بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی با رویکرد دوقطبی

نگارنده: افسانه دلخواه

استادان راهنما

دکتر مهرداد غزنوی
دکتر مریم قرآنی

بهمن ۱۳۹۷

تقدیم به مادر عزیز و مهربانم

پدر همیشه دلسوزم

خواهر عزیزم که در سختی‌ها کنار من است.

با سپاس از جناب آقای دکتر عزنوی استاد رهنما و تمام کسانی که مرا در این راه راهنمایی کردند.

افسانه دلخواه

بهمن ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **افسانه دلخواه** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه فازی با رویکرد دوقطبی** ، تحت راهنمایی **مهرداد غزنوی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام '' دانشگاه صنعتی شاهرود '' یا '' Shahrood University of Technology '' به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

افسانه دلخواه
بهمن ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

چارچوب سنتی برای مسائل بهینه‌سازی خطی فازی، که از مدل $max - min$ ارائه شده توسط زیمرمن الهام گرفته شده است، از اصل توسعه بلمن_زاده برای تجمیع تمام مجموعه‌های فازی که هم نشان‌دهنده محدودیت‌های فازی و هم نشان‌دهنده توابع هدف فازی هستند، استفاده کرده است. در این پایان‌نامه مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی (FMOLP) را از دیدگاه مدل‌بندی اولویت مورد بررسی قرار می‌دهیم. مسائل برنامه ریزی خطی چندهدفه انعطاف‌پذیر هم از دیدگاه دوقطبی بررسی می‌شوند. دوقطبی بودن به ما اجازه می‌دهد که بین اولویتهای مثبت و منفی تفاوت قائل شویم. اولویتهای منفی نشان می‌دهند که چه چیز غیرقابل‌قبول است درحالیکه اولویتهای مثبت محدودیت کمتری دارند و بیان می‌کنند که چه چیز مطلوب است. محدودیت‌های انعطاف‌پذیر در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی به عنوان اولویتهای منفی برای توصیف اینکه چه چیزی تا حدودی مجاز است، درنظر گرفته شده است درحالیکه توابع هدف در مسئله به عنوان اولویتهای مثبت برای توصیف رضایتمندی چیزی که مطلوب است در نظر گرفته شده‌اند. این رویکرد مارا قادر می سازد تا مجموعه‌های فازی را که نشان‌دهنده محدودیتها و توابع هدف هستند به‌طور جداگانه مدیریت کنیم و آنها را از راههای مختلف ترکیب کنیم. مفهوم جواب بهینگی پارتو برای مسائل MOFLP تعیین شده است و رویکردی ارائه شده است که یک جواب با بالاترین درجه شدنی بودن برای مسائل MOFLP استخراج کند. جواب بهینه مسائل FMOLP یکی از مواردی است که ترکیب فصلی اولویتهای مثبت وزنی را ماکزیمم می‌کند، مشروط بر اینکه اولویتهای منفی ترکیب شده از طریق عطف برآورده شوند.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی ریاضیات فازی؛ برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی؛ دوقطبی بودن؛ شرط همبستگی (انسجام)؛ عملگر تجمیع؛ عملگر OWA.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مبانی نظری بهینه‌سازی چندهدفه فازی

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم بهینه سازی چند هدفه و نظریه فازی را بررسی می‌کنیم. سپس برخی تعاریف و مبانی اولیه مسایل بهینه‌سازی چندهدفه با ضرایب فازی را ارائه می‌دهیم. این تعاریف و قضایا در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۲.۱ تعاریف و قضایای اولیه مجموعه‌های فازی

نظریه مجموعه‌های فازی که برای تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان مورد استفاده قرار می‌گیرد قادر است بسیاری از مسائل با متغیرها و سیستم‌هایی که نادقیق و مبهم هستند را مدل‌سازی کند. در این بخش به بیان برخی از مفاهیم و تعاریف اولیه مجموعه‌های فازی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید A یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ باشد. در این‌صورت تابع مشخصه مربوط

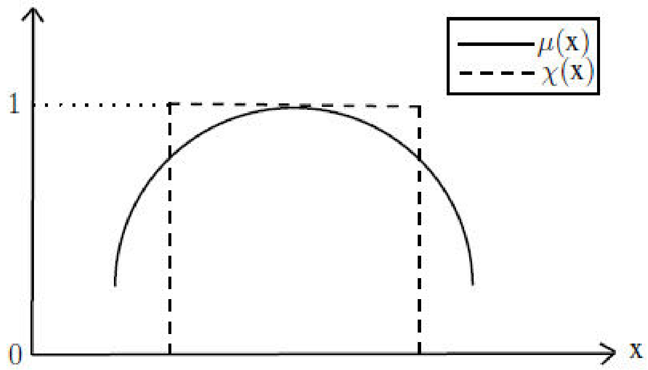
به A را با $\chi_A(x)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A. \end{cases}$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید **X** مجموعه‌ای از عناصر باشد. اگر برد تابع مشخصه از مجموعه دو عضوی {۰،۱} به بازه [۰،۱] گسترش داده شود تابعی به‌وجود خواهد آمد که به هر عضو x از **X** عددی را در بازه [۰،۱] نسبت می‌دهد. این تابع، تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود، که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\mu_{\tilde{A}(x)} : \mathbf{X} \longrightarrow [0, 1].$$

هر مجموعه فازی منحصرا بوسیله یک تابع عضویت خاص تعریف می‌شود. در تعریف تابع عضویت، فرض بر این است که مجموعه مرجع **X** همیشه یک مجموعه کلاسیک است. مجموعه‌های کلاسیک حالت خاصی از مجموعه‌های فازی هستند که مجموعه‌های قطعی نامیده می‌شوند. تابع عضویت مجموعه‌های کلاسیک فقط شامل اعداد صفر و یک است.



شکل ۱.۱: تابع عضویت و تابع مشخصه

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه αـ برش برای مجموعه فازی $\tilde{A}$ با A_α نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \colon \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

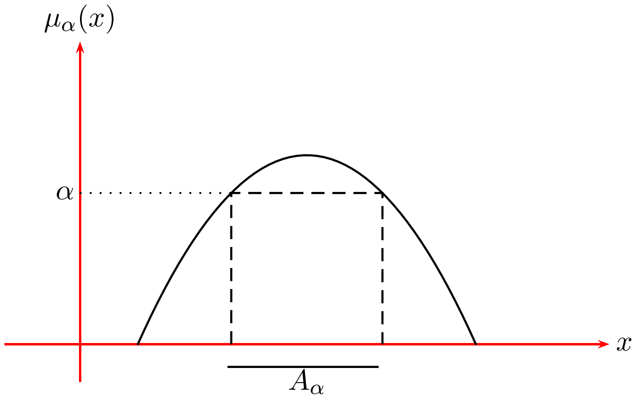
همچنین مجموعه αـ برش A_α با استفاده از تابع مشخصه به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \mu_{A_\alpha}(x) \geq \alpha \\ 0, & \mu_{A_\alpha}(x) < \alpha. \end{cases}$$

واضح است که برای مجموعه‌های αـ برش خاصیت زیر برقرار است:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Leftrightarrow \tilde{A}_{\alpha_1} \supseteq \tilde{A}_{\alpha_2}$$

این رابطه در شکل زیر نشان داده شده است:



مجموعه‌های α − برش

فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی باشد. مجموعه‌ای که عناصر مجموعه مرجع در آن تابع عضویت مثبت (بزرگتر از صفر) دارند، مجموعه پشتیبان مجموعه $\tilde{A}$ نامیده می‌شود و با علامت $supp(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود. $supp(\tilde{A})$ یک مجموعه کلاسیک است. به عبارت دیگر

