(u_{xtt} + xu_{xxx}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xxx}u_{tttt} - u_{ttt}u_{xxx}) + D_t(u_{xxx}u_{xtt} + u_{ttt}u_{xxx}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xxx}u_{xtt} - u_{xtt}u_{xxx}) + D_t(u_{xxx}u_{xtt} + u_{xtt}u_{xxx}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xtt}u_{xxx} - u_{xxx}u_{xtt}) + D_t(u_{xxx}u_{xtt} + u_{xtt}u_{xxx} + u_{xxx}u_{xxx}) = \circ, \\
 &D_x(-u_xu_{xxx} + u_{xx}u_{xt} - u_{xt}u_{xxx}) + D_t(u_xu_{xxx}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xxx} - tu_{xxx} + u_{xt} - xu_{xxx}) + D_t(tu_{xxx} + xu_{xxx}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{ttt}^{\vee} - u_{tt}u_{ttt}) + D_t(u_{tt}u_{xtt} + u_{xtt}u_{tt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xt}u_{tttt} - u_{xtt}u_{ttt} - u_{xxt}) + D_t(u_{xt}u_{xtt} + u_{xxt}u_{ttt} + u_{xxx}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xx}u_{tttt} - u_{xxt}u_{ttt}) + D_t(u_{xx}u_{xtt} + u_{xxx}u_{ttt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_tu_{tttt} - u_{tt}u_{ttt}) + D_t(u_tu_{xtt} + u_{xt}u_{ttt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_xu_{tttt} - u_{xt}u_{ttt}) + D_t(u_xu_{xtt} + u_{xx}u_{ttt}) = \circ, \\
 &D_x(-uu_{tttt} - u_tu_{ttt}) + D_t(uu_{xtt} + u_xu_{ttt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_xu_{xtt} - u_{xt}u_{xtt}) + D_t(u_x^{\vee} + u_{tt}u_{xtt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xt}u_{xtt} - u_{xtt}^{\vee}) + D_t(u_{xt}u_{xtt} + u_{xxt}u_{xtt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xx}u_{xtt} - u_{xxt}u_{xtt}) + D_t(u_{xx}u_{xtt} + u_{xxx}u_{xtt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_xu_{xtt} - u_{xt}u_{xtt}) + D_t(u_xu_{xtt} + u_{xx}u_{xtt}) = \circ, \\
 &D_x(-uu_{xtt} - u_tu_{xtt}) + D_t(uu_{xtt} + u_xu_{xtt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_t^{\vee} - u_{tt} - tu_{ttt} - xu_{ttt}) + D_t(tu_{xtt} + tu_{xtt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xt}u_{xtt} - u_{xxt}u_{xtt}) + D_t(u_{xt}u_{xxx} + u_{xxt}^{\vee}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xx}u_{xtt} - u_{xxt}^{\vee}) + D_t(u_{xx}u_{xtt} + u_{xxx}u_{xtt}) = \circ, \\
 &D_x(u_tu_{xtt} - u_{xt}u_{ttt}) + D_t(-u_tu_{xtt} + u_{tt}u_{xtt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xtt} - u_{xt}u_{xtt}) + D_t(u_{xxt} + u_{xt}u_{xxt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_xu_{xtt} - u_{xt}u_{xxt}) + D_t(u_xu_{xxx} + u_{xx}u_{xxt}) = \circ, \\
 &D_x(-u_{xxt} - u_tu_{xxt}) + D_t(uu_{xxx} + u_xu_{xxt}) = \circ, \\
 &D_x(u_{tt} - xu_{xtt} - u_{xt} - tu_{xtt}) + D_t(tu_{xxt} + xu_{xxt}) = \circ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_x(-uu_{xxx} - u_t u_{xxx}) + D_t(uu_{xxx} + u_x u_{xxx}) = \circ, \\
& D_x(-uu_{xxt} + u_x u_{xt} - u_t u_{xx}) + D_t(uu_{xxx}) = \circ, \\
& D_x(-xu_{xxt} + u_{xt} - u_{xx} - tu_{xxt}) + D_t(xu_{xxx} + tu_{xxx}) = \circ, \\
& D_x(-u_t u_{ttt} - u_{tt}^{\checkmark}) + D_t(u_t u_{xtt} + u_{xt} u_{tt}) = \circ, \\
& D_x(uu_{xttt} - u_x u_{ttt} + u_t u_{xtt} - u_{xt} u_{tt}) + D_t(-uu_{xxtt} + u_{xx} u_{tt}) = \circ, \\
& D_x(-uu_{ttt} - u_t u_{tt}) + D_t(uu_{xtt} + u_x u_{tt}) = \circ, \\
& D_x(-u_t u_{xtt} - u_{xt} u_{tt}) + D_t(u_t u_{xxt} + u_{xt}^{\checkmark}) = \circ, \\
& D_x(uu_{xxtt} - u_x u_{xtt} + u_t u_{xxt} - u_{xt}^{\checkmark}) + D_t(-uu_{xxx} + u_{xx} u_{xt}) = \circ, \\
& D_x(-uu_{xtt} - u_t u_{xt} - u_t u_{tt}) + D_t(uu_{xxt} + u_x u_{xt} + u_t u_{xt}) = \circ, \\
& D_x(-xu_{tt} - u_t - tu_{tt}) + D_t(u_t + xu_t + tu_{xt}) = \circ, \\
& D_x(uu_{xtt} - u_x u_{tt} - u_{xxt}) + D_t(-uu_{xxt} + u_t u_{xx} + u_{xxx}) = \circ, \\
& D_x(uu_{xxx} - u_x u_{xxt} + u_t u_{xxx} - uxXu_{xt}) + D_t(-uu_{xxx} + u_{xx}^{\checkmark}) = \circ, \\
& D_x(uu_{xtt} - u_x u_{tt} - tu_{xt} - u_x - xu_{xt} + u_t) \\
& \quad + D_t(tu_{xx} + xu_{xx} - uu_{xxt} + u_t u_{xx}) = \circ, \\
& D_x(-uu_{xt} - u_x u_t - uu_{tt} - uu_{tt}) + D_t(uu_{xx} + u_x^{\checkmark} + uu_{xt} + u_x u_t) = \circ, \\
& D_x(-uu_t - u - tu_t - u_{xtt}) + D_t(uu_x + tu_x + u_{xtt}) = \circ, \\
& D_x\left(\frac{2}{3}u^{\circ}u^{\checkmark} + 1^{\circ}uu_{xx} + \frac{15}{2}u_x^{\checkmark} - xu_t + u_{xxx} - u_{tt} - 2xt\right) \\
& \quad + D_t(xu_x + u_{xt} + t^{\checkmark}) = \circ.
\end{aligned}$$

۳.۳ محاسبه‌ی قوانین پایستگی با استفاده از روش نوتر

در سال ۱۹۱۸ امی - نوتر، الگوریتم خود را برای یافتن قوانین پایستگی موضعی از یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی که اصل تغییراتی را می پذیرند، ارائه نمود [۶۸]. وقتی که دستگاه معادلات دیفرانسیل اصل تغییراتی را می پذیرد، آنگاه اکستریم‌های اصل تغییر، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به نام دستگاه معادلات اوایلر- لاگرانژ را نتیجه می دهند. در این حالت، نوتر نشان داد که اگر یک تقارن نقطه‌ای، از اصل تغییر موجود باشد، آنگاه شارهای قوانین پایستگی موضعی، توسط فرمولی صریح که شامل بینهایت کوچک‌هایی از تقارن نقطه‌ای و لاگرانژی اصل تغییرات می باشد، بدست می آیند. البته در قضیه نوتر محدودیت‌هایی از جمله وجود لاگرانژی غیر فرمال برای معادله دیفرانسیل نیز وجود دارد، که برای اطلاع از جزئیات

بیشتر، می‌توانید به مراجع [۷] و [۷۲] مراجعه کنید.

۱.۳.۳ خود الحاقی دستگاه معادلات دیفرانسیل

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱.۳) و توابع دلخواه $U(x) = (U^1(x), \dots, U^m(x))$ را در نظر بگیرید. عملگر خطی سازی $\mathcal{L}[U]$ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) به صورت

$$\mathcal{L}_\rho^\sigma[U]V^\rho = \left[\frac{\partial R^\sigma[U]}{\partial U^\rho} + \frac{\partial R^\sigma[U]}{\partial U_i^\rho} D_i + \dots + \frac{\partial R^\sigma[U]}{\partial U_{i_1 \dots i_k}^\rho} D_{i_1} \dots D_{i_k} \right] V^\rho, \quad \sigma = 1, \dots, N, \quad (16.3)$$

می‌باشد که $V(x) = (V^1(x), \dots, V^m(x))$ توابع دلخواه هستند، همچنین عملگر الحاقی $\mathcal{L}^*[U]$ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) با انتگرال گیری جزء به جزء به شکل

$$\mathcal{L}^{*\sigma}[U]W_\sigma = \frac{\partial R^\sigma[U]}{\partial U^\rho} W_\sigma - D_i \left(\frac{\partial R^\sigma[U]}{\partial U_i^\rho} W_\sigma \right) + \dots + (-1)^k D_{i_1} \dots D_{i_k} \left(\frac{\partial R^\sigma[U]}{\partial U_{i_1 \dots i_k}^\rho} W_\sigma \right), \quad \varphi = 1, \dots, m, \quad (17.3)$$

بدست می‌آید که $W(x) = (W_1(x), \dots, W_N(x))$ توابع دلخواه می‌باشند. روابط (۱۶.۳) و (۱۷.۳) در عبارت دیورژانسی

$$W_\sigma \mathcal{L}_\rho^\sigma[U]V^\rho - V^\rho \mathcal{L}_\rho^{*\sigma}[U]W_\sigma \equiv D_i \Psi^i[U], \quad (18.3)$$

با

$$\Psi^i[U] = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{k-p-1} (-1)^q (D_{i_1} \dots D_{i_p} V^\rho) \times D_{j_1} \dots D_{j_q} \left(W_\sigma \frac{\partial R^\sigma[U]}{\partial U_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p}^\rho} \right). \quad (19.3)$$

صدق می‌کنند. که مرتبه معادله دیفرانسیل، i و $i_1 \dots i_p$ و $j_1 \dots j_q$ ترکیبی از اندیس‌های چندگانه مرتب به صورت $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q \leq i \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n$ می‌باشند.

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنید $\mathcal{L}[U]$ با مولفه‌های $\mathcal{L}_\rho^\sigma[U]$ که در رابطه (۱۶.۳) داده شده است، یک عملگر خطی سازی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳) و $\mathcal{L}^*[U]$ عملگر الحاقی برای عملگر خطی سازی $\mathcal{L}[U]$ با مولفه‌های $\mathcal{L}_\rho^{*\sigma}[U]$ مفروض باشند، در این صورت $\mathcal{L}[U]$ یک عملگر خود الحاق نامیده می‌شود هر گاه $\mathcal{L}[U] = \mathcal{L}^*[U]$ داشته باشیم یا به عبارتی

$$\mathcal{L}_\rho^\sigma[U] = \mathcal{L}_\rho^{*\sigma}[U], \quad \sigma, \rho = 1, \dots, m.$$

۲.۳.۳ معادلات اوایلر- لاگرانژی

تابع $\mathcal{J}[U]$ با n - متغیر مستقل، m - تابع دلخواه $U = (U^1(x), \dots, U^m(x))$ و مشتق‌هایشان تا مرتبه k که روی دامنه Ω تعریف شده اند به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{J}[U] = \int_{\Omega} \mathcal{L}[U] dx = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x, U, \partial U, \dots, \partial^k[U]) dx. \quad (۲۰.۳)$$

تابع $\mathcal{L}[U] = \mathcal{L}(x, U, \partial U, \dots, \partial^k U)$ را لاگرانژی و تابع $\mathcal{J}[U]$ را اصل تغییر می‌نامند. تغییر بینهایت کوچک از U به شکل $U(x) \rightarrow U(x) + \varepsilon v(x)$ ، که تابعی است دلخواه و خودش و مشتقاتش تا مرتبه $k-1$ روی مرز $\partial\Omega$ از دامنه Ω صفر می‌شوند، در نظر بگیرید. تغییر متناظر در لاگرانژی به صورت

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(x, U + \varepsilon v, \partial U + \varepsilon \partial v, \dots, \partial^k[U] + \varepsilon \partial^k v) - \mathcal{L}(x, U, \partial U, \dots, \partial^k[U]) \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{L}[U]}{\partial U^\sigma} v^\sigma + \partial U_j^\sigma v_j^\sigma + \dots + \partial U_{j_1 \dots j_k}^\sigma v_{j_1 \dots j_k}^\sigma \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (۲۱.۳)$$

می‌باشد. با انتگرال گیری جزیه‌جزیه، می‌توان نشان داد

$$\delta \mathcal{L} = \varepsilon (v^\sigma E_{U^\sigma}(\mathcal{L}[U]) + D_i W^i[U, v]) + O(\varepsilon^2), \quad (۲۲.۳)$$

که E_{U^σ} عملگر اوایلر نسبت به U^σ عبارتست از

$$E_{U^\sigma} = \frac{\partial}{\partial U^\sigma} - D_i \frac{\partial}{\partial U_i^\sigma} + \dots + (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial U_{i_1 \dots i_s}^\sigma} + \dots, \quad \sigma = 1, \dots, m. \quad (۲۳.۳)$$

و داریم

$$\begin{aligned} W^i[U, v] &= v^\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}[U]}{\partial U_i^\sigma} + \dots + (-1)^{(k-1)} D_{j_1} \dots D_{j_{k-1}} \frac{\partial \mathcal{L}[U]}{\partial U_{i j_1 \dots j_{k-1}}^\sigma} \right) \\ &+ v_{i j_1}^\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}[U]}{\partial U_{i j_1}^\sigma} + \dots + (-1)^{(k-2)} D_{j_2} \dots D_{j_{k-1}} \frac{\partial \mathcal{L}[U]}{\partial U_{i j_1 \dots j_{k-1}}^\sigma} \right) \\ &+ \dots + v_{j_1 \dots j_{k-1}}^\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}[U]}{\partial U_{j_1 \dots j_{k-1}}^\sigma} \right). \end{aligned} \quad (۲۴.۳)$$

بنا به نمایش (۲۲.۳) و قضیه دیورژانس، تغییر متناظر در $\mathcal{J}[U]$ به صورت

$$\begin{aligned} \delta J &= J[U + \varepsilon v] - J[U] \\ &= \int_{\Omega} \delta \mathcal{L} dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} (v^\sigma E_{U^\sigma}(\mathcal{L}[U]) + D_i W^i[U, v]) dx + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \left(\int_{\Omega} v^\sigma E_{U^\sigma}(\mathcal{L}[U]) dx + \int_{\partial\Omega} W^i[U, v] n^i ds \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (۲۵.۳)$$

می‌باشد که $\int_{\partial\Omega}$ بیانگر انتگرال سطح روی مرز $\partial\Omega$ از دامنه Ω با $n = (n^1, \dots, n^n)$ بردار نرمال برون سوی یکه است. بنابراین، اگر $U = u(x)$ اکستریم $\mathcal{J}[U]$ باشد، آنگاه جمله $O(\varepsilon^2)$ از δJ می‌بایست صفر شود، لذا

$$\int_{\Omega} v^\sigma E_{u^\sigma}(\mathcal{L}[U]) dx = 0,$$

برای هر $v(x)$ دلخواه تعریف شده روی دامنه Ω ، برقرار است. بنابراین، اگر $U = u(x)$ اکستریم $\mathcal{J}[U]$ باشد، آنگاه $u(x)$ باید در دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$E_{u^\sigma}(\mathcal{L}[U]) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}[U]}{\partial U^\sigma} + \dots + (-1)^{(k)} D_{j_1} \dots D_{j_k} \frac{\partial \mathcal{L}[U]}{\partial U_{j_1 \dots j_k}^\sigma} \right) = 0, \sigma = 1, \dots, m. \quad (26.3)$$

صدق کند. معادلات (26.3) را، معادلات اویلر-لاگرانژ می‌نامند؛ که اکستریم $U = u(x)$ از اصل تغییر $\mathcal{J}[U]$ در این معادلات صادق است. لذا قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه 2.3.3. اگر تابع هموار $U(x) = u(x)$ ، اکستریم اصل تغییر

$$\mathcal{J}[U] = \int_{\Omega} \mathcal{L}[U] dx,$$

با لاگرانژی $\mathcal{L}[U] = \mathcal{L}(x, U, \partial U, \dots, \partial^k U)$ باشد، آنگاه $u(x)$ در معادلات اویلر-لاگرانژ (26.3) صدق می‌کند. اثبات در [7].

3.3.3 الگوریتم نوتر از قضیه‌ی نوتر

در این بخش به بیان الگوریتم نوتر از قضیه‌ی نوتر خواهیم پرداخت. در این الگوریتم، لازم است که اصل تغییر $\mathcal{J}[U]$ تحت گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x, U) + O(\varepsilon^2), & i &= 1, \dots, n, \\ \tilde{U}^\alpha &= U^\alpha + \varepsilon \eta^\alpha(x, U) + O(\varepsilon^2), & \alpha &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (27.3)$$

بامولد بی‌نهایت کوچک

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(x, U) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \eta^\alpha(x, U) \frac{\partial}{\partial U^\alpha}, \quad (28.3)$$

ناوردا باشد. این ناوردایی تنها زمانی برقرار است، که رابطه

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mathcal{L}[\tilde{U}] d\tilde{x} = \int_{\Omega} \mathcal{L}[U] dx,$$

برقرار باشد. در اینجا $\tilde{\Omega}$ تصویر Ω تحت تبدیلات نقطه‌ای (27.3) می‌باشد.

از آنجایی که (27.3) یک گروه لی از تبدیلات است لذا رابطه $\mathcal{L}[\tilde{U}] = e^\varepsilon X^{(k)} \mathcal{L}[U]$ جملاتی از امتداد مرتبه k - ام مولد بینهایت کوچک (28.3) دارد بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در الگوریتم نوتر، گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (27.3)، یک تقارن نقطه‌ای برای $\mathcal{J}[U]$ خواهد بود اگر و تنها اگر رابطه

$$\int_{\Omega} (J e^{\varepsilon X^{(k)}} - 1) \mathcal{L}[U] dx = \varepsilon \int_{\Omega} \left(\mathcal{L}[U] D_i \xi^i(x, U) + X^{(k)} \mathcal{L}[U] \right) dx + O(\varepsilon^2), \quad (29.3)$$

برای هر $U(x)$ ، برقرار باشد. که ژاکوبین تبدیلات نقطه ای (۲۷.۳) به فرم

$$J = \det(D_i \tilde{x}^j) = 1 + \varepsilon D_i \xi^i(x, U) + \varepsilon^2$$

با $d\tilde{x} = Jdx$ می باشد.

به بیان دیگر اگر تغییراتی $\mathcal{J}[U]$ ، دارای تقارن نقطه‌ای (۲۷.۳) باشد، آنگاه جمله $O(\varepsilon^2)$ در رابطه (۲۹.۳)، صفرخواهد شد. و اتحاد

$$\mathcal{L}[U] D_i \xi^i(x, U) + X^{(k)} \mathcal{L}[U] \equiv 0. \quad (30.3)$$

برقرار است.

همچنین از آنجاییکه که گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۷.۳)، با خانواده‌ای از تبدیلات موضعی به فرم

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= x^i, & i &= 1, \dots, n, \\ \tilde{U}^\alpha &= U^\alpha + \varepsilon [\eta^\alpha(x, U) - U_i^\alpha \xi^i(x, U)] + O(\varepsilon^2), & \alpha &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (31.3)$$

معادل است، مولد بی‌نهایت کوچک امتداد یافته مرتبه k - ام متناظرش، $(\tilde{X}^{(k)})$ ، که توسط رابطه

$$\tilde{X} = \sum_{\alpha=1}^q \left[\eta^\alpha(x, U) - \sum_{i=1}^p u_i^\alpha \xi^i(x, U) \right] \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

توصیف می شود، بیان خواهد شد.

تحت تبدیل (۳۱.۳)، تغییر بینهایت کوچک

$$U(x) \rightarrow U(x) + \varepsilon v(x),$$

دارای مولفه های

$$v^\alpha(x) = \tilde{\eta}^\alpha[U] = \eta^\alpha(x, U) - U_i^\alpha \xi^i(x, U),$$

که جملاتی از تبدیل (۳۱.۳) هستند، می باشد. علاوه بر این، بنا به خواص گروهی (۳۱.۳)، روابط

$$\delta \mathcal{L} = \varepsilon \tilde{X}^{(k)} \mathcal{L}[U] + O(\varepsilon^2), \quad (32.3)$$

و

$$\int_{\Omega} \delta \mathcal{L} dx = \varepsilon \int_{\Omega} \tilde{X}^{(k)} \mathcal{L} dx + O(\varepsilon^2). \quad (33.3)$$

بدست می آیند. بعد از مقایسه (۳۳.۳) و (۲۵.۳) با مولد

$$v^\alpha(x) = \tilde{\eta}^\alpha[U] = \eta^\alpha(x, U) - U_i^\alpha \xi^i(x, U),$$

مولد تعمیم یافته

$$\tilde{X}^{(k)} \mathcal{L}[U] \equiv \tilde{\eta}^\alpha[U] E_{U^\alpha}(\mathcal{L}[U]) + D_i W^i[U, \tilde{\eta}^\alpha[U]]. \quad (34.3)$$

نتیجه می‌شود، که $W^i[U, \tilde{\eta}^\alpha[U]]$ در رابطه (۲۴.۳) تعریف شده است.

لم ۳.۳.۳. فرض کنید $X^{(k)}$ امتداد مرتبه k - ام مولد بینهایت کوچک از گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۷.۳) باشد، و $\tilde{X}^{(k)}$ نیز امتداد مرتبه k - ام مولد بینهایت کوچک از خانواده تبدیلات یک پارامتری معادل (۳۱.۳) باشد. حال اگر

$$F(U) = (x, U, \partial U, \dots, \partial^k(U)),$$

تابع دلخواهی باشد، آنگاه اتحاد

$$\tilde{X}^{(k)} F[U] + F[U] D_i \xi^i(x, U) \equiv \tilde{X}^{(k)} F[U] D_i (F[U] \xi^i(x, U)). \quad (35.3)$$

برقرار است. اثبات در مرجع [۷] اشاره شده است.

قضیه ۴.۳.۳. (قضیه‌ی نوتر) فرض کنیم یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱.۳) از اصل تغییراتی نتیجه شده باشد، به عبارتی دستگاه مفروض مجموعه‌ای از معادلات اویلر-لاگرانژ (۲۶.۳) باشد، که جوابهای $u(x)$ اکستریم $U(x) = u(x)$ از اصل تغییراتی $\mathcal{J}[U]$ با لاگرانژی $\mathcal{L}[U]$ باشند. فرض کنید گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۷.۳)، تقارن نقطه‌ای برای $\mathcal{J}[U]$ و $W^1[U, u]$ برای توابع دلخواه $U(x)$ و $v(x)$ توسط رابطه (۲۴.۳) تعریف شده باشد. در این صورت

• اتحاد

$$\tilde{\eta}^\alpha[U] E_{U^\alpha}(\mathcal{L}[U]) \equiv -D_i (\xi^i(x, U) \mathcal{L}[U] + W^i[U, \tilde{\eta}^\alpha[U]]), \quad (36.3)$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، یعنی، $\{\tilde{\eta}^\alpha[U]\}_{\alpha=1}^m$ مجموعه‌ای از ضرایب تابعی برای دستگاه اویلر-لاگرانژ (۲۶.۳) می‌باشند.

• قانون پایستگی موضعی

$$D_i (\xi^i(x, U) \mathcal{L}[U] + W^i[U, \tilde{\eta}^\alpha[U]]) = 0. \quad (37.3)$$

برای هر جواب $u = \Theta(x)$ از دستگاه اویلر-لاگرانژ (۲۶.۳) برقرار است. اثبات: به [۷] مراجعه شود.

تذکر ۵.۳.۳. اگر در الگوریتم نوتر اتحاد

$$\tilde{X}^{(k)} \mathcal{L}[U] + D_i (\mathcal{L}[U] \xi^i(x, u)) \equiv 0, \quad (38.3)$$

برقرار باشد در این صورت قوانین پایستگی دستگاه معادلات دیفرانسیل از رابطه

$$C^i = \mathcal{L}[U]\xi^i(x, u) + W^i[U, \tilde{\eta}[U]], \quad (39.3)$$

بدست می آیند و اگر اتحاد لاگرانژی و مشخصه در یک عبارت دیورژانسی هم چون

$$\tilde{X}^{(k)}\mathcal{L}[U] + D_i(\mathcal{L}[U]\xi^i(x, u)) \equiv D_i(B_i), \quad (40.3)$$

صدق کنند، آنگاه:

$$C^i = \mathcal{L}[U]\xi^i(x, u) + W^i[U, \tilde{\eta}[U]] - B_i. \quad (41.3)$$

قوانین پایستگی دستگاه معادلات دیفرانسیل را می سازند، در غیر این صورت قوانین پایستگی با روش نوتر قابل محاسبه نخواهند بود.

مثال ۶.۳.۳. معادله موج $(3+1)$ - بعدی (۹.۳)، با لاگرانژی $\mathcal{L}[U] = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2)$ را در نظر بگیرید.

تقارن تکاملی مولد بی نهایت کوچک $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ، مولدی به شکل

$$\tilde{X}_1 = -u_x \frac{\partial}{\partial u},$$

خواهد بود [۲۷].

امتداد مرتبه اول تقارن تکاملی \tilde{X}_1 نیز به صورت

$$\tilde{X}_1^{(1)} = -u_x \frac{\partial}{\partial u} - u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} - u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y} - u_{xz} \frac{\partial}{\partial u_z} - u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t}. \quad (42.3)$$

می باشد.

با اثر امتداد $\tilde{X}_1^{(1)}$ ، بر روی لاگرانژی $\mathcal{L}[U]$ ، عبارت دیورژانسی طرف دوم

$$\tilde{X}_1^{(1)}\mathcal{L}[U] = -D_x \left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2}{2} \right).$$

به راحتی قابل محاسبه خواهد بود. بنابراین با استفاده از قضیه نوتر توانستیم چگالی ψ^t و شارهای ϕ^x, ϕ^y, ϕ^z را به شکل

$$\psi^t = u_x u_t, \quad \phi^x = \frac{u_z^2 + u_y^2 + u_x^2 - u_t^2}{2}, \quad \phi^y = -u_x u_y, \quad \phi^z = -u_x u_z.$$

بدست آوریم. سایر چگالی و شارهای متناظر با تقارن ها در جدول (۲.۳) آورده شده است.

در این جدول عبارت های A, B, C, D, E و F عبارتند از:

$$A = (xu_x + yu_y + zu_z + tu_t),$$

جدول ۲.۳: قوانین پایستگی محاسبه شده با استفاده از روش نوتر

X_i	$\phi^z[u]$	$\phi^y[u]$	$\phi^x[u]$	$\psi^t[u]$
X_1	$-u_x u_z t$	$-u_x u_y$	B	$u_x u_t$
X_2	$-u_y u_z$	B	$-u_x u_y$	$-u_y u_t$
X_3	B	$-u_y u_z$	$-u_x u_z$	$-u_z u_t$
X_4	$-u_z u_t$	$-u_y u_t$	$-u_x u_t$	B
X_5	$u_z(yu_z - zu_y) - yB$	$u_y(yu_z - zu_y) + zB$	$u_x(yu_z - zu_y)$	$-u_t(yu_z - zu_y)$
X_6	$-u_z(tu_y + yu_t)$	$-u_y(tu_y + yu_t) + tB$	$-u_x(tu_y + yu_t)$	$u_t(tu_y + yu_t) + yB$
X_7	$-u_z(tu_z + zu_t) + t\left(\frac{u_x^y + u_y^y + u_z^y - u_t^y}{\gamma}\right)$	$-u_y(tu_z + zu_t)$	$-u_x(tu_z + zu_t)$	$u_t(tu_z + zu_t) + zB$
X_8	$-u_z(tu_x + xu_t)$	$-u_y(tu_x + xu_t)$	$-u_x(tu_x + xu_t) + tB$	$u_t(tu_x + xu_t) + xB$
X_9	$u_z(xu_z - zu_x) - xB$	$u_y(xu_z - zu_x)$	$u_x(xu_z - zu_x) + zB$	$-u_t(xu_z - zu_x)$
X_{10}	$u_z(xu_y - yu_x)$	$u_y(xu_y - yu_x) - xB$	$u_x(xu_y - yu_x) + yB$	$-u_t(xu_y - yu_x)$
X_{11}	$-u_z(xu_x + yu_y + zu_z + tu_t) + zB$	$-u_y A + yB$	$-u_x A + xB$	$u_t A + tB$
X_{12}	$u_z C - xzB$	$u_y C - xyB$	$u_x C - \left(\frac{x^y + t^y - y^y - z^y}{\gamma}\right) B$	$-u_t C - xtB$
X_{13}	$u_z D + \left(\frac{z^y + t^y - x^y - y^y}{\gamma}\right) B$	$u_y D + zyB$	$u_x D + zxB$	$-u_t D + ztB$
X_{14}	$u_z E + yzB$	$u_y E + \left(\frac{y^y + t^y - x^y - z^y}{\gamma}\right) B$	$u_x E + yxB$	$-u_t E + ytB$
X_{15}	$u_z F + ztB$	$u_y F + ytB$	$u_x F + xtB$	$-u_t F + \left(\frac{x^y + t^y - y^y - z^y}{\gamma}\right) B$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{u_x^y + u_y^y + u_z^y - u_t^y}{\gamma}, \\
 C &= xu + \left(\frac{x^y + t^y - y^y - z^y}{\gamma}\right) u_x + xyu_y + xzu_z + xtu_t, \\
 D &= -zu - zxu_x - zyu_y - \left(\frac{z^y + t^y - y^y - x^y}{\gamma}\right) u_z - ztu_t, \\
 E &= -yu - yxu_x - \left(\frac{y^y + t^y - x^y - z^y}{\gamma}\right) u_y - yzu_z - ytu_t, \\
 F &= -tu - txu_x - tyu_y - tzu_z - \left(\frac{x^y + t^y - y^y - z^y}{\gamma}\right) u_t.
 \end{aligned}$$

۴.۳.۳ تعمیم قضیه‌ی نوتر

در سال ۱۹۶۷، بویر^۴ قضیه‌ی نوتر را برای یافتن قوانین پایستگی حاصل از تبدیلات مرتبه بالاتر، تعمیم داد [۹]. در این حالت خاص، اصل تغییراتی $\mathcal{J}[U]$ ، نسبت به تبدیلات یک پارامتری مرتبه بالاتر ناورد است هر گاه لاگرانژی آن، یعنی $\mathcal{L}[U]$ ، نسبت به چنین تبدیلاتی ناورد باشد.

تعریف ۷.۳.۳. فرض کنید

$$\tilde{X} = \sum_{\alpha=1}^m \tilde{\eta}^\alpha(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (۴۳.۳)$$

مولد بینهایت کوچک از تبدیلات موضعی مرتبه بالاتر با امتداد $\tilde{X}^{(\infty)}$ باشد، که در آن

$$\tilde{\eta}^\alpha[U] \equiv \tilde{\eta}^\alpha[x, U, \partial U, \dots, \partial^s U],$$

داریم. تبدیل (۴۳.۳) یک تقارن موضعی برای $\mathcal{J}[U]$ است، اگر و تنها اگر هم ارزی

$$\tilde{X}^{(\infty)} \mathcal{L}[U] \equiv D_i A^i[U], \quad (۴۴.۳)$$

برای مجموعه ای از توابع $A^i[U] = A^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^r U)$ ، برقرار باشد.

تعریف ۸.۳.۳. مولد امتداد یافته $\tilde{X}^{(\infty)}$ ، در رابطه (۴۴.۳) به صورت

$$\tilde{X}^{(\infty)} = \tilde{\eta}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \tilde{\eta}_i^{(1)\alpha} \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \dots + \tilde{\eta}_{i_1 \dots i_p}^{(p)\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_p}^\alpha} + \dots \quad (۴۵.۳)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۳.۳. تبدیل موضعی

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= x^i, & i &= 1, \dots, n, \\ \tilde{u}^\alpha &= u^\alpha + \varepsilon \tilde{\eta}^\alpha(x, u^{(k)}) + O(\varepsilon^2), & \alpha &= 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (۴۶.۳)$$

بامولد بی‌نهایت کوچک \tilde{X} ، که یک تقارن موضعی برای اصل تغییراتی $\mathcal{J}[U]$ محسوب می‌شود را یک تقارن تغییراتی برای $\mathcal{J}[U]$ می‌نامند.

قضیه ۱۰.۳.۳. (تعمیم قضیه نوتر) فرض کنید دستگاه معادلات دیفرانسیل $R^\sigma[u]$ از اصل تغییراتی نتیجه شده باشد، بنابراین دستگاه مفروض مجموعه ای از معادلات اوپلر-لاگرانژ (۲۶.۳) می‌باشد که جوابهای $u(x)$ اکستریم $U(x) = u(x)$ از اصل تغییراتی $\mathcal{J}[U]$ ، با لاگرانژی $\mathcal{L}[U]$ است. فرض کنید گروه لی یک پارامتری از تبدیلات موضعی بامولد بینهایت کوچک (۴۳.۳)، یک تقارن تغییراتی برای $\mathcal{J}[U]$ و $W^1[U, u]$ برای توابع دلخواه $U(x)$ و $v(x)$ توسط رابطه (۲۴.۳) تعریف شده باشد. در اینصورت

• اتحاد

$$\tilde{\eta}^\alpha[U] E_{U^\alpha}(\mathcal{L}[U]) \equiv D_i (A^i[U] - W^i[U, \tilde{\eta}^\alpha[U]]), \quad (۴۷.۳)$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ ، برقرار است. و $\{\tilde{\eta}^\alpha[U]\}_{\alpha=1}^m$ ، مجموعه‌ای از ضرایب تابعی برای دستگاه اوپلر-لاگرانژ (۲۶.۳) می‌باشند.

• قانون پایستگی موضعی به صورت

$$D_i (A^i[u] - W^i[U, \tilde{\eta}^\alpha[u]]) = 0, \quad (۴۸.۳)$$

برای هر جواب $u = \Theta(x)$ از دستگاه اوپلر-لاگرانژ (۲۴.۳)، محاسبه می‌شود.

اثبات: به [۷] مراجعه شود.

قضیه ۱۱.۳.۳. اگر قانون پایستگی از قضیه نوتر حاصل شده باشد، آنگاه قانون پایستگی مذکور از تعمیم قضیه نوتر (الگوریتم بویر) نیز بدست می آید. اثبات: به [۷] مراجعه شود.

مثال ۱۲.۳.۳. برای معادله موج (۹.۳)، قوانین پایستگی را به روش تعمیم نوتر (روش بویر) بدست می آوریم [۲۷].

با در نظر گرفتن $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ چگالی و شارهای قوانین پایستگی به شکل

$$\tilde{X}_1^\infty \mathcal{L}[U] = D_t(\circ) - D_x \left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2}{2} \right) + D_y(\circ) + D_z(\circ),$$

محاسبه می شوند. بنابراین چگالی و شارهای قوانین پایستگی را به شکل

$$\psi^t = \circ, \quad \phi^x = \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2}{2}, \quad \phi^y = \circ, \quad \phi^z = \circ,$$

خواهیم داشت. در ادامه قوانین پایستگی برای بقیه تقارن ها محاسبه شده اند:

• چگالی و شار متناظر با تقارن X_2

$$D_t(-u_y u_t) + D_x(-u_x u_y) + D_y \left(\frac{u_x^2 + u_z^2 - u_y^2 - u_t^2}{2} \right) + D_z(-u_y u_z) = \circ,$$

• چگالی و شار متناظر با تقارن X_3

$$D_t(-u_t u_z) + D_x(-u_x u_z) + D_y(-u_z u_y) + D_z \left(\frac{u_x^2 + u_y^2 - u_t^2 - u_z^2}{2} \right) = \circ,$$

• چگالی و شار متناظر با تقارن X_4

$$D_t \left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2}{2} \right) + D_x(-u_x u_t) + D_y(-u_y u_t) + D_z(-u_z u_t) = \circ,$$

• چگالی و شار متناظر با تقارن X_6

$$\begin{aligned} & D_t(-u_t(yu_z - zu_y)) + D_x(u_x(yu_z - zu_y)) \\ & + D_y \left(u_y(yu_z - zu_y) + z \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2}{2} \right) \\ & + D_z \left(u_z(yu_z - zu_y) - y \frac{u_x^2 + u_y^2 - u_t^2 - u_z^2}{2} \right) = \circ, \end{aligned}$$

• چگالی و شار متناظر با تقارن X_7

$$\begin{aligned} & D_t \left(u_t(tu_y + yu_t) + y \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2}{2} \right) + D_x(-u_x(tu_y + yu_t)) \\ & + D_y \left(-u_y(tu_y + yu_t) + t \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2}{2} \right) + D_z(-u_z(tu_y + yu_t)) = \circ, \end{aligned}$$

• چگالی و شار متناظر با تقارن X_8

$$D_t \left(u_t(tu_z + zu_t) + z \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2}{2} \right) + D_x(-u_x(tu_z + zu_t)) \\ + D_y(-u_y(tu_z + zu_t)) + D_z \left(-u_z(tu_z + zu_t) + t \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2}{2} \right) = 0,$$

• چگالی و شار متناظر با تقارن X_9

$$D_t \left(u_t(tu_z + zu_t) + z \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2}{2} \right) + D_x(-u_x(tu_z + zu_t)) \\ + D_y(-u_y(tu_z + zu_t)) + D_z \left(-u_z(tu_z + zu_t) + t \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2}{2} \right) = 0.$$

۴.۳ روش ابراگیموف برای محاسبه قوانین پایستگی

یکی از محدودیت های روش نوتر و روش بوبر، لزوم در اختیار داشتن لاگرانژی غیر فرمال برای یک معادله دیفرانسیل می باشد. از این رو دانشمندان و محققان بسیاری هم چون ابراگیموف در تلاش برای رفع این محدودیت بوده اند. در سال های ۲۰۱۱-۲۰۱۰ این محقق روسی موفق به ساخت دسته هایی از قوانین پایستگی بدون در اختیار داشتن لاگرانژی غیر فرمال و ساختار وردشی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل شد [۳۳، ۶۱]. در حقیقت در صورت عدم وجود لاگرانژی غیر فرمال برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، با استفاده از روش ابراگیموف که توسیعی از روش نوتر می باشد، می توان محدودیت شرایط وردشی و تغییراتی را رفع کرد و به دسته ای از قوانین پایستگی برای معادله دیفرانسیل مورد نظر دست یافت. برای رسیدن به این مهم، نیاز به معرفی مفاهیمی همچون خود الحاق غیر خطی، لاگرانژی فرمال، تعریف مولفه های چگالی و شارهای قوانین پایستگی [۳۲، ۶۷، ۳۳] می باشد. در ادامه به تشریح به این مسایل با ذکر مثال خواهیم پرداخت [۲۸].

فرض کنیم

$$R_\alpha[U] = R_\alpha(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (49.3)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل، با n - متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^n)$ و m - متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^m)$ باشد که $\partial u, \dots, \partial^s u$ مشتقات متغیرهای وابسته نسبت به متغیرهای مستقل، از مرتبه ۱ تا s می باشند.

تعریف ۱.۴.۳. معادله الحاقی برای دستگاه (۴۹.۳)، به صورت

$$F_\alpha^*(x, u, v, \partial u, \partial v, \dots, \partial^s u, \partial^s v) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (50.3)$$

تعریف می‌شود. با این شرط که رابطه

$$F_{\alpha}^*(x, u, v, \partial u, \partial v, \dots, \partial^s u, \partial^s v) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^{\alpha}}, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (51.3)$$

برای عملگر اوپلر- لاگرانژ با تعریف

$$\frac{\delta}{\delta u^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^{\alpha}}, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (52.3)$$

و لاگرانژی دستگاه (۴۹.۳) به فرم

$$\mathcal{L} = v^{\beta} F_{\beta} \equiv \sum_{\beta=1}^m v^{\beta} F_{\beta}, \quad (53.3)$$

که $v = (v^1, \dots, v^m)$ متغیرهای وابسته جدید و $\partial v, \dots, \partial^s v$ مشتقات آن‌ها می‌باشند، برقرار باشد. لذا خواهیم داشت

$$\frac{\delta(v^{\beta} F_{\beta})}{\delta u^{\alpha}} = \frac{\partial(v^{\beta} F_{\beta})}{\partial u^{\alpha}} - D_i \left(\frac{\partial(v^{\beta} F_{\beta})}{\partial u_i^{\alpha}} \right) + D_i D_k \left(\frac{\partial(v^{\beta} F_{\beta})}{\partial u_{i_k}^{\alpha}} \right) + \dots, \quad (54.3)$$

که D_i بیانگر مشتق کامل است و به صورت

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + v_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial v^{\alpha}} + u_{ij}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ij}^{\alpha}} + v_{ij}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ij}^{\alpha}} + \dots \quad (55.3)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۴.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۴۹.۳) را اکیدا خود الحاق گویند، هر گاه معادله الحاقی بدست آمده از (۵۰.۳)، با جایگذاری $v = u$ معادل با خود معادله با یک ضریب Λ به فرم

$$F_{\alpha}^*(x, u, v, \partial u, \partial v, \dots, \partial^s u, \partial^s v)|_{v=u} = \Lambda F(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u). \quad (56.3)$$

شود.

مثال ۳.۴.۳. معادله (۳ + ۱) - بعدی موج را در نظر بگیرید. معادله الحاقی معادله موج عبارت است از [۲۷]:

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\delta}{\delta u}(vF) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + D_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + D_{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + D_{zz} \frac{\partial}{\partial u_{zz}} \right) (vu_{tt} - vu_{xx} - vu_{yy} - vu_{zz}) \\ &= v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} - v_{zz}|_{v=u} = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = F. \end{aligned}$$

بنابراین معادله موج، یک معادله اکیدا خود الحاق می‌باشد.

تعریف ۴.۴.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۴۹.۳) را شبه خود الحاق می نامند، هرگاه با جایگذاری $v = \varphi(u)$ ، و برقراری شرط $\|\frac{\partial \varphi^\alpha(u)}{\partial u^\beta}\| \neq 0$ ، معادله الحاقی (۵۰.۳)، با دستگاه معادلات دیفرانسیل (۴۹.۳)، هم ارز باشند. هم ارزی به این معنا که تساوی

$$F_\alpha^*(x, u, \varphi, \dots, \partial^s u, \partial^s \varphi) = \Lambda_\alpha^\beta F_\alpha^\beta(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u), \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

را برای تمام ضرایب Λ_α^β و

$$\varphi = \{\varphi^\alpha(u)\}, \quad \varphi_{(\sigma)} = \{D_{i_1, \dots, i_\sigma}(\varphi^\alpha(u))\}, \quad \sigma = 1, \dots, s.$$

داشته باشیم.

تعریف ۵.۴.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۴۹.۳) را خود الحاق غیر خطی گویند، هرگاه معادله الحاقی

$$F_\alpha^*(x, u, v, \partial u, \partial v, \dots, \partial^s u, \partial^s v) \equiv \frac{\delta(v^\beta F_\beta)}{\delta u^\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

روی همه جوابهای دستگاه (۴۹.۳)، با جایگذاری $v^\alpha = \varphi^\alpha(x, u)$ ، که شرط $\varphi(x, u) \neq 0$ برقرار است، صدق کند. به عبارتی رابطه

$$F_\alpha^*(x, u, \varphi(x, u), \dots, \partial^s u, \partial^s \varphi) = \lambda_\alpha^\beta F_\beta(x, u, \dots, \partial^s u), \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

برای ضرایب λ_α^β و مشتق مرتبه σ - ام تابع $\varphi = \varphi(x, u)$ به صورت

$$\partial^\sigma \varphi = D_{i_1, \dots, i_\sigma}(\varphi^\alpha(x, u)), \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad \sigma = 1, \dots, s.$$

برقرار باشد.

مثال ۶.۴.۳. در مثال قبل نشان دادیم که معادله خود الحاق معادله $(1 + 3)$ - بعدی موج به صورت $v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} - v_{zz} = 0$ است. بادر نظر گرفتن $v = \varphi(x, u)$ معادله خود الحاق به شکل

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0,$$

خواهد بود. از حل معادلات مشخصه الحاقی

$$\varphi_{tt} = 0, \quad \varphi_{xx} = 0, \quad \varphi_{yy} = 0, \quad \varphi_{zz} = 0,$$

ضریب تابعی

$$\begin{aligned} v = & a_1(xyzt) + b_1(xyz) + b_2(xyt) + b_3(yzt) + c_1(xy) + c_2(xz) \\ & + c_3(xt) + c_4(yz) + c_5(yt) + c_6(zt) + d_1x + d_2y + d_3z + d_4t + k. \end{aligned}$$

برای معادله موج مشخص می شود.

۱.۴.۳ فرمولی دقیق برای پیدا کردن قوانین پایستگی به روش ابراگیموف

قضیه ۷.۴.۳. (قضیه ابراگیموف) فرض کنیم دستگاه معادلات دیفرانسیل (۴۹.۳) ، یک معادله خود الحاق غیر خطی باشد، با در دست داشتن تقارنهای معادله، که این تقارنهای می توانند تقارنهای نقطه ای ، برخوردی و یا تقارنهای مراتب بالاتر باشند، قوانین پایستگی را از رابطه

$$C^i = W^\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha} - D_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} \right) + D_j D_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} \right) - \dots \right] + D_j (W^\alpha) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} \right) + \dots \right] + D_j D_k (W^\varphi) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} - \dots \right]. \quad (۵۷.۳)$$

بدست می آوریم. که $\mathcal{L} = v^\beta F_\beta$ لاگرانژی فرمال و $W = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha$ مشخصه ها هستند. اثبات در [۳۲] آورده شده است.

مثال ۸.۴.۳. از آنجاییکه معادله (۳ + ۱) - بعدی موج یک معادله خود الحاق غیر خطی می باشد بنابراین می توان با استفاده از رابطه (۵۷.۳) در قضیه (۷.۴.۳) قوانین پایستگی را برای آن بدست آورد. به طور نمونه با در نظر گرفتن تقارن $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ و مشخصه $W = -u_x$ ، چگالی و شارهای قوانین پایستگی به فرم

$$\begin{aligned} \psi^t &= u_x u_t - u u_{xt}, & \phi^x &= u u_{xx} - u_x^2, \\ \phi^y &= u u_{xy} - u_x u_y, & \phi^z &= u u_{xz} - u_x u_z. \end{aligned}$$

خواهند بود. سایر قوانین پایستگی برای تقارنهای X_2, \dots, X_{16} در جدول های (۳.۳) و (۴.۳) آورده شده است.

جدول ۳.۳: قوانین پایستگی محاسبه شده با استفاده از روش ابراکیموف

X_1	W	$-u_x$
	ψ^t	$u_x u_t - w u_{xt}$
	ϕ^x	$w u_{xx} - u_x^2$
	ϕ^y	$w u_{xy} - u_x u_y$
	ϕ^z	$w u_{xz} - u_x u_z$
X_2	W	$-u_y$
	ψ^t	$u_y u_t - w u_{yt}$
	ϕ^x	$w u_{xy} - u_x u_y$
	ϕ^y	$w u_{yy} - u_y^2$
	ϕ^z	$w u_{yz} - u_y u_z$
X_3	W	$-u_z$
	ψ^t	$u_z u_t - w u_{zt}$
	ϕ^x	$w u_{xz} - u_x u_z$
	ϕ^y	$w u_{yz} - u_y u_z$
	ϕ^z	$w u_{zz} - u_z^2$
X_4	W	$-u_t$
	ψ^t	$-(u_t^2 + w u_{tt})$
	ϕ^x	$w u_{xt} - u_x u_t$
	ϕ^y	$w u_{yt} - u_y u_t$
	ϕ^z	$w u_{zt} - u_z u_t$
X_5	W	u
	ψ^t	\circ
	ϕ^x	\circ
	ϕ^y	\circ
	ϕ^z	\circ
X_6	W	$yu_z - zu_y$
	ψ^t	$-u_t W + u(yu_{zt} - zu_{yt})$
	ϕ^x	$-u_x W - u(yu_{xz} - zu_{xy})$
	ϕ^y	$-u_y W - u(yu_{yz} - zu_{yy} + u_z)$
	ϕ^z	$-u_z W - u(yu_{z z} - zu_{yz} - u_y)$
X_7	W	$-(yu_t + tu_y)$
	ψ^t	$-u_t W + u(tu_{yt} + yu_{tt} + u_y)$
	ϕ^x	$u_x W + u(tu_{xy} + yu_{xt})$
	ϕ^y	$u_y W + u(tu_{ty} + yu_{tt} + u_t)$
	ϕ^z	$u_z W + u(tu_{zy} + yu_{zt})$
X_8	W	$-(tu_z + zu_t)$
	ψ^t	$-u_t W - u(tu_{zt} + zu_{tt} + u_z)$
	ϕ^x	$-u_x W - u(tu_{xz} + zu_{xt})$
	ϕ^y	$-u_y W - u(tu_{zy} + zu_{yt})$
	ϕ^z	$-u_z W - u(tu_{zz} + zu_{zt} + u_t)$

مثال ۹.۴.۳. معادله KdV مرتبه ۵ (۳۴.۲)، با لاگرانژی $\mathcal{L} = v\Delta$ ، معادله الحاقی

$$\Delta^* = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = v_{xxxxx} - 2^{\circ} u_{xx} v_x + 5 u_x v_{xx} + 1^{\circ} u v_{xxx} + 2^{\circ} u_x v_x + 2^{\circ} u^2 v_x - v_t,$$

مولدهای

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = \frac{x}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2u}{\Delta} \frac{\partial}{\partial u},$$

جدول ۴.۳: قوانین پایستگی محاسبه شده با استفاده از روش ابراکیموف

X_9	W	$-(tu_x + xu_t)$
	ψ^t	$-u_t W - u(u_x + tu_{xt} + xu_{tt})$
	ϕ^x	$u_x W + u(u_t + tu_{xx} + xu_{xt})$
	ϕ^y	$u_y W + u(tu_{xy} + xu_{yt})$
	ϕ^z	$u_z W + u(tu_{xz} + xu_{zt})$
X_{10}	W	$(xu_z - zu_x)$
	ψ^t	$-u_t W + u(xu_{zt} - zu_{xt})$
	ϕ^x	$u_x W - u(u_z + xu_{xz} - zu_{xx})$
	ϕ^y	$u_y W - u(xu_{yz} - zu_{xy})$
	ϕ^z	$u_z W - u(xu_{zz} - zu_{zz} - u_x)$
X_{11}	W	$xu_y - yu_x$
	ψ^t	$-u_t W + u(xu_{yt} - yu_{xt})$
	ϕ^x	$u_x W - u(u_y + xu_{xy} - yu_{xx})$
	ϕ^y	$u_y W - u(xu_{yy} - yu_{xy} - u_x)$
	ϕ^z	$u_z W - u(xu_{yz} - yu_{xz})$
X_{12}	W	$-(xu_x + yu_y + zu_z + tu_t)$
	ψ^t	$-u_t W - u(xu_{xt} + yu_{yt} + zu_{zt} + tu_{tt})$
	ϕ^x	$u_x W + u(xu_{xx} + yu_{xy} + zu_{xz} + tu_{xt} + u_x)$
	ϕ^y	$u_y W + u(xu_{xy} + yu_{yy} + zu_{yz} + tu_{yt} + u_y)$
	ϕ^z	$u_z W + u(xu_{xz} + yu_{yz} + zu_{zz} + tu_{zt} + u_z)$
X_{13}	W	$xu - \left(\frac{y^{\gamma} + z^{\gamma} - x^{\gamma} - t^{\gamma}}{\gamma}\right)u_x + xyu_y + xzu_z + xtu_t$
	ψ^t	$-u_t W + u\left(\gamma xu_t + tu_x + \left(\frac{y^{\gamma} + z^{\gamma} - x^{\gamma} - t^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{xt} + xyu_{yt} + xzu_{zt} + xtu_{tt}\right)$
	ϕ^x	$u_x W - u\left(u + xu_x + yu_y + zu_z + tu_t - \left(\frac{y^{\gamma} + z^{\gamma} - x^{\gamma} - t^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{xx} + xyu_{xy} + xzu_{xz} + xtu_{xt}\right)$
	ϕ^y	$u_y W - u\left(\gamma xyu_y - yu_x - \left(\frac{y^{\gamma} + z^{\gamma} - x^{\gamma} - t^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{xy} + xyu_{yy} + xzu_{yz} + xtu_{yt}\right)$
	ϕ^z	$u_z W - u\left(\gamma xzu_z - zu_x - \left(\frac{y^{\gamma} + z^{\gamma} - x^{\gamma} - t^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{xz} + xyu_{yz} + xzu_{zz} + xtu_{zt}\right)$
X_{14}	W	$-(zu + xzu_x + zyu_y + ztu_t + \left(\frac{x^{\gamma} + y^{\gamma} - z^{\gamma} - t^{\gamma}}{\gamma}\right)u_z)$
	ψ^t	$-u_t W - u\left(\gamma zu_t - tu_z + xzu_{xt} + yzu_{yt} + ztu_{tt} + \left(\frac{x^{\gamma} + y^{\gamma} - z^{\gamma} - t^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{zt}\right)$
	ϕ^x	$u_x W + u\left(\gamma zu_x + xu_z + xzu_{xx} + yzu_{xy} + ztu_{xt} + \left(\frac{x^{\gamma} + y^{\gamma} - z^{\gamma} - t^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{xz}\right)$
	ϕ^y	$u_y W + u\left(\gamma zu_y + yu_z + xzu_{xy} + yzu_{yy} + ztu_{yt} + \left(\frac{x^{\gamma} + y^{\gamma} - z^{\gamma} - t^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{yz}\right)$
	ϕ^z	$u_z W + u\left(u + xu_x + yu_y + tu_t - zu_z + zu_{zz} + xzu_{xz} + yzu_{yt} + xtu_{zt} + \left(\frac{x^{\gamma} + y^{\gamma} - z^{\gamma} - t^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{zz}\right)$
X_{15}	W	$-(yu + xyu_x + yzu_z + ytu_t + \left(\frac{y^{\gamma} + t^{\gamma} - x^{\gamma} - z^{\gamma}}{\gamma}\right)u_y)$
	ψ^t	$-u_t W - u\left(\gamma yu_t + tu_y + xyu_{xt} + yzu_{zt} + ytu_{tt} + \left(\frac{y^{\gamma} + t^{\gamma} - x^{\gamma} - z^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{yt}\right)$
	ϕ^x	$u_x W + u\left(\gamma yu_x - xu_y + xyu_{xx} + yzu_{xz} + ytu_{xt} + \left(\frac{y^{\gamma} + t^{\gamma} - x^{\gamma} - z^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{xy}\right)$
	ϕ^y	$u_y W + u\left(u + xu_x + \gamma yu_y + tu_t + zu_z + xyu_{xy} + yzu_{zy} + ytu_{yt} + \left(\frac{y^{\gamma} + t^{\gamma} - x^{\gamma} - z^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{yy}\right)$
	ϕ^z	$u_z W + u\left(\gamma yu_z - zu_y + xyu_{xz} + yzu_{zz} + ytu_{zt} + \left(\frac{y^{\gamma} + t^{\gamma} - x^{\gamma} - z^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{yz}\right)$
X_{16}	W	$-(tu + xtu_x + ytu_y + ztu_z - \left(\frac{x^{\gamma} + t^{\gamma} - y^{\gamma} - z^{\gamma}}{\gamma}\right)u_t)$
	ψ^t	$-u_t W - u\left(u + \gamma tu_t + xu_x + yu_y + zu_z + xtu_{xt} + ytu_{yt} + ztu_{zt} + \left(\frac{x^{\gamma} + t^{\gamma} - y^{\gamma} - z^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{tt}\right)$
	ϕ^x	$u_x W + u\left(\gamma tu_x + xu_t + xtu_{xx} + ytu_{xy} + ztu_{xz} + \left(\frac{x^{\gamma} + t^{\gamma} - y^{\gamma} - z^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{xt}\right)$
	ϕ^y	$u_y W + u\left(\gamma tu_y - yu_t + xtu_{xy} + ytu_{yy} + ztu_{zy} + \left(\frac{x^{\gamma} + t^{\gamma} - y^{\gamma} - z^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{yt}\right)$
	ϕ^z	$u_z W + u\left(\gamma tu_z - zu_t + xtu_{xz} + ytu_{yz} + ztu_{zz} + \left(\frac{x^{\gamma} + t^{\gamma} - y^{\gamma} - z^{\gamma}}{\gamma}\right)u_{zt}\right)$

و مشخصه های

$$W_1 = -u_x, \quad W_2 = -u_t, \quad W_3 = \frac{-2}{\delta}u - \frac{x}{\delta}u_x - tu_t.$$

در نظر می گیریم. با توجه به (۵۷.۳)، فرمول کلی شار و چگالی برای معادله (۵۷.۳)، عبارتست

از

$$\begin{aligned}
C^x = & \xi^1 \mathcal{L} + W_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - D_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} \right) + D_x^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) + D_x^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} \right) \right) \\
& + D_x(W_i) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) - D_x^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} \right) \right) \\
& + D_x^2(W_i) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} + D_x^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} \right) \right) \\
& + D_x^3(W_i) \left(-D_x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} \right) \right) + D_x^4 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxxx}} \right), \quad (58.3)
\end{aligned}$$

$$C^t = \xi^2 \mathcal{L} + W_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}. \quad (59.3)$$

به طور خاص قوانین پایستگی برای مولدهای X_1, X_2, X_3 عبارتند از:

• برای مولد X_1

$$C^x = u_t + 1^0 u_x (u_x - u_{xx}), \quad C^t = -u_x.$$

• برای مولد X_2

$$\begin{aligned}
C^x = & u_{xxxxt} + u_x u_{xxxx} + 2^0 u^2 u_x^2 + 1^5 u_x u_{xt} + 2^5 u_x^2 u_{xx} \\
& + 1^0 u u_{xt} + u_x u_{xxxx}, \quad (60.3) \\
C^t = & -u_{xxxx} - 1^0 u u_{xxx} - 2^5 u_x u_{xx} - 2^0 u^2 u_x.
\end{aligned}$$

• برای مولد X_3

$$\begin{aligned}
C^x = & 8u^3 + 6u_x^2 + 2uu_{xx} + 4(1 + 1^0 tu^2)u^2 u_x + 2(2x + 1^0 \circ tu^2)uu_{xx} \\
& + 5(3t + 5x + 1^0 \circ tu^2)u_x u_{xx} + \frac{1}{4}u_{xxxx} + tu_{xxxxt} \\
& + (2^0 tu^2 + x)u_{xxxx}, \quad (61.3) \\
C^t = & \frac{2u}{5} + \frac{x}{5}u_x - 2^0 tu^2 u_x - 2^5 tu_x u_{xxx} - 1^0 tu u_{xxx} - tu_{xxxx}.
\end{aligned}$$

۵.۳ روش هرمان - پل برای محاسبه‌ی قوانین پایستگی

در این بخش به معرفی روش دیگری برای یافتن قوانین پایستگی خواهیم پرداخت، همان طور که دیدیم روش مستقیم یک روند بسیار طولانی برای یافتن ضرایبی که جملات آن بر اساس متغیرهای مستقل و وابسته و مشتقات آن‌ها بودند شکل گرفته بود، و هر چقدر مرتبه مشتقات در ضرایب را بیشتر انتخاب می‌کردیم روند محاسبات بسیار طولانی‌تر می‌شد.

شد، همچنین بعد از محاسبه ضرایب، با روابطی که شامل انتگرال گیری های پی در پی بودند، می بایست به دنبال عبارات دیورژانسی می بودیم که از آن بتوان قوانین پایستگی را محاسبه کرد. روشی که هرمان و پل^۵ در سال ۲۰۱۰ ارائه دادند، تا حد زیادی می تواند ضعف های روش مستقیم را برطرف کند. و طی روابط سیستماتیک تری، چگالی و شارهای قوانین پایستگی را محاسبه کرد [۲۹].

الگوریتم هرمان- پل را در چهار مرحله به شرح زیر می توان خلاصه کرد.

- گام اول: ابتدا می بایست دستگاه معادلات دیفرانسیل مورد نظر، به صورت تکاملی باشد.
- گام دوم: چون معادله به فرم تکاملی است می توان جملات u_t را از معادله حذف کرد و از این مساله که اثر عملگر اویلر بر عبارت دقیق باقی مانده، حاصلی برابر با صفر دارد؛ استفاده نمود تا به دستگاه خطی از ضرایب برسیم. با حل این دستگاه، ضرایب در نظر گرفته شده محاسبه می شوند.
- گام سوم: بعد از مشخص شدن ضرایب با استفاده از عملگر هوموتوبی، (که در ادامه تعریف آن آمده است) شارهای متناظر با ضرایب مفروض، بدست می آیند.
- گام چهارم: قوانین پایستگی متناظر با چگالی و شارهای بدست آمده محاسبه می شوند.

تعریف ۱.۵.۳. عملگر هوموتوبی دو بعدی، برای معادلات دیفرانسیل شامل متغیر های مستقل $\{x, t\}$ عملگر برداری است، با دو مولفه

$$\left(H_{u(x,t)}^x(f), H_{u(x,t)}^t(f) \right),$$

که $f = \Lambda(x, U^{(l)}) \Delta(x, U^{(n)})$ ضریب تابعی می باشد که در روش مستقیم محاسبه شده است و $\Delta(x, U^{(n)})$ نیز دستگاه معادله دیفرانسیل مورد نظر می باشد). مولفه ها با روابط زیر مشخص می شوند:

$$\begin{aligned} H_{u(x,t)}^x(f) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^q I_{uj}^x(f) [\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ H_{u(x,t)}^t(f) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^q I_{uj}^t(f) [\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \end{aligned} \quad (۶۲.۳)$$

توابع زیر انتگرال $I_{uj}^t(f)$ و $I_{uj}^x(f)$ از روابط

$$I_u^x(f) = \sum_{k_1=1}^{M_1^j} \sum_{k_2=0}^{M_2^j} \left[\sum_{i_1=0}^{k_1-1} \sum_{i_2=0}^{k_2} B^x u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{k_1-i_1-1} (-D_t)^{k_2-i_2} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} t^{k_2}}},$$

$$I_u^t(f) = \sum_{k_1=0}^{M_1^j} \sum_{k_2=1}^{M_2^j} \left[\sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2-1} B^t u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{k_1-i_1} (-D_t)^{k_2-i_2-1} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} t^{k_2}}}, \quad (63.3)$$

محاسبه شده که ضرایب ترکیباتی B^x و B^t عبارتند از:

$$B^x = B(i_1, i_2, k_1, k_2) = \frac{\binom{i_1+i_2}{i_1} \binom{k_1+k_2-i_1-i_2-1}{k_1-i_1-1}}{\binom{k_1+k_2}{k_1}}, \quad (64.3)$$

$$B^t = B(i_1, i_2, k_1, k_2) = \frac{\binom{i_1+i_2}{i_2} \binom{k_1+k_2-i_1-i_2-1}{k_2-i_2-1}}{\binom{k_1+k_2}{k_1}}. \quad (65.3)$$

M_1^j و M_2^j نیز به ترتیب مرتبه مشتقات f در u ، نسبت به x و t می باشند.

