

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز - بهترین تقریب

رساله دکتری

دیدگاه عملگری برای تعامد در فضاها خطی

نگارنده: مریم سعیدی خجسته

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

بهمن ۱۳۹۷

تقدیم به آنان که زیبایی را دوست دارند.

به نام حضرت سلام

ارج و سپاس، حضرت عشق را که بی پایان هدایتگر است و نیکو هدایتگر است...
بامرور خاطره، قدر می شناسم رنج های بی منت پدر، اشک های بی شکوهی مادر و صبوری به سرم را.
به تمام قد تعظیم می کنم قبول زحمت و ادای حکمت اساتید، یاران و سر مشق های منجر به موفقیت زندگی ام را.
و تنها برای همیشه امیدوارم برای این همه حجت، کوچکی تمام باشم.
... و اکنون بهمن است و من بهمنان مهربانان را دوست دارم.

مریم سعیدی خجسته

بهمن ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **مریم سعیدی خجسته** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **دیدگاه عملگری برای تعامد در فضاها ی خطی**، تحت راهنمایی **مهدی ایرانمنش** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم سعیدی خجسته

بهمن ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه ما دیدگاه عملگری را برای تعامل در فضاهای خطی معرفی می کنیم. به طور خاص، مفهوم بردارهای متعامد را، با استفاده از عملگری که به آنها اختصاص می دهیم، در فضاهای نرم دار معرفی می نماییم. همچنین به بررسی تعدادی از ویژگی های پیوستگی تعامل عملگری در فضاهای خطی می پردازیم. در واقع، نشان می دهیم تابع مجموعه مقدار

$$F(x; y) = \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, p(x - \mu y, y) = 1\}$$

نیم پیوسته ی بالایی و پایینی است، که در آن

$$p(x, y) = \sup\{p_{z_1, \dots, z_{n-2}}(x, y) : z_1, \dots, z_{n-2} \in X\}$$

و

$$p_{z_1, \dots, z_{n-2}}(x, y) = \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|^{-1}$$

که $P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$ تصویر موازی y از X به زیر فضای تولید شده توسط $\{x, z_1, \dots, z_{n-2}\}$ می باشد.

کلمات کلیدی: فضای خطی، فضای نرم دار، تعامل بیرخوف، صفحه ی مینکوفسکی، تابع مجموعه مقدار، نیم پیوستگی بالایی، نیم پیوستگی پایینی.

پیشگفتار

تعامد، یکی از مهم‌ترین مفاهیم آنالیز ریاضی و آنالیز عددی می‌باشد. شاید بتوان گفت، تعامد ویژگی اصلی فضاهای خطی، نرم‌دار و ضرب داخلی است. انواع مختلفی از تعامد وجود دارد. در واقع، تعامد به اشکال مختلفی در فضاهای ریاضی تعریف شده است.

در فضاهای ضرب داخلی، به سادگی می‌گوییم دو بردار x و y عمودند اگر

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

اما، در فضاهای نرم‌دار ابزار ساده‌ای برای تعریف بردارهای متعامد وجود ندارد؛ هرچند نظریه‌های خوبی وجود دارد که یکی از آن‌ها تعامد جیمز بیرخوف [۳] است. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار حقیقی و x و y اعضای X باشند. می‌گوییم x متعامد بیرخوف است بر y اگر برای هر اسکالر مانند a داشته باشیم،

$$\|x\| \leq \|x + ay\|.$$

به سادگی می‌توانیم نشان دهیم این تعریف بر تعریف تعامد در فضای ضرب داخلی منطبق است. [۱۳]

در سال ۱۹۹۳، میلیشیک^۱ g -تعامد را در فضاهای نرم‌دار از طریق مشتقات گوتکس^۲ معرفی نمود و حال ما نماد g -زاویه را در ارتباط با g -تعامد داریم.

گسترش تعریف تعامد، از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای نرم‌دار، ابتدا توسط رابرت در سال ۱۹۳۴ مطرح شد. وی در مقاله‌ی خود تعریفی را برای تعامد دو بردار در یک فضای نرم‌دار ارائه کرد. پس از آن جیمز نشان داد که تعریف رابرت مناسب نیست. وی سپس با الهام از ویژگی‌های هندسی تعامد دو بردار در فضای اقلیدسی، دو تعریف دیگر را برای تعامد در یک فضای نرم‌دار بیان کرد.

جیمز نشان داد که تعامد متساوی الساقین روی یک فضای نرم‌دار X ، جمعی و یا همگن نیست مگر وقتی که X یک فضای ضرب داخلی باشد؛ همچنین حکم مشابهی را برای تعامد فیثاغورثی اثبات کرد و به تفصیل به مطالعه‌ی آن‌ها پرداخت.

جیمز سپس در [۱۱] و [۱۲] که مقالات مستخرج از رساله‌ی وی بودند رابطه‌ی زیر

¹Milicic

²Gateaux

را برای تعامد دو بردار در یک فضای نرم‌دار مطرح کرد

$$x \perp_J y \iff \|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

و به بررسی کلیه ویژگی‌های آن پرداخت.

در واقع دیدگاه جیمز تعمیم همان مطلبی است که بیرخوف در [۳] به آن اشاره نمود. بیرخوف در ابتدای این مقاله تعریف خود را از تعامد این‌طور بیان کرده است: «دو بردار pq و pr در یک فضای ضرب داخلی X با بعد ناکم‌تر از ۳ بر هم عمودند

هرگاه طول بردار pr مینیمم فاصله‌ی r تا سایر نقاط پاره‌خط pq باشد.»

در واقع همین تعریف بود که این ایده را به جیمز داد تا تعامد را به صورت رابطه‌ی بالا تعریف کند. در بعضی از مراجع این تعامد تنها به نام جیمز شناخته شده است چون هدف بیرخوف در مقاله‌ی خود کاملاً مستقل از این موضوع بوده است.

ثابت شده است که در یک فضای ضرب داخلی تعامدهای فیثاغورثی، متساوی الساقین و بیرخوف-جیمز معادل با تعامد ضرب داخلی هستند. اما جالب است بدانیم که در فضاهای نرم‌دار، این تعامدها کاملاً مستقل هستند و هیچ کدام دیگری را نتیجه نمی‌دهد.

بنا به تعریف تعامد بیرخوف-جیمز، می‌توان به سادگی بررسی کرد که این رابطه همگن است اما در حالت کلی جمعی و متقارن نیست.

اولین حکمی که جیمز باید اثبات می‌کرد این بود که تعامد تعریف شده توسط او ضعف تعامد تعریف شده توسط رابرت را در هندسه‌ی فضاهای نرم‌دار ندارد. به عبارت دیگر، در هر فضای نرم‌دار X و برای هر $x \in X$ بردارهای غیر صفر $z_1, z_2 \in X$ وجود دارند به طوری که $x \perp_{BJ} z_2$ و $z_1 \perp_{BJ} x$

جیمز در [۱۲] با استفاده از قضیه‌ی هان-باناخ حکمی در این رابطه به دست آورد. تاکنون شرایط متعددی معرفی شده‌اند که تحت هر یک از آن‌ها نرم یک فضای نرم‌دار مانند X از یک ضرب داخلی به دست می‌آید. شناخته شده‌ترین این شرایط، قانون متوازی‌الاضلاع است. معیارهای دیگری نیز به دست آمده است.

کاپور^۳ در [۱۴] ثابت کرده است که شرط لازم و کافی برای این که فضای نرم‌دار X یک فضای ضرب داخلی باشد این است که یکی از تعامدهای فیثاغورثی، متساوی الساقین و بیرخوف-جیمز دیگری را نتیجه دهد.

یکی دیگر از کاربردهای تعامد بیرخوف-جیمز که در [۲۲] به آن پرداخته شده است، نظریه‌ی بهترین تقریب و وجود آن در فضاهای نرم‌دار و ارتباط آن با مشخص‌سازی یک فضای ضرب داخلی می‌باشد.

^۳O. P. Kapoor

در [۲۲] ثابت شده است که اگر X یک فضای ضرب داخلی اکیداً محدب هموار با بعد ناکم‌تر از ۳ باشد، آنگاه برای هر زیرفضای Y و هر بردار خارج از Y مانند x_0 بهترین تقریب و بهترین هم-تقریب x_0 در Y با هم برابر هستند و در نهایت معیاری به صورت زیر برای فضاهای ضرب داخلی بیان می‌شود.

«فضای نرم‌دار اکیداً محدب هموار با بعد متناهی X یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر برای هر بردار x_0 در گوی واحد X یک پایهی متعامد به مفهوم بیرخوف-جیمز شامل x_0 برای X وجود داشته باشد.»

برای هر عملگر $A \in B(X)$ ، برد عددی (جبری) A (که همچنین به عنوان حوزه‌ی مقادیر A شناخته می‌شود) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(A) = \{\omega(A) : \omega \in \Omega\}.$$

در حالت بعد متناهی، با در نظر گرفتن $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ ، که $\|\cdot\|_2$ نرم طیفی است، برد عددی یک ماتریس مربعی مانند $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F(A) = \{x^*Ax \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

برای اطلاعات بیشتر راجع به برد عددی عملگرها و ماتریس‌ها، مراجع [۴] و [۱۰] توصیه می‌شوند.

در این پایان نامه به بررسی تعدادی از ویژگی‌های پیوستگی مجموعه‌های متعامد عملگری در فضاهای خطی می‌پردازیم.

ساختار پایان نامه

در این پایان نامه، در فصل اول، مقدمات و پیش‌نیازهای لازم را از آنالیز تابعی می‌آوریم. تعاریف را به صورت مختصر و قضایا را بدون اثبات آورده‌ایم.

در فصل دوم، دیدگاه عملگری را برای تعامد در فضاهای خطی معرفی می‌کنیم. به طور خاص، مفهوم بردارهای متعامد را، با استفاده از عملگری که به آنها اختصاص می‌دهیم، در فضاهای نرم‌دار معرفی می‌نماییم.

در فصل سوم به بررسی تعدادی از ویژگی‌های پیوستگی مجموعه‌های متعامد عملگری در فضاهای خطی می‌پردازیم. در واقع، نشان می‌دهیم تابع مجموعه مقدار

$$F(x; y) = \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, p(x - \mu y, y) = 1\}$$

نیم پیوسته‌ی بالایی و پایینی است.

در فصل چهارم به بررسی شاخص‌های $a(x, y)$ و $D(X)$ می‌پردازیم و ارتباط آن‌ها را با انواع تعامد بررسی می‌کنیم. به ویژه نشان می‌دهیم که شاخص $a(x, y)$ در شرایط معین بسیاری از انواع تعامد را به خوبی بیان می‌کند.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. M. Iranmanesh, M. Saeedi Khojasteh, "Operator Approach for Orthogonality in Linear Spaces", TBILISI MATHEMATICAL JOURNAL, Vol. 11, No. 4, 2018, pp. 103-112.
2. M. Iranmanesh, M. Saeedi Khojasteh, M. K. Anwary, "On the Continuity of Orthogonal Sets in the Sense of Operator Orthogonality", EUROPEAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, Vol. 11, No. 3, 2018, pp. 793-802.
3. M. Iranmanesh, M. Saeedi Khojasteh, "Matricial Orthogonality in Linear Spaces", First Local Conference of Mathematical Science and Applications, Shahid Chamran University of Ahvaz, Iran (20 December 2017).
4. M. Iranmanesh, M. Saeedi Khojasteh, "Continuity of Orthogonal Sets", The 4th Seminar on Operator Theory and its Applications, University of Bojnord, Iran, (7-8 March 2018).
5. M. Iranmanesh, M. Saeedi Khojasteh, "Some Properties of Orthogonality Indices in Certain Normed Spaces", Submitted.

فهرست مطالب

۱	تعاریف و پیش نیازها	۱
۲	۱.۱ ساختارهای مهم در آنالیز تابعی	۱.۱
۷	۲.۱ انواع تعامد در فضاهاى نرم دار	۲.۱
۱۱	۳.۱ کاربردهای تعامد بیرخوف-جیمز	۳.۱
۱۴	۴.۱ پیوستگی توابع مجموعه مقدار	۴.۱
۱۸	۵.۱ جبرهای C^*	۵.۱
۲۰	۶.۱ محاسبه‌ی نرم عملگری ماتریس‌ها	۶.۱
۲۵	۲ دیدگاه عملگری برای تعامد در فضاهاى خطی	۲
۲۶	۱.۲ مقدمه	۱.۲
۳۳	۲.۲ گسترش مفهوم p -زاویه و p -تعامد در فضاهاى n -بعدی	۲.۲
۳۶	۳.۲ ویژگی‌های p -زاویه	۳.۲
۳۹	۴.۲ بررسی p -تعامد در فضای ضرب داخلی	۴.۲
۴۳	۳ پیوستگی مجموعه‌های متعامد از دیدگاه تعامد عملگری	۳
۴۴	۱.۳ مقدمه	۱.۳
۴۸	۲.۳ تعریف مجموعه‌ی متعامد برای تعامد عملگری	۲.۳
۴۹	۳.۳ ویژگی پیوستگی مجموعه‌ی متعامد برای تعامد عملگری	۳.۳
۵۳	۴ شاخص‌های $a(x, y)$ و $D(X)$ و ارتباط آن‌ها با انواع تعامد	۴
۵۴	۱.۴ مقدمه	۱.۴
۵۴	۲.۴ شاخص $a(x, y)$	۲.۴
۶۲	۳.۴ دیدگاه جدید برای زاویه و تعامد در فضاهاى نرم دار	۳.۴
۶۵	۴.۴ تعریف مجموعه‌ی متعامد برای a -تعامد و بررسی ویژگی پیوستگی آن	۴.۴
۶۶	۵.۴ شاخص $D(X)$	۵.۴

۶۶	۶.۴ کرانه‌هایی برای شاخص $D(X)$ در فضاها l_p
۶۹	مراجع
۷۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

تعاريف و پيش نيازها

در این فصل، مقدمات و پیش نیازهای لازم را از آنالیز تابعی می‌آوریم. تعاریف را به صورت مختصر و قضایا را بدون اثبات آورده‌ایم.

۱.۱ ساختارهای مهم در آنالیز تابعی

با مفاهیم متداول در آنالیز تابعی مانند فضای متریک و ویژگی‌های آن آشنا هستیم. همچنین، مفاهیم مجموعه‌های باز، بسته و فشرده هم روشن هستند. در این بخش مفاهیم اساسی در آنالیز تابعی مانند فضای نرم‌دار، فضای ضرب داخلی، فضای باناخ و فضای هیلبرت را مرور می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X فضایی برداری باشد. تابع $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم روی X می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

۱. به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|x\| \geq 0$ ؛

۲. به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ؛

۳. به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر α داشته باشیم $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ؛

۴. به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث).

در صورتی که $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد می‌گوییم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار است. توجه می‌کنیم که اگر $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد، آنگاه تابع d با ضابطه‌ی زیر یک متر روی X تعریف می‌کند

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

که آن را متر القا شده از نرم می‌نامیم؛ در نتیجه هر فضای نرم‌دار یک فضای متریک هم به شمار می‌رود.

تعریف ۲.۱.۱. یک فضای برداری مختلط H یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H عدد مختلط $\langle x, y \rangle$ ، که حاصل ضرب داخلی یا حاصل ضرب اسکالری x و y نامیده می‌شود، اختصاص داده شده باشد، به قسمی که قوانین زیر برقرار باشد.

به ازای هر x, y, z در H و هر α در $\mathbb{C}$

۱. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ؛ (علامت بار به معنی مزدوج مختلط می‌باشد).

$$۲. \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$۳. \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$۴. \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$۵. \langle x, x \rangle = 0 \text{ تنها زمانی که } x = 0$$

توجه داریم که هر فضای ضرب داخلی، یک فضای نرم‌دار نیز هست که نرم القا شده از ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

یادآوری می‌کنیم که یک فضای متریک کامل فضایی است که در آن هر دنباله‌ی کشی همگرا باشد. روشن است که هر زیر مجموعه‌ی بسته‌ی یک فضای کامل، کامل هست.

تعریف ۳.۱.۱. هر فضای نرم‌دار کامل را یک فضای باناخ می‌نامیم؛ منظور از کامل بودن در اینجا این است که هر دنباله‌ی کشی، با توجه به متر القا شده از نرم فضا، همگرا باشد.

فضای باناخ از مهم‌ترین ساختارها در آنالیز تابعی هست. بسیاری از قضایای اساسی در این زمینه مانند قضیه‌ی هان-باناخ، قضیه‌ی نگاشت باز و قضیه‌ی نمودار بسته در مورد فضاهای باناخ بیان می‌شوند؛

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد، مجموعه‌ی تابعک‌های خطی کراندار از X به $\mathbb{C}$ ، که همیشه یک فضای باناخ است، را با X^* نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان X می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. هر فضای ضرب داخلی کامل را یک فضای هیلبرت می‌نامیم. منظور از کامل بودن در اینجا این است که هر دنباله‌ی کشی، با توجه به متر حاصل از نرم القا شده از ضرب داخلی فضا، همگرا باشد.

فضای هیلبرت حالت خاص و بسیار مهمی از فضای باناخ به شمار می‌رود که وجود ابزار مفیدی به نام ضرب داخلی محاسبات در آن را ساده‌تر و روان‌تر می‌سازد. پس از معرفی فضاهای باناخ و هیلبرت نوبت به معرفی عملگرهای خطی روی این فضاها می‌رسد. بررسی ویژگی‌های عملگرهای خطی بخش مهم و قابل توجهی از مطالعات و پژوهش‌ها در آنالیز تابعی را به خود اختصاص داده است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند؛ عملگر خطی $T : X \rightarrow Y$ را کراندار می‌نامیم هرگاه کرانداری را حفظ کند؛ به عبارت بهتر، هر مجموعه‌ی کراندار را به یک مجموعه‌ی کراندار ببرد، می‌توان نشان داد که عملگر T کراندار است اگر و تنها اگر

$$\sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\} < \infty.$$

در این حالت، $\|T\|$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\}.$$

تعاریف معادل دیگر نیز برای نرم عملگری وجود دارد؛

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{ \|Tx\| : \|x\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \|Tx\| : \|x\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \|Tx\| : \|x\| < 1 \} \\ &= \inf \{ c : \forall x, \|Tx\| \leq c\|x\| \}. \end{aligned}$$

نرم عملگری ابزار مهم و دقیقی برای سنجش قدرت عملگرهای خطی است. یکی از ویژگی‌های مهم نرم عملگری را در نتیجه‌ی بعدی می‌بینیم.