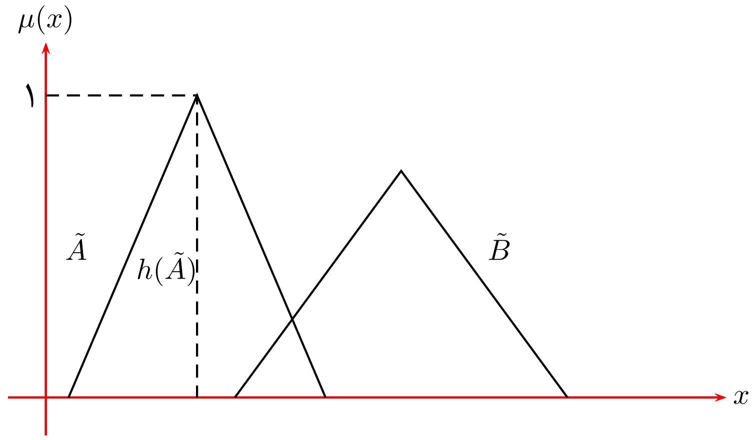
$$supp(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

تعریف ۴.۲.۱. ارتفاع یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ که با نماد $h(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود، بزرگترین درجه عضویت همه عناصر آن مجموعه است. به عبارت دیگر

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x).$$

تعریف ۵.۲.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ را روی Xنرمال شده گویند، اگر ارتفاع آن برابر یک باشد یعنی

$$\exists x \in X: \ \ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$



مجموعه فازی نرمال $\tilde{A}$ و غیر نرمال $\tilde{B}$

تعریف ۶.۲.۱. مجموعه‌ای که عناصر مجموعه مرجع X در آن دارای تابع عضویت یک باشند، هسته مجموعه $\tilde{A}$ است و با نماد $core(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود.

$$core(\tilde{A}) = 1_{\tilde{A}} = \{x \in X |\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

قضیه ۱.۲.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ را محدب گویند اگر و تنها اگر مجموعه همه α ـ برش‌های آن، $\{A_\alpha(x)\}$ که در آن $\alpha \in [0,1]$ از نظر کلاسیک محدب باشند. برای اینکه یک مجموعه فازی، محدب باشد، نمودار تابع عضویت آن باید تنها یک قله داشته باشد.

تعریف ۷.۲.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ در $\mathbb{R}^n$ مجموعه فازی محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $0 \le t \le 1$ داشته باشیم :

$$\mu_{\tilde{A}}(tx + (1-t)y) \ge \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\} = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(y). \qquad (1.1)$$

برهان فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی محدب باشد. همچنین $\alpha = \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{A}}(y)$. با توجه به اینکه $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی محدب است پس همه مجموعه α ـ برش‌های آن محدب هستند. لذا برای هر $x, y \in \tilde{A}_\alpha$، $tx + (1-t)y \in \tilde{A}_\alpha$. بنابراین داریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(tx + (1-t)y) \ge \alpha = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}.$$

برعکس، اگر تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ از مجموعه فازی $\tilde{A}$ در رابطه ۱.۱ صدق کند، دراین‌صورت با گرفتن $\alpha = \mu_{\tilde{A}}(x)$، مجموعه α ـ برش $\mu_{\tilde{A}}$ مجموعه همه نقاط y است که $\mu_{\tilde{A}}(y) \ge \alpha = \mu_{\tilde{A}}(x)$. بنابراین برای هر $x, y \in \mu_{\tilde{a}}$،

$$\mu_{\tilde{A}}(tx + (1-t)y) \ge \alpha = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\} = \mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha,$$

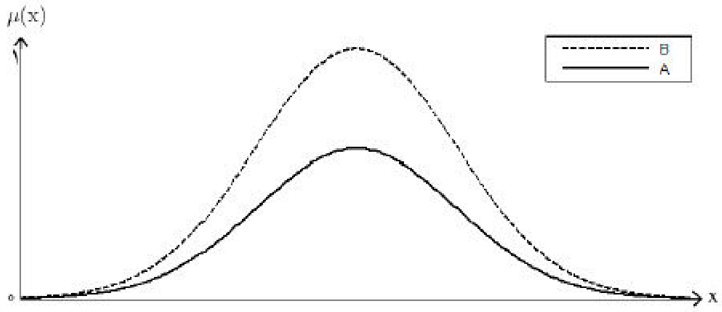
که نتیجه می‌دهد $tx + (1-t)y \in \mu_{\tilde{A}}$. یعنی همه مجموعه α ـ برش‌های $\mu_{\tilde{A}}$ محدب‌اند و این یعنی $\tilde{A}$ محدب است. □

۳.۱ عملیات مجموعه فازی

فرض کنید X مجموعه مرجع، و A و B مجموعه‌های تعریف شده روی مجموعه مرجع باشند. در این‌صورت تعاریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه فازی A زیر مجموعه‌ی مجموعه فازی B یا A مشمول در B است، اگر برای هر $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), x \in X$ وبا $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم (شکل ۲.۱).

شکل ۲.۱: زیر مجموعه $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$

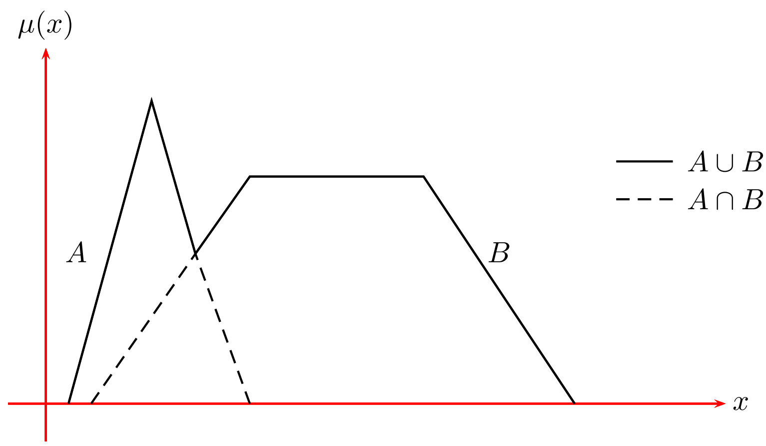


تعریف ۲.۳.۱. دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را برابر گوییم اگر $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ و $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$ یعنی $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$.

تعریف ۳.۳.۱. اجتماع استاندارد دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک مجموعه فازی $\tilde{C}$ است که تابع عضویت آن با به‌کارگیری عملگر حداکثر به‌صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)),$$

است و با $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$ نمایش می‌دهیم: (شکل ۳.۳.۱).



اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی

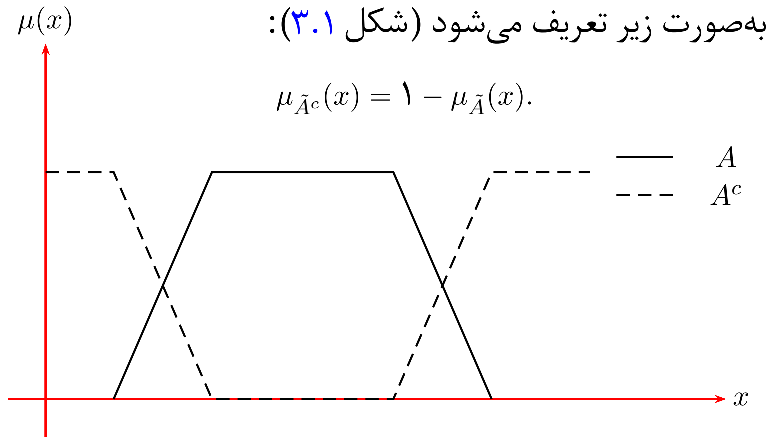
تعریف ۴.۳.۱. اشتراک استاندارد دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک مجموعه فازی $\tilde{D}$ است که تابع عضویت (درجه عضویت عناصر)آن با به‌کارگیری عملگر حداقل به‌صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

و $\tilde{D} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ (شکل ۳.۳.۱).