مثال ۲.۵.۳. معادله KdV

$$F[x, u] = u_t - uu_x - u_{xxx} = 0,$$

مفروض است. با استفاده از روش مستقیم محاسبه قوانین پایستگی چهار ضریب از مرتبه دوم به شرح زیر برای آن بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1, \\ \Lambda_2 &= u, \\ \Lambda_3 &= tu + x, \\ \Lambda_4 &= \frac{u^2}{2} + u_{xx}. \end{aligned}$$

حال متناظر با هر Λ_i میتوان قوانین پایستگی را با استفاده از روش هرمان - پل بدست آورد. در اینجا به دلیل روند طولانی محاسبات، قوانین پایستگی متناظر با ضریب

$$\Lambda_3 = tu + x, \quad (66.3)$$

را بدست می آوریم و بقیه نتایج را در جدول (۳.۵) خلاصه می کنیم. متناظر با این ضریب داریم:

$$f = \Lambda_3 \cdot F[x, u] = (tu + x)(u_t - uu_x - u_{xxx}). \quad (67.3)$$

از آنجاییکه بیشترین مرتبه مشتق نسبت به x و t به ترتیب ۳ و ۱ می باشد، خواهیم داشت

$$I_u^t(f) = \sum_{k_1=0}^3 \sum_{k_2=1}^1 \left[\sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2-1} B^t u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{k_1-i_1} (-D_t)^{k_2-i_2-1} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} t^{k_2}}},$$

اگر $k_1 = 0$ و $k_2 = 1$ در نظر بگیریم؛ آنگاه:

$$I_u^t(f) = \left[\sum_{i_1=0}^{\circ} \sum_{i_2=0}^{\circ} B^t u (-D_x)^{\circ} (-D_t)^{\circ} \right] \frac{\partial f}{\partial u_t} = u(tu + x),$$

$$\begin{aligned} H^t(f) = \psi_{u(x,t)}^t(f) &= \int_0^1 (I^t(f)) [\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_0^1 (\lambda u (\lambda t u + x)) \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{u^2}{2} t + xu, \end{aligned}$$

نتیجه برای بقیه حالت‌های $k_2 = 1$ با $k_1 = 1$ و $k_1 = 2$ و $k_1 = 3$ صفر خواهند شد.
حال اگر قرار دهیم:

$$I_u^x(f) = \sum_{k_1=1}^3 \sum_{k_2=0}^1 \left[\sum_{i_1=0}^{k_1-1} \sum_{i_2=0}^{k_2} B^x u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{k_1-i_1-1} (-D_t)^{k_2-i_2} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} t^{k_2}}}, \quad (68.3)$$

• آن گاه:

حالت (۱): با فرض $k_1 = 1$ و $k_2 = 0$ داریم:

$$I_{\uparrow}^x = \left[\sum_{i_1=0}^{\circ} \sum_{i_2=0}^{\circ} B^x u (-D_x)^{\circ} (-D_t)^{\circ} \right] \frac{\partial f}{\partial u_x} = -u(tu^2 + ux),$$

• حالت (۲): با فرض $k_1 = 2$ و $k_2 = 0$ داریم:

$$I_{\uparrow}^x = \left[\sum_{i_1=0}^{\circ} \sum_{i_2=0}^{\circ} B^x u (-D_x)^{\circ} (-D_t)^{\circ} \right] \frac{\partial f}{\partial u_x} = -u^2(tu + x),$$

• حالت (۳): با فرض $k_1 = 3$ و $k_2 = 0$ خواهیم داشت:

$$I_{\uparrow}^x = \left[\sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^{\circ} B^x u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{2-i_1} (-D_t)^{\circ} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{xxx}},$$

•• حالت (۱*۳): با فرض $i_1 = 0$ و $i_2 = 0$:

$$I_{\uparrow*1}^x = B^x \left[u (-D_x)^2 (-D_t)^{\circ} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{xxx}} = -tu u_{xx},$$

•• حالت (۲*۳): با فرض $i_1 = 1$ و $i_2 = 0$:

$$I_{\uparrow*2}^x = B^x \left[u_x (-D_x)^1 (-D_t)^{\circ} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{xxx}} = u_x(tu_x + 1),$$

•• حالت (۳*۳): با فرض $i_1 = 2$ و $i_2 = 0$:

$$I_{\uparrow*3}^x = B^x \left[u_{xx} (-D_x)^{\circ} (-D_t)^{\circ} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{xxx}} = -u_{xx}(tu + x),$$

بنابراین

$$I^x(f) = -u(tu^{\prime} + ux) - tuu_{xx} + u_x(tu_x + 1) - u_{xx}(tu + x),$$

لذا شار تولید شده متناظر با ضرایب Λ_3 عبارتست از:

$$H^x(f) = \int_0^1 (I^x(f))[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-1}{3}tu^{\prime} - \frac{1}{2}u^{\prime}x + \frac{1}{2}tu_x^{\prime} - tuu_{xx} - xu_{xx} + u_x.$$

به طریق مشابه می توان متناظر با ضرایب Λ_1 و Λ_2 و Λ_4 نیز قوانین پایستگی را محاسبه کرد. نتایج مورد نظر در جدول (۵.۳) خلاصه شده است.

جدول ۵.۳: چگالی و شارهای بدست آمده متناظر با ضرایب Λ_i با استفاده از روش هرمان-پل

Λ_i	ψ_i^t	ϕ_i^x
$\Lambda_1 = 1$	$\psi_1^t = u$	$\phi_1^x = -\frac{1}{2}u^{\prime} - uu_{xx}$
$\Lambda_2 = u$	$\psi_2^t = \frac{1}{2}u^{\prime}$	$\phi_2^x = \frac{1}{2}u_x^{\prime} - \frac{1}{3}u^{\prime} - u_{xx}$
$\Lambda_3 = tu + x$	$\psi_3^t = \frac{1}{2}tu^{\prime} + xu$	$\phi_3^x = \frac{-1}{3}tu^{\prime} - \frac{1}{2}u^{\prime}x + \frac{1}{2}tu_x^{\prime} - tuu_{xx} - xu_{xx} + u_x$
$\Lambda_4 = \frac{1}{2}u^{\prime} + u_{xx}$	$\psi_4^t = \frac{1}{6}u^{\prime} + \frac{1}{2}uu_{xx}$	$\phi_4^x = -\frac{1}{8}u^{\prime} - \frac{1}{2}(uu_{xt} + u^{\prime}u_{xx} - u_xu_t - u_{xx}^{\prime})$

برای محاسبه قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل با متغیرهای مستقل $\{x, y, z, t\}$ و متغیر وابسته $\{u\}$ نیاز به تعریف عملگر هوموتوبی چهار بعدی به صورت

$$\left(H_{u(x,y,z,t)}^x(f), H_{u(x,y,z,t)}^y(f), H_{u(x,y,z,t)}^z(f), H_{u(x,y,z,t)}^t(f) \right),$$

خواهیم بود که

$$\begin{aligned} H_{u(x,y,z,t)}^x(f) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^q I_{u^j}^x(f)[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ H_{u(x,y,z,t)}^y(f) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^q I_{u^j}^y(f)[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ H_{u(x,y,z,t)}^z(f) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^q I_{u^j}^z(f)[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ H_{u(x,y,z,t)}^t(f) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^q I_{u^j}^t(f)[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \end{aligned} \quad (۶۹.۳)$$

و تابع زیر انتگرال به فرم

$$I_u^x(f) = \sum_{k_1=1}^{M_1^j} \sum_{k_2=0}^{M_2^j} \sum_{k_3=0}^{M_3^j} \sum_{k_4=0}^{M_4^j} \left[\sum_{i_1=0}^{k_1-1} \sum_{i_2=0}^{k_2} \sum_{i_3=0}^{k_3} \sum_{i_4=0}^{k_4} B^x u_{x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} t^{i_4}} \right]$$

$$\left[(-D_x)^{k_1-i_1-1} (-D_y)^{k_2-i_2} (-D_z)^{k_3-i_3} (-D_t)^{k_4-i_4} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} t^{k_4}}},$$

با

$$B^x = \frac{\binom{i_1+i_2+i_3+i_4}{i_1} \binom{i_2+i_3+i_4}{i_2} \binom{i_3+i_4}{i_3} \binom{k_1+k_2+k_3+k_4-i_1-i_2-i_3-i_4-1}{k_1-i_1-1} \binom{k_2+k_3+k_4-i_2-i_3-i_4}{k_2-i_2} \binom{k_3+k_4-i_3-i_4}{k_3-i_3}}{\binom{k_1+k_2+k_3+k_4}{k_1} \binom{k_2+k_3+k_4}{k_2} \binom{k_3+k_4}{k_3}},$$

که $M_1^j, M_2^j, M_3^j, M_4^j$ و M_5^j به ترتیب مشتقات u نسبت به x, y, z و t می باشند تعریف می شود. به طریق مشابه مولفه دوم و سوم و چهارم نیز تعریف خواهند شد. به طور مثال

$$I_u^y(f) = \sum_{k_1=0}^{M_1^j} \sum_{k_2=1}^{M_2^j} \sum_{k_3=0}^{M_3^j} \sum_{k_4=0}^{M_4^j} \left[\sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2-1} \sum_{i_3=0}^{k_3} \sum_{i_4=0}^{k_4} B^y u_{x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} t^{i_4}} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} t^{k_4}}},$$

با

$$B^y = \frac{\binom{i_1+i_2+i_3+i_4}{i_2} \binom{i_1+i_3+i_4}{i_1} \binom{i_3+i_4}{i_3} \binom{k_1+k_2+k_3+k_4-i_1-i_2-i_3-i_4-1}{k_2-i_2-1} \binom{k_1+k_3+k_4-i_1-i_3-i_4}{k_1-i_1} \binom{k_3+k_4-i_3-i_4}{k_3-i_3}}{\binom{k_1+k_2+k_3+k_4}{k_2} \binom{k_1+k_3+k_4}{k_1} \binom{k_3+k_4}{k_3}}.$$

۶.۳ رسیدن به قوانین پایستگی جدید با استفاده از قوانین پایستگی محاسبه شده

در این بخش به ارائه دو روش به منظور محاسبه قوانین پایستگی جدید می پردازیم. که در هر دو روش، قوانین پایستگی محاسبه شده به یکی از روش های توضیح داده شده در بخش قبل می توانند مورد استفاده قرار گیرند و یک دسته قانون پایستگی جدید تولید کنند.

۱.۶.۳ محاسبه قوانین پایستگی جدید با تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل به دستگاه دیگر

تحت تبدیلات وارون پذیری همچون تبدیلات نقطه ای و یا تبدیلات برخوردی و مراتب بالاتر، دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی $R^\sigma[U]$ را به دستگاه معادلات دیفرانسیل دیگری مانند $S^\sigma[W]$ تبدیل می کنیم. و از آنجاییکه دو دستگاه $R^\sigma[U]$ و $S^\sigma[W]$ با تبدیلات وارون پذیر به هم تبدیل شده اند، بنابراین دو دستگاه هم ارز بوده و قوانین پایستگی که برای دستگاه $S^\sigma[W]$ بدست می آوریم، قوانین پایستگی جدید برای دستگاه $R^\sigma[U]$ نیز محسوب می شوند.

دستگاه N تایی از معادلات دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ (۱.۳)، تحت تبدیلات نقطه ای وارون پذیر

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(z, W), & i &= 1, \dots, n, \\ U^\mu &= U^\mu(z, W), & \mu &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (۷۰.۳)$$

و $W(z) = (W^1(z), \dots, W^m(z))$ ، $z = (z^1, \dots, z^m)$ ، $U(x) = (U^1(x), \dots, U^m(x))$ را در نظر بگیرید. تبدیل نقطه ای (۷۰.۳) و امتداد آن، هر معادله از دستگاه $R^\sigma[U]$ را به معادله ای از دستگاه

$$S^\sigma[W] = S^\sigma(z, W, \partial W, \dots, \partial^k W), \quad (۷۱.۳)$$

می نگارد. و اگر $U(x) = u(x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ باشد، در این صورت متناظرا $W(z) = w(z)$ جوابی از دستگاه $S^\sigma[W]$ با ضابطه

$$S^\sigma[w] = S^\sigma(z, w, \partial w, \dots, \partial^k w), \quad \sigma = 1, \dots, N. \quad (۷۲.۳)$$

خواهد بود.

قضیه ۱.۶.۳. فرض کنید $D_i \phi^i[u] = 0$ یک قانون پایستگی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ باشد. تحت تبدیلات نقطه ای (۷۰.۳)، قوانین پایستگی مانند $\{\psi^i[W]\}_{i=1}^n$ موجودند بطوریکه

$$J[W] D_i \phi^i[U] = \tilde{D}_i \psi^i[W], \quad (۷۳.۳)$$

برقرار باشد که در آن

$$J[W] = \frac{D_i(x^1, \dots, x^m)}{\tilde{D}_i(z^1, \dots, z^n)}, \quad (۷۴.۳)$$

همچنین D_i و \tilde{D}_i عملگر مشتقات کامل با تعریف

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} + U_i^\mu \frac{\partial}{\partial U^\mu} + U_{ii}^\mu \frac{\partial}{\partial U_{i_1}^\mu} + \dots, \\ \tilde{D}_i &= \frac{\partial}{\partial z^i} + W_i^\mu \frac{\partial}{\partial W^\mu} + W_{ii}^\mu \frac{\partial}{\partial W_{i_1}^\mu} + \dots, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (۷۵.۳)$$

بوده و $W_i^\mu = \frac{\partial W^\mu}{\partial z^i}$ ، $U_i^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^i}$ می باشند. اثبات: در مرجع [۷] اشاره شده است.

همان طور که می دانیم هر تبدیل نقطه ای که یک تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ محسوب شود، منیفلد جواب ها را ناوردا نگه می دارد. به این معنا که توابعی مانند A_τ^σ وجود دارند که در رابطه

$$S^\sigma[W] = R^\sigma[U] = A_\tau^\sigma[W] R^\tau[W]. \quad (۷۶.۳)$$

صدق کنند.

گزاره ۲.۶.۳. اگر تبدیل نقطه ای وارون پذیر $(x, u) \rightarrow (\tilde{x}(x, u), \tilde{u}(x, u))$ ، یک تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ باشد، در این صورت قوانین پایستگی $D_i \phi^i[u] = 0$ از دستگاه $R^\sigma[U]$ ، قوانین پایستگی جدید $D_i \psi^i[u] = 0$ با ضوابط

$$\psi^1[u] = \begin{pmatrix} \phi^1[\tilde{u}] & D_1 \tilde{x}^1 & \dots & D_n \tilde{x}^1 \\ \phi^2[\tilde{u}] & D_1 \tilde{x}^2 & \dots & D_n \tilde{x}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^n[\tilde{u}] & D_1 \tilde{x}^n & \dots & D_n \tilde{x}^n \end{pmatrix}_{n \times n}, \dots, \quad (77.3)$$

$$\psi^n[u] = \begin{pmatrix} D_1 \tilde{x}^1 & \dots & D_{n-1} \tilde{x}^1 & \phi^1[\tilde{u}] \\ D_1 \tilde{x}^2 & \dots & D_{n-1} \tilde{x}^2 & \phi^2[\tilde{u}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 \tilde{x}^n & \dots & D_{n-1} \tilde{x}^n & \phi^n[\tilde{u}] \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ نتیجه می دهند. اثبات: به [۷] مراجعه شود.

۲.۶.۳ محاسبه قوانین پایستگی جدید با تبدیل ضرایب پایستگی به ضرایب جدید

در این روش با تاثیر تقارن های بدست آمده از دستگاه $R^\sigma[U]$ بر مجموعه ضرایب قوانین پایستگی که در روش مستقیم محاسبه شده اند، می توان یک سری جدید مجموعه ضرایب برای دستگاه معادلات دیفرانسیل پیدا کرد که با استفاده از این مجموعه ضرایب جدید، راه رسیدن به دسته های وسیع تر قوانین پایستگی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ ، هموار می شود.

قضیه ۳.۶.۳. فرض کنید تبدیلات نقطه ای (۷۰.۳)، یک تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ باشد. اگر $\{\Lambda_\sigma[U]\}_{\sigma=1}^N$ مجموعه ای از ضرایب قوانین پایستگی برای معادله دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ با شار $\phi^i[u]$ باشد، در این صورت با استفاده (۷۴.۳) و ضرایب $A_\tau^\sigma[W]$ در (۷۱.۳) می توان یک سری جدید از ضرایب پایستگی به صورت

$$\hat{\Lambda}_\tau[W] = J[W] A_\tau^\sigma[W] \Lambda[U(z, W)], \quad \tau = 1, \dots, N, \quad (78.3)$$

بدست آورد. با استفاده از ضرایب جدید بدست آمده $\hat{\Lambda}_\tau[W]$ و رابطه

$$\hat{\Lambda}_\tau[W] R^\tau[W] = \tilde{D}_i \psi^i[W], \quad (79.3)$$

قوانین پایستگی جدید $\psi^i[W]$ ، برای دستگاه معادله دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ حاصل می شوند.

گزاره ۴.۶.۳. مجموعه ضرایب $\{\hat{\Lambda}_\tau[U]\}_{\tau=1}^N$ یک دسته قوانین پایستگی جدید برای معادله دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ ، نتیجه می دهند اگر فقط اگر این مجموعه مستقل از مجموعه ضرایب $\{\Lambda_\sigma[U]\}_{\sigma=1}^N$ روی جواب های $U(x) = u(x)$ از دستگاه (۱.۳) باشد. به عبارتی برای هر ثابت دلخواه c و

$\tau = 1, \dots, N$ نامساوی $\hat{\Lambda}_\tau[U] \neq c\Lambda_\tau[U]$ برقرار باشد.

مثال ۵.۶.۳. معادله موج (۹.۳) را با ضرایب (۱۲.۳)، و شارهایی که در جدول (۳.۵) بدست آمده است در نظر بگیرید [۲۷]،

• تحت تبدیل نقطه ای

$$\tilde{t} = t + \varepsilon, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z, \quad \tilde{u} = u,$$

حاصل از تقارن $X_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t}$ ، دترمینان ژاکوبی مورد نظر عبارتست از:

$$J[W] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

همچنین با اعمال تبدیلات لازم

$$u_{tt} = \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}}, \quad u_{xx} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}, \quad u_{yy} = \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}}, \quad u_{zz} = \tilde{u}_{\tilde{z}\tilde{z}}.$$

بر روی معادله موج (۹.۳)، دستگاه جدید به صورت

$$S[W] = R[U] = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz}. \quad (۸۰.۳)$$

بدست می آید. با استفاده از رابطه (۷۸.۳)، ضرایب جدید به شکل

$$\hat{\Lambda}_1 = J[W]A_1^\sigma \Lambda_\sigma = \begin{cases} \tilde{u}_{\tilde{t}} & \sigma = 2 \\ \tilde{u}_{\tilde{x}} & \sigma = 3 \\ \tilde{u}_{\tilde{y}} & \sigma = 4 \\ \tilde{u}_{\tilde{z}} & \sigma = 5 \\ \tilde{t}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{t}} & \sigma = 6 \\ \tilde{t}\tilde{u}_{\tilde{y}} + \tilde{y}\tilde{u}_{\tilde{t}} + \varepsilon(-\tilde{u}_{\tilde{y}}) & \sigma = 7 \\ \tilde{y}\tilde{u}_{\tilde{x}} - \tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{y}} & \sigma = 8 \\ \tilde{t}\tilde{u}_{\tilde{z}} + \tilde{z}\tilde{u}_{\tilde{t}} + \varepsilon(-\tilde{u}_{\tilde{z}}) & \sigma = 9 \end{cases}$$

محاسبه می شوند.

قوانین پایستگی جدید مربوط به ضرایب جدید محاسبه شده، در جدول (۶.۳) آورده شده است.

• با در نظر گرفتن تبدیل تقارن X_ϵ به شکل

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = z \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon), \quad \tilde{z} = z \cos(\epsilon) - y \sin(\epsilon), \quad \tilde{u} = u,$$

دترمینان ژاکوبی را به فرم

$$J[W] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{vmatrix} = 1.$$

خواهیم داشت. با اعمال تبدیلات حاصل از تقارن X_ϵ به صورت

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}}, & u_{yy} &= \cos^2 \epsilon \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} + \sin^2 \epsilon \tilde{u}_{\tilde{z}\tilde{z}} - \sin 2\epsilon \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{z}}, \\ u_{xx} &= \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}, & u_{zz} &= \sin^2 \epsilon \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} + \cos^2 \epsilon \tilde{u}_{\tilde{z}\tilde{z}} + \sin 2\epsilon \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{z}}. \end{aligned}$$

بر روی معادله موج، معادله جدید

$$S[W] = R[U] = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz}. \quad (۸۱.۳)$$

بدون تغییر ثابت باقی می ماند.

حال با ضرایب جدید

$$\hat{\Lambda}_1 = J[W] A_1^\sigma \Lambda_\sigma = \begin{cases} \tilde{u}_{\tilde{t}} & \sigma = 2 \\ \tilde{u}_{\tilde{x}} & \sigma = 3 \\ \tilde{u}_{\tilde{y}} \cos \epsilon - \tilde{u}_{\tilde{z}} \sin \epsilon & \sigma = 4 \\ \tilde{u}_{\tilde{y}} \sin \epsilon + \tilde{u}_{\tilde{z}} \cos \epsilon & \sigma = 5 \\ \tilde{t} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{x} \tilde{u}_{\tilde{t}} & \sigma = 6 \\ \tilde{t} (\tilde{u}_{\tilde{y}} \cos \epsilon - \tilde{u}_{\tilde{z}} \sin \epsilon) + \tilde{u}_{\tilde{t}} (\tilde{y} \cos \epsilon - \tilde{z} \sin \epsilon) & \sigma = 7 \\ (\tilde{y} \tilde{u}_{\tilde{x}} - \tilde{x} \tilde{u}_{\tilde{y}}) \cos \epsilon + (\tilde{x} \tilde{u}_{\tilde{z}} - \tilde{z} \tilde{u}_{\tilde{x}}) \sin \epsilon & \sigma = 8 \\ (\tilde{t} \tilde{u}_{\tilde{y}} + \tilde{y} \tilde{u}_{\tilde{t}}) \sin \epsilon + (\tilde{t} \tilde{u}_{\tilde{z}} + \tilde{z} \tilde{u}_{\tilde{t}}) \cos \epsilon & \sigma = 9 \end{cases}$$

قوانین پایستگی جدیدی بدست می آیند که نتایج مورد نظر در جدول (۷.۳) خلاصه شده است [۲۷].

۷.۳ یافتن جواب با استفاده از قوانین پایستگی

علاوه بر روش گروه های لی برای رسیدن به جواب های ناورد و کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل، می توان با کمک قوانین پایستگی پیدا شده از هر یک از روش های ذکر شده نیز

به جوابی از یک دستگاه معادله دیفرانسیل رسید، در حالت کلی می توان مرتبه دستگاه معادله دیفرانسیل مورد نظر را کاهش داد. این بخش به بررسی این روش اختصاص داده شده است. همچنین برای روشن تر شدن موضوع، روش را برای معادله موج (۳+۱) - بعدی تشریح کرده ایم.

دستگاه معادلات دیفرانسیل $R^\sigma[U]$ ، با قوانین پایستگی

$$[D_i(C^i) = \circ]_{R^\sigma[U]=\circ} = \circ, \quad (۸۲.۳)$$

که

$$C = (C^1, \dots, C^n), \quad C^i = C^i(x, u, u_{(1)}, \dots), \quad i = 1, \dots, n.$$

را در نظر بگیرید. می توان هر یک از معادلات (۸۲.۳) را به صورت

$$D_i(C^i) = \mu^\alpha F_\alpha(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(s)}). \quad (۸۳.۳)$$

که μ^α ضرایب تابعی به شکل $\mu^\alpha = \mu^\alpha(x, u, u_{(1)}, \dots)$ هستند، نوشت. از آنجایی که $D_i(C^i) = \circ$ ، یا به عبارتی

$$D_t(C^t) = \circ, \quad D_x(C^x) = \circ, \quad \dots,$$

می توان هر یک از مولفه های پایستگی را به شکل

$$C = (C^1(x^1, \dots, x^n), \dots, C^n(x^1, \dots, x^{n-1})), \quad (۸۴.۳)$$

$$C^1(x, u, u_{(1)}, \dots) = h^1(x^1, x^2, \dots, x^n),$$

$$C^2(x, u, u_{(1)}, \dots) = h^2(x^1, x^2, \dots, x^n),$$

⋮

$$C^n(x, u, u_{(1)}, \dots) = h^n(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}). \quad (۸۵.۳)$$

نوشت که هر مولفه، تابعی از متغیرهای مستقل به جز متغیر x^i می باشد. با حل دستگاه

$$D_1[C^1(x, u, u_{(1)}, \dots)] = D_1(h^1) = \circ,$$

$$D_2[C^1(x, u, u_{(1)}, \dots)] = D_2(h^1) = \circ,$$

⋮

$$D_n[C^1(x, u, u_{(1)}, \dots)] = D_n(h^1) = \circ. \quad (۸۶.۳)$$

و جایگذاری در دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۳)، جواب های معادلات دیفرانسیل بدست می آیند.

مثال ۱.۷.۳. معادله $(۳ + ۱)$ - بعدی موج (۹.۳) را با قانون پایستگی

$$D_t(u_t) + D_x(-u_x) + D_y(-u_y) + D_z(-u_z) = 0, \quad (۸۷.۳)$$

در نظر بگیرید. با استفاده از روابط (۸۶.۳) و (۸۵.۳) جواب معادله موج، ترکیب خطی از توابع h^i به شکل

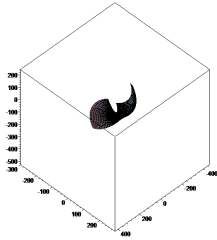
$$u = h^1(x, y, z)t - h^2(t, y, z)x - h^3(t, x, z)y - h^4(t, x, y)z, \quad (۸۸.۳)$$

خواهد بود. که با جایگذاری (۸۸.۳) در معادله موج (۹.۳) به معادلات کاهش یافته

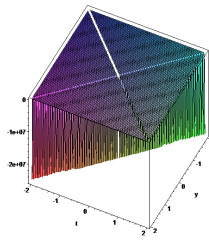
$$\begin{aligned} h^1_{xx} + h^1_{yy} + h^1_{zz} &= 0, \\ h^2_{tt} - h^2_{yy} - h^2_{zz} &= 0, \\ h^3_{tt} - h^3_{xx} - h^3_{zz} &= 0, \\ h^4_{tt} - h^4_{xx} - h^4_{yy} &= 0. \end{aligned} \quad (۸۹.۳)$$

خواهیم رسید.

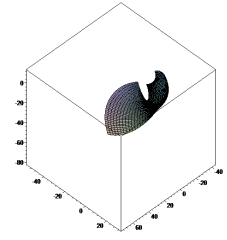
جواب تعدادی از معادلات کاهش یافته (۸۹.۳)، به همراه شکل آن ها در انتهای فصل آورده شده است [۲۷].



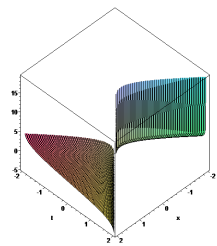
$$u = \sqrt{tx^2} + \sqrt{ty^2} + \sqrt{t^3}$$



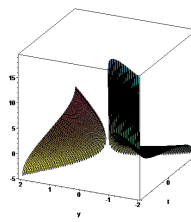
$$u = \frac{t}{t^2 - y^2}$$



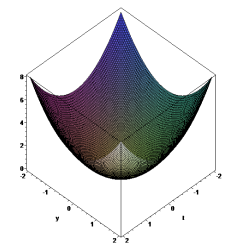
$$u = y(t^2 + x^2)$$



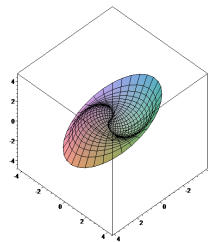
$$u = \ln\left(\frac{x-t}{x+t}\right)$$



$$u = \ln\left(\frac{y-t}{y+t}\right)$$



$$u = t^2 + y^2$$



$$u = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{t^2-x^2} + \sqrt{\frac{x^4}{(t^2-x^2)^2} + \frac{x^2}{t^2-x^2}}\right)$$

شکل ۱.۳: شکی هابی از جواب های دقیق معادلات کاهش یافته (۸۹.۳)

جدول ۶.۳: قوانین پایستگی جدید با استفاده از ضرایب جدید برای تقارن X_4

$\sigma = ۲$	ψ^t	$\frac{1}{4}(\tilde{u}_t^x + \tilde{u}_x^y + \tilde{u}_y^z + \tilde{u}_z^x)$	○
	ϕ^x	$-\tilde{u}_x \tilde{u}_t$	○
	ϕ^y	$-\tilde{u}_y \tilde{u}_t$	○
	ϕ^z	$-\tilde{u}_z \tilde{u}_t$	○
$\sigma = ۳$	ψ^t	$\tilde{u}_x \tilde{u}_t$	○
	ϕ^x	$\frac{1}{4}(\tilde{u}_y^x + \tilde{u}_z^y - \tilde{u}_x^z - \tilde{u}_t^x)$	○
	ϕ^y	$-\tilde{u}_x \tilde{u}_y$	○
	ϕ^z	$-\tilde{u}_x \tilde{u}_z$	○
$\sigma = ۴$	ψ^t	$\tilde{u}_y \tilde{u}_t$	○
	ϕ^x	$-\tilde{u}_x \tilde{u}_y$	○
	ϕ^y	$\frac{1}{4}(\tilde{u}_x^y + \tilde{u}_z^y - \tilde{u}_y^z - \tilde{u}_t^y)$	○
	ϕ^z	$-\tilde{u}_y \tilde{u}_z$	○
$\sigma = ۵$	ψ^t	$\tilde{u}_z \tilde{u}_t$	○
	ϕ^x	$-\tilde{u}_x \tilde{u}_z$	○
	ϕ^y	$-\tilde{u}_y \tilde{u}_z$	○
	ϕ^z	$\frac{1}{4}(\tilde{u}_x^z + \tilde{u}_y^z - \tilde{u}_z^x - \tilde{u}_t^z)$	○
$\sigma = ۶$	ψ^t	$\frac{1}{4}\tilde{x}(\tilde{u}_t^x + \tilde{u}_x^y + \tilde{u}_y^z + \tilde{u}_z^x) + \tilde{t}\tilde{u}_x \tilde{u}_t$	$-\varepsilon(\tilde{u}_x \tilde{u}_t)$
	ϕ^x	$\frac{1}{4}\tilde{t}(\tilde{u}_y^x + \tilde{u}_z^y - \tilde{u}_x^z - \tilde{u}_t^x) - \tilde{x}\tilde{u}_x \tilde{u}_t$	$\frac{1}{4}\varepsilon(\tilde{u}_x^y + \tilde{u}_t^y - \tilde{u}_y^z - \tilde{u}_z^x)$
	ϕ^y	$-(\tilde{x}\tilde{u}_y \tilde{u}_t + \tilde{t}\tilde{u}_x \tilde{u}_y)$	$\varepsilon(\tilde{u}_x \tilde{u}_y)$
	ϕ^z	$-(\tilde{x}\tilde{u}_z \tilde{u}_t + \tilde{t}\tilde{u}_x \tilde{u}_z)$	$\varepsilon(\tilde{u}_x \tilde{u}_z)$
$\sigma = ۷$	ψ^t	$\frac{1}{4}\tilde{y}(\tilde{u}_t^x + \tilde{u}_x^y + \tilde{u}_y^z + \tilde{u}_z^x) + \tilde{t}\tilde{u}_y \tilde{u}_t$	$-\tilde{u}_y \tilde{u}_t$
	ϕ^x	$-\tilde{u}_x(\tilde{t}\tilde{u}_y + \tilde{y}\tilde{u}_t)$	$\tilde{u}_x \tilde{u}_y$
	ϕ^y	$-\frac{1}{4}\tilde{t}(\tilde{u}_y^x + \tilde{u}_t^y - \tilde{u}_x^z - \tilde{u}_z^x) - \tilde{y}\tilde{u}_y \tilde{u}_t$	$\frac{1}{4}(\tilde{u}_y^x + \tilde{u}_t^y - \tilde{u}_x^z - \tilde{u}_z^x)$
	ϕ^z	$-\tilde{u}_z(\tilde{t}\tilde{u}_y + \tilde{y}\tilde{u}_t)$	$\tilde{u}_y \tilde{u}_z$
$\sigma = ۸$	ψ^t	$(\tilde{y}\tilde{u}_x \tilde{u}_t - \tilde{x}\tilde{u}_y \tilde{u}_t)$	○
	ϕ^x	$\frac{1}{4}\tilde{y}(\tilde{u}_y^x + \tilde{u}_z^y - \tilde{u}_x^z - \tilde{u}_t^x) + \tilde{x}\tilde{u}_x \tilde{u}_y$	○
	ϕ^y	$\frac{1}{4}\tilde{x}(\tilde{u}_y^x + \tilde{u}_t^y - \tilde{u}_x^z - \tilde{u}_z^x) - \tilde{y}\tilde{u}_x \tilde{u}_y$	○
	ϕ^z	$(\tilde{x}\tilde{u}_y \tilde{u}_z - \tilde{y}\tilde{u}_x \tilde{u}_z)$	○
$\sigma = ۹$	ψ^t	$\frac{1}{4}\tilde{z}(\tilde{u}_t^x + \tilde{u}_x^y + \tilde{u}_y^z + \tilde{u}_z^x) + \tilde{t}\tilde{u}_z \tilde{u}_t$	$-\tilde{u}_z \tilde{u}_t$
	ϕ^x	$-\tilde{u}_x(\tilde{t}\tilde{u}_z + \tilde{z}\tilde{u}_t)$	$\tilde{u}_x \tilde{u}_z$
	ϕ^y	$-\tilde{u}_y(\tilde{t}\tilde{u}_z + \tilde{z}\tilde{u}_t)$	$\tilde{u}_y \tilde{u}_z$
	ϕ^z	$-\frac{1}{4}\tilde{t}(\tilde{u}_t^x + \tilde{u}_z^y - \tilde{u}_x^z - \tilde{u}_y^x) - \tilde{z}\tilde{u}_z \tilde{u}_t$	$-\frac{1}{4}(\tilde{u}_t^x + \tilde{u}_z^y - \tilde{u}_x^z - \tilde{u}_y^x)$

جدول ۷.۳: قوانین پایستگی جدید با استفاده از ضرایب جدید برای تقارن X_6

$\sigma = ۲$	ψ^t	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{u}_t^x + \tilde{u}_x^t + \tilde{u}_y^x + \tilde{u}_z^x)$
	ϕ^x	$-\tilde{u}_x \tilde{u}_t$
	ϕ^y	$-\tilde{u}_y \tilde{u}_t$
	ϕ^z	$-\tilde{u}_z \tilde{u}_z$
$\sigma = ۳$	ψ^t	$\tilde{u}_x \tilde{u}_t$
	ϕ^x	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{u}_y^x + \tilde{u}_z^x - \tilde{u}_x^x - \tilde{u}_t^x)$
	ϕ^y	$-\tilde{u}_x \tilde{u}_y$
	ϕ^z	$-\tilde{u}_x \tilde{u}_z$
$\sigma = ۴$	ψ^t	$\tilde{u}_t(\tilde{u}_y \cos \varepsilon - \tilde{u}_z \sin \varepsilon)$
	ϕ^x	$-\tilde{u}_x(\tilde{u}_y \cos \varepsilon - \tilde{u}_z \sin \varepsilon)$
	ϕ^y	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{u}_x^y - \tilde{u}_t^y + \tilde{u}_y^y(\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon) - \tilde{u}_z^y(\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon) + \sqrt{2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \tilde{u}_y \tilde{u}_z)$
	ϕ^z	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^y \varepsilon (\tilde{u}_x^z - \tilde{u}_y^z) + \tilde{u}_y \tilde{u}_z (\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon)$
$\sigma = ۵$	ψ^t	$\tilde{u}_t(\sin \varepsilon \tilde{u}_y + \cos \varepsilon \tilde{u}_z)$
	ϕ^x	$-\tilde{u}_x(\sin \varepsilon \tilde{u}_y + \cos \varepsilon \tilde{u}_z)$
	ϕ^y	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^y \varepsilon (\tilde{u}_x^y - \tilde{u}_t^y) + \tilde{u}_y \tilde{u}_z (\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon)$
	ϕ^z	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{u}_x^z - \tilde{u}_t^z - \tilde{u}_y^z(\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon) + \tilde{u}_z^z(\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon) - \sqrt{2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \tilde{u}_y \tilde{u}_z)$
$\sigma = ۶$	ψ^t	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}(\tilde{u}_t^x + \tilde{u}_x^x + \tilde{u}_y^x + \tilde{u}_z^x) + \tilde{t} \tilde{u}_x \tilde{u}_t)$
	ϕ^x	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{t}(\tilde{u}_y^x + \tilde{u}_z^x - \tilde{u}_x^x - \tilde{u}_t^x) - \tilde{x} \tilde{u}_x \tilde{u}_t)$
	ϕ^y	$-(\tilde{x} \tilde{u}_y \tilde{u}_t + \tilde{t} \tilde{u}_x \tilde{u}_y)$
	ϕ^z	$-(\tilde{x} \tilde{u}_z \tilde{u}_t + \tilde{t} \tilde{u}_x \tilde{u}_z)$
$\sigma = ۷$	ψ^t	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{y} \cos \varepsilon - \tilde{z} \sin \varepsilon)(\tilde{u}_t^y + \tilde{u}_x^y + \tilde{u}_y^y + \tilde{u}_z^y) + \tilde{t}(\tilde{u}_y \cos \varepsilon - \tilde{u}_z \sin \varepsilon)$
	ϕ^x	$-\tilde{u}_x(\cos \varepsilon(\tilde{t} \tilde{u}_y + \tilde{y} \tilde{u}_t) - \sin \varepsilon(\tilde{t} \tilde{u}_z + \tilde{z} \tilde{u}_t))$
	ϕ^y	$\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{t}(\tilde{u}_t^y - \tilde{u}_x^y - \tilde{u}_y^y(\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon) + \tilde{u}_z^y(\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon) - \sqrt{2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \tilde{u}_y \tilde{u}_z)$
	ϕ^z	$-(\tilde{u}_y \cos \varepsilon + \tilde{u}_z \sin \varepsilon)(\cos \varepsilon(\tilde{t} \tilde{u}_y + \tilde{y} \tilde{u}_t) - \sin \varepsilon(\tilde{t} \tilde{u}_z + \tilde{z} \tilde{u}_t))$
$\sigma = ۸$	ψ^t	$\tilde{u}_t(\cos \varepsilon(\tilde{y} \tilde{u}_x - \tilde{x} \tilde{u}_y) + \sin \varepsilon(\tilde{x} \tilde{u}_z - \tilde{z} \tilde{u}_x))$
	ϕ^x	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{y} \cos \varepsilon - \tilde{z} \sin \varepsilon)(\tilde{u}_t^x + \tilde{u}_x^x + \tilde{u}_y^x + \tilde{u}_z^x) + \tilde{t} \tilde{u}_x(\tilde{u}_y \cos \varepsilon - \tilde{u}_z \sin \varepsilon)$
	ϕ^y	$\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{t}(\tilde{u}_t^y - \tilde{u}_x^y - \tilde{u}_y^y(\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon) + \tilde{u}_z^y(\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon) + \sqrt{2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \tilde{u}_y \tilde{u}_z)$
	ϕ^z	$-(\tilde{u}_y \sin \varepsilon + \tilde{u}_z \cos \varepsilon)(\cos \varepsilon(\tilde{y} \tilde{u}_x - \tilde{x} \tilde{u}_y) + \sin \varepsilon(\tilde{x} \tilde{u}_z - \tilde{z} \tilde{u}_x))$
$\sigma = ۹$	ψ^t	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{y} \sin \varepsilon + \tilde{z} \cos \varepsilon)(\tilde{u}_t^y + \tilde{u}_x^y + \tilde{u}_y^y + \tilde{u}_z^y) + \tilde{t} \tilde{u}_t(\tilde{u}_y \sin \varepsilon + \tilde{u}_z \cos \varepsilon)$
	ϕ^x	$-\tilde{u}_x(\sin \varepsilon(\tilde{t} \tilde{u}_y + \tilde{y} \tilde{u}_t) + \cos \varepsilon(\tilde{t} \tilde{u}_z + \tilde{z} \tilde{u}_t))$
	ϕ^y	$-(\cos \varepsilon \tilde{u}_y - \sin \varepsilon \tilde{u}_z)(\sin \varepsilon(\tilde{t} \tilde{u}_y + \tilde{y} \tilde{u}_t) + \cos \varepsilon(\tilde{t} \tilde{u}_z + \tilde{z} \tilde{u}_t))$
	ϕ^z	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{t}(\tilde{u}_t^y - \tilde{u}_x^y + \tilde{u}_y^y(\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon) + \tilde{u}_z^y(\sin^y \varepsilon - \cos^y \varepsilon) + \sqrt{2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \tilde{u}_y \tilde{u}_z)$

فصل ۴

تقارن و قوانین پایستگی تقریبی

تقارن های تقریبی از یک معادله دیفرانسیل با ضریب اختلال ε همانند تقارن های دقیق، در تولید جواب و ساخت قوانین پایستگی تقریبی نقش مهمی را ایفا می کنند. از دیگر کاربردهای تقارن تقریبی، می توان به داشتن تحلیل عددی مناسب برای معادلات دیفرانسیل تقریبی نام برد. در دهه های اخیر تلاش های زیادی توسط محققان برای رسیدن به تقارن های تقریبی از یک معادله دیفرانسیل تقریبی با پارامتر کوچک ε انجام شده است. تا جایی که بایکوف^۱، فاشچیچ^۲ و شتلن^۳ تکنیک یافتن تقارن های تقریبی برای معادلات دیفرانسیل تقریبی را برای اولین بار ارائه کردند [۴، ۱۵].

کاربردهایی از تقارن های تقریبی را می توان در مقالات کارا^۴ و محمد^۵ و دیگران نیز مطالعه کرد [۱۴، ۴۰، ۶۳].

Baikov^۱
Fushchich^۲
Shtelen^۳
Kara^۴
Mahomed^۵

۱.۴ گروه تبدیلات تقریبی

توابع n متغیره $f(x, \varepsilon)$ با پارامتر ε را در نظر بگیرید که در یک همسایگی از $\varepsilon \neq 0$ تعریف شده و در نقاط $x = (x^1, \dots, x^n)$ تمامی مشتقات آن ها تا هر مرتبه دلخواه متناهی و پیوسته باشند. اگر تابع $f(x, \varepsilon)$ در شرط

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, \varepsilon)}{\varepsilon^p} = 0,$$

صدق کند در این صورت تساوی

$$f(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^p),$$

برقرار است و گفته می شود که f مرتبه ای کمتر از ε^p دارد.

تعریف ۱.۱.۴. دو تابع f و g را به طور تقریبی هم ارز گوییم هر گاه داشته باشیم،

$$f(x, \varepsilon) - g(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^p),$$

هم ارزی دو تابع f و g را با نماد $f \approx g$ نمایش می دهیم.

در حالت خاص، بسط تیلور تابع $f(x, \varepsilon)$ از درجه p حول نقطه x ، با پارامتر ε عبارتست با

$$f(x, \varepsilon) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \dots + \varepsilon^p f_p(x),$$

که در صورت هم ارزی f و g رابطه

$$g(x, \varepsilon) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \dots + \varepsilon^p f_p(x) + O(\varepsilon^p),$$

را خواهیم داشت.

را به عنوان مجموعه ای از توابع برداری هموار حول نقطه x ، که نمایش مختصاتی به شکل

$$f_0^i(x, a), \dots, f_p^i(x, a), \quad i = 1, \dots, n,$$

دارند، در نظر بگیرید. گروه تبدیلات تقریبی یک پارامتری G با پارامتر حقیقی a به فرم

$$\bar{x}^i \approx f_0^i(x, a) + \varepsilon f_1^i(x, a) + \dots + \varepsilon^p f_p^i(x, a), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

از نقاط $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ به نقاط $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \in \mathbb{R}^n$ به صورت

$$\bar{x} = f(x, a, \varepsilon), \quad (2.4)$$

تعریف می شود، که معرف یک دسته از تبدیلات وارون پذیر با نمایش مختصاتی

$$f^i(x, a, \varepsilon) = f_0^i(x, a) + \varepsilon f_1^i(x, a) + \dots + \varepsilon^p f_p^i(x, a),$$

و شرط $f(x, 0, \varepsilon) \approx x$ می باشند.

تعریف ۲.۱.۴. مجموعه تبدیلات (۲.۴)، به عنوان یک گروه تبدیلات تقریبی یک پارامتری تعریف می شود هرگاه هم ارزی

$$f(f(x, a, \varepsilon), b, \varepsilon) \approx f(x, a + b, \varepsilon),$$

برای تمام تبدیلات وارون پذیر (۲.۴)، برقرار باشد.

تعریف ۳.۱.۴. مولد یک گروه تبدیلات تقریبی مانند G ، دسته ای از عملگرهای دیفرانسیل خطی مرتبه یک به صورت

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(x, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.4)$$

هستند بطوریکه هم ارزی

$$\xi^i(x, \varepsilon) \approx \xi_0^i(x) + \varepsilon \xi_1^i(x) + \dots + \varepsilon^p \xi_p^i(x),$$

$$\xi_\nu^i(x) = \left. \frac{\partial f_\nu^i(x, a)}{\partial a} \right|_{a=0},$$

برای هر $1 \leq i \leq n$ و $0 \leq \nu \leq p$ برقرار باشد. بنابراین مولد گروه تبدیلات تقریبی (۲.۴) را می توان به فرم

$$X = \sum_{i=1}^n (\xi_0^i(x) + \varepsilon \xi_1^i(x) + \dots + \varepsilon^p \xi_p^i(x)) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (4.4)$$

نوشت.

۲.۴ معادلات تقریبی لی

با در نظر گرفتن $p = 1$ برای گروه تبدیلات تقریبی یک پارامتری G ، عبارت هم ارزی

$$\bar{x}^i \approx f_0^i(x, a) + \varepsilon f_1^i(x, a), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.4)$$

نمایشی از گروه تبدیلات تقریبی مرتبه یک خواهد بود.
با در نظر گرفتن

$$X_0 = \xi_0^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_1 = \xi_1^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

فرض کنید

$$X = X_0 + \varepsilon X_1, \quad (6.4)$$

مولد تقریبی برای گروه تبدیلات G باشد، از آنجایی که تبدیل تقریبی مختصاتی از نقاط x به نقاط $\bar{x} = \bar{x}_0 + \varepsilon \bar{x}_1$ به صورت

$$\bar{x}^i = \bar{x}_0^i + \varepsilon \bar{x}_1^i, \quad \bar{x}_0^i = f_0^i(x, a), \quad \bar{x}_1^i = f_1^i(x, a), \quad (7.4)$$

می باشد، لذا با حل معادلات

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_0^i}{da} &= \xi_0^i(\bar{x}_0), \quad d\bar{x}_0^i|_{a=0} = x^i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{d\bar{x}_1^i}{da} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_0^i(x)}{\partial x^k} \Big|_{x=\bar{x}_0} \bar{x}_1^k + \xi_1^i(\bar{x}_0), \quad d\bar{x}_1^i|_{a=0} = 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

که به معادلات تقریبی لی یا همان معادلات مشخصه تقریبی معروف هستند، می توان گروه تبدیلات تقریبی (۵.۴) را برای تقارن تقریبی (۶.۴) بدست آورد.

۳.۴ نگاشت نمایی تقریبی

با محاسبه اتحادهای

$$\begin{aligned} \langle\langle aX_0, aX_1 \rangle\rangle &= aX_1 + \frac{a^2}{2!} [X_0, X_1] + \frac{a^3}{3!} [X_0, [X_0, X_1]] + \dots, \\ e^{aX_0} &= 1 + aX_0 + \frac{a^2}{2!} X_0^2 + \frac{a^3}{3!} X_0^3 + \dots, \\ \bar{x}_0^i &= e^{aX_0}(x^i), \quad \bar{x}_1^i = \langle\langle aX_0, aX_1 \rangle\rangle(\bar{x}_0^i). \end{aligned} \quad (9.4)$$

می توان گروه تبدیلات تقریبی یک پارامتری با پارامتر a را به صورت

$$\bar{x}^i = \bar{x}_0^i + \varepsilon \bar{x}_1^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.4)$$

برای مولد تقریبی (۶.۴) که در آن $X_0 = \sum_{i=1}^n \xi_0^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ و $X_1 = \sum_{i=1}^n \xi_1^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ برقرار هستند، بدست آورد.

مثال ۱.۳.۴. مولد تقریبی

$$\begin{aligned} X &= \left(1 + \varepsilon [(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2] \right) \frac{\partial}{\partial x^1} \\ &+ 2\varepsilon x^1 \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^4} \right), \end{aligned} \quad (11.4)$$

را در نظر بگیرید، که در آن

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ X_1 &= [(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2] \frac{\partial}{\partial x^1} + 2x^1 \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^4} \right), \end{aligned}$$

$$\bar{x}_\circ^1 = x^1 + a, \quad \bar{x}_\circ^j = x^j, \quad j = 2, 3, 4.$$

برای رسیدن به گروه تبدیلات تقریبی (۱۰.۴)، ابتدا لازم است روابط (۹.۴) را در اختیار داشته باشیم

$$\begin{aligned} \ll aX_\circ, aX_1 \gg &= aX_1 + \frac{a^2}{2!}[X_\circ, X_1] + \frac{a^3}{3!}[X_\circ, [X_\circ, X_1]] + \dots, \\ &= \left([(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2]a + x^1 a^2 + \frac{1}{3}a^3 \right) \frac{\partial}{\partial x^1} \\ &+ (2ax^1 + a^2) \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^4} \right). \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} [X_\circ, X_1] &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^4}, \\ [X_\circ, [X_\circ, X_1]] &= 2 \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad [X_\circ, [X_\circ, [X_\circ, X_1]]] = 0, \end{aligned}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^1 &= \ll aX_\circ, aX_1 \gg (\bar{x}_\circ^1) = [(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2]a + x^1 a^2 + \frac{1}{3}a^3, \\ \bar{x}_1^j &= (2ax^1 + a^2)x^j, \quad j = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

بنابراین گروه تبدیلات تقریبی برای مولد (۱۱.۴)، به صورت

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &\approx \bar{x}_\circ^1 + \varepsilon \bar{x}_1^1 = x^1 + a + \varepsilon \left([(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2]a + x^1 a^2 + \frac{1}{3}a^3 \right), \\ \bar{x}^j &\approx \bar{x}_\circ^j + \varepsilon \bar{x}_1^j = x^j + \varepsilon (2ax^1 + a^2)x^j, \quad j = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

بدست می آید.

۴.۴ تقارن های تقریبی

تعریف ۱.۴.۴. با در نظر گرفتن هم ارزی

$$\bar{z}^i \approx f(z, a, \varepsilon) \equiv f_\circ^i(z, a) + \varepsilon f_1^i(z, a), \quad i = 1, \dots, N. \quad (12.4)$$

به عنوان یک گروه تبدیلات تقریبی یک پارامتری، معادله تقریبی

$$F(z, \varepsilon) \equiv F_\circ(z) + \varepsilon F_1(z) \approx 0, \quad (13.4)$$

به طور تقریبی نسبت به گروه تبدیلات G ، ناورد است هر گاه

$$F(\bar{z}, \varepsilon) \approx F(f(z, a, \varepsilon), \varepsilon) = O(\varepsilon).$$

در معادله (۱۳.۴) صدق کند. و اگر داشته باشیم $z = (x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)})$ در این صورت G یک گروه تقارن تقریبی برای معادله دیفرانسیل از مرتبه k (۱۳.۴) می باشد.

قضیه ۲.۴.۴. معادله دیفرانسیل تقریبی (۱۳.۴)، تحت گروه تبدیلات تقریبی (۱۲.۴)، با مولد

$$X = X^{\circ} + \varepsilon X^1$$

$$[XF(z, \varepsilon)]_{F \approx \circ} = O(\varepsilon), \quad (14.4)$$

برقرار باشد، یا به عبارت دیگر اتحاد

$$\left[X^{\circ} F_{\circ}(z) + \varepsilon \left(X^1 F_{\circ}(z) + X^{\circ} F_1(z) \right) \right]_{(4.13)} = O(\varepsilon). \quad (15.4)$$

را داشته باشیم.

اثبات در [۳۱] آورده شده است.

تذکر ۳.۴.۴. معادلات مشخصه (۱۵.۴) را می توان به صورت

$$X^{\circ} F_{\circ}(z) = \lambda(z) F_{\circ}(z), \quad (16.4)$$

$$X^1 F_{\circ}(z) + X^{\circ} F_1(z) = \lambda(z) F_1(z). \quad (17.4)$$

نوشت، که با حل آن ها تقارن های تقریبی $X = X^{\circ} + \varepsilon X^1$ برای معادله دیفرانسیل تقریبی (۱۳.۴) بدست می آیند.

قضیه ۴.۴.۴. اگر معادله دیفرانسیل تقریبی (۱۳.۴)، با مولد $X = X^{\circ} + \varepsilon X^1$ که $X^{\circ} \neq \circ$ ، G را به عنوان گروه تبدیلات تقریبی بپذیرد، در این صورت مولد

$$X^{\circ} = \sum_{i=1}^n \xi_{\circ}^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad (18.4)$$

یک تقارن دقیق برای معادله غیر تقریبی

$$F_{\circ}(z) = \circ, \quad (19.4)$$

خواهد بود.

اثبات: به [۳۱] مراجعه شود.

تعریف ۵.۴.۴. معادلات (۱۹.۴) و (۱۳.۴) به ترتیت معادله غیر اختلال و معادله اختلال از یک معادله دیفرانسیل تقریبی نامیده می شوند، تحت شرایط قضیه (۴.۴.۴)، مولد X° یک تقارن پایدار برای معادله غیر اختلال (۱۹.۴) نامیده می شود. که متناظرا مولد $X = X^{\circ} + \varepsilon X^1$ یک تقارن اختلال یا همان تقارن تقریبی برای معادله دیفرانسیل (۱۳.۴) می باشد. به عبارتی مولد بی نهایت کوچک $X = X^{\circ} + \varepsilon X^1$ شکل تغییر یافته مولد بی نهایت کوچک X° از معادله (۱۹.۴) است که توسط قسمت اختلال معادله دیفرانسیل یعنی $\varepsilon F_1(z)$ تولید شده است.

به طور کلی اگر تقارن های کلی معادله دیفرانسیل تقریبی (۱۳.۴)، پایدار و فاقد قسمت اختلال باشند در این صورت گوییم معادله (۱۳.۴) تقارن های دقیق را از معادله غیر اختلال (۱۹.۴) به ارث برده است.

۱.۴.۴ محاسبه تقارن های تقریبی برای معادلات دیفرانسیل تقریبی

قضیه (۴.۴.۴) و روابط (۱۶.۴) و (۱۷.۴) شرایط محاسبه تقارن های تقریبی را برای یک معادله دیفرانسیل تقریبی با پارامتر کوچک ε مهیا می کنند. الگوریتم محاسبه تقارن های تقریبی را می توان به شکل زیر خلاصه کرد.

- در گام اول، ابتدا با در نظر گرفتن معادله غیر اختلال (۱۹.۴)، تقارن های دقیق X° را با حل معادلات مشخصه

$$X^\circ F_\circ(z) |_{F_\circ(z)=\circ} = \circ, \quad (20.4)$$

بدست می آوریم.

- در گام بعدی با مشخص شدن تقارن های دقیق X° و در نظر گرفتن قسمت اختلال $F_1(z)$ و غیر اختلال $F_\circ(z)$ ، تابع اختلال \mathcal{H} را به صورت

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\varepsilon} \left[X^\circ (F_\circ(z) + \varepsilon F_1(z)) |_{F_\circ(z) + \varepsilon F_1(z) = \circ} \right], \quad (21.4)$$

تعریف می کنیم.

- در گام نهایی با مشخص شدن تابع اختلال \mathcal{H} و حل معادلات مشخصه

$$X^1 F_\circ(z) |_{F_\circ(z)=\circ} + \mathcal{H} = \circ. \quad (22.4)$$

مولد X^1 از تقارن تقریبی $X = X^\circ + \varepsilon X^1$ ، مشخص می شود.

برنامه نویسی روند یافتن تقارن های تقریبی برای یک معادله دیفرانسیل تقریبی، در نرم افزار میپیل نوشته شده است.

مثال ۶.۴.۴. معادله تقریبی KdV مرتبه ۵

$$\Delta := u_t - 2^\circ u^2 u_x - 2^5 u_x u_{xx} - 1^\circ u u_{xxx} - u_{xxxx} + \varepsilon u_t = \circ, \quad (23.4)$$

با معادله غیر اختلال

$$\Delta_\circ(t, x) := u_t - 2^\circ u^2 u_x - 2^5 u_x u_{xx} - 1^\circ u u_{xxx} = \circ, \quad (24.4)$$

و قسمت اختلال

$$\Delta_1(t, x) := \varepsilon u_t = \circ, \quad (25.4)$$

را در نظر می‌گیریم. همان طور که در مثال (۵.۶.۲) از بخش اول نشان دادیم، تقارن‌های پایدار برای معادله (۲۴.۴) عبارتند از:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = \frac{x}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2u}{\Delta} \frac{\partial}{\partial u}.$$

به کمک نرم افزار میپل، تابع \mathcal{H} و تقارن‌های تقریبی را به ترتیب به صورت

$$\mathcal{H} = \frac{\gamma B \Delta}{\Delta} (u_t - \gamma \circ u^2 u_x - \gamma \circ u u_{xxx} - \gamma \Delta u_x u_{xx} - u_{xxxxx} + \varepsilon u_t),$$

$$X_1 = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t},$$

بدست می‌آوریم. (B عدد ثابت و دلخواه می‌باشد).

بنابراین تقارنهای تقریبی و غیر تقریبی

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_3 &= \frac{x}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2u}{\Delta} \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_4 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, & X_5 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (26.4)$$

را برای معادله تقریبی (۲۳.۴)، خواهیم داشت.

۲.۴.۴ محاسبه تقارن‌های تقریبی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل

مشابه روش یافتن تقارن‌های تقریبی برای یک معادله دیفرانسیل تقریبی، می‌توان تقارن‌های یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تقریبی را نیز بدست آورد [۵۴].
دستگاه معادلات دیفرانسیل تقریبی

$$\Delta_k = \Delta_k^\circ(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u) + \sum_{t=1}^k \varepsilon^t \Delta_k^t(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u) = \circ, \quad (27.4)$$

با قسمت غیر تقریبی

$$\Delta_k^\circ(x, u, u_{(1)}, \dots, \partial^r u) = \circ, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (28.4)$$

و مولد تقریبی مرتبه k ،

$$X = X^\circ + \sum_{t=1}^k \varepsilon^t X^t,$$

که $X(\Delta_k)|_{(4.27)} = O(\varepsilon^{k+1})$ را در نظر بگیرید. به عبارتی مولد

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (29.4)$$

با

$$\xi^i = \xi_0^i + \varepsilon \xi_1^i + \dots + \varepsilon^k \xi_k^i, \quad \eta^i = \eta_0^i + \varepsilon \eta_1^i + \dots + \varepsilon^k \eta_k^i.$$

یک مولد بی نهایت کوچک تقریبی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل تقریبی (۲۷.۴) می باشد.

ابتدا می بایست تقارن های دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر تقریبی (۲۸.۴) را با حل معادلات مشخصه

$$X^\circ(\Delta_k^\circ)|_{(\mathcal{F}, \mathcal{Z})} = 0,$$

بدست آوریم.

در مرحله بعد با حل معادلات مشخصه

$$X^1 \Delta_k^\circ(x, u, \partial u, \dots)|_{\Delta_k^\circ=0} + \mathcal{H} = 0, \quad (30.4)$$

که تابع اختلال \mathcal{H} در آن به شکل

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\varepsilon} \left[X^\circ \left(\Delta_k^\circ(x, u, \partial u, \dots) + \varepsilon \Delta_k^1(x, u, \partial u, \dots) \right) \Big|_{\Delta_k^\circ + \varepsilon \Delta_k^1 = 0} \right]. \quad (31.4)$$

تعریف شده است، تقارن های تقریبی X^1 برای دستگاه معادلات دیفرانسیل تقریبی (۲۷.۴)، مشخص خواهند شد.

برنامه نویسی روند یافتن تقارن های تقریبی برای یک دستگاه معادله دیفرانسیل تقریبی، در نرم افزار میپل نوشته شده است.

مثال ۷.۴.۴. دستگاه معادلات دیفرانسیل تقریبی

$$\begin{cases} u_t - u_x - v + \varepsilon u_x = 0, \\ v_t - v_x - u + \varepsilon v_x = 0. \end{cases} \quad (32.4)$$

با

$$\Delta_1^\circ = u_t - u_x - v, \quad \Delta_2^\circ = v_t - v_x - u, \quad \Delta_1^1 = u_x, \quad \Delta_2^1 = v_x. \quad (33.4)$$

که دستگاه غیر تقریبی آن به صورت

$$\begin{cases} u_t - u_x - v = 0, \\ v_t - v_x - u = 0. \end{cases} \quad (34.4)$$

می باشد، را در نظر بگیرید [۵۴].

تقارن های تقریبی و غیر تقریبی

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_3 &= t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}, & X_4 &= u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_5 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, & X_6 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial u}, & X_7 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_8 &= \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + \left(\int \xi_0^t u du \right) \frac{\partial}{\partial v} \right). \end{aligned} \quad (35.4)$$

برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۲.۴)، با کمک نرم افزار میپل بدست می آیند.

۵.۴ قوانین پایستگی تقریبی

از آنجایی که قوانین پایستگی نقش مهمی را در ریاضیات و پدیده های فیزیکی ایفا می کنند، محققان مطالعات وسیعی بر روی چگونگی ساخت و تولید قوانین پایستگی تقریبی از یک معادله دیفرانسیل تقریبی انجام داده اند [۳۷، ۴۱، ۳۵، ۱۳]. به عنوان نمونه جانفیلیا^۶ در مقاله [۳۶] نحوه بدست آوردن قوانین پایستگی تقریبی به کمک تقارن های نوتر تقریبی و لاگرانژی جزئی را مورد بررسی قرار داده است. تعمیم مفهوم خود الحاق غیر خطی تقریبی که توسط ابراگیموف برای ایجاد قوانین پایستگی به کار رفته است، توسط کارا^۷ و فروز^۸ انجام شده است [۱۳].

ما در این بخش ابتدا با مفهوم خود الحاق غیر خطی تقریبی برای معادلات دیفرانسیل تقریبی آشنا می شویم، سپس با کمک این تعریف، مولفه های پایستگی تقریبی که توسط ابراگیموف در [۳۳، ۳۲] ارائه شده است، قوانین پایستگی تقریبی را بدست می آوریم. در ادامه با ارائه مثالی برای دستگاه معادلات تقریبی، کاری متمایز با دیگر مقالات که تمامی مثال خود را به یافتن تقارن و قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل تقریبی اختصاص داده اند، موضوع این بخش را به پایان می رسانیم.

۱.۵.۴ محاسبه قوانین پایستگی تقریبی برای دستگاه معادلات

دیفرانسیل تقریبی

فرض کنیم $x = (x^1, \dots, x^n)$ متغیرهای مستقل،

$$u = (u^1, \dots, u^m), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad \tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m),$$

یک مجموعه از متغیرهای وابسته و

$$\psi(x, u) = (\psi_1, \dots, \psi_m), \quad \phi(x, u) = (\phi_1, \dots, \phi_m).$$

توابع برداری m - متغیره باشند که $\tilde{\lambda} = \psi(x, u) + \varepsilon \phi(x, u)$. اگر $U = (u, \lambda, \tilde{\lambda}, \psi, \phi)$ مجموعه تمام متغیرهای وابسته و تابع های برداری باشد، در این صورت $U_{(r)} = U_{i_1, \dots, i_r}^k = D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_r} (U^k)$ نمایش مشتقات U^k نسبت به x^{i_1}, \dots, x^{i_r} که در آن D_i معرف عملگر مشتق کامل نسبت به x^i است، می باشد.

با تعریف لاگرانژی فرمال

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\lambda}_k \left[\Delta_k^\circ(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u) + \varepsilon \Delta_k^1(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u) \right] \quad k = 1, \dots, m, \quad (36.4)$$

برای دستگاه معادله دیفرانسیل تقریبی (۲۷.۴)، دستگاه الحاقی تقریبی، به صورت

$$\Delta_{\alpha}^*(x, u, \tilde{\lambda}, \partial u, \partial \tilde{\lambda}, \dots, \partial^r u, \partial^r \tilde{\lambda}) = \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta u^{\alpha}} = 0, \quad (37.4)$$

خواهد بود که

$$\frac{\delta}{\delta u^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^{\alpha}}. \quad (38.4)$$

معرف عملگر اویلر-لاگرانژ می باشد.