نتیجه ۱.۱.۱. با توجه به تعریف نرم عملگری روشن است که برای هر x ، داریم

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم X و Y نرم‌دار باشند؛ مجموعه‌ی عملگرهای خطی و کراندار از X به Y را با نماد $B(X, Y)$ نشان می‌دهیم. $B(X, X)$ را به اختصار با $B(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۱. $B(X, Y)$ کامل است اگر و تنها اگر Y کامل باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد و $A \in B(H)$. در این صورت بنابر قضیه‌ی نمایش ریس عملگر یکتایی مانند $B \in B(H)$ وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $x, y \in H$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle.$$

در این حالت B را عملگر الحاقی A در $B(H)$ می‌نامیم و آن را با نماد A^* نشان می‌دهیم. در نتیجه، داریم

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

تعریف ۹.۱.۱. عملگر $P \in B(H)$ را تصویر می‌نامیم، هرگاه $P^2 = P$.

نتیجه ۲.۱.۱. اگر P یک عملگر تصویری باشد، آنگاه $\|P\| \geq 1$.

تعریف ۱۰.۱.۱. عملگر P را تصویر متعامد می‌نامیم، هرگاه خود الحاق و خود توان باشد به عبارت دیگر $P^* = P$ و $P^2 = P$ ؛ که در آن P^* عملگر الحاقی P است.

قضیه ۲.۱.۱. [۲۰] اگر P یک تصویر متعامد باشد، آنگاه $\|P\| = 1$.

عملگر الحاقی در حالتی که فضا باناخ باشد هم قابل تعریف است. به عبارت بهتر برای تعریف عملگر الحاقی وجود ضرب داخلی ضروری نیست. در ادامه دیدگاه باناخی برای تعریف عملگر الحاقی را می‌آوریم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و $T \in B(X)$. در این حالت مزدوج باناخی T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T^* : X^* \longrightarrow X^*$$

$$f \longmapsto T^*(f)$$

$$T^*(f)(x) = f(T(x)).$$

توجه می‌کنیم که $T^* \in B(X^*)$. همچنین توجه داریم که با نمایش قراردادی

$$f(x) = \langle x, f \rangle$$

می‌توان مزدوج باناخی را مشابه حالت هیلبرتی آن نمایش داد. به زبان ریاضی، داریم

$$\langle Tx, f \rangle = \langle x, T^*f \rangle$$

ماتریس‌ها در حقیقت نوع خاص و مهمی از عملگرهای خطی هستند. در حالتی که بعد فضا متناهی باشد عملگرهای خطی را به صورت ماتریسی هم نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. ماتریس‌های A و B را متشابه می‌نامیم هرگاه ماتریس وارون‌پذیری مانند D وجود داشته باشد به طوری که

$$A = D^{-1}BD.$$

تعریف ۱۳.۱.۱. ماتریس مربعی A را در نظر می‌گیریم؛ چندجمله‌ای مشخصه‌ی متناظر A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \det(xI - A).$$

ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌ی A مقادیر ویژه‌ی ماتریس A می‌باشند؛ مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را طیف A می‌نامیم و با نماد $\sigma(A)$ یا $Sp(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی و α یک مقدار ویژهی آن باشد؛ در این حالت می‌گوییم بردار ناصفر x یک بردار ویژهی متناظر با α برای A است هرگاه $Ax = \alpha x$.

تعریف ۱۵.۱.۱. بیشترین مقدار قدرمطلق مقادیر ویژهی یک ماتریس را شعاع طیفی آن ماتریس می‌نامیم؛ شعاع طیفی ماتریس A را با نماد $\rho(A)$ نشان می‌دهیم؛ پس داریم

$$\rho(A) = \max \{ |\alpha| : \det(\alpha I - A) = 0 \}.$$

ملاحظه ۱.۱.۱. اگر دو ماتریس با هم متشابه باشند آنگاه چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن‌ها یکسان است. در نتیجه مقادیر ویژه و شعاع طیفی آن‌ها هم یکسان خواهد بود.

می‌توان نشان داد که نرم عملگری ماتریس A از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\|A\| = [\rho(A^*A)]^{\frac{1}{2}}.$$

در بخش‌های بعدی در این باره بیشتر صحبت خواهیم کرد. در ادامه نوع بسیار مهمی از فضاها را معرفی می‌کنیم که در غالب مثال‌ها از آن‌ها استفاده می‌شود.

تعریف ۱۶.۱.۱. مجموعه‌ی دنباله‌هایی مانند $\{a_n\}$ ، را که $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ ، با نماد l^p نشان می‌دهیم. به زبان ریاضی،

$$l^p = \left\{ \{a_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}.$$

می‌توان نشان داد که l^p ، برای $p \geq 1$ ، یک فضای نرم‌دار است که نرم آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|\{a_n\}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

ملاحظه ۲.۱.۱. مجموعه‌ی دنباله‌های کراندار را با نماد l^∞ نشان می‌دهیم؛ به زبان ریاضی،

$$l^\infty = \{ \{a_n\} : \exists M \forall n, |a_n| < M \}.$$

l^∞ یک فضای نرم‌دار است که نرم آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|\{a_n\}\|_\infty = \sup \{ |a_n| \}_{n=1}^\infty.$$

تعریف ۱۷.۱.۱. فضای l_q^p فضای دنباله‌های q -تایی است که به نرم l^p مجهز شده‌اند؛ به زبان ریاضی،

$$l_q^p = \left\{ (a_1, \dots, a_q) : \|(a_1, \dots, a_q)\| = \left(\sum_{i=1}^q |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

۲.۱ انواع تعامد در فضاهای نرم‌دار

هم‌زمان با پیدایش ضرب داخلی، مفهوم تعامد با الهام از عمود بودن دو خط در صفحه‌ی اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ ، به عنوان رابطه‌ای بین بردارهای یک فضای ضرب داخلی تعریف شد. مطالعه روی این رابطه منجر به معرفی شرایط معادل برای تعامد دو بردار در یک فضای ضرب داخلی گردید. برخی از این شرایط معادل، تنها برحسب نرم بیان می‌شوند و در نتیجه می‌توان آن‌ها را به عنوان تعریفی از تعامد در فضاهای نرم‌دار (که الزاماً فضای ضرب داخلی نیستند) در نظر گرفت. بیرخوف در سال ۱۹۳۵ در مقاله‌ای اشاره‌ای مختصر به این موضوع داشته است.

بر خلاف فضاهای ضرب داخلی که مفهوم تعامد به راحتی در آن‌ها تعریف می‌شود، در فضاهای نرم‌دار یافتن ابزارهای مناسب برای تعریف تعامد کار دشواری است؛ به هر حال، تلاش‌های زیادی صورت گرفته است تا با کمک مفهوم نرم، مفهوم تعامد به شکل مناسبی توصیف شود. در ادامه بعضی از تعاریف ارائه شده برای تعامد در فضاهای نرم‌دار را مرور می‌کنیم.

فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و x و y اعضای X باشند؛

۱. تعامد رابرت^۱: بردارهای x و y بر هم عمود رابرت هستند هرگاه برای هر عدد حقیقی γ داشته باشیم

$$\|x + \gamma y\| = \|x - \gamma y\|;$$

در این حالت می‌نویسیم $x \perp_R y$.

۲. تعامد بیرخوف^۲–جیمز^۳: می‌گوییم x عمود بیرخوف–جیمز بر y است هرگاه برای هر اسکالر مانند λ داشته باشیم

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|;$$

در این حالت می‌نویسیم $x \perp_{BJ} y$.

¹B. D. Roberts

²G. Birkhoff

³R. C. James

۳. تعامد متساوی الساقین (تعامد جیمز): می‌گوییم x و y بر هم عمود متساوی الساقین (جیمز) هستند هرگاه

$$\|x + y\| = \|x - y\|;$$

در این حالت می‌نویسیم $y \perp_i x$ (روشن است که تعامد متساوی الساقین حالت بسیار خاصی از تعامد رابرت می‌باشد).

۴. تعامد سینگر^۴: می‌گوییم x و y بر هم عمود سینگر هستند هرگاه

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|;$$

در این حالت می‌نویسیم $y \perp_S x$.

۵. تعامد فیثاغورثی^۵: می‌گوییم x و y بر هم عمود فیثاغورثی هستند هرگاه

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2;$$

در این حالت می‌نویسیم $y \perp_P x$.

۶. تعامد دیمینه^۶: تعریف این نوع تعامد با تعاریف قبلی اندکی متفاوت است. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و X^* فضای دوگان آن باشد. در این حالت می‌گوییم x و y بر هم عمود دیمینه هستند هرگاه رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$\sup \{f(x)g(y) - f(y)g(x) : f, g \in X^*, \|f\| = 1, \|g\| = 1\} = \|x\|\|y\|.$$

در این حالت می‌نویسیم $y \perp_D x$.

۷. تعامد ناحیه‌ای^۷: می‌گوییم بردارهای ناصفر x و y بر هم عمود ناحیه‌ای هستند هرگاه بردارهای $x, -x, y, -y$ گوی واحد فضای تولید شده توسط x و y را به چهار ناحیه با مساحت مساوی تقسیم کنند؛ در این حالت می‌نویسیم $y \perp_A x$. همچنین بردار صفر را بر هر برداری عمود ناحیه‌ای در نظر می‌گیریم.

تلاش‌های زیادی صورت گرفته است تا روابط موجود میان انواع تعامد بیان شود و ارتباط آن‌ها با فضاهای ضرب داخلی کشف گردد. نشان داده شده است که بسیاری از این تعاریف در فضاهای ضرب داخلی بر تعریف متداول تعامد منطبق می‌شود. برای مثال به گزاره‌ی زیر توجه می‌کنیم.

⁴Singer

⁵Pythagorean

⁶Diminnie

⁷Area

گزاره ۱.۲.۱. می‌توان نشان داد در فضای ضرب داخلی X عبارتهای زیر معادل هستند.

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad (i)$$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (ii)$$

$$\|x + y\| = \|x - y\| \quad (iii)$$

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad \text{برای هر } \lambda \in \mathbb{C} \quad (iv)$$

به عبارت بهتر، در فضاهای ضرب داخلی، تعامد فیثاغورثی، تعامد متساوی الساقین و تعامد بیرخوف منطبق بر تعامد متداول هستند؛ همان‌طور که ملاحظه می‌شود شرایط معادلی که برای تعامد به دست آمده است، تنها بر حسب نرم بیان شده‌اند. از این رو با استفاده از آن‌ها می‌توان تعامد را از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای نرم‌دار گسترش داد.

گسترش تعریف تعامد، از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای نرم‌دار، ابتدا توسط رابرت در سال ۱۹۳۴ مطرح شد. وی در مقاله‌ی خود تعریف (۱) را برای تعامد دو بردار در یک فضای نرم‌دار ارائه کرد. پس از آن جیمز نشان داد که تعاریف رابرت مناسب نیست. جیمز ثابت کرد که اگر X فضای برداری متشکل از همه‌ی چند جمله‌ای‌های از درجه‌ی ۲ به شکل $ax^2 + bx$ با ضرایب حقیقی روی بازه‌ی $(0, 1)$ باشد، آن‌گاه شرط لازم برای تعامد دو بردار f و g به مفهوم (۱)، این است که حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد. وی سپس با الهام از ویژگی‌های هندسی تعامد دو بردار در فضای اقلیدسی، دو تعریف (۳) و (۵) را برای یک فضای نرم‌دار بیان کرد.

تعریف ۱.۲.۱. رابطه‌ی $\sim$ را روی یک مجموعه مانند A در نظر می‌گیریم.

$$(i) \quad \sim \text{ را متقارن گوئیم هرگاه } x \sim y \text{ نتیجه دهد } y \sim x;$$

$$(ii) \quad \sim \text{ را همگن گوئیم هرگاه } x \sim y \text{ نتیجه دهد } \lambda x \sim \mu y \text{ برای هر } \lambda, \mu \in \mathbb{C};$$

$$(iii) \quad \sim \text{ را جمعی گوئیم هرگاه } x \sim y \text{ و } x \sim z \text{ نتیجه دهد } x \sim y + z.$$

جیمز نشان داد که تعامد متساوی الساقین روی یک فضای نرم‌دار X ، جمعی و یا همگن نیست مگر وقتی که X یک فضای ضرب داخلی باشد؛ همچنین حکم مشابهی را برای تعامد فیثاغورثی اثبات کرد و به تفصیل به مطالعه‌ی آن‌ها پرداخت.

جیمز سپس در [۱۱] و [۱۲]، که مقالات مستخرج از رساله‌ی وی بودند، رابطه‌ی زیر را برای تعامد دو بردار در یک فضای نرم‌دار مطرح کرد

$$x \perp_J y \iff \|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

و به بررسی کلیه‌ی ویژگی‌های آن پرداخت.

در واقع قسمت (iv) از گزاره‌ی ۱.۲.۱ همان مطلبی است که بیرخوف در [۳] به آن اشاره نمود. بیرخوف در ابتدای این مقاله تعریف خود را از تعامد این‌طور بیان کرده است:

« دو بردار pq و pr در یک فضای ضرب داخلی X با بعد ناکم‌تر از ۳ بر هم عمودند هرگاه طول بردار pr مینیمم فاصله‌ی r تا سایر نقاط پاره‌خط pq باشد. »
در واقع همین تعریف بود که این ایده را به جیمز داد تا تعامد را به صورت رابطه‌ی بالا تعریف کند. در بعضی از مراجع این تعامد تنها به نام جیمز شناخته شده است چون هدف بیرخوف در مقاله‌ی خود کاملاً مستقل از این موضوع بوده است.
همان‌طور که دیدیم در یک فضای ضرب داخلی تعامدهای فیثاغورثی، متساوی الساقین و بیرخوف-جیمز معادل با تعامد ضرب داخلی هستند (گزاره ۱.۲.۱). اما جالب است بدانیم که در فضاهای نرم‌دار، این تعامدها کاملاً مستقل بوده و هیچ کدام دیگری را نتیجه نمی‌دهد. مثال زیر این مطلب را روشن‌تر می‌کند.

مثال ۱.۲.۱. فضای برداری l_1^2 را همراه با نرم $\|x\|_1 = |x(1)| + |x(2)|$ در نظر بگیرید (این همان فضای l_q^p تعریف ۱۷.۱.۱ است وقتی که $p = 1$ و $q = 2$).

۱. فرض کنید $x = (3, 2)$ و $y = (8, -4)$. در این صورت x بر y عمود فیثاغورثی هست اما عمود متساوی الساقین و بیرخوف-جیمز نیست.

۲. فرض کنید $x = (1, 1)$ و $y = (2, -1)$. در این صورت x بر y عمود متساوی الساقین هست اما عمود فیثاغورثی و بیرخوف-جیمز نیست.

۳. فرض کنید $x = (1, 0)$ و $y = (1, -1)$. در این صورت x بر y عمود بیرخوف-جیمز هست اما عمود متساوی الساقین و فیثاغورثی نیست.

بنا به تعریف تعامد بیرخوف-جیمز، می‌توان به سادگی بررسی کرد که این رابطه همگن است اما در حالت کلی جمعی و متقارن نیست.

اولین حکمی که جیمز باید اثبات می‌کرد این بود که تعامد تعریف شده توسط او ضعف تعامد تعریف شده توسط رابرت را در هندسه‌ی فضاهای نرم‌دار ندارد. به عبارت

دیگر، در هر فضای نرم‌دار X و برای هر $x \in X$ بردارهای غیر صفر $z_1, z_2 \in X$ وجود دارند به طوری که $z_1 \perp_{BJ} x$ و $x \perp_{BJ} z_2$. جیمز در [۱۲] با استفاده از قضیه‌ی هان-باناخ حکمی در این رابطه به صورت زیر به دست آورده است.

قضیه ۱.۲.۱. [۱۲] برای هر دو بردار $x, y \in X$ اعداد $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که

$$x \perp_{BJ} (\lambda x + y) \quad , \quad (\mu x + y) \perp_{BJ} x.$$

به علاوه، اگر

$$x \perp_{BJ} (\alpha_1 x + y) \quad , \quad x \perp_{BJ} (\alpha_2 x + y) \quad , \quad (\beta_1 x + y) \perp_{BJ} x \quad , \quad (\beta_2 x + y) \perp_{BJ} x,$$

آن‌گاه برای هر λ که $\alpha_1 \leq \lambda \leq \alpha_2$ و هر μ که $\beta_1 \leq \mu \leq \beta_2$ روابط

$$x \perp_{BJ} (\lambda x + y) \quad , \quad (\mu x + y) \perp_{BJ} x$$

برقرار است.

۳.۱ کاربردهای تعامد بیرخوف-جیمز

۱. **تساوی مثلث.** یکی از شرایطی که برای نرم‌دار بودن یک فضای برداری مانند X لازم است این است که تابع نرم در نامساوی مثلث، یعنی در عبارت

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X$$

صدق کند. مطالعات بسیاری روی نامساوی مثلث، معکوس آن و شرایطی که تحت آن‌ها این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود، انجام گرفته است [۹]. در این‌جا، با استفاده از تعامد بیرخوف-جیمز، یک شرط معادل برای تساوی مثلث در یک فضای نرم‌دار را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد و $x, y \in X$. در این صورت عبارتهای زیر معادل هستند.

$$(\text{i}) \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

$$(\text{ii}) \quad y \perp_{BJ} (\|x\|y - \|y\|x)$$

$$(\text{iii}) \quad x \perp_{BJ} (\|x\|y - \|y\|x)$$

۲. مشخص سازی فضاهای ضرب داخلی. تاکنون شرایط متعددی معرفی شده‌اند که تحت هر یک از آن‌ها نرم یک فضای نرم‌دار مانند X از یک ضرب داخلی به دست می‌آید. شناخته شده‌ترین این شرایط، قانون متوازی‌الاضلاع است. معیارهای دیگری نیز به دست آمده است که به طور خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم.

$$(i) \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 \quad \text{برای هر } x, y \in X \text{ که } \|x\| = \|y\| = 1;$$

$$(ii) \quad \|x+y\| = \|x-y\| \quad \text{آنگاه } \|x+ky\| = \|x-ky\| \quad \text{برای هر } k \in \mathbb{R};$$

$$(iii) \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{آنگاه } \|x+ky\|^2 = \|x\|^2 + \|ky\|^2 \quad \text{برای هر } k \in \mathbb{R}.$$

کاپور^۸ در [۱۴] ثابت کرده است که شرط لازم و کافی برای این که فضای نرم‌دار X یک فضای ضرب داخلی باشد این است که یکی از تعامدهای فیثاغورثی، متساوی الساقین و بیرخوف-جیمز دیگری را نتیجه دهد. به بیان دیگر، برای یک فضای نرم‌دار X گزاره‌های زیر معادل هستند.

$$(i) \quad X \text{ یک فضای ضرب داخلی است؛}$$

$$(ii) \quad \text{برای هر } x, y \in X \text{ اگر } x \perp_P y \text{ آنگاه } x \perp_i y;$$

$$(iii) \quad \text{برای هر } x, y \in X \text{ اگر } x \perp_i y \text{ آنگاه } x \perp_P y;$$

$$(iv) \quad \text{برای هر } x, y \in X \text{ اگر } x \perp_P y \text{ آنگاه } x \perp_{BJ} y;$$

$$(v) \quad \text{برای هر } x, y \in X \text{ اگر } x \perp_{BJ} y \text{ آنگاه } x \perp_P y;$$

$$(vi) \quad \text{برای هر } x, y \in X \text{ اگر } x \perp_i y \text{ آنگاه } x \perp_{BJ} y;$$

$$(vii) \quad \text{برای هر } x, y \in X \text{ اگر } x \perp_{BJ} y \text{ آنگاه } x \perp_i y;$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم هر گونه ارتباطی بین این تعامدها منجر به این می‌شود که X یک فضای ضرب داخلی باشد.