تعریف ۵.۳.۱. مکمل مجموعه فازی $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی است که با $\tilde{A}^c$ نمایش می‌دهیم و تابع عضویت آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۳.۱):

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = ۱ - \mu_{\tilde{A}}(x).$$

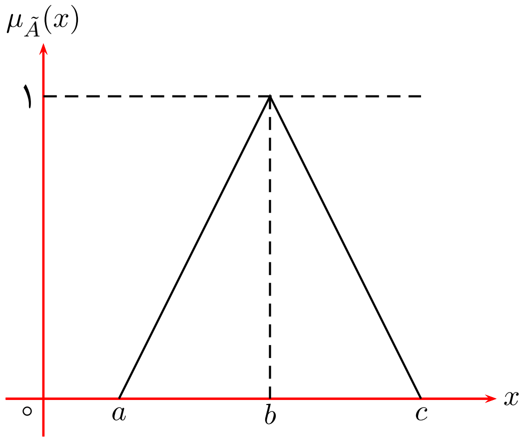


مکمل مجموعه فازی

۴.۱ اعداد فازی

تعریف ۱.۴.۱. عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, c)$ یک عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود اگر تابع عضویت آن به‌صورت زیر باشد(شکل ۴.۱):

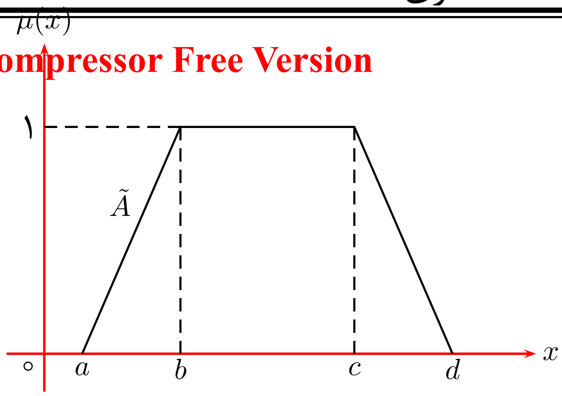
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۰, & x < a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{(c-x)}{(c-b)}, & b < x \leq c \\ ۰, & c < x \end{cases}$$



عدد فازی مثلثی

تعریف ۲.۴.۱. عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود اگر تابع عضویت آن به‌صورت زیر باشد (شکل ۲.۴.۱):

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۰, & x < a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x < b \\ ۱, & b \leq x < c \\ \frac{(d-x)}{(d-c)}, & c \leq x < d \\ ۰, & d < x \end{cases}$$



عدد فازی ذوزنقه‌ای

تعریف ۳.۴.۱. اصلی که توابع قطعی را به توابع فازی تبدیل می‌کند اصل گسترش می‌گویند. فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی باشند. با استفاده از اصل گسترش [۴۲،۴۳،۴۴] و با استفاده از [۳۱] تابع عضویت $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ به‌صورت

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(z) = \sup_{\{(x,y):x+y=z\}} \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)\}, \qquad (۲.۱)$$

و تابع عضویت ضرب اسکالر $\lambda\tilde{A}$ که $\lambda \in \mathbb{R}$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\lambda\tilde{A}}(z) \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(\frac{z}{\lambda}), & \lambda \neq 0 \\ 0, & \lambda = 0, z \neq 0 \\ 1, & \lambda = 0 = z, \end{cases} \qquad (۳.۱)$$

و این بدان معنی است که اگر $\lambda = 0$ آنگاه $\lambda\tilde{A} = \tilde{0}$.

فصل ۲

برنامه ریزی خطی چندهدفه فازی

۱.۰.۲ دوقطبی بودن:

سه نوع دوقطبی بودن تا کنون تعریف شده است که برای راحتی، نام این سه نوع را I، IIو III می‌گذاریم و آنها را به‌طور خلاصه معرفی می‌کنیم. جزییات را می‌توان در [۱۵، ۵] پیدا کرد.

نوع I: دوقطبی متقارن : دوقطبی متقارن از مقیاس دوقطبی واحد [۰،۱] استفاده می‌کند و در آن بیشترین مقدار ۱ است که به معنی اطمینان کامل است و کمترین مقدار ۰ است که غیرممکن را نمایش می‌دهد. ارزش خنثی ۰/۵ درنظرگرفته شده و به عدم اطمینان کامل درمورد اینکه یک رویداد یا عکس آن اتفاق می‌افتد، اشاره دارد. اندازه‌گیری احتمالی یکی از مثالهای معروف در این مورد است. نظریه پیش‌بینی تجمعی ورسکای کاهنمن [1] [۴۰] از تمام خط حقیقی به عنوان یک مقیاس دوقطبی استفاده می‌کند.

نوع II: دوقطبی همگن دوگانه: در اینجا یک موضوع با استفاده از دو ارزیابی مستقل سنجیده می‌شود: یک مقیاس مثبت و یک مقیاس منفی. این نوع از دوقطبی بودن، با دو مقیاس مجزای مثبت و منفی که با استفاده از یک رابطه دوگانی به‌هم مرتبط‌اند، کار می‌کنند. مقیاس مثبت با $\mathrm{L}^+ = (\circ, \text{۱}]$ نمایش داده می‌شود، که کران بالا نشان‌دهنده حداکثر رضایت ممکن است و کران پایین آن خنثی است و حد مجاز تهی بودن را نشان می‌دهد. مقیاس منفی

[1] Tversky-Kaneman

(ناسازگاری) با $L^- = (0,1]$ نشان داده می‌شود که کران بالا در آن نشان‌دهنده رد کامل است درحالیکه کران پایین آن خنثی است و امکان شدنی‌بودن را نشان می‌دهد. نکته این است که طرفهای مثبت و منفی تمام احتمالات را مورد بررسی قرار نمی‌دهند. اندازه‌های احتمالی [۱۳] و مجموعه‌های فازی شهودی (شواهد اتاناسف) [۱] در نوع II از دوقطبی بودن قرارمی گیرند.

نوعIII: دوقطبی ناهمگن: در این شکل از دوقطبی بودن بخش منفی اطلاعات به آن بخش از منبع که بخش مثبت دارد، اشاره نمی‌کند. به عبارت دیگر، اطلاعات مثبت و منفی از منابع متفاوتی هستند و شاید هم دارای معانی متفاوتی باشند. اطلاعات مثبت و منفی با استفاده از اصول مشابه جمع نمی‌شوند. قابل ذکر است که این نوع از دوقطبی بودن در تصمیم‌گیری بین محدودیتهایی که تعیین می‌کنند کدام جوابها برای یک مسئله نشدنی هستند و اهدافی که تعیین می‌کنند کدام جوابها ترجیح داده می‌شوند، بسیار رایج است. در این پایان‌نامه، ما مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی (FMOLPP)[۲] را با دید دوقطبی ناهمگن مدلسازی می‌کنیم.

۲.۰.۲ عملگر OWA

از عملگر تجمیع OWA برای جمع کردن اولویتهای مثبت استفاده می‌کنیم. از بحث بالا به‌وضوح می‌بینیم که باید از توابع تجمعی مختلفی برای ادغام دو نوع متمایز از اطلاعات بیان شده به عنوان مجموعه‌های فازی استفاده کنیم. بدین منظور ابتدا تعریف عملگر تجمعی را که در [۲۷] پیشنهاد شده یادآوری می‌کنیم و همچنین در این متن به دنبال اصول مقدماتی عملگر میانگین وزنی ترتیبی [۳] (OWA) هستیم که توسط یاگر [۴] [۱۷] معرفی شده است.

تعریف ۱.۰.۲. فرض کنید که $I = [0,1]$. یک عملگر تجمعی به‌صورت یک تابع $f : I^p \to I$ است که در شرایط زیر را صدق می‌کند:

۱) $f(x) = x \quad (p = 1)$

۲) $f(0,\dots,0) = 0$ و $f(1,\dots,1) = 1$

۳) $(x_1,\dots,x_p) \leqq (y_1,\dots,y_p)$ نتیجه می‌دهد که $f(x_1,\dots,x_p) \leq f(y_1,\dots,y_p)$.

به ویژگی سوم یکنوایی گویند.

برای کسب اطلاعات در مورد عملگرهای تجمعی، می‌توان به [۹، ۱۴]مراجعه کرد.

در بین عملگرهای تجمعی موجود، عملگر OWA رایج‌ترین است،که یک خانواده پارامتری از عملگرهای جمع کننده‌ای است که شامل بسیاری از عملگرهای شناخته شده می‌شوند.