دستگاه معادلات دیفرانسیل تقریبی (۲۷.۴) را یک دستگاه خود الحاق غیر خطی تقریبی گوئیم، هرگاه دستگاه الحاقی تقریبی (۳۷.۴) در تمامی جواب های دستگاه تقریبی (۲۷.۴) صدق کند. به بیان دیگر شرط فوق معادل آن است که اتحاد

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u^{\alpha}} \left(\tilde{\lambda}_k \left[\Delta_k^{\circ} + \varepsilon \Delta_k^1 \right] \right) \Big|_{\tilde{\lambda} = \psi + \varepsilon \phi} - \left[(B_k^{\alpha} + \varepsilon C_k^{\alpha}) \Delta_k^{\circ}(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u) \right. \\ \left. + \varepsilon B_k^{\alpha} \Delta_k^1(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u) \right] = O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (39.4)$$

را برای لاگرانژی تقریبی (۳۶.۴) با $\tilde{\lambda}_k = \psi_k(x, u) + \varepsilon \phi_k(x, u) \neq 0$ داشته باشیم. توابع مجهول $B_k^{\alpha} = B_k^{\alpha}(x, u)$ و $C_k^{\alpha} = C_k^{\alpha}(x, u)$ با حل معادلات مشخصه (۳۹.۴) برای ما مشخص خواهند شد.

قضیه ۱.۵.۴. بردارهای

$$\tilde{C} = (\tilde{C}^1, \tilde{C}^2, \dots, \tilde{C}^n),$$

که در آن هر \tilde{C}^i به صورت

$$\tilde{C}^i = \tilde{C}_0^i + \varepsilon \tilde{C}_1^i + \dots + \varepsilon^k \tilde{C}_k^i,$$

تعریف می شود، مولفه های قوانین پایستگی تقریبی برای دستگاه تقریبی (۲۷.۴) نامیده می شوند، هرگاه برای تمام \tilde{C}^i ، تساوی $D_i(\tilde{C}^i) = O(\varepsilon^2)$ برقرار باشد. اثبات: در مرجع [۳۱] اشاره شده است.

رابطه قوانین پایستگی تقریبی مرتبه اول برای دستگاه تقریبی (۲۷.۴)، عبارت است از

$$\begin{aligned} \tilde{C}^i = C^i + \varepsilon \left[\xi_0^i \mathcal{L}_1 + W_0^{\alpha} \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta u_i^{\alpha}} + D_j(W_0^{\alpha}) \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta u_{ij}^{\alpha}} + D_j D_k(W_0^{\alpha}) \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta u_{ijk}^{\alpha}} \right. \\ \left. + \dots + \xi_1^i \mathcal{L}_2 + W_1^{\alpha} \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta u_i^{\alpha}} + D_j(W_1^{\alpha}) \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta u_{ij}^{\alpha}} + D_j D_k(W_1^{\alpha}) \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta u_{ijk}^{\alpha}} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (40.4)$$

که C^i ها مولفه های قوانین پایستگی برای دستگاه غیر تقریبی (۲۸.۴) می باشند. همچنین $W_0^{\alpha} = \eta_0^{\alpha} - \xi_0^j u_j^{\alpha}$ مشخصه غیر تقریبی و $W_1^{\alpha} = \eta_1^{\alpha} - \xi_1^j u_j^{\alpha}$ مشخصه تقریبی از تقارن های دستگاه معادلات دیفرانسیل تقریبی هستند.

در معادله (۴۰.۴)، $\mathcal{L}_1 = \psi_k \Delta_k^\circ$ و $\mathcal{L}_2 = \psi_k \Delta_k^\circ$ مولفه های لاگرانژی فرمال دستگاه، و

$$\frac{\delta}{\delta u_i^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^\alpha}. \quad (41.4)$$

عملگر اویلر-لاگرانژ نسبت به متغیرهای u_i^α می باشد.

مثال ۲.۵.۴. معادله

$$\Delta := u_t + buu_x - a\left(\frac{1}{x}u_x + u_{xx} - \frac{1}{x^2}u\right) + \varepsilon u_t = 0, \quad (42.4)$$

با تقارن های

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_2 &= t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{u}{2}\frac{\partial}{\partial u}, & X_3 &= \frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{tx}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}(tu - \frac{x}{b})\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_4 &= \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), & X_5 &= \varepsilon\left(t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{u}{2}\frac{\partial}{\partial u}\right), & X_6 &= \varepsilon\left(\frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{tx}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}(tu - \frac{x}{b})\frac{\partial}{\partial u}\right), \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید [۵۰].

با تعریف لاگرانژی فرمال غیر تقریبی $\mathcal{L} = \lambda(x, t)\Delta^\circ$ برای معادله غیر تقریبی

$$\Delta^\circ = u_t + buu_x - a\left(\frac{1}{x}u_x + u_{xx} - \frac{1}{x^2}u\right),$$

و حل معادلات مشخصه حاصل از دستگاه الحاقی

$$\frac{\delta}{\delta u}(\lambda\Delta^\circ) = A\Delta^\circ,$$

مجهولات A و $\lambda(x, t)$ به صورت

$$A = 0, \quad \lambda(x, t) = c_1 x^2 + c_2.$$

بدست می آیند که c_1 و c_2 اعداد ثابت دلخواهی هستند.

تقارن X_1 با مشخصه $W = -u_t$ و لاگرانژی

$$\mathcal{L} = (c_1 x^2 + c_2) \left[u_t + buu_x - a\left(\frac{1}{x}u_x + u_{xx} - \frac{1}{x^2}u\right) \right],$$

مولفه های پایستگی

$$\begin{aligned} C^t &= -(c_1 x^2 + c_2)u_t, \\ C^x &= -u_t \left[(bu - \frac{a}{x})(c_1 x^2 + c_2) + 2ac_1 x \right] - 2c_1 ax(c_1 x^2 + c_2). \end{aligned} \quad (43.4)$$

را نتیجه می دهند.

در این مرحله با تشکیل لاگرانژی فرمال تقریبی

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\lambda} \left[u_t + buu_x - a\left(\frac{1}{x}u_x + u_{xx} - \frac{1}{x^2}u\right) + \varepsilon u_t \right], \quad \tilde{\lambda} = \psi(x, t) + \varepsilon\phi(x, t)$$

و محاسبه مجهولات معادلات مشخصه از دستگاه الحاقی تقریبی

$$\frac{\delta}{\delta u} [\tilde{\lambda} (\Delta^\circ + \varepsilon \Delta^1)] = (B^1 + \varepsilon C^1) \Delta^\circ + \varepsilon B^1 \Delta^1, \quad (44.4)$$

به صورت $B^1 = C^1 = 0$ و $\tilde{\lambda} = r_1 + \varepsilon r_2$ در پی یافتن قوانین پایستگی تقریبی برای مولد X_1 خواهیم بود. (r_2 و r_1 ضرایب ثابت دلخواه می باشند).

• برای مولد $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ و

$$\xi_0^t = 1, \quad \xi_1^t = 0, \quad \xi_0^x = 0, \quad \xi_1^x = 0, \quad \mathcal{L}_1 = r_1 \Delta^1, \quad \mathcal{L}_2 = r_1 \Delta^\circ.$$

قوانین پایستگی تقریبی با استفاده از (40.4)، به صورت

$$\begin{aligned} \tilde{C}^t &= C^t + \varepsilon (\mathcal{L}_1 + W_0 \frac{\delta}{\delta u_t} \mathcal{L}_1) = C^t, \\ \tilde{C}^x &= C^x + (\xi_0^x + W_0 \frac{\delta}{\delta u_x} \mathcal{L}_1 + \xi_1^x + W_1 \frac{\delta}{\delta u_x} \mathcal{L}_2) = C^x \end{aligned} \quad (45.4)$$

بدست می آیند. که C^t و C^x در (43.4) محاسبه شده اند.

• با در نظر گرفتن $X_4 = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$ و

$$\xi_0^t = 0, \quad \xi_1^t = 1, \quad \xi_0^x = 0, \quad \xi_1^x = 0, \quad \mathcal{L}_1 = r_1 \Delta^1, \quad \mathcal{L}_2 = r_1 \Delta^\circ.$$

قوانین پایستگی غیر تقریبی و تقریبی معادله (42.4) عبارتند از:

$$\begin{aligned} C^t &= 0, \quad C^x = 0, \\ \tilde{C}^t &= C^t + \varepsilon [\mathcal{L}_2 + W_1 \frac{\delta}{\delta u_t} \mathcal{L}_2] = \varepsilon r_1 [\Delta^\circ - u_t] = \varepsilon r_1 \left[buu_x - a \left(\frac{1}{x} u_x + u_{xx} - \frac{1}{x^2} u \right) \right], \\ \tilde{C}^x &= C^x + \left[-u_t \frac{\delta}{\delta u_x} \mathcal{L}_2 + D_x(-u_t) \frac{\delta}{\delta u_{xx}} \mathcal{L}_2 \right] = \varepsilon r_1 \left[\left(\frac{a}{x} - bu \right) u_t + au_{xt} \right]. \end{aligned} \quad (46.4)$$

• قوانین پایستگی تقریبی برای تقارن های X_i , $i = 2, 3, 5, 6$ ، به طور مشابه بدست می آیند.

مثال 3.5.4. همان طور که در مثال (7.4.4) دیدیم تقارن های تقریبی و غیرتقریبی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل تقریبی (32.4) به صورت

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_3 &= t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}, & X_4 &= u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_5 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, & X_6 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial u}, & X_7 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_8 &= \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} + \left(\int \xi_0^t u du \right) \frac{\partial}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

بدست می آیند. برای محاسبه قوانین پایستگی، ابتدا با در نظر گرفتن لاگرانژی فرمال

$$\mathcal{L} = \lambda_1 \Delta_1^\circ + \lambda_2 \Delta_2^\circ,$$

و حل معادلات مشخصه حاصل از دستگاه

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\delta u} (\lambda_1 \Delta_1^\circ + \lambda_2 \Delta_2^\circ) \simeq A_1 \Delta_1^\circ, \\ \frac{\delta}{\delta v} (\lambda_1 \Delta_1^\circ + \lambda_2 \Delta_2^\circ) \simeq A_2 \Delta_2^\circ. \end{cases} \quad (47.4)$$

قوانین پایستگی را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر تقریبی (34.4)، بدست می آوریم [54].

با حل (47.4) توابع $\lambda_1, \lambda_2, A_1$ و A_2 عبارتند از

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{-x} R_1(x, t, u) + e^x R_2(x, t, u), & A_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= -e^{-x} R_1(x, t, u) + e^x R_2(x, t, u), & A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (48.4)$$

که $R_1(x, t, u)$ و $R_2(x, t, u)$ توابعی دلخواه هستند.

• با در نظر گرفتن تقارن X_1 و

$$\xi_0^t = 1, \quad \xi_0^x = 0, \quad W_0^1 = -u_t, \quad W_0^2 = -v_t,$$

داریم:

$$\begin{aligned} C^t &= \xi_0^t \mathcal{L} + W_0^1 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right] + W_0^2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t} \right] = -[\lambda_1 (u_x + v) + \lambda_2 (v_x + u)], \\ C^x &= \xi_0^x \mathcal{L} + W_0^1 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right] + W_0^2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} \right] = [\lambda_1 u_t + \lambda_2 v_t]. \end{aligned} \quad (49.4)$$

که C^t و C^x مولفه های پایستگی غیر تقریبی برای دستگاه غیر تقریبی (34.4) خواهند بود. λ_1 و λ_2 در (48.4) محاسبه شده اند.

• مولفه های پایستگی غیر تقریبی برای بقیه تقارن های (35.4)، بعد از محاسبه در جدول (1.4) خلاصه شده است.

بعد از محاسبه قوانین پایستگی غیر تقریبی، قوانین پایستگی تقریبی را با تعریف لاگرانژی فرمال تقریبی و دستگاه الحاقی تقریبی برای دستگاه تقریبی (32.4)، بدست می آوریم.

لاگرانژی فرمال تقریبی

$$\tilde{\mathcal{L}} \equiv \tilde{\lambda}_1(x, t, u, v)(u_t - u_x - v + \varepsilon u_x) + \tilde{\lambda}_2(x, t, u, v)(v_t - v_x - u + \varepsilon v_x), \quad (50.4)$$

با ضرایب

$$\tilde{\lambda}_1 = \psi_1(x, t, u, v) + \varepsilon \phi_1(x, t, u, v), \quad \tilde{\lambda}_2 = \psi_2(x, t, u, v) + \varepsilon \phi_2(x, t, u, v), \quad (51.4)$$

را برای دستگاه تقریبی (32.4)، در نظر می گیریم. که

$$\begin{cases} \Delta_1^* \equiv \frac{\delta}{\delta u} \left(\tilde{\lambda}_1 (u_t - u_x - v + \varepsilon u_x) + \tilde{\lambda}_2 (v_t - v_x - u + \varepsilon v_x) \right), \\ \Delta_2^* \equiv \frac{\delta}{\delta v} \left(\tilde{\lambda}_1 (u_t - u_x - v + \varepsilon u_x) + \tilde{\lambda}_2 (v_t - v_x - u + \varepsilon v_x) \right). \end{cases} \quad (52.4)$$

جدول ۱.۴: شار و چگالی برای دستگاه غیر اختلال (۳۴.۴)

X_i	مشخصه ها	مولفه های پایستگی غیر تقریبی دستگاه (۳۴.۴)
X_1	$\xi_o^t = 1, \quad \xi_o^x = 0$ $\eta_o^u = 0, \quad \eta_o^v = 0$ $W_o^\lambda = -u_t$ $W_o^\gamma = -v_t$	$C^t = -[\lambda_1(u_x + v) + \lambda_2(v_x + u)]$ $C^x = [u_t\lambda_1 + v_t\lambda_2]$
X_2	$\xi_o^x = 1, \quad \xi_o^t = 0$ $\eta_o^u = 0, \quad \eta_o^v = 0$ $W_o^\lambda = -u_x$ $W_o^\gamma = -v_x$	$C^t = -[u_x\lambda_1 + v_x\lambda_2]$ $C^x = [\lambda_1(u_t - v) + \lambda_2(v_t - u)]$
X_3	$\xi_o^t = x, \quad \xi_o^x = t$ $\eta_o^u = u, \quad \eta_o^v = 0$ $W_o^\lambda = u - tu_x - xu_t$ $W_o^\gamma = -(tv_x + xv_t)$	$C^t = \lambda_1[u - (x+t)u_x - xv] - \lambda_2[(x+t)v_x + xu]$ $C^x = \lambda_1[(x+t)u_t - tv - u] + \lambda_2[(x+t)v_t - tu]$
X_4	$\xi_o^t = 0, \quad \xi_o^x = 0$ $\eta_o^u = u, \quad \eta_o^v = v$ $W_o^\lambda = u$ $W_o^\gamma = v$	$C^t = [u\lambda_1 + v\lambda_2]$ $C^x = -[u\lambda_1 + v\lambda_2]$
X_5	$\xi_o^t = 0, \quad \xi_o^x = 0$ $\eta_o^u = 0, \quad \eta_o^v = 0$ $W_o^\lambda = 0$ $W_o^\gamma = 0$	$C^t = 0$ $C^x = 0$
X_6	$\xi_o^t = 0, \quad \xi_o^x = 0$ $\eta_o^u = 0, \quad \eta_o^v = 0$ $W_o^\lambda = 0$ $W_o^\gamma = 0$	$C^t = 0$ $C^x = 0$
X_7	$\xi_o^t = 0, \quad \xi_o^x = 0$ $\eta_o^u = 0, \quad \eta_o^v = 0$ $W_o^\lambda = 0$ $W_o^\gamma = 0$	$C^t = 0$ $C^x = 0$
X_8	$\xi_o^t = 0, \quad \xi_o^x = 0$ $\eta_o^u = 0, \quad \eta_o^v = 0$ $W_o^\lambda = 0$ $W_o^\gamma = 0$	$C^t = 0$ $C^x = 0$

دستگاه معادلات الحاقی تقریبی برای دستگاه تقریبی (۳۲.۴) می باشند. با جایگذاری (۵۱.۴) و (۳۳.۴) در (۳۹.۴) و حل معادلات مشخصه حاصل از

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\delta u} (\tilde{\lambda}_1 \Delta_1 + \tilde{\lambda}_2 \Delta_2) \simeq (B_1 + \varepsilon C_1) \Delta_1^\circ + B_1 \varepsilon \Delta_1^1, \\ \frac{\delta}{\delta v} (\tilde{\lambda}_1 \Delta_1 + \tilde{\lambda}_2 \Delta_2) \simeq (B_2 + \varepsilon C_2) \Delta_2^\circ + B_2 \varepsilon \Delta_2^1. \end{cases} \quad (53.4)$$

مجهولات معادله فوق به شکل

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad \phi_1 = F_1(x, t), \quad B_1 = \frac{\partial F_3(u)}{\partial u},$$

$$B_2 = \frac{1}{u} [F_{1tt} - F_{1xx} + 2F_{2t} - 2xF_{2tt} - 2F_{2tt} + F_1 + 2xF_2 + 2F_4 + 2F_3]$$

$$\begin{aligned}
 & + \int \int (F_{\lambda tttt} - F_{\lambda ttxx} - F_{\lambda tt}) dx dx - \int \int (F_{\lambda tt} - F_{\lambda xx} + F_{\lambda}) dx dx, \\
 & + 2 \int (F_{\lambda txx} - F_{\lambda ttt} - F_{\lambda t}) dx], \\
 \phi_2 & = F_{\lambda x} - F_{\lambda t} - F_2 + \frac{1}{2} \int (F_{\lambda tt} - F_{\lambda xx} + F_{\lambda}) dx, \quad (54.4) \\
 \psi_1 & = F_3 + F_4 + xF_2 - \frac{1}{2} \int \int (F_{\lambda tt} - F_{\lambda xx} + F_{\lambda}) dx dx, \\
 \psi_2 & = F_2 - F_{4t} - xF_{2t} - \frac{1}{2} \int (F_{\lambda tt} - F_{\lambda xx} + F_{\lambda}) dx + \frac{1}{2} \int \int (F_{\lambda ttt} - F_{\lambda txx} + F_{\lambda t}) dx dx.
 \end{aligned}$$

مشخص می شوند، که $F_{\lambda}(x, t)$ ، $F_2(t)$ ، $F_3(u)$ ، و $F_4(t)$ همگی توابعی دلخواه می باشند. برای استخراج مولفه های پایستگی بدست آمده از حالت مجهولی (54.4)، در ادامه حالت های متفاوتی از F_i ها را در نظر خواهیم گرفت.

• حالت اول: فرض کنید

$$F_{\lambda}(x, t) = x^2 + t^2, \quad F_2(t) = t, \quad F_3(u) = u, \quad F_4 = t.$$

لذا مجهولات دستگاه (53.4) به شکل

$$\begin{aligned}
 B_1 & = 1, \quad B_2 = \frac{1}{u} \left[\frac{x^2}{2} + a_2 x + a_3 - 2t(x + a_1) + 2 - x \right], \quad C_1 = C_2 = 0, \\
 \phi_1 & = x^2 + t^2, \quad \phi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + t^2 x + a_4 \right) + 2x - 3t, \\
 \psi_1 & = \frac{-1}{2} \left(\frac{t^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + a_5 x + a_6 \right) + tx + t + u, \\
 \psi_2 & = \frac{-1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + t^2 x + a_7 \right) + t \left(\frac{x^2}{2} + a_8 x + a_9 \right) - x, \\
 \mathcal{L}_1 & = \psi_1 u_x + \psi_2 v_x, \quad \mathcal{L}_2 = \psi_1 (u_t - u_x - v) + \psi_2 (v_t - v_x - u).
 \end{aligned}$$

که $a, b, a_i, \quad i = 1, \dots, 8$ ثابت های دلخواهی هستند، برای ما مشخص می شوند.

- با در نظر گرفتن $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ و

$$W_0^1 = -u_t, \quad W_0^2 = -v_t, \quad W_1^1 = 0, \quad W_1^2 = 0,$$

مولفه های پایستگی تقریبی عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}^t & = C^t + \varepsilon \left[\xi_0^t \mathcal{L}_1 + W_0^1 \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta u_t} + \xi_1^t \mathcal{L}_2 + W_1^1 \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta u_t} + W_0^2 \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta v_t} + W_1^2 \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta v_t} \right] \\
 & = C^t + \varepsilon [\mathcal{L}_1], \quad (55.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}^x & = C^x + \varepsilon \left[\xi_0^x \mathcal{L}_1 + W_0^1 \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta u_x} + \xi_1^x \mathcal{L}_2 + W_1^1 \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta u_x} + W_0^2 \frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta v_x} + W_1^2 \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta v_x} \right] \\
 & = C^x + \varepsilon \left[u_t \left[\left(\frac{tx^2}{2} + \frac{a_2 tx}{2} + \frac{a_4 t}{2} \right) - (ax + b + u) \right] \right. \\
 & \quad \left. + v_t \left[\left(\frac{xt^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{a_5 x}{2} \right) - t \left(\frac{x^2}{2} + a_6 x + a_7 \right) + x \right] \right]. \quad (56.4)
 \end{aligned}$$

- با در نظر گرفتن $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ و

$$W_0^1 = -u_x, \quad W_0^2 = -v_x, \quad W_1^1 = 0, \quad W_1^2 = 0.$$

مولفه های پایستگی تقریبی عبارتند از:

$$\tilde{C}^t = C^t, \quad \tilde{C}^x = C^x.$$

C^t و C^x مولفه های قوانین پایستگی دستگاه غیر تقریبی (۳۴.۴)، در جدول (۱.۴) و قوانین پایستگی تقریبی برای مابقی تقارن های تقریبی (۳۵.۴) در جدول (۲.۴) محاسبه شده است [۵۴].

• حالت دوم: با فرض

$$F_1(x, t) = t, \quad F_2(t) = t^2, \quad F_3(u) = u^2, \quad F_4 = t.$$

در این صورت

$$\begin{aligned} B_1 &= 2u, \quad B_2 = \frac{1}{u}[(3 - (x + a_1) + 2tx + 2u)], \quad C_1 = C_2 = 0, \\ \phi_1 &= t, \quad \phi_2 = \frac{t}{2}(x + a_2) - t^2 - 1, \\ \psi_1 &= \frac{-t}{2}\left(\frac{x^2}{2} + a_3x + a_4\right) + t^2x + u^2 + t, \\ \psi_2 &= \frac{-1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + t^2x + a_5\right) + t\left(\frac{x^2}{2} + a_6x + a_7\right) - x, \\ \mathcal{L}_1 &= \psi_1u_x + \psi_2v_x, \quad \mathcal{L}_2 = \psi_1(u_t - u_x - v) + \psi_2(v_t - v_x - u). \end{aligned}$$

• حالت سوم:

در نهایت با در نظر گرفتن

$$F_1(x, t) = x^2 + t^2, \quad F_2(t) = t, \quad F_3(u) = u, \quad F_4 = t.$$

مجهولات دستگاه (۵۳.۴) به صورت

$$\begin{aligned} B_1 &= 1, \quad B_2 = \frac{1}{u}\left[\frac{x^2}{2} + a_2x + a_3 - 2t(x + a_1) + 2 - x\right], \\ C_1 &= C_2 = 0, \quad \phi_1 = x^2 + t^2, \quad \phi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + t^2x + a_4\right) + 2x - 3t, \\ \psi_1 &= \frac{-1}{2}\left(\frac{t^2x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + a_5x + a_6\right) + tx + t + u, \\ \psi_2 &= \frac{-1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + t^2x + a_7\right) + t\left(\frac{x^2}{2} + a_8x + a_9\right) - x, \\ \mathcal{L}_1 &= \psi_1u_x + \psi_2v_x, \quad \mathcal{L}_2 = \psi_1(u_t - u_x - v) + \psi_2(v_t - v_x - u). \end{aligned}$$

بدست می آیند.

قوانین پایستگی تقریبی دستگاه (۳۲.۴) برای حالات اول و دوم و سوم، همگی در جدول (۲.۴) آورده شده است.

جدول ۲.۴: شار و چگالی برای دستگاه اختلال (۳۲.۴)

X_i	W_i^j	مولفه های پایستگی تقریبی دستگاه (۳۲.۴)
X_1	$W_0^1 = -u_t$ $W_0^2 = -v_t$ $W_1^1 = 0$ $W_1^2 = 0$	$\tilde{C}^t = C^t + \varepsilon[\mathcal{L}_1]$ $\tilde{C}^x = C^x - \varepsilon[u_t \mathcal{B}_1 + v_t \mathcal{B}_2]$
X_2	$W_0^1 = -u_x$ $W_0^2 = -v_x$ $W_1^1 = 0$ $W_1^2 = 0$	$\tilde{C}^t = C^t$ $\tilde{C}^x = C^x$
X_3	$W_0^1 = u - tu_x - xu_t$ $W_0^2 = -(xv_t + tv_x)$ $W_1^1 = 0$ $W_1^2 = 0$	$\tilde{C}^t = C^t + \varepsilon[x\mathcal{L}_1]$ $\tilde{C}^x = C^x + \varepsilon[(u - xu_t)\psi_1 - xv_t\psi_2]$
X_4	$W_0^1 = u$ $W_0^2 = v$ $W_1^1 = 0$ $W_1^2 = 0$	$\tilde{C}^t = C^t$ $\tilde{C}^x = C^x + \varepsilon[u\psi_1 + v\psi_2]$
X_5	$W_0^1 = 0$ $W_0^2 = 0$ $W_1^1 = -u_x$ $W_1^2 = -v_x$	$\tilde{C}^t = -[u_x\psi_1 + v_x\psi_2]$ $\tilde{C}^x = \varepsilon[\psi_1(u_t - v) + \psi_2(v_t - u)]$
X_6	$W_0^1 = 0$ $W_0^2 = 0$ $W_1^1 = 1$ $W_1^2 = 0$	$\tilde{C}^t = \varepsilon\psi_1$ $\tilde{C}^x = -\varepsilon\psi_1$
X_7	$W_0^1 = 0$ $W_0^2 = 0$ $W_1^1 = 0$ $W_1^2 = 1$	$\tilde{C}^t = \varepsilon\psi_2$ $\tilde{C}^x = -\varepsilon\psi_2$
X_8	$W_0^1 = 0$ $W_0^2 = 0$ $W_1^1 = u_x - u_t$ $W_1^2 = v_x - v_t + \int \xi_{\sigma_u}^t u du$	$\tilde{C}^t = \varepsilon[-v\psi_1 + \psi_2(\int \xi_{\sigma_u}^t u du - u)]$ $\tilde{C}^x = \varepsilon[v\psi_1 - \psi_2(\int \xi_{\sigma_u}^t u du - u)]$

فصل ۵

معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری و کاربردها

۱.۵ آشنایی با محاسبات کسری

موضوع حساب کسری در طول سه دهه اخیر و حتی ما قبل از آن به دلیل برنامه های کاربردی در بسیاری از زمینه های مختلف مهندسی از جمله شبکه های برق، فرآیندهای سازه ای، نظریه کنترل و سیستم های دینامیکی، الکتروشمی، فیزیک شیمی و پردازش سیگنال ها محبوبیت قابل توجهی بدست آورده است. در واقع این مبحث، ابزارهای بالقوه مفیدی برای حل و فصل معادلات دیفرانسیل انتگرال کسری و موضوعات مختلف دیگر در اختیار ما قرار می دهد.

به نظر می رسد مفهوم محاسبات کسری از یک سوال که در سال ۱۶۹۵ توسط مارکوویس دی هوییتال^۱ (۱۶۶۱-۱۷۰۴ م) از ویلهلم لایب-نیتس^۲ (۱۶۴۶-۱۷۱۶ م) در مورد مفهوم مشتق $\frac{d^n y}{dx^n}$ زمانی که $n = \frac{1}{p}$ است، شروع شده باشد. لایب-نیتس در پاسخ به هوییتال در تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ نوشت: "... این موضوع یک پارادوکس ظاهری می باشد..." که از آن زمان به بعد نتایج مفیدی طی مقاله ها و کتاب های متعدد توسط نویسندگان بدست آمده

Marquis de L'Hopital^۱
Wilhelm Leibniz^۲

است. به طور نمونه اویلر^۳ در سال ۱۷۳۰، لاگرانژ^۴ در سال ۱۷۷۲، لاپلاس^۵ در سال ۱۸۱۲، لاکوریکس^۶ در سال ۱۸۱۹، فوریه^۷ در سال ۱۸۲۲، لیوویل^۸ در سال ۱۸۳۲، ریمان^۹ در سال ۱۸۷۴ و گراندوال^{۱۰} در سال ۱۸۶۷ به نتایج قابل ملاحظه ای در زمینه تعریف انواع مشتق های کسری و کاربرد آن ها در معادلات دیفرانسیل کسری پرداخته اند. که می توان به کتاب درسی و مرجع ۷۰۰ صفحه ای تحت عنوان

Traite du Calcul Differentiel et du Calcul Integral.

اشاره کرد. همچنین یکی از اولین کتاب ها در زمینه محاسبات کسری کتابی است که توسط اولدهام^{۱۱} و اسپانیر^{۱۲} در سال ۱۹۷۴ [۶۹] منتشر شده است. کتاب محاسبات کسری پودلابنی^{۱۳} [۷۳] یکی از جدیدترین مرجع ها در زمینه آشنایی با مشتقات کسری و معادلات کسری می باشد. مراجع مفید متعدد دیگری توسط نویسندگان معاصر از جمله هیلفر^{۱۴} در سال ۲۰۰۰، زلاوسکی^{۱۵} در سال ۲۰۰۵، کیلباس^{۱۶} و ماریچو^{۱۷} در سال ۱۹۸۷ به چاپ رسیده است [۳۰، ۷۴، ۸۲]. در تکمیل کتاب های کسری نوشته شده کتاب دیگری از کیلباس با موضوع معادلات دیفرانسیل مختلط کسری و راه حل های منحصر به فرد برای حل این گونه از مسایل با استفاده از تعریف توابع خاصی همچون توابع لاپلاس، گاما، کوشی و ... پرداخته است [۴۳].

۱.۱.۵ توابع خاص و کاربردی

در این بخش تعاریف و خصوصیات برخی از توابع مهم و کاربردی همچون تابع میتیج- لفلر، تابع گاما و تبدیل لاپلاس که برای مشتق های کسری و پر کاربرد می باشد همچون ریمان- لیوویل و کاپوتو به کار می روند، توضیح داده شده است. همچنین خلاصه ای از تعریف تابع های بسل و گراندوال که برای مشتق های کسری گراندوال، هیلفر، کوبر و ریس مورد استفاده قرار می گیرند، آورده شده است. توضیحات بیشتری با خواص آنها در

Euler^۳

Lagrange^۴

Laplace^۵

Lacroix^۶

Fourier^۷

Liouville^۸

Riemann^۹

Grunwald^{۱۰}

Oldham^{۱۱}

Spanier^{۱۲}

Podlubny^{۱۳}

Hilfer^{۱۴}

Zaslavsky^{۱۵}

Kilbas^{۱۶}

Marichev^{۱۷}

مراجع [۱۲، ۷۵، ۸۱، ۷۴، ۸۳] موجود می باشد.

تابع لاپلاس

با استفاده از روش تبدیل لاپلاس راه حل های صریح و راه کار رسیدن به یک جواب یکتا برای معادلات کسری از نوع مشتق ریمان-لیوویل و کاپوتو ارائه می کنیم.

تعریف ۱.۱.۵. تبدیل لاپلاس تابع $\varphi(t)$ از متغیر حقیقی $t \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ عبارت است با،

$$(\mathcal{L}\varphi)(s) = \mathcal{L}[\varphi(t)](s) = \tilde{\varphi}(s) := \int_0^{\infty} e^{(-st)}\varphi(t)dt, \quad (s \in \mathbb{C}). \quad (1.5)$$

که اگر انتگرال (۱.۵) در نقطه $s_0 \in \mathbb{C}$ همگرا باشد، در این صورت (۱.۵) برای هر $s \in \mathbb{C}$ به طور مطلق همگرا می شود، به طوری که $\Re(s) > \Re(s_0)$ (منظور از قسمت حقیقی عدد مختلط s می باشد). و اگر σ_φ اینفیمم مقدار s باشد، در این صورت همگرایی انتگرال (۱.۵) همگرایی از نوع افقی بوده و (۱.۵) برای مقادیر $\Re(s) > \sigma_\varphi$ همگرا و برای مقادیر $\Re(s) < \sigma_\varphi$ واگرا خواهد بود.

تعریف ۲.۱.۵. تبدیل لاپلاس معکوس نیز به صورت

$$(\mathcal{L}^{-1}g)(x) = \mathcal{L}^{-1}[g(s)](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sx}g(s)ds, \quad (\gamma = \Re(s) > \sigma_\varphi). \quad (2.5)$$

تعریف می شود که برای هر تابع g و φ روابط

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\varphi = \varphi, \quad \mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}g = g.$$

برقرار هستند.

در ادامه برخی از خواص مهم و کاربردی از تبدیل لاپلاس را می آوریم.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\tau_h\varphi)(p) &= e^{(-ph)}(\mathcal{L}\varphi)(p), \quad h \in \mathbb{R}, \\ (\mathcal{L}\Pi_\lambda\varphi)(p) &= \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{L}[e^{-at}\varphi(t)](p) &= (\tau_{-a}\mathcal{L})(p) \equiv \mathcal{L}(p+a), \quad a \in \mathbb{C}, \\ \mathcal{L}[D^k\varphi(t)](p) &= p^k(\mathcal{L}\varphi)(p), \quad k \in \mathbb{N}, \\ D^k(\mathcal{L}\varphi)(s) &= (-1)^k\mathcal{L}[t^k\varphi(t)](s), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{L}[D^k\varphi(t)](s) &= s^k(\mathcal{L}\varphi)(s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-j-1}(D^j\varphi)(0), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

که

$$\begin{aligned} (\tau_h\varphi)(x) &= \varphi(x-h), \quad x, h \in \mathbb{R}, \\ (\Pi_\lambda\varphi)(x) &= \varphi(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}; \lambda > 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

به ترتیب عملگر انتقال و عملگر تاخیر نامیده می شوند.

تابع گاما

تابع گاما $\Gamma(z)$ با تعریف

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}, \quad \Re(z) > 0. \quad (5.5)$$

برای تمام $z \in \mathbb{C}$ همگرا و دارای خواص

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), \quad \Re(z) > 0, \\ \Gamma(n+1) &= n!, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}_0, \quad 0 < \Re(z) < 1, \\ \Gamma(mz) &= \frac{\Upsilon(mz-1)}{(\Upsilon\pi)^{(m-1)/\Upsilon}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N} - \{1\}, \\ \Gamma(\Upsilon z) &= \frac{\Upsilon(\Upsilon z-1)}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{\Upsilon}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (6.5) \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{\Upsilon}\right) &= \frac{(\Upsilon n - 1)!!}{\Upsilon^n} \sqrt{\pi}, \quad (\Upsilon n - 1)!! = 1 \cdot 3 \dots (\Upsilon n - 1), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \binom{\alpha}{n} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1, \\ \binom{m}{n} &= \frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \quad m \geq n, \\ \binom{\alpha}{n} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}^-, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ \binom{\alpha}{\beta} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}^-, \\ 0! &= 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{\Upsilon}\right) = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

می باشد.

تابع بسل

تابع بسل از نوع اول به شکل

$$J_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/\Upsilon)^{\Upsilon k + \nu}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0], \quad \nu \in \mathbb{C}. \quad (7.5)$$

تعریف می شود که جزئیات بیشتر همراه با خواص تابع در [۴۳] آمده است.

تابع میتیج- لفلر

تابع میتیج- لفلر $E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)$ ^{۱۸}، که حالت کلی تری از تابع میتیج- لفلر $E_\alpha(\lambda z^\alpha)$ می باشد، با تعریف

$$E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\beta) > 0. \quad (۸.۵)$$

بر روی $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ که $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ دارای مشتقاتی به فرم

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n [z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)] &= z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(\lambda z^\alpha), \\ \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^n [z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)] &= n! z^{\alpha n + \beta - 1} E_{\alpha,\alpha n + \beta}^{n+1}(\lambda z^\alpha), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n [E_\alpha(\lambda z^\alpha)] &= z^{-n} E_{\alpha,1-n}(\lambda z^\alpha), \\ \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^n [E_\alpha(\lambda z^\alpha)] &= n! z^{\alpha n} E_{\alpha,\alpha n + 1}^{n+1}(\lambda z^\alpha). \end{aligned} \quad (۹.۵)$$

می باشند.

برخی از تبدیلات لاپلاس توابع میتیج- لفلر $E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)$ و $E_\alpha(\lambda z^\alpha)$ عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[E_\alpha(\lambda t^\alpha)](s) &= \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}, \quad \Re(s) > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda s^{-\alpha}| < 1, \\ \mathcal{L}\left[t^{\alpha n} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^n E_\alpha(\lambda t^\alpha)\right](s) &= \frac{n! s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) &= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad \Re(s) > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda s^{-\alpha}| < 1, \\ \mathcal{L}\left[t^{\alpha n + \beta - 1} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^n E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) &= \frac{n! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - \lambda)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad |\lambda s^{-\alpha}| < 1. \end{aligned} \quad (۱۰.۵)$$

در حالت خاص $\beta = \alpha$ ، تابع میتیج- لفلر $z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)$ تبدیل به تابع α -نمایی $e_\alpha^{\lambda z}$ با تعریف سری گونه

$$e_\alpha^{\lambda z} := z^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda z^\alpha) = z^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\alpha k}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}, \quad \Re(\alpha) > 0. \quad (۱۱.۵)$$

می شود. از آنجاییکه تابع $e_\alpha^{\lambda z}$ نسبت به $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ تحلیلی است، اتحادهای

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} [z^{1-\alpha} e_\alpha^{\lambda z}] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad \Re(\alpha) > 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-a)^{1-\alpha} e_\alpha^{\lambda(x-a)}] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad \Re(\alpha) > 0. \end{aligned} \quad (۱۲.۵)$$

همراه با مشتقات و تبدیلات لاپلاس

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz}\right)^n [e_\alpha^{\lambda z}] &= z^{\alpha-n-1} E_{\alpha, \alpha-n}(\lambda z^\alpha), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n [e_\alpha^{\lambda z}] &= n! z^{\alpha n + \alpha - 1} E_{\alpha, (n+1)\alpha}^{n+1}(\lambda z^\alpha), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ \mathfrak{L}[e_\alpha^{\lambda t}](s) &= \frac{1}{s^\alpha - \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0, \quad |\lambda s^{-\alpha}| < 1, \\ \mathfrak{L}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^n e_\alpha^{\lambda t}\right](s) &= \frac{n!}{(s^\alpha - \lambda)^{n+1}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

برای تابع $e_\alpha^{\lambda z}$ برقرار هستند.

۲.۱.۵ انتگرال و مشتقات کسری

این بخش را به تعاریفی از انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل و انتگرال و مشتق کسری کاپوتو در یک فاصله محدود و متناهی اختصاص داده ایم. اطلاعات و جزئیات بیشتر از خواص و تعاریف برای فواصل نامتناهی و یا حتی برای اعداد مختلط را می توان در مراجع [۴۳، ۷۴] جستجو کرد.

انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل

فرض کنید $\{\Omega = [a, b], \quad -\infty < a < b < \infty\}$ یک بازه متناهی بر روی محور اعداد حقیقی \mathbb{R} باشد. انتگرال های

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha f)(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a, \quad \Re(\alpha) > 0, \\ (I_{b-}^\alpha f)(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x < b, \quad \Re(\alpha) > 0. \end{aligned} \quad (14.5)$$

به ترتیب انتگرال راست و چپ کسری ریمان-لیوویل نامیده می شوند. که $\Gamma(\alpha)$ تابع گاما (۵.۵) می باشد. در صورتیکه α یک عدد طبیعی مانند $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ باشد، آن گاه انتگرال کسری راست و چپ ریمان تبدیل به انتگرال مرتبه n - ام

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \\ (I_{b-}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (15.5)$$

می شوند.

به همین صورت مشتق کسری راست و چپ ریمان-لیوویل به شکل

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^\alpha y)(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a^+}^{n-\alpha} y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\Re(\alpha)] + 1, \quad x > a, \\ (D_{b^-}^\alpha y)(x) &:= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b^-}^{n-\alpha} y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\Re(\alpha)] + 1, \quad x < b. \end{aligned} \quad (16.5)$$

($[\Re(\alpha)]$ قسمت صحیح $\Re(\alpha)$ می باشد) تعریف می شوند.
در حالت خاص $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$

$$(D_{a^+}^\circ y)(x) = (D_{b^-}^\circ y)(x) = y(x), \quad (D_{a^+}^n y)(x) = y^{(n)}(x), \quad (D_{b^-}^\circ y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x).$$

مشتقات کسری راست $(D_{a^+}^\circ y)(x)$ و چپ $(D_{b^-}^\circ y)(x)$ ، دقیقاً همان مشتق های راست و چپ معمولی خواهند بود که اغلب با آن سروکار داشته ایم. اما از آنجایی که اغلب قضایا و مثالها برای حالت

$0 < \Re(\alpha) < 1$ بررسی می شوند به طور خاص مشتقات کسری راست و چپ

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^\alpha y)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x > a, \\ (D_{b^-}^\alpha y)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x < b. \end{aligned} \quad (17.5)$$

را خواهیم داشت.

گزاره ۳.۱.۵. اگر $\Re(\alpha) \geq 0$ و $\beta \in \mathbb{C}$ ($\Re(\beta) > 0$) در این صورت روابط

$$\begin{aligned} (I_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad \Re(\alpha) > 0, \\ (D_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \Re(\alpha) \geq 0, \\ (I_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}, \quad \Re(\alpha) > 0, \\ (D_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}, \quad \Re(\alpha) \geq 0. \end{aligned} \quad (18.5)$$

برقرار هستند.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

به طور مثال مشتقات راست و چپ

$$(D_{a^+}^\alpha 1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (D_{b^-}^\alpha 1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad 0 < \Re(\alpha) < 1. \quad (19.5)$$

را داریم.

گزاره ۴.۱.۵. فرض کنید $\Re(\alpha) > 0$ و $n = [\Re(\alpha)] + 1$.

• تساوی $(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = 0$ برقرار است اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{\alpha-j},$$

که $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ اعداد ثابت دلخواه می باشند. و در حالت خاص تر اگر $0 < \Re(\alpha) \leq 1$ ، در این صورت رابطه $(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = 0$ برقرار است اگر و فقط اگر تابع $y(x) = c(x-a)^{\alpha-1}$ برای هر $c \in \mathbb{R}$ ، در تساوی فوق صدق کند.

• اتحاد $(D_{b-}^{\alpha} y)(x) = 0$ برای مشتق چپ برقرار است اگر و فقط اگر

$$y(x) = \sum_{j=1}^n d_j (b-x)^{\alpha-j},$$

برای هر عدد ثابت $d_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ برقرار باشد. و مشابه حالت قبل تساوی $(D_{b-}^{\alpha} y)(x) = 0$ برقرار است اگر و فقط اگر $y(x) = d(b-x)^{\alpha-1}$ برای هر $d \in \mathbb{R}$ داشته باشیم.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

نتیجه می گیریم که در حالت کلی اگر $\beta = 1$ و $\Re(\alpha) \geq 0$ در این صورت مشتق کسری ریمان-لیوویل از یک عدد ثابت دلخواه مانند a لزوماً برابر با صفر نخواهد بود.

لم ۵.۱.۵. اگر $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$ ، در این صورت

$$\left(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f \right) (x) = \left(I_{a+}^{\alpha+\beta} f \right) (x), \quad \left(I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f \right) (x) = \left(I_{b-}^{\alpha+\beta} f \right) (x). \quad (20.5)$$

برای تابع $f(x) \in L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$ و تقریباً در هر نقطه $x \in [a, b]$ ، برقرار است. در حالت خاص اگر $\alpha + \beta > 1$ ، در این صورت (۲۰.۵) برای هر نقطه مانند x ، در بازه $[a, b]$ برقرار می باشد.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

لم ۶.۱.۵. اگر $\Re(\alpha) > 0$ و $1 \leq p \leq \infty$ در این صورت

$$\left(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = f(x), \quad \left(D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f \right) (x) = f(x). \quad (21.5)$$

تقریباً در هر نقطه مانند x ، در بازه $[a, b]$ برقرار می باشد.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

گزاره ۷.۱.۵. اگر $\Re(\alpha) > \Re(\beta) > 0$ و $f(x) \in L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$ در این صورت

$$\left(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = I_{a+}^{\alpha-\beta} f(x), \quad \left(D_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f \right) (x) = I_{b-}^{\alpha-\beta} f(x). \quad (22.5)$$

تقریباً برای هر نقطه ای در بازه $[a, b]$ برقرار است. و

$$(D^k I_{a+}^\alpha f)(x) = I_{a+}^{\alpha-k} f(x), \quad (D^k I_{b-}^\alpha f)(x) = (-1)^k I_{b-}^{\alpha-k} f(x). \quad (23.5)$$

برای حالت خاص $\beta = k \in \mathbb{N}$ و $\Re(\alpha) > 0$ برقرار می باشد. اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

گزاره ۸.۱.۵. فرض کنید $\Re(\alpha) \geq 0$ و $m \in \mathbb{N}$ و $D = \frac{d}{dx}$

• اگر مشتقات کسری راست $(D_{a+}^\alpha y)(x)$ و $(D_{a+}^{\alpha+m} y)(x)$ وجود داشته باشند، تساوی

$$(D^m D_{a+}^\alpha y)(x) = D_{a+}^{\alpha+m} y(x), \quad (24.5)$$

برقرار است.

• در صورت وجود مشتقات کسری چپ $(D_{b-}^\alpha y)(x)$ و $(D_{b-}^{\alpha+m} y)(x)$ اتحاد

$$(D^m D_{b-}^\alpha y)(x) = D_{b-}^{\alpha+m} y(x). \quad (25.5)$$

را خواهیم داشت.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

لم ۹.۱.۵. فرض کنید $f_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x)$ انتگرال کسری از مرتبه $n-\alpha$ و $n = [\Re(\alpha)] + 1$ که $\Re(\alpha) > 0$

• اگر $f(x) \in I_{a+}^\alpha(L_p)$ داشته باشیم، تساوی

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x). \quad (26.5)$$

برای هر $1 \leq p \leq \infty$ برقرار می باشد.

• اگر $f(x) \in L_1(a, b)$ و $f_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$ ، اتحاد

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{n-j}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j}. \quad (27.5)$$

تقریباً برای هر نقطه در بازه $[a, b]$ ، برقرار خواهد بود.

که در اینجا $I_{a+}^\alpha(L_p)$ و $I_{b-}^\alpha(L_p)$ به صورت

$$I_{a+}^\alpha(L_p) := \{f : f = I_{a+}^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p(a, b)\},$$

$$I_{b-}^\alpha(L_p) := \{f : f = I_{b-}^\alpha \phi, \quad \phi \in L_p(a, b)\}.$$

تعریف می شوند.

در حالت خاص اگر $0 < \Re(\alpha) < 1$ ، تساوی

$$(I_{a^+}^n D_{a^+}^n f)(x) = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1},$$

برقرار خواهد بود، که در آن $f_{1-\alpha}(x) = (I_{a^+}^{1-\alpha})(x)$ داریم. و اتحاد

$$(I_{a^+}^n D_{a^+}^n f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

برای $\alpha = n \in \mathbb{N}$ برقرار می باشد.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

گزاره ۱۰.۱.۵. فرض کنیم $\alpha, \beta > 0$ به طوری که $n-1 < \alpha \leq n$ و $m-1 < \beta \leq m$ که

$n, m \in \mathbb{N}$ و $\alpha + \beta < n$ ، با در نظر گرفتن اتحاد $f_{m-\alpha} \in AC^m([a, b])$

$$(D_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\beta f)(x) = (D_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(x) - \sum_{j=1}^m (D_{a^+}^{\beta-j} f) \frac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}. \quad (28.5)$$

را برای هر $f \in L_1(a, b)$ خواهیم داشت.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

لم ۱۱.۱.۵. فرض کنیم $n = [\Re(\alpha)] + 1$ که در آن $\Re(\alpha) > 0$ ، با در نظر گرفتن انتگرال کسری

$$g_{n-\alpha}(x) = (I_{b^-}^{n-\alpha} g)(x)$$

موارد زیر را داریم:

• اتحاد

$$(I_{b^-}^\alpha D_{b^-}^\alpha g)(x) = g(x), \quad (29.5)$$

برای $g(x) \in I_{b^-}^\alpha(L_p)$ و $1 \leq p \leq \infty$ برقرار است.

• رابطه

$$(I_{b^-}^\alpha D_{b^-}^\alpha g)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{n-j} g_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)(b-x)^{\alpha-j}}. \quad (30.5)$$

را برای $g(x) \in L_1(a, b)$ و $g_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$ خواهیم داشت.

• در حالت خاص اگر $0 < \Re(\alpha) < 1$ داشته باشیم، بنابراین رابطه (۳۰.۵) به فرم

$$(I_{b^-}^\alpha D_{b^-}^\alpha g)(x) = g(x) - \frac{g_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha-1}, \quad g_{1-\alpha}(x) = (I_{b^-}^{1-\alpha} g)(x),$$

تبدیل می شود. و زمانی که α یک عدد طبیعی $\alpha = n \in \mathbb{N}$ باشد، اتحاد

$$(I_{b^-}^\alpha D_{b^-}^\alpha g)(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k g^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k.$$

بدست می آید.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

تذکره ۱۲.۱.۵. فرض کنید

$$n = [\Re(\alpha)] + 1, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad y(x) \in AC^n[0, b], \quad b > 0.$$

تبدیل لاپلاس از مشتق ریمان-لیوویل به شکل

$$(\mathcal{L}D_{0+}^{\alpha}y)(x) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k(I_{0+}^{n-\alpha}y)(0+). \quad (31.5)$$

خواهد بود.

اگر $0 < \Re(\alpha) < 1$ در نظر بگیریم و $y(x) \in AC[0, b]$ برقرار باشد، لاپلاس مشتق ریمان را به صورت

$$(\mathcal{L}D_{0+}^{\alpha}y)(x) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - (I_{0+}^{1-\alpha}y)(0+). \quad (32.5)$$

خواهیم داشت.

گزاره ۱۳.۱.۵. با مفروض بودن $\Re(\lambda) > 0$ ، اتحادهای

$$(I_{+}^{\alpha}e^{\lambda t})(x) = \lambda^{-\alpha}e^{\lambda x}, \quad (D_{+}^{\alpha}e^{\lambda t})(x) = \lambda^{\alpha}e^{\lambda x}.$$

برای $\Re(\alpha) > 0$ برقرار می باشند. که تعریف انتگرال و مشتق I_{+}^{α} و D_{+}^{α} ، که از تعاریف انتگرال و مشتق راست و چپ در روابط (۱۴.۵) و (۱۶.۵) گرفته شده است، عبارتند از:

$$\begin{aligned} (I_{+}^{\alpha}f)(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \Re(\alpha) > 0, \\ (I_{-}^{\alpha}f)(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad \Re(\alpha) > 0, \\ (D_{+}^{\alpha}y)(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{+}^{n-\alpha}y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_{-\infty}^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\Re(\alpha)] + 1, \quad \Re(\alpha) \geq 0, \\ (D_{-}^{\alpha}y)(x) &:= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{-}^{n-\alpha}y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^{\infty} \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\Re(\alpha)] + 1, \quad \Re(\alpha) \geq 0. \end{aligned} \quad (33.5)$$

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

گزاره ۱۴.۱.۵. اگر $\alpha > \beta > 0$ روابط

$$\left(D_+^\beta I_+^\alpha f\right)(x) = \left(I_+^{\alpha-\beta} f\right)(x), \quad \left(D_-^\beta I_-^\alpha f\right)(x) = \left(I_-^{\alpha-\beta} f\right)(x),$$

برای $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ برقرار می باشند. که اگر شرط طبیعی بودن β ، $\beta = k \in \mathbb{N}$ همراه با $\Re(\alpha) > k$ قرار دهیم آن گاه روابط بالا را به صورت

$$\left(D_+^k I_+^\alpha f\right)(x) = \left(I_+^{\alpha-k} f\right)(x), \quad \left(D_-^k I_-^\alpha f\right)(x) = (-1)^k \left(I_-^{\alpha-k} f\right)(x).$$

خواهیم داشت.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

گزاره ۱۵.۱.۵. با مفروض بودن $\alpha > 0$ ، $m \in \mathbb{N}$ و $D = d/dx$

• اگر مشتقات راست $(D_+^\alpha y)(x)$ و $(D_+^{\alpha+m} y)(x)$ وجود داشته باشند، در این صورت تساوی

$$(D^m D_+^\alpha y)(x) = (D_+^{\alpha+m} y)(x),$$

برقرار خواهد بود.

• و در صورت وجود مشتقات $(D_-^\alpha y)(x)$ و $(D_-^{\alpha+m} y)(x)$ ، تساوی

$$(D^m D_-^\alpha y)(x) = (-1)^m (D_-^{\alpha+m} y)(x).$$

را داریم.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

انتگرال و مشتق کسری کاپوتو

فرض کنیم $[a, b]$ یک بازه متناهی بر روی محور اعداد حقیقی \mathbb{R} و $(D_{a+}^\alpha y)(x) \equiv (D_{a+}^\alpha [y(t)])(x)$ و $(D_{b-}^\alpha y)(x) \equiv (D_{b-}^\alpha [y(t)])(x)$ مشتقات کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\{\alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) \geq 0\}$ باشند. تعریف مشتقات کسری $({}^c D_{a+}^\alpha y)(x)$ و $({}^c D_{b-}^\alpha y)(x)$ از مرتبه $\{\alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) \geq 0\}$ بر روی بازه $[a, b]$ در قضیه زیر آورده شده است.

قضیه ۱۶.۱.۵. فرض کنید $\alpha \geq 0$ ، $n = [\Re(\alpha)] + 1$ و $y(x) \in AC^n[a, b]$ در اینصورت مشتقات کسری راست و چپ کاپوتو ^{۱۹} $({}^c D_{a+}^\alpha y)(x)$ و $({}^c D_{b-}^\alpha y)(x)$ بر روی هر نقطه از بازه $[a, b]$ موجود هستند.

• اگر $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ، مشتقات کسری راست و چپ کاپوتو به ترتیب عبارتند از:

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} := (I_{a+}^{n-\alpha} D^n y)(x), \quad (34.5)$$

و

$$({}^c D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} := (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} D^n y)(x). \quad (35.5)$$

در حالت خاص اگر $y(x) \in AC[a, b]$ و $0 < \Re(\alpha) < 1$ داشته باشیم، در این صورت مشتقات کسری کاپوتو را به شکل

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y'(t) dt}{(x-t)^\alpha} := (I_{a+}^{1-\alpha} Dy)(x), \quad (36.5)$$

و

$$({}^c D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y'(t) dt}{(t-x)^\alpha} := - (I_{b-}^{1-\alpha} Dy)(x). \quad (37.5)$$

داریم.

• اگر $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ، در اینصورت

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = ({}^c D_{b-}^\alpha y)(x) = y(x).$$

نمایشی از مشتق کسری راست و چپ کاپوتو خواهد بود.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

گزاره ۱۷.۱.۵. فرض کنید $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$ و $n = [\Re(\alpha)] + 1$ مفروض باشند، در این صورت روابط

$$\begin{aligned} ({}^c D_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-1}, \quad \Re(\beta) > n, \\ ({}^c D_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-1}, \quad \Re(\beta) > n. \end{aligned} \quad (38.5)$$

برای مشتقات کسری راست و چپ کاپوتو برقرار هستند. و تساوی

$$({}^c D_{a+}^\alpha (t-a)^k)(x) = ({}^c D_{b-}^\alpha (t-a)^k)(x) = 0. \quad (39.5)$$

را برای $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ خواهیم داشت. در حالت خاص اگر $\Re(\alpha) \notin \mathbb{N}_0$ در این صورت مشتقات کسری راست و چپ کاپوتو از عدد حقیقی یک برابر با صفر خواهند بود.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

لم ۱۸.۱.۵. فرض کنید $\Re(\alpha) > 0$ و $y(x) \in L_\infty(a, b)$ و یا $y(x) \in C[a, b]$ مفروض باشند

• اگر $\Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$ و یا $\alpha \in \mathbb{N}$ ، در این صورت تساوی

$$({}^c D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha y)(x) = y(x), \quad ({}^c D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha y)(x) = y(x). \quad (40.5)$$

را برای انتگرال کسری و مشتق کاپوتو خواهیم داشت.

• اگر $\Re(\alpha) \in \mathbb{N}$ برقرار باشد، در این صورت روابط بالا به صورت

$$\begin{aligned} ({}^c D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha y)(x) &= y(x) - \frac{(I_{a^+}^{\alpha+1-n} y)(a^+)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{n-\alpha}, \\ ({}^c D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha y)(x) &= y(x) - \frac{(I_{b^-}^{\alpha+1-n} y)(b^-)}{\Gamma(n-\alpha)} (b-x)^{n-\alpha}. \end{aligned} \quad (41.5)$$

تعمیم می یابند.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

گزاره ۱۹.۱.۵. اگر $\Re(\alpha) > 0$ و $\lambda > 0$ برقرار باشند، در این صورت مشتق کسری کاپوتو از تابع نمایی $e^{\lambda t}$ به صورت

$$({}^c D_+^\alpha e^{\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}, \quad ({}^c D_-^\alpha e^{-\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{-\lambda x}.$$

بدست می آیند. که مشتقات کسری راست و چپ کاپوتو $({}^c D_+^\alpha y)(x)$ و $({}^c D_-^\alpha y)(x)$ به فرم

$$\begin{aligned} ({}^c D_+^\alpha y)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad \alpha \notin \mathbb{N}, \\ ({}^c D_-^\alpha y)(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad \alpha \notin \mathbb{N}, \\ ({}^c D_+^\alpha y)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{y'(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad 0 < \Re(\alpha) < 1, \\ ({}^c D_-^\alpha y)(x) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y'(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad 0 < \Re(\alpha) < 1. \end{aligned} \quad (42.5)$$

تعریف شده اند.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

لم ۲۰.۱.۵. اگر $\alpha \in \mathbb{R} > 0$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ ، رابطه بین مشتق کسری کاپوتو و تابع میتیج-لفلر عبارتند از:

$$\begin{aligned} ({}^c D_{a^+}^\alpha E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha])(x) &= \lambda E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha], \\ ({}^c D_-^\alpha t^{\alpha-1} E_\alpha[\lambda t^{-\alpha}]) &= \frac{1}{x} E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda x^{-\alpha}). \end{aligned} \quad (43.5)$$

در حالت خاص $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ، روابط بالا را به فرم

$$D^n E_n[\lambda(x-a)^n] = E_n[\lambda(x-a)^n],$$

$$D^n \left(t^{n-1} E_n[\lambda t^{-n}] \right) (x) = \frac{1}{x} E_{n,1-n}(\lambda x^{-n}) = \frac{\lambda}{x^{n+1}} E_n(\lambda x^{-n}). \quad (44.5)$$

خواهیم داشت.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

لم ۲۱.۱.۵. اگر $\alpha > 0$ و $\{n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ به طوریکه $y(x) \in C^n(\mathbb{R}^+)$ و $y^{(n)}(x) \in L_1(0, b)$ برای هر $b > 0$ مفروض باشند.

فرض کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} (D^k y)(x) = 0$ ، برای $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ برقرار باشد، در این صورت تبدیل لاپلاس از مشتق کاپوتو عبارت است با:

$$(\mathcal{L}^c D_{0+}^\alpha y)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}y)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (D^k y)(0), \quad (45.5)$$

در حالت خاص اگر $0 < \alpha \leq 1$ ، در این صورت تبدیل لاپلاس از مشتق کاپوتو را به شکل

$$(\mathcal{L}^c D_{0+}^\alpha y)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}y)(s) - s^{\alpha-1} y(0). \quad (46.5)$$

خواهیم داشت.

اثبات: به [۴۳] مراجعه شود.

انتگرال و مشتق کسری ایردیلی-کوبر^{۲۰}

فرض کنیم (a, b) یک بازه متناهی یا نامتناهی بر روی محور اعداد حقیقی مثبت \mathbb{R}^+ باشد، با در نظر گرفتن

$$\Re(\alpha) > 0, \quad \alpha, \eta \in \mathbb{C}, \quad \sigma > 0,$$

انتگرال کسری چپ و راست کوبر به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} (I_{a+; \sigma, \eta}^\alpha f)(x) &:= \frac{\sigma x^{-\sigma(\sigma+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t) dt}{(x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha}}, \\ (I_{b-; \sigma, \eta}^\alpha f)(x) &:= \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt}{(t^\sigma - x^\sigma)^{1-\alpha}}, \\ (I_{+; \sigma, \eta}^\alpha f)(x) &:= \frac{\sigma x^{-\sigma(\sigma+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t) dt}{(x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha}}, \\ (I_{-; \sigma, \eta}^\alpha f)(x) &:= \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt}{(t^\sigma - x^\sigma)^{1-\alpha}}. \end{aligned} \quad (47.5)$$

با در نظر گرفتن $n = [\Re(\alpha)] + 1$ ، مشتق کسری کوبر نیز به همین ترتیب، به صورت

$$\begin{aligned} (D_{a+; \sigma, \eta}^\alpha y)(x) &:= x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n+\eta)} (I_{a+; \sigma, \eta+\alpha}^{n-\alpha} y)(x), \\ (D_{b-; \sigma, \eta}^\alpha y)(x) &:= x^{\sigma(\eta+\alpha)} \left(\frac{-1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n-\eta-\alpha)} (I_{b-; \sigma, \eta+\alpha-n}^{n-\alpha} y)(x), \quad (48.5) \\ (D_{+; \sigma, \eta}^\alpha y)(x) &:= x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n+\eta)} (I_{+; \sigma, \eta+\alpha}^{n-\alpha} y)(x), \quad a = -\infty, \\ (D_{-; \sigma, \eta}^\alpha y)(x) &:= x^{\sigma(\eta+\alpha)} \left(\frac{-1}{\sigma x^{\sigma-1}} D \right)^n x^{\sigma(n-\eta-\alpha)} (I_{-; \sigma, \eta+\alpha-n}^{n-\alpha} y)(x), \quad b = \infty. \end{aligned}$$

تعریف می شوند. خواص بیشتری از این عملگر کسری در [۴۳، ۴۴، ۶۴، ۷۴] ارائه شده است.

مشتق کسری گرنوالد ۲۱

به ترتیب مشتقات چپ و راست گرنوالد به صورت

$$\begin{aligned} y_+^\alpha(x) &:= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_h^\alpha y)(x)}{h^\alpha}, \\ y_-^\alpha(x) &:= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_{-h}^\alpha y)(x)}{h^\alpha}. \end{aligned} \quad (49.5)$$

تعریف می شوند.

که $(\Delta_h^n y)(x)$ تفاضل متناهی مرتبه n تابع $y(x)$ با طول گام $h \in \mathbb{R}$ و تعریف

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh), \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (50.5)$$

می باشد.

در حالت خاص اگر $x \in [a, b]$ ، مشتقات چپ و راست گرنوالد تبدیل به مشتقات

$$\begin{aligned} y_{a+}^\alpha(x) &:= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_{h, a+}^\alpha y)(x)}{h^\alpha}, \\ y_{b-}^\alpha(x) &:= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_{h, b-}^\alpha y)(x)}{h^\alpha}. \end{aligned} \quad (51.5)$$

می شوند.