۳. نظریه‌ی بهترین تقریب^۹. یکی دیگر از کاربردهای تعامد بیرخوف-جیمز که در [۲۲] به آن پرداخته شده است، نظریه‌ی بهترین تقریب و وجود آن در فضاهای نرم‌دار و ارتباط آن با مشخص‌سازی یک فضای ضرب داخلی می‌باشد. قبل از بیان جزئیات بیش‌تر به تعاریف زیر نیاز داریم.

^۸O. P. Kapoor

^۹Best Approximation Theory

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار، Y زیرفضایی از آن و x_0 برداری خارج از Y باشد. بردار $y_0 \in Y$ را بهترین تقریب برای x_0 در Y می‌گوییم هرگاه

$$\|x_0 - y_0\| \leq \|x_0 - y\|, \quad \forall y \in Y$$

همچنین $w_0 \in Y$ را بهترین هم-تقریب x_0 در Y می‌گوییم هرگاه

$$\|w_0 - y\| \leq \|x_0 - y\|, \quad \forall y \in Y$$

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه‌ی $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ را نسبت به عنصر x متعامد به مفهوم بیرخوف-جیمز می‌گوییم هرگاه برای هر $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\|x\| \leq \left\| x + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|.$$

این تعریف در حقیقت تعمیم تعامد عضوی بیرخوف-جیمز است. به این مفهوم که اگر S تک عضوی باشد، تعریف تعامد بیرخوف-جیمز به دست می‌آید.

تعریف ۳.۳.۱. مجموعه‌ی S را متعامد به مفهوم بیرخوف-جیمز می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in S$ مجموعه‌ی $S \setminus \{x\}$ بر عنصر x متعامد به مفهوم بیرخوف-جیمز باشد.

در [۲۲] ثابت شده است که اگر X یک فضای ضرب داخلی اکیداً محدب هموار^{۱۰} با بعد ناکم‌تر از ۳ باشد، آنگاه برای هر زیرفضای Y و هر بردار خارج از Y مانند x_0 بهترین تقریب و بهترین هم-تقریب x_0 در Y با هم برابر هستند و در نهایت معیاری به صورت زیر برای فضاها ضرب داخلی بیان می‌شود.

«فضای نرم‌دار اکیداً محدب هموار با بعد متناهی X یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر برای هر بردار x_0 در گوی واحد X یک پایه‌ی متعامد به مفهوم بیرخوف-جیمز شامل x_0 برای X وجود داشته باشد.»

سوال: به عنوان یک مساله‌ی جالب می‌توان پرسید که اگر یک تبدیل خطی، یعنی یک نگاشت حافظ اعمال جمع و ضرب اسکالر، بین دو فضای نرم‌دار داشته باشیم، در چه صورت این نگاشت حافظ تعامد است، یعنی اگر دو بردار در دامنه‌ی تابع بر هم عمود باشند تحت چه شرایطی تصویرهای آن دو نیز بر هم عمود خواهد بود؟

¹⁰smooth

۴.۱ پیوستگی توابع مجموعه مقدار

پیوستگی توابع مجموعه مقدار همیشه جزء مسائل ابهام‌برانگیز بوده است. از این نظر که تعاریف متعددی برای نزدیکی مجموعه‌ها مطرح شده است که یکی از شاخص‌ترین آن‌ها متر هاسدورف است. در این بخش بعد از تعریف طیف و تابع طیفی، که نوع مهمی از توابع مجموعه مقدار است، در حالت‌های خاصی پیوستگی آن را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم X یک جبر باناخ یک‌دار باشد و $x \in X$. در این صورت طیف x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sigma(x) = Sp(x) = \{ \alpha \in \mathbb{C} : \alpha \cdot 1_X - x \text{ وارون پذیر نباشد} \}.$$

طیف هر عضو در یک جبر باناخ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی و فشرده از اعداد مختلط است.

مثال ۱.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت $B(X)$ با عمل ترکیب توابع یک جبر است. پس برای هر $A \in B(X)$ طیف A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Sp(A) = \{ \alpha \in \mathbb{C} : \alpha \cdot I - A \text{ وارون پذیر نباشد} \}.$$

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم X یک جبر باناخ یک‌دار باشد و $x \in X$. در این صورت شعاع طیفی x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho(x) = \sup \{ |\alpha| : \alpha \in Sp(x) \}.$$

قضیه ۱.۴.۱ (نگاشت طیفی). فرض کنیم A یک جبر باناخ یک‌دار باشد و $x \in A$. همچنین فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در مجموعه‌ی بازی شامل طیف x باشد، در این صورت داریم

$$Sp(f(x)) = f(Sp(x)).$$

قضیه ۲.۴.۱ [۱] فرض کنیم A یک جبر باناخ یک‌دار باشد و $x \in A$. همچنین فرض کنیم $\alpha \notin Sp(x)$. در این صورت داریم

$$dist(\alpha, Sp(x)) = \frac{1}{\rho((\alpha \cdot 1_A - x)^{-1})}.$$

که در آن منظور از $dist(\alpha, Sp(x))$ ، فاصله‌ی نقطه‌ی α از مجموعه‌ی $Sp(x)$ است.

فرض کنیم A یک جبر باناخ یک‌دار باشد. پرسش اصلی در نظریه‌ی طیفی این است که در باره‌ی خواص تابع طیفی $x \mapsto Sp(x)$ چه می‌توان گفت؟ آیا این تابع پیوسته است؟

برای بررسی پیوستگی توابع مجموعه مقدار دیدگاه‌های مختلفی پیشنهاد می‌شود. یک دیدگاه مشخص این است که ابتدا یک متر (فاصله) روی مجموعه‌ها تعریف کنیم، سپس پیوستگی توابع مجموعه مقدار را با کمک این متر بررسی کنیم. با توجه به این که تابع طیفی یک تابع مجموعه مقدار است و طیف هر عنصر یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $\mathbb{C}$ است، بنابراین، به منظور بررسی پیوستگی تابع طیفی، ابتدا فاصله‌ای روی زیرمجموعه‌های فشرده‌ی $\mathbb{C}$ ، به نام فاصله‌ی هاسدورف، معرفی می‌کنیم. [۱]

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنیم K_1 و K_2 زیرمجموعه‌های فشرده‌ای از $\mathbb{C}$ باشند. در این صورت فاصله‌ی هاسدورف بین K_1 و K_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Delta(K_1, K_2) = d_H(K_1, K_2) = \max \left\{ \sup_{z \in K_2} \text{dist}(z, K_1), \sup_{z \in K_1} \text{dist}(z, K_2) \right\}.$$

تعریف ۴.۴.۱. می‌گوییم نگاشت مجموعه مقدار $x \mapsto F(x)$ در نقطه‌ی $a \in A$ پیوسته است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$\|x - a\| < \delta$$

نتیجه بدهد

$$d_H(F(x), F(a)) < \epsilon.$$

همچنین می‌گوییم نگاشت $x \mapsto F(x)$ روی A پیوسته است هرگاه در هر $a \in A$ پیوسته باشد.

اگر برای $\epsilon > 0$ دلخواه، $\delta > 0$ متناظر با آن مستقل از نقطه‌ی a باشد می‌گوییم نگاشت $x \mapsto F(x)$ پیوسته‌ی یکنواخت است.

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنیم K یک زیرمجموعه از اعداد مختلط باشد و r یک عدد حقیقی مثبت باشد در این صورت نماد زیر را به کار می‌بریم

$$K + r = \{z : \text{dist}(z, K) \leq r\}.$$

لم ۱.۴.۱. فرض کنیم K_1 و K_2 دو زیرمجموعه‌ی فشرده از اعداد مختلط باشند. در این صورت روابط زیر برقرار هستند

$$K_1 \subset K_2 + d_H(K_1, K_2)$$

$$K_2 \subset K_1 + d_H(K_1, K_2).$$

قضیه ۳.۴.۱. [۱] فرض کنیم A یک جبر باناخ یک‌دار باشد. همچنین فرض کنیم $x, y \in A$ با یکدیگر جابه‌جا شوند. آنگاه $Sp(y) \subset Sp(x) + \rho(x - y)$ و در نتیجه داریم

$$d_H(Sp(x), Sp(y)) \leq \rho(x - y) \leq \|x - y\|.$$

به علاوه، اگر A جابه‌جایی باشد آنگاه تابع طیفی روی A پیوسته‌ی یکنواخت است.

فرض جابه‌جایی بودن در قضیه‌ی ۳.۴.۱ بسیار اساسی است؛ مثال بعدی نشان می‌دهد که با حذف این فرض، آن نتیجه لزوماً برقرار نیست.

مثال ۲.۴.۱. فرض کنیم $A = M_n(\mathbb{C})$ ، آنگاه تابع طیفی پیوسته است [۱]، اما پیوسته‌ی یکنواخت نیست؛ زیرا اگر قرار دهیم $A = M_2(\mathbb{C})$ و دنباله‌های زیر را در نظر بگیریم

$$a_n = \begin{bmatrix} n^2 & 1 \\ n^2(n - n^2) & n - n^2 \end{bmatrix}$$

و

$$b_n = \begin{bmatrix} n^2 & 1 \\ n^2(n - n^2) & n - n^2 - \frac{1}{n} \end{bmatrix},$$

آنگاه $\|a_n - b_n\| = \frac{1}{n}$ اما برای n های به اندازه‌ی کافی بزرگ $\frac{1}{n} \geq d_H(Sp(a_n), Sp(b_n))$ [۱].

مثال ۳.۴.۱. اگر $A = B(X)$ آنگاه تابع طیفی روی A پیوسته است اما پیوسته‌ی یکنواخت نیست [۱].

در حالت کلی تابع طیفی روی جبرهای باناخ حتی پیوسته هم نیست. برای مثال، کاکوتانی^{۱۱} نشان داده است که اگر H یک فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر باشد آنگاه تابع طیفی روی $B(H)$ پیوسته نیست [۱].

تعریف ۶.۴.۱. [۲] فرض کنیم (X, ρ_X) یک فضای متریک و (Y, ρ_Y) یک فضای متریک کامل باشد. نگاشت چند مقداری $F : X \rightarrow Y$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $x_0 \in X$ باشد.

^{۱۱}S. Kakutani

(i) F را در $x_0, \delta -$ نیم پیوسته‌ی بالایی نامیم اگر برای هر $\delta > 0$ ، همسایگی $N(x_0) \subset X$ از x_0 وجود داشته باشد به قسمی که

$$F(x) \subset F(x_0) + B(0, \delta), \quad \forall x \in N(x_0).$$

(ii) F را در $x_0, \delta -$ نیم پیوسته‌ی پایینی نامیم اگر برای هر $\delta > 0$ ، همسایگی $N(x_0) \subset X$ از x_0 وجود داشته باشد به قسمی که

$$F(x_0) \subset F(x) + B(0, \delta), \quad \forall x \in N(x_0).$$

(iii) F را در $x_0, \delta -$ نیم پیوسته نامیم هرگاه $\delta -$ نیم پیوسته‌ی بالایی و پایینی باشد.

(i') F را در x_0 نیم پیوسته‌ی بالایی نامیم اگر برای هر همسایگی $N(F(x_0)) \subset Y$ از $N(x_0) \subset X$ ، همسایگی $F(x_0)$ از x_0 وجود داشته باشد به قسمی که

$$F(x) \subset N(F(x_0)), \quad \forall x \in N(x_0).$$

(ii') F را در x_0 نیم پیوسته‌ی پایینی نامیم اگر برای هر $y_0 \in F(x_0)$ و هر همسایگی $N(y_0) \subset Y$ از y_0 ، همسایگی $N(x_0) \subset X$ از x_0 وجود داشته باشد به قسمی که

$$F(x) \cap N(y_0) \neq \emptyset, \quad \forall x \in N(x_0).$$

(iii') F را در x_0 نیم پیوسته نامیم، هرگاه نیم پیوسته‌ی بالایی و پایینی باشد.

لم ۲.۴.۱. [۲] فرض کنیم (X, ρ_X) یک فضای متریک و (Y, ρ_Y) یک فضای متریک کامل باشد. نگاشت چند مقداری $F : X \rightarrow Y$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $x_0 \in X$ باشد.

(i) اگر F در x_0 نیم پیوسته‌ی بالایی باشد آنگاه در $x_0, \delta -$ نیم پیوسته‌ی بالایی است. حالت برعکس زمانی برقرار است که $F(x_0)$ فشرده باشد.

(ii) اگر F در $x_0, \delta -$ نیم پیوسته‌ی پایینی باشد آنگاه در x_0 نیم پیوسته‌ی پایینی است. حالت برعکس زمانی برقرار است که $F(x_0)$ فشرده باشد.

قضیه ۴.۴.۱. [۱] فرض کنیم A یک جبر باناخ یک‌دار باشد. آنگاه تابع طیفی $x \mapsto Sp(x)$ روی A نیم پیوسته‌ی بالایی است؛ یعنی برای هر مجموعه‌ی باز شامل $Sp(y) \subset U$ مانند $\delta > 0$ ، چنان موجود است که اگر $\|x - y\| < \delta$ آنگاه $Sp(x) \subset U$.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنیم W زیرمجموعه‌ای از X باشد. در این صورت

(i) W را یک مجموعه‌ی G_δ نامیم اگر بتوان آن را به صورت اشتراک شمارا از زیرمجموعه‌های باز X نوشت؛

(ii) W را یک مجموعه‌ی F_σ نامیم اگر بتوان آن را به صورت اجتماع شمارا از زیرمجموعه‌های بسته‌ی X نوشت.

قضیه‌ی بعدی بیان می‌کند که حتی اگر تابع طیفی ناپیوسته باشد، مجموعه‌ی نقاط پیوستگی آن نسبتاً بزرگ است.

قضیه ۵.۴.۱. [۱] فرض کنیم A یک جبر باناخ یک‌دار باشد. آنگاه مجموعه‌ی نقاط پیوستگی تابع طیفی $x \mapsto Sp(x)$ یک زیرمجموعه‌ی G_δ چگال از A است.

قضیه ۶.۴.۱. [۱] فرض کنیم A یک جبر باناخ یک‌دار باشد و $x \in A$. همچنین فرض کنیم U و V دو مجموعه‌ی باز مجزا باشند به طوری که $Sp(x) \subset U \cup V$ و $Sp(x) \cap U \neq \emptyset$. در این صورت $r > 0$ چنان موجود است که اگر $\|x - y\| < r$ آنگاه $Sp(y) \cap U \neq \emptyset$.

تعریف ۸.۴.۱. یک مجموعه را کلاً ناهمبند می‌نامیم هرگاه مؤلفه‌های همبندی آن تک عضوی باشند. به عبارت بهتر، هر زیرمجموعه با بیش از یک نقطه‌ی آن ناهمبند است.

مثال ۴.۴.۱. طیف هر ماتریس یک مجموعه‌ی کلاً ناهمبند است.

قضیه ۷.۴.۱. فرض کنیم طیف a کلاً ناهمبند باشد؛ آنگاه تابع طیفی $x \mapsto Sp(x)$ در a پیوسته است.

قضیه‌ی قبل به خصوص نتیجه می‌دهد که تابع طیفی در تمام عناصرش، که طیف متناهی یا شمارا دارند، پیوسته است.

نتیجه ۱.۴.۱. اگر $A = M_n(\mathbb{C})$ آنگاه تابع طیفی روی A پیوسته است.

۵.۱ جبرهای C^*

جبرهای C^* از مهم‌ترین ساختارهای جبری در آنالیز تابعی هستند. بسیاری از فضا‌های آشنا مانند ماتریس‌ها و عملگرهای خطی ساختار جبر C^* را دارند.

تعریف ۱.۵.۱. منظور از یک جبر C^* ، یک جبر باناخ مانند A به همراه یک نگاشت $A \rightarrow A : *$ است که برای هر $x, y \in A$ و هر اسکالر α و β در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$۱. \quad x^{**} = x$$

$$۲. \quad (\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*$$

$$۳. \quad (xy)^* = y^*x^*$$

$$۴. \quad \|x^*x\| = \|x\|^2$$

عمل $*$ را یک برگشت روی A و عضو x^* را الحاق عضو x می‌نامیم.

شرط آخر در تعریف جبر C^* یک شرط اساسی است و در حقیقت دقیق‌ترین شرط در تعریف یک جبر C^* است. با کمک این ویژگی می‌توان نشان داد که برای هر x داریم

$$\|x\| = \|x^*\|.$$

به عبارت بهتر، عمل برگشت ایزومتري هست.

همچنین می‌توان نشان داد که در هر جبر C^* یک‌دار داریم $۱^* = ۱$. علاوه بر این می‌توان نشان داد که x وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر x^* چنین باشد. در این حالت داریم

$$(x^*)^{-۱} = (x^{-۱})^*.$$

از این ویژگی به سادگی نتیجه می‌شود که

$$Sp(x^*) = \overline{Sp(x)} = \{\bar{\alpha} : \alpha \in Sp(x)\}.$$

و در نتیجه $\rho(x^*) = \rho(x)$.