تعریف ۲.۰.۲. نگاشت $F : I^p \to I$ یک عملگر OWA با بعد p نامیده می‌شود اگر متناظر با F یک بردار وزنی W به‌صورت $W^T = (w_1,\dots,w_p)$ موجود باشد به‌طوریکه $w_k \in (0,1)$,

[2] Fuzzy Multi-Objective Linear Programming Problem

[3] ordered weighted averaging

[4] Yager

$(k = 1, \ldots, p)$ و $\sum_{k=1}^{p} w_k = 1$ و

$$F(a_1, \ldots, a_p) = \sum_{k=1}^{p} w_k b_k$$

که درآن b_k، k امین عنصر بزرگ مجموعه $\{a_1, \ldots, a_p\}$ است. جالبترین جنبه‌ی عملگرهای OWA این است که وزن w_i با یک موقعیت ترتیبی مرتبط است تا یک آرگومان خاص مثل a_i. به این معنی که، w_i وزن متناظر با i امین عنصر بزرگ است و مهم نیست که کدام مولفه است. بردار W که مشخص کننده عملگر OWA است، بردار وزنی OWA نامیده می‌شود. یک کلاس بزرگ از عملگرهای تجمعی را می‌توان با انتخاب مناسب W در عملگر OWA توصیف کرد. به عنوان مثال، عملگر min و max در نظریه مجموعه فازی، عملگرهای OWA با بردارهای وزن به‌ترتیب برابر با $(0, \ldots, 0, 1)^T$ و $(1, 0, \ldots, 0)^T$ هستند. برای مطالعه بیشتر در مورد خواص و کاربردهای اپراتورهای OWA، می‌توانید به فولر [5] [۲۰، ۱۹]، اُهاگان [6] [۲۹]، یاگر [۴۷، ۴۵]، یاگر و فی لیو [7] [۴۶]، یاگر و کاسپرزیک [8] [۴۹] مراجعه کنید.

یک عملگر OWA مانند F همیشه بین 'و' و 'یا' قرار می‌گیرد؛ از این رو می‌توان آن را بعنوان یک عملگر "or-and" در نظر گرفت. این نوع ویژگی به عملگرهای OWA اجازه می‌دهد تا از آنها در دسته‌های جمع انعطاف‌پذیر [9] که در آن به دنبال ادغام واژگانی مانند بیشتر یا کمتر هستیم، استفاده کنیم، نه برای همه اصطلاحات. عملگرهای OWA توسط افراد مختلفی بررسی شده‌اند [۴۹، ۲۵، ۲۰، ۱۹]. در ادامه، باید از عملگرهای خاص OWA برای بیان اطلاعات موجود در مجموعه‌های فازی که دستیابی به سطح آرمانی را با توابع هدف در مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی توصیف می‌کنند، استفاده کنیم. این مورد در بخش ۳.۲ بررسی می‌شود. مشکل اصلی در این مسائل، این است که چگونه وزنهای OWA را پیدا کنیم. برای این منظور، دو اندازه مهم، با نامهای پراکندگی (یا آنتروپی) و orness بوسیله‌ی فرمول‌های زیر، در [۴۵] تعریف شده‌اند را بررسی می‌کنیم.

$$\mathrm{Disp}(W) = -\sum_{k=1}^{p} w_k \ln(w_k), \quad \mathrm{Orness}(W) = \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p} (p-k) w_k. \tag{۱.۲}$$

پراکندگی، درجه‌ای که در آن کل ترکیبات یک اندازه مورد استفاده قرار بگیرند را اندازه‌گیری می‌کند. orness مقداری است که در فاصله‌ی واحد $[0, 1]$ قرار دارد و درجه‌ای که در آن میزان تجمع شبیه به یک عملگر or است را اندازه می‌گیرد. اندازه آن میزان تجمع را مانند یک عملگر or می‌سنجد و می‌تواند به عنوان یک اندازه خوش‌بینانه در تصمیم‌گیری مورد توجه قرار بگیرد.

---

[5] Fullér

[6] O'Hagan

[7] Yager and Filev

[8] Yager and Kacprzyk

[9] فازی، نرم

۳.۰.۲ اندازه اصلی orness و andness

تعریف ۳.۰.۲. درجه orness متناظر با F و اپراتور تجمیع OWA با تابع وزنی $W = [w_1, \ldots, w_n]$ به‌صورت زیر است:

$$orness(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j h_n(j) \qquad (۲.۲)$$

که در آن $h_n(j) = \frac{n-j}{n-1}$.

تابع $h_n(j)$، نمونه اولیه (اصلی) تابع خطی پلکانی با $n-1$ پله با ارتفاع $\frac{1}{n-1}$ که با مقدار ۱ شروع می‌شود و به عنوان یک تابع نزولی با آرگومان j، است. با فهم این موضوع که

$$andness(W) = 1 - orness(W) \qquad (۳.۲)$$

اکنون می‌توانیم ویژگی‌های بیشتری از نمونه‌های فوق را با استفاده از فرمول ۲.۲ در نظر بگیریم:

۱. $W = [1, 0, \ldots, 0]$ نشان می‌دهد که $orness(W) = 1$، بنابراین $andness(W) = 0$.

۲. $W = [0, \ldots, 0, 1]$ معکوس اولین مورد است.

۳. $W = [\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}]$ نشان می‌دهد $orness(W) = andness(W) = \frac{1}{2}$.

به‌ازای هر بردار W دلخواه، orness یا خوش‌بینی مرتبط با فرآیند تجمیع به آسانی قابل تعیین است. نام مناسبتر برای اپراتور (عملگر) OWA می‌تواند عملگر orand باشد، از آنجا که ممکن است به عنوان ترکیبی از oring و anding عمل کند.

۴.۰.۲ اندازه پراکندگی

اندازه اصلی پراکندگی نیاز دارد که وزن بردار W با برقراری در $w_j \in I$ و $\sum_{j=1}^{n} wj = 1$، در بالا تعیین شده باشد. این اندزه مورد استفاده قرار خواهد گرفت تا تابع هدف مسئله بهینه‌سازی که جواب را به خوبی محدود کرده، به ما مقدار بهینه W را برای جمع خواهد داد.

تعریف ۴.۰.۲. فرض کنید که W یک بردار وزن با مولفه‌های $w_1, w_2, \ldots, w_n$ است آنگاه پراکندگی آن به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$disp(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \qquad (۴.۲)$$

.

این اندازه پرکندگی در واقع اندازه‌ای از آنتروپی است که ویژگی‌های زیر را ذکر می‌کند:

۱. اگر برای بعضی j ها $w_j = 1$ آنگاه $disp(W) = 0$، مینیمم مقدار

۲. اگر برای همه j ها $w_j = \frac{1}{n}$ آنگاه $disp(W) = \ln(n)$، ماکزیمم مقدار.

۵.۰.۲ محاسبه وزن بهینه OWA

قبل از اجرای برنامه‌ی سیستم حرفه‌ای، وزن‌های استفاده شده در فرآیند تجمیع باید محاسبه شوند. به نظر منطقی است که فرآیند تجمیع باید تمام orness یا خوش‌بینی متناظر با نتیجه‌ی حکم را بازتاب دهد، بنابراین ρ [۱۰] را به عنوان مقدار oring برای محاسبات در نظر می‌گیریم. روش ارائه شده توسط اوهاگان [۳۰] برای تعین مقدار وزن به‌صورت زیر است:

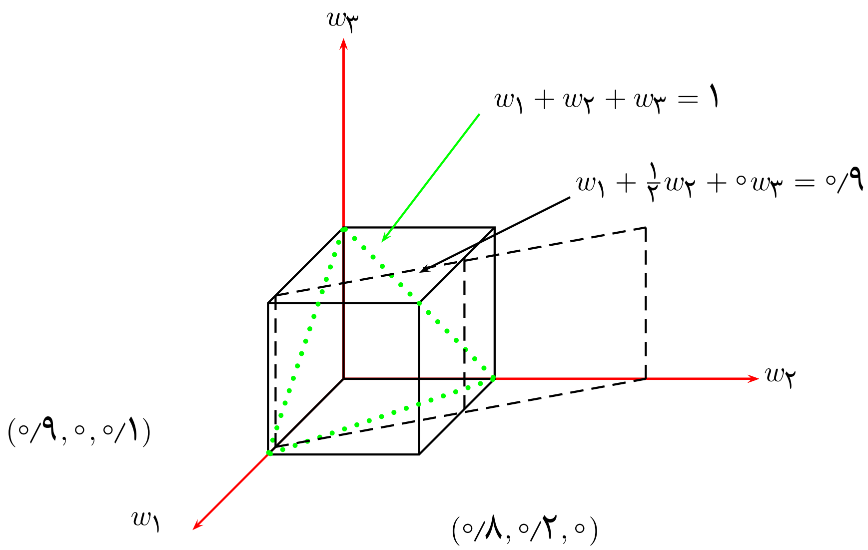
$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} h_n(j) \cdot w_j = \rho && (5.2) \\ & \sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \geq 0 \quad \text{به ازای هر } j && (6.2) \end{aligned}$$

که $h_n(j)$ در بالا به‌صورت $h_n(j) = \frac{n-j}{n-1}$ تعریف کردیم. در یک مسئله‌ی خاص برای پیدا کردن بردار W بهینه، مسئله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \\ s.t. \quad & 1 \cdot w_1 + \frac{1}{2} \cdot w_2 + 0 \cdot = 0/90 \\ & \sum_{j=1}^{3} w_j = 1, \quad w_j \geq 0 \text{ به ازای هر} \end{aligned}$$

جواب حقیقی به بخشی ازخط متصل به نقاط $[0/9, 0, 0/1]$ و $[0/8, 0/2, 0]$ در فضای W که سه بعدی است محدود شده است و در شکل زیر نشان داده شده است:

[10] certainty factor



مقادیر تابع هدف بین ۰/۰۳۲۴ و ۰/۰۵۳۵ متغییر است، با مقدار بهینه بدست آمده در نقطه تقریبی $[۰/۸۲۶۳, ۰/۱۴۷۴, ۰/۰۲۶۳]$. یکی از اولین روش‌های پیشنهاد شده توسط اوهاگان [11] [۲۹] ، یک کلاس خاص از عملگرهای OWA را تعیین می‌کند که شامل حداکثر انتروپی وزنهای OWA برای یک سطح معینی از orness است. به‌صورت الگوریتمی، با حل مسئله بهینه‌سازی مقید زیر بدست می‌آید: ((EORP) [12])

$$
\begin{aligned}
\text{(EORP)} \quad \max \quad & -\sum_{k=۱}^{p} w_k \ln(w_k) \\
\text{s.t.} \quad & \frac{۱}{p-۱} \sum_{k=۱}^{p} (p-k) w_k = \rho, \\
& \sum_{k=۱}^{p} w_k = ۱, \quad ۰ \le w_k \le ۱, \quad k = ۱, \dots, p
\end{aligned}
$$

که $\rho \in [۰, ۱]$ درجه مورد نظر orness است، یعنی $\rho = orness(W)$. لیو [13] [۲۵] ثابت کرد که عملگر OWA هندسی تنها عملگر آنتروپی OWA ماکزیمم برای یک مقدار orness داده شده است. یعنی عملگر OWA با آنتروپی ماکزیمم و عملگر OWA هندسی معادل هستند. در واقع عملگر OWA هندسی به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$w_k = a q^{k-۱}, \quad (k = ۱, \dots, p), \; a > ۰, \; q \ge ۰.$$

[11] O'Hagan
[12] entropy given orness problem
[13] Liu

برای $\sum_{k=1}^{p} w_k = 1$ خواهیم داشت:

$$a = \begin{cases} \frac{1}{p} & q = 1, \\ \frac{q-1}{q^p-1} & q \neq 1. \end{cases}$$

با استفاده از اولین محدودیت تساوی در EORP، می‌توانید به‌راحتی با حل معادله زیر برای $q \geq 0$ وزنهای OWA با آنتروپی ماکزیمم را بدست آورید.

$$(p-1)\rho q^{p-1} + \sum_{k=2}^{p} ((p-1)\rho - k + 1) q^{p-k} = 0 \qquad (۷.۲)$$

۱.۲ مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی پیشنهاد شده

یک مسئله تصمیم‌گیری فازی با مجموعه X در $\mathbb{R}^n$ شامل بردارهای تصمیم x، و مجموعه اهداف $G_k(k = 1, \ldots, p)$ همراه با مجموعه محدودیتها به‌صورت $R_i(i = 1, \ldots, m)$ است که هر کدام از آنها توسط یک مجموعه فازی در X مشخص می‌شود. برای چنین مسئله برنامه‌ریزی، بلمن و زاده [۴] پیشنهاد کردند که تصمیم D یک جواب شدنیِ ارائه شده توسط $D = \{\langle x, \mu_D(x)\rangle \,|x \in X\}$ است که

$$\mu_D(x) = \min_{k,i} \left(\mu_{G_k}(x), \mu_{R_i}(x)\right).$$

در این رویکرد، محدودیتها و اهداف با هم بررسی می‌شوند هرچند که مفهوم متفاوتی دارند. توابع هدف، اهداف مورد نظری هستند که می‌خواهیم به آنها برسیم و به‌طور کلی معمولا در یک فرایند سلسله مراتبی در تصمیم‌گیری در اولویت بالاتری قرار دارند. درحالیکه محدودیتها در یک سلسله مراتب ثانویه در همان مسئله در سطوح اجرایی تصمیم قرار دارند. به عنوان مثال، کمیته تجدیدنظر برنامه درسی یک موسسه ممکن است پس از هم‌فکری‌ها و بررسی نظرات و توصیه‌های افراد از جمله والدین، مدرسان، مدیریت و شرکتهایی که دانشجویان را استخدام می‌کنند یک برنامه درسی جدید را ارائه دهد. با این حال، برخی از توصیه‌ها عملا ممکن نیست به دلیل محدودیتهای اداری و منطقی اجرایی شوند.

در اینجا، مجموعه‌ای از اهداف مورد نظر، توسط کمیته تجدیدنظر برنامه درسی تشکیل شده از چند عضو و محدودیتهای اجرایی ارائه می‌شود.

این کمیته دو دیدگاه مختلف مسائل را در جنبه‌های مختلف که منجر به یک دوقطبی ناهمگن می‌شود، بررسی می‌کنند. توصیه‌های کمیته می‌تواند به عنوان اولویتهای مثبت و محدودیتهای منطقی را می‌توان به عنوان اولویتهای منفی درنظر گرفت. توجه داشته باشید که بین اولویتهای مثبت و منفی تقارن وجود ندارد. بعلاوه، همه آنچه که توسط کمیته (به نوبه خود سهامداران

مورد نظر است ممکن است کاملا قابل دستیابی نباشد اما محدودیتهای منطقی را به‌سادگی نمی‌توان نادیده گرفت.