و در حالت خاص تر اگر شرط $0 < \alpha < 1$ را قائل شویم مشتقات (۵۱.۵) به فرم

$$\begin{aligned} y_{a+}^\alpha(x) &:= \frac{y(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y(x) - y(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt, \\ y_{b-}^\alpha(x) &:= \frac{y(x)}{\Gamma(1-\alpha)(b-x)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y(x) - y(t)}{(t-x)^{1+\alpha}} dt. \end{aligned} \quad (52.5)$$

قابل محاسبه خواهند بود. به طور مثال مشتق چپ و راست کسری گرانوالد از تابع حقیقی یک عبارت است با:

$$\begin{aligned} y_{a+}^{\alpha}(x) &:= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}, \\ y_{b-}^{\alpha}(x) &:= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (53.5)$$

۳.۱.۵ روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی کسری با استفاده از تعریف مشتق ریمان-لیوویل

در این بخش اشاره ای به وجود و منحصر به فردی و ارائه راه حل هایی برای رسیدن به جواب معادلات کسری در دو حالت همگن و ناهمگن و خطی و غیر خطی با استفاده از مشتق کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو با کمک گرفتن از توابع تعریف شده و تبدیل لاپلاس از چنین مشتقات کسری که در بخش های قبلی توضیحات آن آورده شده است، می پردازیم.

همان طور که برای معادلات دیفرانسیل معمولی تنها یک راه حل کلی برای رسیدن به جواب وجود ندارد، در مورد معادلات کسری نیز تنها استفاده از روابط و تبدیلات ذکر شده راه رسیدن به جواب منحصر به فرد این دسته از معادلات نمی باشد و روش های جامع و کلی تری همچون روش گروه های تقارن لی که در ادامه در مورد آن به تفصیل صحبت می کنیم، روشی برای ارائه جواب یکتا برای معادلات دیفرانسیل کسری می باشد. بنابراین بهتر است به اهمیت گروه های تقارن لی در همین جا اشاره شود که تمامی معادلات کسری همگن و ناهمگن اعم از خطی یا غیر خطی با استفاده از چنین تبدیلات و توابعی ممکن است به جواب نرسند که لازم است روشی همچون روش گروه های تقارن لی که یک روش جامع برای رسیدن به جواب می باشد، ارائه شود.

جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی کسری همگن با ضرایب ثابت

در این بخش با استفاده از روش تبدیل لاپلاس، جواب های معادلات دیفرانسیل معمولی کسری

$$\sum_{k=0}^m A_k (D_{\circ+}^{\alpha_k} y)(x) + A_{\circ} y(x) = \circ. \quad (54.5)$$

که شرایط

$$x > \circ, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \circ < \alpha_1 < \dots < \alpha_m, \quad A_k \in \mathbb{R}, \quad k = \circ, \dots, m.$$

در آن برقرار می باشد را با کمک تعریف مشتق ریمان-لیوویل بدست می آوریم. (A_k ها اعداد حقیقی دلخواه هستند).

• اگر $m = 1$ در نظر بگیریم معادله دیفرانسیل کسری معمولی (۵۴.۵) را به شکل

$$(D_{\circ+}^{\alpha} y)(x) - \lambda y(x) = \circ, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (55.5)$$

خواهیم داشت.

قضیه ۲۲.۱.۵. با استفاده از تبدیل لاپلاس مشتق ریمان-لیوویل (۳۱.۵)، توابع

$$y_j(x) = x^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha+1-j}(\lambda x^{\alpha}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (56.5)$$

دسته ای از جواب های معادلات دیفرانسیل کسری (۵۵.۵) می باشند.

اثبات: به ([۴۳]) مراجعه شود.

به طور مثال اگر $0 < \alpha \leq 1$ در این صورت جواب معادله دیفرانسیل کسری (۵۵.۵) به شکل

$$y(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x^{\alpha})$$

خواهد بود. و اگر $1 < \alpha \leq 2$ ، توابع

$$y_1(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda x^{\alpha}), \quad y_2(x) = x^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(\lambda x^{\alpha}).$$

جواب هایی از معادله کسری (۵۵.۵) هستند.

مثال ۲۳.۱.۵. دسته جواب های معادله دیفرانسیل معمولی کسری

$$(D_{\circ+}^{n-1/2} y)(x) - \lambda y(x) = \circ, \quad x > \circ, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (57.5)$$

به فرم

$$y_j(x) = x^{n-j-1/2} E_{n-1/2, n-j+1/2}(\lambda x^{n-1/2}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (58.5)$$

می باشند

مثال ۲۴.۱.۵. توابع

$$y_j(x) = x^{n-j} E_{n, n-j+1}(\lambda x^n), \quad j = 1, \dots, n. \quad (59.5)$$

جواب های معادله کسری

$$(y^{(n)})(x) - \lambda y(x) = \circ, \quad x > \circ, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (60.5)$$

هستند.

مثال ۲۵.۱.۵. جواب های معادلات دیفرانسیل

$$y'' - \lambda y(x) = 0, \quad y'' + \lambda y(x) = 0. \quad (۶۱.۵)$$

به صورت

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sinh(\sqrt{\lambda}x), & y_2(x) &= \cosh(\sqrt{\lambda}x), \\ y_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}x), & y_2(x) &= \cos(\sqrt{\lambda}x). \end{aligned} \quad (۶۲.۵)$$

می باشند.

• با در نظر گرفتن $m = 2$ معادله کسری همگن (۵۴.۵) تبدیل به معادله کسری

$$(D_{\circ+}^{\alpha} y)(x) - \lambda (D_{\circ+}^{\beta} y)(x) - \mu y(x) = 0, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (۶۳.۵)$$

با مشتقات α و β می شود.

قضیه ۲۶.۱.۵. معادله کسری همگن (۶۳.۵)، با مشتقات $\alpha > \beta > 0$ را در نظر بگیرید. جواب هایی به فرم

$$y_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + \alpha - j} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + \alpha - j, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha - \beta} \right], \quad j = 1, \dots, n. \quad (۶۴.۵)$$

برای این سری از معادلات قابل محاسبه هستند. که ${}_1\Psi_1$ نمایشی از تابع سازه با تعریف

$${}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + \beta, \alpha) \end{matrix} \middle| z \right] := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(\alpha n + \beta + \alpha j)} \frac{z^j}{j!} = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n E_{\alpha, \beta}(z). \quad (۶۵.۵)$$

می باشد.

مثال ۲۷.۱.۵. جواب های معادلات دیفرانسیل همگن

$$(D_{\circ+}^{\alpha} y)(x) - \lambda (D_{\circ+}^{\beta} y)(x) = 0, \quad x > 0, \quad \alpha > \beta > 0,$$

عبارتند از

$$y_j(x) = x^{\alpha - j} E_{\alpha - \beta, \alpha + 1 - j}(\lambda x^{\alpha - \beta}), \quad j = 1, \dots, n.$$

که در حالت خاص $0 < \beta < \alpha \leq 1$ جواب معادله کسری همگن

$$(D_{\circ+}^{\alpha} y)(x) - \lambda (D_{\circ+}^{\beta} y)(x) = 0, \quad x > 0.$$

به صورت

$$y_1(x) = x^{\alpha - 1} E_{\alpha - \beta, \alpha}(\lambda x^{\alpha - \beta}).$$

محاسبه می شود.

نتیجه ۲۸.۱.۵. جواب های معادله معمولی کسری همگن

$$(D_{\circ+}^{\alpha}y)(x) - \lambda (D_{\circ+}^{\beta}y)(x) - \mu y(x) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta < \alpha, \quad (66.5)$$

به فرم

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + \alpha - 1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + \alpha, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha - \beta} \right], \quad (67.5)$$

و

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + \alpha - 2} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + \alpha - 1, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha - \beta} \right], \quad (68.5)$$

بدست می آیند.

مثال ۲۹.۱.۵. توابع

$$y_1(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda x^{\alpha-\beta}),$$

و

$$y_2(x) = x^{\alpha-2} E_{\alpha-\beta, \alpha-1}(\lambda x^{\alpha-\beta}).$$

جواب هایی از معادله معمولی کسری (۶۶.۵) می باشند.

جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی کسری ناهمگن با ضرایب ثابت

بعد از معرفی و محاسبه جواب های معادله دیفرانسیل معمولی کسری از نوع همگن، در این بخش جواب های معادله معمولی کسری از نوع ناهمگن را بررسی می کنیم. معادلات

$$\sum_{k=0}^m A_k (D_{\circ+}^{\alpha_k}y)(x) + A_0 y(x) = f(x). \quad (69.5)$$

فرم کلی از معادلات دیفرانسیل معمولی ناهمگن کسری می باشند. که شرایط

$$x > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m, \quad A_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, m.$$

برای معادله کسری ناهمگن (۶۹.۵) برقرار می باشد.

با استفاده از تعریف مشتق ریمان-لیوویل، جواب های معادله (۶۹.۵) را در حالات خاص $m=1, m=2$ بدست می آوریم.

• با در نظر گرفتن $m=1, A_m=1$

قضیه ۳۰.۱.۵. فرض کنید $\alpha > 0, \lambda \in \mathbb{R}$ و تابع $f(x)$ بر روی \mathbb{R}_+ تعریف شده باشد. در این صورت معادله

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad (70.5)$$

حل پذیر بوده و دسته جواب های آن به فرم

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}] f(t) dt. \quad (71.5)$$

می باشند. اثبات در [۴۳].

مثال ۳۱.۱.۵. جواب های معادلات دیفرانسیل ناهمگن

$$(D_{0+}^{n-1/\gamma} y)(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

عبارتند از

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{n-3/\gamma} E_{n-1/\gamma, n-1/\gamma}[\lambda(x-t)^{n-1/\gamma}] f(t) dt.$$

مثال ۳۲.۱.۵. جواب های معادلات دیفرانسیل

$$y^n(x) - \lambda y(x) = f(x).$$

به صورت

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{n-1} E_{n, n}[\lambda(x-t)^n] f(t) dt.$$

محاسبه می شوند. و در حالت خاص $n = 2$ ، توابع

$$y(x) = \int_0^x \frac{\sinh[\sqrt{\lambda}(x-t)]}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt, \quad \lambda > 0,$$

$$y(x) = \int_0^x \frac{\sinh[\sqrt{-\lambda}(x-t)]}{\sqrt{-\lambda}} f(t) dt, \quad \lambda < 0.$$

جواب های معادله کسری ناهمگن

$$y''(x) - \lambda y(x) = f(x).$$

هستند.

- با در نظر گرفتن $m = 2$ ، معادله (۶۹.۵)، تبدیل به معادله دیفرانسیل ناهمگن با مشتقات کسری α و β به شکل

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda (D_{0+}^{\beta} y)(x) - \mu y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad \alpha > \beta > 0. \quad (72.5)$$

می شود. که با استفاده از قضیه ای که در ادامه آورده شده است، جواب های معادله (۷۲.۵) را محاسبه می کنیم.

قضیه ۳۳.۱.۵. فرض کنید $\alpha > \beta > 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و تابع $f(x)$ بر روی \mathbb{R}_+ تعریف شده باشد، در این صورت تابع

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(x-t)f(t)dt, \quad (73.5)$$

که

$$G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} z^{\alpha n} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + \alpha, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda z^{\alpha-\beta} \right], \quad (74.5)$$

جوابی از معادله دیفرانسیل کسری ناهمگن (۷۲.۵) می باشد.

مثال ۳۴.۱.۵. جواب های معادله کسری

$$y'(x) - \lambda (D_{0+}^{\beta} y)(x) - \mu y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad 0 < \operatorname{Re}(\beta) < 1,$$

عبارتند از:

$$y(x) = \int_0^x G_{1,\beta;\lambda,\mu}(x-t)f(t)dt,$$

که در آن

$$G_{1,\beta;\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu z^n}{n!} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (n+1, 1-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda z^{1-\beta} \right],$$

برقرار می باشد.

مثال ۳۵.۱.۵. جواب های معادله کسری

$$y''(x) - \lambda (D_{0+}^{\beta} y)(x) - \mu y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad 0 < \beta < 2,$$

نیز توابعی به صورت

$$y(x) = \int_0^x (x-t) G_{\Upsilon,\beta;\lambda,\mu}(x-t)f(t)dt,$$

هستند که در آن

$$G_{\Upsilon,\beta;\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n z^{\Upsilon n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\Upsilon n + \Upsilon, \Upsilon - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda z^{\Upsilon-\beta} \right],$$

برقرار می باشد.

روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی کسری با ضرایب غیر ثابت

معادله کسری

$$x(D_{\circ+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = 0, \quad x, \alpha > 0. \quad (75.5)$$

که $\lambda \in \mathbb{R}$ و $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ جوی به فرم

$$y(x) = cy_1(x) = cx^{\alpha-1} \cdot \Psi_1 \left[\begin{matrix} \left. \frac{\lambda}{\alpha-1} x^{\alpha-1} \right. \\ (\alpha, \alpha-1) \end{matrix} \right] + \sum_{m=2}^l c_m x^{\alpha-m} \cdot \Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\alpha+1-m, \alpha-1) \left(\frac{\alpha-m}{\alpha-1}, 1 \right) \right. \left. \left. \frac{\lambda}{\alpha-1} x^{\alpha-1} \right. \right], \quad (76.5)$$

دارد. که اعداد حقیقی دلخواه و $p\Psi_q$ با $z, a_l, b_j \in \mathbb{C}$ و $\alpha_l, \beta_j \in \mathbb{R}$ در حالت کلی به فرم

$${}_p\Psi_q(z) = {}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_l, \alpha_l)_{l,p} \\ (b_l, \beta_l)_{l,q} \end{matrix} \middle| z \right] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{l=1}^p \Gamma(a_l + \alpha_l k)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!}, \quad (77.5)$$

تعریف می شود.

در حالت خاص $0 < \alpha \leq 1$ جواب معادله کسری (75.5) عبارت است با:

$$y(x) = cy_1(x) = cx^{\alpha-1} \cdot \Psi_1 \left[\begin{matrix} \left. \frac{-\lambda}{1-\alpha} x^{\alpha-1} \right. \\ (\alpha, \alpha-1) \end{matrix} \right]. \quad (78.5)$$

که c یک عدد حقیقی دلخواه و Ψ_1 در (77.5) داده شده است.

مثال ۳۶.۱.۵. تابع

$$y(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} e^{-\lambda^2/x},$$

جوابی از معادله کسری

$$x(D_{\circ+}^{\lambda/\sqrt{x}}y)(x) - \lambda y(x), \quad x, \alpha > 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

می باشد.

۴.۱.۵ روش تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی کسری با استفاده از تعریف مشتق کاپوتو

جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی کسری همگن با ضرایب ثابت

جواب های معادلات دیفرانسیل معمولی کسری

$$\sum_{k=0}^m A_k ({}^c D_{0+}^{\alpha_k} y)(x) + A_0 y(x) = 0. \quad (79.5)$$

که

$$x > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m, \quad A_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, m.$$

با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و با کمک تعریف مشتق کاپوتو بدست می آوریم. (A_k ها اعداد حقیقی دلخواه می باشند)

• معادله دیفرانسیل کسری معمولی (79.5) با $m = 1$ به صورت

$$({}^c D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda y(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (80.5)$$

در نظر بگیریم.

قضیه 37.1.5. با استفاده از تبدیل لاپلاس مشتق کاپوتو (45.5)، توابع

$$y_j(x) = x^j E_{\alpha, j+1}(\lambda x^{\alpha}), \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (81.5)$$

جواب های معادلات دیفرانسیل کسری (80.5) می باشند. اثبات در ([43]).

به طور مثال اگر $0 < \alpha \leq 1$ ، تابع

$$y(x) = E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}),$$

و اگر $1 < \alpha \leq 2$ ، توابع

$$y_1(x) = E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}), \quad y_2(x) = x E_{\alpha, 2}(\lambda x^{\alpha}).$$

جواب هایی از معادله کسری (80.5) می باشند.

مثال 38.1.5. جواب های

$$y_j(x) = x^j E_{n-1/2, j+1}(\lambda x^{n-1/2}), \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (82.5)$$

دسته جواب هایی از معادله دیفرانسیل معمولی کسری

$$({}^c D_{0+}^{n-1/2} y)(x) - \lambda y(x) = 0, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (83.5)$$

هستند.

• در این مرحله با قرار دادن $m = 2$ در معادله کسری همگن (۷۹.۵)، طی قضیه ای که در ادامه آورده شده است، جواب های معادله کسری بدست آمده را محاسبه می کنیم.

قضیه ۳۹.۱.۵. با در نظر گرفتن $m = 2$ ، معادله (۷۹.۵) به معادله کسری همگن با مشتقات α و β به صورت

$$({}^c D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda ({}^c D_{0+}^{\beta} y)(x) - \mu y(x) = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (۸۴.۵)$$

تبدیل خواهد شد که $\alpha > \beta > 0$ و $n - 1 < \alpha \leq n, m - 1 < \beta \leq m$ دسته جواب های

- برای $j = 0, \dots, m - 1$

$$y_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + j} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + j + 1, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha - \beta} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + j + \alpha - \beta} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + j + 1 + \alpha - \beta, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha - \beta} \right] \quad (۸۵.۵)$$

- برای $j = m, \dots, n - 1$

$$y_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + j} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + j + 1, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha - \beta} \right]. \quad (۸۶.۵)$$

جواب هایی از معادله کسری همگن (۸۴.۵) خواهند بود. که در اینجا ${}_1\Psi_1$ نمایشی از تابع سازه با تعریف (۶۵.۵) می باشد.

مثال ۴۰.۱.۵. جواب های معادلات دیفرانسیل همگن

$$({}^c D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda ({}^c D_{0+}^{\beta} y)(x) = 0, \quad x > 0, \quad \alpha > \beta > 0.$$

عبارتند از:

$$y_j(x) = x^j E_{\alpha - \beta, j + 1}(\lambda x^{\alpha - \beta}) - \lambda x^{\alpha - \beta + j} E_{\alpha - \beta, \alpha - \beta + j + 1}(\lambda x^{\alpha - \beta}), \quad j = 0, \dots, m - 1,$$

$$y_j(x) = x^j E_{\alpha - \beta, j + 1}(\lambda x^{\alpha - \beta}), \quad j = m, \dots, n - 1.$$

نتیجه ۴۱.۱.۵. جواب معادله معمولی کسری همگن

$$({}^c D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda ({}^c D_{0+}^{\beta} y)(x) - \mu y(x) = 0, \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (۸۷.۵)$$

به صورت

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n+1, \alpha-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha-\beta} \right] - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + \alpha - \beta} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n+1 + \alpha - \beta, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha-\beta} \right]. \quad (۸۸.۵)$$

محاسبه می شوند.

نتیجه ۴۲.۱.۵. معادله کسری (۸۷.۵) با شرایط $0 < \beta < \alpha \leq 2$ و $1 < \alpha$ ، علاوه بر جواب $y_1(x)$ دارای جوابی به فرم

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + 1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n+2, \alpha-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha-\beta} \right] - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + 1 + \alpha - \beta} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n+2 + \alpha - \beta, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha-\beta} \right]. \quad (۸۹.۵)$$

نیز می باشد. و در حالت $j = 0, \dots, m-1$ که $1 < \beta < \alpha$ و $0 < \beta \leq 1$ برقرار باشند، جواب $y_2(x)$ به صورت

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + 1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n+2, \alpha-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha-\beta} \right]. \quad (۹۰.۵)$$

بدست می آید.

مثال ۴۳.۱.۵. توابع

$$y_1(x) = E_{\alpha-\beta}(\lambda x^{\alpha-\beta}) - \lambda x^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+1}(\lambda x^{\alpha-\beta}),$$

و

$$y_2(x) = x E_{\alpha-\beta, 2}(\lambda x^{\alpha-\beta}) - \lambda x^{\alpha-\beta+1} E_{\alpha-\beta, \alpha-\beta+2}(\lambda x^{\alpha-\beta}).$$

جواب هایی از معادله معمولی کسری

$$({}^c D_{+}^{\alpha} y)(x) - \lambda ({}^c D_{+}^{\beta} y)(x) = 0, \quad 0 < \beta < \alpha, \quad 1 < \alpha \leq 2.$$

هستند. و در حالت $0 < \beta \leq 1$ و $1 < \beta < \alpha$ جواب $y_2(x)$ به صورت $y_2(x) = x E_{\alpha-\beta, 2}(\lambda x^{\alpha-\beta})$ محاسبه می شود.

مثال ۴۴.۱.۵. جواب معادله کسری

$$y'(x) - \lambda ({}^c D_{\circ+}^{\beta} y)(x) - \mu y(x) = \circ, \quad \circ < \beta < 1, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (91.5)$$

عبارت است با:

$$y_1(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^n {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (n+1, 1-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{1-\beta} \right] - \lambda \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{n+1-\beta} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (n+2-\beta, 1-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{1-\beta} \right]. \quad (92.5)$$

مثال ۴۵.۱.۵. دو جواب از معادله کسری

$$y''(x) - \lambda ({}^c D_{\circ+}^{\beta} y)(x) - \mu y(x) = \circ, \quad \circ < \beta < 2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (93.5)$$

به صورت

$$y_1(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{2n} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (2n+1, 2-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{2-\beta} \right] - \lambda \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{2n+2-\beta} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (2n+3-\beta, 2-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{2-\beta} \right]. \quad (94.5)$$

و

$$y_2(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{2n+1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (2n+2, 2-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{2-\beta} \right] - \lambda \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{2n+3-\beta} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (2n+4-\beta, 2-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{2-\beta} \right]. \quad (95.5)$$

بدست می آیند.

جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی کسری ناهمگن با ضرایب ثابت

بعد از معرفی و محاسبه جواب های معادله دیفرانسیل معمولی کسری از نوع همگن، در این بخش جواب های معادله معمولی کسری از نوع ناهمگن را با استفاده از تعریف مشتق کاپوتو

بررسی می کنیم.
معادلات

$$\sum_{k=0}^m A_k ({}^c D_{0+}^{\alpha_k} y)(x) + A_0 y(x) = f(x). \quad (96.5)$$

فرم کلی از معادلات دیفرانسیل معمولی ناهمگن با مشتق کسری کاپوتو می باشد. که با در نظر گرفتن شرایط

$$x > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m, \quad A_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, m.$$

و استفاده از تعریف مشتق کاپوتو، جواب های معادله (96.5) را در حالات خاص $m = 1$ و $m = 2$ بدست می آوریم.

• با در نظر گرفتن $m = 1$ و $A_m = 1$ ،

قضیه 46.1.5. فرض کنید $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$ و تابع $f(x)$ بر روی \mathbb{R}_+ تعریف شده باشد. در این صورت جواب های

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt + \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j E_{\alpha, j+1}[\lambda x^\alpha], \quad (97.5)$$

، که $c_j (j = 0, \dots, n-1)$ اعداد ثابت دلخواه هستند، دسته جواب هایی از معادله کسری

$$({}^c D_{0+}^\alpha y)(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad x > 0. \quad (98.5)$$

می باشند. اثبات در [43].

مثال 47.1.5. جواب های معادله دیفرانسیل ناهمگن (98.5)، با $0 < \alpha \leq 1$ و $1 < \alpha \leq 2$ به ترتیب عبارتند از:

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt + c_1 E_\alpha(\lambda x^\alpha),$$

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt + c_1 E_\alpha(\lambda x^\alpha) + c_2 x E_{\alpha, 2}(\lambda x^\alpha).$$

• با در نظر گرفتن $m = 2$ ، معادله (96.5) تبدیل به معادله دیفرانسیل ناهمگن با مشتقات کسری α و β به صورت

$$({}^c D_{0+}^\alpha y)(x) - \lambda ({}^c D_{0+}^\beta y)(x) - \mu y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad \alpha > \beta > 0. \quad (99.5)$$

می شود، که شرایط $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$ در آن برقرار می باشند. با استفاده از قضیه ای که در ادامه آورده شده است، جواب های معادله (99.5) را محاسبه می کنیم.

قضیه ۴۸.۱.۵. فرض کنید $\alpha > \beta > 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و تابع $f(x)$ بر روی \mathbb{R}_+ تعریف شده باشد، در این صورت تابع

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(x-t)f(t)dt + \sum_{j=0}^{n-1} c_j y_j(x), \quad (100.5)$$

که $G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(z)$ و $y_j(x)$ در (۷۴.۵) و (۸۵.۵) و (۸۶.۵) آمده است، جوابی از معادله دیفرانسیل کسری ناهمگن (۹۹.۵) می باشد.

مثال ۴۹.۱.۵. جواب معادله کسری

$$y'(x) - \lambda ({}^c D_{0+}^\beta y)(x) - \mu y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad 0 < \beta < 1,$$

عبارت است از:

$$y(x) = \int_0^x G_{1,\beta;\lambda,\mu}(x-t)f(t)dt + c \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^n {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (n+1, 1-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{1-\beta} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{n+1-\beta} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (n+2-\beta, 1-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{1-\beta} \right] \right). \quad (101.5)$$

مثال ۵۰.۱.۵. جواب های معادله کسری

$$y''(x) - \lambda (D_{0+}^\beta y)(x) - \mu y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad 0 < \beta < 2,$$

نیز توابعی به صورت

$$y(x) = \int_0^x (x-t) G_{2,\beta;\lambda,\mu}(x-t)f(t)dt + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

هستند که در آن

$$G_{2,\beta;\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n z^{2n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (2n+2, 2-\beta) \end{matrix} \middle| \lambda z^{2-\beta} \right].$$

و $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در روابط (۹۴.۵) و (۹۵.۵) قبلا محاسبه شده اند.

۲.۵ تحلیل تقارنی معادلات دیفرانسیل کسری

از آنجایی که روش تقارن لی یک روش مفید و کارآمد برای رسیدن به دسته وسیعی از جواب های دقیق معادلات دیفرانسیل می باشد، در دهه های اخیر سعی بر آن شده است با استفاده

از محاسبات کسری که تعمیمی از محاسبات با مشتق مرتبه صحیح و شامل مفاهیمی همچون مشتق گیری، انتگرال گیری، تبدیلات لاپلاس و دیگر تبدیلات مورد بحث در علم ریاضیات است راهی نو برای تحلیل هندسی معادلات دیفرانسیل با مشتق از مرتبه کسری انجام شود. تا جایی که کاربرد آن در تمامی شاخه های علوم از جمله مدل بندی ریاضی فیزیکی، فرآیندهای دینامیکی و مکانیکی، شارش سیالات و امواج الکترومغناطیسی برکسی پوشیده نیست [۷۳، ۱۱].

زمانی که ایده مشتق از مرتبه کسری توسط لایب نیتس و هوپیتال با بیان مشتق از مرتبه نیم آغاز شد کسی نمی دانست که سالها بعد در تحقیقات گسترده ای، مقالات کسری و کاربردی زیادی توسط نویسندگانی همچون ریمان، لیوویل، گراندوال، کاپوتو و دیگر محققان به دنیای علم معرفی خواهند شد [۴۳، ۶۹، ۶۴].

در این بخش به طور مفصل تحلیل تقارن لی را با مشتق کسری ریمان - لیوویل و مشتق کسری کاپوتو، نحوه رسیدن به تقارن ها و ساختار دستگاه بهینه را برای معادله انتشار کسری شرح می دهیم. در ادامه راههای رسیدن به جواب این دسته از معادلات و چگونگی کاهش مرتبه با استفاده از عملگر ایردیلی - کوبر^{۲۲} را بررسی خواهیم کرد.
معادله غیر خطی انتشار کسری

$$D_t^\alpha u = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z. \quad (102.5)$$

را با توابع مجهول f, g و h در نظر می گیریم که $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ مشتق کسری ریمان - لیوویل از مرتبه $0 < \alpha < 1$ می باشد. معادله (۱۰۲.۵) تحت یک گروه یک پارامتری از تبدیلات [۵۷]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u^*}{\partial t^*} &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \epsilon \zeta^{\alpha, t}(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \zeta_1^1(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \quad t^* = t + \xi^0(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \\ \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon \zeta_1^2(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \quad x^* = x + \xi^1(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \\ \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon \zeta_1^3(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \quad y^* = y + \xi^2(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \\ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon \zeta_2^1(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \quad z^* = z + \xi^3(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \\ \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \epsilon \zeta_2^2(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \quad u^* = u + \eta(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2), \\ \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \epsilon \zeta_2^3(t, x, y, z, u) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta_1^1 &= D_x \eta - u_t D_x \xi^0 - u_x D_x \xi^1 - u_y D_x \xi^2 - u_z D_x \xi^3, \\
 \zeta_2^1 &= D_x \zeta_1^1 - u_{xt} D_x \xi^0 - u_{xx} D_x \xi^1 - u_{xy} D_x \xi^2 - u_{xz} D_x \xi^3, \\
 \zeta_1^2 &= D_y \eta - u_t D_y \xi^0 - u_x D_y \xi^1 - u_y D_y \xi^2 - u_z D_y \xi^3, \\
 \zeta_2^2 &= D_y \zeta_1^2 - u_{yt} D_y \xi^0 - u_{yx} D_y \xi^1 - u_{yy} D_y \xi^2 - u_{yz} D_y \xi^3, \\
 \zeta_1^3 &= D_z \eta - u_t D_z \xi^0 - u_x D_z \xi^1 - u_y D_z \xi^2 - u_z D_z \xi^3, \\
 \zeta_2^3 &= D_z \zeta_1^3 - u_{zt} D_z \xi^0 - u_{zx} D_z \xi^1 - u_{zy} D_z \xi^2 - u_{zz} D_z \xi^3. \\
 \zeta^{\alpha,t} &= D_t^\alpha (\eta - \xi^0 u_t - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y - \xi^3 u_z) + \xi^0 D_t^\alpha (u_t) + \xi^1 D_t^\alpha (u_x) + \xi^2 D_t^\alpha (u_y) + \xi^3 D_t^\alpha (u_z).
 \end{aligned} \tag{103.5}$$

ناوردا خواهد بود. که D_x, D_y, D_z و معرف عملگر مشتق کامل با تعریف

$$\begin{aligned}
 D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{xz} \frac{\partial}{\partial u_z} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + \dots, \\
 D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + u_{yx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{yz} \frac{\partial}{\partial u_z} + u_{yt} \frac{\partial}{\partial u_t} + \dots, \\
 D_z &= \frac{\partial}{\partial z} + u_z \frac{\partial}{\partial u} + u_{zx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{zy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{zz} \frac{\partial}{\partial u_z} + u_{zt} \frac{\partial}{\partial u_t} + \dots \tag{104.5}
 \end{aligned}$$

می باشند.

عملگر

$$X = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial u}, \tag{105.5}$$

که به مواد بی نهایت کوچک و یا مولد گروه G شناخته می شود، از روابط مشتق گیری

$$\xi^0 = \frac{dt^*}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \quad \xi^1 = \frac{dx^*}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \quad \xi^2 = \frac{dy^*}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \quad \xi^3 = \frac{dz^*}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \quad \eta = \frac{du^*}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}.$$

با شرایط اولیه $\{t^*|_{\epsilon=0} = t, \quad x^*|_{\epsilon=0} = x, \quad y^*|_{\epsilon=0} = y, \quad z^*|_{\epsilon=0} = z, \quad u^*|_{\epsilon=0} = u\}$ و شرط ناوردابی $\xi^0(t, x, y, z, u)|_{t=0} = 0$ بدست می آید.

بر طبق تعریف ناوردابی بی نهایت کوچک، هر معادله کسری یا غیر کسری، عملگر X گروه G را به عنوان یک گروه تبدیلات می پذیرد اگر و فقط اگر اثر امتداد میدان برداری X (مرتبه امتداد برابر با مرتبه معادله دیفرانسیل می باشد.) بر روی معادله دیفرانسیل صفر شود، یعنی:

$$\text{Pr}^{(\alpha,2)} X(\Delta)|_{\Delta=0} = 0, \quad \Delta = D_t^\alpha u - (f(u)u_x)_x - (g(u)u_y)_y - (h(u)u_z)_z.$$

عملگر $\text{Pr}^{(\alpha,2)} X$ به فرم

$$\text{Pr}^{(\alpha,2)} X = X + \zeta^{\alpha,t} \partial_{\partial_t^\alpha u} + \zeta_1^1 \partial_{u_x} + \zeta_2^1 \partial_{u_{xx}} + \zeta_1^2 \partial_{u_y} + \zeta_2^2 \partial_{u_{yy}} + \zeta_1^3 \partial_{u_z} + \zeta_2^3 \partial_{u_{zz}}.$$

تعریف می شود که $\zeta_1^1, \zeta_1^2, \zeta_1^3, \zeta_2^1, \zeta_2^2, \zeta_2^3$ و ζ_3^1 از روابط (۱۰۳.۵) بدست می آیند.
در ادامه برای مشخص شدن مجهولات (۱۰۳.۵)، خاصیت نوردایی $\text{Pr}^{(\alpha, \gamma)} X(\Delta)|_{\Delta=0} = 0$ برای معادله انتشار کسری (۱۰۲.۵) عبارتست از:

$$-\zeta^{\alpha, t} + \eta \left(f''(u)u_x^{\gamma} + f'(u)u_{xx} + g''(u)u_y^{\gamma} + g'(u)u_{yy} + h''(u)u_z^{\gamma} + h'(u)u_{zz} \right) + \zeta_1^1 (\gamma u_x f'(u)) + \zeta_2^1 f(u) + \zeta_1^2 (\gamma u_y g'(u)) + \zeta_2^2 g(u) + \zeta_1^3 (\gamma u_z h'(u)) + \zeta_2^3 h(u) = 0.$$

to

$$(107.5)$$

با کمک تعاریف (۱۰۳.۵) و شرط نوردایی (۱۰۶.۵)، دستگاه معادلات مشخصه

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \xi_t^{\gamma} = \xi_t^{\gamma} = \xi_u^{\gamma} = \xi_u^{\gamma} = \xi_u^{\gamma} = \xi_t^{\circ} = \xi_x^{\circ} = \xi_y^{\circ} = \xi_z^1 = 0, \\ \gamma f \xi_{xu}^{\gamma} + \gamma f' \xi_x^{\gamma} + \gamma h \xi_{zu}^1 + \gamma h' \xi_z^1 &= 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t^{\alpha} \eta_u - D_t^{n+1} \xi^{\circ} = 0, \\ \gamma f \xi_{xu}^{\gamma} + \gamma f' \xi_x^{\gamma} + \gamma g \xi_{yu}^1 + \gamma g' \xi_y^1 &= 0, \quad u \partial_t^{\alpha} \eta_u - \partial_t^{\alpha} \eta + f \eta_{xx} + g \eta_{yy} + h \eta_{zz} = 0, \\ \gamma g \xi_{yu}^{\gamma} + \gamma g' \xi_y^{\gamma} + \gamma h \xi_{zu}^{\gamma} + \gamma h' \xi_z^{\gamma} &= 0, \quad f \xi_{xx}^{\circ} + g \xi_{yy}^{\circ} + h \xi_{zz}^{\circ} = 0, \\ \gamma h \eta_{zu} + \gamma h' \eta_z - f \xi_{xx}^{\gamma} - g \xi_{yy}^{\gamma} - h \xi_{zz}^{\gamma} &= 0, \quad f' \eta - \gamma f \xi_x^1 + \alpha f \xi_t^{\circ} = 0, \quad (108.5) \\ \gamma g \eta_{yu} + \gamma g' \eta_y - f \xi_{xx}^{\gamma} - g \xi_{yy}^{\gamma} - h \xi_{zz}^{\gamma} &= 0, \quad g' \eta - \gamma g \xi_y^1 + \alpha g \xi_t^{\circ} = 0, \\ \gamma f \eta_{xu} + \gamma f' \eta_x - f \xi_{xx}^1 - g \xi_{yy}^1 - h \xi_{zz}^1 &= 0, \quad h' \eta - \gamma h \xi_z^{\gamma} + \alpha h \xi_t^{\circ} = 0, \\ f'' \eta + f' \eta_u - \gamma f' \xi_x^1 - \gamma f \xi_{xu}^1 + f \eta_{uu} + \alpha f' \xi_t^{\circ} &= 0, \quad f \xi_x^{\gamma} + g \xi_y^1 = 0, \\ g'' \eta + g' \eta_u - \gamma g' \xi_y^1 - \gamma g \xi_{yu}^{\gamma} + g \eta_{uu} + \alpha g' \xi_t^{\circ} &= 0, \quad f \xi_x^{\gamma} + h \xi_z^1 = 0, \\ h'' \eta + h' \eta_u - \gamma h' \xi_z^{\gamma} - \gamma h \xi_{zu}^{\gamma} + h \eta_{uu} + \alpha h' \xi_t^{\circ} &= 0, \quad g \xi_y^{\gamma} + h \xi_z^{\gamma} = 0. \end{aligned}$$

را خواهیم داشت، که با دسته بندی جواب های دستگاه فوق در حالت های یک، دو و سه، مجهولات برای ما مشخص می شوند.

حالت ۱) فرض کنیم توابع $f(u), g(u), h(u)$ دلخواه و $\alpha \in (0, 1)$ باشد، در این صورت

$$\xi^{\circ} = c_1 t, \quad \xi^1 = \frac{c_1 \alpha}{\gamma} x + c_2, \quad \xi^2 = \frac{c_1 \alpha}{\gamma} y + c_3, \quad \xi^3 = \frac{c_1 \alpha}{\gamma} z + c_4, \quad \eta = 0. \quad (109.5)$$

که c_1, c_2, c_3, c_4 و اعداد ثابت و دلخواه هستند. بنابراین یک جبر لی ۴-بعدی از مولدهای بی نهایت کوچک

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = \frac{\gamma}{\alpha} t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \quad (110.5)$$

برای معادله انتشار کسری یافته خواهد شد.

حالت ۲) اگر $f(u) = g(u) = h(u) = e^u$ در نظر بگیریم، یک جبر لی ۸- بعدی از مولدهای بی نهایت کوچک به شکل

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & X_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, & X_6 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_7 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, & X_8 &= t \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (111.5)$$

برای معادله (۱۰۲.۵) بدست می آید.

حالت ۳) و در نهایت با فرض $f(u) = g(u) = h(u) = u^\alpha$ ، جبر لی هفت بعدی

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & X_4 &= \frac{2t}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_5 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, & X_6 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, & X_7 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (112.5)$$

را برای معادله انتشار کسری با $\alpha \in (0, 1)$ خواهیم داشت.

دستگاه بهینه

قبل از اینکه بحث مفصل یافتن جواب های دقیق و کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل کسری را شروع کنیم ابتدا در مورد ساختار دستگاه بهینه توضیحاتی می آوریم. به کمک دستگاه بهینه می توان تقارن ها را در حد عمل الحاقی رده بندی کرد. از آنجایی که با استفاده از این ساختار می توان به یک دسته از تقارن ها با خاصیت استقلال خطی رسید، لذا جواب های گروه-ناوردای گسترده تری نیز می توان با استفاده از ساختار دستگاه بهینه برای معادلات کسری پیدا کرد [۴، ۶۱، ۷۰]. توضیحات بیشتر در رابطه با دستگاه بهینه معادله کسری انتشار در مقاله [۵۷] آمده است.

عمل عملگر الحاقی به صورت یک سری به فرم

$$\text{Ad}(\exp(\epsilon X_i)) X_j = X_j - \epsilon [X_i, X_j] + \frac{\epsilon^2}{2} [X_i, [X_i, X_j]] - \dots \quad (113.5)$$

می باشد که $[X_i, X_j]$ معرف عملگر جابجاگر و ϵ یک پارامتر دلخواه است. همچنین سری فوق به سری لی معروف است.

اگر مولد بی نهایت کوچک را در حالت های ۱ تا ۳ در نظر بگیریم، نمایش الحاقی جبر های لی (۱۱۱.۵)، (۱۱۰.۵) و (۱۱۲.۵) در جداول (۱.۵) تا (۳.۵) نشان داده شده است.

همچنین اگر $V = \sum_{i=1}^4 X_i$ عضوی از دستگاه بهینه در حالت کلی در نظر بگیریم، می توان را با جایگذاری ها و نگاشت های الحاقی مناسب به فرم ساده تری تبدیل کرد که ما این کار را برای جبر های بدست آمده (۱۱۱.۵)، (۱۱۰.۵) و (۱۱۲.۵) در حالت یک تا سه انجام داده ایم.

جدول ۱.۵: نمایش الحاقی مولدهای معادله انتشار کسری برای $f(u), g(u), h(u)$ دلخواه

$Ad[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	X_1	X_2	X_3	$X_4 - \epsilon X_1$
X_2	X_1	X_2	X_3	$X_4 - \epsilon X_2$
X_3	X_1	X_2	X_3	$X_4 - \epsilon X_3$
X_4	$e^\epsilon X_1$	$e^\epsilon X_2$	$e^\epsilon X_3$	X_4

جدول ۲.۵: نمایش الحاقی مولدهای معادله انتشار کسری برای $f(u) = g(u) = h(u) = e^u$

$Ad[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	X_1	X_2	X_3	$X_4 - \epsilon X_1$	$X_5 - \epsilon X_2$	$X_6 - \epsilon X_3$	X_7	X_8
X_2	X_1	X_2	X_3	$X_4 - \epsilon X_2$	$X_5 - \epsilon X_1$	X_6	$X_7 - \epsilon X_2$	X_8
X_3	X_1	X_2	X_3	$X_4 - \epsilon X_3$	X_5	$X_6 - \epsilon X_1$	$X_7 - \epsilon X_3$	X_8
X_4	$e^\epsilon X_1$	$e^\epsilon X_2$	$e^\epsilon X_3$	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_5	$X_1 \cos(\epsilon) - X_2 \sin(\epsilon)$	$X_1 \sin(\epsilon) + X_2 \cos(\epsilon)$	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_6	$X_1 \cos(\epsilon) - X_3 \sin(\epsilon)$	X_2	$X_1 \sin(\epsilon) + X_3 \cos(\epsilon)$	X_4	$X_5 \cos(\epsilon) - X_7 \sin(\epsilon)$	X_6	$X_7 \cos(\epsilon) - X_8 \sin(\epsilon)$	X_8
X_7	X_1	$X_2 \cos(\epsilon) - X_3 \sin(\epsilon)$	$X_2 \sin(\epsilon) + X_3 \cos(\epsilon)$	X_4	$X_5 \cos(\epsilon) - X_6 \sin(\epsilon)$	$X_6 \cos(\epsilon) + X_8 \sin(\epsilon)$	X_7	X_8
X_8	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8

برای حالت (۱)

$$V_1 = X_1, \quad V_2 = X_2, \quad V_3 = X_3, \quad V_4 = X_4,$$

$$V_5 = X_1 + X_2, \quad V_6 = X_1 + X_3, \quad V_7 = X_1 + X_2 + X_3.$$

برای حالت (۲)

$$V_1 = X_2, \quad V_2 = X_8, \quad V_3 = X_1 + X_2, \quad V_4 = X_1 + X_3,$$

$$V_5 = X_1 + X_8, \quad V_6 = X_3 + X_4, \quad V_7 = X_3 + X_8,$$

$$V_8 = X_1 + X_2 + X_3, \quad V_9 = X_1 + X_2 + X_8, \quad V_{10} = X_1 + X_3 + X_8,$$

$$V_{11} = X_3 + X_4 + X_8, \quad V_{12} = X_2 + X_3 + bX_4,$$

$$V_{13} = X_1 + X_2 + X_3 + X_8, \quad V_{14} = X_2 + X_3 + bX_4 + X_8.$$

برای حالت (۳)

$$V_1 = X_1, \quad V_2 = X_2, \quad V_3 = X_3, \quad V_4 = X_1 + X_2,$$

$$V_5 = X_2 + X_3, \quad V_6 = X_3 + X_4, \quad V_7 = X_1 + X_2 + X_3.$$

جدول ۳.۵: نمایش الحاقی مولدهای معادله انتشار کسری برای

$$f(u) = g(u) = h(u) = u^a$$

$Ad[X_i, X_j]$	X_1	X_r	X_τ	X_φ	X_Δ	X_φ	X_Y
X_1	X_1	X_r	X_τ	$X_\varphi - \epsilon X_1$	$X_\Delta - \epsilon X_r$	$X_\varphi - \epsilon X_\tau$	X_Y
X_r	X_1	X_r	X_τ	$X_\varphi - \epsilon X_r$	$X_\Delta - \epsilon X_1$	X_φ	$X_Y - \epsilon X_\tau$
X_τ	X_1	X_r	X_τ	$X_\varphi - \epsilon X_\tau$	X_Δ	$X_\varphi - \epsilon X_1$	$X_Y - \epsilon X_\tau$
X_φ	$e^\epsilon X_1$	$e^\epsilon X_r$	$e^\epsilon X_\tau$	X_φ	X_Δ	X_φ	X_Y
X_Δ	$X_1 \cos(\epsilon) - X_r \sin(\epsilon)$	$X_1 \sin(\epsilon) + X_r \cos(\epsilon)$	X_τ	X_φ	X_Δ	X_φ	X_Y
X_φ	$X_1 \cos(\epsilon) - X_r \sin(\epsilon)$	X_r	$X_1 \sin(\epsilon) + X_\tau \cos(\epsilon)$	X_φ	$X_\Delta \cos(\epsilon) + X_Y \sin(\epsilon)$	X_φ	$X_Y \cos(\epsilon) - X_\tau \sin(\epsilon)$
X_Y	X_1	$X_r \cos(\epsilon) - X_\tau \sin(\epsilon)$	$X_r \sin(\epsilon) + X_\tau \cos(\epsilon)$	X_φ	$X_\Delta \cos(\epsilon) - X_\varphi \sin(\epsilon)$	$X_\varphi \cos(\epsilon) + X_\Delta \sin(\epsilon)$	X_Y

۱.۲.۵ کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از عملگر کوبر

در برخی موارد به جای رسیدن به جواب دقیقی از یک معادله دیفرانسیل کسری، قادر به کاهش مرتبه آن معادله دیفرانسیل خواهیم بود. در ادامه با تعریف عملگر ایردیلی- کوبر و آشنایی با خواص آن، نحوه ی کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل کسری را با ارائه مثال بررسی خواهیم کرد.

تذکر ۱.۲.۵. عملگر دیفرانسیل کسری ایردیلی- کوبر $P_\beta^{\tau, \alpha}$ از مرتبه α [۴۴]، با تعریف

$$(P_\beta^{\tau, \alpha} g) := \prod_{j=0}^{n-1} \left(\tau + j - \frac{1}{\beta} \theta \frac{d}{d\theta} \right) (K_\beta^{\tau+\alpha, n-\alpha} g)(\theta),$$

$$n = \begin{cases} [\alpha] + 1 & \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha & \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

می باشد که

$$(K_\beta^{\tau, \alpha} g) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (u-1)^{\alpha-1} u^{-(\tau+\alpha)} g(\theta u^{\frac{1}{\beta}}) du & \alpha > 0, \\ g(\theta) & \alpha = 0. \end{cases} \quad (114.5)$$

عملگر انتگرال کسری ایردیلی- کوبر با خاصیت

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} [t^\chi (K_\beta^{\tau, n-\alpha} g)](\theta) =$$

$$t^{\chi-n} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\chi - n + 1 + j + a\theta \frac{d}{d\theta} \right) (K_\beta^{\chi-n+\alpha+1, n-\alpha} g)(\theta)$$

$$= t^{\chi-n} (P_\beta^{\chi-n+1, \alpha} g)(\theta). \quad (115.5)$$

$$t \frac{\partial}{\partial t} g(\theta) = a\theta \frac{d}{d\theta} g(\theta), \quad \theta = xt^a.$$

خواهد بود.

مثال ۲.۲.۵. با در نظر گرفتن تقارن $V_\delta = X_1 + X_\lambda$ در حالت دوم از معادله انتشار کسری (۱۰۲.۵)، و انتگرال گیری از معادلات مشخصه

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{-\alpha},$$

به جواب

$$u = \ln t^{-\alpha} + k(\xi), \quad \xi = te^{-x}. \quad (116.5)$$

برای معادله (۱۰۲.۵) خواهیم رسید. با استفاده از تعریف عملگر ایردیلی-کوبر، طی قضیه ای معادله انتشار کسری (۱۰۲.۵) را به مرتبه پایین تر کاهش خواهیم داد [۵۷].

قضیه ۳.۲.۵. تبدیل (۱۱۶.۵) معادله کسری (۱۰۲.۵) را به معادله

$$\frac{-\alpha}{\Gamma(n-\alpha)} (\ln t + \psi(1) - \psi(1-\alpha)) + (P_{-1}^{1-\alpha, \alpha} g)(\xi) = \xi e^k (\xi k'^2 + k' + \xi k''). \quad (117.5)$$

کاهش می دهد.

اثبات: فرض کنیم $n - \alpha < \alpha < n$ ، که $n = 1, 2, 3, \dots$ ، بر طبق تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} (\ln s^{-\alpha} + k(se^{-x})) ds \\ &= \frac{\partial}{\partial t^n} \frac{-\alpha}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \ln s ds + \frac{\partial}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} k(se^{-x}) ds \\ &= -\alpha \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \ln t \right] + A \\ &= -\alpha \left[\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\ln t + \psi(1) - \psi(1-\alpha)) \right] + A, \end{aligned} \quad (118.5)$$

با تغییر متغیرهای $\nu = \frac{t}{s}$ و $ds = -\frac{t}{\nu^2} d\nu$ نیز مقدار A به صورت

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^\infty t^{n-\alpha} \nu^{-(n-\alpha+1)} (\nu-1)^{n-\alpha-1} k(\xi \nu^{-1}) d\nu \\ &= \frac{\partial}{\partial t^n} \left[t^{n-\alpha} (K_{-1}^{1, n-\alpha})(\xi) \right] = t^{-\alpha} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \alpha + j + \xi \frac{d}{d\xi} \right) (K_{-1}^{1, n-\alpha} g)(\xi) \\ &= t^{-\alpha} (P_{-1}^{1-\alpha, \alpha} g)(\xi), \end{aligned} \quad (119.5)$$

بدست می آید. بنابراین

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = t^{-\alpha} \left[\frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} (\ln t + \psi(1) - \psi(1-\alpha)) + (P_{-1}^{1-\alpha, \alpha} g)(\xi) \right]. \quad (120.5)$$

از طرفی با جایگذاری جواب $u = \ln t^{-\alpha} + k(te^{-x})$ در معادله (۱۰۲.۵) داریم:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = e^u u_x^2 + e^u u_{xx} = t^{1-\alpha} e^{-x} e^k [te^{-x} k'^2 + k' + te^{-x} k'']$$

$$= \xi t^{-\alpha} e^k (\xi k'^2 + k' + \xi k''). \quad (121.5)$$

بنابراین معادله انتشار کسری (۱۰۲.۵) به معادله دیفرانسیل معمولی کسری (۱۱۷.۵) کاهش می یابد.

لازم به ذکر است که در اینجا $\psi(x)$ تابع دیگاما^{۲۳} یا همان مشتق لگاریتمی تابع گاما می باشد.

• برای تقارن های $V_4 = X_1 + X_3$ و $V_3 = X_1 + X_2$ با توابع دلخواه $k(t) = t^b, e^{bt}, \ln t, t^{\beta-1} \ln t$ معادله انتشار کسری (۱۰۲.۵) را به معادلات مرتبه پایین تر کاهش داده و نتایج را در جدولهای (۴.۵) و (۵.۵) آورده ایم. بدیهی است با حل معادلات کاهش یافته در جدول (۵.۵) که معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم می باشند تابع مجهول $p = p(y), p = p(z)$ قابل محاسبه است. بنابراین با مشخص شدن تابع p جواب عمومی $(u = G(t, z)), u = G(t, y)$ در جدول (۴.۵) بدست می آید.

جدول ۴.۵: جواب عمومی و معادلات مشخصه تقارن های V_4 و V_3

V_i	معادلات مشخصه	جواب عمومی
$X_1 + X_2$	$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{y}$	$u = G(t, z) = k(t)p(z)$
$X_1 + X_3$	$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{y}$	$u = G(t, y) = k(t)p(y)$

جدول ۵.۵: معادلات کاهش یافته تحت تقارن های V_4 و V_3

$k(t)$	معادله کاهش یافته
t^b	$\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+1-\alpha)} t^\alpha p = e^{t^b p} (t^b p'^2 + p'')$
$\ln t$	$\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (\ln t + \psi(1) - \psi(1-\alpha)) = t^p \ln t (\ln t p'^2 + p'')$
e^{bt}	o
$t^{\beta-1} \ln t$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^\beta (\ln t - \psi(\beta) - \psi(\beta-\alpha)) = t^{t^{\beta-1} p} \ln t (\ln t^{\beta-1} p'^2 + p'')$

digamma^{۲۳}

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x)) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

$$\psi(n, x) = \frac{d^n \psi(x)}{dx^n}, \quad \psi(1) = \psi(0, 1) = -\gamma.$$

که γ ثابت اویلر بوده و این نماد از حرف کوچک یونانی گاما گرفته شده است و اختلاف محدود بین سری هارمونیک و لگاریتم طبیعی را نشان می دهد

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \int_1^\infty \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{[x]} \right) dx$$

- معادله (۱۰۲.۵) توسط تقارن های $V_{10} = X_1 + X_3 + X_8$ و $V_{13} = X_1 + X_2 + X_3 + X_8$ و تعریف عملگر ایردیلی-کوبر به معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} (\ln t + \psi(1) - \psi(1-\alpha)) + P_{-1}^{1-\alpha, \alpha}(\xi_1, \xi_2) = e^k \sum_{i=1}^2 [\xi_i^2 (k_{\xi_i}^2 + k_{\xi_i \xi_i}) + \xi_i k_{\xi_i}]$$

و

$$\frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} (\ln t + \psi(1) - \psi(1-\alpha)) + P_{-1}^{1-\alpha, \alpha}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^k \sum_{i=1}^3 [\xi_i^2 (k_{\xi_i}^2 + k_{\xi_i \xi_i}) + \xi_i k_{\xi_i}]$$

تبدیل می شود. معادلات مشخصه و جواب های عمومی از این تقارن ها در جدول (۶.۵) محاسبه شده اند.

جدول ۶.۵: جواب عمومی و معادلات مشخصه تقارن های V_{10} و V_{13}

V_i	معادلات مشخصه	جواب عمومی
V_{10}	$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{-\alpha}$	$u = -\alpha \ln t + k(\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = te^{-x}, \quad \xi_2 = te^{-z}$
V_{13}	$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{-\alpha}$	$u = -\alpha \ln t + k(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \xi_1 = te^{-x}, \quad \xi_2 = te^{-y}, \quad \xi_3 = te^{-z}$

- تقارن های $V_6 = X_3 + X_4, V_7 = X_2, V_8 = X_2 + X_3$ و $V_5 = X_2 + X_3$ در حالت سوم، تحت توابع دلخواه $p(t) = t^b, \ln t, e^{bt}, t^{\beta-1} \ln t$ به معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری متفاوتی کاهش می یابند که نتایج در جداول (۷.۵)، (۸.۵)، (۹.۵) و (۱۰.۵) به طور خلاصه آورده شده است.

جدول ۷.۵: جواب عمومی و معادلات مشخصه تقارن های V_6 و V_8 و V_7

V_i	معادلات مشخصه	جواب عمومی
V_7	$\frac{dy}{y} = d\epsilon$	$u = G(t, x, z) = p(t)k(x, z)$
V_8	$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$	$u = G(t, x) = p(t)k(x)$
V_6	$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{1+z} = \frac{du}{\alpha}$	$u = p(t) + \alpha \ln(1+z)xy$

مثال ۴.۲.۵. در این مثال قصد داریم معادله دیفرانسیل کسری برگر-استوانه ای [۴۵] ^{۲۴}

$$F = D_t^\alpha w + bw w_x - a \left(\frac{1}{x} w_x + w_{xx} - \frac{w}{x^2} \right) = 0. \quad (122.5)$$

را به یک معادله دیفرانسیل کسری با مرتبه پایین تر کاهش مرتبه دهیم.

جدول ۸.۵: معادلات کاهش یافته تحت تقارن $V_7 = X_7$

$p(t)$	معادلات کاهش یافته
t^b	$\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+1-\alpha)}k(x, z) = t^{b\alpha-\alpha} \left[ak^{a-1}(k_x^\vee + k_z^\vee) + k^a(k_{xx} + k_{zz}) \right]$
$\ln t$	$\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}(\ln t - \psi(1) - \psi(1 - \alpha))k(x, z) = (\ln t)^{\alpha+1} \left[ak^{a-1}(k_x^\vee + k_z^\vee) + k^a(k_{xx} + k_{zz}) \right]$
e^{bt}	$kt^{-\alpha}E_{\gamma, 1-\alpha}(bt^\vee) = (e^{bt})^{\alpha+1} \left[ak^{a-1}(k_x^\vee + k_z^\vee) + k^a(k_{xx} + k_{zz}) \right]$
$t^{\beta-1} \ln t$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\ln t - \psi(\beta) - \psi(\beta - \alpha))k(x, z) = t^{\alpha(\beta-1)+\alpha}(\ln t)^{\alpha+1} \left[ak^{a-1}(k_x^\vee + k_z^\vee) + k^a(k_{xx} + k_{zz}) \right]$

جدول ۹.۵: معادلات کاهش یافته تحت تقارن $V_8 = X_7 + X_8$

$p(t)$	معادلات کاهش یافته
t^b	$\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+1-\alpha)}t^\alpha k(x) = (t^b)^\alpha k^{a-1}(ak_x^\vee + kk_{xx})$
$\ln t$	$\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}(\ln t - \psi(1) - \psi(1 - \alpha))k(x) = (\ln t)^{\alpha+1}k^{a-1} \left[ak_x^\vee + kk_{xx} \right]$
e^{bt}	$kt^{-\alpha}E_{\gamma, 1-\alpha}(bt^\vee) = (e^{bt})^{\alpha+1}k^{a-1} \left[ak_x^\vee + kk_{xx} \right]$
$t^{\beta-1} \ln t$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\ln t - \psi(\beta) - \psi(\beta - \alpha))k(x) = (\ln t)^{\alpha+1}k^{a-1}t^{\alpha(\beta-1)+\alpha} \left[ak_x^\vee + kk_{xx} \right]$

جدول ۱۰.۵: معادله کاهش یافته تحت تقارن $V_6 = X_8 + X_9$

$p(t)$	معادلات کاهش یافته
$k(t)$	$t^{-\alpha} \left(P_{-1}^{1-\alpha, \alpha} k \right) (t) = -\left(\frac{\vee}{x^\vee} + \frac{\vee}{y^\vee} + \frac{\vee}{z^\vee} \right) + \vee a(\vee \ln((1+z)xy) + k(t)^{a-1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right))$

ابتدا لازم است با استفاده از روش تقارن لی، جبر لی متناظر با معادله (۱۲۲.۵) را بدست آوریم [۱۸، ۱۹].

معادله کسری (۱۲۲.۵) تحت گروه یک پارامتری از تبدیلات

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha w^*}{\partial t^*} &= \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} + \epsilon \eta^{\alpha, t}(t, x, w) + O(\epsilon^\vee), & w^* &= w + \eta(t, x, w) + O(\epsilon^\vee), \\ \frac{\partial w^*}{\partial x^*} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \epsilon \zeta_1(t, x, w) + O(\epsilon^\vee), & t^* &= t + \xi^\circ(t, x, w) + O(\epsilon^\vee), \\ \frac{\partial^\vee w^*}{\partial x^{*\vee}} &= \frac{\partial^\vee w}{\partial x^\vee} + \epsilon \zeta_2(t, x, w) + O(\epsilon^\vee), & x^* &= x + \xi^1(t, x, w) + O(\epsilon^\vee). \end{aligned} \tag{123.5}$$

با ضرایب امتداد

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= D_x \eta - w_t D_x \xi^\circ - w_x D_x \xi^1, \\ \zeta_2 &= D_x \zeta_1 - w_{xt} D_x \xi^\circ - w_{xx} D_x \xi^1, \\ \eta^{\alpha, t} &= D_t^\alpha (\eta - \xi^1 w_x - \xi^\circ w_t) + \xi^1 D_t^\alpha (w_x) + \xi^\circ D_t^\alpha (w_t). \end{aligned} \tag{124.5}$$

ناوردا می باشد. اگر

$$X = \xi^{\circ} \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial w}. \quad (125.5)$$

یک مولد تقارنی برای معادله (۱۲۲.۵) در نظر بگیریم، طبق شرط ناوردایی بی نهایت کوچک داریم:

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{(\alpha, \gamma)} X(F)|_{F=0} &= (X + \eta^{\alpha, t} \partial_{\partial_t^{\alpha} w} + \zeta_1 \partial_{w_x} + \zeta_2 \partial_{w_{xx}})(F)|_{F=0} \\ &= \eta^{\alpha, t} + \left(\frac{a}{x^{\gamma}} w_x - \frac{\gamma a}{x^{\gamma}} w \right) \xi^1 + \left(bw_x + \frac{a}{x^{\gamma}} \right) \eta \\ &+ \left(bw - \frac{a}{x} \right) \zeta_1 - a \zeta_2 = 0. \end{aligned} \quad (126.5)$$

با حل (۱۲۶.۵) جبر لی دوبعدی

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma t \frac{\partial}{\partial t} - \alpha w \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_2 &= b \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{x^{\gamma}} \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

برای معادله دیفرانسیل کسری (۱۲۲.۵) بدست می آید.

با در نظر گرفتن تقارن $X_1 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma t \frac{\partial}{\partial t} - \alpha w \frac{\partial}{\partial w}$ و معادله مشخصه نظیر آن به فرم

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dt}{\gamma t} = \frac{dw}{-\alpha w}, \quad (127.5)$$

جواب عمومی معادله کسری برگر (۱۲۲.۵) را به صورت

$$w = t^{-\frac{\alpha}{\gamma}} g(\mu), \quad \mu = xt^{-\frac{\alpha}{\gamma}}. \quad (128.5)$$

خواهیم داشت.

با فرض $n = 1, 2, 3, \dots, n - \alpha < \alpha < n$ و $\nu = \frac{t}{s}$ ، همچنین با استفاده از

تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\alpha} w}{\partial t^{\alpha}} &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{n - \alpha - 1} s^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \left(g(x s^{-\frac{\alpha}{\gamma}}) ds \right) \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_1^{\infty} t^{n - \frac{\gamma \alpha}{\gamma}} \nu^{-(n - \alpha + 1 - \frac{\alpha}{\gamma})} (\nu - 1)^{n - \alpha - 1} g(\mu \nu^{\frac{\alpha}{\gamma}}) d\nu \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[t^{n - \frac{\gamma \alpha}{\gamma}} \left(K_{\frac{\gamma}{\alpha}}^{1 - \frac{\alpha}{\gamma}, n - \alpha} g \right) (\mu) \right] = t^{-\frac{\gamma \alpha}{\gamma}} \left(P_{\frac{\gamma}{\alpha}}^{1 - \frac{\gamma \alpha}{\gamma}, \alpha} g \right) (\mu). \end{aligned} \quad (129.5)$$

از طرفی با جایگذاری $w = g(x t^{-\frac{\alpha}{\gamma}})$ در سمت راست تساوی معادله (۱۲۲.۵) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^{\alpha} w}{\partial t^{\alpha}} = t^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \left[t^{-\alpha} b g g' + a \left(\frac{1}{x} t^{-\frac{\alpha}{\gamma}} g' + t^{-\alpha} g'' - \frac{1}{x^{\gamma}} g \right) \right], \quad (130.5)$$

با مقایسه روابط (۱۲۹.۵) و (۱۳۰.۵) معادله کسری برگر (۱۲۲.۵) به معادله دیفرانسیل کسری

$$\left(P_{\frac{\gamma}{\alpha}}^{1 - \frac{\gamma \alpha}{\gamma}, \alpha} g \right) (\mu) = b g g' + \frac{a}{\mu^{\gamma}} \left(\mu g' + \mu^{\gamma} g'' - g \right). \quad (131.5)$$

کاهش می یابد.

مثال ۵.۲.۵. معادله کسری فوکر-پلانک [۲۴] ۲۵

$$D_t^\alpha u - \frac{1}{\Gamma} a^2 u_{xx} - bu - bxu_x = 0. \quad (132.5)$$

با ضرایب ثابت و دلخواه a, b ، دارای یک گروه یک پارامتری از تبدیلات بی نهایت کوچک به فرم

$$\tilde{t} \rightarrow t + \varepsilon \xi^0(t, x, u) + o(\varepsilon), \quad \tilde{x} \rightarrow x + \varepsilon \xi^1(t, x, u) + o(\varepsilon), \quad \tilde{u} \rightarrow u + \varepsilon \eta(t, x, u) + o(\varepsilon).$$

که ε پارامتر گروه است، را در نظر می گیریم.