مجموعه‌ای اعداد مختلط با عمل مزدوج به عنوان برگشت ساده‌ترین جبر C^* است. در ادامه خواهیم دید که $B(H)$ هم یک جبر C^* است. در حقیقت بنا بر قضیه‌ی گلفاند-نیمارک-سگال هر جبر C^* برای H مناسبی در $B(H)$ نشانده می‌شود. عناصر خاصی از جبرهای C^* بسیار مورد توجه هستند. در تعریف زیر بعضی از این عناصر مهم را می‌بینیم.

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنیم A یک جبر C^* باشد و $x \in A$. در این صورت

$$۱. \quad x \text{ را خودالحاق می‌نامیم هرگاه } x^* = x$$

$$۲. \quad x \text{ را نرمال می‌نامیم هرگاه } x^*x = xx^*$$

$$۳. \quad x \text{ را یکانی می‌نامیم هرگاه } x^*x = ۱_A = xx^*$$

۴. x را تصویر می‌نامیم هرگاه $x^2 = x = x^*$ ؛

۵. x را مثبت می‌نامیم هرگاه عضوی مانند $y \in A$ وجود داشته باشد که $x = y^*y$.

روشن است که اعضای خودالحاق و یکانی، نرمال هستند. همچنین واضح است که اعضای مثبت، خودالحاق هستند و تصاویر مثبت هستند. علاوه بر تعاریف بالا، تعاریف معادل دیگری هم برای این اعضا گفته می‌شود که برای نمونه یکی از آن‌ها را در تعریف بعدی می‌آوریم.

تعریف ۳.۵.۱. فرض کنیم A یک جبر C^* و x عضو A باشد. در این صورت x یک تصویر است هرگاه $x = x^*x$.

در حقیقت اگر فرض کنیم x یک تصویر باشد، داریم

$$x = x^2 = xx = x^*x.$$

برعکس اگر فرض کنیم $x = x^*x$. در این حالت x خود الحاق خواهد بود و داریم

$$x = x^*x = xx = x^2.$$

پس x یک تصویر است.

روابط جالبی میان عناصر خاص یک جبر C^* و طیف آن‌ها وجود دارد. در ادامه بعضی از این روابط را می‌آوریم.

گزاره ۱.۵.۱. [۲۴] فرض کنیم A یک جبر C^* و $x \in A$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

(i) اگر x خودالحاق باشد آنگاه $Sp(x) \subset \mathbb{R}$ ؛

(ii) اگر x مثبت باشد آنگاه $Sp(x) \subset \mathbb{R}^+$ ؛

(iii) اگر x یکانی باشد آنگاه $Sp(x) \subset S$ ، که در آن S گوی واحد است؛

(iv) اگر x یک تصویر باشد آنگاه $Sp(x) \subset \{0, 1\}$.

۶.۱ محاسبه‌ی نرم عملگری ماتریس‌ها

ماتریس‌ها به عنوان مهم‌ترین نوع از عملگرهای خطی در فضاها با بعد متناهی همیشه مورد توجه ویژه‌ای قرار دارند؛ یکی از مهم‌ترین مباحث در ارتباط با ماتریس‌ها

محاسبه‌ی نرم عملگری آن‌ها هست که در بسیاری از موارد استفاده می‌شود. در ادامه راهکار مناسبی برای محاسبه‌ی نرم عملگری ماتریس‌ها با ابعاد کوچک ارائه می‌شود. ابتدا حالتی را که ماتریس A نرمال باشد بررسی می‌کنیم سپس یک راهکار کلی ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۶.۱. ماتریس الحاقی A را با نماد A^* نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A^* = \overline{A^t}.$$

می‌توان نشان داد که این تعریف بر تعریف عملگر الحاقی در فضاها ی هیلبرت، که قبلاً بیان شد، منطبق است.

تعریف ۲.۶.۱. ماتریس A را نرمال می‌نامیم هرگاه

$$A^*A = AA^*.$$

قضیه ۱.۶.۱. [۱] اگر ماتریس A نرمال باشد، آنگاه نرم عملگری A با شعاع طیفی آن برابر است.

مثال ۱.۶.۱. نرم عملگری هر ماتریس قطری برابر با بیشترین مقدار قدر مطلق درایه‌های قطری آن هست؛ به زبان ریاضی، اگر قرار دهیم

$$A = \text{diag}(\alpha_i),$$

آنگاه داریم

$$\|A\| = \max\{|\alpha_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

در حقیقت، هر عملگر قطری، نرمال هست، زیرا در این حالت داریم

$$A^* = \text{diag}(\overline{\alpha_i}).$$

و در نتیجه

$$A^*A = \text{diag}(\overline{\alpha_i}\alpha_i) = \text{diag}(|\alpha_i|^2) = \text{diag}(\alpha_i\overline{\alpha_i}) = AA^*.$$

در حالت کلی اگر ماتریس A نرمال نباشد نمی‌توان به صورت مستقیم از قضیه‌ی ۱.۶.۱ استفاده کرد. در عوض از یک خاصیت کلیدی در جبرهای C^* استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۶.۱. [۱] برای هر عملگر خطی A داریم

$$\|A\|^2 = \|A^*A\|.$$

قضیه‌ی قبل در حقیقت بیان می‌کند که $B(H)$ یک جبر C^* است و یک روش بسیار مؤثر و کارا برای محاسبه‌ی نرم عملگری به دست می‌دهد.

قضیه ۳.۶.۱. برای هر عملگر خطی A داریم

$$\|A\| = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}}.$$

در حقیقت توجه می‌کنیم که A^*A همیشه نرمال و در حقیقت خودالحاق هست در نتیجه داریم

$$\|A\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}} = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}}.$$

مثال ۲.۶.۱. ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

در این صورت داریم

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix},$$

در نتیجه

$$A^*A = \begin{bmatrix} \bar{a}a + \bar{c}c & \bar{a}b + \bar{c}d \\ \bar{a}b + \bar{c}d & \bar{b}b + \bar{d}d \end{bmatrix},$$

و معادله‌ی مشخصه‌ی A^*A به صورت زیر در می‌آید

$$x^2 - (\bar{a}a + \bar{b}b + \bar{c}c + \bar{d}d)x + ((\bar{a}a + \bar{c}c)(\bar{b}b + \bar{d}d) - (\bar{a}b + \bar{c}d)(\bar{a}b + \bar{c}d)) = 0$$

که ریشه‌های آن، x_1 و x_2 ، به ترتیب عبارتند از

$$\frac{1}{2} \left[(\bar{a}a + \bar{b}b + \bar{c}c + \bar{d}d) + \left[(\bar{a}a + \bar{b}b + \bar{c}c + \bar{d}d)^2 - 4((\bar{a}a + \bar{c}c)(\bar{b}b + \bar{d}d) - (\bar{a}b + \bar{c}d)(\bar{a}b + \bar{c}d)) \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

و

$$\frac{1}{2} \left[(\bar{a}a + \bar{b}b + \bar{c}c + \bar{d}d) - \left[(\bar{a}a + \bar{b}b + \bar{c}c + \bar{d}d)^2 - 4((\bar{a}a + \bar{c}c)(\bar{b}b + \bar{d}d) - (\bar{a}b + \bar{c}d)(\bar{a}b + \bar{c}d)) \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

بنابراین با توجه به قضایای قبلی داریم

$$\|A\| = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}} = \max\{|x_1|^{\frac{1}{2}}, |x_2|^{\frac{1}{2}}\}$$

همان گونه که در مثال قبل می‌بینیم محاسبه‌ی نرم عملگری یک ماتریس حتی در حالت دو در دو هم بسیار دشوار و شامل محاسبات زیاد است. محاسبه‌ی نرم عملگری در حالت‌های با بعد بیشتر بسیار طولانی هست و از آن صرف‌نظر می‌کنیم؛ در این جا تنها به یک مثال از حالت سه در سه می‌پردازیم.

مثال ۳.۶.۱. ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در این صورت داریم

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

در نتیجه

$$A^*A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

و معادله‌ی مشخصه‌ی A^*A به صورت زیر در می‌آید

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

که ریشه‌های آن عبارتند از $\{0, 3\}$. بنابراین با توجه به قضایای قبلی داریم

$$\|A\| = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}} = \max\{0, \sqrt{3}\} = \sqrt{3}.$$

فصل ۲

دیدگاه عملگری برای تعامل در فضاها خطی

در این فصل، ما دیدگاه عملگری را برای تعامد در فضاهای خطی معرفی می‌کنیم. به طور خاص، مفهوم بردارهای متعامد را، با استفاده از عملگری که به آنها اختصاص می‌دهیم، در فضاهای نرم‌دار معرفی می‌نماییم.

۱.۲ مقدمه

تعامد، یکی از مهم‌ترین مفاهیم آنالیز ریاضی می‌باشد و در بخش‌های مختلف مطرح می‌شود. شاید بتوان گفت، تعامد یکی از مباحث اصلی مطرح در فضاهای خطی، نرم‌دار و ضرب داخلی است. انواع مختلفی از تعامد وجود دارد. در واقع، تعامد به اشکال مختلفی در فضاهای ریاضی تعریف شده است.

در فضاهای ضرب داخلی، به سادگی می‌گوییم دو بردار x و y عمودند اگر

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

اما، در فضاهای نرم‌دار ابزار ساده‌ای برای تعریف بردارهای متعامد وجود ندارد؛ هرچند نظریه‌های خوبی وجود دارد که یکی از آنها تعامد بیرخوف-جیمز [۳] است. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار حقیقی و x و y اعضای X باشند. می‌گوییم x متعامد بیرخوف بر y است، اگر برای هر اسکالر a داشته باشیم،

$$\|x\| \leq \|x + ay\|.$$

به سادگی می‌توانیم نشان دهیم این تعریف بر تعریف تعامد در فضای ضرب داخلی منطبق است. [۱۳]

در سال ۱۹۹۳، میلشیک^۱، g -تعامد را در فضاهای نرم‌دار از طریق مشتقات گاتوکس^۲ معرفی نمود و حال ما نماد g -زاویه را در ارتباط با g -تعامد داریم.

تعریف ۱.۱.۲. تابع $g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \|(\tau_+(x, y) + \tau_-(x, y))\|,$$

که در آن

$$\tau_{\pm}(x, y) = \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}.$$

¹Milicic

²Gateaux

g -زاویه بین دو بردار x و y را با $A_g(x, y)$ نمایش می‌دهیم که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$A_g(x, y) = \arccos \frac{g(x, y)}{\|x\| \|y\|}.$$

به علاوه گوییم x بر y ، g -متعامد است ($x \perp_g y$) اگر

$$g(x, y) = 0,$$

یعنی

$$A_g(x, y) = \frac{\pi}{2}.$$

تعریف ۲.۱.۲. فضای نرم‌دار X را یک فضای شبه ضرب داخلی (به صورت خلاصه فضای $q.i.p$)^۳ می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$

$$\|x + y\|^4 + \|x - y\|^4 = 8 \left[\|x\|^2 g(x, y) + \|y\|^2 g(y, x) \right].$$

مثال ۱.۱.۲. فضای l^4 یک فضای شبه ضرب داخلی است اما فضای l^1 یک فضای شبه ضرب داخلی نیست.

قضیه ۱.۱.۲. [۱۹] فضای شبه ضرب داخلی X به طور یکنواخت هموار و اکیداً محدب است و همچنین اگر X باناخ باشد، بازتابی^۴ نیز هست.

تعریف ۳.۱.۲. در [۱۸]، با استفاده از تابع g ، روابط زیر معرفی شده‌اند

$$x \stackrel{g}{\perp} y \Leftrightarrow g(x, y) + g(y, x) = 0$$

و

$$x \stackrel{g}{\perp}_g y \Leftrightarrow \|x\|^2 g(x, y) + \|y\|^2 g(y, x) = 0.$$

قضیه ۲.۱.۲. [۱۸] اگر X هموار باشد آنگاه

$$x \perp_g y \Leftrightarrow x \perp_B y.$$

لم ۱.۱.۲. [۱۹] اگر X یک فضای شبه ضرب داخلی باشد آنگاه

$$x \stackrel{g}{\perp}_g y \Leftrightarrow x \perp_J y.$$

و

$$x \stackrel{g}{\perp}_g y \Leftrightarrow x \perp_S y.$$

^۳Quasi Inner Product

^۴Reflexive

در فضای ضرب داخلی $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ، بنا بر تعریف متداول، زاویه ی $A(x, y)$ بین دو بردار غیر صفر x و y در X از رابطه ی زیر به دست می آید

$$A(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|},$$

که در آن $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ نرم القا شده از ضرب داخلی در X را نشان می دهد. می بینیم که زاویه ی $A(x, y)$ در ویژگی های زیر صدق می کند

- توازی: $A(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر x و y در یک جهت باشند؛ $A(x, y) = \pi$ اگر و تنها اگر x و y در جهت مخالف هم باشند.
- تقارن: $A(x, y) = A(y, x)$ ، برای هر x و y در X .
- همگنی:

$$A(ax, by) = \begin{cases} A(x, y) & ab > 0; \\ \pi - A(x, y) & ab < 0. \end{cases}$$

- پیوستگی: اگر $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ (در نرم)، آنگاه $A(x_n, y_n) \rightarrow A(x, y)$.
- g -زاویه بر زاویه معمول در یک فضای ضرب داخلی منطبق است و ویژگی های زیر را دارد.
- ویژگی توازی جزئی: اگر x و y در یک جهت باشند، آنگاه $A_g(x, y) = 0$ ؛ اگر x و y در جهت مخالف هم باشند آنگاه $A_g(x, y) = \pi$.
- ویژگی همگنی:

$$A_g(ax, by) = \begin{cases} A_g(x, y) & ab > 0; \\ \pi - A_g(x, y) & ab < 0. \end{cases}$$

- ویژگی پیوستگی جزئی: اگر $y_n \rightarrow y$ (در نرم)، آنگاه $A_g(x, y_n) \rightarrow A_g(x, y)$.
- اما، به هر حال، g -تعامد معادل تعامد بیرخوف نمی باشد.
- در [۲۳]، تصویرها برای ارائه ی تعریف p -زاویه، $A_p(x, y)$ ، بین دو بردار x و y استفاده شده اند، چنان که x عمود بیرخوف است بر y اگر و تنها اگر

$$A_p(x, y) = \frac{\pi}{2}.$$

از آنجایی که زاویه‌ی بین دو بردار در فضای نرم‌دار همان زاویه‌ی بین آن دو بردار در زیرفضای تولید شده توسط آنهاست، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که فضای موردنظر دو بعدی باشد؛ به عبارت بهتر، تعریف زاویه را برای صفحه‌ی مینکوفسکی^۵، یعنی فضای خطی نرم‌دار دو بعدی حقیقی، بیان می‌کنیم. دیدگاه‌های گوناگونی در این رابطه وجود دارد، در اینجا به تعریف ارائه شده در [۲۳] اشاره می‌کنیم. مطالب بیشتر درباره‌ی ویژگی‌های هندسی صفحه‌ی مینکوفسکی را می‌توانید در [۱۶] و [۱۷] بیابید.

فرض کنید X صفحه‌ی مینکوفسکی باشد. به وسیله‌ی $\|\cdot\|$ نرم X را نمایش می‌دهیم و پایه‌ی $\{e_1, e_2\}$ را برای X در نظر می‌گیریم؛ حال می‌توانیم هر $x \in X$ را به صورت $x = (x_1, x_2)$ تحت این پایه بنویسیم که در آن $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. به علاوه، $\{\delta_{e_1}, \delta_{e_2}\}$ پایه‌ای برای فضای دوگان X^* است، که در آن δ_{e_i} ، $i = 1, 2$ ، تابع خطی کراندار روی X با ضابطه‌ی زیر است

$$\delta_{e_i}(e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j; \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی کراندار از X به X را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

برای $T \in B(X)$ عملگر $T^* \in B(X^*)$ را مزدوج باناخ T می‌نامیم اگر برای هر $x \in X$ و هر $f \in X^*$ داشته باشیم $(T^*f)(x) = f(Tx)$. توجه داشته باشید که اگر از نماد زیر استفاده کنیم

$$f(x) = \langle x, f \rangle,$$

ویژگی عملگر مزدوج را نیز می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم

$$\langle x, T^*f \rangle = \langle Tx, f \rangle;$$

نمادی که در فضای ضرب داخلی رایج است.

فرض می‌کنیم $x = [x_1, x_2]^T$ و $y = [y_1, y_2]^T$ دو بردار مستقل خطی در X تحت پایه‌ی $\{e_1, e_2\}$ باشند. قرار می‌دهیم

$$D_{xy} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

⁵Minkowski Plane

توجه می‌کنیم از آنجایی که x و y مستقل خطی‌اند

$$|D_{xy}| = x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0.$$

P_{xy} را تصویر موازی y از X به زیرفضای $\{\lambda x; \lambda \in \mathbb{R}\}$ تعریف می‌کنیم. پس P_{xy} تنها به x و y بستگی داشته و تحت پایهی $\{e_1, e_2\}$ نمایشی به صورت زیر دارد

$$P_{xy} = D_{xy} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot D_{xy}^{-1} = \frac{1}{|D_{xy}|} \begin{bmatrix} x_1 y_2 & -x_1 y_1 \\ x_2 y_2 & -x_2 y_1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

به وضوح برای هر دو بردار مستقل خطی x و y در X ،

$$1 \leq \|P_{xy}\| < +\infty.$$

به علاوه، $p(x, y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p(x, y) = \begin{cases} 0 & x \text{ و } y \text{ وابسته خطی باشند؛} \\ \|P_{xy}\|^{-1} & x \text{ و } y \text{ مستقل خطی باشند.} \end{cases} \quad (3.2)$$

برای هر $x, y \in X$ ، p -زاویه بین x و y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_p(x, y) = \arcsin(p(x, y)). \quad (4.2)$$

قضیه ۳.۱.۲. [۲۳] p -زاویه در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند.

(i) ویژگی توازی: $A_p(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر x و y وابسته‌ی خطی باشند؛

(ii) ویژگی همگنی: $A_p(ax, by) = A_p(x, y)$ برای هر $x, y \in X$ و $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ؛

(iii) ویژگی پیوستگی: اگر $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ (در نرم)، آنگاه

$$A_p(x_n, y_n) \rightarrow A_p(x, y).$$

لم زیر به سادگی با توجه به تعریف استقلال خطی و تعریف عملگر P_{xy} ثابت می‌گردد.