در چنین سناریویی، روش ایده‌آل این است که این دو نوع اطلاعات را به‌طور متفاوت بررسی کند و به نوعی این دو را برای رسیدن به یک جواب بهینه تجمیع کنند. هدف ما باید شناسایی مجموعه ای از جوابهای بالقوه باشد که محدودیتهای اجباری را نقض نمی‌کنند و تا حد امکان به اهداف موردنظر برسند. یک روش دیگر برای بررسی این نوع دوقطبی بودن این است که یک محدودیت می‌تواند بنابه تجربه گذشته و دانش تصمیم‌گیرنده ایجاد شود در حالیکه اهداف به‌طورکلی براساس سناریوهای کنونی موجود در بازارهای رقابتی و تطبیقی تنظیم می‌شوند که دامنه مسئله را تشکیل می‌دهند. سناریوهای کنونی قابل مشاهده هستند و از این‌رو اطلاعات مثبت را نشان می‌دهند. ما باید مسئله تصمیم‌گیری را با رویکرد دوقطبی ناهمگن بررسی کنیم. محدودیتها به عنوان اولویتهای منفی عمل می‌کنند، یعنی اگر یک بردار x نتواند آنها را برآورده کند، باید غیرقابل‌قبول یا نشدنی باشد. از سوی دیگر اهداف به عنوان چیزی است که عنصر تصمیم‌گیرنده مایل به رسیدن به آنها است و بنابراین به عنوان اولویتهای مثبت است. بنابراین، در این پایان‌نامه، مجموعه‌های فازی نمایانگر توابع هدف و مجموعه‌های فازی نمایانگر محدودیتها را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم . برای بدست آوردن شرایط همبستگی بین آنها، ما باید یک شرط انسجام [۱۵، ۵] در مدلی که پیشنهاد کردیم را درنظر بگیریم. وضعیت انسجام (شرط همبستگی) بیان می‌کند که یک جواب نمی‌تواند بهتر از چیزی که توسط محدودیتها مجاز است، بشود. یک مدل کلی از FMOLPP می‌تواند به‌شرح زیر بیان شود:

$$
\begin{aligned}
\text{(FMOLPP)} \quad \tilde{\max} \quad & (c_۱^T x, c_۲^T x, \ldots, c_p^T x) \\
\text{s.t.} \quad & A_i^T x \preceq b_i \quad i = ۱, \ldots, m, \\
& x \in S,
\end{aligned}
$$

که $A_i \in \mathbb{R}^n$، $(i = ۱, \ldots, m), b_i \in \mathbb{R}$، $\mathrm{C} = (c_۱^T, c_۲^T, \ldots, c_p^T)^T \in \mathbb{R}^{p \times n}$ با $c_k^T \in \mathbb{R}^n$ به‌ازای $(k = ۱, \ldots, p)$ نشان‌دهنده k امین سطر از C است، و $S \subseteq \mathbb{R}^n$ که شامل تمام نامساویهای خطی قطعی محدودیتهای سخت فازی، اگر وجود داشته باشد، در x است. محدودیتهای $A_i^T x \preceq b_i$ محدودیتهای منابع انعطاف‌پذیر است که در آن دسترسی به منابع b_i می‌تواند به اندازه حدمجاز $r_i (i = ۱, \ldots, m)$ انعطاف داشته باشد. در اینجا نماد " $\preceq$ " در واقع نماد کمتر یا مساوی فازی است و با کمک یک تابع عضویت انتخاب شده برای مجموعه فازی مربوط به هر محدودیت انعطاف‌پذیر درنظر گرفته می‌شود. علاوه بر این، برای هر $a, b \in \mathbb{R}$، اگر $a \succeq b$ داریم $(-a) \preceq (-b)$. تابع هدف $\tilde{max}$ نشان‌دهنده برآورده شدن فازی سطح آرمانی Z_k مشخص شده توسط تصمیم‌گیرنده برای k امین تابع هدف $c_k^T x$ می‌باشد. ما به حداکثر رساندن توابع هدف در (MOFLP) را به معنای برآورده شدن یک سطح آرمانی Z_k (که توسط تصمیم گیرنده داده می‌شود یا می‌توان آن را تعیین کرد) برای k امین هدف $c_k^T x$ را در نظر می‌گیریم، یعنی

$c_k^T x \geq Z_k, k = ۱, \ldots, p$.

در واقع مسئله (FMOLP) معادل است با یافتن $x \in \mathbb{R}^n$ به‌طوریکه رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} & c_k^T x \succeq Z_k && k = ۱, \ldots, p, \\ & A_i^T x \preceq b_i && i = ۱, \ldots, m, \\ & x \in S. \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که p محدودیت انعطاف‌پذیر اول متناظر با توابع هدف (MOFLP) هستند.
فرض کنید مجموعه‌های فازی G_k، $k = ۱, \ldots, p$ نشان‌دهنده محدودیتهای انعطاف‌پذیر متناظر با توابع هدف باشند.
توابع عضویت اهداف فازی (مجموعه‌های فازی نشان‌دهنده توابع هدف) و محدودیتهای فازی به صورت توابع خطی که به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند را درنظر می‌گیریم: برای $k = ۱, \ldots, p$ و $i = ۱, \ldots, m$،

$$\mu_{G_k}(c_k^T x) = \begin{cases} ۰ & c_k^T x < Z_k - g_k, \\ ۱ - \frac{Z_k - c_k^T x}{g_k} & Z_k - g_k \leq c_k^T x < Z_k, \\ ۱ & c_k^T x \geq Z_k, \end{cases}$$

$$\mu_{R_i}(A_i^T x) = \begin{cases} ۰ & A_i^T x > b_i + r_i, \\ ۱ - \frac{A_i^T x - b_i}{r_i} & b_i < A_i^T x \leq b_i + r_i, \\ ۱ & A_i^T x \leq bi, \end{cases}$$

که در آن g_k حد بالای (مجاز) قابل قبول مثبت در سطح آرمان هدف G_k است و r_i حد بالای قابل قبول مثبت برای محدودیتهای قابل انعطاف R_i است. رویکرد زیمرمن [14] از اصل بلمن و زاده [15] برای مشخص کردن تصمیم فازی استفاده می‌کند و بنابراین از عملگر 'min' برای گردآوری مجموعه‌های فازی بیانگر اهداف و محدودیتها استفاده می‌کند، که منجر به ایجاد مسئله برنامه‌ریزی خطی اکید زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{(CLP)} \quad \max \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \mu_{G_k}(c_k^T x) \geq \alpha \quad k = ۱, \ldots, p, \\ & \mu_{R_i}(A_i^T x) \geq \alpha \quad i = ۱, \ldots, m, \\ & x \in S, \\ & ۰ \leq \alpha \leq ۱. \end{aligned}$$

[14] Zimmerman
[15] Bellman and Zade

اگر (x^*, α^*) یک جواب بهینه مسئله فوق باشد آنگاه نتیجه می‌گیریم که حداکثر درجه رضایت کلی α^* برای جواب x^* بدست می‌آید. جواب بهینه (FMOLP) جوابی است که ترکیب فصلی اولویتهای مثبت وزنی را ماکزیمم کند مشروط بر اینکه اولویتهای منفی ترکیب شده از طریق فصلی برآورده شوند. در این پایان‌نامه، اولویتهای منفی یا محدودیتهای انعطاف‌پذیر را با استفاده از عملگر عطفی 'min' جمع می‌کنیم. این تضمین می‌کند که هر x که نتواند در یکی از محدودیتهای انعطاف‌پذیر صدق کند، غیرقابل‌قبول یا نشدنی است. از سوی دیگر، اولویتهای مثبتی که توسط اهداف ارائه شده هستند، با استفاده از یک عملگر تجمیع OWA به‌نام F جمع می‌شوند. می‌خواهیم ساختار F به‌گونه‌ای باشد که اگر رضایتمندی در دستیابی به آرمان یک هدف افزایش یابد، آنگاه رضایت کلی تصمیم‌گیرنده در جواب نیز باید افزایش یابد. بنابراین، عملگر تجمیع F باید در هر مولفه به‌طور اکید یکنوا باشد، یعنی اگر $a'_k < a_k$ آنگاه

$$\mathrm{F}(a_1, \dots, a_{k-1}, a'_k, a_{k+1}, \dots, a_p) < \mathrm{F}(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_p).$$

اطلاعات جمع‌آوری شده مثبت و منفی به‌ترتیب با مجموعه‌های فازی D_P و D_N با توابع عضویت زیر توصیف می‌شوند:

$$\mu_{D_P}(x) = \mathrm{F}(\mu_{G_1(c_1^T x)}, \mu_{G_2(c_2^T x)}, \dots, \mu_{G_p(c_p^T x)}),$$

و

$$\mu_{D_N}(x) = \min(\mu_{R_1(A_1^T x)}, \mu_{R_2(A_2^T x)}, \dots, \mu_{R_m(A_m^T x)}).$$