این معادله تکامل زمانی تابع چگالی احتمال سرعت را برای ذره‌ای توصیف می کند که تحت تأثیر نیروی پसार و نیروهای کاتوره‌ای قرار دارد. این معادله برای توصیف حرکت براونی به کار می رود و جواب معادله فوکر-پلانک در یک بعد، با در نظر گرفتن جمله‌های پیش ران و واپخش شرایط اولیه برای توزیع سرعت ذره یک تابع دلتای دیراک است که روی سرعت غیرصفر قرار گرفته است. در طول زمان توزیع سرعت ذره پهن می شود و به سمت سرعت صفر حرکت می کند. برای رسیدن به جواب های دقیقی از این معادله ابتدا با کمک تحلیل تقارنی جبر لی حاصل از گروه لی یک پارامتری از تبدیلات کسری را بدست می آوریم.

مولد بی نهایت کوچک

$$X = \xi^0(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (133.5)$$

با خواص

$$\xi^0 = \left. \frac{d\tilde{t}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \xi^1 = \left. \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \eta = \left. \frac{d\tilde{u}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

و اعمال شرط ناوردابی بی نهایت کوچک برای معادله کسری (۱۳۲.۵) به راحتی به صورت

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\Gamma} a^2 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha x a^2 \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha u a^2 - u a^2 - \alpha b u x^2) \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_2 &= a^2 \frac{\partial}{\partial x} - b x u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = F_\Delta(x, t) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (134.5)$$

قابل محاسبه خواهند بود.

با در نظر گرفتن تقارن $X_2 = a^2 \frac{\partial}{\partial x} - b x u \frac{\partial}{\partial u}$ و معادله مشخصه

$$\frac{dx}{a^2} = \frac{du}{-bxu},$$

جواب عمومی $u = \exp\left(\frac{-b}{\Gamma a^2} x^2\right) g(t)$ برای معادله کسری فوکر-پلانک بدست می آید. که با جایگذاری توابع

$$u_x = \frac{-b}{a^2} x \exp\left(\frac{-b}{\Gamma a^2} x^2\right) g(t), \quad u_{xx} = \left(\frac{-b}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^4}\right) \exp\left(\frac{-b}{\Gamma a^2} x^2\right) g(t).$$

در معادله (۱۳۲.۵)، معادله کسری فوکر-پلانک به معادله دیفرانسیل معمولی با مشتق کسری α به فرم

$$\frac{\partial^\alpha g(t)}{dt^\alpha} = \left(\frac{b}{\gamma} - \frac{b^2 x^2}{\gamma a^2} \right) g(t) \quad (135.5)$$

کاهش می یابد [۲۴].

۲.۲.۵ جواب های معادلات دیفرانسیل کسری

در مواجهه با معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری، یافتن یک جواب تحلیلی و دقیق دغدغه بسیاری از نویسندگان و محققان بوده است. تا جایی که اگر این دسته از معادلات شامل جملات غیرخطی باشند رسیدن به جوابی دقیق کار ساده ای نبوده و روشهای عددی زیادی همچون روش ماتریس عملیاتی از مرتبه کسری با استفاده از مبحث حساب کسری موجک ها، روش ماتریس های عملگر انتگرالی موجک، روش کنترل بهینه با استفاده از توابع بی اسپلاین و چبیشف، روش طیفی تاو، روش تجزیه لاپلاس و دیگر روش های ارزشمند بر روی این دسته از معادلات مطالعه شده اند. ولی هیچ یک از این روش ها جواب های دقیق و تحلیلی را برای معادلات دیفرانسیل کسری نتیجه نمی دهد. در این بخش از رساله به معرفی روشهایی همچون روش تحلیل تقارن لی برای معادلات دیفرانسیل کسری، روش زیر فضای ناوردا و روش مشخصه می پردازیم که هر یک از این روش ها جواب های دقیقی از معادلات کسری ارائه می کنند.

جواب های معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از تقارن های لی

همان طور که گفته شد یکی از راه های رسیدن به جواب برای معادلات دیفرانسیل اعم از کسری یا غیر کسری، استفاده از تقارن های بدست آمده در روش تحلیل گروهی لی می باشد. پس لازم است قبل از آنکه نحوه رسیدن به جواب های دقیق از یک معادله را بررسی کنیم ابتدا گروه تقارن و جبر لی متناظر با معادله مورد بحث را بیابیم.

مثال ۶.۲.۵. معادله شرودینگر غیر خطی با مشتق مرتبه کسری α را در نظر می گیریم [۴۷].

$$iD_t^\alpha u + u_{xx} + u_{yy} + f(u)u = 0, \quad (136.5)$$

معادله (۱۳۶.۵) تحت گروه یک پارامتری از تبدیلات

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u^*}{\partial t^*} &= \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \epsilon \eta^{\alpha,t}(t, x, y, u) + O(\epsilon^2), \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \zeta_1^1(t, x, y, u) + O(\epsilon^2), \quad t^* = t + \xi_0(t, x, y, u) + O(\epsilon^2), \\ \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon \zeta_1^2(t, x, y, u) + O(\epsilon^2), \quad x^* = x + \xi_1(t, x, y, u) + O(\epsilon^2), \\ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon \zeta_2^1(t, x, y, u) + O(\epsilon^2), \quad y^* = y + \xi_2(t, x, y, u) + O(\epsilon^2), \\ \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \epsilon \zeta_2^2(t, x, y, u) + O(\epsilon^2), \quad u^* = u + \eta(t, x, y, u) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (137.5)$$

ناوردا است.

روابط $\zeta_1^1, \zeta_1^2, \zeta_2^1, \zeta_2^2$ و ξ_0, ξ_1, ξ_2 در رابطه (۱۰۳.۵) و عملگر مشتق کامل D_x, D_y در (۱۰۴.۵) به طور مشابه تعریف می شوند. اگر

$$X = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial u}. \quad (138.5)$$

مولد بی نهایت کوچک برای معادله شرودینگر کسری (۱۳۶.۵) باشد در اینصورت با حل شرط ناوردایی

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{(\alpha, \gamma)} X(\Delta) |_{\Delta=0} &= (X + \eta^{\alpha,t} \partial_{\partial_t^\alpha u} + \zeta_1^1 \partial_{u_x} + \zeta_2^1 \partial_{u_{xx}} + \zeta_1^2 \partial_{u_y} + \zeta_2^2 \partial_{u_{yy}})(\Delta) |_{\Delta=0} \\ &= i\eta^{\alpha,t} + \eta^{xx} + \eta^{yy} + \eta(u f'(u) + f(u)) = 0, \end{aligned} \quad (139.5)$$

به دستگاه مشخصه

$$\begin{aligned} \xi_t^1 = \xi_t^2 = \xi_u = \xi_x^1 = \xi_x^2 = \xi_y = \xi_y^1 = \xi_y^2 = \eta_{uu} = 0, \\ \alpha \xi_t^0 - \gamma \xi_x^1 = 0, \quad \alpha \xi_t^0 - \gamma \xi_y^2 = 0, \quad \xi_x^2 + \xi_y^1 = 0, \\ \gamma \eta_{xu} - \xi_{xx}^1 - \xi_{yy}^1 = 0, \quad \gamma \eta_{yu} - \xi_{xx}^2 - \xi_{yy}^2 = 0, \quad \binom{\alpha}{1} \eta_{tu} - \binom{\alpha}{2} \xi_{tt}^0 = 0, \\ \eta(u f'(u) + f(u)) + i \partial_t^\alpha \eta - \eta_u u f(u) + \alpha \xi_t^0 u f(u) - i u \partial_t^\alpha \eta_u + \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (140.5)$$

خواهیم رسید. که با طبقه بندی جواب های دستگاه فوق برای تابع دلخواه $f(u)$ و $\alpha \in (0, 1]$ می توان یک جبر لی $(\mathfrak{L} + \infty)$ بعدی به شکل

$$\begin{aligned} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha}{\gamma} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha}{\gamma} y \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_4 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = F_\gamma(y) u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = F_\gamma(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (141.5)$$

برای معادله کسری شرودینگر (۱۳۶.۵) بدست آورد. مشابه آنچه برای معادله کسری شرودینگر با بعد $(\alpha + 2)$ گفته شد، می توان جبر لی $(\alpha + 3)$ بعدی

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha}{2} x \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 &= u \frac{\partial}{\partial u}, & X_\infty &= F_2(t, x) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (142.5)$$

را با حل معادلات مشخصه

$$\begin{aligned} \xi_t^1 &= \xi_u^0 = \xi_x^1 = \xi_x^0 = \eta_{uu} = 0, \\ \alpha \xi_t^0 - 2 \xi_x^1 &= 0, & 2 \eta_{xu} - \xi_{xx}^1 &= 0, & \binom{\alpha}{1} \eta_{tu} - \binom{\alpha}{2} \xi_{tt}^0 &= 0, \\ \eta(u f'(u) + f(u)) + i \partial_t^\alpha \eta - \eta_u u f(u) + \alpha \xi_t^0 u f(u) - i u \partial_t^\alpha \eta_u + \eta_{xx} - \xi_x^1 &= 0. \end{aligned}$$

برای معادله کسری شرودینگر

$$i D_t^\alpha u + u_{xx} + f(u)u = 0, \quad (143.5)$$

با بعد $(\alpha + 1)$ بدست آورد.

بعد از محاسبه تقارن های معادله کسری شرودینگر به بررسی و چگونگی رسیدن به جواب های معادلات کسری (۱۳۶.۵) و (۱۴۳.۵) می پردازیم.

● با انتگرال گیری از معادله مشخصه

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{0},$$

که متناظر با تقارن $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ می باشد، جواب $u = G(t, y) = k(y)g(t)$ یک جواب عمومی و کلی برای معادله شرودینگر کسری (۱۳۶.۵) بدست می آید. می توان در حالت های خاص $f(u) = k$ ، $f(u) = au$ و $f(u) = \frac{1}{u}$ (که a, k اعداد ثابت دلخواهی می باشند) به جواب های خاص تری از این معادله دست یافت.

حالت اول :

با قرار دادن $f(u) = k$ در معادله (۱۳۶.۵) معادله شرودینگر کسری را به صورت

$$i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u_{xx} + u_{yy} + ku = 0. \quad (144.5)$$

داریم.

۱.۱ : اگر $k(y) = ay + b$ را در نظر بگیریم (a, b اعداد ثابت دلخواهی هستند) در این صورت با جایگذاری جواب $u = (ay + b)g(t)$ در معادله تبدیل یافته (۱۴۴.۵)، معادله شرودینگر را در حالت ساده تر به صورت

$$i \frac{\partial^\alpha g(t)}{\partial t^\alpha} + kg(t) = 0. \quad (145.5)$$

خواهیم داشت.

با استفاده از فرمول تبدیل لاپلاس برای مشتق کسری ریمان-لیوویل به صورت

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{\infty} s^k \{D_t^{\alpha-k-1} f(t)\}_{t=0}. \quad (146.5)$$

تابع $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha - (ik)}\right\} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(ikt^\alpha)$ جوابی از معادله کسری (۱۴۵.۵) می باشد. بنابراین $u = (ay + b)t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(ikt^\alpha)$ جوابی از معادله شرودینگر کسری (۱۴۴.۵) خواهد بود.

۱.۲ : با فرض $k(y) = e^y$ ، جواب $u = e^y t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(i(k+1)t^\alpha)$ جوابی دیگر از معادله کسری (۱۴۴.۵) می باشد.

۱.۳ : با فرض $k(y) = A \sin y + B \cos y$ و $k(y) = A \sinh y + B \cosh y$ جواب های

$$u = (A \sin y + B \cos y) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(i(k-1)t^\alpha),$$

$$u = (A \sinh y + B \cosh y) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(i(k+1)t^\alpha).$$

جواب های دیگری از معادله کسری شرودینگر (۱۴۴.۵) خواهند بود.

حالت دوم :

با فرض $f(u) = au$ معادله (۱۳۶.۵) را به صورت

$$i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u_{xx} + u_{yy} + au^2 = 0. \quad (147.5)$$

داریم.

۲.۱ : با در نظر گرفتن $k(y) = b$ و جایگذاری $u = bg(t)$ در معادله تبدیل یافته (۱۴۷.۵)، معادله شرودینگر کسری را به فرم ساده تر

$$\frac{\partial^\alpha g(t)}{\partial t^\alpha} - ibg(t)^2 = 0, \quad (148.5)$$

خواهیم داشت. با استفاده از تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل برای توابع چند جمله ای (۱۸.۵)، جواب دقیق

$$u = -\frac{i}{a} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} t^{-\alpha},$$

برای معادله کسری شرودینگر (۱۴۷.۵) بدست می آید.

حالت سوم :

با پیش فرض $f(u) = \frac{1}{u}$ ، معادله (۱۳۶.۵) به فرم

$$i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u_{xx} + u_{yy} + 1 = 0. \quad (149.5)$$

تبدیل می شود.

۳.۱ : با در نظر گرفتن $k(y) = ay + b$ و جایگذاری $u = (ay + b)g(t)$ در (۱۴۹.۵)، معادله شرودینگر کسری تبدیل به معادله کسری ساده تر به فرم

$$i(ay + b) \frac{\partial^\alpha g(t)}{\partial t^\alpha} + 1 = 0. \quad (150.5)$$

می شود. با استفاده از خاصیت تبدیل لاپلاس از مشتق ریمان-لیوویل جواب کسری $u = \frac{i}{(ay+b)\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ یکی از جواب های معادله (۱۴۹.۵) خواهد بود.

۳.۲ : با فرض $k(y) = e^y$ ، جواب $u = e^{yt^{\alpha-1}} E_{\alpha,\alpha}(it^\alpha) + it^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(it^\alpha)$ جوابی از معادله شرودینگر کسری (۱۴۹.۵) می باشد.

۳.۳ : برای $k(y) = A \sin y + B \cos y$ و $k(y) = A \sinh y + B \cosh y$ جواب های معادله (۱۴۹.۵) به صورت

$$u = (A \sin y + B \cos y) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-it^\alpha) + it^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-it^\alpha),$$

$$u = (A \sinh y + B \cosh y) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(it^\alpha) + it^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(it^\alpha).$$

بدست می آیند.

• در مرحله دوم با در نظر گرفتن تقارن $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ و حل معادله مشخصه

$$\frac{dy}{1} = \frac{dx}{0} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{0},$$

جواب های معادله کسری شرودینگر (۱۳۶.۵) را در هر یک از حالات $f(u) = k$ ، $f(u) = au$ و $f(u) = \frac{1}{u}$ بدست آورده و نتایج را در جدول (۱۱.۵) خلاصه کرده ایم (a, b, A, B اعداد ثابت و دلخواه می باشند). [۴۷].

• به طور مشابه جواب های دقیقی از معادله شرودینگر کسری یک بعدی (۱۴۳.۵) در جدول های (۱۲.۵) و (۱۳.۵) محاسبه شده است.

۱. جواب تقارن $X_1 + X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}$ که به صورت $u = e^x g(t)$ می باشد در جدول (۱۳.۵) آورده شده است.

۲. با در نظر گرفتن تقارن $X_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha x}{t} \frac{\partial}{\partial x}$ و معادله مشخصه

$$\frac{dx}{\frac{\alpha x}{t}} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{0}, \quad (151.5)$$

جدول ۱۱.۵: جواب های معادله (۱۳۶.۵)

$f(u)$	$k(x)$	$u = k(x)g(t)$
	$ax + b$	$(ax + b)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ikt^\alpha)$
k	e^x	$e^x t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(i(k+1)t^\alpha)$
	$A \sin x + B \cos x$	$(A \sin x + B \cos x)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(i(k-1)t^\alpha)$
	$A \sinh x + B \cosh x$	$(A \sinh x + B \cosh x)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(i(k+1)t^\alpha)$
au	b	$\frac{-i}{a} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} t^{-\alpha}$
$\frac{1}{u}$	$ax + b$	$\frac{i}{(ay+b)\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$
	e^x	$e^x t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(it^\alpha) + it^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(it^\alpha)$
	$A \sin x + B \cos x$	$(A \sin x + B \cos x)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-it^\alpha) + it^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-it^\alpha)$
	$A \sinh x + B \cosh x$	$(A \sinh x + B \cosh x)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(it^\alpha) + it^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(it^\alpha)$

جدول ۱۲.۵: جواب های معادله (۱۴۳.۵) تحت تقارن $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$

X_i	$f(u)$	$u(x, t) = g(t)$
$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$	k	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ikt^\alpha)$
	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{i}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha$
	au	$-\frac{i}{a} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} t^{-\alpha}$

معادله شرودینگر کسری یک بعدی (۱۴۳.۵) تبدیل به معادله کاهش یافته

$$\left(P_{\frac{1}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha} g \right) (\xi) = i(g'' + kg). \quad (152.5)$$

خواهد شد [۴۷].

اثبات: فرض کنیم $n - \alpha < \alpha < n$ و $n = 1, 2, 3, \dots$. بر طبق تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل داریم

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(g(xs \frac{\partial}{\partial x}) ds \right) \quad (153.5)$$

با فرض $\nu = \frac{t}{s}$, $ds = -\frac{t}{\nu^2} d\nu$ و جایگذاری در رابطه (۱۵۳.۵) سمت چپ معادله کسری (۱۴۳.۵) به صورت زیر قابل ساده شدن است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^\infty t^{n-\alpha} \nu^{-(n-\alpha+1)} (\nu-1)^{n-\alpha-1} g(\xi \nu^{\frac{\alpha}{\nu}}) d\nu \\ &= \frac{\partial}{\partial t^n} \left[t^{n-\alpha} \left(K_{\frac{1}{\alpha}}^{1,n-\alpha} g \right) (\xi) \right] = t^{-\alpha} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \alpha + j + \xi \frac{d}{d\xi} \right) \left(K_{\frac{1}{\alpha}}^{1,n-\alpha} g \right) (\xi) \\ &= t^{-\alpha} \left(P_{\frac{1}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha} g \right) (\xi) \quad (154.5) \end{aligned}$$

جدول ۱۳.۵: جواب های معادله (۱۴۳.۵) تحت تقارن $X_{\mathcal{F}} = u \frac{\partial}{\partial u}$

$f(u)$	$k(x)$	$u(x, t) = k(x)g(t)$
$f(u) = k$	$ax + b$	$(ax + b)t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(ikt^{\alpha})$
	e^x	$e^x t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(i(k+1)t^{\alpha})$
	$\sin cx + \cos cx$	$(\sin cx + \cos cx)t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(i(k-c^{\mathcal{F}})t^{\alpha})$
	$A \sinh x + B \cosh x$	$(A \sinh x + B \cosh x)t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((k+i)t^{\alpha})$
$f(u) = \frac{1}{u}$	$ax + b$	$\frac{i}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha} + \frac{(ax+b)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$
	e^x	$it^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(it^{\alpha}) - e^x t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(it^{\alpha})$
	$\sin cx$	$-t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(ic^{\mathcal{F}} t^{\alpha}) \sin cx - it^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(ic^{\mathcal{F}} t^{\alpha})$
	$\cos cx$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(ic^{\mathcal{F}} t^{\alpha}) \cos cx + it^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(ic^{\mathcal{F}} t^{\alpha})$
	$A \sinh x + B \cosh x$	$(A \sinh x + B \cosh x)t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(it^{\alpha}) + it^{\alpha} E_{\alpha, \alpha+1}(it^{\alpha})$
$f(u) = cu$	$ax + b$	$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{ic\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$

از طرفی با در اختیار داشتن توابع

$$\xi = xt^{-\frac{\alpha}{\mathcal{F}}}, \quad u = g(\xi) = g(xt^{-\frac{\alpha}{\mathcal{F}}}). \quad (155.5)$$

که از انتگرال گیری معادله مشخصه (۱۵۱.۵) بدست آمده اند، می توان سمت راست تساوی معادله کسری (۱۴۳.۵) را به صورت

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = i(u_{xx} + kut^{-\alpha}) = it^{-\alpha}(g_{\xi\xi} + kg) \quad (156.5)$$

ساده کرد. بنابراین معادله کسری شرودینگر (۱۴۳.۵) تبدیل به معادله کاهش یافته (۱۵۲.۵) خواهد شد.

مثال ۷.۲.۵. معادله دیفرانسیل

$$\Delta = D_t^{\alpha} u - xu_{xx} - f(x)u_x. \quad (157.5)$$

با مشتق کسری $0 < \alpha \leq 1$ و تابع دلخواه $f(x)$ را در نظر بگیرید [۵۸].

معادله (۱۵۷.۵) تحت گروه یک پارامتری

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon \xi^{\circ}(t, x, u) + O(\varepsilon^{\mathcal{F}}), & x^* &= x + \varepsilon \xi^1(t, x, u) + O(\varepsilon^{\mathcal{F}}), \\ u^* &= u + \varepsilon \eta(t, x, u) + O(\varepsilon^{\mathcal{F}}), & \frac{\partial^{\alpha} u^*}{\partial t^{*\alpha}} &= \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} + \varepsilon \zeta^{\alpha, t}(t, x, u) + O(\varepsilon^{\mathcal{F}}), \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \zeta^x(t, x, u) + O(\varepsilon^{\mathcal{F}}), & \frac{\partial^{\mathcal{F}} u^*}{\partial x^{*\mathcal{F}}} &= \frac{\partial^{\mathcal{F}} u}{\partial x^{\mathcal{F}}} + \varepsilon \zeta^{xx}(t, x, u) + O(\varepsilon^{\mathcal{F}}). \end{aligned} \quad (158.5)$$

با ضرایب امتداد

$$\begin{aligned} \zeta^x &= D_x \eta - u_t D_x \xi^{\circ} - u_x D_x \xi^1, & \zeta^{xx} &= D_x \zeta^x - u_{xt} D_x \xi^{\circ} - u_{xx} D_x \xi^1, \\ \zeta^{\alpha, t} &= \frac{\partial^{\alpha} \eta}{\partial t^{\alpha}} + (\eta_u - \alpha D_t(\xi^{\circ})) \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} - u \frac{\partial^{\alpha} \eta_u}{\partial t^{\alpha}} - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi^1) D_t^{\alpha-n}(u_x) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{n} \frac{\partial^n \eta_u}{\partial t^n} - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\xi^\circ) \right] D_t^{\alpha-n}(u) + \mu, \quad (159.5)$$

که در آن

$$\mu = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{m} \binom{k}{r} \frac{1}{k!} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} (-u)^r \frac{\partial^m}{\partial t^m} (u^{k-r}) \frac{\partial^{n-m+k}}{\partial t^{n-m} \partial u^k},$$

و

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1-n)}.$$

ناوردا می باشد [۱۸، ۷۷، ۷۸، ۷۹].

با توجه به شرط ناوردابی

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{(\alpha, \gamma)} X(\Delta) |_{\Delta=0} &= (X + \zeta^{\alpha, t} \partial_{\partial_t^\alpha} u + \zeta^x \partial_{u_x} + \zeta^{xx} \partial_{u_{xx}}) (\Delta) |_{\Delta=0} \\ &= \zeta^{\alpha, t} - (u_{xx} + f'(x)u_x)\xi^1 - f(x)\zeta^x - x\zeta^{xx} = 0. \end{aligned}$$

و حل دستگاه مشخصه

$$\begin{aligned} \xi_t^1 &= \xi_u^\circ = \xi_x^1 = \xi_x^\circ = \eta_{uu} = 0, & x\eta_u - \alpha x \xi_t^\circ - \xi^1 - x(\eta_u - \gamma \xi_x^1) &= 0, \\ -\alpha f(x)\xi_t^\circ - f'(x)\xi^1 + f(x)\xi_x^1 - x(\gamma \eta_{xu} - \xi_{xx}^1) &= 0, \\ \partial_t^\alpha \eta - u \partial_t^\alpha \eta_u - f(x)\eta_x - x\eta_{xx} &= 0, & \binom{\alpha}{n} \partial_t^n \eta_u - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1} \xi^\circ &= 0. \end{aligned}$$

جواب های

$$\xi^\circ = c_1 t + c_2, \quad \xi^1 = \alpha c_1 x + c_3 \sqrt{x}, \quad \eta = F_\gamma(x)u + F_\gamma(t, x).$$

با ضرایب دلخواه c_1, c_2, c_3 و برای معادله دیفرانسیل کسری (۱۵۷.۵) مشخص می شوند.

• با فرض $\beta = f(x) = \frac{1}{x}$ معادله کسری (۱۵۷.۵) را به صورت

$$D_t^\alpha u = xu_{xx} + \frac{1}{x} u_x. \quad (160.5)$$

با تقارن های لی

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}, & X_\gamma &= \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial x}, & X_\gamma &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_\alpha &= u \frac{\partial}{\partial u}, & X_{F_\gamma} &= F_\gamma(t, x) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (161.5)$$

خواهیم داشت.

جواب های دقیق و یا معادله کاهش یافته تحت هر یک از تقارن های بدست آمده، در جدول (۱۴.۵) محاسبه شده است، که در آن:

$$A = \sqrt[2]{xt^{-\alpha}e^{-t}E_{1,1-\alpha}(t)},$$

جدول ۱۴.۵: جواب های معادله کسری (۱۶۰.۵)

تقارن ها	جواب های دقیق	معادلات کاهش یافته
X_1	$u = g(xt^{-\alpha}) = g(\theta)$	$\left(P_{\frac{1}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha}g\right)(\theta) = \theta g'' + \frac{1}{\alpha}g'$
X_2	$u = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	
X_3	$u = c_1 + c_2\sqrt{x}$	
$X_1 + X_2$	$u = tg(xt^{-\alpha}) = tg(\theta)$	$\left(P_{\frac{1}{\alpha}}^{2-\alpha,\alpha}g\right)(\theta) = \theta g'' + \frac{1}{\alpha}g'$
$X_2 + X_3$	$u = e^{\sqrt{x}t^{\alpha-1}}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)$	
$X_3 + X_4$	$u = e^t [c_1 \sinh(A) + c_2 \cosh(A)]$	

به طور نمونه، اگر تقارن $X_1 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}$ با معادله مشخصه

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{\circ}, \quad (162.5)$$

در نظر بگیریم، جواب عمومی از این معادله به صورت $u = g(t, x) = g(\theta) = g(xt^{-\alpha})$ خواهد بود. با استفاده از تعریف مشتق ریمان-لیوویل و تغییر متغیرهای $\nu = \frac{t}{s}$ و $ds = -\frac{t}{\nu^2}d\nu$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t t^{n-\alpha} \nu^{-(n-\alpha+1)} (\nu-1)^{n-\alpha-1} g(\theta \nu^\alpha) d\nu \\ &= \frac{\partial}{\partial t^n} \left[t^{n-\alpha} \left(K_{\frac{1}{\alpha}}^{1,n-\alpha} g \right) (\theta) \right] = t^{-\alpha} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \alpha + j + \theta \frac{d}{d\theta} \right) \left(K_{\frac{1}{\alpha}}^{1,n-\alpha} g \right) (\theta) \\ &= t^{-\alpha} \left(P_{\frac{1}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha} g \right) (\theta). \end{aligned} \quad (163.5)$$

از طرفی با جایگذاری $u = g(xt^{-\alpha})$ در سمت راست معادله کسری (۱۶۰.۵) به معادله تبدیل یافته

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = xu_{xx} + \frac{1}{\alpha}u_x = t^{-\alpha}(\theta g_{\xi\xi} + \frac{1}{\alpha}g_\xi). \quad (164.5)$$

خواهیم رسید. روابط (۱۶۳.۵) و (۱۶۴.۵) معادله (۱۶۰.۵) را بر حسب عملگر ایردیلی-کوبر به صورت

$$\left(P_{\frac{1}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha}g\right)(\theta) = \theta g'' + \frac{1}{\alpha}g'.$$

نتیجه می دهند.

- با جایگذاری $\beta = f(x) = \frac{3}{\alpha}$ در معادله کسری (۱۵۷.۵)، تقارن های

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_4 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 &= \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\alpha \sqrt{x}} u \frac{\partial}{\partial u}, & X_{F_3} &= F_3(t, x) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (165.5)$$

برای معادله کسری

$$D_t^\alpha u = x u_{xx} + \frac{3}{\alpha} u_x, \quad (166.5)$$

بدست می آیند. لیست کاملی از جواب ها تحت تقارن های محاسبه شده در جدول (۱۵.۵) آورده شده است.

جدول ۱۵.۵: نتایج جواب معادله کسری (۱۶۶.۵)

تقارن ها	جواب های دقیق	معادلات کاهش یافته
X_1	$u = g(xt^{-\alpha}) = g(\theta)$	$\left(P_{\frac{1}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha}g\right)(\theta) = \theta g'' + \frac{3}{\alpha}g'$
X_3	$u = c_1 + \frac{\alpha}{\sqrt{x}}$	
X_5	$u = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	
$X_3 + X_4$	$u = \frac{e^t}{\sqrt{x}} [c_1 \sinh(A) + c_2 \cosh(A)]$	

- همچنین با در نظر گرفتن $\beta = f(x) = \frac{1+3\sqrt{x}}{\alpha(1+\sqrt{x})}$ معادله (۱۵۷.۵) را به فرم

$$D_t^\alpha u = x u_{xx} + \frac{1+3\sqrt{x}}{\alpha(1+\sqrt{x})} u_x. \quad (167.5)$$

با تقارن های

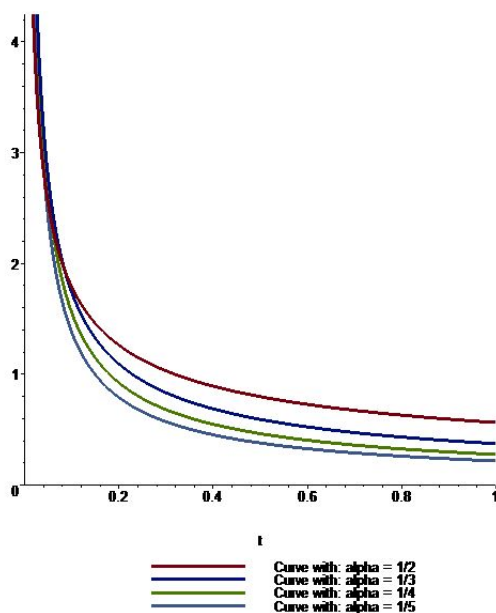
$$\begin{aligned} X_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_4 &= u \frac{\partial}{\partial u}, & X_6 &= \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha}{\alpha(1+\sqrt{x})} u \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_7 &= \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\alpha(1+\sqrt{x})} u \frac{\partial}{\partial u}, & X_{F_3} &= F_3(t, x) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (168.5)$$

خواهیم داشت. معادله کاهش یافته و جواب های این معادله نیز در جدول (۱۶.۵) خلاصه شده است.

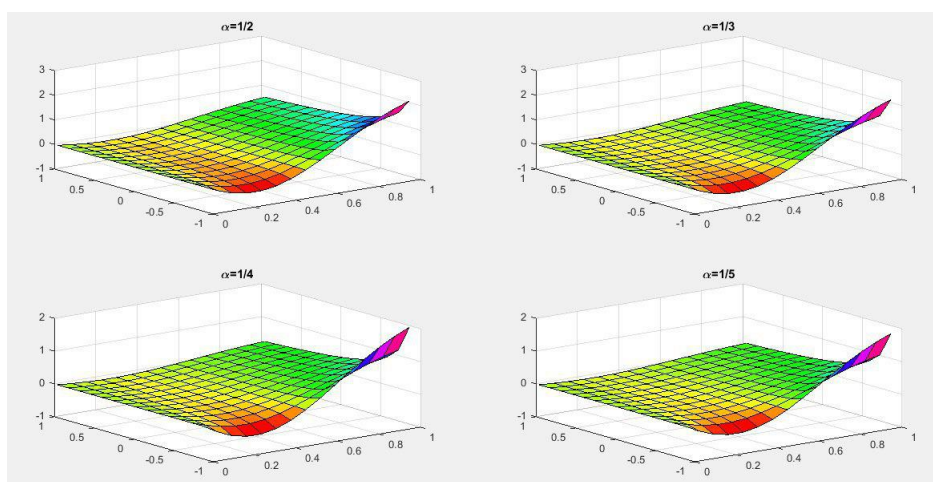
منحنی برخی از جواب های معادلات (۱۶۰.۵)، (۱۶۶.۵) و (۱۶۷.۵) در شکل های (۱.۵)، (۲.۵)، (۳.۵) و (۴.۵) رسم شده است [۵۸].

جدول ۱۶.۵: نتایج جواب معادله کسری (۱۶۷.۵)

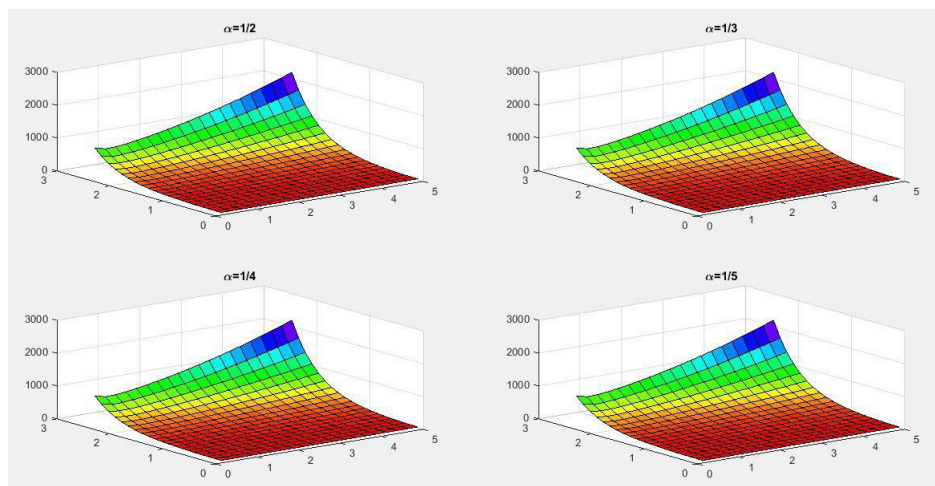
تقارن ها	جواب های دقیق	معادلات کاهش یافته
X_3	$u = c_1 + \frac{c_2}{1+\sqrt{x}}$	
X_6	$u = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}g(xt^{-\alpha}) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}g(\theta)$	$(P_{\frac{1}{\alpha}}^{1-\alpha,\alpha}g)(\theta) = \theta g'' + \frac{2}{\alpha}g'$
X_7	$u = \frac{t^\alpha}{(1+\sqrt{x})\Gamma(\alpha)}$	
$X_3 + X_4$	$u = \frac{e^t}{1+\sqrt{x}} \left[c_1 \cosh(\sqrt{ax}) + c_2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{ax}} \frac{\sinh(\sqrt{ax})}{\sqrt{ax}} \right]$	



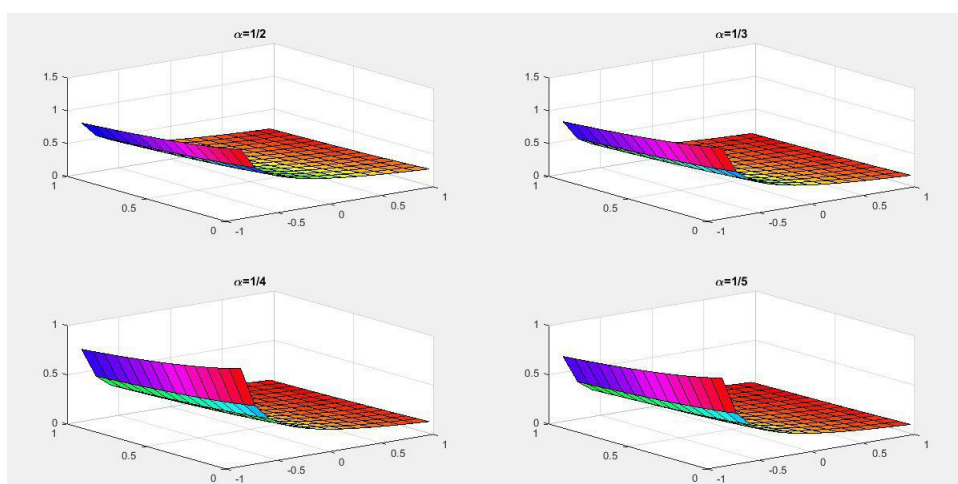
شکل ۱.۵: شکل تابع $u = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ با $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$



شکل ۲.۵: شکل تابع $u = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ با $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$



شکل ۳.۵: شکل تابع $u = \frac{e^t}{\sqrt{x}} [\sinh(A) + \cosh(A)]$ با $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$



شکل ۴.۵: شکل تابع $u = \frac{t^\alpha}{(1+\sqrt{x})\Gamma(\alpha)}$ با $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

جواب های معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از روش زیر فضای ناورد

در این بخش روش زیر فضای ناورد که راهی برای رسیدن به جواب های دقیق از یک معادله دیفرانسیل با مرتبه کسری یا غیر کسری می باشد را شرح خواهیم داد.

اخیرا نویسندگانی همچون گازیو^{۲۶} و کاساخین^{۲۷} روش زیر فضای ناورد را برای معادلات دیفرانسیل با مشتق مرتبه کسری تعمیم داده اند [۲۳]. ولی در ابتدا مختصری از این روش را برای معادلات دیفرانسیل با مشتق مرتبه صحیح توضیح می دهیم.

• فرض کنیم یک معادله دیفرانسیل تکاملی با مشتق مرتبه صحیح

$$u_t = F[u] \equiv F(u, Du, D^2u, \dots) = 0. \quad (169.5)$$

که $Du = \{u_t, u_x\}$ و $D^2u = \{u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}\}$ ، در اختیار داشته باشیم. زیر فضایی متشکل از n تابع مستقل خطی و مجهول $f_i(x)$ تعریف می کنیم.

$$W_n = \langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i f_i(x), \quad i = 1, \dots, n \right\},$$

در واقع W_n فضایی از توابع $f_1(x), \dots, f_n(x)$ بر روی \mathbb{R} یا \mathbb{C} با اعداد ثابت دلخواه c_1, \dots, c_n می باشد.

تعریف ۸.۲.۵. فضای خطی متناهی البعد W_n نسبت به عملگر دیفرانسیلی F ناوردا به شمار می آید هر گاه داشته باشیم: $F[W_n] \subseteq W_n$. یا به عبارتی $\{F[u] \in W_n, \quad \forall u \in W_n\}$.

توجه کنید که مجموعه توابع $f_i(x)$ که در روش زیر فضای ناوردا به کار می روند تشکیل جواب دقیقی برای معادله (۱۶۹.۵) به فرم

$$u(x, t) = C_1(t)f_1(x) + \dots + C_n(t)f_n(x) \in W_n \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (170.5)$$

می دهند که $C_i(t)$ ضرایبی مجهول و $f_i(x) \in W_n$ می باشد.

به طور نمونه اگر یک معادله دیفرانسیل تکاملی با متغیرهای x و t به صورت

$$u_t = F[u] \equiv F(u, u_x, u_{xx}, \dots), \quad (171.5)$$

در اختیار داشته باشیم و W_n تحت عملگر F ناوردا باشد، در این صورت

$$F[u] = \psi_1(C_1, \dots, C_n)f_1 + \dots + \psi_n(C_1, \dots, C_n)f_n \in W_n, \quad \forall u \in W_n. \quad (172.5)$$

بنابراین W_n یک زیر فضای ناوردا برای معادله (۱۷۱.۵) محسوب می شود و ضرایب $C_i(t)$ از حل دستگاه

$$\begin{cases} \frac{dC_1(t)}{dt} = \psi_1(C_1(t), \dots, C_n(t)), \\ \vdots \\ \frac{dC_n(t)}{dt} = \psi_n(C_1(t), \dots, C_n(t)). \end{cases} \quad (173.5)$$

بدست می آیند.

قضیه ۹.۲.۵. اگر فضای خطی W_n تحت عملگر دیفرانسیل غیرخطی و از مرتبه k ،

$$F[y] = F(x, y, y', \dots, y^{(k)})$$

ناوردا باشد در این صورت $n \leq 2k + 1$. اثبات: در مرجع [۶۹] آورده شده است.

• یک معادله دیفرانسیل کسری به صورت

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = F[u], \quad \alpha > 0. \quad (174.5)$$

را در نظر بگیرید. $\frac{\partial^\alpha(\cdot)}{\partial t^\alpha}$ نمایشگر مشتق کسری ریمان-لیوویل نسبت به زمان و $F[u]$ یک عملگر دیفرانسیل غیر خطی از مرتبه k می باشد [۶۹].

قضیه ۱۰.۲.۵. فرض کنیم فضای خطی تولید شده توسط n تابع مستقل خطی $\{f_i(x), i = 1, 2, \dots, n\}$ باشد. اگر W_n تحت عملگر $F[u]$ ناورد باشد، در این صورت n تابع مانند $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ موجودند به طوری که

$$F\left[\sum_{i=0}^n c_i f_i(x)\right] = \sum_{i=0}^n \psi_i(c_1, c_2, \dots, c_n) f_i(x), \quad \forall c_i \in \mathbb{R}. \quad (175.5)$$

و $\{\psi_i\}$ ها ضرایبی از $F[u] \in W_n$ با پایه $\{f_i\}$ می باشند. بنابراین معادله دیفرانسیل (۱۷۴.۵) جوابی به فرم

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^n c_i(t) f_i(x), \quad (176.5)$$

با ضرایب $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ که در معادله کاهش یافته کسری

$$\frac{d^\alpha c_i(t)}{dt^\alpha} = \psi_i(c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (177.5)$$

صدق می کند، دارا خواهد بود.

اثبات: با استفاده از خاصیت خطی مشتق کسری و رابطه (۱۷۶.۵) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{d^\alpha c_i(t)}{dt^\alpha} f_i(x), \quad (178.5)$$

از طرفی با جایگذاری (۱۷۶.۵) در (۱۷۵.۵) عبارت

$$F[u(x, t)] = \sum_{i=1}^n \psi_i(c_1(t), \dots, c_n(t)) f_i(x), \quad (179.5)$$

بدست می آید که با قرار دادن روابط (۱۷۸.۵) و (۱۷۹.۵) در (۱۷۴.۵) نتیجه مورد نظر به صورت

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d^\alpha c_i(t)}{dt^\alpha} - \psi_i(c_1(t), \dots, c_n(t)) \right] f_i(x) = 0.$$

حاصل می شود.

مثال ۱۱.۲.۵. معادله شرودینگر کسری (۱۳۶.۵) را در نظر بگیرید. فرض کنیم $f(u) = b$ ثابت و دلخواه باشد، در این صورت معادله (۱۳۶.۵) تبدیل به معادله کسری

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = F[u] = i(u_{xx} + u_{yy} + bu). \quad (180.5)$$

می شود.
به طور بدیهی

$$W_1 = L\{1, x, y\}, \quad W_2 = L\{1, x, y, x^2, y^2\}, \quad W_3 = L\{1, e^x, e^y\}, \\ W_4 = L\{1, \sin x + \cos x, \sin y + \cos y\}.$$

یک زیر فضای ناوردای برای معادله کسری (۱۸۰.۵) می باشد [۴۷]. به طور مثال اگر زیر فضای

$W_2 = L\{1, x, y, x^2, y^2\}$ را در نظر بگیریم، نشان خواهیم داد که W_2 یک زیر فضای ناوردای برای معادله کسری (۱۸۰.۵) خواهد بود.

$$F[u] = F[c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 y^2] \\ = (2ic_2 + 2ic_3 + bc_1) + (ibc_2)x + (ibc_3)y + (ibc_4)x^2 + (ibc_5)y^2 \\ = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 x + \tilde{c}_3 y + \tilde{c}_4 x^2 + \tilde{c}_5 y^2 \in W$$

لذا جواب های معادله کسری (۱۸۰.۵) به فرم

$$u(t, x, y) = c_1(t) + c_2(t)x + c_3(t)y + c_4(t)x^2 + c_5(t)y^2.$$

می باشند. با جایگذاری $u(t, x, y)$ در معادله کسری (۱۸۰.۵) و حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha c_1(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_1(t) = 2ic_2(t) + 2ic_3(t) + bc_1(t), \\ \frac{\partial^\alpha c_2(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_2(t) = ibc_2(t), \\ \frac{\partial^\alpha c_3(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_3(t) = ibc_3(t), \\ \frac{\partial^\alpha c_4(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_4(t) = ibc_4(t), \\ \frac{\partial^\alpha c_5(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_5(t) = ibc_5(t). \end{cases} \quad (181.5)$$

به جواب های

$$c_2(t) = c_3(t) = c_4(t) = c_5(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(ibt^\alpha), \quad (182.5)$$

$$c_1(t) = \mathcal{F}i\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha - ib)(s^\alpha - b)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha - b)} \right\} \\ = \frac{-2i(1+i)}{b} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(ibt^\alpha) + \frac{1+i+2b}{2b} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(bt^\alpha). \quad (183.5)$$

خواهیم رسید.

بنابراین

$$u(t, x, y) = \frac{-\sqrt{2}i(1+i)}{b}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ibt^\alpha) + \frac{1+i+\sqrt{2}b}{\sqrt{2}b}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(bt^\alpha) + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ibt^\alpha)[x+y+x^\sqrt{2}+y^\sqrt{2}]. \quad (184.5)$$

جوابی از معادله شرودینگر کسری (۱۸۰.۵) خواهد بود. مابقی جواب های معادله شرودینگر کسری (۱۳۶.۵) با استفاده از روش زیر فضای ناوردا در جدول (۱۷.۵) خلاصه شده است (A و B اعداد ثابت و دلخواه می باشند). [۴۷].

جدول ۱۷.۵: جواب های معادله (۱۳۶.۵)

$f(u)$	W_i	$u(t, x, y)$
b	$L\{1, x, y\}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ibt^\alpha)[1+x+y]$
	$L\{1, x, y, x^\sqrt{2}, y^\sqrt{2}\}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ibt^\alpha)[\frac{-\sqrt{2}i(1+i)}{b}x+y+x^\sqrt{2}+y^\sqrt{2}] + \frac{1+i+\sqrt{2}b}{\sqrt{2}b}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(bt^\alpha)$
	$L\{1, e^x, e^y\}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(bt^\alpha) + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((i+b)t^\alpha)[e^x+e^y]$
	$L\{1, \sin x + \cos x, \sin y + \cos y\}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ibt^\alpha) + \sqrt{2}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(i(b-1)t^\alpha)[\sin(x+\frac{\pi}{4}) + \sin(y+\frac{\pi}{4})]$
$\frac{1}{u}$	$L\{1, x^\sqrt{2}, y^\sqrt{2}\}$	$\sqrt{2}i(a+b)\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\sqrt{2}\alpha)}t^{\sqrt{2}\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + t^{\alpha-1}[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + ax^\sqrt{2} + by^\sqrt{2}]$
	$L\{1, e^x, e^y\}$	$\frac{i}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(it^\alpha)[e^x+e^y]$
	$L\{1, \sin x, \sin y\}$	$\frac{i}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(it^\alpha)[\sin x + \sin y]$
	$L\{1, x, x^\sqrt{2}, y, y^\sqrt{2}\}$	$\frac{i}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\sqrt{2}i\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\sqrt{2}\alpha)}t^{\sqrt{2}\alpha-1}[Bx+Ay] + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[x+y] + t^{\alpha-1}[Bx^\sqrt{2}+Ay^\sqrt{2}]$

مثال ۱۲.۲.۵. در این مثال جواب های دقیقی از معادله انتشار کسری (۱۰۲.۵) به روش زیر فضای ناوردا بدست می آوریم [۴۹].

• با فرض

$$f(u) = au^\sqrt{2} + bu, \quad g(u) = cu^\sqrt{2} + du, \quad h(u) = k.$$

معادله (۱۰۲.۵) را به صورت

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = F[u] = (\sqrt{2}au + bu)u_x^\sqrt{2} + (au^\sqrt{2} + bu)u_{xx} + (\sqrt{2}cu + d)u_y^\sqrt{2} + (cu^\sqrt{2} + du)u_{yy}$$

خواهیم داشت. که با یک بررسی ساده مشخص می شود فضای

$$W_1 = L\{1, x, y\},$$

یک زیر فضای ناوردا برای معادله (۱۸۵.۵) خواهد بود:

$$\begin{aligned} F[u] &= F[c_1 + c_2x + c_3y] \\ &= (\sqrt{2}ac_1c_2^\sqrt{2} + bc_2^\sqrt{2} + \sqrt{2}cc_1c_2^\sqrt{2} + dc_2^\sqrt{2}) + (\sqrt{2}ac_2^\sqrt{2} + \sqrt{2}cc_2c_2^\sqrt{2})x + (\sqrt{2}ac_3c_2^\sqrt{2} + \sqrt{2}cc_2c_3^\sqrt{2})y \end{aligned}$$

$$= \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 x + \tilde{c}_3 y \in W. \quad (185.5)$$

بنابراین $u(t, x, y) = c_1(t) + c_2(t)x + c_3(t)y$ جوابی از معادله کسری (۱۸۵.۵) می باشد. با جایگذاری این جواب در معادله (۱۸۵.۵) و حل دستگاه کسری

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha c_1(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_1(t) = 2ac_1(t)c_2(t)^2 + bc_2(t)^2 + 2cc_1(t)c_3(t)^2 + dc_3(t)^2, \\ \frac{\partial^\alpha c_2(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_2(t) = 2ac_2(t)^3 + 2cc_2(t)c_3(t)^2, \\ \frac{\partial^\alpha c_3(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_3(t) = 2ac_3(t)c_2(t)^2 + 2cc_3(t)^3. \end{cases}$$

به جواب های

$$c_2(t) = k_2 t^{-\alpha}, \quad c_3(t) = \pm \sqrt{\lambda t^{-\alpha}},$$

$$c_1(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha) (b\lambda + dk_2^2)}{1 - \Gamma(1-\alpha) (2a\lambda + 2ck_2^2)}.$$

با $\lambda = \frac{1}{2a} \left[\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} - 2ck_2^2 \right]$ که k_2 ضریب ثابت دلخواه در آن می باشد، خواهیم رسید. بنابراین یکی از جواب های دقیق معادله کسری (۱۸۵.۵) به صورت

$$u(t, x, y) = \frac{\Gamma(1-\alpha) (b\lambda + dk_2^2)}{1 - \Gamma(1-\alpha) (2a\lambda + 2ck_2^2)} \pm (\sqrt{\lambda t^{-\alpha}}) x + (k_2 t^{-\alpha}) y.$$

خواهد بود.

● با قرار دادن

$$f(u) = au^2 + bu, \quad g(u) = k, \quad h(u) = mu^2 + nu.$$

در معادله (۱۰۲.۵) و در نظر گرفتن زیر فضای ناوردای $W_2 = L\{1, x, z\}$ ، جواب معادله کسری حاصل به صورت

$$u(t, x, y) = \frac{\Gamma(1-\alpha) (b\lambda_1 + nk_2^2)}{1 - \Gamma(1-\alpha) (2a\lambda_1 + 2mk_2^2)} \pm (\sqrt{\lambda_1 t^{-\alpha}}) x + (k_2 t^{-\alpha}) z.$$

با $\lambda_1 = \frac{1}{2a} \left[\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} - 2mk_2^2 \right]$ خواهد بود.

● با فرض $f(u) = k$ ، $g(u) = cu^2 + du$ و $h(u) = mu^2 + nu$ در نظر گرفتن زیر فضای ناوردای $W_3 = L\{1, y, z\}$ ، مشابه دو مورد قبلی جواب معادله کسری انتشار به صورت

$$u(t, x, y) = \frac{\Gamma(1-\alpha) (d\lambda_2 + nk_2^2)}{1 - \Gamma(1-\alpha) (2c\lambda_2 + 2mk_2^2)} \pm (\sqrt{\lambda_2 t^{-\alpha}}) y + (k_2 t^{-\alpha}) z.$$

با $\lambda_2 = \frac{1}{\Gamma_c} \left[\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{\Gamma_c})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{\Gamma_c})} - \Gamma_c k_2 \right]$ بدست می آید.

- معادله دیفرانسیل کسری (۱۰۲.۵) با توابع دلخواه $g(u) = cu^\lambda + du$ ، $f(u) = au^\lambda + bu$ و $h(u) = mu^\lambda + nu$ و زیر فضای ناوردای $W_4 = L\{1, x, y, z\}$ دارای جواب منحصر به فرد و یکتایی می باشد. با حل دستگاه

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha c_1(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_1(t) = (\Gamma_c a c_1(t) + b) c_2(t)^\lambda + (\Gamma_c c c_1(t) + d) c_3(t)^\lambda + (\Gamma_c m c_1(t) + n) c_4(t)^\lambda, \\ \frac{\partial^\alpha c_2(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_2(t) = \Gamma_c a c_2(t)^\lambda + \Gamma_c c c_2(t) c_3(t)^\lambda + \Gamma_c m c_2(t) c_4(t)^\lambda, \\ \frac{\partial^\alpha c_3(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_3(t) = \Gamma_c a c_3(t) c_2(t)^\lambda + \Gamma_c c c_3(t)^\lambda + \Gamma_c m c_3(t)^\lambda c_4(t)^\lambda, \\ \frac{\partial^\alpha c_4(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_4(t) = \Gamma_c a c_4(t) c_2(t)^\lambda + \Gamma_c c c_4(t) c_3(t)^\lambda + \Gamma_c m c_4(t)^\lambda. \end{cases}$$

جواب

$$u(t, x, y) = \frac{\Gamma(1-\alpha) [b\lambda_3 + \Gamma_c a (dB^\lambda + nK)]}{\Gamma_c a [\Gamma(1-\alpha)(\lambda_3 + \Gamma_c c B^\lambda + \Gamma_c m K)]} \pm \sqrt{At^{-\alpha}x + Bt^{-\frac{\alpha}{\Gamma_c}}y + Kt^{-\frac{\alpha}{\Gamma_c}}z}.$$

با $\lambda_3 = \left[\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{\Gamma_c})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{\Gamma_c})} - \Gamma_c c B^\lambda - \Gamma_c m K^\lambda \right]$ ، $A = \pm \sqrt{\frac{1}{\Gamma_c} \lambda_3}$ ثابت، K, B و بدست می آید.

- تحت زیر فضای ناوردای $W_5 = L\{1, x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda\}$ و توابع $g(u) = bu$ ، $f(u) = au$ و $h(u) = cu$ جواب $u(t, x, y, z) = c_1 + c_2 x^\lambda + c_3 y^\lambda + c_4 z^\lambda$ جوابی از معادله کسری انتشار خواهد بود، که با حل دستگاه

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha c_1(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_1(t) = \Gamma_c c_1(t) [a c_2(t) + b c_3(t) + c c_4(t)], \\ \frac{\partial^\alpha c_2(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_2(t) = \Gamma_c c_2(t) [\Gamma_c a c_2(t) + b c_3(t) + c c_4(t)], \\ \frac{\partial^\alpha c_3(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_3(t) = \Gamma_c c_3(t) [\Gamma_c b c_2(t) + a c_2(t) + c c_4(t)], \\ \frac{\partial^\alpha c_4(t)}{\partial t^\alpha} = \tilde{c}_4(t) = \Gamma_c c_4(t) [\Gamma_c c c_2(t) + a c_2(t) + b c_3(t)]. \end{cases}$$

به جواب دقیق

$$u(t, x, y) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\Gamma_c \alpha)} t^{-\alpha} \left(\frac{x^\lambda}{a} + \frac{y^\lambda}{b} + \frac{z^\lambda}{c} \right).$$

خواهیم رسید.

- با در نظر گرفتن $g(u) = cu^\lambda + du$ ، $f(u) = au^\lambda + bu$ و $h(u) = mu^\lambda + nu$ و زیر فضای ناوردای $W_6 = L\{1, x, x^\lambda, y, y^\lambda\}$ جواب دقیق

$$u(t, x, y) = t^{-\alpha} \left[\frac{\Gamma(1-\Gamma_c \alpha)(aE^\lambda + bk^\lambda)}{\Gamma(1-\alpha)} + Hx + Ex^\lambda + Ky + Fy^\lambda \right].$$

با $E = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda a \Gamma(1-\Gamma_c \alpha)}$ ، $F = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda b \Gamma(1-\Gamma_c \alpha)}$ و H, K ثابت را برای معادله (۱۰۲.۵) خواهیم داشت.

مثال ۱۳.۲.۵. زیر فضای $W_1 = L\{1, x, x^2\}$ یک زیر فضای ناورد را برای معادله کسری فوکر-پلانک (۱۳۲.۵) می باشد [۲۴]. بنابراین معادله (۱۳۲.۵) جوابی به فرم $u(t, x) = c_1(t) + c_2(t)x + c_3(t)x^2$ خواهد داشت که با جایگذاری در (۱۳۲.۵) به دستگاه کسری

$$\begin{cases} D_t^\alpha c_1(t) = a^2 c_3(t) + b c_1(t), \\ D_t^\alpha c_2(t) = 2b c_2(t), \\ D_t^\alpha c_3(t) = 3b c_3(t). \end{cases} \quad (186.5)$$

و جواب های

$$\begin{aligned} c_1(t) &= a^2 t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(3bt^\alpha) + ba^2 t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(2bt^\alpha) + \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \\ c_2(t) &= a^2 E_{\alpha, 1}(2bt^\alpha), \quad c_3(t) = E_{\alpha, 1}(3bt^\alpha). \end{aligned}$$

خواهیم رسید. در نتیجه

$$u(t, x) = a^2 t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(3bt^\alpha) + ba^2 t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(2bt^\alpha) + \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + a^2 E_{\alpha, 1}(2bt^\alpha)x + E_{\alpha, 1}(3bt^\alpha)x^2$$

جوابی دقیق از معادله کسری فوکر-پلانک (۱۳۲.۵) با ضرایب ثابت و دلخواه a, b و a^2 خواهد بود.

جواب های جدیدی از معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از جواب های بدست آمده از روشهای دیگر

در این روش هر معادله دیفرانسیلی کسری یا غیر کسری که تقارنی به فرم $X = F(x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ در اختیار داشته باشد را می توان با استفاده از عملگر جابجاگر $[X_i, X_j]$ به تقارن جدید $X_k = G(x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ و جواب جدید $G(x, y)$ رسانید [۵۸].

به طور مثال معادلات (۱۶۰.۵) و (۱۶۶.۵) و (۱۶۷.۵) در مثال (۷.۲.۵)، همگی دارای تقارنی به صورت $X_{F\gamma} = F\gamma(t, x) \frac{\partial}{\partial u}$ می باشند. لذا جواب های جدید با استفاده از تقارن جدید برای این دسته از معادلات به راحتی قابل محاسبه هستند. نتایج بدست آمده را در جدول (۱۸.۵) خلاصه کرده ایم. که در آن $B = x \left(1 + \frac{\Gamma(-\alpha, t)}{\Gamma(1-\alpha)} \right)$ و c_1 و c_2 اعداد ثابت دلخواه

جدول ۱۸.۵: محاسبه جواب های جدید با استفاده از جواب های قدیمی بدست آمده

معادلات	تقارن جدید	جواب جدید
(۵.۱۶۰)	$[X_{\gamma}, X_{F\gamma}] = (\sqrt{x} \frac{\partial f_{old}}{\partial x}) \frac{\partial}{\partial u}$	$\sqrt{x} \frac{\partial f_{old}}{\partial x} = 0$
	$[X_{\gamma}, X_{F\gamma}] = (\frac{\partial f_{old}}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{\partial f_{old}}{\partial t} = 0$
	$[X_{\gamma} + X_{\gamma}, X_{F\gamma}] = (\sqrt{x} \frac{\partial f_{old}}{\partial x} - f_{old}) \frac{\partial}{\partial u}$	$\sqrt{x} \frac{\partial f_{old}}{\partial x} - f_{old} = 0$
	$[X_{\gamma} + X_{\gamma}, X_{F\gamma}] = (\frac{\partial f_{old}}{\partial t} - f_{old}) \frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{-x\alpha t^{-(1+\alpha)}}{\sqrt{B}\Gamma(1-\alpha)} [c_1 \sinh(\sqrt{2}\sqrt{B}) + c_2 \cosh(\sqrt{2}\sqrt{B})]$
(۵.۱۶۶)	$[X_{\gamma}, X_{F\gamma}] = (\frac{\partial f_{old}}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{\partial f_{old}}{\partial t} = 0$
	$[X_{\Delta}, X_{F\gamma}] = (\sqrt{x} \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{x}} f_{old}) \frac{\partial}{\partial u}$	$\sqrt{x} \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{x}} f_{old} = 0$
	$[X_{\gamma} + X_{\gamma}, X_{F\gamma}] = (\frac{\partial f_{old}}{\partial t} - f_{old}) \frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{-\sqrt{x}\alpha t^{-(1+\alpha)}}{\sqrt{B}\Gamma(1-\alpha)} [c_1 \sinh(\sqrt{2}\sqrt{B}) + c_2 \cosh(\sqrt{2}\sqrt{B})]$
(۵.۱۶۷)	$[X_{\gamma}, X_{F\gamma}] = (\frac{\partial f_{old}}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{\partial f_{old}}{\partial t} = 0$
	$[X_{\gamma}, X_{F\gamma}] = (\sqrt{x} \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + \frac{f_{old}}{\sqrt{(1+\sqrt{x})}}) \frac{\partial}{\partial u}$	$\sqrt{x} \frac{\partial f_{old}}{\partial x} + \frac{f_{old}}{\sqrt{(1+\sqrt{x})}} = 0$
	$[X_{\gamma} + X_{\gamma}, X_{F\gamma}] = (\frac{\partial f_{old}}{\partial t} - f_{old}) \frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{\partial f_{old}}{\partial t} - f_{old} = 0$

می باشند.

روش مشخصه برای رسیدن به جواب معادلات دیفرانسیل با چندین مشتق کسری

همان طور که در بخش های قبلی گفته شد، روش های متعددی از جمله روش تقارن لی، روش زیر فضای ناوردا، روش های عددی، و بسیاری از روش های دیگر برای رسیدن به جواب یک معادله دیفرانسیل کسری وجود دارد. اما همه روش های ذکر شده تنها دارای یک مشتق کسری از مرتبه α بر روی متغیر زمان هستند. روش مشخصه که در این بخش در مورد آن توضیح داده شده است، علاوه بر مشتق کسری بر روی متغیر زمان، مشتق کسری بر روی دیگر متغیرها نیز اعمال می شود. به عبارتی مشتق کسری چند گانه از مرتبه α ، β و γ برای معادلات دیفرانسیل کسری مورد بحث قرار خواهد گرفت. معادله دیفرانسیل کسری

خطی

$$f(t, x, y) \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + g(t, x, y) \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} + k(t, x, y) \frac{\partial^\gamma u}{\partial y^\gamma} = h(t, x, y). \quad (187.5)$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از بسط تیلور کسری برای سه متغیر x, y و t داریم [۳۸، ۴۶]:

$$du = \frac{\partial^\alpha u(t, x, y)}{\Gamma(1 + \alpha)} (dt)^\alpha + \frac{\partial^\beta u(t, x, y)}{\Gamma(1 + \beta)} (dx)^\beta + \frac{\partial^\gamma u(t, x, y)}{\Gamma(1 + \gamma)} (dy)^\gamma, \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \gamma < 1.$$

9

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = h(t, x, y), \\ \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha) ds} = f(t, x, y), \\ \frac{(dx)^\beta}{\Gamma(1 + \beta) ds} = g(t, x, y), \\ \frac{(dy)^\gamma}{\Gamma(1 + \gamma) ds} = k(t, x, y). \end{cases}$$

در حالت خاص اگر $\alpha = \beta = \gamma = 1$ در نظر بگیریم، در این صورت دستگاه ذکر شده از معادلات دیفرانسیل کسری (۱۸۷.۵) روشی با عنوان روش مشخصه لاگرانژ جیومیتری شناخته می شود [۳۹]. این دستگاه عبارتست از:

$$\frac{(dt)^\alpha}{f(t, x, y)} = \frac{(dx)^\alpha}{g(t, x, y)} = \frac{(dy)^\alpha}{k(t, x, y)} = \frac{\Gamma(1 + \alpha) du}{h(t, x, y)} = \frac{du}{h(t, x, y)}. \quad (188.5)$$

مثال ۱۴.۲.۵. • اگر $f = g = k = 1$ و $h = 0$ در نظر بگیریم، معادله کسری (۱۸۷.۵) به صورت

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^\gamma u}{\partial y^\gamma} = 0. \quad (189.5)$$

با مشخصه

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = 0, \\ \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha) ds} = 1, \\ \frac{(dx)^\beta}{\Gamma(1 + \beta) ds} = 1, \\ \frac{(dy)^\gamma}{\Gamma(1 + \gamma) ds} = 1. \end{cases}$$

را داریم. با انتگرال گیری از طرفین معادلات مشخصه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u = c_1, \\ \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} = s + c_2, \\ \frac{x^\beta}{\Gamma(1 + \beta)} = s + c_3, \\ \frac{y^\gamma}{\Gamma(1 + \gamma)} = s + c_4. \end{cases}$$

که c_1, c_2, c_3, c_4 و اعداد صحیح ثابت و دلخواهی هستند. با حذف پارامتر s می توان به جواب دقیقی از معادله (۱۸۹.۵) به شکل

$$u(t, x, y) = f\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - \frac{x^\beta}{\Gamma(1 + \beta)}, \frac{x^\beta}{\Gamma(1 + \beta)} - \frac{y^\gamma}{\Gamma(1 + \gamma)}\right), \quad (190.5)$$

رسید. به عبارتی $u = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{y^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}$ و $u = \frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} - \frac{y^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}$ ، $u = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}$ جواب هایی از معادله کسری چندگانه (۱۸۹.۵) می باشند.