لم ۲.۱.۲. فرض کنیم x و y دو بردار مستقل خطی در فضای دو بعدی X باشند. در این صورت برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ، $z \in X$ وجود دارند به قسمی که

$$z = ax + by.$$

به علاوه این تجزیه یکتاست و

$$P_{xy}(z) = ax.$$

لم ۳.۱.۲. فرض کنیم x بر y متعامد بیرخوف باشد آنگاه برای هر $a, b \in \mathbb{R}$

$$\|ax + by\| \geq \|ax\|.$$

برای $a = 0$ این نتیجه واضح است؛ حال فرض می‌کنیم $a \neq 0$. از آن جا که x بر y متعامد بیرخوف است داریم

$$\|ax + by\| = |a| \left\| x + \frac{b}{a}y \right\| \geq |a| \|x\| = \|ax\|.$$

جالب است توجه کنیم که تعامد تعریف شده در این بخش با تعامد بیرخوف معادل است. برای بررسی این مطلب ابتدا فرض می‌کنیم x بر y متعامد بیرخوف باشد. واضح است که x و y مستقل خطی هستند. طبق لم ۲.۱.۲، برای هر $z \in X$ می‌توانیم بنویسیم

$$z = ax + by, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

طبق لم ۳.۱.۲،

$$\|P_{xy}(z)\| = \|ax\| \leq \|ax + by\| = \|z\|.$$

به علاوه،

$$\|P_{xy}\| \geq 1.$$

بنابراین

$$\|P_{xy}\| = 1.$$

حال فرض می‌کنیم $\|P_{xy}\| = 1$. برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم

$$\|x\| = \|P_{xy}(x + ty)\| \leq \|P_{xy}\| \|x + ty\| = \|x + ty\|.$$

بنابراین x عمود بیرخوف بر y است. خلاصه‌ی این مطلب را در قضیه زیر می‌بینیم.

قضیه ۴.۱.۲. [۲۳] فرض کنیم $x = [x_1, x_2]^T$ و $y = [y_1, y_2]^T$ دو بردار در صفحه‌ی مینکوفسکی X با پایه‌ی $\{e_1, e_2\}$ باشند. در این صورت x بر y متعامد بیرخوف است اگر و تنها اگر

$$A_p(x, y) = \frac{\pi}{4},$$

یعنی

$$\|P_{xy}\| = 1.$$

لم ۴.۱.۲. فرض کنیم $x = [x_1, x_2]^T$ و $y = [y_1, y_2]^T$ دو بردار مستقل خطی در صفحه‌ی مینکوفسکی X با پایه‌ی $\{e_1, e_2\}$ باشند. همچنین فرض کنیم $x' = [y_2, -y_1]^T$ و $y' = [-x_2, x_1]^T$ دو بردار در فضای دوگان X^* با پایه‌ی $\{\delta_{e_1}, \delta_{e_2}\}$ باشند. در این صورت عملگر مزدوج باناخی P_{xy} است. یعنی،

$$P_{x'y'} = P_{xy}^*.$$

قضیه ۵.۱.۲. [۲۳] فرض کنیم $x = [x_1, x_2]^T$ و $y = [y_1, y_2]^T$ دو بردار مستقل خطی در صفحه‌ی مینکوفسکی X با پایه‌ی $\{e_1, e_2\}$ باشند. همچنین فرض کنیم $x' = [y_2, -y_1]^T$ و $y' = [-x_2, x_1]^T$ دو بردار در فضای دوگان X^* با پایه‌ی $\{\delta_{e_1}, \delta_{e_2}\}$ باشند. در این صورت

$$A_p(x, y) = A_p(x', y').$$

قضیه ۶.۱.۲. [۲۳] فرض کنیم $1 \leq r \leq \infty$. برای هر دو بردار $x = [x_1, x_2]^T$ و $y = [y_1, y_2]^T$ در l_r^X ، زاویه‌ی بین x و y برابر است با

$$A_p(x, y) = \arcsin \left(\frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\|x\|_r \|y\|_{\frac{r}{r-1}}} \right).$$

ملاحظه ۱.۱.۲. با توجه به نامساوی هولدر داریم

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_r \|y\|_q$$

که در آن r و q مزدوج یکدیگر هستند؛ همچنین تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $|x|^r$ مضربی از $|y|^q$ باشد، که در این جا $|x|^r$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|x|^r = (|x_1|^r, \dots, |x_n|^r).$$

در نتیجه در حالت دو بعدی بردار x بر y ، p -متعامد است اگر و تنها اگر

$$|x_1|^r = \alpha |y_2|^q, \quad |x_2|^r = \alpha |y_1|^q.$$

نتیجه ۱.۱.۲. فرض کنیم $x = [x_1, x_2]^T$ و $y = [y_1, y_2]^T$ دو بردار در l_r^∞ باشند. در این صورت $x \perp_B y$ اگر و تنها اگر

$$\|x\|_r \|y\|_{\frac{r}{r-1}} = |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

این توصیف از تعامد بیرخوف در l_r^∞ بر نتیجه‌ای که جیمز در [۱۲] از روش دیگری به آن رسیده منطبق است.

۲.۲ گسترش مفهوم p -زاویه و p -تعامد در فضاهای n -بعدی

فرض کنیم X یک فضای خطی n -بعدی باشد؛ همچنین فرض کنیم

$$x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \quad , \quad k = 1, \dots, n$$

n بردار مستقل خطی در X باشند. قرار می‌دهیم

$$D_{x_1, \dots, x_n} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

از آنجا که $x_1, \dots, x_n$ مستقل خطی‌اند، داریم

$$|D_{x_1, \dots, x_n}| \neq 0.$$

به علاوه، فرض کنیم $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ دو بردار مستقل خطی باشند؛ x و y را با اضافه کردن $n-2$ بردار مانند

$$z_k = (z_{k1}, \dots, z_{kn}) \quad , \quad k = 1, \dots, n-2.$$

به پایه‌ای برای X گسترش می‌دهیم.

$P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$ را تصویر موازی y از X به زیرفضای تولید شده توسط $\{x, z_1, \dots, z_{n-2}\}$ تعریف می‌کنیم. از آنجا که $x, z_1, \dots, z_{n-2}, y$ بردارهای ویژه‌ی $P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$ هستند نتیجه می‌شود $P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$ مشابه

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

می‌باشد؛ در واقع $P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$ نمایشی به صورت زیر دارد

$$P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y} = D_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot D_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}^{-1}. \quad (6.2)$$

به سادگی می توان دید که برای هر دو بردار مستقل خطی x و y در X

$$1 \leq \|P_{x,z_1,\dots,z_{n-2},y}\| < +\infty.$$

بنابراین، $P_{x,z_1,\dots,z_{n-2},y}$ یک عملگر کراندار است.

حال قرار می دهیم

$$p_{z_1,\dots,z_{n-2}}(x,y) = \|P_{x,z_1,\dots,z_{n-2},y}\|^{-1} \quad (7.2)$$

و به علاوه $p(x,y)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$p(x,y) = \sup \{p_{z_1,\dots,z_{n-2}}(x,y) : z_1,\dots,z_{n-2} \in X\}. \quad (8.2)$$

لم ۱۰.۲.۲. مشابه عملگر خطی و با توجه به ویژگی همگنی $P_{x,z_1,\dots,z_{n-2},y}$ ، داریم

$$p(x,y) = \sup \left\{ \|P_{x,z_1,\dots,z_{n-2},y}\|^{-1} : z_1,\dots,z_{n-2} \in X, \|z_1\| = 1, \dots, \|z_{n-2}\| = 1 \right\}.$$

برهان. از آنجا که $P_{x,z_1,\dots,z_{n-2},y}$ نسبت به همه ی عناصرش همگن است، داریم

$$P_{x,z_1,\dots,z_{n-2},y} = P_{x,\frac{z_1}{\|z_1\|},\dots,\frac{z_{n-2}}{\|z_{n-2}\|},y}.$$

توجه می کنیم که $\frac{z_1}{\|z_1\|}, \dots, \frac{z_{n-2}}{\|z_{n-2}\|}$ در گوی واحد X هستند؛ حال، مجدد با جایگزینی

با $\frac{z_1}{\|z_1\|}, \dots, \frac{z_{n-2}}{\|z_{n-2}\|}$ نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \sup \left\{ \|P_{x,z_1,\dots,z_{n-2},y}\|^{-1} : z_1,\dots,z_{n-2} \in X \right\} \\ &= \sup \left\{ \|P_{x,\frac{z_1}{\|z_1\|},\dots,\frac{z_{n-2}}{\|z_{n-2}\|},y}\|^{-1} : z_1,\dots,z_{n-2} \in X \right\} \\ &= \sup \left\{ \|P_{x,z_1,\dots,z_{n-2},y}\|^{-1} : z_1,\dots,z_{n-2} \in X, \|z_1\| = 1, \dots, \|z_{n-2}\| = 1 \right\}. \end{aligned}$$

□

لم ۲.۲.۲. فرض کنیم X فضایی با بعد متناهی باشد؛ آنگاه

$$p(x, y) = \max \left\{ \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|^{-1} : z_1, \dots, z_{n-2} \in X, \|z_1\| = 1, \dots, \|z_{n-2}\| = 1 \right\}.$$

برهان. برای اثبات این لم از این ویژگی اساسی توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده استفاده می‌کنیم که هر تابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده مقادیر اکسترمم خود را اختیار می‌کند؛ تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f : B_1(X) \times \dots \times B_1(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$f(z_1, \dots, z_{n-2}) = \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|^{-1}$$

که در آن $B_1(X)$ گوی واحد X را نشان می‌دهد؛ واضح است که f پیوسته است. به علاوه، از آنجا که X دارای بعد متناهی است، مجموعه‌ی $B_1(X) \times \dots \times B_1(X)$ فشرده است. بنابراین، تابع f ماکسیمم خود را روی این مجموعه اختیار می‌کند. $\square$

تعریف ۱.۲.۲. برای هر x و y مستقل خطی در X ، p -زاویه بین x و y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_p(x, y) = \arcsin(p(x, y)). \quad (9.2)$$

توجه می‌کنیم که p -زاویه به بردارهای انتخاب شده $z_1, \dots, z_{n-2}$ بستگی ندارد. به علاوه، گوییم x و y ، p -متعامد هستند هرگاه

$$A_p(x, y) = \frac{\pi}{2}.$$

به طور معادل، x و y ، p -متعامدند اگر بردارهای $z_1, \dots, z_{n-2}$ چنان موجود باشند که

$$\|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| = 1.$$

در ادامه، برای درک بهتر، مفهوم p -زاویه را با یک مثال بیان می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۲. برای محاسبه‌ی زاویه‌ی بین $x = (1, 0, 0)$ و $y = (0, 1, 0)$ در $\mathbb{R}^3$ ، با افزودن $z_1 = (a, b, c)$ مستقل خطی نسبت به x و y ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم

$$P = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

پس داریم

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس $P^T P$ به صورت زیر در می‌آید

$$\det(xI - P^T P) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x - \left[\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1\right] \end{vmatrix} = (x-1) \left[x \left(x - \left(\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1 \right) \right) \right].$$

بنابراین بیشترین مقدار ویژه $P^T P$ یا $\rho(P^T P)$ برابر با $\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1$ است و در نتیجه بنا بر قضیه ۳.۶.۱ داریم

$$\|P\| = \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}$$

در ادامه با توجه به تعریف $p(x, y)$ داریم

$$p(x, y) = \inf_{b, c \in \mathbb{R}} \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1},$$

پس $A_p(x, y) = \frac{\pi}{4}$.

به طور مشابه، اگر $x = (1, 0, 0)$ و $y = (0, 0, 1)$ آنگاه $A_p(x, y) = \frac{\pi}{4}$.

۳.۲ ویژگی‌های p -زاویه

بعضی از ویژگی‌های p -زاویه در قضیه‌ی زیر آورده شده است.

قضیه ۱.۳.۲. p -زاویه دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد

۱. همگنی: $A_p(ax, by) = A_p(x, y)$ برای هر x و y در X و هر a و b ناصفر در $\mathbb{R}$ ؛

۲. پیوستگی: اگر $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ (در نرم)، آنگاه $A_p(x_n, y_n) \rightarrow A_p(x, y)$.

برهان. ۱. همگنی A_p به سادگی از تعریف نتیجه می‌شود. در حقیقت،

$$P_{ax, z_1, \dots, z_{n-2}, by} = P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$$

برای هر اسکالر a و b . بنابراین

$$\|P_{ax, z_1, \dots, z_{n-2}, by}\| = \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|$$

و در نتیجه $A_p(ax, by) = A_p(x, y)$.

۲. برای اثبات پیوستگی A_p ، ابتدا توجه می‌کنیم که درایه‌های ماتریس $P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$

به صورت

$$\frac{1}{|D_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}|} f(x, z_1, \dots, z_{n-2}, y)$$

هستند، که در آن f چندجمله‌ای بر حسب $x, z_1, \dots, z_{n-2}, y$ است؛

بنابراین، $P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$ بر حسب x و y پیوسته است؛ یعنی وقتی $m \rightarrow \infty$ آن گاه

$$\|P_{x_m, z_1, \dots, z_{n-2}, y_m} - P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| \rightarrow 0.$$

از طرف دیگر،

$$\|P_{x_m, z'_1, \dots, z'_{n-2}, y_m}\| \leq \|P_{x_m, z'_1, \dots, z'_{n-2}, y_m} - P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| + \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|.$$

بنابراین، با گرفتن اینفیموم روی $z'_1, \dots, z'_{n-2}$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \inf_{z'_1, \dots, z'_{n-2}} \|P_{x_m, z'_1, \dots, z'_{n-2}, y_m}\| &\leq \inf_{z'_1, \dots, z'_{n-2}} \|P_{x_m, z'_1, \dots, z'_{n-2}, y_m} - P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| \\ &\quad + \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|, \end{aligned}$$

مجدداً با گرفتن اینفیموم روی $z_1, \dots, z_{n-2}$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \inf_{z'_1, \dots, z'_{n-2}} \|P_{x_m, z'_1, \dots, z'_{n-2}, y_m}\| &\leq \inf_{z_1, \dots, z_{n-2}, z'_1, \dots, z'_{n-2}} \|P_{x_m, z'_1, \dots, z'_{n-2}, y_m} - P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| \\ &\quad + \inf_{z_1, \dots, z_{n-2}} \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|, \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\inf_{z'_1, \dots, z'_{n-2}} \|P_{x_m, z'_1, \dots, z'_{n-2}, y_m}\| - \inf_{z_1, \dots, z_{n-2}} \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|$$

$$\leq \inf_{z_1, \dots, z_{n-2}, z'_1, \dots, z'_{n-2}} \|P_{x_m, z'_1, \dots, z'_{n-2}, y_m} - P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|.$$

از سوی دیگر،

$$\inf_{z_1, \dots, z_{n-2}, z'_1, \dots, z'_{n-2}} \|P_{x_m, z'_1, \dots, z'_{n-2}, y_m} - P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|$$

$$\leq \inf_{z_1, \dots, z_{n-2}} \|P_{x_m, z_1, \dots, z_{n-2}, y_m} - P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|.$$

که نتیجه می دهند تابع

$$f(x, y) = \inf_{z_1, \dots, z_{n-2}} \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|$$

پیوسته است. بنابراین، وارون آن، یعنی تابع

$$p(x, y) = (f(x, y))^{-1} = \sup_{z_1, \dots, z_{n-2}} \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|^{-1}.$$

نیز پیوسته است و در نهایت نتیجه می شود تابع

$$A_p(x, y) = \arcsin(p(x, y))$$

□ پیوسته است.

ملاحظه ۱.۳.۲. توجه می کنیم که مفاهیم p -زاویه و p -تعامد در حالت کلی متقارن نیستند؛ به عبارت بهتر $A_p(x, y)$ لزوماً برابر با $A_p(y, x)$ نمی باشد. محاسبات زیر این مطلب را روشن تر می کند.

یادآوری می کنیم که طبق قضیه ۶.۱.۲، p -زاویه ی بین دو بردار در l^r به صورت زیر در می آید

$$A_p(x, y) = \arcsin \left(\frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\|x\|_r \|y\|_{\frac{r}{r-1}}} \right).$$

اکنون بردارهای زیر را در l^3 در نظر می گیریم

$$x = (2, 2), \quad y = (-9, 4).$$

در نتیجه

$$\|x\|_3 = \sqrt[3]{35}, \quad \|y\|_{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{35^2}.$$

و

$$\|y\|_3 = \sqrt[3]{793}, \quad \|x\|_{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2^3} + \sqrt{3^3}\right)^2}.$$

بنابراین

$$A_p(x, y) = \arcsin\left(\frac{35}{\sqrt[3]{35}\sqrt[3]{35^2}}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

اما

$$A_p(y, x) = \arcsin\left(\frac{35}{\sqrt[3]{793}\sqrt[3]{\left(\sqrt{2^3} + \sqrt{3^3}\right)^2}}\right).$$

همان گونه که می بینیم در این جا $A_p(x, y) \neq A_p(y, x)$.

لم ۱.۳.۲. فرض کنید x و y دو بردار مستقل خطی در X باشند. با گسترش x و y به پایه ای مانند $\{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y\}$ ، هر z در X به صورت

$$z = ax + c_1 z_1 + \dots + c_{n-2} z_{n-2} + by$$

نوشته می شود؛ به علاوه

$$P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}(z) = ax + c_1 z_1 + \dots + c_{n-2} z_{n-2}.$$

برهان. با توجه به تعریف استقلال خطی و $P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$ به سادگی دیده می شود. $\square$

۴.۲ بررسی p -تعامد در فضای ضرب داخلی

در این بخش به بررسی p -تعامد در فضای ضرب داخلی می پردازیم و می بینیم که در فضای ضرب داخلی مفهوم p -تعامد بر تعامد رایج در این فضا منطبق است. در واقع، قضیه ی زیر را داریم.

قضیه ۱.۴.۲. در فضای ضرب داخلی، مفهوم p -تعامد بر مفهوم تعامد رایج در آن منطبق است.