اطلاعات جمع‌آوری شده منفی و مثبت باید در کنار هم باشد، به این معنی که یک جواب نمی‌تواند توسط یک تصمیم‌گیرنده، به‌طور همزمان غیرقابل‌قبول و مطلوب باشد . این به عنوان یک شرط همبستگی توسط بنفرهات [16] و همکاران [۵] و دوبیس [17] و پیراد [18] [۱۵] بیان شده است. بنابراین گفته می‌شود μ_{D_P} و μ_{D_N} وابسته هستند اگر و فقط اگر

$$\mu_{D_P}(x) \leq \mu_{D_N}(x), \quad \forall x \in S. \tag{۸.۲}$$

توجه داشته باشید که اگر برای یک بردار تصمیم $x_0 \in S$، $\mu_{D_P}(x_0) > \mu_{D_N}(x_0)$ ، آنگاه μ_{D_P} و μ_{D_N} وابسته نیستند. بنابراین، همانطور که در [۵] پیشنهاد شده است، بازسازی همبستگی منجر به بازبینی μ_{D_P} به $\mu_{D_{prev}}$ به‌صورت زیر است:

$$\mu_{D_{prev}}(x) = \min\{\mu_{D_P}(x), \mu_{D_N}(x)\}, \quad x \in S.$$

پس از بازیابی همبستگی، مجموعه تصمیم D به یک مجموعه فازی با $\mu_{D_P} = \mu_{D_{prev}}$ تبدیل می‌شود. توجه داشته باشید که این با اعمال بلمن و زاده برای مجموعه‌های فازی D_P و D_N

[16] Benferhat
[17] Dubois
[18] Prade

معادل است. بنابراین مسئله (FMOLP) معادل است با:

$$\max_{x\in S} \min\{\mu_{D_P}(x), \mu_{D_N}(x)\}$$

که می‌تواند به مسئله زیر تبدیل شود (COAP : برنامه تجمعی منسجم) [۱۹] :

$$\begin{aligned} \text{(COAP)} \quad \max \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{F}(\mu_{G_1(c_1^T x)}, \mu_{G_2(c_2^T x)}, \dots, \mu_{G_p(c_p^T x)}) \geq \alpha \\ & \mu_{R_i}(A_i^T x) \geq \alpha \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in S, \\ & 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

اخیرا در [۱۰] ، دابی [۲۰] و مهرا [۲۱] مسئله معادل زیر را برای مسئله (FMOLP) فرمول‌بندی کردند:

$$\max_{x\in S}\{\mu_{D_P}(x) + \mu_{D_N}(x) - 1\}$$

که مجموع اولویتهای مثبت و منفی را بدون درنظر گرفتن وابستگی بین این دو یعنی ویژگی مشخصه دوقطبی ناهمگن ماکزیمم می‌کند.

۲.۲ به‌کارگیری عملگرهای جمع در مدل پیشنهادی

از آنجا که اولویتهای مثبت اجباری نیست، می‌توان از چندین عملگر تجمعی شناخته شده برای ترکیب آنها به‌طور جداگانه استفاده کرد. در زیر استفاده از برخی از عملگرهای تجمعی برای رسیدن به این هدف توضیح داده شده است.

۱.۲.۲ به‌کارگیری عملگر OWA

فرض کنیم F عملگر اکید OWA پیشنهاد شده توسط یاگر [۲۲] [۴۵] باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} \mu_{D_P}(x) &= \mathrm{F}(\mu_{G_1(c_1^T x)}, \dots, \mu_{G_p(c_p^T x)}) \\ &= w_1 \mu_{G_{\sigma(1)}}(c_{\sigma(1)}^T x) + w_2 \mu_{G_{\sigma(2)}}(c_{\sigma(2)}^T x) + \dots + w_p \mu_{G_{\sigma(p)}}(c_{\sigma(p)}^T x) \end{aligned}$$

[19] coherence aggregated program
[20] Dubey
[21] Mehra
[22] Yager

که در آن $\mu_{G_{\sigma(x)}(c^T_{\sigma(x)}x)}$ k امین عنصر بزرگ مجموعه $\{\mu_{G_1(c_1^T x)},\dots,\mu_{G_p(c_p^T x)}\}$ است و $W^T=(w_1,\dots,w_p)$ بردار وزن OWA است. توجه داشته باشید که چون F اکیدا یکنوا است، $w_k \geq 0$,$(k=1,\dots,p)$. اکنون روش یاگر [۴۸] را به‌کار می‌گیریم تا مسئله (COAP) را به یک مسئله محاسباتی ساده تبدیل کنیم که به شرح زیر است:

برای یک بردار وزنی OWA ، $W^T=(w_1,\dots,w_p)$، $w_k \in [0,1] (k=1,\dots,p)$ و $\sum_{k=1}^{p} w_k = 1$ مسئله برنامه‌ریزی خطی صحیح زیر را تعریف کنید (COAOWALP : برنامه‌ریزی خطی OWA ترکیبی همگرا)[۲۳]:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(COAOWALP)} & \max & \alpha & \\
& \text{s.t.} & GY \leq 0 & \\
& & y_j e - O - M z_j \leq 0 & j=1,\dots,p, \\
& & e^T z_j \leq p-j & j=1,\dots,p, \\
& & w_1 y_1 + \dots + w_p y_p \geq \alpha & \\
& & \mu_{R_i}(A_i^T x) \geq \alpha & i=1,\dots,m, \\
& & z_{jk} \in \{0,1\} & j,k=1,\dots,p \\
& & 0 \leq y_j \leq 1 & j=1,\dots,p \\
& & 0 \leq \alpha \leq 1, & x \in S
\end{array}
$$

که در آن

$$
G = \begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & \dots 0 & 0 & \\
0 & -1 & 1 & \dots 0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots -1 & 1 &
\end{bmatrix}
$$

G: یک ماتریس $(p-1)\times p$ است

Y: یک بردار p ستونی است که اجزای آن y_jهستند؛

e: یک بردار p ستونی با تمام ورودی‌های ۱ است،

O: یک بردار p ستونی است که اجزای آنها $\mu_{G_j(c_j^T x)}$ هستند،

z_j: یک بردار p ستونی است که اجزای آن z_{jk} هستند،

M: عدد حقیقی مثبت بزرگ. به عنوان i امین عنصر بزرگ x_iها است و داریم:

---

[23] coherence aggregated OWA linear program

$$\begin{cases} y_2 - y_1 \leq 0 \\ y_3 - y_2 \leq 0 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \leq 0 \end{cases}$$

در نتیجه: برای هر $i < j$ داریم $y_j \geq y_i$ پس

$$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n.$$

همچنین فرض کنید برای ماتریس G

$$g_{ii} = -1, \quad i = 1, \ldots n-1,$$
$$g_{i,i+1} = 1, \quad i = 1, \ldots n-1,$$
$$g_{ij} = 0 \quad O.W.$$

بنابراین با این تعاریف داریم: $GY \leq 0$. فرض کنید $p = n$ داریم: $j = n - 1$ پس $p - j = 1$ حال مجموعه محدودیتهای زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y_p \leq \mu_{G_1(c_1^T x)} \\ y_p \leq \mu_{G_2(c_2^T x)} \\ \vdots \\ y_p \leq \mu_{G_n(c_n^T x)} \end{cases}$$

در نتیجه برای هر $j = 1, \ldots, n$ داریم: $y_p \leq \mu_{G_j(c_j^T x)}$ بنابراین:

$$\begin{cases} y_p - \mu_{G_1(c_1^T x)} - Mz_1 \leq 0 \\ y_p - \mu_{G_2(c_2^T x)} - Mz_2 \leq 0 \\ \vdots \\ y_p - \mu_{G_n(c_n^T x)} - Mz_n \leq 0 \end{cases}$$

همچنین:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_p \leq p - p = 0$$

در واقع برای اندیس p به محدودیت موردنظر دست یافتیم. حال همین مراحل را برای y_{p-1} به عنوان دومین عنصر کوچک درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y_{p-1} - \mu_{G_1(c_1^T x)} - Mz_1 \leq 0 \\ y_{p-1} - \mu_{G_2(c_2^T x)} - Mz_2 \leq 0 \\ \vdots \\ y_{p-1} - \mu_{G_n(c_n^T x)} - Mz_n \leq 0 \end{cases}$$

همچنین:

$$z_۱ + z_۲ + \cdots + z_p \leq p - (p - ۱) = ۱$$

می‌توان نتیجه گرفت که داریم:

$$y_j e - O - M z_j \leq ۰ \quad j = ۱, \ldots, p$$

$$e^T z_j \leq p - j \quad j = ۱, \ldots, p.$$

گزاره ۱.۲.۲. فرض کنید F یک عملگر OWA اکیدا یکنوا باشد. آنگاه مسئله (COAP) یک جواب بهینه دارد اگر و فقط اگر مسئله (COAOWALP) یک جواب بهینه داشته باشد. علاوه بر این، مقادیر هدف بهینه آنها برابر هستند.