• با در نظر گرفتن $h(t, x, y) = 0$ و $k(t, x, y) = e^{-dy}$ ، $g(t, x, y) = e^{-ax}$ ، $f(t, x, y) = e^{-bt}$ معادله کسری چند گانه (۱۸۷.۵) را به شکل

$$e^{-bt} \frac{\partial^\alpha u}{dt^\alpha} + e^{-ax} \frac{\partial^\beta u}{dx^\beta} + e^{-dy} \frac{\partial^\gamma u}{dy^\gamma} = 0, \quad (191.5)$$

با دستگاه مشخصه

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= 0 \xrightarrow{f} u = c_1, \\ \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)ds} &= e^{-bt} \rightarrow J_t^\alpha e^{bt} = ds \xrightarrow{f} E_t(\alpha, b) = s + c_2, \\ \frac{(dx)^\beta}{\Gamma(1+\beta)ds} &= e^{-ax} \rightarrow J_x^\beta e^{ax} = ds \xrightarrow{f} E_x(\beta, a) = s + c_3, \\ \frac{(dy)^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)ds} &= e^{-dy} \rightarrow J_y^\gamma e^{dy} = ds \xrightarrow{f} E_y(\gamma, d) = s + c_4. \end{aligned}$$

$E_z(\alpha)$ تابع می تیج- لفلر و J_t^α انتگرال کسری ریمان از مرتبه α نسبت به t می باشد) داریم. اگر $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{\nu}$ را در نظر بگیریم، جواب های معادله کسری (۱۹۱.۵) به صورت

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= b^{-\frac{1}{\nu}} \operatorname{erf}(bt)^{\frac{1}{\nu}} - a^{-\frac{1}{\nu}} e^{ax} \operatorname{erf}(ax)^{\frac{1}{\nu}}, \\ u(t, x, y) &= a^{-\frac{1}{\nu}} \operatorname{erf}(ax)^{\frac{1}{\nu}} - d^{-\frac{1}{\nu}} e^{dy} \operatorname{erf}(dy)^{\frac{1}{\nu}}, \\ u(t, x, y) &= b^{-\frac{1}{\nu}} \operatorname{erf}(bt)^{\frac{1}{\nu}} - d^{-\frac{1}{\nu}} e^{dy} \operatorname{erf}(dy)^{\frac{1}{\nu}}, \end{aligned}$$

خواهند بود.

• با قرار دادن $h(t, x, y) = 0$ و $k(t, x, y) = \ln y$ ، $g(t, x, y) = \ln x$ ، $f(t, x, y) = \ln t$ معادله کسری (۱۸۷.۵) تبدیل به معادله کسری

$$\ln t \frac{\partial^\alpha u}{dt^\alpha} + \ln x \frac{\partial^\beta u}{dx^\beta} + \ln y \frac{\partial^\gamma u}{dy^\gamma} = 0, \quad (192.5)$$

خواهد شد. با حل معادلات مشخصه

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = 0, \\ \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)ds} = \ln t \rightarrow -J_t^\alpha \ln t = ds, \\ \frac{(dx)^\beta}{\Gamma(1+\beta)ds} = \ln x \rightarrow -J_x^\beta \ln x = ds, \\ \frac{(dy)^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)ds} = \ln y \rightarrow -J_y^\gamma \ln y = ds. \end{cases}$$

نتایج و جواب های دقیقی از (۱۹۲.۵) به فرم

$$u(t, x, y) = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} [\ln x - \gamma + \psi(\beta + 1)] - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} [\ln t - \gamma + \psi(\alpha + 1)],$$

$$u(t, x, y) = \frac{y^\gamma}{\Gamma(\gamma + 1)} [\ln y - \gamma + \psi(\gamma + 1)] - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} [\ln x - \gamma + \psi(\beta + 1)],$$

بدست می آیند. (γ ثابت اویلر و ψ تابع دیگاما می باشد [۶۴، ۷۳].)

- با در نظر گرفتن $f(t, x, y) = \csc(bt)$ ، $g(t, x, y) = \csc(ax)$ ، $h(t, x, y) = \csc(dy)$ و $h(t, x, y) = 0$ معادله (۱۸۷.۵) را به شکل

$$\csc(bt) \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \csc(ax) \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} + \csc(dy) \frac{\partial^\nu u}{\partial y^\nu} = 0, \quad (193.5)$$

داریم که

$$u(t, x, y) = f(S_t(\alpha, b) - S_x(\beta, a), S_x(\beta, a) - S_y(\nu, d)),$$

جوابی دقیق برای معادله کسری تبدیل یافته می باشد ^{۲۸}. با قرار دادن $\alpha = \beta = \nu = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{b} [\sin(bt)C(p) - \cos(bt)S(p)] - \frac{\sqrt{2}}{a} [\sin(ax)C(q) - \cos(ax)S(q)],$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{a} [\sin(ax)C(q) - \cos(ax)S(q)] - \frac{\sqrt{2}}{d} [\sin(dy)C(z) - \cos(dy)S(z)],$$

جواب های دقیقی از معادله کسری (۱۹۳.۵) می باشند. $C(z)$ و $S(z)$ انتگرال های فرسنال ^{۲۹} و $p = \sqrt{\frac{2bt}{\pi}}$ ، $q = \sqrt{\frac{2ax}{\pi}}$ ، $z = \sqrt{\frac{2dy}{\pi}}$ هستند [۷۳].

- با در نظر گرفتن عبارات چند جمله ای برای توابع f ، g و h ، معادله کسری را به صورت

$$t^b \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + x^a \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} + y^d \frac{\partial^\nu u}{\partial y^\nu} = 0, \quad (194.5)$$

۲۸

$$S_t(\gamma, a) = \frac{1}{\sqrt{2}} [E_t(\gamma, ia) - E_t(\gamma, -ia)],$$

$$E_t(\gamma, a) = t^\gamma e^{at} \gamma^*(\gamma, at),$$

$$\gamma^*(\gamma, t) = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\gamma + k + 1)}.$$

Fresnel Integrals^{۲۹}

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pi t^2\right) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pi t^2\right) dt.$$

داریم. که بعد از حل معادلات مشخصه می توان به جواب دقیق

$$u = f \left(\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b+\alpha)} t^{\alpha-b} - \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a+\beta)} x^{\beta-a}, \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a+\beta)} x^{\beta-a} - \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(1-d+\nu)} y^{\nu-d} \right),$$

رسید. برای مثال اگر $a = b = d = 1$ و $\alpha = \beta = \nu = \frac{1}{2}$ باشند، در این صورت جواب های

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right), \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right), \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right).$$

در معادله کسری $t \frac{\partial u^{\frac{1}{2}}}{\partial t^{\frac{1}{2}}} + x \frac{\partial u^{\frac{1}{2}}}{\partial x^{\frac{1}{2}}} + y \frac{\partial u^{\frac{1}{2}}}{\partial y^{\frac{1}{2}}} = 0$ صدق می کنند [۴۶].

۳.۵ قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل کسری

اصل بقاء یا همان قوانین پایستگی همانند معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری نیز قابل تعریف و بررسی می باشند. از آنجاییکه هر قانون پایستگی نتیجه وجود یک تقارن در سیستم است و با استفاده از هر قانون پایستگی حاکم بر یک سیستم می توان معادله دیفرانسیل را تا یک مرتبه کاهش داد لذا محاسبه قوانین پایستگی کسری پلی برای رسیدن به جواب های یک معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری خواهند بود.

۱.۳.۵ محاسبه قوانین پایستگی با استفاده از لاگرانژی فرمال

همان طور که می دانیم یکی از محدودیت های رسیدن به انتگرال اولیه وجود یک لاگرانژی غیر فرمال می باشد تا جایی که نمی توان همیشه مولفه های پایستگی را با استفاده از انتگرال اول بدست آورد. بنابراین محققان در تلاش برای محاسبه قوانین پایستگی کسری با استفاده از لاگرانژی فرمال برآمدند. در این بخش با کمک تعریف معادله الحاقی کسری مفاهیم و تعاریف اولیه ای برای رسیدن به ساختار یک قانون پایستگی با استفاده از لاگرانژی فرمال کسری از یک معادله دیفرانسیل کسری را شرح خواهیم داد.

معادله دیفرانسیل

$$F(t, x, u, u_t^\alpha, u_{(1)}, \dots, u_{(n)}) = 0, \quad (195.5)$$

با مشتق کسری α نسبت به زمان را در نظر بگیرید. که

$$\mathcal{L} = vF(t, x, u, u_t^\alpha, u_{(1)}, \dots, u_{(n)}), \quad (196.5)$$

لاگرانژی فرمال و $v = v(t, x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(n)})$ متغیر وابسته جدید برای معادله کسری (۱۹۵.۵) محسوب می شود.

قانون پایستگی برای معادله کسری (۱۹۵.۵) به صورت

$$D_t(C^t) + D_x(C^x) = 0, \quad (197.5)$$

با مولفه های برداری $C = (C^t, C^x)$ تعریف خواهد شد. با تعریف عملگر اویلر-لاگرانژ کسری

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (D_t^{\mu(\alpha)})^* \frac{\partial}{\partial (D_t^{\mu(\alpha)})} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \quad (198.5)$$

می توان معادله الحاقی کسری

$$F^*(t, x, u, u_t^\alpha, v_t^\alpha, u_{(1)}, v_{(1)}, \dots, u_{(n)}, v_{(n)}) := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0, \quad (199.5)$$

را برای معادله کسری (۱۹۵.۵) بدست آورد.
 که $(D_t^{\mu(\alpha)})^*$ عملگر الحاقی برای $D_t^{\mu(\alpha)}$ بوده و تعاریف جداگانه زیر را برای مشتق کسری
 ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو خواهد داشت:

$$({}_\circ D_t^\alpha)^* = (-1)^n {}_t I_T^{n-\alpha} (D_t^n) \equiv {}_t^C D_T^\alpha \quad ({}^C D_t^\alpha)^* = (-1)^n D_t^n ({}_t I_T^{n-\alpha}) \equiv {}_t D_T^\alpha. \quad (200.5)$$

معادله کسری (۱۹۵.۵) خود الحاق غیر خطی به شمار می رود هر گاه معادله الحاقی نظیر آن
 با جایگذاری $v = \varphi(t, x, u, u_{(1)}, \dots) \neq 0$ که $v = \varphi(t, x, u, u_{(1)}, \dots) \neq 0$ ، هم ارز با معادله کسری
 اولیه (۱۹۵.۵) شود. به عبارتی داشته باشیم:

$$F^*|_{v=\varphi} = \lambda(t, x, u, u_{(1)}, \dots) F, \quad (201.5)$$

در صورتی که $\varphi = \varphi(u)$ و $\varphi'(u) \neq 0$ برقرار باشند، معادله کسری (۱۹۵.۵) شبه خود الحاق
 غیر خطی و با شرایط $\varphi = \varphi(t, x, u)$ که $\varphi_u \neq 0$ ، $\varphi_t \neq 0$ و $\varphi_x \neq 0$ معادله کسری (۱۹۵.۵)
 خود الحاق نسبی خواهد بود.

با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل کسری (۱۹۵.۵) با دو متغیر مستقل x, t و یک متغیر
 وابسته $u(x, t)$ ، داریم

$$\bar{X}\mathcal{L} + D_t^\alpha(\xi^\circ)\mathcal{L} + D_x^\alpha(\xi^1)\mathcal{L} = W \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} + D_t(\mathcal{N}^t \mathcal{L}) + D_x(\mathcal{N}^x \mathcal{L}), \quad (202.5)$$

که $\mathcal{N}^t, \mathcal{N}^x$ عملگرهای نوتر، \bar{X} امتداد مولد بی نهایت کوچک X تا مرتبه معادله دیفرانسیل
 کسری و W مشخصه میدان برداری X به فرم

$$W = \eta - \xi^\circ u_t - \xi^1 u_x, \quad (203.5)$$

خواهد بود. \mathcal{L} و $\frac{\delta}{\delta u}$ نیز لاگرانژی فرمال و عملگر اویلر-لاگرانژی هستند که در روابط
 (۱۹۶.۵) و (۱۹۸.۵) تعریف شده اند.

از آنجاییکه سمت چپ تساوی (۲۰۲.۵) و همچنین معادله الحاقی (۱۹۹.۵) عباراتی برابر
 با صفر هستند، داریم

$$D_t(\mathcal{N}^t \mathcal{L}) + D_x(\mathcal{N}^x \mathcal{L}) = 0. \quad (204.5)$$

با مقایسه روابط (۱۹۷.۵) و (۲۰۴.۵)، مولفه های پایستگی

$$C^t = \mathcal{N}^t \mathcal{L}, \quad C^x = \mathcal{N}^x \mathcal{L}. \quad (205.5)$$

برای معادله کسری (۱۹۵.۵) بدست می آیند.

که عملگر نوتر \mathcal{N}^t و \mathcal{N}^x برای مشتق کسری ریمان-لیوویل به صورت

$$\mathcal{N}^t = \xi^\circ \mathcal{I} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k D_t^{\alpha-1-k} (W) D_t^k \frac{\partial}{\partial (D_t^\alpha u)} - (-1)^n J \left(W, D_t^n \frac{\partial}{\partial (D_t^\alpha u)} \right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^x = & W^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial u_x^\alpha} - D_j \left(\frac{\partial}{\partial u_{xj}^\alpha} \right) + D_j D_k \left(\frac{\partial}{\partial u_{xjk}^\alpha} \right) - \dots \right] \\ & + D_j (W^\alpha) \left[\frac{\partial}{\partial u_{xj}^\alpha} - D_k \left(\frac{\partial}{\partial u_{xjk}^\alpha} \right) + \dots \right] + D_j D_k (W^\varphi) \left[\frac{\partial}{\partial u_{xjk}^\alpha} - \dots \right] \end{aligned} \quad (206.5)$$

با انتگرال

$$J(f, g) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(\tau, x)g(\mu, x)}{(\mu-\tau)^{n-\alpha}} d\mu d\tau. \quad (207.5)$$

تعریف می شوند.

مثال ۱.۳.۵. چگونگی رسیدن به قوانین پایستگی معادله دیفرانسیل کسری برگر-استوانه ای (۱۲۲.۵) را با استفاده از روشی که در بالا شرح داده شد، بررسی می کنیم [۴۵]. قبل از هر عملیاتی لازم است لاگرانژی فرمال را برای معادله کسری (۱۲۲.۵) تعیین و مشخص کنیم.

با در نظر گرفتن متغیر وابسته $v = \varphi(t, x)$ ، معادله الحاقی را برای معادله (۱۲۲.۵) به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta w} = & -\frac{a}{x^2} \varphi + (D_t^\alpha)^* \varphi + bw\varphi_x + a \left(\frac{\varphi_x}{x} - \frac{\varphi}{x^2} \right) - a\varphi_{xx} \\ = & \lambda \left[D_t^\alpha w + bw w_x - a \left(\frac{1}{x} w_x + w_{xx} - \frac{w}{x^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (208.5)$$

داریم. با توجه به تساوی (۲۰۸.۵) و دسته بندی معادلات مشخصه، به معادله کسری

$$(D_t^\alpha)^* \varphi - a\varphi_{xx} + \left(bw + \frac{a}{x} \right) \varphi_x - \frac{a}{x^2} \varphi = 0,$$

خواهیم رسید که با فرض $\varphi(t, x) = \rho(x)\theta(t) = c\theta(t)$ (یک عدد ثابت و دلخواه می باشد) داریم:

$$(D_t^\alpha)^* (\theta(t)) = \frac{a}{x^2} \theta(t),$$

از آنجایی که $(D_t^\alpha)^* = {}^c D_T^\alpha$ ، بنابراین ${}^c D_T^\alpha = \frac{a}{x^2} \theta(t)$ و در نتیجه $\theta(t) = E_{\alpha,1} \left(\frac{a}{x^2} t^\alpha \right)$ به صورت

$$\mathcal{L} = vF = cE_{\alpha,1} \left(\frac{ac}{x^2} t^\alpha \right) \left[D_t^\alpha w + bw w_x - a \left(\frac{1}{x} w_x + w_{xx} - \frac{w}{x^2} \right) \right], \quad (209.5)$$

بدست می آید.

• برای تقارن $X_1 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} - \alpha w \frac{\partial}{\partial w}$ با مشخصه $W = -\alpha w - \alpha x w_x - 2t w_t$ مولفه های قانون پایستگی با استفاده از رابطه (۲۰۵.۵) و لاگرانژی فرمال (۲۰۹.۵) به صورت

$$C^t = -cE_{\alpha,1} \left(\frac{2a}{x^2} t^\alpha \right) I_t^{1-\alpha} (\alpha w + \alpha w w_x + 2t w_t)$$

$$+ J_{(t)}^{+1} \left\{ \alpha w + \alpha w w_x + {}_2 t w_t, t^{-1} E_{\alpha, \circ} \left(\frac{{}_2 a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha \right) \right\},$$

(۲۱۱.۵)

$$C^x = - (\alpha w + \alpha w w_x + {}_2 t w_t) \left[c \left(b w - \frac{a}{x} \right) E_{\alpha, 1} \left(\frac{{}_2 a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha \right) - \frac{{}_2 c a^{\frac{1}{\alpha}}}{x^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{{}_2 a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha \right) \right] \\ - ac ({}_2 \alpha w_x + \alpha x w_{xx} + {}_2 t w_{xt}) E_{\alpha, 1} \left(\frac{{}_2 a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha \right). \quad (212.5)$$

بدست می آیند.

• با در نظر گرفتن $W = \frac{a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} - b w_x$ و $X_2 = b \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial w}$ داریم:

$$C^t = c E_{\alpha, 1} \left(\frac{{}_2 a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha \right) I_t^{1-\alpha} \left(\frac{a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} - b w_x \right) - c J_{(t)}^{+1} \left\{ \frac{a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} - b w_x, t^{-1} E_{\alpha, \circ} \left(\frac{{}_2 a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha \right) \right\},$$

$$C^x = \left(\frac{a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} - b w_x \right) \left[c \left(b w - \frac{a}{x} \right) E_{\alpha, 1} \left(\frac{{}_2 a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha \right) - \frac{{}_2 c a^{\frac{1}{\alpha}}}{x^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{{}_2 a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha \right) \right] \\ + ac \left(\frac{{}_2 a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} + b w_{xx} \right) E_{\alpha, 1} \left(\frac{{}_2 a}{x^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha \right).$$

مثال ۲.۳.۵. معادله الحاقی نظیر معادله کسری فوکر-پلانک (۱۳۲.۵) با رابطه

$$F^* = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = (D_t^\alpha)^* v + b D_x(xv) - \frac{1}{\alpha} a^{\frac{1}{\alpha}} D_x^{\frac{1}{\alpha}}(v) - bv. \quad (213.5)$$

در نظر می گیریم [۲۴].

• با در نظر گرفتن متغیر وابسته $v = \varphi(t, x)$ ، خواهیم داشت :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = (D_t^\alpha)^* \varphi + b(\varphi + x \varphi_x) - \frac{1}{\alpha} a^{\frac{1}{\alpha}} \varphi_{xx} - b \varphi \\ = \lambda \left(D_t^\alpha u - b x u_x - b u - \frac{1}{\alpha} a^{\frac{1}{\alpha}} u_{xx} \right). \quad (214.5)$$

با قرار دادن $\varphi(t, x) = \rho(x)\theta(t) = c\theta(t)$ داریم $(D_t^\alpha)^*(\theta(t)) = {}^c D_T^\alpha(\theta(t)) = \circ$ بنابراین $\varphi(t, x) = A$ که A و c اعداد ثابت دلخواهی هستند.

در این حالت لاگرانژی فرمال برای معادله کسری (۱۳۲.۵) به صورت

$$\mathcal{L} = \varphi(t, x) \Delta = A \left(D_t^\alpha u - b x u_x - b u - \frac{1}{\alpha} a^{\frac{1}{\alpha}} u_{xx} \right), \quad (215.5)$$

بدست آمده و می توان مولفه های پایستگی نظیر هر یک از تقارن های X_1, X_2 و X_3 (۱۳۴.۵) را با لاگرانژی فرمال (۲۱۵.۵) بدست آورد.

- با در نظر گرفتن $X_1 = 2ta^2 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha xa^2 \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha ua^2 - ua^2 - abux^2) \frac{\partial}{\partial u}$ و $W = \alpha a^2 u - ua^2 - abux^2 - 2ta^2 u_t - \alpha xa^2 u_x$ قوانین پایستگی را به شکل

$$\begin{aligned} C^t &= A_a I_t^{1-\alpha} (\alpha a^2 u - ua^2 - abux^2 - 2ta^2 u_t - \alpha xa^2 u_x), \\ C^x &= A [u(\alpha b^2 x^3 + a^2 bx + \alpha abx - \alpha a^2 bx) \\ &+ u_x(\alpha a^2 bx^2 + \frac{1}{\alpha} \alpha abx^2 + \frac{1}{\alpha} a^3) + 2a^2 bxtu_t + a^2 tu_{xt} + \frac{1}{\alpha} \alpha a^2 xu_{xx}]. \end{aligned}$$

خواهیم داشت.

- برای $X_2 = a^2 \frac{\partial}{\partial x} - bxu \frac{\partial}{\partial u}$ و $W = -(bxu + a^2 u_x)$ داریم:

$$\begin{aligned} C^t &= -A_a I_t^{1-\alpha} (bxu + a^2 u_x), \\ C^x &= Abx(bxu + a^2 u_x) + \frac{1}{\alpha} aA(bu + a^2 u_{xx} + bxu_x), \quad (216.5) \end{aligned}$$

- مولفه های پایستگی برای تقارن $X_3 = u \frac{\partial}{\partial u}$ با مشخصه $W = u$ نیز به صورت

$$\begin{aligned} C^t &= A_a I_t^{1-\alpha} (u), \\ C^x &= -A \left(bxu + \frac{1}{\alpha} au_x \right). \quad (217.5) \end{aligned}$$

محاسبه می شوند.

• در این حالت با قرار دادن $v = \varphi(t, x, u)$ ، معادله اوایلر-لاگرانژ را به صورت

$$\begin{aligned} (D_t^\alpha)^* \varphi + bx\varphi_x + \varphi_u(bxu_x + u_{xx}) + \varphi_{xx} + 2u_x\varphi_{xu} + u_x^2\varphi_{uu} \\ = \lambda \left(D_t^\alpha u - bxu_x - bu - \frac{1}{\alpha} a^2 u_{xx} \right). \quad (218.5) \end{aligned}$$

خواهیم داشت. با فرض $\varphi(t, x, u) = \varphi_1(t)\varphi_2(x, u)$ و حل معادله مشخصه ی حاصل از

$$\text{رابطه (218.5)، داریم } \varphi(t, x, u) = (ax + b)E_{\alpha,1} \left(\frac{-bx}{ax+b} t^\alpha \right).$$

مولفه های پایستگی برای هر یک از تقارن های X_1, X_2 و X_3 (134.5) با لاگرانژی فرمال

$$\mathcal{L} = \left((ax + b)E_{\alpha,1} \left(\frac{-bx}{ax+b} t^\alpha \right) \right) \left(D_t^\alpha u - bxu_x - bu - \frac{1}{\alpha} a^2 u_{xx} \right), \quad (219.5)$$

در جدول (19.5) محاسبه شده اند.

مثال 3.3.5. معادله کسری $(3 + \alpha)$ - بعدی انتشار با مرتبه $\alpha \in (0, 2)$ از مشتق کسری ریمان لیوویل را در نظر بگیرید.

$$D_t^\alpha u = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z, \quad (220.5)$$

جدول ۱۹.۵: مولفه های پایستگی معادله کسری فوکر-پلانک

W_i	$C^{t,x}$	مولفه های پایستگی معادله کسری (۱۳۲.۵) با $v = \varphi(t, x, u)$
$W_1 = \alpha \check{u} - u \check{a} - \alpha b u \check{x} - \check{\gamma} t \check{a} u_t - \alpha x \check{a} u_x$	C^t	$(ax + b)E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) {}_a I_t^{1-\alpha}(W_1) - J_t\{W_1, (ax + b)t^{-1}E_{\alpha,0}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b})\}$
	C^x	$W_1 \left[-bx(ax + b)E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) + \check{a} E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) + \frac{\check{a}}{\check{\gamma}}(ax + b)D_x(E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b})) \right] + D_x(W_1) \left[\frac{\check{\gamma}}{\check{\gamma}} a(ax + b)E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) \right]$
$W_2 = -(bxu + a \check{u}_x)$	C^t	$(ax + b)E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) {}_a I_t^{1-\alpha}(W_2) - J_t\{W_2, (ax + b)t^{-1}E_{\alpha,0}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b})\}$
	C^x	$W_2 \left[-bx(ax + b)E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) + \check{a} E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) + \frac{\check{a}}{\check{\gamma}}(ax + b)D_x(E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b})) \right] + D_x(W_2) \left[\frac{\check{\gamma}}{\check{\gamma}} a(ax + b)E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) \right]$
$W_3 = u$	C^t	$(ax + b)E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) {}_a I_t^{1-\alpha}(W_3) - J_t\{W_3, (ax + b)t^{-1}E_{\alpha,0}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b})\}$
	C^x	$W_3 \left[-bx(ax + b)E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) + \check{a} E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) + \frac{\check{a}}{\check{\gamma}}(ax + b)D_x(E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b})) \right] + D_x(W_3) \left[\frac{\check{\gamma}}{\check{\gamma}} a(ax + b)E_{\alpha,1}(\frac{-bx t^\alpha}{ax+b}) \right]$

در این مثال چگونگی رسیدن به قوانین پایستگی را برای چهار تعمیم این معادله کسری بررسی می کنیم [۴۸، ۲، ۳، ۸، ۳۲، ۳۳، ۲۰، ۷۳، ۶۹].

برای شروع، معادله انتشار کسری (۲۲۰.۵) را به صورت $u_t = C[U]$ که

$$C[U] = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z,$$

را در نظر می گیریم. چهار تعمیم از این معادله کسری به صورت

$$u_t = I_t^\alpha C[U] = I_t^\alpha [(f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z], \quad (221.5)$$

$$u_t = D_t^{1-\alpha} C[U] = D_t^{1-\alpha} [(f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z], \quad (222.5)$$

$$u_t = C[I_t^\alpha U] = f_u I_t^\alpha u_x^2 + f I_t^\alpha u_{xx} + g_u I_t^\alpha u_y^2 + g I_t^\alpha u_{yy} + h_u I_t^\alpha u_z^2 + h I_t^\alpha u_{zz}, \quad (223.5)$$

$$u_t = C[D_t^{1-\alpha} U] = f_u D_t^{1-\alpha} u_x^2 + f D_t^{1-\alpha} u_{xx} + g_u D_t^{1-\alpha} u_y^2 + g D_t^{1-\alpha} u_{yy} + h_u D_t^{1-\alpha} u_z^2 + h D_t^{1-\alpha} u_{zz}. \quad (224.5)$$

بیان می شود. که I_t^α انتگرال کسری چپ نسبت به زمان از مرتبه α و $D_t^{1-\alpha}$ مشتق کسری چپ نسبت به زمان از مرتبه $1 - \alpha$ می باشند.

از آنجاییکه $D_t^\alpha I_t^\alpha u = u$ ، در این صورت معادله (۲۲۱.۵) را می توان به فرم

$$D_t^{\alpha+1} u = D_t^\alpha u_t = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z. \quad (225.5)$$

بازنویسی کرد.

همچنین با جایگذاری $D_t^{1-\alpha} = I_t^{\alpha-1}$ و $I_t^{\alpha-1} u_t = {}^C D_t^\alpha u$ ، معادله (۲۲۲.۵) به صورت

$${}^C D_t^\alpha u = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z. \quad (226.5)$$

نوشته خواهد شد.

با قرار دادن $v = I_t^\alpha u$ که $(I_t^\alpha u_{xx} = v_{xx}, I_t^\alpha u_x^2 = v_x^2, u_t = D_t^{1+\alpha} v)$ ، معادله (۲۲۳.۵) را به

صورت

$$D_t^{1+\alpha} v = (f(v)v_x)_x + (g(v)v_y)_y + (h(v)v_z)_z,$$

یا به عبارتی با جایگذاری $v = u$ به صورت

$$D_t^{1+\alpha} u = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z, \quad (227.5)$$

داریم.

در انتها با قرار دادن $D_t^{1-\alpha} u = v$ معادله (224.5) به فرم

$$D_t^\alpha u = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z. \quad (228.5)$$

باز نویسی خواهد شد.

معادلات (225.5)، (226.5)، (227.5) و (228.5) چهار تعمیم کسری از معادله انتشار کسری در حالت کلاسیک خود می باشند. که فرم عمومی این چهار معادله کسری را می توان به صورت

$$F(t, x, y, z, D_t^{\mu(\alpha)} u, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}, u_z, u_{zz}) = \quad (229.5)$$

$$D_t^{\mu(\alpha)} u - (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z = 0,$$

داشت.

با استفاده از روش تحلیل تقارن لی که در بخش قبلی به طور مفصل در مورد آن توضیح داده شده است تقارن های معادله کسری (229.5) را در سه حالت زیر بدست می آوریم.

• حالت اول:

اگر $f(u) = g(u) = h(u) = 1$ و $\alpha \in (0, 2)$ در نظر بگیریم، تقارن های معادله کسری

(229.5) را به صورت

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & X_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, & X_6 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_7 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_8 &= t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right), & X_9 &= \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (230.5)$$

داریم.

• حالت دوم:

با در نظر گرفتن $f(u) = g(u) = h(u) = e^u$ و $\alpha \in (0, 2)$ ، هشت مولد بی نهایت کوچک

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & X_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, & X_6 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_7 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, & X_8 &= t \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (231.5)$$

برای معادله کسری (229.5) بدست می آیند.

• حالت سوم:

با قرار دادن $f(u) = g(u) = h(u) = u^A$ و $\alpha \in (0, 2)$ تقارن های بدست آمده برای معادله کسری (۲۲۹.۵) به صورت

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & X_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, & X_6 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, & X_7 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (232.5)$$

می باشند.

اگر

$$C^t = C^t(t, x, y, z, u, \dots), \quad C^x = C^x(t, x, y, z, u, \dots),$$

$$C^y = C^y(t, x, y, z, u, \dots), \quad C^z = C^z(t, x, y, z, u, \dots).$$

مولفه های قانون پایستگی در نظر بگیریم که در اتحاد

$$D_t(C^t) + D_x(C^x) + D_y(C^y) + D_z(C^z) = 0, \quad (233.5)$$

صدق کنند، می توان با تعریف لاگرانژی فرمال

$$\mathcal{L} = v(t, x, y, z) \left[D_t^{\mu(\alpha)}(u) - (f(u)u_x)_x - (g(u)u_y)_y - (h(u)u_z)_z \right], \quad (234.5)$$

که $v(t, x, y, z)$ یک متغیر وابسته جدید می باشد، معادله الحاقی را برای معادله کسری (۲۲۹.۵) به صورت

$$F^* = F^*(t, x, y, z, u, v, D_t^{\mu(\alpha)}u, (D_t^{\mu(\alpha)})^*v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, \dots) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u}, \quad (235.5)$$

با عملگر اویلر-لاگرانژ

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u} &= \frac{\partial}{\partial u} + (D_t^{\mu(\alpha)})^* \frac{\partial}{\partial (D_t^{\mu(\alpha)})} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} - D_y \frac{\partial}{\partial u_y} - D_z \frac{\partial}{\partial u_z} \\ &+ D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + D_z^2 \frac{\partial}{\partial u_{zz}}, \end{aligned} \quad (236.5)$$

تعریف کرد. در این تعریف $(D_t^{\mu(\alpha)})^*$ ، عملگر الحاقی $D_t^{\mu(\alpha)}$ با دو تعریف متفاوت برای مشتق های کسری ریمان-لیوویل و کاپوتو به صورت

$$({}_0 D_t^\alpha)^* = (-1)^n {}_t I_T^{n-\alpha} (D_t^n) \equiv {}_t^C D_T^\alpha, \quad ({}^C D_t^\alpha)^* = (-1)^n D_t^n ({}_t I_T^{n-\alpha}) \equiv {}_t D_T^\alpha. \quad (237.5)$$

می باشد. همچنین با توجه به مشتق کسری ریمان-لیوویل، عملگر الحاقی $(D_t^{\mu(\alpha)})^*$ برای هر یک از معادلات (۲۲۵.۵) تا (۲۲۸.۵) به شکل

• برای معادله (۲۲۵.۵): $(D_t^{\mu(\alpha)})^* \equiv (D_t^{\alpha+1})^* = {}_t D_T^\alpha D_t$

• برای معادله (۲۲۶.۵): $(D_t^{\mu(\alpha)})^* \equiv ({}^C D_t^\alpha)^* = {}_t D_T^\alpha$ ،

• برای معادله (۲۲۷.۵): $(D_t^{\mu(\alpha)})^* \equiv (D_t^{1+\alpha})^* = {}_t^C D_T^{1+\alpha}$ ،

• برای معادله (۲۲۸.۵): $(D_t^{\mu(\alpha)})^* \equiv (D_t^\alpha)^* = {}_t^C D_T^\alpha$.

تعریف می شود که ${}_t I_T^{(n-\alpha)}$ انتگرال کسری راست، ${}_t D_T^\alpha$ و ${}_t^C D_T^\alpha$ مشتق های کسری راست ریمان-لیوویل و کاپوتو از مرتبه α هستند.

با توجه به تعاریف معادله الحاقی (۲۳۵.۵) و لاگرانژی فرمال (۲۳۴.۵)، معادله الحاقی برای معادله کسری انتشار را به صورت

$$F^* = (D_t^{\mu(\alpha)})^* v - f v_{xx} - g v_{yy} - h v_{zz} = 0, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (238.5)$$

خواهیم داشت که با جایگذاری $v = \varphi(t, x, y, z) = \phi(t)\psi(x)\psi(y)\psi(z) \neq 0$ در معادله الحاقی (۲۳۸.۵) داریم:

$$\begin{aligned} & \psi(x)\psi(y)\psi(z)(D_t^{\mu(\alpha)})^*(\phi(t)) \\ & - \phi(t) [f\psi(x)''\psi(y)\psi(z) + g\psi(x)\psi(y)''\psi(z) + h\psi(x)\psi(y)\psi(z)'] = 0, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{cases} f\psi(x)''\psi(y)\psi(z) + g\psi(x)\psi(y)''\psi(z) + h\psi(x)\psi(y)\psi(z)'' = 0 \\ (D_t^{\mu(\alpha)})^*(\phi(t)) = 0. \end{cases} \quad (239.5)$$

از آنجاییکه معادله اول از دستگاه (۲۳۹.۵) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و از مرتبه دو می باشد، با جایگذاری $f = g = h = 1, e^u, u^A$ ، جواب های دقیق این معادله به صورت

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y, z) &= xy(az + b), & \psi_2(x, y, z) &= a_1 a_2 (az + b), \\ \psi_3(x, y, z) &= e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{2}z + d_2 \cos \sqrt{2}z). \end{aligned} \quad (240.5)$$

بدست می آیند.

معادله دوم از دستگاه (۲۳۹.۵) یک معادله کسری بوده و می بایست برای هر یک از معادلات (۲۲۵.۵) تا (۲۲۸.۵) به طور جداگانه مورد بررسی قرار گیرد.

• برای معادله (۲۲۵.۵): با توجه به اتحاد $(D_t^{\alpha+1})^* \phi(t) = {}_t D_T^\alpha(\phi'(t)) = 0$ جواب $\phi(t) = c_1(T-t)^\alpha + c_2$ را برای این معادله خواهیم داشت.

• برای معادله (۲۲۶.۵): با استفاده از اتحاد $({}^C D_t^\alpha)^* \phi(t) = {}_t D_T^\alpha(\phi(t)) = 0$ جوابی از معادله معادله دوم دستگاه (۲۳۹.۵) خواهد بود.

• برای معادله (۲۲۷.۵): با کمک رابطه $(D_t^{1+\alpha})^* \phi(t) = {}^C D_T^{1+\alpha}(\phi(t)) = 0$ که با استفاده از خاصیت لاپلاس مشتق کسری کاپوتو $1 - s^\alpha \phi(s) = L\{ {}^C D_T^\alpha \phi(t) \}$ بدست می آید، می توان به جواب دقیق و کلی $\phi(t) = c_1 t^n + c_2 t^{n-1}$ رسید. که در حالات خاص $0 < \alpha < 1$ و $1 < \alpha < 2$ ، جواب های دقیق $\phi(t) = c_1 t + c_2$ و $\phi(t) = c_1 t^2 + c_2 t$ برای این معادله بدست می آیند.

• برای معادله (۲۲۸.۵): با کمک $(D_t^\alpha)^* \phi(t) = {}^C D_T^\alpha(\phi(t)) = 0$ که با کمک $\phi(t) = c_1 t$ جواب $0 < \alpha < 1$ و $1 < \alpha < 2$ بدست می آید.

اتحاد نوتر را برای متغیرهای مستقل x, y, z ، و t به شکل

$$D_t(\xi^0)\mathcal{I} + D_x(\xi^1)\mathcal{I} + D_y(\xi^2)\mathcal{I} + D_z(\xi^3)\mathcal{I} = \quad (241.5)$$

$$W \frac{\delta}{\delta u} + D_t(\mathcal{N}^t) + D_x(\mathcal{N}^x) + D_y(\mathcal{N}^y) + D_z(\mathcal{N}^z).$$

که \mathcal{I} عملگر همانی و W مشخصه برای مولد X به فرم

$$W = \eta - \xi^0 u_t - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y - \xi^3 u_z,$$

می باشد، در نظر می گیریم. عملگرهای نوتر با روابط

$$\mathcal{N}^x = \xi^1 \mathcal{I} + W \left(\frac{\partial}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \right) + D_x(W) \frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \quad (242.5)$$

$$\mathcal{N}^y = \xi^2 \mathcal{I} + W \left(\frac{\partial}{\partial u_y} - D_y \frac{\partial}{\partial u_{yy}} \right) + D_y(W) \frac{\partial}{\partial u_{yy}}, \quad (243.5)$$

$$\mathcal{N}^z = \xi^3 \mathcal{I} + W \left(\frac{\partial}{\partial u_z} - D_z \frac{\partial}{\partial u_{zz}} \right) + D_z(W) \frac{\partial}{\partial u_{zz}}. \quad (244.5)$$

بدست می آیند و عملگر نوتر \mathcal{N}^t برای مشتق کسری ریمان-لیوویل با اتحاد

$$\mathcal{N}^t = \xi^0 \mathcal{I} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k D_t^{\alpha-1-k}(W) D_t^k \frac{\partial}{\partial (D_t^\alpha u)} - (-1)^n J \left(W, D_t^n \frac{\partial}{\partial (D_t^\alpha u)} \right), \quad (245.5)$$

و برای مشتق کسری کاپوتو با اتحاد

$$\mathcal{N}^t = \xi^0 \mathcal{I} + \sum_{k=0}^{n-1} D_t^k(W) D_T^{\alpha-1-k} \frac{\partial}{\partial (D_t^\alpha u)} - J \left(D_t^n(W), \frac{\partial}{\partial (D_t^\alpha u)} \right), \quad (246.5)$$

که

$$J(f, g) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(\tau, x, y, z) g(\mu, x, y, z)}{(\mu - \tau)^{n-\alpha}} d\mu d\tau. \quad (247.5)$$

قابل محاسبه هستند.

با اثر طرفین رابطه (۲۴۱.۵) بر لاگرانژی فرمال \mathcal{L} ، اتحاد هم ارز با صفر

$$\tilde{X}\mathcal{L} + D_t(\xi^0)\mathcal{L} + D_x(\xi^1)\mathcal{L} + D_y(\xi^2)\mathcal{L} + D_z(\xi^3)\mathcal{L}|_{(2.1)} = 0, \quad (248.5)$$

را خواهیم داشت که به دنبال آن تساوی

$$D_t(\mathcal{N}^t\mathcal{L}) + D_x(\mathcal{N}^x\mathcal{L}) + D_y(\mathcal{N}^y\mathcal{L}) + D_z(\mathcal{N}^z\mathcal{L}) = 0. \quad (249.5)$$

برقرار می شود. با مقایسه روابط (۲۳۳.۵) و (۲۴۹.۵)، مولفه های پایستگی را به صورت

$$C^t = \mathcal{N}^t\mathcal{L}, \quad C^x = \mathcal{N}^x\mathcal{L}, \quad C^y = \mathcal{N}^y\mathcal{L}, \quad C^z = \mathcal{N}^z\mathcal{L}.$$

بدست می آوریم.

شار معادله کسری انتشار برای هر یک از معادلات (۲۲۵.۵)–(۲۲۸.۵) از روابط

$$C^x = W \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} \right) + D_x(W) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}, \quad (250.5)$$

$$C^y = W \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} - D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} \right) + D_y(W) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}}, \quad (251.5)$$

$$C^z = W \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} - D_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} \right) + D_z(W) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}}. \quad (252.5)$$

و

چگالی معادلات کسری (۲۲۵.۵)–(۲۲۸.۵) نیز به ترتیب با استفاده از اتحادهای

$$C^t = D_t^{\alpha-1} D_t(W) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_t^\alpha u_t} - W D_T^{\alpha-1} D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_t^\alpha u_t} + J \left(D_t(W), D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_t^\alpha u_t} \right), \quad (253.5)$$

$$C^t = \sum_{k=0}^{n-1} D_t^k(W) D_T^{\alpha-1-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial ({}^C D_t^\alpha u)} - J \left(D_t^n(W), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial ({}^C D_t^\alpha u)} \right), \quad (254.5)$$

$$C^t = D_t^\alpha(W) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_t^{1+\alpha} u} - D_t^{\alpha-1}(W) D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_t^{1+\alpha} u} - J \left(W, D_t^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_t^{1+\alpha} u} \right), \quad (255.5)$$

$$C^t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k D_t^{\alpha-1-k}(W) D_t^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\alpha u)} - (-1)^n J \left(W, D_t^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_t^\alpha u)} \right). \quad (256.5)$$

قابل محاسبه خواهند بود.

در ادامه قوانین پایستگی هر یک از معادلات کسری (۲۲۷.۵)، (۲۲۶.۵)، (۲۲۵.۵) و

(۲۲۸.۵) را برای حالت های متفاوت $f = g = h = 1$ ، $f = g = h = e^u$ و $f = g = h = u^A$

بدست می آوریم.

• برای معادله (۲۲۵.۵) داریم:

- با در نظر گرفتن $f = g = h = 1$ ، معادله کسری (۲۲۹.۵) را به صورت

$$D_t^{\mu(\alpha)} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0.$$

داریم. پیرو محاسباتی که در بالا انجام دادیم سه تابع متفاوت برای متغیر وابسته v به شکل

$$\begin{aligned} v_1 &= xy(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2), \\ v_2 &= a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2), \\ v_3 &= e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{2}z + d_2 \cos \sqrt{2}z)(c_1(T - t)^\alpha + c_2). \end{aligned}$$

بدست آمده است. مولفه های C^x ، C^y و C^z از قوانین پایستگی را در هر یک از سه حالت فوق در جدول های (۲۰.۵)، (۲۱.۵) و (۲۲.۵) به طور خلاصه آورده ایم.

- با در نظر گرفتن $f = g = h = e^u$ ، معادله (۲۲۹.۵) را به صورت

$$D_t^{\mu(\alpha)} - e^u (u_x^2 + u_{xx} + u_y^2 + u_{yy} + u_z^2 + u_{zz}) = 0.$$

داریم که در حالات $1 \leq i \leq 3$ ، v_i ، شارهای قوانین پایستگی در جداول (۲۳.۵)، (۲۴.۵) و (۲۵.۵) محاسبه شده اند.

- با قرار دادن $f = g = h = u^A$ در معادله (۲۲۹.۵) داریم:

$$D_t^{\mu(\alpha)} + Au^{A-1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) - u^A (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0.$$

که در حالت های $1 \leq i \leq 3$ ، v_i ، مولفه های قوانین پایستگی در جدول های (۲۶.۵)، (۲۷.۵) و (۲۸.۵) آورده شده است [۴۸].

جدول ۲۰.۵: شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = ۱$ و v_1

W	$C^{x,y,z}$	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $(f = g = h = ۱)$
$-u_x$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-u_x + xu_{xx}]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-u_x + yu_{yx}]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-au_x + (az + b)u_{zx}]$
$-u_y$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-u_y + xu_{xy}]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-u_y + yu_{yy}]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-au_y + (az + b)u_{zy}]$
$-u_z$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-u_z + xu_{xz}]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-u_z + yu_{yz}]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-au_z + (az + b)u_{zz}]$
$xu_y - yu_x$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [xu_y - yu_x - x(xu_{xy} - yu_{xx} + u_y)]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [xu_y - yu_x - y(xu_{yy} - yu_{xy} - u_x)]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [a(xu_y - yu_x) - (az + b)(xu_{yz} - yu_{xz})]$
$xu_z - zu_x$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [xu_z - zu_x - x(xu_{xz} - zu_{xx} + u_z)]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [xu_z - zu_x - y(xu_{yz} - zu_{xy})]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [a(xu_z - zu_x) - (az + b)(xu_{zz} - zu_{xz} - u_x)]$
$yu_z - zu_y$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [yu_z - zu_y - x(yu_{xz} - zu_{xy})]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [yu_z - zu_y - y(yu_{yz} - zu_{yy} + u_z)]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [a(yu_z - zu_y) - (az + b)(yu_{zz} - zu_{zy} - u_y)]$
$-u_t$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-u_t + xu_{xt}]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-u_t + yu_{yt}]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-au_t + (az + b)u_{zt}]$
$-tu_t - \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(xu_x + yu_y + zu_z)$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [W + x(tu_{xt} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(u_x + xu_{xx} + yu_{xy} + zu_{xz}))]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [W + y(tu_{yt} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(u_y + xu_{xy} + yu_{yy} + zu_{yz}))]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [W + (az + b)(tu_{zt} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(u_z + xu_{zx} + yu_{zy} + zu_{zz}))]$
u	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [u - xu_x]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [u - yu_y]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [u - (az + b)u_z]$

جدول ۲۱.۵: شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = 1$ و v_2

W	$C^{x,y,z}$	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $(f = g = h = 1)$
$-u_x$	C^x C^y C^z	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) u_{xx}$ $a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) u_{yx}$ $a_1 a_2 (c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-au_x + (az + b)u_{zx}]$
$-u_y$	C^x C^y C^z	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) u_{xy}$ $a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) u_{yy}$ $a_1 a_2 (c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-au_y + (az + b)u_{zy}]$
$-u_z$	C^x C^y C^z	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) u_{xz}$ $a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) u_{yz}$ $a_1 a_2 (c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-au_z + (az + b)u_{zz}]$
$xu_y - yu_x$	C^x C^y C^z	$-a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [xu_{xy} - yu_{xx} + u_y]$ $-a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [xu_{yy} - yu_{xy} - u_x]$ $a_1 a_2 (c_1(T - t)^\alpha + c_2) [a(xu_y - yu_x) - (az + b)(xu_{yz} - yu_{xz})]$
$xu_z - zu_x$	C^x C^y C^z	$-a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [xu_{xz} - zu_{xx} + u_z]$ $-a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [xu_{yz} - zu_{xy}]$ $a_1 a_2 (c_1(T - t)^\alpha + c_2) [a(xu_z - zu_x) - (az + b)(xu_{zz} - zu_{xz} - u_x)]$
$yu_z - zu_y$	C^x C^y C^z	$-a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [yu_{xz} - zu_{xy}]$ $-a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [yu_{yz} - zu_{yy} + u_z]$ $a_1 a_2 (c_1(T - t)^\alpha + c_2) [a(yu_z - zu_y) - (az + b)(yu_{zz} - zu_{zy} - u_y)]$
$-u_t$	C^x C^y C^z	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) u_{xt}$ $a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) u_{yt}$ $a_1 a_2 (c_1(T - t)^\alpha + c_2) [-au_t + (az + b)u_{zt}]$
$-tu_t - \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(xu_x + yu_y + zu_z)$	C^x C^y C^z	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [tu_{xt} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(u_x + xu_{xx} + yu_{xy} + zu_{xz})]$ $a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) [tu_{yt} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(u_y + xu_{xy} + yu_{yy} + zu_{yz})]$ $a_1 a_2 (c_1(T - t)^\alpha + c_2) [aW + (az + b)(tu_{zt} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(u_z + xu_{zx} + yu_{zy} + zu_{zz}))]$
u	C^x C^y C^z	$-a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) u_x$ $-a_1 a_2 (az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2) u_y$ $a_1 a_2 (c_1(T - t)^\alpha + c_2) [au - (az + b)u_z]$

جدول ۲۲.۵: شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = ۱$ و v_3

W	$C^{x,y,z}$	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $(f = g = h = ۱)$
$-u_x$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-u_x + u_{xx}]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-u_x + u_{yy}]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-\sqrt{V}((d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z))u_x + (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)u_{xz}]$
$-u_y$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-u_y + u_{xy}]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-u_y + u_{yy}]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-\sqrt{V}((d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z))u_y + (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)u_{zy}]$
$-u_z$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-u_z + u_{xz}]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-u_z + u_{yz}]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-\sqrt{V}((d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z))u_z + (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)u_{zz}]$
$xu_y - yu_x$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [xu_y - yu_x - (xu_{xy} - yu_{yx} + u_y)]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [xu_y - yu_x - (xu_{xy} - yu_{yx} - u_x)]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [\sqrt{V}((d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z))(xu_y - yu_x) - (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(xu_{yz} - yu_{xz})]$
$xu_z - zu_x$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [xu_z - zu_x - (xu_{xz} - zu_{xz} + u_z)]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [xu_z - zu_x - (xu_{yz} - zu_{zy})]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [\sqrt{V}((d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z))(xu_z - zu_x) - (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(xu_{zz} - zu_{zz} - u_x)]$
$yu_z - zu_y$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [yu_z - zu_y - (yu_{xz} - zu_{xy})]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [yu_z - zu_y - (yu_{yz} - zu_{yy} + u_z)]$
	C^z	$xy(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [\sqrt{V}((d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z))(yu_z - zu_y) - (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(yu_{zz} - zu_{zz} - u_y)]$
$-u_t$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-u_t + u_{xt}]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-u_t + u_{yt}]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [-\sqrt{V}((d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z))u_t + (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)u_{zt}]$
$-tu_t - \frac{\partial}{\partial t}(xu_x + yu_y + zu_z)$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [W + tu_{xt} + \frac{\partial}{\partial t}(xu_x + yu_y + zu_z)]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [W + tu_{yt} + \frac{\partial}{\partial t}(xu_x + yu_y + zu_z)]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [\sqrt{V}((d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z))W + (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(u_{zt} + \frac{\partial}{\partial t}(xu_x + yu_y + zu_z))]$
u	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [u - u_x]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [u - u_y]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2) [\sqrt{V}((d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z))u - (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)u_z]$

جدول ۲۳.۵: شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = e^u$ و v_1

W	$C^{x,y,z}$	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $(f = g = h = e^u)$
$-u_x$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [\Psi_x u_x^2 - u_x + xu_{xx}]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [\Psi_y u_y^2 - u_x + yu_{yx}]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [\Psi_{xy} u_y(az + b) - au_x + (az + b)u_{zx}]$
$-u_y$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [\Psi_x u_x u_y - u_y + xu_{xy}]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [\Psi_y u_y^2 - u_y + yu_{yy}]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [\Psi_z(az + b)u_z - au_y + (az + b)u_{zy}]$
$-u_z$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [\Psi_x u_x - xu_y - u_z + xu_{xz}]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [\Psi_y u_y u_z - u_z + yu_{yz}]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [\Psi_z(az + b)u_z^2 - au_z + (az + b)u_{zz}]$
$xu_y - yu_x$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(\Psi_x - \Psi_x u_x)(xu_y - yu_x) - x(xu_{xy} - yu_{yx} + u_y)]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(\Psi_y - \Psi_y u_y)(xu_y - yu_x) - y(xu_{yy} - yu_{xy} - u_x)]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(a - \Psi_z u_z)(az + b)(xu_y - yu_x) - (az + b)(xu_{yz} - yu_{xz})]$
$xu_z - zu_x$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(\Psi_x - \Psi_x u_x)(xu_z - zu_x) - x(xu_{xz} - zu_{zx} + u_z)]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(\Psi_y - \Psi_y u_y)(xu_z - zu_x) - y(xu_{yz} - zu_{xy})]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(a - \Psi_z u_z)(az + b)(xu_z - zu_x) - (az + b)(xu_{zz} - zu_{xz} - u_x)]$
$yu_z - zu_y$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(\Psi_x - \Psi_x u_x)(yu_z - zu_y) - x(yu_{xz} - zu_{xy})e^u]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(\Psi_y - \Psi_y u_y)(yu_z - zu_y) - y(yu_{yz} - zu_{yy} + u_z)e^u]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(a - \Psi_z u_z)(az + b)(yu_z - zu_y) - (az + b)(yu_{zz} - zu_{zy} - u_y)]$
$-\alpha - tu_t$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(\Psi_x u_x - 1)(\alpha + tu_t) + xtu_{xt}]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(\Psi_y u_y - 1)(\alpha + tu_t) + ytu_{yt}]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [(\Psi_z(az + b)u_z - a)(\alpha + tu_t) + t(az + b)u_{zt}]$
$\Psi - xu_x - yu_y - zu_z$	C^x	$y(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [W(1 - \Psi_x u_x) + x(xu_{xx} + yu_{xy} + zu_{xz} + u_x)]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [W(1 - \Psi_y u_y) + y(xu_{xy} + yu_{yy} + zu_{yz} + u_y)]$
	C^z	$xy(c_1(T - t)^\alpha + c_2)e^u [W(a - \Psi_z(az + b)u_z) + (az + b)(xu_{xz} + yu_{zy} + zu_{zz} + u_z)]$

جدول ۲۴.۵: شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = e^u$ و v

W	$C^{x,y,z}$	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $(f = g = h = e^u)$
$-u_x$	C^x	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon u_x^x + u_{xx}]$
	C^y	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon u_y u_x + u_{yx}]$
	C^z	$a_1 a_T (c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon u_x u_z (az + b) - au_x + (az + b)u_{zx}]$
$-u_y$	C^x	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon u_x u_y + u_{xy}]$
	C^y	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon u_y^y + u_{yy}]$
	C^z	$a_1 a_T (c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon (az + b)u_y u_z - au_y + (az + b)u_{zy}]$
$-u_z$	C^x	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon u_x u_z + u_{xz}]$
	C^y	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon u_y u_z + yu_{yz}]$
	C^z	$a_1 a_T (c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon (az + b)u_z^z - au_z + (az + b)u_{zz}]$
$xu_y - yu_x$	C^x	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [-\Upsilon u_x(xu_y - yu_x) - (xu_{xy} - yu_{xx} + u_y)]$
	C^y	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [-\Upsilon u_y(xu_y - yu_x) - (xu_{yy} - yu_{xy} - u_x)]$
	C^z	$a_1 a_T (c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [(a - \Upsilon u_z(az + b))(xu_y - yu_x) - (az + b)(xu_{yz} - yu_{xz})]$
$xu_z - zu_x$	C^x	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [-\Upsilon u_x(xu_z - zu_x) - (xu_{xz} - zu_{xx} + u_z)]$
	C^y	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [-\Upsilon u_y(xu_z - zu_x) - (xu_{yz} - zu_{xy})]$
	C^z	$a_1 a_T (c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [(a - \Upsilon u_z(az + b))(xu_z - zu_x) - (az + b)(xu_{zz} - zu_{xz} - u_x)]$
$yu_z - zu_y$	C^x	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [-\Upsilon u_x(yu_z - zu_y) - (yu_{xz} - zu_{xy})]$
	C^y	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [-\Upsilon u_y(yu_z - zu_y) - (yu_{yz} - zu_{yy} + u_z)]$
	C^z	$a_1 a_T (c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [(a - \Upsilon u_z(az + b))(yu_z - zu_y) - (az + b)(yu_{zz} - zu_{zy} - u_y)]$
$-\alpha - tu_t$	C^x	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon u_x(\alpha + tu_t) + tu_{xt}]$
	C^y	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon u_y(\alpha + tu_t) + tu_{yt}]$
	C^z	$a_1 a_T (c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [\Upsilon (az + b)u_z - a)(\alpha + tu_t) + t(az + b)u_{zt}]$
$\Upsilon - xu_x - yu_y - zu_z$	C^x	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [-\Upsilon u_x W + xu_{xx} + yu_{xy} + zu_{xz} + u_x]$
	C^y	$a_1 a_T (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [-\Upsilon u_y W + xu_{xy} + yu_{yy} + zu_{yz} + u_y]$
	C^z	$a_1 a_T (c_1(T-t)^\alpha + c_T)e^u [W(a - \Upsilon(az + b)u_z) + (az + b)(xu_{xz} + yu_{zy} + zu_{zz} + u_z)]$

جدول ۲۵.۵: شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = e^u$ و v_3

W	$C^{x,y,z}$	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $(f = g = h = e^u)$
$-u_x$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [\Upsilon u_x^x - u_x + u_{xx}]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [\Upsilon u_y u_x - u_x + u_{yx}]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(\Upsilon u_x u_z + u_{xz}) - \sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)u_x]$
$-u_y$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [\Upsilon u_x u_y - u_y + u_{xy}]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [\Upsilon u_y^2 - u_y + u_{yy}]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(\Upsilon u_y u_z + u_{yz}) - \sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)u_y]$
$-u_z$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [\Upsilon u_x u_z + u_{xz}]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [\Upsilon u_y u_z + u_{yz}]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(\Upsilon u_z^2 + u_{zz}) - \sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)u_z]$
$xu_y - yu_x$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon - \Upsilon u_x)(xu_y - yu_x) - (xu_{xy} - yu_{yx} + u_y)]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon - \Upsilon u_y)(xu_y - yu_x) - (xu_{yy} - yu_{xy} - u_x)]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [\sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)(xu_y - yu_x) - \Upsilon u_z(xu_y - yu_x)(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z) - (xu_{zy} - yu_{xz})]$
$xu_z - zu_x$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon - \Upsilon u_x)(xu_z - zu_x) - (xu_{xz} - zu_{xx} + u_z)]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon - \Upsilon u_y)(xu_z - zu_x) - (xu_{yz} - zu_{xy})]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [\sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)(xu_z - zu_x) + (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)\Upsilon u_z d_2 \cos \sqrt{V}z(xu_z - zu_x) - (xu_{zz} - zu_{zz} - u_z)]$
$yu_z - zu_y$	C^x	$e^{x+y}(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon - \Upsilon u_x)(yu_z - zu_y) - (yu_{xz} - zu_{xy})]$
	C^y	$e^{x+y}(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon - \Upsilon u_y)(yu_z - zu_y) - (yu_{yz} - zu_{yy} + u_z)]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(-\Upsilon u_z(yu_z - zu_y) - (yu_{zz} - zu_{zy} - u_y)) + \sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)(yu_z - zu_y)]$
$-\alpha - tu_t$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon u_x - 1)(\alpha + tu_t) + tu_{xt}]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon u_y - 1)(\alpha + tu_t) + tu_{yt}]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon u_z(\alpha + tu_t) + tu_{zt})(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z) - \sqrt{V}(\alpha + tu_t)(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)]$
$\Upsilon - xu_x$ $-yu_y - zu_z$	C^x	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon - \Upsilon u_x)W + xu_{xx} + yu_{xy} + zu_{xz} + u_x]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(\Upsilon - \Upsilon u_y)W + xu_{xy} + yu_{yy} + zu_{yz} + u_y]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)e^u [(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(xu_{xz} + yu_{zy} + zu_{zz} + u_z - \Upsilon W u_z) + \sqrt{V}W(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)]$

جدول ۲۶.۵: شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = u^A$ و v_1

W	$C^{x,y,z}$	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $(f = g = h = u^A)$
$-u_x$	C^x	$y(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Upsilon A}{u} x u_x^x - u_x + x u_{xx} \right]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Upsilon A}{u} y u_y^y - u_x + y u_{yx} \right]$
	C^z	$xy(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Upsilon A}{u} u_x u_y (az + b) - a u_x + (az + b)u_{xz} \right]$
$-u_y$	C^x	$y(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Upsilon A}{u} x u_x u_y - u_y + x u_{xy} \right]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Upsilon A}{u} y u_y^2 - u_y + y u_{yy} \right]$
	C^z	$xy(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Upsilon A}{u} (az + b)u_y u_z - a u_y + (az + b)u_{zy} \right]$
$-u_z$	C^x	$y(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Upsilon A}{u} x u - x u_y - u_z + x u_{xz} \right]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Upsilon A}{u} y u_y u_z - u_z + y u_{yz} \right]$
	C^z	$xy(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Upsilon A}{u} (az + b)u_z^2 - a u_z + (az + b)u_{zz} \right]$
$xu_y - yu_x$	C^x	$y(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(\Upsilon - \frac{\Upsilon A}{u} x u_x \right) (x u_y - y u_x) - x(x u_{xy} - y u_{yx} + u_y) \right]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(\Upsilon - \frac{\Upsilon A}{u} y u_y \right) (x u_y - y u_x) - y(x u_{yy} - y u_{xy} - u_x) \right]$
	C^z	$xy(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(a - \frac{\Upsilon A}{u} u_z (az + b) \right) (x u_y - y u_x) - (az + b)(x u_{yz} - y u_{xz}) \right]$
$xu_z - zu_x$	C^x	$y(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(\Upsilon - \frac{\Upsilon A}{u} x u_x \right) (x u_z - z u_x) - x(x u_{xz} - z u_{xx} + u_z) \right]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(\Upsilon - \frac{\Upsilon A}{u} y u_y \right) (x u_z - z u_x) - y(x u_{yz} - z u_{xy}) \right]$
	C^z	$xy(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(a - \frac{\Upsilon A}{u} u_z (az + b) \right) (x u_z - z u_x) - (az + b)(x u_{zz} - z u_{xz} - u_z) \right]$
$yu_z - zu_y$	C^x	$y(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(\Upsilon - \frac{\Upsilon A}{u} x u_x \right) (y u_z - z u_y) - x(y u_{xz} - z u_{xy}) \right]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(\Upsilon - \frac{\Upsilon A}{u} y u_y \right) (y u_z - z u_y) - y(y u_{yz} - z u_{yy} + u_z) \right]$
	C^z	$xy(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(a - \frac{\Upsilon A}{u} u_z (az + b) \right) (y u_z - z u_y) - (az + b)(y u_{zz} - z u_{zy} - u_y) \right]$
$-\left(\frac{\Upsilon}{\alpha} u_t + xu_x + yu_y + zu_z\right)$	C^x	$y(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[W \left(\Upsilon - \frac{\Upsilon A}{u} x u_x \right) + x \left(\frac{\Upsilon}{\alpha} u_{xt} + u_x + x u_{xx} + y u_{xy} + z u_{xz} \right) \right]$
	C^y	$x(az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[W \left(\Upsilon - \frac{\Upsilon A}{u} y u_y \right) + y \left(\frac{\Upsilon}{\alpha} u_{yt} + u_y + x u_{xy} + y u_{yy} + z u_{yz} \right) \right]$
	C^z	$xy(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[W \left(a - \frac{\Upsilon A}{u} (az + b)u_z \right) + (az + b) \left(\frac{\Upsilon}{\alpha} u_{zt} + u_z + x u_{xz} + y u_{zy} + z u_{zz} \right) \right]$

جدول ۲۷.۵: شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = u^A$ و v

W	$C^{x,y,z}$	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $(f = g = h = u^A)$
$-u_x$	C^x	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{\gamma^A}{u} u_x^2 + u_{xx} \right]$
	C^y	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{\gamma^A}{u} u_y u_x + u_{yx} \right]$
	C^z	$a_1 a_2 (c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{\gamma^A}{u} u_x u_z (az + b) - au_x + (az + b) u_{zx} \right]$
$-u_y$	C^x	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{\gamma^A}{u} u_x u_y + u_{xy} \right]$
	C^y	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{\gamma^A}{u} u_y^2 + u_{yy} \right]$
	C^z	$a_1 a_2 (c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{\gamma^A}{u} (az + b) u_y u_z - au_y + (az + b) u_{zy} \right]$
$-u_z$	C^x	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{\gamma^A}{u} u_x u_z + u_{xz} \right]$
	C^y	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{\gamma^A}{u} u_y u_z + u_{yz} \right]$
	C^z	$a_1 a_2 (c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{\gamma^A}{u} (az + b) u_z^2 - au_z + (az + b) u_{zz} \right]$
$xu_y - yu_x$	C^x	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) e^u \left[-\gamma u_x (xu_y - yu_x) - (xu_{xy} - yu_{xx} + u_y) \right]$
	C^y	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{-\gamma^A}{u} u_y (xu_y - yu_x) - (xu_{yy} - yu_{xy} - u_x) \right]$
	C^z	$a_1 a_2 (c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\left(a - \frac{\gamma^A}{u} u_z (az + b) \right) (xu_y - yu_x) - (az + b) (xu_{yz} - yu_{xz}) \right]$
$xu_z - zu_x$	C^x	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{-\gamma^A}{u} u_x (xu_z - zu_x) - (xu_{xz} - zu_{xx} + u_z) \right]$
	C^y	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{-\gamma^A}{u} u_y (xu_z - zu_x) - (xu_{yz} - zu_{xy}) \right]$
	C^z	$a_1 a_2 (c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\left(a - \frac{\gamma^A}{u} u_z (az + b) \right) (xu_z - zu_x) - (az + b) (xu_{zz} - zu_{xz} - u_x) \right]$
$yu_z - zu_y$	C^x	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{-\gamma^A}{u} u_x (yu_z - zu_y) - (yu_{xz} - zu_{xy}) \right]$
	C^y	$a_1 a_2 (az + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{-\gamma^A}{u} u_y (yu_z - zu_y) - (yu_{yz} - zu_{yy} + u_z) \right]$
	C^z	$a_1 a_2 (c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\left(a - \frac{\gamma^A}{u} u_z (az + b) \right) (yu_z - zu_y) - (az + b) (yu_{zz} - zu_{zy} - u_y) \right]$
$-\left(\frac{\gamma^A}{u} u_t + xu_x + yu_y + zu_z \right)$	C^x	$a_1 a_2 (c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{-\gamma^A}{u} W u_x + \frac{\gamma^A}{\alpha} u_{xt} + u_x + xu_{xx} + yu_{xy} + zu_{xz} \right]$
	C^y	$a_1 a_2 (c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[\frac{-\gamma^A}{u} W u_y + \frac{\gamma^A}{\alpha} u_{yt} + u_y + xu_{xy} + yu_{yy} + zu_{yz} \right]$
	C^z	$a_1 a_2 (c_1(T-t)^\alpha + c_2) u^A \left[W \left(a - \frac{\gamma^A}{u} (az + b) u_z \right) + (az + b) \left(\frac{\gamma^A}{\alpha} u_{zt} + u_z + xu_{xz} + yu_{zy} + zu_{zz} \right) \right]$

جدول ۲۸.۵: شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $f = g = h = u^A$ و ψ

W	$C^{x,y,z}$	شار معادله کسری (۲۲۵.۵) با $(f = g = h = u^A)$
$-u_x$	C^z	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Sigma_A}{u} u_x^2 - u_x + u_{xz} \right]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Sigma_A}{u} u_y u_x - u_x + u_{yx} \right]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(\Sigma u_x u_z + u_{xz}) - \sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)u_x \right]$
$-u_y$	C^z	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Sigma_A}{u} u_x u_y - u_y + u_{xy} \right]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Sigma_A}{u} u_y^2 - u_y + u_{yy} \right]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(\Sigma u_y u_z + u_{yz}) - \sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)u_y \right]$
$-u_z$	C^z	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Sigma_A}{u} u_x u_z + u_{xz} \right]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\frac{\Sigma_A}{u} u_y u_z + u_{yz} \right]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(\Sigma u_z^2 + u_{zz}) - \sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)u_z \right]$
$xu_y - yu_x$	C^z	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(1 - \frac{\Sigma_A}{u} u_x\right)(xu_y - yu_x) - (xu_{xy} - yu_{xz} + u_y) \right]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(1 - \frac{\Sigma_A}{u} u_y\right)(xu_y - yu_x) - (xu_{yy} - yu_{xy} - u_x) \right]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)(xu_y - yu_x) - \frac{\Sigma_A}{u} u_z(xu_y - yu_x) + (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(xu_{zy} - yu_{xz}) \right]$
$xu_z - zu_x$	C^z	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(1 - \frac{\Sigma_A}{u} u_x\right)(xu_z - zu_x) - (xu_{xz} - zu_{xx} + u_z) \right]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(1 - \frac{\Sigma_A}{u} u_y\right)(xu_z - zu_x) - (xu_{yz} - zu_{xy}) \right]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)(xu_z - zu_x) + (d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)u_z - \frac{\Sigma_A}{u} u_z d_2 \cos \sqrt{V}z(xu_z - zu_x) - (xu_{zz} - zu_{xz} - u_z) \right]$
$yu_z - zu_y$	C^z	$e^{x+y}(a_2 + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(1 - \frac{\Sigma_A}{u} u_x\right)(yu_z - zu_y) - (yu_{xz} - zu_{xy}) \right]$
	C^y	$e^{x+y}(a_2 + b)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(1 - \frac{\Sigma_A}{u} u_y\right)(yu_z - zu_y) - (yu_{yz} - zu_{yy} + u_z) \right]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z) \left(-\frac{\Sigma_A}{u} u_z(yu_z - zu_y) - (yu_{zz} - zu_{zy} - u_y) \right) + \sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z)(yu_z - zu_y) \right]$
$-\left(\frac{\Sigma_A}{u} u_x + xu_z + yu_y + zu_z\right)$	C^z	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(1 - \frac{\Sigma_A}{u} u_x\right)W + \frac{\Sigma_A}{u} u_{xt} + u_x + xu_{xx} + yu_{xy} + zu_{xz} \right]$
	C^y	$e^{x+y}(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[\left(1 - \frac{\Sigma_A}{u} u_y\right)W + \frac{\Sigma_A}{u} u_{yt} + u_y + xu_{xy} + yu_{yy} + zu_{yz} \right]$
	C^z	$e^{x+y}(c_1(T-t)^\alpha + c_2)u^A \left[(d_1 \sin \sqrt{V}z + d_2 \cos \sqrt{V}z) \left(-\frac{\Sigma_A}{u} u_z W + \frac{\Sigma_A}{u} u_{zt} + u_z + xu_{zx} + yu_{zy} + zu_{zz} \right) + \sqrt{V}(d_1 \cos \sqrt{V}z - d_2 \sin \sqrt{V}z) \right]$

• برای معادله (۲۲۶.۵) داریم:

با جایگذاری $\phi(t) = c_1(T-t)^{\alpha-1}$ در هر یک از جدول های (۲۰.۵) تا (۲۸.۵)، مولفه های قوانین پایستگی برای معادله (۲۲۶.۵) بدست می آیند.