برهان. فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد. ابتدا فرض می‌کنیم x و y بر هم عمود باشند؛ باید نشان دهیم برای $z_1, \dots, z_{n-2}$ مناسبی $\|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| = 1$. بدین منظور، با گسترش x و y به پایه‌ی متعامدی برای X مانند $\{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y\}$ ، با کمک فرایند گرام-اشمیت^۶، نشان می‌دهیم $\|P\| = 1$ که $P = P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$ تصویر متعامد اختصاص داده شده به زیرفضای تولید شده توسط $\{x, z_1, \dots, z_{n-2}\}$ است. از آنجایی که

$$y \in [\text{span}\{x, z_1, \dots, z_{n-2}\}]^\perp$$

و برای هر $z \in X$ داریم

$$Pz \in \text{span}\{x, z_1, \dots, z_{n-2}\}$$

نتیجه می‌گیریم

$$y \perp Pz$$

و داریم

$$\|z\|^2 = \|z - Pz + Pz\|^2 = \|z - Pz\|^2 + \|Pz\|^2 \geq \|Pz\|^2$$

بنابراین

$$\|P\| \leq 1,$$

حال با در نظر گرفتن $z = x$ ، داریم

$$Px = x$$

بنابراین

$$\|Px\| = \|x\|$$

و در نتیجه

$$\|P\| = 1.$$

حال فرض می‌کنیم x و y عمود نباشند؛ باید نشان دهیم برای هر $z_1, \dots, z_{n-2}$ دلخواه، $\|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| > 1$. برای این منظور فرض می‌کنیم $z_1, \dots, z_{n-2}$ در X دلخواه هستند. نشان می‌دهیم $\|P\| > 1$ که $P = P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$ تصویر موازی اختصاص داده شده به زیرفضای تولید شده توسط $\{x, z_1, \dots, z_{n-2}\}$ است.

^۶Gram-Schmidt process

از آنجایی که

$$\{y\}^\perp \neq \text{span}\{x, z_1, \dots, z_{n-2}\}$$

بردار ناصفر z در $\{y\}^\perp$ وجود دارد که متعلق به $\text{span}\{x, z_1, \dots, z_{n-2}\}$ نمی باشد. برای این بردار z داریم

$$Pz - z \perp z.$$

پس نتیجه می گیریم که

$$\|Pz\|^2 = \|Pz - z + z\|^2 = \|Pz - z\|^2 + \|z\|^2 > \|z\|^2.$$

بنابراین

$$\|P\| > 1,$$

□

همانطور که ادعا کرده بودیم.

فصل ۳

پیوستگی مجموعه‌های متعامد از
دیدگاه تعامد عملگری

در این فصل به بررسی تعدادی از ویژگی‌های پیوستگی مجموعه‌های متعامد عملگری در فضاهاى خطی می‌پردازیم. در واقع، نشان می‌دهیم تابع مجموعه مقدار

$$F(x; y) = \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, p(x - \mu y, y) = 1\}$$

نیم پیوسته‌ی بالایی و پایینی است.

۱.۳ مقدمه

فرض می‌کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ مختلط و $(X^*, \|\cdot\|)$ دوگان آن باشد و $B(X)$ جبر همه‌ی عملگرهای کراندار روی X باشد. مجموعه‌ی حالت‌های نرمال شده را به صورت $\Omega = \{\omega \in B(X)^* : \omega(I) = \|\omega\| = 1\}$ تعریف می‌کنیم؛ که در آن I عملگر همانی را نشان می‌دهد.

برای هر عملگر $A \in B(X)$ ، برد عددی (جبری) A (که همچنین به عنوان حوزه‌ی مقادیر A شناخته می‌شود) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$F(A) = \{\omega(A) : \omega \in \Omega\}.$$

در حالت بعد متناهی، با در نظر گرفتن $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ ، که $\|\cdot\|_2$ نرم طیفی است، برد عددی یک ماتریس مربعی مانند $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$F(A) = \{x^* A x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}.$$

برای اطلاعات بیشتر راجع به برد عددی عملگرها و ماتریس‌ها، مراجع [۴] و [۱۰] توصیه می‌شوند.

یادآوری می‌کنیم که برای دو زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی Ω_1 و Ω_2 از یک فضای متریک مانند (X, ρ) ، فاصله‌ی هاسدورف بین Ω_1 و Ω_2 به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$d_H(\Omega_1, \Omega_2) = \max \left\{ \max_{x_1 \in \Omega_1} \min_{x_2 \in \Omega_2} \rho(x_1, x_2), \max_{x_2 \in \Omega_2} \min_{x_1 \in \Omega_1} \rho(x_1, x_2) \right\}.$$

برای هر $x_0 \in X$ و هر $\delta > 0$ ، گوی بسته‌ی $B(x_0, \delta)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$B(x_0, \delta) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq \delta\}.$$

تعریف ۱.۱.۳. [۲] فرض کنیم (X, ρ_X) یک فضای متریک و (Y, ρ_Y) یک فضای متریک کامل باشد. نگاشت چند مقداری $F : X \rightarrow Y$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $x_0 \in X$ باشد.

(i) در F x_0 نیم پیوسته‌ی بالایی است اگر برای هر همسایگی $N(F(x_0)) \subset Y$ از $F(x_0)$ ، همسایگی $N(x_0) \subset X$ از x_0 وجود داشته باشد به قسمی که

$$F(x) \subset N(F(x_0)), \quad \forall x \in N(x_0).$$

(ii) در F x_0 نیم پیوسته‌ی پایینی است اگر برای هر $y_0 \in F(x_0)$ و هر همسایگی $N(y_0) \subset Y$ از y_0 ، همسایگی $N(x_0) \subset X$ از x_0 وجود داشته باشد به قسمی که

$$F(x) \cap N(y_0) \neq \emptyset, \quad \forall x \in N(x_0).$$

(iii) در F x_0 نیم پیوسته است، هرگاه نیم پیوسته‌ی بالایی و پایینی باشد.

در مثال زیر نمونه‌ای از یک تابع نیم پیوسته‌ی بالایی را می‌بینیم.

مثال ۱.۱.۳. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد، برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ قرار می‌دهیم

$$f(\alpha) = \{x : x \in X, \|x\| \leq |\alpha|\}.$$

تابع f نیم پیوسته‌ی بالایی است.

توجه می‌کنیم که این تابع صعودی است؛ به این معنا که، اگر $|\alpha| \leq |\beta|$ آنگاه $f(\alpha)$ مشمول در $f(\beta)$ می‌باشد.

ما نیم پیوستگی بالایی را در $\alpha_0 = 1$ بررسی می‌کنیم. بررسی نقاط دیگر به صورت مشابه می‌باشد.

فرض می‌کنیم $N(f(1))$ مجموعه‌ی بازی شامل $f(1)$ باشد. از آنجایی که $f(1)$ یک مجموعه‌ی بسته است، اسکالری مانند β وجود دارد به قسمی که

$$f(1) \subseteq f(\beta) = \{x : x \in X, \|x\| \leq |\beta|\} \subseteq N(f(1)).$$

به وضوح $|\beta| < 1$. حال مجموعه‌ی باز زیر را در نظر می‌گیریم

$$N(1) = \{\alpha : \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| < |\beta|\},$$

از آنجایی که f صعودی است برای هر α در $N(1)$ ، $f(\alpha)$ مشمول در $f(\beta)$ است. بنابراین $f(\alpha) \subseteq N(f(1))$.

تعریف ۲.۱.۳. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد و $A \in B(H)$. برد عددی عملگر A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(A) = \{\langle Ax, x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

ثابت می‌شود که برد عددی یک عملگر کراندار خطی یک زیرمجموعه‌ی فشرده و محدب از صفحه‌ی اعداد مختلط است.

لم ۱.۱.۳. [۴] برد عددی عملگر A را به صورت‌های زیر هم می‌توان نمایش داد

$$\begin{aligned} F(A) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I\| \geq |\mu - \lambda|\}, \end{aligned}$$

که در آن $\|\cdot\|$ اشاره به نرم عملگری دارد و I عملگر همانی است.

تعریف ۳.۱.۳. برای عملگر $A \in B(H)$ قرار می‌دهیم

$$D(\lambda, \|A - \lambda I\|) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda I\|\}.$$

نتیجه ۱.۱.۳. برد عددی عملگر A به صورت زیر نیز نشان داده می‌شود

$$F(A) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D(\lambda, \|A - \lambda I\|).$$

با استناد به نمایش اشتراکی بالا در مرجع [۵] تعریف جامع‌تری از برد عددی ارائه شده است؛ در حقیقت، مفهوم برد عددی را برای یک زوج از عملگرها تعمیم داده‌اند.

تعریف ۴.۱.۳. فرض کنیم $A, B \in B(H)$ و $B \neq 0$. در این حالت برد عددی عملگر A نسبت به عملگر B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D(\lambda, \|A - \lambda B\|). \end{aligned}$$

ثابت می‌شود این مجموعه نیز فشرده و محدب است؛ همچنین، ناتهی است اگر و تنها اگر $\|B\| \geq 1$. برای جزئیات بیشتر [۵] را ببینید.

یادآوری می‌کنیم که اگر X یک فضای نرم‌دار مختلط باشد و $x, y \in X$. می‌گوییم x عمود بیرخوف-جیمز است بر y هرگاه برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|,$$

در این حالت می‌نویسیم $x \perp_{BJ} y$.

تعریف ۵.۱.۳. فرض کنیم $\epsilon \in [0, 1)$ ، می‌گوییم x, ϵ -عمود بیرخوف-جیمز است بر y هرگاه برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$\|x + \lambda y\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|x\|,$$

در این حالت می‌نویسیم $x \perp_{BJ}^\epsilon y$. روشن است که برای $\epsilon = 0$ تعریف تعامد بیرخوف-جیمز بدست می‌آید.

می‌توان نشان داد که این ویژگی‌ها همگن است.

تعریف ۶.۱.۳. فرض کنیم $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$. در این حالت می‌گوییم x و y ، ϵ - عمود هستند هرگاه

$$|\langle x, y \rangle| \leq \epsilon \|x\| \|y\|,$$

در این حالت می‌نویسیم $x \perp^\epsilon y$.

لم ۲.۱.۳. [۶] فرض کنیم B یک عملگر خطی کراندار باشد و $\|B\| \geq 1$ و $\epsilon_B = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}$. در این صورت برای هر عملگر خطی کراندار A داریم

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{B,J}^{\epsilon_B} (A - \mu B)\}.$$

تعریف زیر به صورت طبیعی از مطالب عنوان شده نتیجه می‌شود.

تعریف ۷.۱.۳. فرض کنیم A و B دو عملگر خطی کراندار باشند و B ناصفر باشد. همچنین فرض کنیم $\epsilon \in [0, 1)$. در این حالت مجموعه‌ی ϵ - متعامد بیرخوف - جیمز A نسبت به B به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{B,J}^\epsilon (A - \mu B)\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D \left(\lambda, \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right). \end{aligned}$$

مجموعه‌ی بالا ناتهی، فشرده و محدب است.

نتیجه ۲.۱.۳. همواره داریم

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) \subseteq D \left(0, \frac{\|A\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right).$$

در ادامه، پیوستگی مجموعه‌ی ϵ - متعامد بیرخوف - جیمز $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ را نسبت به ماتریس A تحت شرایط خاص بیان می‌کنیم. ابتدا دو لم در این رابطه می‌آوریم.

لم ۳.۱.۳. [۶] فرض کنیم $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ و $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$. اگر ماتریس A مضرب اسکالری از B نباشد، آنگاه $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B)$ در درون $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B)$ قرار می‌گیرد.

لم ۴.۱.۳. [۱۵] فرض کنیم $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ و $\epsilon \in [0, 1)$. همچنین فرض کنیم A مضرب اسکالری از B نباشد. در این صورت برای هر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ ، $\delta > 0$ وجود دارد به قسمی که

$$d_H \left(\bigcap_{i=1}^k D \left(\lambda_i, \frac{\|A - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right), F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) \right) \leq \delta.$$

قضیه ۱.۱.۳. [۷] فرض کنیم $A_0, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ و $\epsilon \in [0, 1)$. همچنین فرض کنیم A_0 مضرب اسکالری از B نباشد. در این صورت نگاشت $A \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ در A_0 نیم پیوسته است.

ملاحظه ۱.۱.۳. این مطلب که آیا تابع $B \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ پیوسته است یا نه، هنوز روشن نیست.

البته در حالت‌های خاص این پیوستگی هم اثبات شده است، که یک نمونه از آن را در زیر مشاهده می‌کنیم.

لم ۵.۱.۳. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد و A و B دو عملگر خطی کراندار باشند که $B \neq 0$. در این صورت نگاشت $B \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ پیوسته است که در آن $\|\cdot\|$ اشاره به نرم القا شده از ضرب داخلی دارد.

۲.۳ تعریف مجموعه‌ی متعامد برای تعامد عملگری

در فصل قبل برای یک فضای خطی، تعامد عملگری را تعریف کردیم؛ در این فصل این نوع از تعامد را با نماد $\perp_p$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید x و y دو بردار مستقل خطی در X باشند. مشابه [۴] مجموعه‌ی زیر را به عنوان مجموعه‌ی متعامد x نسبت به y در $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم

$$F(x; y) = \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, (x - \mu y) \perp_p y\},$$

یا به طور معادل،

$$F(x; y) = \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, \exists z_1, \dots, z_{n-2} \in X, \|P_{x-\mu y, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| = 1\}.$$

به علاوه می‌توانیم برای فواید بیشتر، پارامتر تعامد دیگری مانند α را وارد کنیم

$$F(x; y; \alpha) = \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, (\alpha x - \mu y) \perp_p y\}, \quad (۱.۳)$$

یا به طور معادل،

$$F(x; y; \alpha) = \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, \exists z_1, \dots, z_{n-2} \in X, \|P_{\alpha x - \mu y, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| = 1\}.$$

لم ۱.۲.۳. برای هر α ناصفر، داریم

$$F(x; y; \alpha) = \alpha F(x; y; 1).$$

برهان. با استفاده از تعریف و خاصیت همگنی P داریم

$$\begin{aligned} F(x; y; \alpha) &= \{ \mu : \mu \in \mathbb{C}, \|P_{\alpha x - \mu y, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| = 1 \} \\ &= \left\{ \mu : \mu \in \mathbb{C}, \|P_{\alpha(x - \frac{\mu}{\alpha} y), z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ \mu : \mu \in \mathbb{C}, \|P_{(x - \frac{\mu}{\alpha} y), z_1, \dots, z_{n-2}, y}\| = 1 \right\}, \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد اگر $\mu \in F(x; y; \alpha)$ آنگاه $\frac{\mu}{\alpha} \in F(x; y; 1)$ یا $\mu \in \alpha F(x; y; 1)$. $\square$

۳.۳ ویژگی پیوستگی مجموعه‌ی متعامد برای تعامد عملگری

در قضایای بعدی نیم پیوستگی بالایی و پایینی $F(x; y; \alpha)$ را نسبت به α ، با استفاده از لم ۱.۲.۳، خواهیم دید.

قضیه ۱.۳.۳. تابع مجموعه مقداری که α را به $F(x; y; \alpha)$ می‌نگارد، نیم پیوسته‌ی بالایی است.

برهان. ما نیم پیوستگی بالایی را در $\alpha_0 = 1$ نشان خواهیم داد؛ نیم پیوستگی بالایی در نقاط دیگر به کمک لم ۱.۲.۳ ثابت می‌گردد.

برای راحتی بیشتر کار، قرار می‌دهیم $f(\alpha) = F(x; y; \alpha)$ و x و y را ثابت در نظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم $N(f(1))$ یک مجموعه‌ی باز کراندار شامل $f(1)$ باشد. اسکالرهایی زیر خوش تعریف هستند

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \inf \{ \beta : f(\beta) \text{ مشمول در } N(f(1)) \text{ است} \}, \\ \beta_2 &= \sup \{ \beta : f(\beta) \text{ مشمول در } N(f(1)) \text{ است} \}. \end{aligned}$$

از طرفی از آنجایی که $f(1)$ بسته است، داریم $\beta_1 < 1 < \beta_2$. حال مجموعه‌ای باز اطراف ۱، به صورت زیر، در نظر می‌گیریم

$$N(1) = \{ \alpha : \alpha \in \mathbb{C}, \beta_1 < |\alpha| < \beta_2 \}.$$

واضح است که برای هر α در $N(1)$ ، $f(\alpha)$ مشمول در $N(f(1))$ می‌باشد. $\square$

قضیه ۲.۳.۳. تابع مجموعه مقداری که α را به $F(x; y; \alpha)$ می‌نگارد، نیم پیوسته‌ی پایینی است.

برهان. ما نیم پیوستگی پایینی را در $\alpha_0 = 1$ نشان خواهیم داد؛ نیم پیوستگی پایینی در نقاط دیگر به کمک لم ۱.۲.۳ ثابت می‌گردد.

برای راحتی بیشتر کار، قرار می‌دهیم $f(\alpha) = F(x; y; \alpha)$ و x و y را ثابت در نظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم $\beta_0 \in f(1)$ یک نقطه‌ی دلخواه باشد. به علاوه، فرض می‌کنیم $N(\beta_0)$ یک همسایگی باز از β_0 باشد. اسکالرهایی زیر خوش تعریف هستند

$$\beta_1 = \inf \{ \beta : N(\beta_0) \text{ با } f(\beta) \text{ اشتراک دارد} \},$$

$$\beta_2 = \sup \{ \beta : N(\beta_0) \text{ با } f(\beta) \text{ اشتراک دارد} \}.$$

از طرفی از آنجایی که $f(1)$ بسته است، داریم $\beta_1 < 1 < \beta_2$. حال مجموعه‌ای باز اطراف ۱، به صورت زیر، در نظر می‌گیریم

$$N(1) = \{ \alpha : \alpha \in \mathbb{C}, \beta_1 < |\alpha| < \beta_2 \}.$$

□ واضح است که برای هر α در $N(1)$ ، $f(\alpha)$ با $N(\beta_0)$ اشتراک دارد.

نتیجه ۱.۳.۳. تابع مجموعه مقداری که α را به $F(x; y; \alpha)$ می‌نگارد، نیم پیوسته است. همانطور که ثابت کردیم این تابع نیم پیوسته‌ی بالایی و پایینی است، پس نتیجه برقرار است.

همانطور که در قضیه‌ی ۱.۴.۲ دیدیم، مفهوم بردارهای متعامد عملگری در فضاها ضرب داخلی، بر مفهوم رایج بردارهای متعامد در این فضاها منطبق است. یعنی، برای هر x و y در فضای ضرب داخلی X ، داریم

$$p(x, y) = 1$$

اگر و تنها اگر

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

این مطلب ما را به محاسبه‌ی ساده‌ای برای $F(x; y; \alpha)$ در فضای ضرب داخلی هدایت می‌کند.

مثال ۱.۳.۳. در یک فضای ضرب داخلی داریم

$$F(x; y; \alpha) = \{ \mu : \mu \in \mathbb{C}, \langle \alpha x - \mu y, y \rangle = 0 \}.$$

که نتیجه می‌دهد

$$F(x; y; \alpha) = \{ \mu : \mu \in \mathbb{C}, \alpha \langle x, y \rangle = \mu \langle y, y \rangle \}.$$

یا به طور معادل،

$$F(x; y; \alpha) = \left\{ \frac{\alpha \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right\}.$$

یعنی در فضاهاى ضرب داخلی، $F(x; y; \alpha)$ یک مجموعه‌ی تک عضو است. بنابراین مفهوم نیم پیوستگی این تابع مجموعه مقدار بر مفهوم پیوستگی معمول آن منطبق است.

مثال ۲.۳.۳. فرض کنیم $1 \leq r \leq \infty$. طبق قضیه‌ی ۶.۱.۲ برای هر دو بردار $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ در l^r ، زاویه‌ی عملگری بین x و y از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود

$$\arcsin \left(\frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\|x\|_r \|y\|_{\frac{r}{r-1}}} \right).$$

این رابطه نتیجه می‌دهد که x بر y متعامد عملگری است اگر

$$\|x\|_r \|y\|_{\frac{r}{r-1}} = |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

بنابراین، در این حالت داریم

$$\begin{aligned} F(x; y; \alpha) &= \{ \mu : \mu \in \mathbb{C}, (\alpha x - \mu y) \perp_p y \} \\ &= \left\{ \mu : \mu \in \mathbb{C}, \|\alpha x - \mu y\|_r \|y\|_{\frac{r}{r-1}} = |(\alpha x_1 - \mu y_1) y_2 - (\alpha x_2 - \mu y_2) y_1| \right\}. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از تعریف $\|x\|_r$ ، داریم

$$\begin{aligned} F(x; y; \alpha) &= \{ \mu : \mu \in \mathbb{C}, (|\alpha x_1 - \mu y_1|^r + |\alpha x_2 - \mu y_2|^r)^{\frac{1}{r}} (|y_1|^{\frac{r}{r-1}} + |y_2|^{\frac{r}{r-1}})^{\frac{r-1}{r}} = \\ &= |(\alpha x_1 - \mu y_1) y_2 - (\alpha x_2 - \mu y_2) y_1| \} \end{aligned}$$

و در حالت خاص، برای $r = 2$ ،

$$\begin{aligned} F(x; y; \alpha) &= \{ \mu : \mu \in \mathbb{C}, (|\alpha x_1 - \mu y_1|^2 + |\alpha x_2 - \mu y_2|^2)^{\frac{1}{2}} (|y_1|^2 + |y_2|^2)^{\frac{1}{2}} = \\ &= |(\alpha x_1 - \mu y_1) y_2 - (\alpha x_2 - \mu y_2) y_1| \}. \end{aligned}$$

برای مشخص شدن اعضاء $F(x; y; \alpha)$ با فرض معلوم بودن x_1, x_2, y_1, y_2 و α ، معادله‌ی زیر را بر حسب μ داریم

$$\left((\alpha x_1 - \mu y_1)^2 + (\alpha x_2 - \mu y_2)^2 \right) (y_1^2 + y_2^2) = ((\alpha x_1 - \mu y_1) y_2 - (\alpha x_2 - \mu y_2) y_1)^2.$$

از محاسبات بالا به معادله‌ی درجه ۲

$$A\mu^2 + B\mu + C = 0$$

بر حسب μ می‌رسیم که در آن

$$A = (y_1^2 + y_2^2)^2,$$

$$B = (-2\alpha) (x_1 y_1^3 + x_2 y_1^2 y_2 + x_1 y_1 y_2^2 + x_2 y_2^3),$$

$$C = \alpha^2 (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2.$$

از حل این معادله $\Delta = 0$ و

$$\mu = \frac{\alpha (x_1 y_1^3 + x_2 y_1^2 y_2 + x_1 y_1 y_2^2 + x_2 y_2^3)}{(y_1^2 + y_2^2)^2}$$

یعنی در فضای l^2 نیز $F(x; y; \alpha)$ یک مجموعه‌ی تک عضو است و مفهوم نیم پیوستگی این تابع مجموعه مقدار بر مفهوم پیوستگی معمول آن منطبق است.

فصل ۴

شاخص‌های $a(x, y)$ و $D(X)$ و ارتباط
آنها با انواع تعامل

در این فصل به بررسی شاخص‌های $a(x, y)$ و $D(X)$ می‌پردازیم و ارتباط آن‌ها را با انواع تعامد بررسی می‌کنیم. به ویژه نشان می‌دهیم که شاخص $a(x, y)$ در شرایط معین بسیاری از انواع تعامد را به خوبی بیان می‌کند. در ادامه، با کمک شاخص $a(x, y)$ تعریف جدیدی برای زاویه میان بردارها ارائه می‌دهیم که در حقیقت به نوعی تعمیم دیدگاه بیرخوف-جیمز به شمار می‌رود.

۱.۴ مقدمه

برای بررسی بهتر و راحت‌تر انواع تعامد راهکارهای گوناگونی پیشنهاد شده است. بسیاری از این راهکارها مبتنی بر ارائه‌ی ابزارهای محاسباتی برای محاسبه‌ی انواع تعامد است. یکی از بهترین و مفیدترین ابزارها در این راستا شاخص‌های $a(x, y)$ و $D(X)$ هستند.

۲.۴ شاخص $a(x, y)$

فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و $x, y \in X$. در این حالت تعریف می‌کنیم

$$a(x, y) = \inf \left\{ \frac{\|x + \alpha y\|}{\|x\|} : \alpha \in \mathbb{K} \right\}, \quad (1.4)$$

که در آن $\mathbb{K}$ میدان اعداد حقیقی یا مختلط است. ویژگی‌های جالبی دارد که در ادامه بعضی از آن‌ها را می‌آوریم.

لم ۱.۲.۴. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و $x, y \in X$. در این صورت همواره داریم

$$a(x, y) \leq 1.$$

برهان. برای $\alpha = 0$ داریم

$$\frac{\|x + \alpha y\|}{\|x\|} = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1,$$

در نتیجه، بنا بر تعریف،

$$a(x, y) \leq 1.$$

□

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و $x, y \in X$. در این صورت x عمود بیرخوف بر y است اگر و تنها اگر $a(x, y) = 1$.

برهان. ابتدا فرض کنیم $a(x, y) = 1$. پس بنا بر تعریف، برای هر α داریم

$$\frac{\|x + \alpha y\|}{\|x\|} \geq 1$$

و یا

$$\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$$

پس x عمود بیرخوف بر y است.

برعکس، فرض کنیم x عمود بیرخوف بر y باشد. پس بنا بر تعریف، برای هر α داریم

$$\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$$

و یا

$$\frac{\|x + \alpha y\|}{\|x\|} \geq 1$$

پس $a(x, y) \geq 1$. از سوی دیگر بنا بر لم قبل همیشه داریم $a(x, y) \leq 1$. پس $a(x, y) = 1$ و این برهان را تمام می کند. $\square$

قضیه ۲.۲.۴. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد و $x, y \in X$. در این صورت

$$a(x, y) = \sqrt{\frac{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}}.$$

برهان. با توجه به رابطه‌ی (۱.۴) و تعریف ضرب داخلی و ویژگی‌های آن داریم

$$\begin{aligned} a^2(x, y) &= \inf \left\{ \frac{\|x + \alpha y\|^2}{\|x\|^2} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle}{\langle x, x \rangle} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\langle x, x \rangle + \langle x, \alpha y \rangle + \langle \alpha y, x \rangle + \langle \alpha y, \alpha y \rangle}{\langle x, x \rangle} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\langle x, x \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به اینکه می دانیم مقدار اکستریم چندجمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$

برابر با $\frac{4ac - b^2}{4a}$ است، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} a^2(x, y) &= \inf \left\{ \frac{\langle x, x \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 + 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \alpha + \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \alpha^2 : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \frac{4 \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle} - 4 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle x, x \rangle^2}}{4 \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle}} \\ &= \frac{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱.۲.۴. با توجه به نامساوی کشی شوارتز $a(x, y)$ همواره نامنفی است و علاوه بر این $a(x, y)$ برابر صفر است اگر و تنها اگر در نامساوی کشی شوارتز تساوی برقرار باشد.

قضیه ۳.۲.۴. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی مختلط باشد و $x, y \in X$. در این صورت

$$a(x, y) = \sqrt{\frac{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}}.$$

برهان. با توجه به تعریف داریم

$$\begin{aligned} a^2(x, y) &= \inf \left\{ \frac{\|x + \alpha y\|^2}{\|x\|^2} : \alpha \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle}{\langle x, x \rangle} : \alpha \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha} \langle x, y \rangle) + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به اینکه α و $\langle x, y \rangle$ اعداد مختلط هستند قرار می‌دهیم

$$\alpha = \beta + \gamma i, \quad \langle x, y \rangle = a + bi. \quad (2.4)$$

با توجه به این داریم

$$\begin{aligned} a^2(x, y) &= \inf \left\{ \frac{\langle x, x \rangle + 2(a\beta + b\gamma) + (\beta^2 + \gamma^2)\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle} : \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 + \frac{2a}{\langle x, x \rangle} \beta + \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \beta^2 + \frac{2b}{\langle x, x \rangle} \gamma + \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \gamma^2 : \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

مشابه قبل می‌دانیم مقدار اکستریم چندجمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx$ برابر با $\frac{-b^2}{4a}$ است، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} a^2(x, y) &= \inf \left\{ \frac{\langle x, x \rangle + 2(a\beta + b\gamma) + (\beta^2 + \gamma^2)\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle} : \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 + \frac{2a}{\langle x, x \rangle}\beta + \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle}\beta^2 + \frac{2b}{\langle x, x \rangle}\gamma + \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle}\gamma^2 : \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \\ &= 1 + \inf \left\{ \frac{2a}{\langle x, x \rangle}\beta + \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle}\beta^2 : \beta \in \mathbb{R} \right\} + \inf \left\{ \frac{2b}{\langle x, x \rangle}\gamma + \frac{\langle y, y \rangle}{\langle x, x \rangle}\gamma^2 : \gamma \in \mathbb{R} \right\} \\ &= 1 - \frac{a^2 + b^2}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}. \end{aligned}$$

از سوی دیگر بنا بر رابطه‌ی (۲.۴) می‌دانیم که

$$a^2 + b^2 = |\langle x, y \rangle|^2.$$

در نتیجه در پایان داریم

$$a(x, y) = \sqrt{1 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}},$$

که می‌توانیم آن را به صورت زیر هم بازنویسی کنیم

$$a(x, y) = \sqrt{\frac{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}}.$$

□

نتیجه ۲.۲.۴. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط باشد و $x, y \in X$. در این صورت x و y بر هم عمودند اگر و تنها اگر $a(x, y) = 1$.

در این‌جا با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۴ و نتیجه‌ی ۲.۲.۴، نتیجه‌ی مهمی به دست می‌آید که در مطلب بعدی آن را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۳.۲.۴. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط باشد و $x, y \in X$. در این صورت تعامد بیرخوف منطبق بر تعامد متداول در X است.

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنیم $X = l_n^p$ که در آن p یک عدد طبیعی زوج باشد. در این صورت

$$a(x, y) = \frac{\|x + \alpha \circ y\|_p}{\|x\|_p},$$

که در آن α ریشه‌ی معادله‌ی زیر است

$$\sum_i y_i (x_i + \alpha y_i)^{p-1} = 0.$$

و

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

برهان. با توجه به فرض‌های قضیه داریم

$$x + \alpha y = (x_1 + \alpha y_1, \dots, x_n + \alpha y_n),$$

در نتیجه داریم

$$\|x + \alpha y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + \alpha y_i|^p,$$

از آن جا که p عدد طبیعی زوجی هست می‌توان نوشت

$$\|x + \alpha y\|_p^p = \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha y_i)^p.$$

اکنون تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha y_i)^p.$$

توجه می‌کنیم که این تابع، پیوسته و مشتق‌پذیر است. در نتیجه، مقادیر اکسترمم خود را در ریشه‌های مشتق خودش اختیار می‌کند. با مشتق‌گیری مستقیم می‌بینیم که

$$f'(\alpha) = \sum_{i=1}^n p y_i (x_i + \alpha y_i)^{p-1}.$$

پس معادله‌ی $f'(\alpha) = 0$ معادل با رابطه‌ی زیر است

$$\sum_{i=1}^n y_i (x_i + \alpha y_i)^{p-1} = 0,$$

□

که این همان رابطه‌ی مطلوب است.

در ادامه، به کمک قضیه‌ی قبل، شاخص $a(x, y)$ را در چند حالت خاص بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۴. برای $p = 2$ داریم

$$\|x + \alpha y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha y_i)^2.$$

اکنون تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha y_i)^2,$$

که مشتق آن به صورت زیر در می‌آید

$$f'(\alpha) = \sum_{i=1}^n 2y_i(x_i + \alpha y_i).$$

می‌بینیم که f' تنها یک ریشه دارد که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\sum_{i=1}^n y_i(x_i + \alpha y_i) = 0.$$

به صورت معادل

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i + \alpha \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0,$$

در نتیجه

$$\alpha_0 = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f برابر است با

$$f(\alpha_0) = f\left(-\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i^2}\right) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i^2} y_i\right)^2.$$

توجه می‌کنیم که

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^n x_i y_i + \alpha^2 \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} f(\alpha_0) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \frac{(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} + \frac{(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}. \end{aligned}$$

در پایان داریم

$$a^2(x, y) = \frac{f(\alpha_0)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

مثال ۲.۲.۴. برای $p = 4$ داریم

$$\|x + \alpha y\|_4^4 = \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha y_i)^4.$$

اکنون تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha y_i)^4,$$

که مشتق آن به صورت زیر در می‌آید

$$f'(\alpha) = \sum_{i=1}^n 4 y_i (x_i + \alpha y_i)^3.$$

می‌بینیم که f' تنها یک ریشه‌ی حقیقی دارد که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\sum_{i=1}^n y_i (x_i + \alpha y_i)^3 = 0.$$

به صورت معادل

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 y_i + 3\alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + 3\alpha^2 \sum_{i=1}^n x_i y_i^3 + \alpha^3 \sum_{i=1}^n y_i^4 = 0.$$

پیش از ادامه‌ی محاسبات نکاتی را در مورد معادله‌ی درجه سوم یادآوری می‌کنیم. صورت کلی معادله‌ی درجه ۳ به شکل زیر است

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

برای بررسی راحت‌تر این معادله ابتدا توجه می‌کنیم که با تغییر متغیر $x \rightarrow x - \frac{b}{3a}$ معادله‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید

$$ax^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + \left(d + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}\right) = 0,$$

که معادل است با

$$x^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)x + \left(\frac{d}{a} + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2}\right) = 0.$$

اکنون توجه می‌کنیم که ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی

$$x^3 + px + q = 0$$

از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}}.$$

در نتیجه ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

به صورت زیر درمی‌آید

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}} - \frac{b}{3a}$$

که در آن

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{d}{a} + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2}$$

حال به معادله‌ی مورد نظر برمی‌گردیم،

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 y_i + 3\alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + 3\alpha^2 \sum_{i=1}^n x_i y_i^3 + \alpha^3 \sum_{i=1}^n y_i^4 = 0.$$

با توجه به مطالب گفته شده داریم

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}} - \frac{b}{3a},$$

که در آن

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{d}{a} + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2}$$

و

$$a = \sum_{i=1}^n y_i^4, \quad b = 3 \sum_{i=1}^n x_i y_i^3, \quad c = 3 \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2, \quad d = \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i.$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f برابر با $f(\alpha_0)$ است که α_0 در بالا معرفی شد.

در پایان داریم

$$a^4(x, y) = \frac{f(\alpha_0)}{\sum_{i=1}^n x_i^4}.$$

۳.۴ دیدگاه جدید برای زاویه و تعامد در فضاهای نرم‌دار

فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و $x, y \in X$. در این صورت a -زاویه‌ی میان x و y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_a(x, y) = \arcsin(a(x, y)). \quad (3.4)$$

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و $x, y \in X$. در این صورت

$$A_a(x, y) = \frac{\pi}{2}$$

اگر و تنها اگر x بر y عمود بیرخوف باشد.

برهان. با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۴ و تعریف $A_a(x, y)$ حکم قضیه برقرار است. $\square$

در اینجا، برای درک بهتر، مفهوم a -زاویه را با یک مثال بیان می‌کنیم.

مثال ۱.۳.۴. فضای $C([0, 1])$ را در نظر می‌گیریم و توابع زیر را در این فضا انتخاب می‌کنیم

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x.$$

در این صورت داریم

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in [0, 1]\} = 1$$

و

$$\|g\| = \sup \{|g(x)| : x \in [0, 1]\} = 1.$$

از سوی دیگر، داریم

$$(f + \lambda g)(x) = x^2 + \lambda x$$

و در نتیجه

$$\|f + \lambda g\| = \sup \{|x^2 + \lambda x| : x \in [0, 1]\} = \max \left\{ \frac{\lambda^2}{4}, |1 + \lambda| \right\}.$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۱.۴) برای f و g داریم

$$\begin{aligned} a(f, g) &= \inf \left\{ \frac{\|f + \lambda g\|}{\|f\|} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \inf \left\{ \max \left\{ \frac{\lambda^2}{4}, |1 + \lambda| \right\}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= 3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

پس a -زاویه‌ی میان f و g برابر است با

$$A_a(f, g) = \arcsin \left(3 - 2\sqrt{2} \right).$$

به طور مشابه برای محاسبه‌ی a -زاویه‌ی میان f و g داریم

$$(g + \lambda f)(x) = \lambda x^2 + x$$

و در نتیجه

$$\|g + \lambda f\| = \sup \left\{ |\lambda x^2 + x| : x \in [0, 1] \right\} = \max \left\{ |1 + \lambda|, \left| \frac{1}{4\lambda} \right| \right\}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a(g, f) &= \inf \left\{ \frac{\|g + \lambda f\|}{\|g\|} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \inf \left\{ \max \left\{ |1 + \lambda|, \left| \frac{1}{4\lambda} \right| \right\}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2}. \end{aligned}$$

پس a -زاویه‌ی میان f و g برابر است با

$$A_a(f, g) = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right).$$

در ادامه ویژگی‌های مهم $A_a(x, y)$ را بررسی می‌کنیم؛ همچنین به بررسی مجموعه‌های متعامد متناظر با $a(x, y)$ می‌پردازیم.