• برای معادله (۲۲۷.۵) داریم:

با قرار دادن $\phi(t) = c_1 t + c_2$ و $\phi(t) = c_1 t^2 + c_2 t$ در جدول های (۲۰.۵) تا (۲۸.۵) به شارهای قوانین پایستگی معادله (۲۲۷.۵) خواهیم رسید.

• برای معادله (۲۲۸.۵) داریم:

همانند دو مورد قبلی، مولفه های x, y و z از قوانین پایستگی با جایگذاری $\phi(t)$ با $\phi(t) = c_1$ در حالت $\alpha \in (0, 1)$ و جایگذاری $\phi(t) = c_1 t$ در حالت $\alpha \in (1, 2)$ در جدول های (۲۰.۵) تا (۲۸.۵)، به راحتی بدست می آیند.

از این مرحله به بعد چگالی و یا مولفه t ام قوانین پایستگی را به طور جداگانه برای معادلات (۲۲۵.۵) تا (۲۲۸.۵) محاسبه می کنیم.

برای تمامی موارد چهار حالت کلی

$$S_1 = \{f = g = h = 1, f = g = h = e^u, f = g = h = u^A\},$$

$$S_2 = \{f = g = h = 1\}, \quad S_3 = \{f = g = h = e^u\}, \quad S_4 = \{f = g = h = u^A\}.$$

و $\psi_i(x, y, z) = \{\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z), \psi_3(x, y, z)\}$ که ψ_1, ψ_2 و ψ_3 در (۲۴۰.۵) تعریف شده اند را در نظر می گیریم.

مولفه t - ام قانون پایستگی برای معادله (۲۲۵.۵) با مشخصه های متفاوت W_i در جدول ۲۹.۵ محاسبه شده است.

مولفه t - ام قوانین پایستگی معادلات (۲۲۶.۵)، (۲۲۷.۵) و (۲۲۸.۵) نیز در حالت‌های $0 < \alpha < 1$ و $1 < \alpha < 2$ به ترتیب در جدول های (۳۰.۵) تا (۳۵.۵) به طور خلاصه آورده شده است.

جدول ۲۹.۵: چگالی معادله کسری (۲۲۵.۵)

W_i, S_i	چگالی معادله کسری (۲۲۵.۵)
$-u_x, S_1$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u_x)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1 u_x D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 \frac{pxt}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$-u_y, S_1$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u_y)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1 u_y D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 \frac{pyt}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$-u_z, S_1$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u_z)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1 u_z D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 \frac{pz t}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$xu_y - yu_x, S_1$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(xu_y - yu_x)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1(xu_y - yu_x) D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 \left(x \frac{pyt}{\Gamma(n-\alpha)} - y \frac{pxt}{\Gamma(n-\alpha)} \right) \right]$
$xu_z - zu_x, S_1$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(xu_z - zu_x)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1(xu_z - zu_x) D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 \left(x \frac{pz t}{\Gamma(n-\alpha)} - z \frac{pxt}{\Gamma(n-\alpha)} \right) \right]$
$yu_z - zu_y, S_1$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(yu_z - zu_y)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1(yu_z - zu_y) D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 \left(y \frac{pz t}{\Gamma(n-\alpha)} - z \frac{pyt}{\Gamma(n-\alpha)} \right) \right]$
$-u_t, S_2$	$\psi_i(x, y, z) \left[(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1 u_t D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 I(u_t, (T-t)^{\alpha-1}) \right]$
$[-tu_t - \frac{\alpha}{\Gamma(n-\alpha)}(xu_x + yu_y + zu_z), S_2]$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(W_i)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1 W_i D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 I(u_t + tu_t, (T-t)^{\alpha-1}) + \alpha^\gamma c_1 \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3) \right]$
u, S_2	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1 u D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 I(u_t, (T-t)^{\alpha-1}) \right]$
$-(a + tu_t), S_2$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(a + tu_t)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1(a + tu_t) D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 \left(\frac{pxt}{\Gamma(n-\alpha)} + I(u_t + tu_t, (T-t)^{\alpha-1}) \right) \right]$
$[Y - xu_x - yu_y - zu_z, S_2]$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(W_i)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1 W_i D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3) \right]$
$[-\frac{\gamma t}{\alpha} u_t + xu_x + yu_y + zu_z, S_2]$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(W_i)(c_1(T-t)^\alpha + c_2) + \alpha c_1 W_i D_T^{\alpha-1}(T-t)^{\alpha-1} + \alpha c_1 \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3) + \gamma c_1 I(u_t, (T-t)^{\alpha-1}) \right]$

جدول ۳۰.۵: چگالی معادله کسری (۲۲۶.۵) در حالت $0 < \alpha < 1$

W_i, S_i	چگالی معادله کسری (۲۲۶.۵) در حالت $0 < \alpha < 1$
$-u_x, S_1$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[u_x D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$-u_y, S_1$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[u_y D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - \frac{p_2 t}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$-u_z, S_1$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[u_z D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - \frac{p_3 t}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$xu_y - yu_x, S_1$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[(xu_y - yu_x) D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 - yp_2) \right]$
$xu_z - zu_x, S_1$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[(xu_z - zu_x) D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 - zp_3) \right]$
$yu_z - zu_y, S_1$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[(yu_z - zu_y) D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(yp_2 - zp_3) \right]$
$-u_t, S_2$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[u_t D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - I(u_{tt}, (T-t)^\alpha) \right]$
$[-tu_t - \frac{\alpha}{\Gamma} (xu_x + yu_y + zu_z), S_2]$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[W_i D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha + \frac{\alpha t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3) + I(u_t + tu_{tt}, (T-t)^\alpha) \right]$
u, S_2	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[u D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - I(u_t, (T-t)^\alpha) \right]$
$-(\alpha + tu_t), S_2$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[(\alpha + tu_t) D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)} - I(u_t + tu_{tt}, (T-t)^\alpha) \right]$
$[\Upsilon - xu_x - yu_y - zu_z], S_2$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[W_i D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha + \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3 + p_4) \right]$
$[-(\frac{\Upsilon t}{\alpha} u_t + xu_x + yu_y + zu_z), S_2]$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[W_i D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha + \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3) + I(u_t + tu_{tt}, (T-t)^\alpha) \right]$

جدول ۳۱.۵: چگالی معادله کسری (۲۲۶.۵) در حالت $1 < \alpha < 2$

W_i, S_i	چگالی معادله کسری (۲۲۶.۵) در حالت $1 < \alpha < 2$
$-u_x, S_1$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[u_x D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - u_{xt} D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$-u_y, S_1$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[u_y D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - u_{yt} D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha - \frac{p_2 t}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$-u_z, S_1$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[u_z D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - u_{zt} D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha - \frac{p_3 t}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$xu_y - yu_x, S_1$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[(xu_y - yu_x) D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - (xu_{yt} - yu_{xt}) D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 - yp_2) \right]$
$xu_z - zu_x, S_1$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[(xu_z - zu_x) D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - (xu_{zt} - zu_{xt}) D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 - zp_3) \right]$
$yu_z - zu_y, S_1$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[(yu_z - zu_y) D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - (yu_{zt} - zu_{yt}) D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(yp_2 - zp_3) \right]$
$-u_t, S_2$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[u_t D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha + u_{tt} D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha - I(u_{ttt}, (T-t)^\alpha) \right]$
$[-tu_t - \frac{\alpha}{\Gamma} (xu_x + yu_y + zu_z), S_2]$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[W_i D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - (u_t + tu_{tt}) D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha + \frac{\alpha t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3) + I(u_t + tu_{tt}, (T-t)^\alpha) \right]$
u, S_2	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[u D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha + u_t D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha - I(u_{tt}, (T-t)^\alpha) \right]$
$-(\alpha + tu_t), S_2$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[(\alpha + tu_t) D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha + (u_t + tu_{tt}) D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)} - I(u_t + tu_{tt}, (T-t)^\alpha) \right]$
$[\Upsilon - xu_x - yu_y - zu_z], S_2$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[W_i D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha + \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3 + p_4) \right]$
$[-(\frac{\Upsilon t}{\alpha} u_t + xu_x + yu_y + zu_z), S_2]$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[W_i D_T^{\alpha-1}(T-t)^\alpha - \frac{\Upsilon}{\alpha} (u_t + tu_{tt}) D_T^{\alpha-\Upsilon}(T-t)^\alpha + \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3) + \frac{\Upsilon}{\alpha} I(u_{tt} + tu_{ttt}, (T-t)^\alpha) \right]$

جدول ۳۲.۵: چگالی معادله کسری (۲۲۷.۵) در حالت $0 < \alpha < 1$

W_i, S_i	چگالی معادله کسری (۲۲۷.۵) در حالت $0 < \alpha < 1$
$-u_x, S_1$	$-\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u_x)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(u_x) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-u_y, S_1$	$-\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u_y)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(u_y) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-u_z, S_1$	$-\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u_z)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(u_z) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$xu_y - yu_x, S_1$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(xu_y - yu_x)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(xu_y - yu_x) \right] - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 - yp_1)$
$xu_z - zu_x, S_1$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(xu_z - zu_x)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(xu_z - zu_x) \right] - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 - zp_1)$
$yu_z - zu_y, S_1$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(yu_z - zu_y)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(yu_z - zu_y) \right] - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(yp_1 - zp_1)$
$-u_t, S_2$	$-\psi_i(x, y, z) \left[D_t^{\alpha+1}(u)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^\alpha(u) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$[-tu_t - \frac{\alpha}{\Gamma(n-\alpha)}(xu_x + yu_y + zu_z), S_2]$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(W_i)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(W_i) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
u, S_2	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(u) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-(\alpha + tu_t), S_2$	$-\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(\alpha + tu_t)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(\alpha + tu_t) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$[\Upsilon - xu_x - yu_y - zu_z, S_2]$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(W_i)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(W_i) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$[-(\frac{\Upsilon}{\alpha} u_t + xu_x + yu_y + zu_z), S_2]$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(W_i)(c_1 t + c_2) - c_1 D_t^{\alpha-1}(W_i) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$

جدول ۳۳.۵: چگالی معادله کسری (۲۲۷.۵) در حالت $1 < \alpha < 2$

W_i, S_i	چگالی معادله کسری (۲۲۷.۵) در حالت $1 < \alpha < 2$
$-u_x, S_\gamma$	$-\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u_x)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(u_x) - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$-u_y, S_\gamma$	$-\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u_y)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(u_y) - \frac{p_2 t}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$-u_z, S_\gamma$	$-\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u_z)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(u_z) - \frac{p_3 t}{\Gamma(n-\alpha)} \right]$
$xu_y - yu_x, S_\gamma$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(xu_y - yu_x)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(xu_y - yu_x) - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 - yp_2) \right]$
$xu_z - zu_x, S_\gamma$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(xu_z - zu_x)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(xu_z - zu_x) - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 - zp_3) \right]$
$yu_z - zu_y, S_\gamma$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(yu_z - zu_y)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(yu_z - zu_y) - \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(yp_2 - zp_3) \right]$
$-u_t, S_\gamma$	$-\psi_i(x, y, z) \left[D_t^{\alpha+1}(u)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^\alpha(u) - I(u_t, \gamma c_1) \right]$
$[-tu_t - \frac{\alpha}{\gamma}(xu_x + yu_y + zu_z), S_\gamma]$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(W_i)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(W_i) + \frac{\alpha t}{\gamma \Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3) + I(tu_t, \gamma c_1) \right]$
u, S_γ	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(u)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(u) - I(u, \gamma c_1) \right]$
$-(\alpha + tu_t), S_\gamma$	$-\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(\alpha + tu_t)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(\alpha + tu_t) - I(\alpha + tu_t, \gamma c_1) \right]$
$[\gamma - xu_x - yu_y - zu_z], S_\gamma$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(W_i)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(W_i) + \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3 - \gamma c_1 p_\gamma) \right]$
$[-(\frac{\gamma t}{\alpha} u_t + xu_x + yu_y + zu_z), S_\gamma]$	$\psi_i(x, y, z) \left[D_t^\alpha(W_i)(c_1 t^\gamma + c_2 t) - (\gamma c_1 t + c_2) D_t^{\alpha-1}(W_i) + \frac{t}{\Gamma(n-\alpha)}(xp_1 + yp_2 + zp_3) + \frac{\gamma}{\alpha} I(tu_t, \gamma c_1) \right]$

جدول ۳۴.۵: چگالی معادله کسری (۲۲۸.۵) در حالت $0 < \alpha < 1$

W_i, S_i	چگالی معادله کسری (۲۲۸.۵) در حالت $0 < \alpha < 1$
$-u_x, S_\lambda$	$-c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(u_x) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-u_y, S_\lambda$	$-c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(u_y) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-u_z, S_\lambda$	$-c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(u_z) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$xu_y - yu_x, S_\lambda$	$c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(xu_y - yu_x) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$xu_z - zu_x, S_\lambda$	$c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(xu_z - zu_x) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$yu_z - zu_y, S_\lambda$	$c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(yu_z - zu_y) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-u_t, S_\Upsilon$	$-c_\lambda \psi_i(x, y, z)(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$[-tu_t - \frac{\alpha}{\Upsilon}(xu_x + yu_y + zu_z), S_\Upsilon]$	$-c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(tu_t + \frac{\alpha}{\Upsilon}(xu_x + yu_y + zu_z)) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
u, S_Υ	$c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(u) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-(\alpha + tu_t), S_\Upsilon$	$-c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(\alpha + tu_t) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$[\Upsilon - xu_x - yu_y - zu_z, S_\Upsilon]$	$c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(\Upsilon - xu_x - yu_y - zu_z) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$[-(\frac{\Upsilon t}{\alpha} u_t + xu_x + yu_y + zu_z), S_\Upsilon]$	$-c_\lambda \psi_i(x, y, z) D_t^{\alpha-1}(\frac{\Upsilon t}{\alpha} u_t + xu_x + yu_y + zu_z) + \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$

جدول ۳۵.۵: چگالی معادله کسری (۲۲۸.۵) در حالت $1 < \alpha < 2$

W_i, S_i	چگالی معادله کسری (۲۲۸.۵) در حالت $1 < \alpha < 2$
$-u_x, S_1$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(u_x) - D_t^{\alpha-\gamma}(u_x) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-u_y, S_1$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(u_y) - D_t^{\alpha-\gamma}(u_y) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-u_z, S_1$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(u_z) - D_t^{\alpha-\gamma}(u_z) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$xu_y - yu_x, S_1$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(xu_y - yu_x) - D_t^{\alpha-\gamma}(xu_y - yu_x) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$xu_z - zu_x, S_1$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(xu_z - zu_x) - D_t^{\alpha-\gamma}(xu_z - zu_x) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$yu_z - zu_y, S_1$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(yu_z - zu_y) - D_t^{\alpha-\gamma}(yu_z - zu_y) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-u_t, S_2$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha}(u) - D_t^{\alpha-1}(u) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$[-tu_t - \frac{\alpha}{\gamma}(xu_x + yu_y + zu_z), S_2]$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(W_i) + D_t^{\alpha-\gamma}(W_i) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
u, S_2	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(u) - D_t^{\alpha-\gamma}(u) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$-(\alpha + tu_t), S_2$	$-c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(\alpha + tu_t) - D_t^{\alpha-\gamma}(\alpha + tu_t) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$[\gamma - xu_x - yu_y - zu_z, S_2]$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(W_i) + D_t^{\alpha-\gamma}(W_i) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$
$[-(\frac{\gamma}{\alpha}u_t + xu_x + yu_y + zu_z), S_2]$	$c_1 \psi_i(x, y, z) \left[tD_t^{\alpha-1}(W_i) - D_t^{\alpha-\gamma}(W_i) \right] - \frac{p_1 t}{\Gamma(n-\alpha)}$

۲.۳.۵ تعمیم کسری قضیه نوتر برای محاسبه قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل کسری

انتگرال اول از معادلات اوپلر-لاگرانژ یا قوانین پایستگی، یک ایده قابل توجه برای توصیف پدیده های فیزیکی و رسیدن به مدل های ریاضی می باشد. در این بخش نشان خواهیم داد که ضوابط بی نهایت کوچک برای یک گروه یک پارامتری از تبدیلات، متعلق به یک گروه تقارن وردشی از مسایل وردشی کسری

$$L(w) = \int_a^b \mathcal{L}(t, x, w^{(n)}, {}_a D_t^\alpha, {}_t D_b^\alpha) dt. \quad (257.5)$$

می باشد. این فرایند که یک نسخه از قضیه نوتر است رابطه ای منطقی بین تقارن های وردشی کسری و قوانین پایستگی حاصل از معادلات اوپلر-لاگرانژ ایجاد می کند. در ادامه تعمیمی از قضیه نوتر را برای رسیدن به لاگرانژی غیر فرمال کسری معادله کسری برگر-استوانه ای و (۱۲۲.۵) معادله کسری فوکر-پلانک (۱۳۲.۵) با مشتق کسری ریمان-لیوویل شرح خواهیم داد [۲۴، ۴۵].

قضیه ۴.۳.۵. فرض کنید $L(w)$ در (۲۵۷.۵) بر روی مجموعه ای از توابع $w(t, x)$ دارای

پیوستگی راست و چپ از نوع مشتق کسری ریمان-لیوویل و از مرتبه α و β در بازه $[a, b]$ باشد. همچنین در شرایط مرزی $w(a) = w_a$ و $w(b) = w_b$ صدق کند. در این صورت شرط لازم برای وجود $L(w)$ ، این می باشد که $w(t)$ در معادله اویلر-لاگرانژ

$$E_k(\mathcal{L}) = 0, \quad 1 \leq k \leq q. \quad (258.5)$$

صدق کند. که معادله اویلر-لاگرانژ مرتبه k -ام به صورت

$$E_k = \sum_J (-D)^J \frac{\partial}{\partial w_J^\alpha} + {}_t D_b^\alpha \frac{\partial}{\partial {}_a D_t^\alpha w} + {}_a D_t^\beta \frac{\partial}{\partial {}_t D_b^\beta w}. \quad (259.5)$$

که $J = (j_1, \dots, j_k)$ و $1 \leq j_k \leq p$ ، $1 \leq k \leq q$ ، تعریف می شود [۴۲].

تعریف ۵.۳.۵. یک گروه پیوسته از تبدیلات G که بر روی M عمل می کند یک گروه تقارن وردشی است اگر فقط اگر

$$\text{Pr}^{(\alpha, \beta)} X(\mathcal{L}) + \mathcal{L} \text{Div} \xi = 0. \quad (260.5)$$

برای هر مولد بی نهایت کوچک $X = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^q \eta^j \frac{\partial}{\partial w^j}$ از گروه G برقرار باشد. $\text{Div} \xi$ نمایش دیورژانس کلی از p تایی $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p)$ می باشد.

قضیه ۶.۳.۵. فرض کنید G یک گروه تقارن وردشی برای لاگرانژی غیر فرمال (۲۵۷.۵) و X مولد بی نهایت کوچک از گروه G باشد. p تایی $P = (P_1, P_2, \dots, P_p)$ باشه

$$\text{Div} P = W.E(\mathcal{L}) = \sum_{\nu=1}^q W_\nu E_\nu(\mathcal{L}), \quad (261.5)$$

مولفه های قوانین پایستگی برای معادله اویلر-لاگرانژ $E(\mathcal{L}) = 0$ خواهند بود که $W = (W_1, \dots, W_q)$ و داریم [۴۲]:

$$W_\nu(x, w^{(1)}) = \eta_\nu - \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial w^\nu}{\partial x^i}. \quad (262.5)$$

نتیجه ۷.۳.۵. با استفاده از روابط (۲۶۰.۵) و (۲۶۱.۵) داریم:

$$0 = \text{Pr}^{(\alpha, \beta)} X(\mathcal{L}) + \mathcal{L} \text{Div} \xi = \sum_{\nu=1}^q W_\nu E_\nu(\mathcal{L}) + \text{Div} P, \quad (263.5)$$

بنابراین انتگرال اولیه معادلات اویلر-لاگرانژ یا مولفه های قوانین پایستگی معادلات (۱۹۵.۵) به صورت

$$\text{Div} P = \text{Pr}^{(\alpha, \beta)} X(\mathcal{L}) + \mathcal{L} \text{Div} \xi - W E(\mathcal{L}). \quad (264.5)$$

بدست می آیند.

مثال ۸.۳.۵. در این مثال با بررسی شرط (۲۶۳.۵)، وجود یا عدم وجود چگالی برای معادله کسری فوکر-پلانک (۱۳۲.۵) را همراه با تقارن های X_1 ، X_2 و X_3 (۱۳۴.۵) بررسی می کنیم [۲۴].

• با در نظر گرفتن لاگرانژی غیر فرمال $\mathcal{L} = A \left(D_t^\alpha u - \frac{1}{\Gamma} a^2 u_{xx} - bu - bxu_x \right)$

- برای تقارن $X_1 = 2ta^2 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha xa^2 \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha ua^2 - ua^2 - abux^2) \frac{\partial}{\partial u}$ با مشخصه $W_1 = \alpha a^2 u - \alpha bx^2 u - a^2 u - 2a^2 tu_t - \alpha a^2 xu_x$ داریم:

$$(\text{Pr}^{(\alpha)} X_1)(\mathcal{L}) + \mathcal{L}(D_t(\xi^0) + D_x(\xi^1)) \neq 0$$

لذا شرط (۲۶۳.۵) برای تقارن X_1 برقرار نبوده و با استفاده از روش تعمیم قضیه نوتر چگالی برای معادله کسری (۱۳۲.۵) یافت نمی شود.

- تقارن $X_2 = a^2 \frac{\partial}{\partial x} - bxu \frac{\partial}{\partial u}$ با مشخصه $W_2 = -bxu - a^2 u_x$ نیز به دلیل برقرار نبودن شرط (۲۶۳.۵)

$$(\text{Pr}^{(\alpha)} X_2)(\mathcal{L}) + \mathcal{L}(D_t(\xi^0) + D_x(\xi^1)) = - Abx \left(D_t^\alpha u - \frac{1}{\Gamma} a^2 u_{xx} - bu - bxu_x \right) |_{(\Delta=0)} + Ab^2 xu \neq 0$$

فاقد چگالی با این روش می باشد.

- با فرض $X_3 = u \frac{\partial}{\partial u}$ و مشخصه $W_3 = u$ ، از آنجاییکه شرط

$$(\text{Pr}^{(\alpha)} X_3)(\mathcal{L}) + \mathcal{L}(D_t(\xi^0) + D_x(\xi^1)) = A(D_t^\alpha u - \frac{1}{\Gamma} a^2 u_{xx} - bu - bxu_x) |_{(\Delta=0)} = 0.$$

برقرار می باشد بنابراین چگالی برای معادله کسری فوکر-پلانک به صورت

$$\begin{aligned} C^t &= (\text{Pr}^{(\alpha)} X_3)(\mathcal{L}) + \mathcal{L}(D_t(\xi^0) + D_x(\xi^1)) - WE(\mathcal{L}) \\ &= AD_t^\alpha u - \frac{A}{\Gamma} a^2 u_{xx} - Abu - Abxu_x. \end{aligned} \quad (265.5)$$

بدست می آید.

• با در نظر گرفتن لاگرانژی غیر فرمال

$$\mathcal{L} = (ax + b)E_{\alpha,1} \left(\frac{-bxt^\alpha}{ax + b} \right) \left(D_t^\alpha u - \frac{1}{\Gamma} a^2 u_{xx} - bu - bxu_x \right)$$

و تقارن $X_3 = u \frac{\partial}{\partial u}$ ، شرط (۲۶۳.۵) به صورت

$$(\text{Pr}^{(\alpha)} X_3)(\mathcal{L}) + \mathcal{L}(D_t(\xi^0) + D_x(\xi^1)) = (ax + b)E_{\alpha,1} \left(\frac{-bxt^\alpha}{ax + b} \right) \left(D_t^\alpha u - \frac{1}{\Gamma} a^2 u_{xx} - bu - bxu_x \right) |_{(\Delta=0)} = 0.$$

برقرار می باشد، بنابراین چگالی معادله کسری فوکر-پلانک (۱۳۲.۵) به فرم

$$C^t = WE(\mathcal{L}) = u \left[bx D_x \left((ax + b)E_{\alpha,1} \left(\frac{-bxt^\alpha}{ax + b} \right) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{x^\gamma} a^\gamma D_{xx} \left((ax+b) E_{\alpha,1} \left(\frac{-bxt^\alpha}{ax+b} \right) \right) \\
 & + {}_t D_b^\alpha \left((ax+b) E_{\alpha,1} \left(\frac{-bxt^\alpha}{ax+b} \right) \right). \quad (266.5)
 \end{aligned}$$

محاسبه می شود.

مثال ۹.۳.۵. در این مثال قوانین پایستگی معادله کسری برگر-استوانه ای (۱۲۲.۵) را با استفاده از روش تعمیم کسری قضیه نوتر برای تقارن های X_1 و X_2 بدست می آوریم [۴۵].

• برای تقارن X_1 ، چگالی معادله کسری (۱۲۲.۵) به صورت

$$\begin{aligned}
 C^t = & c E_{\alpha,1} \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right) (\gamma \alpha w_x + \alpha x w_{xx} + \gamma t w_{xt}) \left(\frac{a}{x} - bw \right) \\
 & + a (\gamma \alpha w_{xx} + \alpha x w_{xxx} + \gamma t w_{xt}) - {}_a D_t^\alpha (\alpha w + \gamma t w_t + \alpha x w_x) \\
 & + \gamma t \left(D_t^\alpha D_t^\alpha (w) + b w_t w_x + b w w_{xt} - \frac{a}{x} w_{xt} - a w_{xxt} - \frac{a}{x^\gamma} w_t \right) \\
 & + \alpha x \left({}_a D_t^\alpha (w_x) + b w_x^\gamma + b w w_{xx} - \frac{a}{x} w_{xx} - a w_{xxx} + \frac{\gamma a}{x^\gamma} w \right) \\
 & + (\gamma + \alpha) \left({}_a D_t^\alpha (w) + b w w_x - \frac{a}{x} w_x - a w_{xx} - \frac{a}{x^\gamma} w \right) \\
 & - \left(b w_x \frac{a}{x^\gamma} \right) (\alpha w + \gamma t w_t + \alpha x w_x) \\
 & + \gamma c E_{\alpha,0} \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right) \left[D_t^\alpha w + b w w_x - a \left(\frac{1}{x} w_x + w_{xx} - \frac{w}{x^\gamma} \right) \right] \\
 & - \frac{\gamma a}{x^\gamma} \alpha c x t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}^\gamma \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right) \left[D_t^\alpha w + b w w_x - a \left(\frac{1}{x} w_x + w_{xx} - \frac{w}{x^\gamma} \right) \right] \\
 & + c \left(b w - \frac{a}{x} \right) \frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}^\gamma \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right) (\alpha w + \gamma t w_t + \alpha x w_x) \\
 & - \frac{\gamma \gamma}{x^\gamma} c a^\gamma t^\gamma E_{\alpha,\gamma\alpha+1}^\gamma \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right) (\alpha w + \gamma t w_t + \alpha x w_x) \\
 & + c {}_t D_b^\alpha (E_{\alpha,1} \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right)) (\alpha w + \gamma t w_t + \alpha x w_x). \quad (267.5)
 \end{aligned}$$

بدست آمده است.

• برای تقارن X_2 ، چگالی به فرم

$$\begin{aligned}
 C^t = & c E_{\alpha,1} \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right) \left(\frac{a}{x} - bw \right) \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} + b w_{xx} \right) - a \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} - b w_{xxx} \right) \\
 & + {}_a D_t^\alpha \left(\frac{a}{x^\gamma} - b w_x \right) + b \left({}_a D_t^\alpha (w_x) + b w_x^\gamma + b w w_{xx} - \frac{a}{x} w_{xx} - a w_{xxx} + \frac{\gamma a}{x^\gamma} w \right) \\
 & + \left(\frac{a^\gamma}{x^\gamma} - b^\gamma w_x^\gamma \right) - b c \frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}^\gamma \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right) \left[D_t^\alpha w + b w w_x - a \left(\frac{1}{x} w_x + w_{xx} - \frac{w}{x^\gamma} \right) \right] \\
 & - c \frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}^\gamma \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right) \left(b w - \frac{a}{x} \right) \left(\frac{a}{x^\gamma} - b w_x \right) \\
 & + c \left(\frac{a}{x^\gamma} - b w_x \right) \left(\frac{\gamma \gamma}{x^\gamma} a^\gamma t^\gamma E_{\alpha,\gamma\alpha+1}^\gamma \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right) - {}_t D_b^\alpha (E_{\alpha,1} \left(\frac{\gamma a}{x^\gamma} t^\alpha \right)) \right). \quad (268.5)
 \end{aligned}$$

محاسبه می شود.

۴.۵ تحلیل روش لی و قوانین پایستگی برای دستگاهی از معادلات دیفرانسیل کسری

در این بخش با استفاده از روش تحلیل تقارن لی، تقارن‌ها و قوانین پایستگی را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری سوپر-کی دی وی^{۳۰} ارائه می‌کنیم. در علم ریاضیات معادلات کورتوگ-دی وریس^{۳۱} یک مدل ریاضی از امواج بر روی سطوح آب‌های کم عمق می‌باشند. معادلات کی دی وی توسط بوزینیسک^{۳۲} و گاستاو دی وریس^{۳۳} به ریاضیات معرفی شدند. اخیراً روش‌های متعدد و جالبی از جمله روش لاپلاس و تبدیلات فوریه [۱۷، ۷۳]، روش تجزیه آدامین [۳۴، ۶۶]، روش تکرار وردشی [۱۰، ۷۶]، روش سری‌های توانی و بسیاری روش‌های دیگر برای بررسی معادلات دیفرانسیل کسری ارائه شده است. هدف اصلی از این بخش بررسی تقارنی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری مانند دستگاه سوپر-کی دی وی

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = \epsilon w u_x - u_{xxx} + \mathfrak{z} w w_{xx}, \\ D_t^\alpha w = \mathfrak{z} w u_x + \epsilon w w_x - \mathfrak{f} w_{xxx}. \end{cases} \quad (269.5)$$

که در آن D_t^α مشتق کسری نسبت به t از مرتبه α و $0 < \alpha < 1$ است، می‌باشد [۵۳]. گروه لی یک پارامتری از تبدیلات بی‌نهایت کوچک برای دستگاه (۲۶۹.۵) به صورت

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow t + \epsilon \tau(t, x, u, w), & x &\longrightarrow x + \epsilon \xi(t, x, u, w), \\ u &\longrightarrow u + \epsilon \eta(t, x, u, w), & w &\longrightarrow w + \epsilon \phi(t, x, u, w), \\ u_x &\longrightarrow u_x + \epsilon \eta^x(t, x, u, w), & w_x &\longrightarrow w_x + \epsilon \phi^x(t, x, u, w), \\ u_{xx} &\longrightarrow u_{xx} + \epsilon \eta^{xx}(t, x, u, w), & w_{xx} &\longrightarrow w_{xx} + \epsilon \phi^{xx}(t, x, u, w), \\ u_{xxx} &\longrightarrow u_{xxx} + \epsilon \eta^{xxx}(t, x, u, w), & w_{xxx} &\longrightarrow w_{xxx} + \epsilon \phi^{xxx}(t, x, u, w), \\ \partial_t^\alpha u &\longrightarrow \partial_t^\alpha u + \epsilon \eta^{\alpha, t}(t, x, u, w), & \partial_t^\alpha w &\longrightarrow \partial_t^\alpha w + \epsilon \phi^{\alpha, t}(t, x, u, w). \end{aligned}$$

با پارامتر بسیار کوچک گروه $\epsilon \ll 1$ در نظر بگیرید [۲۱، ۲۲]. مولد بی‌نهایت کوچک گروه برای دستگاه (۲۶۹.۵) به فرم

$$X = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \phi \frac{\partial}{\partial w}. \quad (270.5)$$

با امتداد مرتبه سوم

$$\text{Pr}^{(\alpha, \mathfrak{z})} X = X + \eta^{\alpha, t} \partial_{\partial_t^\alpha u} + \phi^{\alpha, t} \partial_{\partial_t^\alpha w} + \eta^x \partial_{u_x} + \eta^{xx} \partial_{u_{xx}}$$

Super Kdv^{۳۰}

Kortweg – de Vries (KdV)^{۳۱}

Boussinesq^{۳۲}

Gustav de Vries^{۳۳}

$$+ \eta^{xxx} \partial_{u_{xxx}} + \phi^x \partial_{w_x} + \phi^{xx} \partial_{w_{xx}} + \phi^{xxx} \partial_{w_{xxx}},$$

تعریف می شود. با اعمال شرط ناوردایی بی نهایت کوچک

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{(\alpha, \mathfrak{V})} X(\Delta_1) |_{\{\Delta_1=\circ, \Delta_2=\circ\}} &= \circ, & \Delta_1 &= D_t^\alpha u - \mathfrak{F} u u_x + u_{xxx} - \mathfrak{V} w w_{xx}, \\ \text{Pr}^{(\alpha, \mathfrak{V})} X(\Delta_2) |_{\{\Delta_1=\circ, \Delta_2=\circ\}} &= \circ, & \Delta_2 &= D_t^\alpha w - \mathfrak{V} w u_x - \mathfrak{F} u w_x + \mathfrak{F} w_{xxx}. \end{aligned}$$

به دستگاهی از معادلات مشخصه به فرم

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha, t} - \mathfrak{F} \eta u_x - \mathfrak{F} u \eta^x + \eta^{xxx} - \mathfrak{V} \phi w_{xx} - \mathfrak{V} w \phi^{xx} &= \circ, \\ \phi^{\alpha, t} - \mathfrak{V} w \eta^x - \mathfrak{V} \phi u_x - \mathfrak{F} \eta w_x - \mathfrak{F} u \phi^x - \mathfrak{F} \phi^{xxx} &= \circ, \end{aligned} \quad (271.5)$$

که

$$\begin{aligned} \eta^x &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi), \\ \phi^x &= D_x(\phi) - w_t D_x(\phi) - w_x D_x(\xi), \\ \eta^{xx} &= D_x(\eta^x) - u_{xt} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi), \\ \phi^{xx} &= D_x(\phi^x) - w_{xt} D_x(\phi) - w_{xx} D_x(\xi), \\ \eta^{xxx} &= D_x(\eta^{xx}) - u_{xxt} D_x(\tau) - u_{xxx} D_x(\xi), \\ \phi^{xxx} &= D_x(\phi^{xx}) - w_{xxt} D_x(\phi) - w_{xxx} D_x(\xi), \\ \eta^{\alpha, t} &= D_t^\alpha(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \xi D_t^\alpha(u_x) + \tau D_t^\alpha(u_t), \\ \phi^{\alpha, t} &= D_t^\alpha(\phi - \xi w_x - \tau w_t) + \xi D_t^\alpha(w_x) + \tau D_t^\alpha(w_t). \end{aligned} \quad (272.5)$$

خواهیم رسید. با حل این دستگاه، ضرایب تابعی τ, ξ, η ، و ϕ به صورت

$$\xi = \mathfrak{V} c_1 \alpha + \alpha_2, \quad \tau = \mathfrak{F} c_1 t + \alpha_3, \quad \eta = -\mathfrak{F} c_1 \alpha u, \quad \phi = -\mathfrak{V} c_1 \alpha w. \quad (273.5)$$

برای ما مشخص می شوند. با اعمال شرط ناوردایی $\tau(t, x, u, w)|_{t=\circ} = \circ$ برای معادلات کسری، که یک شرط لازم برای تبدیلات بی نهایت کوچک کسری می باشد، دو تقارن

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \mathfrak{F} t \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{V} \alpha x \frac{\partial}{\partial x} - \mathfrak{F} \alpha u \frac{\partial}{\partial u} - \mathfrak{V} \alpha w \frac{\partial}{\partial w}. \quad (274.5)$$

برای دستگاه کسری (269.5) بدست می آیند.

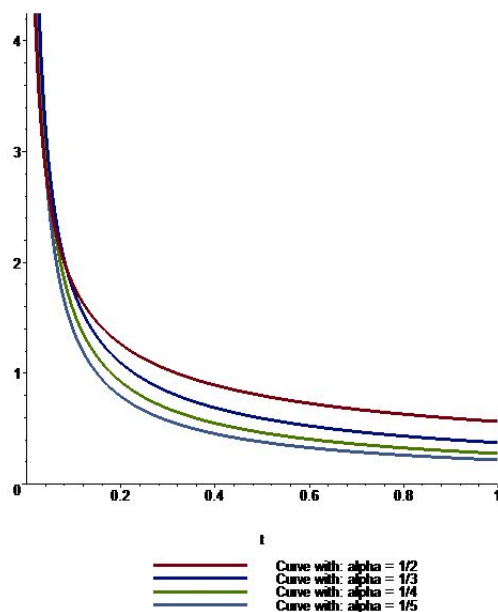
۱.۴.۵ کاهش مرتبه و جواب های دقیق دستگاه کسری (269.5)

با توجه به اینکه دو تقارن X_1 و X_2 برای دستگاه کسری (269.5) بدست آمده است، می توان تحت هر یک از این تقارن ها دستگاه را کاهش داد و یا جواب های دقیقی برای آن پیدا کرد [53].

• با در نظر گرفتن $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ، جواب های $u = f(t)$ و $w = g(t)$ از دستگاه مشخصه نظیر این تقارن به صورت $\frac{dx}{\gamma} = \frac{dt}{\delta} = \frac{du}{\epsilon} = \frac{dw}{\zeta}$ می باشند. با جایگذاری جواب های بدست آمده در دستگاه کسری (۲۶۹.۵)، جواب دقیق برای دستگاه کسری (۲۶۹.۵) به فرم

$$u = f(t) = \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, \quad w = g(t) = \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1},$$

بدست می آید. c_i , $i = 1, 2$ اعداد ثابت و دلخواه هستند).
 منحنی از جواب بدست آمده در شکل (۵.۵) رسم شده است.



شکل ۵.۵: شکلی از تابع $u = c_1 t^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha)$ با $c_1 = 1$

• با حل

$$\frac{dt}{\delta} = \frac{dx}{\gamma} = \frac{du}{\epsilon} = \frac{dw}{\zeta}$$

که دستگاه مشخصه نظیر تقارن X_2 می باشد، تبدیلات

$$u = t^{-\frac{\gamma}{\delta}\alpha} g(z), \quad w = t^{-\frac{\zeta}{\delta}\alpha} h(z), \quad z = xt^{-\frac{\alpha}{\delta}}$$

بدست می آیند. با جایگذاری روابط

$$\begin{aligned} u_x &= t^{-\alpha} g_z, & u_{xx} &= t^{-\frac{\gamma}{\delta}\alpha} g_{zz}, & u_{xxx} &= t^{-\frac{\delta}{\delta}\alpha} g_{zzz}, \\ w_x &= t^{-\frac{\zeta}{\delta}\alpha} h_z, & w_{xx} &= t^{-\frac{\gamma}{\delta}\alpha} h_{zz}, & w_{xxx} &= t^{-\frac{\gamma}{\delta}\alpha} h_{zzz}, \end{aligned}$$

در طرف راست تساوی های دستگاه کسری (۲۶۹.۵)، دستگاه کاهش یافته را به صورت

$$\delta u u_x - u_{xxx} + \zeta w w_x \equiv t^{-\frac{\delta}{\delta}\alpha} (\delta g g_z - g_{zzz} + \zeta h h_{zz}),$$

$$\mathfrak{V}wu_x - \mathfrak{F}w_{xxx} + \mathfrak{E}uw_x \equiv t^{-\frac{\nu}{\alpha}} (\mathfrak{V}hg_z + \mathfrak{E}gh_z - \mathfrak{F}h_{zzz}).$$

خواهیم داشت.

از طرفی بنا به تعریف مشتق ریمان-لیوویل

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(s,x) ds \right].$$

با جایگذاری $s = \frac{t}{\nu}$ که $ds = -\frac{t}{\nu^\alpha} d\nu$, $1 < \nu < \infty$ در طرف چپ معادله اول از دستگاه (۲۶۹.۵)، معادله اول از دستگاه کسری به شکل

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^\infty t^{n-\frac{\nu}{\alpha}} (\nu-1)^{n-\alpha-1} \nu^{-(n+1-\frac{\nu}{\alpha})} g(z\nu^{\frac{\alpha}{\nu}}) d\nu \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} t^{n-\frac{\nu}{\alpha}} \left(K_{\frac{\nu}{\alpha}}^{1, n-\frac{\nu}{\alpha}} g \right) (z) = t^{-\frac{\nu}{\alpha}} \left(P_{\frac{\nu}{\alpha}}^{1-\frac{\nu}{\alpha}, \alpha} g \right) (z) \end{aligned}$$

کاهش می یابد.

با همین روند و جایگذاری $w = t^{-\frac{\alpha}{\nu}} h(z)$ در معادله دوم از دستگاه کسری (۲۶۹.۵)، سمت چپ معادله دوم از دستگاه به فرم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} w(s,x) ds \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^\infty t^{n-\frac{\nu}{\alpha}} (\nu-1)^{n-\alpha-1} \nu^{-(n+1-\frac{\nu}{\alpha})} h(z\nu^{\frac{\alpha}{\nu}}) d\nu \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} t^{n-\frac{\nu}{\alpha}} \left(K_{\frac{\nu}{\alpha}}^{1, n-\frac{\nu}{\alpha}} h \right) (z) = t^{-\frac{\nu}{\alpha}} \left(P_{\frac{\nu}{\alpha}}^{1-\frac{\nu}{\alpha}, \alpha} h \right) (z). \end{aligned}$$

قابل تبدیل خواهد بود.

بنابراین فرم کاهش یافته دستگاه کسری (۲۶۹.۵) به شکل

$$\begin{cases} (P_{\frac{\nu}{\alpha}}^{1-\frac{\nu}{\alpha}, \alpha} g)(z) = \mathfrak{E}gg_z - g_{zzz} + \mathfrak{V}hh_{zz} \\ (P_{\frac{\nu}{\alpha}}^{1-\frac{\nu}{\alpha}, \alpha} h)(z) = \mathfrak{V}hg_z + \mathfrak{E}gh_z - \mathfrak{F}h_{zzz} \end{cases}$$

می باشد.

۲.۴.۵ قوانین پایستگی از یک دستگاه کسری

فرض کنیم $C^t = C^t(t, x)$ و $C^x = C^x(t, x)$ مولفه های پایستگی باشند که در شرط

$$D_t(C^t) + D_x(C^x) = 0.$$

صدق می کنند. لاگرانژی فرمال برای دستگاه کسری (۲۶۹.۵)، به صورت

$$\mathcal{L} = v_1(t, x) (D_t^\alpha u - \mathfrak{E}uu_x + u_{xxx} - \mathfrak{V}ww_{xx})$$

$$+ v_2(t, x) (D_t^\alpha w - 3wu_x - 6uw_x + 4w_{xxx}). \quad (275.5)$$

نوشته می شود که v_1 و v_2 متغیرهای وابسته جدید هستند [۵۳].
عملگر اویلر-لاگرانژ نسبت به U نیز به شکل

$$\frac{\delta}{\delta U} = \frac{\partial}{\partial U} + (D_t^\alpha)^* \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha U} - D_x \frac{\partial}{\partial U_x} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial U_{xx}} - D_x^3 \frac{\partial}{\partial U_{xxx}}, \quad U = \{u, w\}, \quad (276.5)$$

تعریف می شود. $(D_t^\alpha)^*$ عملگر الحاقی مشتق کسری ریمان-لیوویل (D_t^α) با خاصیت

$$({}_\circ D_t^\alpha)^* = (-1)^n {}_t I_T^{n-\alpha} (D_t^n) \equiv {}_t^c D_T^\alpha,$$

$(\circ D_t^\alpha)^*$ مشتق ریمان-لیوویل چپ و ${}_t^c D_T^\alpha$ مشتق کاپوتو راست از مرتبه α هستند.
معادلات الحاقی برای دستگاه غیر خطی و کسری (۲۶۹.۵)، مشابه معادلات الحاقی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تعریف می شود.

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta w} = 0. \quad (277.5)$$

عملگر اویلر-لاگرانژی است که در رابطه (۲۷۶.۵) آمده است.
دستگاه الحاقی برای دستگاه کسری (۲۶۹.۵) به صورت

$$\begin{cases} -(D_t^\alpha)^* v_1 + 6v_1 u_x + 6v_2 w_x - 6v_1 u_x - 6uv_1 x - 3v_2 w_x - 3wv_2 x + v_1 x_{xxx} = 0, \\ -(D_t^\alpha)^* v_2 + 3v_1 w_{xx} + 3v_2 u_x - 6v_2 u_x - 6uv_2 x + 3v_1 w_{xx} + 6v_1 x w_x + 3v_1 x x w + 4v_2 x_{xxx} = 0. \end{cases}$$

بدست می آید.

مشابه دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی برای دو متغیر مستقل t و x و دو متغیر وابسته $u(t, x)$ و $w(t, x)$ داریم:

$$D_t(\tau)\mathcal{I} + D_x(\xi)\mathcal{I} = W^j \frac{\delta}{\delta U} + D_t(\mathcal{N}_j^t) + D_x(\mathcal{N}_j^x), \quad W^j = \{W^1, W^2\}, \quad U = \{u, w\} \quad (278.5)$$

که $W^1 = \eta - \xi u_x - \tau u_t$ و $W^2 = \phi - \xi w_x - \tau w_t$ توابع مشخصه لی و \mathcal{N}_1^t ، \mathcal{N}_1^x ، \mathcal{N}_2^x و \mathcal{N}_2^t عملگرهای نوتر با تعاریف

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1^x = \xi \mathcal{I} &+ W^1 \left(\frac{\partial}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \right) \\ &+ D_x(W^1) \left(\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - D_x \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \right) + D_x^2(W^1) \frac{\partial}{\partial u_{xxx}}, \end{aligned} \quad (279.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2^x = \xi \mathcal{I} &+ W^2 \left(\frac{\partial}{\partial w_x} - D_x \frac{\partial}{\partial w_{xx}} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial w_{xxx}} \right) \\ &+ D_x(W^2) \left(\frac{\partial}{\partial w_{xx}} - D_x \frac{\partial}{\partial w_{xxx}} \right) + D_x^2(W^2) \frac{\partial}{\partial w_{xxx}}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_1^t = \tau \mathcal{I} + D_t^{\alpha-1}(W^1) \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u} - (-1)^n J \left(W^1, D_t \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u} \right), \quad (280.5)$$

$$\mathcal{N}_t^t = \tau \mathcal{I} + D_t^{\alpha-1}(W^\gamma) \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha w} - (-1)^n J \left(W^\gamma, D_t \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha w} \right),$$

که در آن

$$J(f, g) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(\tau, x)g(\mu, x)}{(\mu-\tau)^{n-\alpha}} d\mu d\tau. \quad (281.5)$$

می باشد، هستند.

با اثر طرفین رابطه (278.5) بر روی لاگرانژی فرمال \mathcal{L} ، هر دو تقارن X_1 و X_2 از دستگاه کسری (269.5) در رابطه

$$\text{Pr}^{(\gamma, \alpha)} X \mathcal{L} + D_t(\tau) \mathcal{L} + D_x(\xi) \mathcal{L} |_{t=0} = 0, \quad (282.5)$$

صدق می کنند. بنابراین از رابطه

$$D_t(\mathcal{N}_j^t \mathcal{L}) + D_x(\mathcal{N}_j^x \mathcal{L}) = D_t(C_j^t) + D_x(C_j^x) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (283.5)$$

که در آن $C^t = C_1^t + C_2^t$ و $C^x = C_1^x + C_2^x$ ، می توان مولفه های قوانین پایستگی را برای دستگاه کسری (269.5) بدست آورد.

• با در نظر گرفتن $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ و مشخصه های $W^1 = -u_x$ و $W^2 = -w_x$ ، شار و چگالی برای دستگاه کسری (269.5) به صورت

$$\begin{aligned} C^x &= \mathcal{F} v_1 u u_x + \mathcal{V} v_2 w u_x - v_{1xx} u_x + v_{1x} u_{xx} - v_1 u_{xxx} + \mathcal{F} v_2 u w_x \\ &- \mathcal{V} v_1 w_x^2 - \mathcal{V} v_{1x} w w_x - \mathcal{F} v_{1xx} w_x + \mathcal{V} v_1 w w_{xx} + \mathcal{F} v_{2x} w_{xx} - \mathcal{F} v_{2xx} w_{xx} \end{aligned}$$

$$C^t = - \left[v_1 D_t^{\alpha-1}(u_x) + v_2 D_t^{\alpha-1}(w_x) + J(u_x, v_{1t}) + J(w_x, v_{2t}) \right].$$

خواهند بود.

• با قرار دادن $X_2 = \mathcal{F} t \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V} \alpha x \frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{F} \alpha u \frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{V} \alpha w \frac{\partial}{\partial w}$ و مشخصه های

$$W^1 = -(\mathcal{F} \alpha u + \mathcal{V} \alpha x u_x + \mathcal{F} t u_t), \quad W^2 = -(\mathcal{V} \alpha w + \mathcal{V} \alpha x w_x + \mathcal{F} t w_t).$$

مولفه های قوانین پایستگی به فرم

$$\begin{aligned} C^x &= (\mathcal{F} \alpha u + \mathcal{V} \alpha x u_x + \mathcal{F} t u_t)(\mathcal{F} u v_1 + \mathcal{V} w v_2 - v_{1xx}) \\ &+ v_{1x}(\mathcal{F} \alpha u_x + \mathcal{V} \alpha x u_{xx} + \mathcal{F} t u_{xt}) - v_1(\mathcal{F} \alpha u_{xx} + \mathcal{V} \alpha x u_{xxx} + \mathcal{F} t u_{xxt}) \\ &+ (\mathcal{V} \alpha w + \mathcal{V} \alpha x w_x + \mathcal{F} t w_t)(\mathcal{F} u v_2 - \mathcal{V} v_1 w_x - \mathcal{V} v_{1x} w - \mathcal{F} v_{2xx}) \\ &- (\mathcal{F} \alpha w_x + \mathcal{V} \alpha x w_{xx} + \mathcal{F} t w_{xt})(\mathcal{V} w v_1 + \mathcal{F} v_{2x}) \\ &+ \mathcal{F} v_2(\mathcal{F} \alpha w_{xx} + \mathcal{V} \alpha x w_{xxx} + \mathcal{F} t w_{xxt}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^t &= - \left[D_t^{\alpha-1}(\mathcal{F} \alpha u + \mathcal{V} \alpha x u_x + \mathcal{F} t u_t) v_1 + D_t^{\alpha-1}(\mathcal{V} \alpha w + \mathcal{V} \alpha x w_x + \mathcal{F} t w_t) v_2 \right] \\ &- J(\mathcal{F} \alpha u + \mathcal{V} \alpha x u_x + \mathcal{F} t u_t, v_{1t}) - J(\mathcal{V} \alpha w + \mathcal{V} \alpha x w_x + \mathcal{F} t w_t, v_{2t}). \end{aligned}$$

محاسبه می شوند.

۵.۵ یادداشت

در این رساله سعی شده است ابتدا با توضیحات مختصری از مقدماتی مانند نحوه محاسبه تقارن و کاربردهای آن، هر چه بیشتر موضوعاتی که طی این دوره از دکتری مطالعه شده است، پرداخته شود. مباحثی همچون محاسبه تقارن و قوانین پایستگی تقریبی برای یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل تقریبی و نوشتن کد محاسباتی آن در میپل [۵۴]، محاسبه تقارن ها و قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل کسری بالاخص بقاهای کسری به روش تعمیم نوتر برای دو معادله کسری برگر - استوانه ای و فوکر- پلانک [۲۴، ۴۵]، یافتن چهار تعمیم از معادله کسری انتشار $(\alpha + 3)$ - بعدی و رسیدن به تقارن ها و بقاهای کسری برای هر یک از چهار تعمیم [۴۸]، (لازم به ذکر است که تمامی روند محاسبات با کمک محاسبات کسری برای مشتقات کسری ریمان- لیوویل و مشتق کسری کاپوتو و تبدیلات لاپلاس برای این مشتقات صورت پذیرفته است و از آنجایی که هنوز در اکثر مواقع کدهای محاسباتی برای معادلات دیفرانسیل کسری تعریف نشده است، تمامی محاسبات به صورت دستی و خاص معادله انتشار انجام شده است. البته امید است دانشجویان دکتری در سال های آتی با نوشتن چنین کدهای محاسباتی روند محاسبات را آسانتر سازند.) و پیدا کردن جواب های جدید از سری جواب های قدیمی بدست آمده به روش های دیگر برای هر دو دسته از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل کسری [۵۶، ۵۸]، تنها گوشه ای از مطالعاتی می باشند که تحقیق بر روی آن ها به سرانجام رسیده است. اما از آنجایی که در این دوره دو ساله بعد از پیشنهاد رساله مجالی کم در اختیار بود تحقیقاتی مانند محاسبه تقارن و قوانین پایستگی برای معادلات دیفرانسیل تقریبی با مرتبه کسری، محاسبه تقارن و بقاء برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری گرانوالد، کوبر و ...، استفاده از روش مستقیم برای محاسبه قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل کسری، یافتن تقارن های معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری چند گانه α ، β و γ ، نیمه کاره مانده است و امید است که در مقاطع بعدی و سالهای آینده این اهداف سر لوحه قرار گیرند و نتایج ارزشمندی وارد دریای بی کران علم هندسه دیفرانسیل شود.

فصل ۶

محاسبات نرم افزاری

مطالعی که در این رساله از پیش رو گذشت در برخی از موارد حجم بالایی از محاسبات را می‌طلبید این محاسبات اگر با دست انجام شود در بسیاری از موارد بسیار وقت گیر بوده و زمان زیادی را صرف خواهد کرد و از طرفی احتمال خطای انسانی بسیار زیاد خواهد بود. لذا استفاده از بسته‌ها و کدهای محاسباتی بسیار ضروری است. در ذیل به تعدادی از این بسته‌ها و کدهای مفید که در طی رساله و مقالات نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند اشاره خواهیم کرد

۱.۶ پکیج‌های مورد نیاز

کدهای محاسباتی از جمله عمل انتگرال و مشتق‌گیری از عبارات طولانی، دستور براکت‌لی برای محاسبه میدان برداری جدید تولید شده توسط دو میدان برداری، عمل امتداد تقارن، حل معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای و رسم شکل برای جواب‌های بدست آمده، کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای و بدست آوردن ناوردها و رسیدن به جواب‌های صریح با استفاده از این ناوردهای بدست آمده، بدست آوردن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

تقریبی و بالاخص کسری تنها گوشه ای از دنیای محاسباتی میپل^۱ و متلب^۲ و ممتیکا^۳ می باشد که بررسی مقالات و رسیدن به نتایج را برای نویسندگان آسان کرده است.

۱.۱.۶ براکت لی

در فصل اول تعریف و خواص براکت لی به طور مفصل توضیح داده شد. در اینجا دستور محاسبه میدان برداری جدید $[X[i], X[j]]$ که توسط دو میدان برداری $X[i]$ و $X[j]$ تولید می شود را با کمک نرم افزار میپل آورده ایم.

به طور مثال اگر میدان های برداری $X[۱] = \frac{\partial}{\partial x}$ ، $X[۲] = \frac{\partial}{\partial y}$ ، $X[۳] = \frac{\partial}{\partial t}$ ، $X[۴] = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ ، $X[۵] = t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}$ ، $X[۶] = t \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial t}$ و $X[۷] = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t}$ مفروض باشند جدول براکت لی آنها با دستور

```
> with(PDETools) :
> with(DifferentialGeometry) :
> with(Tools) :
> with(LieAlgebras) :
> DGsetup([t, x, y, u], M);
> X[۱] := evalDG(Dx);
> X[۲] := evalDG(Dy);
> X[۳] := evalDG(Dt);
> X[۴] := evalDG(-y * Dx + x * Dy);
> X[۵] := evalDG(t * Dx + x * Dt);
> X[۶] := evalDG(t * Dy + y * Dt);
> X[۷] := evalDG(x * Dx + t * Dt + y * Dy);
> Gamma := evalDG([X[۱], X[۲], X[۳], X[۴], X[۵], X[۶], X[۷]]);
> L۱ := LieAlgebraData(Gamma, Alg۱);
> DGsetup(L۱, verbose);
> MultiplicationTable();
> MultiplicationTable("LieTable");
```

بدست می آید.