قضیه ۲.۳.۴. a -زاویه دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد.

۱. همگنی: $A_a(\alpha x, \beta y) = A_a(x, y)$ برای هر x و y در X و هر α و β ناصفر در $\mathbb{R}$ ؛

۲. پیوستگی: اگر $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ (در نرم)، آنگاه $A_a(x_n, y_n) \rightarrow A_a(x, y)$.

برهان. ۱. برای اثبات ویژگی همگنی $A_a(x, y)$ کافی است نشان دهیم $a(x, y)$ همگن است. برای این منظور با توجه به تعریف $a(x, y)$ (رابطه‌ی (۱.۴)) داریم

$$a(\alpha x, \beta y) = \inf \left\{ \frac{\|\alpha x + \lambda \beta y\|}{\|\alpha x\|} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \inf \left\{ \frac{\|x + \lambda \frac{\beta}{\alpha} y\|}{\|x\|} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

اکنون با تغییر متغیر $\lambda \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \lambda$ داریم

$$a(\alpha x, \beta y) = \inf \left\{ \frac{\|x + \lambda y\|}{\|x\|} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = a(x, y).$$

بنابراین

$$A_a(\alpha x, \beta y) = A_a(x, y).$$

۲. برای اثبات پیوستگی $A_a(x, y)$ کافی است نشان دهیم $a(x, y)$ پیوسته است؛ اما پیوستگی $a(x, y)$ واضح است. زیرا اگر $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ آنگاه برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ،
 $\frac{\|x_n + \lambda y_n\|}{\|x_n\|} \rightarrow \frac{\|x + \lambda y\|}{\|x\|}$ و در نتیجه $x_n + \lambda y_n \rightarrow x + \lambda y$
 از طرفی، می‌دانیم

$$a(x_n, y_n) = \inf \left\{ \frac{\|x_n + \lambda y_n\|}{\|x_n\|} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

پس با توجه به نتایج بالا، $a(x_n, y_n) \rightarrow a(x, y)$ یعنی $a(x, y)$ پیوسته است، که به
 وضوح پیوستگی $A_a(x, y)$ را نتیجه می‌دهد. $\square$

مثال زیر نشان می‌دهد که $a(x, y)$ متقارن نیست؛ به عبارت بهتر، در حالت کلی
 $a(y, x)$ با $a(x, y)$ مساوی نیست.

مثال ۲.۳.۴. فضای برداری $X = l_1^1$ و دو عضو $x = (1, 0)$ و $y = (1, -1)$ در X را در
 نظر می‌گیریم؛ در این صورت

$$\|x\|_1 = 1, \quad \|y\|_1 = 2, \quad \|x + \lambda y\|_1 = |1 + \lambda| + |\lambda|, \quad \|y + \lambda x\|_1 = |1 + \lambda| + 1,$$

و در نتیجه

$$a(x, y) = \inf \left\{ \frac{|1 + \lambda| + |\lambda|}{1} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = 1$$

و

$$a(y, x) = \inf \left\{ \frac{|1 + \lambda| + 1}{2} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{2}.$$

نتیجه ۱.۳.۴. a - زاویه متقارن نیست.

توجه می‌کنیم که در مورد مثال ۲.۳.۴، a - زاویه‌ی میان بردارهای x و y را برابر
 $\frac{\pi}{6}$ تعریف می‌کنیم.

$$A_a(y, x) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

در دیدگاه بیرخوف - جیمز فقط مفهوم تعامد میان بردارهای یک فضای نرم‌دار
 بررسی می‌شود. اما در اینجا علاوه بر مفهوم تعامد، مفهوم زاویه میان بردارها هم
 در نظر گرفته می‌شود. در حقیقت با تعریف a - زاویه دیدگاه بیرخوف - جیمز را تعمیم
 می‌دهیم.

۴.۴ تعریف مجموعه‌ی متعامد برای a – تعامد و بررسی ویژگی پیوستگی آن

همانند p – تعامد می‌توان مفهوم مجموعه‌های متعامد را برای a – تعامد نیز تعریف کرد. فرض کنیم $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$. در این حالت مجموعه‌ی متعامد متناظر با x و y وابسته به α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(x; y; \alpha) = \{\mu \in \mathbb{C} : a(\alpha x - \mu y, y) = 1\}. \quad (4.4)$$

همانگونه که انتظار می‌رود این مجموعه‌ی متعامد نیز ویژگی‌های پیوستگی را دارد؛ پیش از پرداختن به ویژگی پیوستگی، ابتدا ویژگی همگنی آن را بررسی می‌کنیم.

لم ۱.۴.۴. برای هر α ناصفر داریم

$$F(x; y; \alpha) = \alpha F(x; y; 1).$$

برهان. با استفاده از تعریف و خاصیت همگنی $a(x, y)$ داریم

$$\begin{aligned} F(x; y; \alpha) &= \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, a(\alpha x - \mu y, y) = 1\} \\ &= \left\{ \mu : \mu \in \mathbb{C}, a\left(x - \frac{\mu}{\alpha} y, y\right) = 1 \right\} \\ &= \{\alpha \mu : \mu \in \mathbb{C}, a(x - \mu y, y) = 1\} \\ &= \alpha F(x; y; 1). \end{aligned}$$

□

با توجه به لم ۱.۴.۴، برای مجموعه‌ی متعامد متناظر با a – تعامد نیز مشابه قضایای ۱.۳.۳ و ۲.۳.۳ و نتیجه‌ی ۱.۳.۳ را داریم.

قضیه ۱.۴.۴. تابع مجموعه مقداری که α را به $F(x; y; \alpha)$ می‌نگارد، نیم پیوسته‌ی بالایی است.

قضیه ۲.۴.۴. تابع مجموعه مقداری که α را به $F(x; y; \alpha)$ می‌نگارد، نیم پیوسته‌ی پایینی است.

نتیجه ۱.۴.۴. تابع مجموعه مقداری که α را به $F(x; y; \alpha)$ می‌نگارد، نیم پیوسته است.

۵.۴ شاخص $D(X)$

فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. در این حالت تعریف می‌کنیم

$$D_{\perp}(X) = \inf \{a(x, y) : x, y \in S(X), x \perp y\}, \quad (5.4)$$

که در آن $\perp$ نشان دهنده‌ی یک نوع تعامد خاص در فضای X است و $S(X)$ مجموعه‌ی بردارهای با نرم واحد در X است. به عبارت بهتر، با دقت در این تعریف در می‌یابیم که متناظر با هر نوع تعامد در فضای X یک نوع شاخص $D_{\perp}(X)$ تعریف می‌شود. جایی که ابهام وجود نداشته باشد به جای $D_{\perp}(X)$ به اختصار $D(X)$ می‌نویسیم. توجه داریم که شاخص $D(X)$ معیاری برای کل فضای X هست و وابسته به اعضای آن نیست.

لم ۱.۵.۴. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط باشد. در این صورت $D(X) = 1$.

برهان. با توجه به قضایای ۲.۲.۴ و ۳.۲.۴ و تعریف تعامد در فضای ضرب داخلی ثابت می‌گردد. $\square$

لم ۲.۵.۴. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت $D_{\perp_{BJ}}(X) = 1$.

برهان. با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۴ ثابت می‌گردد. $\square$

۶.۴ کران‌هایی برای شاخص $D(X)$ در فضاهای l_p

در این بخش با کمک روش‌های معمول در حسابان تلاش می‌کنیم تا کران‌های مناسبی برای شاخص $D(X)$ بیابیم به ویژه در حالت‌های خاص مقدار دقیق این شاخص را می‌یابیم.

در سرتاسر این بخش شاخص $D(X)$ را متناظر با تعامد متساوی الساقین در نظر می‌گیریم. به زبان ریاضی،

$$D(X) = \inf \{a(x, y) : x, y \in S(X), x \perp_i y\}. \quad (6.4)$$

قضیه ۱.۶.۴. [۱۳] برای هر فضای نرم‌دار حقیقی مانند X که $\dim(X) \geq 2$ داریم

$$2(\sqrt{2} - 1) \leq D(X) \leq 1,$$

و $D(X) = 1$ اگر و تنها اگر X اقلیدسی^۱ باشد.

^۱Euclidean

قضیه ۲.۶.۴. [۱۳] فرض کنیم p و q مزدوج هم باشند؛ به عبارت بهتر $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ در این صورت

$$D(l_p^p) = \inf \left\{ \frac{(1 + \alpha^2)}{(1 + \alpha^q)^{1/q} (1 + \alpha^p)^{1/p}} : \alpha \in [0, 1] \right\}.$$

نتیجه ۱.۶.۴. $D(l_p^p) = D(l_q^q)$ که در آن q یک عدد حقیقی است به طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

نتیجه ۲.۶.۴. $\lim_{p \rightarrow \infty} D(l_p^p) = 2(\sqrt{2} - 1)$.

تعریف ۱.۶.۴. فرض کنیم X صفحه‌ی مینکوفسکی، یعنی فضای خطی نرم‌دار دو بعدی حقیقی، باشد. اگر $e_1, e_2 \in S(X)$ چنان موجود باشند که برای هر $t \in \mathbb{R}$

$$\|e_1 + te_2\| = \|e_1 - te_2\| = \|e_2 + te_1\| = \|e_2 - te_1\|,$$

در این صورت X را صفحه‌ی مینکوفسکی متقارن و $\{e_1, e_2\}$ را پایه‌ی مینکوفسکی X می‌نامیم.

مثال ۱.۶.۴. فرض کنیم $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ ، $1 \leq p \leq \infty$. در این صورت X یک صفحه‌ی مینکوفسکی متقارن می‌باشد و $\{(1, 0), (0, 1)\}$ یک پایه‌ی مینکوفسکی برای X است.

مثال ۲.۶.۴. فرض کنیم $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p_1+p_2})$ ، $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ ، که در آن $\|\cdot\|_{p_1+p_2} = \frac{\|\cdot\|_{p_1} + \|\cdot\|_{p_2}}{2}$. در این صورت X یک صفحه‌ی مینکوفسکی متقارن می‌باشد و $\{(1, 0), (0, 1)\}$ یک پایه‌ی مینکوفسکی برای X است.

قضیه ۳.۶.۴. فرض کنیم X یک صفحه مینکوفسکی متقارن و $e_1 = (1, 0)$ و $e_2 = (0, 1)$ پایه‌ی مینکوفسکی آن باشند، آنگاه

۱. $e_1 \perp_R e_2$ ؛

۲. $e_1 \perp_i e_2$ ؛

۳. $e_2 \perp_B e_1$ و $e_1 \perp_B e_2$ ؛

۴. X^* نیز یک صفحه‌ی مینکوفسکی متقارن است و $\{e_1^*, e_2^*\}$ پایه‌ی مینکوفسکی X^* است که در آن e_1^* و e_2^* به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$e_1^*(e_1) = 1, \quad e_1^*(e_2) = 0, \quad e_2^*(e_2) = 1, \quad e_2^*(e_1) = 0.$$

قضیه ۴.۶.۴. فرض کنیم X یک صفحه‌ی مینکوفسکی متقارن و $e_1 = (1, 0)$ و $e_2 = (0, 1)$ پایه‌ی مینکوفسکی آن باشند، آنگاه

$$D(X) = \inf \left\{ \frac{(1 + \alpha^2)}{\|(\alpha, 1)\| \|(\alpha, 1)\|_*} : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

که در آن $\|\cdot\|_*$ نرم دوگان X را نشان می‌دهد.

نتیجه ۳.۶.۴. اگر X یک صفحه‌ی مینکوفسکی متقارن باشد، آنگاه $D(X) = D(X^*)$.

مراجع

- [1] Aupetit B. (1991), "**A Primer on Spectral Theory**", Springer, Berlin-Heidelberg
- [2] Balashov M. V. (2001), "Geometric difference of multivalued maps" **Mathematical Notes**, 70, pp 147–153
- [3] Birkhoff G. (1935), "Orthogonality in normed linear spaces" **Duke Math. J.**, 1, pp 169–172
- [4] Bonsall F.F. and Duncan J. (1973), "**Numerical Ranges II**", London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press, New York
- [5] Chorianpoulos Ch., Karanasios S. and Psarrakos P. (2009), "A definition of numerical range of rectangular matrices" **Linear and Multilinear Algebra**, 57, pp 459–475
- [6] Chorianpoulos Ch. and Psarrakos P. (2011), "Birkhoff-James approximate orthogonality sets and numerical ranges" **Linear Algebra Appl.**, 434, pp 2089–2108
- [7] Chorianpoulos Ch. and Psarrakos P. (2013), "On the continuity of Birkhoff-James ϵ -orthogonality sets" **Linear and Multilinear Algebra**, 61
- [8] Courant R. and Robbins H. (1996) "**What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods**", Oxford University Press
- [9] Dadipour F., Moslehian M. S., Rassias J. M. and Takahasi S. E. (2012), "Characterization of a generalized triangle inequality in normed spaces" **Nonlinear Anal-TMA**, 75, no. 2, pp 735–741
- [10] Gustafson K.E. and Rao D.K.M. (1997), "**Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices**", Springer-Verlag , New York

-
- [11] James R. C. (1945), "Orthogonality in normed linear spaces" **Duke. Math. J.**, 12, pp 291–302
- [12] James R. C. (1947), "Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces" **Trans. Amer. Math. Soc.**, 61, pp 265–292
- [13] Ji D. H. and Wu S. L. (2006), "Quantitative characterization of the difference between Birkhoff orthogonality and Isosceles orthogonality" **J. Math. Ana. Appl.**, 323, pp 1–7
- [14] Kapoor O. P. and Prasad J. (1978), "Orthogonality and Characterization of Inner Product Spaces" **Bull. Austral. Math. Soc.**, 19, pp 403–416
- [15] Lenfrink H.W.J. and Spijker M.N. (1990), "A generalization of the numerical ranges of a matrix" **Linear Algebra Appl.**, 140, pp 251–266
- [16] Martini H. and Swanepoel K. J. (2001), "The geometry of Minkowski spaces – A survey, Part I" **Exposition. Math.**, 19, pp 97–142
- [17] Martini H. and Swanepoel K. J. (2004), "The geometry of Minkowski spaces – A survey, Part II" **Exposition. Math.**, 22, pp 93–144
- [18] Milicic P. M. (1987), "Sur la g -orthogonalite dans un espace norme" **Mat. Vesnik**, 39, pp 325–334
- [19] Milicic P. M. (1998), "On the quasi-inner product spaces" **Matematički Bilten**, 22(XLVIII), pp 19–30
- [20] Murphy G. J. (1990), " **C^* -Algebras and Operator Theory**", Academic Press, INC. London
- [21] Polovinkin E.S. (1982), "**Elements of the Theory of Set-Valued Mapping**", MFTI, Moscow
- [22] Sain D., Paul K. and Denath L. (2015), "Characterization of Inner Product Spaces" **Int. J. Appl. Comput. Math.**, DOI: 10.1007/s40819-015-0036-8

- [23] Zhi-Zhi Ch., Wei L. and Lu-Lin L. (2011), "Projections, Birkhoff Orthogonality and Angles in normed spaces" **Communications in Mathematical Research**, 27,4, pp 378–384

- [24] Zhu K. (1993), "**An Introduction to Operator Algebras**", State University of New York at Albany

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Induced	القا شده
Upper	بالایی
Banach	باناخ
Range	بُرد
Vector	بردار
Dimension	بُعد
Basis	پایه
Lower	پایینی
Continuity	پیوستگی
Projection	تصویر
Orthogonality	تعامد
Singleton	تک عضوی
Polynomial	چند جمله‌ای
Multi valued	چند مقداری
Product	حاصل ضرب
State	حالت
Well defined	خوش تعریف
Inner	داخلی
Entry	درایه
Dual	دوگان
Numerical	عددی
Operator	عملگر
Orthogonal	عمود
Distance	فاصله

Bounded	کراندار
Ball	گوی
Orthogonal	متعامد
Complex	مختلط
Set valued	مجموعه مقدار
Conjugate	مزدوج
Parallel	موازی
Normalized	نرمال شده
Point	نقطه
Map	نگاشت
Semi continious	نیمه پیوسته
Dependent	وابسته
Inverse	وارون
Eigen	ویژه
Identity	همانی
Smooth	هموار

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Ball	گوی
Banach	باناخ
Bounded	کراندار
Basis	پایه
Complex	مختلط
Conjugate	مزدوج
Continuity	پیوستگی
Dependent	وابسته
Dimension	بعد
Distance	فاصله
Dual	دوگان
Eigen	ویژه
Entry	درایه
Identity	همانی
Induced	القا شده
Inner	داخلی
Inverse	وارون
Lower	پایینی
Map	نگاشت
Multi valued	چند مقداری
Normalized	نرمال شده
Numerical	عددی
Operator	عملگر
Orthogonal	عمود

Orthogonality	تعامد
Parallel	موازی
Point	نقطه
Polynomial	چند جمله‌ای
Product	حاصل ضرب
Projection	تصویر
Range	برد
Semi continious	نیم پیوسته
Set valued	مجموعه مقدار
Singleton	تک عضوی
Smooth	هموار
State	حالت
Upper	بالایی
Vector	بردار
Well defined	خوش تعریف

Abstract

In this thesis we introduce the operator approach for orthogonality in linear spaces. In particular, we represent the concept of orthogonal vectors using an operator associated with them, in normed linear spaces.

Moreover, we investigate some of continuity properties of this kind of orthogonality. More precisely, we show that the set valued function

$$f(x; y) = \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, p(x - \mu y, y) = 1\}$$

is upper and lower semi continuous, where

$$p(x, y) = \sup \{p_{z_1, \dots, z_{n-2}}(x, y) : z_1, \dots, z_{n-2} \in X\}$$

and

$$p_{z_1, \dots, z_{n-2}}(x, y) = \|P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}\|^{-1}$$

where $P_{x, z_1, \dots, z_{n-2}, y}$ denotes the projection parallel to y from X to the subspace generated by $x, z_1, \dots, z_{n-2}, y$. This can be considered as an alternative definition for numerical range in linear spaces.

Keywords. Linear space; Normed space; Birkhoff orthogonality; Minkowski plane; Set valued function; Upper semi continuity; Lower semi Continuity



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Analysis- Best Approximation

Operator Approach for Orthogonality in Linear Spaces

By: Maryam Saeedi Khojasteh

Supervisor

Dr. Mahdi Iranmanesh

February 2019