۲.۱.۶ امتداد تقارن ها

یکی از مهمترین مراحل رسیدن به تقارن های یک معادله دیفرانسیل، امتداد آنها به اندازه مرتبه معادله دیفرانسیل می باشد. در دستور زیر امتداد سه تقارن $S[۱] = \frac{\partial}{\partial x}$ ، $S[۲] = x \frac{\partial}{\partial x}$ و $S[۳] = x^۲ \frac{\partial}{\partial x}$ تا مرتبه اول و دوم محاسبه شده است.

```

> with(PDEtools) :
> S[۱] := [۱, ۰];
> S[۲] := [x, ۰];
> S[۳] := [(x^۲), ۰];
> G[۴] := InfinitesimalGenerator(S[۱], u(x), prolongation = ۱, expanded);
> G[۵] := InfinitesimalGenerator(S[۲], u(x), prolongation = ۱, expanded);
> G[۶] := InfinitesimalGenerator(S[۳], u(x), prolongation = ۱, expanded);
> G[۷] := InfinitesimalGenerator(S[۱], u(x), prolongation = ۲, expanded);
> G[۸] := InfinitesimalGenerator(S[۲], u(x), prolongation = ۲, expanded);
> G[۹] := InfinitesimalGenerator(S[۳], u(x), prolongation = ۲, expanded);

```

۳.۱.۶ حل معادلات دیفرانسیل معمولی

حل یک معادله دیفرانسیل معمولی مانند معادله $u = ۲xu_x(1 + \sqrt{x})$ با دستور زیر انجام می شود.

```

> ode := ۲ * x * diff(u(x), x) * (۱ + sqrt(x)) = u(x);
> dsolve(ode);

```

۴.۱.۶ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

جواب های یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مانند معادله $u_t - \frac{a}{x}u_x + au_{xx} = ۰$ با دستور زیر بدست می آیند.

```

> pde := diff(u(t, x), t) - (a/x) * diff(u(t, x), x) + a * diff(u(t, x), x, x);
> pdsolve(pde);

```

۵.۱.۶ نحوه محاسبه تقارن ها

تقارن های یک معادله دیفرانسیل با برنامه فوق قابل محاسبه هستند. به طور مثال در برنامه زیر تقارن های معادله دیفرانسیل $u_t - u_{xxx} - uu_x = ۰$ بدست می آیند.

```

> with(PDEtools);

```

```

> declare(u(x,t));
> U := diff_table(u(x,t));
> PDE := U[t] - U[x,x,x] - U[] * U[x];
> DetSys := DeterminingPDE(PDE);
> pdsolve(DetSys);

```

۶.۱.۶ نحوه محاسبه تقارن ها برای دستگاه معادلات دیفرانسیل

با دستوری مشابه دستور بالا تقارن های یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل محاسبه خواهند شد. دستورات زیر تقارن های دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$f(x) = \begin{cases} u_t + u_x - v = 0 \\ v_t - v_x - u = 0 \end{cases}$$

را محاسبه می کند.

```

> with(PDEtools) :
> declare((u,v)(x,t), (xi,eta)(x,t,u,v));
> DepVars := [u,v](x,t);
> U,V := diff_table(u(x,t)), diff_table(v(x,t));
> eq1 := U[t] + U[x] - V[] = 0;
> eq2 := V[t] - V[x] - U[] = 0;
> PDESYS := [eq1, eq2];
> DetSys := DeterminingPDE(PDESYS);
> pdsolve(DetSys);
> G := Infinitesimals(PDESYS);

```

۷.۱.۶ جواب های گروه-ناوردا

اگر یک تقارن از یک عمل گروه یا یک معادله دیفرانسیل در اختیار داشته باشیم با کمک دستورات زیر می توان جواب های گروه-ناوردا تحت آن تقارن را بدست آورد. همچنین با امتداد تقارن به مراتب بالاتر جواب های گروه-ناوردا دیگری نیز برای عمل گروه یا معادله دیفرانسیل مذکور محاسبه می شوند.

در دستور زیر جواب های گروه-ناوردا برای تقارن $S[\lambda] = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}$ و امتداد آن بدست آمده است.

```

> with(PDEtools) :
> S[\lambda] := [-u, x];
> pde[\lambda] := -u * diff(H(x, u), x) + x * diff(H(x, u), u);
> pdsolve(pde[\lambda]);
> G := InfinitesimalGenerator(S[\lambda], u(x), prolongation = \lambda, expanded);

> pde[\lambda^2] := -u * diff(H(x, u, u[x]), x) + x * diff(H(x, u, u[x]), u)
+ (u[x]^2 + \lambda) * diff(H(x, u, u[x]), u[x]);

> pdsolve(pde[\lambda^2]);

```

۸.۱.۶ محاسبه تبدیلات ناوردا

تبدیلات ناوردای تقارن های $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ و $X_2 = \frac{\partial}{\partial t}$ و $X_3 = t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}$ با دستورات زیر به راحتی قابل محاسبه هستند.

```

> with(PDEtools, InvariantTransformation, ChangeSymmetry);
> with(SimilarityTransformation, InfinitesimalGenerator);
> S := [_xi[\lambda] = \lambda, _xi[\lambda^2] = 0, _eta[\lambda] = 0];
> InvariantTransformation(S, u(x, t), v(r, s));
> ITR, TR := SimilarityTransformation(S, u(x, t), v(r, s));
> S := [_xi[\lambda] = 0, _xi[\lambda^2] = \lambda, _eta[\lambda] = 0];
> InvariantTransformation(S, u(x, t), v(r, s));
> ITR, TR := SimilarityTransformation(S, u(x, t), v(r, s));
> S := [_xi[\lambda] = t, _xi[\lambda^2] = x, _eta[\lambda] = 0];
> InvariantTransformation(S, u(x, t), v(r, s));
> ITR, TR := SimilarityTransformation(S, u(x, t), v(r, s));

```

۹.۱.۶ کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل تحت ناوردای مورد نظر

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$(\lambda - u_t^2)u_{xx} + 2u_x u_t u_{xt} - (\lambda - u_x^2)u_{tt} = 0$$

با کمک سه ناوردای $S1$ و $S2$ و $S3$ توسط برنامه زیر به معادله دیفرانسیل با مرتبه پایین تر کاهش می یابد.

> with(PDEtools);

```
> PDE := (\lambda - diff(u(x,t),t)^2) * diff(u(x,t),x,x)
+ 2 * diff(u(x,t),x) * diff(u(x,t),t) * diff(u(x,t),x,t)
- (\lambda - diff(u(x,t),x)^2) * diff(u(x,t),t,t) = 0;
```

> tr := {t = r, u(x,t) = v(r), x = s};

> S1 := dchange(tr, PDE) :

> simplify(S1);

> tr := {u(x,t) = v(r), x = r, t = s};

> S2 := dchange(tr, PDE) :

> simplify(S2);

> tr := {t = 1/2 * (exp(s)^2 + r)/exp(s), x = 1/2 * (-r + exp(s)^2)/exp(s), u(x,t) = v(r)};

> S3 := dchange(tr, PDE) :

> simplify(S3);

۱۰.۱.۶ رسم شکل با کمک میپل

یکی از مهمترین و کاربردی ترین ابزارها در برنامه های نرم افزاری رسم توابع مختلف در بازه تعریف شده می باشد. برنامه فوق رسم چند تابع که در طول پایان نامه از آن استفاده شده است را نشان می دهد.

> with(plots) :

```
> animate3d(arctanh(sqrt((y^2 + x^2 - t^2)/(x^2))),
x = 1 * Pi..3 * Pi, y = 1 * Pi..4 * Pi, t = 2 * Pi..4 * Pi,
axes = boxed, axis[1,2] = [mode = log], coords = spherical);
```

```
> plot3d(t^2 + x^2, t = -2..2, x = -2..2, grid = [100, 100]);

> plot3d(sin(x) * x, x = -2 * Pi..2 * Pi, y = -1..1,
axes = boxed, axis[1, 2] = [mode = log], title = "SinenGraph");

> animate3d(cos(t * x) * sin(t * y), x = -Pi..Pi, y = -Pi..Pi, t = 1..2);
```

۱۱.۱.۶ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از تقارن داده شده

با استفاده از این برنامه جواب های معادله موج به صورت $u_{tt} - u_{yy} = 0$ تحت تقارن $S[1] = u \frac{\partial}{\partial u}$ بدست می آیند. دستورات $G[1]$ و $G[2]$ نیز برای بدست آوردن جواب ها تا مرتبه دلخواه تعریف شده می باشد بدین صورت که اگر یک معادله دیفرانسیل مرتبه سه داشته باشیم می توان با دستور $G[2]$ جواب هایی از مرتبه دو تحت تقارن مورد نظر بدست آوریم.

```
> with(PDEtools) :
> S[1] := [0, 0, u];
> Pde := diff(U(t, y), t, t) - diff(U(t, y), y, y);
> pdsolve(pde);
> G[1] := InfinitesimalGenerator(S[1], u(y, t), prolongation = 1, expanded);

> pde[1] := u * diff(H(y, t, u, u^1, v^1), u)
+ v^1 * diff(H(y, t, u, u^1, v^1), v^1) + u^1 * diff(H(y, t, u, u^1, v^1), u^1);

> pdsolve(pde[1]);
> G[2] := InfinitesimalGenerator(S[1], u(y, t), prolongation = 2, expanded);
```

۱۲.۱.۶ مشتق گیری و انتگرال گیری از عبارات جبری

با دستور ساده زیر به راحتی می توان از عبارات جبری همچون $u = \log((y - t)/(y + t))$ و $u = \frac{1}{\sqrt{(y^2 + y)}}$ مشتق و انتگرال نسبت به متغیر مستقل مورد نظر گرفت.

```
> p[1] := diff(log((y - t)/(y + t)), y);
> simplify(p[1]);
> p[2] := int(1/sqrt(y^2 + y), y);
> simplify(p[2]);
```

۱۳.۱.۶ تبدیل لاپلاس و معکوس لاپلاس از عبارات جبری

با فراخوانی پکیج *with(MTM)* می توان از هر عبارت جبری تبدیل لاپلاس و یا معکوس این تبدیل را انجام داد. در دستورات زیر تبدیل لاپلاس تابع $t \sin(t)$ و معکوس لاپلاس تابع $\frac{1}{(s-A^2)*(A+s^{(1/2)})}$ اجرا شده است.

```
> with(MTM) :
> laplace(t sin(t));
> ilaplace(1/(-A^2 + s) * (A + s^(1/2)));
```

۱۴.۱.۶ تقارن های معادلات دیفرانسیل تقریبی

با فراخوانی پکیج های *with(DifferentialGeometry)* و *with(Tools)* و *with(JetCalculus)* و اجرای دستورات زیر می توان تقارن های یک معادله دیفرانسیل تقریبی مانند

$$u_{tt} - 2uu_t^2 - u^2u_{xx} + \varepsilon u_t = 0$$

را بدست آورد.

```
> with(DifferentialGeometry) :
> with(Tools) :
> with(JetCalculus);
> DGsetup([x, t], [u], M, 2);
> eq := u[2, 2] - 2 * u[] * (u[1])^2 - u[]^2 * u[1, 1];
> v := evalDG(xi^o(x, t, u[]) * D_x + phi^o(x, t, u[]) * D_t + eta^o(x, t, u[]) * D_u[]);
> v2 := Prolong(v, 2);
> EQ := LieDerivative(v2, eq);
> solve(eq, u[2, 2]);
> subs(u[2, 2] = %, EQ) :
> EQ := expand(%);
> coeffs(EQ, u[1, 1]) :
> map(coeffs, %, u[1, 2]) :
> map(coeffs, %, u[2]) :
> sys := map(coeffs, %, u[1]);
> sol := pdsolve(sys);
```



```

> w := evalDG(((C3 + C4) * x + C2) * Dx + (C3 * t + C1) * Dt
+ (u[] * (C4)) * Du[]);

> w2 := Prolong(w, 2);
> eq := u[2, 2] - 2 * u[] * (u[1])2 - u[]2 * u[1, 1] + epsilon * u[2];
> H := 1/epsilon * (LieDerivative(w2, eq));
> solve(eq, u[2, 2]);
> subs(u[2, 2] = %, H) :
> H := expand(%);
> H := A 2 * u[2];
> v := evalDG(xi\ (x, t, u[]) * Dx + phi\ (x, t, u[]) * Dt + eta\ (x, t, u[]) * Du[]);
> v2 := Prolong(v, 2);
> eq := u[2, 2] - 2 * u[] * (u[1])2 - u[]2 * u[1, 1];
> EQ := LieDerivative(v2, eq);
> solve(eq, u[2, 2]);
> subs(u[2, 2] = %, EQ) :
> EQ := expand(%) + H;
> coeffs(EQ, u[1, 1]) :
> map(coeffs, %, u[1, 2]) :
> map(coeffs, %, u[2]) :
> sys := map(coeffs, %, u[1]);
> sol := pdsolve(sys);

```

۱۵.۱.۶ پیدا کردن عامل انتگرال

قبل از محاسبه شار و چگالی یک معادله دیفرانسیل لازم است که ابتدا عامل انتگرال یا همان ضرایب λ برای معادله دیفرانسیل مذکور محاسبه شود. با کد دستوری ذیل علاوه بر محاسبه این ضرایب می توان مشخص کرد که این ضرایب از مرتبه صفر، یک، دو و یا ... باشند.

```

> with(PDEtools) :
> U := diff_table(u(x, t)) :
> declare(U[]);
> pde[1] := U[t] - U[x, x] = 0;
> Euler(pde[1]);
> ConservedCurrents(pde[1]);

```

```

> IntegratingFactors(pde[λ]);
> IntegratingFactors(pde[λ], type = polynomial, split = false);
> IntegratingFactors(pde[λ], _mu = f(U[x], U[t]));
> J[alpha] := ConservedCurrents(pde[λ], _J = f(U[x], U[t]));
> IntegratingFactors(pde[λ], _mu = f(x, U[], U[x], U[t, t]));
> J[alpha] := ConservedCurrents(pde[λ], _J = f(x, U[], U[x], U[t, t]));

```

۱۶.۱.۶ پیدا کردن قوانین پایستگی به روش مستقیم

همان طور که در بخش دوم آورده شد برای رسیدن به قوانین پایستگی یک معادله دیفرانسیل به روش مستقیم ابتدا لازم است که ضریب λ که تا خود مرتبه معادله هم می تواند تعریف شود، پیدا شود. سپس با تاثیر عملگر اوایلر لاگرانژ بر $\lambda(PDE)$ به مولفه های قانون پایستگی خواهیم رسید.

```

> with(DifferentialGeometry) : with(Tools) : with(JetCalculus) :
> DGsetup([x, t], [u], M, Ξ) : PDE := u[Ξ] - u[λ, λ];
> DE := DifferentialEquationData([PDE], [u[Ξ]]):
> DE\ := Prolong(DE, Ξ) :
> iota := Transformation(DE\):
> alias(Lambda = Lambda(x, t, u[])) :
> EulerLagrange(Lambda * PDE) : op(/):
> Pullback(iota, /): expand(/):
> sys := coeffs(/, [u[λ], u[λ, λ], u[λ, λ, λ]]);
> λ := pdsolve(sys);
> alias(P\ = P\ (x, u[], u[λ], u[λ, λ])) : alias(PΞ = PΞ (x, u[], u[λ], u[λ, λ])) :
> TotalDiff(P\, x) + TotalDiff(PΞ, t) - (λ) * PDE :
> coeffs(/, [u[λ, Ξ], u[Ξ, Ξ], u[λ, λ, λ], u[λ, λ, Ξ], u[λ, Ξ, Ξ], u[Ξ, Ξ, Ξ]);
> pdsolve(/);

```

۱۷.۱.۶ معادله الحاقی

در محاسبه قوانین پایستگی روش ابراکیموف لازم بود بررسی شود که آیا معادله مورد نظر یک معادله الحاقی می باشد یا خیر؟ برنامه فوق علاوه بر یافتن معادله الحاقی نشان می دهد که اگر حاصل عبارت آخر برنامه صفر شود در این صورت معادله مورد نظر یک معادله اکیدا

خود الحاق خواهد بود.

```

> with(DifferentialGeometry) :
> with(JetCalculus) :
> with(Tools) :
> DGsetup([x, t], [u, U], J, 5);
> EQ := u[2] - u[1, 1];
> R := U[2] - U[1, 1];
> D1 := S -> TotalDiff(S, x);
> D2 := S -> TotalDiff(S, t);

> EULER := S -> diff(S, U[]) - D1(diff(S, U[1])) - D2(diff(S, U[2]))
+ D1(D1(diff(S, U[1, 1]))) + D2(D2(diff(S, U[2, 2])));

> alias(Lambda = Lambda(x, t, U[]));
> EULER(Lambda * R);
> subs(Lambda = U[], %);
> simplify(%);

```

۱۸.۱.۶ یافتن تقارنهای معادلات دیفرانسیل کسری

در بخش چهارم دیدیم که یکی از روش های تحلیل معادلات کسری برای رسیدن به جواب های صریح و قوانین پایستگی، محاسبه تقارن های این دسته از معادلات می باشد. کد محاسباتی ذیل تقارن های یک معادله کسری را به راحتی محاسبه می کند.

```

> read("C : /Users/lotus/Downloads/Desktop/fracsym/ASPv4.6.3.mpl") :
> with(ASP) :
> with(desolv) :
> read("C : /Users/lotus/Downloads/Desktop/fracsym/FracSym.v1.16.txt") :
> with(FracSym) : Rfracdiff(u(x, t), t, alpha);
> Rfracdiff(u(x, t)& * v(x, t), t, alpha);
> Rfracdiff(v(x, t)& * u(x, t), t, alpha);
> Rfracdiff(u(x, t)& * v(x, t), t, 2);
> TotalD(xi[x](x, y), x, 2);
> evalTotalD(%[1], [y], [x]);

```

$$\begin{aligned} > fde\lambda &:= Rfracdiff(u(x,t),t,alpha) = (diff(u(x,t),x)^\lambda) * h(u(x,t)) \\ &+ k(u(x,t)) * diff(u(x,t),x,x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > deteqs &:= fracDet([fde\lambda], [u], [x,t], \lambda, alpha = \circ/\lambda.. \lambda); \\ > sol\lambda &:= pdesolv(expand(deteqs[\lambda][\lambda]), deteqs[\lambda][\lambda], deteqs[\lambda][\lambda]); \\ > subs(sol\lambda[\lambda], deteqs[\lambda][\lambda]); \\ > sol\lambda &:= pdesolv(expand(deteqs[\lambda][\lambda]), deteqs[\lambda][\lambda], deteqs[\lambda][\lambda]); \\ > subs(sol\lambda[\lambda], deteqs[\lambda][\lambda]); \\ > sol\lambda &:= pdesolv(expand(deteqs[\lambda][\lambda]), deteqs[\lambda][\lambda], deteqs[\lambda][\lambda]); \\ > subs(sol\lambda[\lambda], deteqs[\lambda][\lambda]); \\ > deteqs &:= fracDet([fde\lambda], [u], [x,t], \lambda, alpha = \lambda); \\ > sol\lambda\lambda &:= pdesolv(expand(deteqs[\lambda]), deteqs[\lambda], deteqs[\lambda]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > fde\lambda &:= Rfracdiff(u(x,t),t,alpha) = (diff(u(x,t),x)^\lambda) * (b * u(x,t)^{(b-1)}) \\ &+ (u(x,t)^b) * diff(u(x,t),x,x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > deteqs\lambda &:= fracDet([fde\lambda], [u], [x,t], \lambda, alpha = \circ/\lambda.. \lambda); \\ > sol\lambda\lambda &:= pdesolv(expand(deteqs\lambda[\lambda][\lambda]), deteqs\lambda[\lambda][\lambda], deteqs\lambda[\lambda][\lambda]); \\ > subs(sol\lambda\lambda[\lambda], deteqs\lambda[\lambda][\lambda]); \\ > sol\lambda\lambda &:= pdesolv(expand(deteqs\lambda[\lambda][\lambda]), deteqs\lambda[\lambda][\lambda], deteqs\lambda[\lambda][\lambda]); \\ > subs(sol\lambda\lambda[\lambda], deteqs\lambda[\lambda][\lambda]); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > fde\lambda &:= Rfracdiff(u(x,t),t,alpha) = (diff(u(x,t),x)^\lambda) * (exp(u)) \\ &+ (exp(u)) * diff(u(x,t),x,x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > deteqs\lambda &:= fracDet([fde\lambda], [u], [x,t], \lambda, alpha = \circ/\lambda.. \lambda); \\ > sol\lambda &:= pdesolv(expand(deteqs\lambda[\lambda][\lambda]), deteqs\lambda[\lambda][\lambda], deteqs\lambda[\lambda][\lambda]); \\ > subs(sol\lambda[\lambda], deteqs\lambda[\lambda][\lambda]); \end{aligned}$$

لذا بعد از این سری دستورات پایه ای تقارن ها برای $\alpha = 2$ ، $\alpha = 1$ و $K(u) = u^b, e^u$ بدست می آیند.

مقالات بر گرفته از رساله

1: Noora Habibi, Elham Lashkarian, Elham Dastranj , S. Reza Hejazi.

Lie symmetry analysis, conservation laws and numerical approximations of time-fractional Fokker–Planck equations for special stochastic process in foreign exchange markets

Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 513(2019) 750-766.

Abstract. In this paper the transition joint probability density function of the solution of the Ornstein–Uhlenbeck process is presented by a deterministic parabolic time-fractional PDE (FPDE), named time-fractional Fokker–Planck equation. The article generally is divided to two parts: theoretical and approximated analysis. In the theoretical sections Lie group method and invariant subspace method are applied for finding exact solutions and conservation laws of the considered equation. In the next part, by Chebyshev wavelets’s method the numerical solutions are driven. Then the usefulness of this approximated method is comparing with the exact solutions by some plotted graphs.

2: Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi, Noora Habibi, Ahmad Motamednezhad.

Symmetry properties, conservation laws, reduction and numerical approximations of time-fractional cylindrical-Burgers equation

Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 67(2019) 176-191.

Abstract. In this paper the Lie group analysis of the time-fractional cylindrical Burgers equation (time-FCB), which is a fundamental PDE occurring in various areas of applied mathematics, such as fluid mechanics, non-linear acoustics, gas dynamics, traffic flow and etc. is given. For this purpose the Riemann–Liouville derivative is used to implement the Lie algorithm for finding the symmetry operators. A reduced form of the equation is given by using the similarity variables obtained from a symmetry and Erdelyi–Kober operator. In the next step conservation laws are derived via a generalization of Noether’s theorem. Finally the Chebyshev wavelets for time-fractional differential equations (FDEs) is applied for solving the considered equation.

3: Elham Lashkarian S. Reza Hejazi.

Exact solutions of the time fractional nonlinear Schrödinger equation with two different methods

Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(7)(2018) 2664–2672.

Abstract. In the present paper, exact solutions of fractional nonlinear Schrödinger equations have been derived by using two methods: Lie group analysis and invariant subspace method via Riemann-Liouville derivative. In the sense of Lie point symmetry analysis method, all of the symmetries of the Schrödinger equations are obtained, and these operators are applied to find corre-

sponding solutions. In one case, we show that Schrödinger equation can be reduced to an equation that is related to the Erdelyi-Kober functional derivative. The invariant subspaces method for constructing exact solutions is presented for considered equations.

4: Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi, Elham Dastranj.

Conservation laws of $(3 + \alpha)$ -dimensional time-fractional diffusion equation

Computers and Mathematics with Applications, 75(3)(2018) 740-754.

Abstract. The concept of Lie–Backlund symmetry plays a fundamental role in applied mathematics. It is clear that in order to find conservation laws for a given partial differential equations (PDEs) or fractional differential equations (FDEs) by using Lagrangian function, firstly, we need to obtain the symmetries of the considered equation. Fractional derivation is an efficient tool for interpretation of mathematical methods. Many applications of fractional calculus can be found in various fields of sciences as physics (classic, quantum mechanics and thermodynamics), biology, economics, engineering and etc. So in this paper, we present some effective application of fractional derivatives such as fractional symmetries and fractional conservation laws by fractional calculations. In the sequel, we obtain our results in order to find conservation laws of the time-fractional equation in some special cases.

5: S. Reza Hejazi, Soleiman Hosseinpour, Elham Lashkarian.

Approximate symmetries, conservation laws and numerical solutions a class of perturbed Linear Wave type system.

Quaestiones Mathematicae, DOI: 10.2989/16073606.2018.1538062, Accepted.

Abstract. The present work considers the Lie group analysis of a system of linear wave type perturbed systems. The methodology is based on finding approximate symmetry operators of a given system. Approximate conservation laws are found via an approximate version of Noether’s theorem. This is based on the modified Noether’s method provided by Ibragimov. Finally a numerical method is applied to solve the considered system.

6: Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi.

Group analysis of the time fractional generalized diffusion equation

Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 479(2017) 572-579.

Abstract. This paper is concerned with the time fractional derivatives (Riemann–Liouville) of non-linear anomalous diffusion equation. Using Lie symmetry method, we show this equation can be reduced to Erdelyi–Kober fractional derivatives type. Then all of the symmetry vector fields and some exact solutions of our time fractional non-linear equation are obtained.

7: Elham Lashkarian, Elaheh Saberi and S. Reza Hejazi.

Symmetry reductions and exact solutions for a class of nonlinear PDEs.

Asian-European J. Mathematics, 9(2)(2015), 1650061 (11 pages).

Abstract. This paper uses Lie symmetry group method to study a special kind of PDE. By using the Lie symmetry analysis, all of the geometric vector fields of the equation are obtained; the symmetry reductions are also presented. Some new nonlinear wave solutions, involving differentiable arbitrary functions are obtained.

8: Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi.

Polynomial and non-polynomial solutions set for wave equation using Lie point symmetries

Computational Methods for Differential Equations, 4(4)(2016) 298-308.

Abstract. This paper obtains the exact solutions of the wave equation as a second-order partial differential equation (PDE). We are going to calculate polynomial and non-polynomial exact solutions by using Lie point symmetry. We demonstrate the generation of such polynomial through the medium of the group theoretical properties of the equation. A generalized procedure for polynomial solution is presented and this extended to the construction of related polynomials.

9: Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi.

Exact solutions of a linear fractional partial differential equation via characteristics method

Computational Methods for Differential Equations, 6(1)(2018) 12-18.

Abstract. In recent years, many methods have been studied for solving differential equations of fractional order, such as Lie group method, invariant subspace method and numerical methods, [1, 2, 3, 4]. Among this, the method of characteristics is an efficient and practical method for solving linear fractional differential equations (FDEs) of multi-order. In this paper we apply this method for solving a family of linear $(2 + 1)$ -dimensional fractional differential equations (FDEs) of multi-order α, β and γ .

10: S. Reza Hejazi and Elham Lashkarian.

Conservation laws and symmetry analysis of (1+1)-dimensional Sawada-Kotera equation.

Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 19(3)(2017) 10-19.

Abstract. The paper addresses an extended (1+1)-dimensional Sawada-Kotera (SK) equation. The Lie symmetry analysis leads to many plethora of solutions to the equation. The non-linear self-adjointness condition for the SK equation established and subsequently used to construct simplified independent conserved vectors. In particular, we also get conservation laws of the equation with the corresponding Lie symmetry.

11: S. Reza Hejazi and Elham Lashkarian.

On The Structure of Conservation Laws of (3+1)-dimensional Wave Equation.

Arab Journal of Mathematical Sciences, 24(2)(2018) 199-224.

Abstract. In this paper, a (3+1)-dimensional wave equation is studied from the point of view of Lie's theory in partial differential equations including conservation laws. The symmetry operators is determined to find the reduced form of the considered equation. The non-local conservation theorems and multipliers approach are performed on the (3+1)-dimensional wave equation. We obtain conservation laws by using five methods, such as direct method, Noether's method, extended Noether's method, Ibragimov's method; and finally we can derive infinitely many conservation laws from a known conservation law viewed as the last method. We also derive some exact solutions using some conservation laws [5].

12: Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi.

Conservation laws and Lie symmetry approach for perturbed differential equations.

49th Annual Iranian mathematics conferences, University of Science and Technology, August 23-26 (2018).

Abstract. The paper considers on symmetry analysis of perturbed differential equations in order to find conservation laws of a given system. This is based on constructing approximate symmetries for finding approximate conservation laws via a modified version of Noether's theorem.

13: Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi.

Exact solutions of the time fractional nonlinear diffusion equation via invariant subspace method.

48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Ali Sina University, August 22-25 (2017).

Abstract. In this paper, the invariant subspace method for finding exact solutions of time fractional differential equations (FDEs) is analyzed. Then, we applied this method to find some exact solution for the (3+1)- dimensional time fractional diffusion equation.

14: Elham Lashkarian , Elaheh Saberi, S. Reza Hejazi.

Classification of n-th order ODEs under a given symmetry group.

13th International Seminar on Differential Equations, Dynamical System and Applications, Isfahan University of Technology, July 13-15 (2016).

Abstract. Classification of n-th order ordinary differential equations via a group of symmetries is studied. The method of finding symmetries is given then, classification of ODEs with one parameter group is introduced. The procedure is developed for multi-parameter symmetry group. Finally the method is applied in an example to classify ODEs up to order five via projective Lie group $SL(2)$.

15: Elham Lashkarian¹, S. Reza Hejazi.

Geometric study of Wave Equation and their Application in Physics.

Iranian Conference on Mathematical Physics, Nov. 5 (2016).

Abstract. In this paper, a wave equation is studied from the point of view of theory of symmetry reductions in partial differential equations and finding conservation laws. We obtain conservation laws by using two methods, such as direct method, and Ibragimov's Theorem method. We also derive some exact solutions using the found conservation laws.

16: S. Reza Hejazi, Elaheh Saberi and Elham Lashkarian.

Intergration of ordinary differential equations.

12nd International Seminar on Differential Equations, Dynamical System and Applications, University of Tabriz, May 27-29 (2015).

Abstract. An application of differential geometry in ordinary differential equations (DE) is considered. One of the most appealing applications of Lie group theory is to the problem of integrating ordinary DE. In this paper, We introduce a method for finding the general solutions of ODEs by using the symmetry Lie group of a given system of ODEs.

17: Elham Lashkarian, Reza Hejazi,

Exact solutions of time-fractional super KdV system via Lie symmetry theory

, 14th International Seminar on Differential Equations, Dynamical System and Applications, Zanjan University of Technology, July 17-20 (2018).

Abstract. In this paper, the method of Lie symmetry analysis is applied for finding the symmetry operators of time-fractional super-KdV system are presented. In fact exact solutions of reduced systems are found by similarity variables and Erdelyi-Kober operator.

18: S. Reza Hejazi, Elaheh Saberi and Elham Lashkarian,

Symmetry Group, Hamiltonian Equations and Conservation Laws of General Three-Dimensional Anisotropic Non-linear Sourceless Heat Transfer Equation

Computational Methods for Differential Equations, 7(1)(2019) 54-68.

Abstract. In this paper Lie point symmetries, Hamiltonian equations and conservation laws of general three-dimensional anisotropic non-linear sourceless heat transfer equation are investigated. First of all Lie symmetries are obtained by using the general method based on invariance condition of a system of differential equations under a prolonged vector field. Then the structure of symmetry operators as a Lie algebra are classified and the classification of subalgebras under adjoint transformation is given. Hamiltonian equations including Hamiltonian symmetry are obtained. Finally a modified version of Noether's method including the direct method are applied in order to find local conservation laws of the equation.

19: Elham Lashkarian, S. Reza Hejazi and Noora Habibi,

A new method for constructing exact solution for a time-fractional differential equation.

Computational Methods for Differential Equations, Accepted.

Abstract. In the present paper the process of finding new solutions from previous solutions of a given fractional differential equation (FDE) is considered. For this issue, first we should construct an exact solution by using the symmetry operators of the equation. Then, the commutator brackets of the obtained operators give new solutions from old ones via a systematic method.

فهرست نمادها

\mathcal{D}	عملگر دیفرانسیلی
D	مشتق کامل
$d = \frac{d}{dx}$	مشتق نسبت به x
d	دیفرانسیل
C^∞	هموار
\det	دترمینان
D_i	مشتق کامل نسبت به متغیر x^i
\dim	بعد
\exp	نگاشت نمایی
\mathfrak{g}	جبر لی
$GL(n)$	گروه خطی عام
$SO(n)$	گروه دوران
$SL(n)$	گروه تبدیلات تصویری
$O(n)$	گروه متعامد
$A(n)$	گروه تبدیلات آفین
$E(n)$	گروه تبدیلات اقلیدسی
$G^{(n)}$	گروه امتداد یافته
Ad	نگاشت نمایش الحاقی
Δ	دستگاه معادلات دیفرانسیل
$J^{(n)}$	فضای جت مرتبه n -ام
d	دیفرانسیل
d_n	دیفرانسیل مرتبه n -ام
d	مشتق
G	گروه لی
M	منیفلد
$Pr^{(n)}$	امتداد مرتبه n -ام میدان برداری تعمیم یافته
\equiv	هم ارزی
\simeq	یکریختی
$[\cdot, \cdot]$	براکت لی
\mathbb{R}	اعداد حقیقی
$\mathbb{R}^{(n)}$	فضای اقلیدسی

X	مولد بی نهایت کوچک
$X^{(n)}$	امتداد مرتبه n -ام مولد بی نهایت کوچک X
Γ_f	گراف تابع f
∂_J	مشتق جزئی نسبت به J
J	مرتبه اندیس چند گانه
$R^\sigma[u]$	دستگاه معادلات دیفرانسیل
$\gamma(z)$	تابع گاما
$J_\nu(z)$	تابع بسل
$E_{\alpha,\beta}(z)$	تابع میتیج - لفلر
$\frac{\delta}{\delta u}$	عملگر اویلر - لاگرانژ
$\mathcal{L}[u]$	لاگرانژی
\tilde{X}^∞	مولد امتداد یافته
F^*	معادله الحاقی
$C^{x,y,z}$	قوانین پایستگی
$(H^x(f), H^t(f))$	عملگر هوموتوپي
ε	تقریب بسیار کوچک
\mathcal{H}	تابع اختلال
Δ^0	دستگاه غیر اختلال
Δ^1	دستگاه اختلال
$\Re(z)$	قسمت حقیقی عدد مختلط z
τ_h	عملگر انتقال
Π_λ	عملگر تاخیر
$\phi^{x,y,z}$	شار
ψ^t	چگالی
$I_{a^+}^\alpha$	انتگرال راست ریمان - لیوویل
$I_{b^-}^\alpha$	انتگرال چپ ریمان - لیوویل
$D_{a^+}^\alpha$	مشتق کسری راست ریمان - لیوویل
$D_{b^-}^\alpha$	مشتق کسری چپ ریمان - لیوویل
${}^c D_{a^+}^\alpha$	مشتق کسری راست کاپوتو
${}^c D_{b^-}^\alpha$	مشتق کسری چپ کاپوتو
$I_{a^+;\sigma,\eta}^\alpha$	انتگرال کسری چپ کوبر
$I_{b^-;\sigma,\eta}^\alpha$	انتگرال کسری راست کوبر
$D_{a^+;\sigma,\eta}^\alpha$	مشتق کسری چپ کوبر
$D_{b^-;\sigma,\eta}^\alpha$	مشتق کسری راست کوبر
$y_+^{(\alpha)}$	مشتق چپ گرانوالد
$y_-^{(\alpha)}$	مشتق راست گرانوالد
${}_p\Psi_q(z)$	تابع سازه
$P_\beta^{\tau,\alpha}$	عملگر دیفرانسیل کسری ایردیلی - کوبر از مرتبه α
$K_\beta^{\tau,\alpha}$	عملگر انتگرال کسری ایردیلی - کوبر
$C(z), S(z)$	انتگرالهای فرسنال

$\mathcal{N}^{t,x,y}$ عملگرهای نوتر
 \mathcal{L} تبدیل لاپلاس
 \mathcal{L}^{-1} تبدیل معکوس لاپلاس

مراجع

- [۱] رضوی اسدالله، جبر و گروه لی، انتشارات دانشگاه امیرکبیر، سال ۱۳۸۷.
- [2] S. Anco and G. Bluman, Direct construction of conservation laws. Phys. Rev. Lett. vil. 78, pp. 2873, 1997.
- [3] S. Anco and G. Bluman, Direct construction Method for conservation laws of Partial Differential Equations Part II: General treatment. Europ. J. Appl. Math. vol. 13, PP. 567-585,(2002).
- [4] V.A. Baikov, R.K. Gazizov and N.H. Ibragimov, Perturbation methods in group analysis, J. Soviet. Math. 55 (1991) 1450-1490.
- [5] G.W, Bluman. and Temuerchaolu, Comparing symmetries and conservation laws of nonlinear telegraph equations, J. Math. Phys., (2005), 073513.
- [6] G. Bluman, S. Anco, Symmetry and Integrating Methods for Differential Equation, Appl. Math. Sci, vol. 154, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [7] G. Bluman, A. F. Cheviakov and S.C. Anco, Application of Symmetry Methods to Partial Differential Equations; Springer : New York, NY, USA, 2009.
- [8] G.W, Bluman. and Temuerchaolu, Comparing symmetries and conservation laws of nonlinear telegraph equations, J. Math. Phys., (2005), 073513.
- [9] T. H. Boyer, Continuous symmetries and conserved currents. Ann. Phys, vol. 42, PP. 445-466, 1967.
- [10] S, Das . Analytical solution of a fractional diffusion equation by variational iteration method. Comput Math Appl 2009;57(3):483–7.
- [11] L, Debnath . Recent applications of fractional calculus to science and engineering. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2003;54:3413-3442.
- [12] G, Dobtsch., Handbuch der Laplace-Transformation, Birkhauser-Verlag, Basel and Stuttgart, 1955.
- [13] T, Feroze. A. H. Kara, (2002) Group theoretic methods for approximate invariants and Lagrangians for some classes of $y'' + \varepsilon F(t)y' + y = f(y, y)$ Int. J. Nonlin. Mech., 37, 275280.

- [14] M. Euler, N. Euler, A. Khler , (1994) On the construction of approximate solutions for a multi-dimensional nonlinear heat equation. *J. Phys. A Math. Gen.*, 27, 20832092.
- [15] W.I. Fushchich and W.H. Shtelen, On approximate symmetry and approximate solutions of the non-linear wave equation with a small parameter, *J. Phys. A* 22 (18) (1989) L887-L890.
- [16] V. A. Galaktionov, S. R. Svirshchevskii, *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Non-linear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Chapman and Hall/CRC, London (2007).
- [17] L Gaul , P Klein , S Kemple . Damping description involving fractional operators. *Mech Syst Signal Pr* 1991;5:81–8.
- [18] R. Gazizov, A. Kasatkin, S. Y. Lukashchuk. Symmetry properties of fractional diffusion equations. *Physica Scripta* 2009(T136):014016.
- [19] R. Gazizov, A. Kasatkin, S. Y. Lukashchuk. *Group-invariant solutions of fractional differential equations*, Springer 2011;51–59.
- [20] R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov, S.Y. Lukashchuk,; Nonlinear self-adjointness, conservation laws and exact solutions of time-fractional Kompaneets equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer.Simul.* (2014) . doi:10.1016/j.cnsns.2014.11.010
- [21] R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, SYu. Lukashchuk, Continuous transformation groups of fractional differential equations. *Vestnik UGATU*,9,(2007),125-35 (in Russian).
- [22] R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, SYu. Lukashchuk, Fractional differential equations: change of variables and nonlocal symmetries. *Ufa Math J* 4(4),(2012),54-67.
- [23] R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, Construction of exact solutions for fractional order differential equations by the invariant subspace method. *Comput. Math. Appl.* 66, (2013), 576-584.
- [24] N. Habibi, E. Lashkarian, E. Dastranj and S. R. Hejazi, Lie symmetry analysis, conservation laws and numerical approximations of time-fractional Fokker-Planck equation for special stochastic process in foreign exchange markets, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 513(2019) 750-766.
- [25] S. R. Hejazi, E. Saberi and E. Lashkarian, *Integration of Ordinary Differential Equations*, 12nd International Seminar on Differential Equations, Dynamical System and Applications, University of Tabriz, May 27-29 (2015).
- [26] S. R. Hejazi and E. Lashkarian, Conservation laws and symmetry analysis of (1+1)-dimensional Sawada-Kotera equation, *Bulletin Krasec. Physical and Mathematical Sciences*, 19(3)(2017) 10-19.
- [27] S. R. Hejazi and E. Lashkarian, On the structure of conservation laws of (3+1)-dimensional wave equation, *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 24(2)(2018) 199-224.

- [28] S. R. Hejazi, E. Saberi and E. Lashkarian, Symmetry Group, Hamiltonian Equations and Conservation Laws of General Three-Dimensional Anisotropic Non-linear Sourceless Heat Transfer Equation, Computational Methods for Differential Equations, 7(1)(2019) 54-68.
- [29] W.Herman, Symbolic computation of conservation laws of non-linear partial differential equations in multi- dimensional, Int. J. Quant. Chem. vol. (2008) 58-62.
- [30] Hilfer, E. (Ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Sci. Publishing, New York, 2000.
- [31] N.H. Ibragimov, V.F. Kovalev, Approximate And Renormgroup Summetries, 2009.
- [32] N.H. Ibragimov, Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws, Archives of ALGA,1-99, Volume 7/8, 2010-2011.
- [33] N. H . Ibragimov, A new covservation theorem, Journal of Mathematical Analysis and Application, vol. 333, no. 1, PP. 311-328, 2007.
- [34] H Jafari, S Seifi . Solving a system of nonlinear fractional partial differential equations using homotopy analysis method. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 2009;14(5):1962–9.
- [35] A.G. Johnpillai, A.H. Kara and F.M. Mahomed, Approximate Noether type symmetries and conservation laws via partial Lagrangians for PDEs with a small parameter, J. Comput. Appl. Math. 223 (2009) 508-518.
- [36] A.G. Johnpillai, A.H. Kara and F.M. Mahomed, A basis of approximate conservation laws for PDEs with a small parameter, Int. J. Nonlinear Mech. 41 (2006) 830-837.
- [37] A. G. Johnpillai and A. H. Kara, Variational Formulation of Approximate Symmetries and Conservation Laws, Int. J. Theor. Phys., 40 (2001) 1501- 1509.
- [38] G. Jumarie, Modified Riemann–Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions further results, Comput. Math. Appl. 51 (2006) 1367–1376.
- [39] G. Jumarie, Lagrange characteristic method for solving a class of nonlinear partial differential equations of fractional order, Appl. Math. Lett. 19 (2006) 873–880.
- [40] Kara, A. F., Mahomed, F. M. Qu, C. Z. (2000) Approximate potential symmetries for partial differential equations. J. Phys. A Math. Gen., 33, 66016613.
- [41] A. H. Kara, F. M. Mahomed and G. Unal, Approximate Symmetries and Conservation Laws with Applications, Int. J. Theor. Phys., 38 (1999) 2389-2399.
- [42] M. Khorshidi, M. Nadjafikhah, H. Jafari, Fractional derivative generalization of Noether’s theorem, Open Math. 13 (2015) 940–947.
- [43] A Kilbas , et al. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier; 2006.

- [44] V Kiryakova . Generalised fractional calculus and applications. In: Pitman research notes in mathematics, vol. 301; 1994.
- [45] E. Lashkarian, S. R. Hejazi, N. Habibi and A. Motamednezhad, Symmetry properties, conservation laws, reduction and numerical approximations of time-fractional cylindrical-Burgers equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 67(2019) 176-191.
- [46] E. Lashkarian and S. R. Hejazi, Exact Solutions of a Linear Fractional Partial Differential Equation via Characteristic Method, *Computational Methods for Differential Equations*, 6(1)(2018) 12-18.
- [47] E. Lashkarian and S. R. Hejazi, Exact solutions of the time fractional non-linear Schrodinger with two different methods, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(2018) 2664–2672.
- [48] E. Lashkarian, S. R. Hejazi and E. Dastranj, Conservation Laws of $(\Psi + \alpha)$ -dimensional time-fractional diffusion equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 75(2018) 740-754.
- [49] E. Lashkarian and S. R. Hejazi, Exact Solutions of the time-fractional nonlinear diffusion equation via invariant subspace method, 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Ali Sina University, August 22-25 (2017).
- [50] E. Lashkarian and S. Reza Hejazi, Conservation laws and Lie symmetry approach for perturbed differential equations, 49th Annual Iranian mathematics conferences, University of Science and Technology, August 23-26 (2018).
- [51] E. Lashkarian, E. Saberi and S. R. Hejazi, Classification of n-th Order ODEs Under a Given Symmetry Group, 13th International Seminar on Differential Equations, Dynamical System and Applications, Isfahan University of Technology, July 13-15 (2016).
- [52] E. Lashkarian and S. R. Hejazi, Geometric Study of Wave Equation and Its Application in Physics, Iranian Conference on Mathematical Physiscs, Nov. 5 (2016).
- [53] E. Lashkarian, R. Hejazi, Exact solutions of time-fractional super KdV system via Lie symmetry theory , 14th International Seminar on Differential Equations, Dynamical System and Applications, Zanjan University of Technology, July 17-20 (2018).
- [54] E. Lashkarian, S. R. Hejazi and S. Hosseinpour, Approximate symmetries, conservation laws and numerical solutions for a class of perturbed linear wave type system, *Quaestiones Mathematicae*, DOI: 10.2989/16073606.2018.1538062, Accepted.
- [55] E. Lashkarian, E. Saberi and S. R. Hejazi, Symmetry Reduction and Exact Solutions for a Class on Non-linear PDEs, *Asian-European J. Mathematics*, 9(2)(2015), 1650061 (11 pages).

- [56] E. Lashkarian and S. R. Hejazi, Polynomial and non-polynomial solutions set for wave equation using Lie point symmetries, *Computational Methods for Differential Equations*, 4(4)(2016) 298-308.
- [57] E. Lashkarian and S. R. Hejazi, Group Analysis of the Time-Fractional Generalized Diffusion Equation, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 479(2017) 572-579.
- [58] E. Lashkarian, S. R. Hejazi and N. Habibi, A new method for constructing exact solution for a time-fractional differential equation, *Computational Methods for Differential Equations*, Accepted.
- [59] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, GTM, Springer, New York (2002).
- [60] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, GTM, Springer, New York (2013).
- [61] R. J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Lectures in Mathematics ETH Zurich, Birkhauser, Basel, Switzerland, 2nd edition, 1992.
- [62] S. Lie, On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, translation by N.H. Ibragimov, *Arch. for Math.*, 6 (1881), 328-368.
- [63] F. M. Mahomed, C. Z. Qu, (2000) Approximate conditional symmetries for partial differential equations. *J. Phys. A Math. Gen.*, 33, 343356.
- [64] K Miller ,B Ross . *An introduction to the fractional calculus and fractional differential Equations*. John Wiley, Sons Inc., New York; 1993.
- [65] A. C. McBride, *Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions*, vol. 31 of *Research Notes in Math.*, Pitman, London, 1979. 58
- [66] S Momani . An algorithm for solving the fractional convection–diffusion equation with non-linear source term. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 2007;12(7):1283–90.
- [67] L. D. Moleleki and C. M. Khalique, Solutions and conservation laws of a (2+1)-dimensional Boussinesq equation, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 548975, PP. 8, 2013.
- [68] E. Noether, Invariant Variationsprobleme, *Nachr. Kaonig. Gesell. Wis-Sen. Gaot- Tivgen, Math-Phys. Kl*, (1918), PP. 235-257.
- [69] KB Oldham , J Spanier . *The fractional calculus*. Academic Press. 1974; 234p.
- [70] P.J. Olver, *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [71] P. Olver , *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Grad. Texts in Math., vol. 107 , Springer , New York, 1993.
- [72] L. V. Ovsiannikov, Groups ang Group Invariant solutions of differential equations. *Akad. Nauk. USSR*, 118 (1958), 439-442.

- [73] I Podlubny . Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. New York: Academic Press; 1999.
- [74] S. G. SAMKO, A. A. KILBAS, and O. I. MARICHEV, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.
- [75] I. N. SNEDDON, Fourier Transforms, Dover Publications, New York, 1995.
- [76] NH Sweilam , MM Khader , RF Al-Bar . Numerical studies for a multi-order fractional differential equation. Phys Lett A 2007;371(1–2):26–33.
- [77] G. W. Wang, T. Z. Xu. Symmetry properties and explicit solutions of the nonlinear time fractional KDV equation, Boundary Value Problems 2013;1:232.
- [78] G. W. Wang, X. Q. Liu, Y. Y. Zhang. Lie symmetry analysis to the time fractional generalized fifth-order KDV equation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 2013;9:2321–2326.
- [79] G. W. Wang, T. Z. Xu, T. Feng. Lie symmetry analysis and explicit solutions of the time fractional fifth-order KDV equation. PLOS ONE 9(2):e88336;2014.
- [80] F.W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill., (1971).
- [81] V. S. VLADIMIROV, Generalized Functions in Mathematical Physics, Mir Publishing, Moscow, 1979.
- [82] G. M. ZASLAVSKY, Chaos and Fractional Dynamics, vol. 511 of Lect. Notes in Phys., Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [83] A. H. ZEMANIAN, Generalized Integral Transformations, vol. 18 of Pure Appl. Math., Wiley and Sons, New York, 1968.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Shallow Waters	آبهای کم عمق
Fundamental	اساسی
Strictly Self Adjoint	اکیدا خودالحاق
Jet Space	افشانه
Prolongation	امتداد دادن
Electromagnetic Waves	امواج الکترومغناطیسی
Fractional Integral	انتگرال کسری
Translation	انتقال
Multiple Indicator	اندیس چندگانه
Potential Energy	انرژی پتانسیل
Euler-Lagrange	اویلر لاگرانژ
Taylor Expansion	بسط تیلور
Trivial	بدیهی
Tangent Vector	بردار مماس
Equality	برابری
Section	برش
Local Section	برش موضعی
Contact	برخوردی
Clearly	به وضوح
Alternatively	به طور متناوب
Dimension	بعد
Basis	پایه
Signal processing	پردازش سیگنال
Continuos	پیوسته
Bessel Function	تابع بسل

Diagram function	تابع دیاگما
Gamma Function	تابع گاما
Mittge-Leffler Function	تابع میتیج- لفلر
Transformation.	تبدیل
Approximate Transformations	تبدیلات تقریبی
Inversion Transformations	تبدیلات وارون پذیر
Affine Transformation	تبدیل آفین
Euclidean Transformation	تبدیل اقلیدسی
vertical Transformation	تبدیل عمودی
Laplace Transform	تبدیل لاپلاس
Point Transformation	تبدیل نقطه ای
Horizontal Transformation	تبدیل افقی
Scale	تجانس
linear Composition	ترکیب خطی
Approximation Symmetry	تقارن تقریبی
Lie Symmetry	تقارن لی
Point Symmetry	تقارن نقطه ای
Varitional Symmetries	تقارن های وردشی
Generalization	تعمیم
Modification Variable	تغییر متغیر
Linear momentum	تکانه خطی
Angular momentum	تکانه زاویه ای
Euler Constant	ثابت اویلر
Commutator	جابجاگر
Lie Algebra	جبر لی
Similiraty solution	جواب های مشابه
Multi Parameter	چندپارامتری
Real-Valued	حقیقی مقدار
Non Linear Self Adjoint	خود الحاق غیر خطی
Optimal System	دستگاه بهینه
Fractional System	دستگاه کسری
Characteristic System	دستگاه مشخصه

Enteries	درایه
Arbitrary	دلخواه
Bilinearity	دو خطی
Total Differential	دیفرانسیل کامل
Diffeomorphism	دیفئومورفیسم
Fractional Diffusion	دیفیوژن کسری
Hamiltonian System	دستگاه همیلتونی
Rotation	دوران
Rank	رتبه
Varitional Method	روش تکرار وردشی
Direct Method	روش مستقیم
Characteristic Method	روش مشخصه
Invariant Subspace	زیر فضای ناورد
Satisfy	صدق کردن
Functional Coefficients	ضرایب تابعی
Fixed Coefficients	ضرایب ثابت
Multiplier	ضریب
Fluid Flow	شارش سیالات
Quasi Self Adjoint	شبه خود الحاق
Conditions	شرایط
Invariant Condition	شرط ناوردایی
Identify	شناسایی
Integrating Factor	عامل انتگرال
Divergevce Expression	عبارت دیورژانسی
Adjoint Operator	عملگر الحاقی
Euler-Lagrange Operator	عملگر اویلر- لاگرانژ
Transfer Operator	عملگر انتقال
Delay Operator	عملگر تاخیر
linear Operator	عملگر خطی
Nonlinear Differential Operator	عملگر دیفرانسیل غیر خطی
Noether's Operator	عملگر نوتر
Homotopy Operator	عملگر هوموتوبی

Non Monic	غیر تکین
Form	فرم
Contact Form	فرم برخوردی
Differential Form	فرم دیفرانسیلی
Homotopy Formulaes	فرمولهای هوموتوپی
Vector Space	فضای برداری
Topological Space	فضای توپولوژیکی
Total Space	فضای کامل
Noether's Theorem	قضیه نوتر
Conservation Laws	قوانین پایستگی
Conservation Laws of Mass	قانون پایستگی جرم
Flow	شار
Completely	کاملاً
Sufficient	کافی
Lie Bracket	کروشه لی
Symmetry Group	گروه تقارن
Lie Group	گروه لی
Local group	گروه موضعی
Lagrangian	لاگرانژی
Formal Lagrange	لاگرانژی فرمال
Structure Matrix	ماتریس ساختاری
Orthogonal Matrix	ماتریس متعامد
Cononical	متعارف
fractional Calculating	محاسبات کسری
Calculate	محاسبه
Independent	مستقل
Dertivative	مشتق
Partial Derivatives	مشتقات جزئی
Left Derivative	مشتق چپ
Right Derivative	مشتق راست
Riemann-Liuville Derivative	مشتق ریمان-لیوویل
Caputo Derivative	مشتق کاپوتو

Total Derivative	مشتق کامل
Fractional Derivative	مشتق کسری
Grandwal Derivative	مشتق گرانوالد
Lie Derivative	مشتق لی
Characteristic	مشخصه
Non-Approximate Characteristic	مشخصه غیر تقریبی
Higer Order	مرتبه بالاتر
Associated	مرتبط
Perturbed Equation	معادله اختلال
Approximate Adjoint Equation	معادله الحاقی تقریبی
Characteristic equations	معادلات مشخصه
Differential Equation	معادله دیفرانسیل
Evolutionary Differential Equation	معادله دیفرانسیل تکاملی
Partial Differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی
Ordinary Differential equation	معادله دیفرانسیل معمولی
Multiple Fractional Equation	معادله کسری چند گانه
Ordinary	معمولی
Inverse	معکوس
Regular	منظم
Manifold	منیفلد
Wave	موج
Locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
Infinitesimal Generator	مولد بینهایت کوچک
Classic Mechanics	مکانیک کلاسیک
Vector Field	میدان برداری
Invariant	ناوردا
Non Homogenous	ناهمگن
Matematica Software	نرم افزار ممتیکا
Control Theory	نظریه کنترل
Linear Map	نگاشت خطی
Exponential Map	نگاشت نمایی
Smooth Map	نگاشت هموار

Dependent	وابسته
Fractional Varitional	وردشی کسری
Equivalent	هم ارز
Herman-pol	هرمان-پل
Connected	همبند
Homogenous	همگن
Smooth	هموار

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjoint Operator	عملگر الحاقی
Affine Transformations	تبدیلات آفین
Alternatively	به‌طور متناوب
Angular momentum	تکانه زاویه ای
Approximate Adjoint Equation	معادله الحاقی تقریبی
Approximate Transformations	تبدیلات تقریبی
Approximate Symmetry	تقارن تقریبی
Arbitrary	دلخواه
Associated	مرتبط
Basis	پایه
Bessel Function	تابع بسل
Bilinearity	دو خطی
Calculate	محاسبه
Caputo Derivative	مشتق کاپوتو
Characteristic equations	معادلات مشخصه
Characteristic Method	روش مشخصه
Characteristic System	دستگاه مشخصه
Classic Mechanics	مکانیک کلاسیک
Clearly	به‌وضوح
Commutator	جابجاگر
Completely	کاملاً
Conditions	شرایط
Connected	همبند
Cononical	متعارف
Contact	برخوردی

Contact Form	فرم برخوردی
Continuos	پیوسته
Control Theory	نظریه کنترل
Conservation Laws	قوانین پایستگی
Conservation Laws of Mass	قانون پایستگی جرم
Delay Operator	عملگر تاخیر
Dependent	وابسته
Derivative	مشتق
Diagram function	تابع دیاگما
Diffeomorphism	دیفئومورفیسم
Differential Equation	معادله دیفرانسیل
Differential Form	فرم دیفرانسیلی
Dimension	بعد
Direct Method	روش مستقیم
Divergevece Expression	عبارت دیورژانسی
Electromagnetic Waves	امواج الکترومغناطیسی
Entiries	درایه
Equality	برابری
Equivalent	معادل
Evolutionary Differential Equation	معادله دیفرانسیل تکاملی
Euclidean Transformations	تبدیلات اقلیدسی
Euler Constant	ثابت اویلر
Euler-Lagrange	اویلر-لاگرانژ
Euler-Lagrange Operator	عملگر اویلر-لاگرانژ
Exponential Map	نگاشت نمایی
Flow	شار
Fluid Flow	شارش سیالات
Form	فرم
Formal Lagrange	لاگرانژی فرمال
Fractional Calculating	محاسبات کسری
Fractional Derivative	مشتق کسری
Fractional Diffusion	دیفیوژن کسری

Fractional Integral	انتگرال کسری
Fractional Varitional	وردشی کسری
Fractional System	دستگاه کسری
Functional Coefficients	ضرایب تابعی
Fundamental	اساسی
Gamma Function	تابع گاما
Generalization	تعمیم
Grandwal Derivative	مشتق گرانوالد
Hamiltonian System	دستگاه همیلتونی
Herman-pol	هرمان-پل
Higer Order	مرتبه بالاتر
Homogenous	همگن
Homotopy Formulaes	فرمولهای هوموتوبی
Homotopy Operator	عملگر هوموتوبی
Horizontal transformation	تبدیل افقی
Identify	شناسایی
Independent	مستقل
Infinitesimal Generator	مولد بینهایت کوچک
Integrating Factor	عامل انتگرال
Invariant	ناوردا
Invariant Condition	شرط ناوردایی
Invariant Subspace	زیر فضای ناوردا
Inverse	معکوس
Inversion Transformations	تبدیلات وارون پذیر
Jet Space	فضای جت
Lagrangian	لاگرانژی
Laplace Transform	تبدیل لاپلاس
Left Derivative	مشتق چپ
Lie Algebra	جبر لی
Lie Bracket	کروشه لی
Lie Derivative	مشتق لی
Lie Group	گروه لی

Lie Symmetry	تقارن لی
Linear Composition	ترکیب خطی
Linear Map	نگاشت خطی
Linear Momentum	تکانه خطی
Linear Operator	عملگر خطی
Local Section	برش موضعی
Local Group	گروه موضعی
Locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
Manifold	منیفلد
Matemática Software	نرم افزار ممتیکا
Mittge-Leffler Function	تابع میتیج- لفلر
Modification Variable	تغییر متغیر
Multi Parameter	چند پارامتری
Multiple Fractional Equation	معادله کسری چند گانه
Multiple Indicator	اندیس چندگانه
Multiplier	ضریب
Noether's Operator	عملگر نوتر
Noether's Theorem	قضیه نوتر
Non-Approximate Characteristic	مشخصه غیر تقریبی
Non Homogenous	ناهمگن
Non-linear Differential Operator	عملگر دیفرانسیل غیر خطی
Non Linear Self Adjoint	خود الحاق غیر خطی
Non Monic	غیر تکین
Optimal System	دستگاه بهینه
Ordinary	معمولی
Orthogonal Matrix	ماتریس متعامد
Ordinary Differential Equation	معادله دیفرانسیل معمولی
Partial Derivatives	مشتقات جزئی
Partial Differential Equation	معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی
Perturbed Equation	معادله اختلال
Point Transformation	تبدیل نقطه‌ای
Point Symmetry	تقارن نقطه‌ای

Potential Energy	انرژی پتانسیل
Prolongation	امتداد دادن
Quasi Self Adjoint	شبه خود الحاق
Rank	رتبه
Real-Valued	حقیقی مقدار
Regular	منظم
Riemann-Liouville Derivative	مشتق ریمان-لیوویل
Right Derivative	مشتق راست
Rotation	دوران
Satisfy	صدق کردن
Scale	تجانس
Section	برش
Shallow Waters	آبهای کم عمق
Signal processing	پردازش سیگنال
Similarity Solution	جواب های مشابه
Smooth	هموار
Smooth Map	نگاشت هموار
Strictly Self Adjoint	اکیدا خودالحاق
Structure Matrix	ماتریس ساختاری
Sufficient	کافی
Symmetry Group	گروه تقارن
Tangent Vector	بردار مماس
Taylor Expansion	بسط تیلور
Topological Space	فضای توپولوژیکی
Total Derivative	مشتق کامل
Total Differential	دیفرانسیل کامل
Total Space	فضای کامل
Transfer Operator	عملگر انتقال
Transformation	تبدیل
Translation	انتقال
Trivial	بدیهی
Vector Field	میدان برداری

Vector Space	فضای برداری
Vertical transformation	تبدیل عمودی
Varitional Method	روش تکرار وردشی
Varitional Symmetries	تقارن های وردشی
Wave	موج

نمایه

- امتداد مرتبه n - ام، ۱۴
- انتگرال های فرسنال، ۱۶۴
- براکت لی، ۷
- تابع میتیج - لفلر، ۱۰۰
- تابع گاما، ۱۰۰
- تبدیل لاپلاس، ۱۰۰
- تبدیلات تقریبی، ۷۹
- تقارن های تقریبی، ۸۳
- جبر لی، ۶
- دستگاه بهینه، ۱۲۹
- دستگاه تقریبی، ۸۹
- دستگاه معادلات دیفرانسیل، ۱۴
- روش مستقیم، ۴۱
- شار، ۵۴
- عملگر اویلر - لاگرانژ، ۴۲
- عملگر ایردیلی - کوبر، ۱۲۹
- عملگر نوتر، ۱۶۶
- عملگر هوموتوبی، ۶۳
- قوانین پایستگی، ۳۹
- لاگرانژی، ۴۸
- مرتبه اندیس چندگانه، ۱۳
- مشتق کامل، ۱۸
- مشتق کسری ایردیلی - کوبر، ۱۱۳
- مشتق کسری ریمان، ۱۰۴
- مشتق کسری کاپوتو، ۱۰۴
- مشتق کسری گرانوالد، ۱۱۴
- معادله اختلال، ۸۴
- معادله الحاقی، ۵۸
- معادله غیر اختلال، ۸۴
- مولد امتداد یافته، ۵۵
- مولد بی نهایت کوچک، ۹
- چگالی، ۵۴
- گروه تبدیلات آفین، ۴
- گروه تبدیلات اقلیدسی، ۵
- گروه دوران، ۱۷
- گروه لی، ۴

Abstract

The main purpose of the present PhD thesis is the geometric study of the application of Lie groups in differential equations and conservation laws comprehensively. The thesis contains six separated sections.

After introduction, In the second section, basic and fundamental concepts including transformation, Lie symmetries, and solutions of differential equations are given. Third section is devoted for the study of conservation laws and their methods of calculations. Symmetries and conservation laws for perturbed system are studied in section four. All discussed methods and concepts are generalized for fractional differential equations in section five. Finally some computational packages and codes are introduced in section 6.

Keywords: Noether's theorem, Euler-Lagrange equations, optimal system, conservation laws, direct method, homotopy formulas, Lie symmetries, Boyer's theorem, perturbed differential equations, fractional differential equations.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Geometry-topology

**Geometric methods for finding conservation
laws and some applications in physics**

By: Elham Lashkarian

Supervisor

Prof. Hejazi S.Reza

January 2019