برهان. فرض کنید $(x^*, \alpha^*) \in S \times [۰, ۱]$ یک جواب بهینه مسئله (COAP) باشد. لذا $\alpha^* = \sum_{i=۱}^{p} w_k \mu_{G_{\sigma(k)}}(c^T_{\sigma(k)}(x^*))$ یا $\alpha^* = \min_{i=۱}^{m}(\mu_{R_i(A_i^T x^*)})$. تعریف کنید:

$$y_j^* = \mu_{G_{\sigma(j)}}(c^T_{\sigma(j)} x^*), \qquad j = ۱, \ldots, p$$

بوضوح داریم: $۰ \leq y_j^* \leq ۱$ به ازای $j = ۱, \ldots, p$ و $GY^* \leq ۰$. به‌علاوه چون

$$\mu_{G_{\sigma(۱)}}(c^T_{\sigma(۱)}(x^*)) \geq \cdots \geq \mu_{G_{\sigma(j-۱)}}(c^T_{\sigma(j-۱)}(x^*)) \geq \mu_{G_{\sigma(j)}}(c^T_{\sigma(j)}(x^*)) = y_j^*$$

دقیقا j متغیر باینری از بین $\{z_{j_۱}, \ldots, z_{j_p}\}$ صفر هستند و $p - j$ مولفه دیگر یا ۰ یا ۱ است که نتیجه می‌دهد $\sum_{k=۱}^{p} z_{jk}^* \leq p - j$. بنابراین $(x^*, y_۱^*, \ldots, y_p^*, \alpha, z_{jk}^*)$ برای $j, k = ۱, \ldots, p$ یک جواب شدنی (COAOWALP) است. از آنجا که (COAOWALP) کراندار است، فرض کنیم $(\hat{x}, \hat{y}_۱, \ldots, \hat{y}_p, \hat{\alpha}, \hat{z}_{jk})$ برای $j, k = ۱, \ldots, p$ به عنوان جواب بهینه آن باشد آنگاه $\alpha^* \leq \hat{\alpha}$ توجه داشته باشید که

$$\hat{\alpha} = \min\left\{\sum_{j=۱}^{p} w_j \mu_{G_{\sigma(j)}}(c^T_{\sigma(j)}(\hat{x})), \min_{i=۱}^{m} \mu_{R_i}(A_i^T \hat{x})\right\}$$

بنابراین $(\hat{x}, \hat{\alpha})$ یک جواب شدنی مسئله (COAP) است، که ایجاب می‌کند $\hat{\alpha} = \alpha^*$. بنابراین اثبات کامل است. □

۲.۲.۲ عملگر فازی «و» و «یا»

ورنر [24] [۴۴] از عملگر فازی 'و' $(\tilde{and})$ و عملگر فازی 'یا' $(\tilde{or})$ برای جمع کردن اهداف فازی و محدودیتهای انعطاف‌پذیر در مسائل FMOLP استفاده کرد. او دو مدل قطعی برنامه‌ریزی

24Werner

خطی را با اثرات جبرانی روی اهداف و محدودیتها به یک اندازه در نظر گرفت. با انتخاب عملگر تجمیع $\tilde{and}$، تابع عضویت مجموعه تصمیم D در (FMOLP) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_D^{\tilde{and}}(x) = \gamma \min_{k,i}\{\mu_{G_k}(c_k^T x), \mu_{R_i}(A_i^T x)\} + (1-\gamma)\frac{1}{p+m}\left[\sum_{k=1}^{p}\mu_{G_k}(c_k^T x) + \sum_{i=1}^{m}\mu_{R_i}(A_i^T x)\right]$$

که $\gamma \in [0,1]$ یک پارامتر است. با استفاده عملگر $\tilde{and}$، مسئله (FMOLP) به مدل زیر تبدیل می‌شود: مسئله قطعی و خطی AND):

$$\begin{aligned}
(\text{CANDLP}) \quad & \max \quad \alpha + (1-\gamma)\frac{1}{p+m}\left[\sum_{k=1}^{p}\alpha_k + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{p+i}\right] \\
& \text{s.t.} \quad \alpha + \alpha_k \le \mu_{G_k}(c_k^T x) \qquad k = 1,\dots,p \\
& \qquad \alpha + \alpha_i \le \mu_{R_i}(A_i^T x) \qquad i = 1,\dots,m \\
& \qquad \alpha + \alpha_k \le 1 \qquad k = 1,\dots,p \\
& \qquad \alpha + \alpha_{p+i} \le 1 \qquad i = 1,\dots,m \\
& \qquad \alpha, \alpha_k, \alpha_{p+i} \ge 0 \qquad k = 1,\dots,p, i = 1,\dots,m \\
& \qquad x \in S
\end{aligned}$$

چون μ_{G_k} و μ_{R_i} توابع قطعه‌ای خطی هستند، این مدل یک مسئله برنامه‌ریزی غیر خطی است.

اگر در عوض ما عملگر $\tilde{or}$ ورنر را انتخاب کنیم [۴۴] تابع عضویت زیر را برای مجموعه تصمیم D از مسئله (FMOLP) بدست می‌اوریم. برای $\gamma \in [0,1]$

$$\mu_D^{\tilde{or}}(x) = \gamma \max_{k,i}\{\mu_{G_k}(c_k^T x), \mu_{R_i}(A_i^T x)\} + (1-\gamma)\frac{1}{p+m}\left[\sum_{k=1}^{p}\mu_{G_k}(c_k^T x) + \sum_{i=1}^{m}\mu_{R_i}(A_i^T x)\right]$$

و لذا مسئله (FMOLP) به مدل برنامه‌ریزی صحیح مختلط زیر تبدیل می‌شود:[۲۵]

$$
\begin{aligned}
\text{(CORLP)} \quad \max \quad & \gamma\alpha + (1-\gamma)\frac{1}{p+m}\sum_{s=1}^{p+m}\alpha_k \\
\text{s.t.} \quad & \alpha_k \le \mu_{G_k}(c_k^T x) \quad k = 1,\dots,p \\
& \alpha_{p+i} \le \mu_{R_i}(A_i^T x) \quad i = 1,\dots,m \\
& \alpha \le \alpha_k + z_k \quad k = 1,\dots,p \\
& \alpha \le \alpha_{p+i} + z_{p+i} \quad i = 1,\dots,m \\
& \sum_{s=1}^{p+m} z_s \le p+m-1 \quad k = 1,\dots,p, i = 1,\dots,m \\
& z_s \in \{0,1\} \quad s = 1,\dots,p+m \\
& \alpha_k, \alpha_{p+i} \le 1 \quad k = 1,\dots,p, i = 1,\dots,m \\
& \alpha, \alpha_k, \alpha_{p+i} \ge 0 \quad k = 1,\dots,p, i = 1,\dots,m \\
& x \in S
\end{aligned}
$$

بوضوح دو مدل فوق، دارای رویکرد دوقطبی نیستند زیرا عملگر $\tilde{and}$ فازی یا عملگر $\tilde{or}$ توابع هدف و محدودیتها را با هم در (FMOLP) جمع می‌کنند. در ادامه، یک رویکرد دوقطبی برای استفاده از عملگرهای $\tilde{and}$ و $\tilde{or}$ ی برای مسئله (FMOLP) پیشنهاد می‌کنیم. توابع عضویت حاصل به فرم زیر تعریف می‌شوند. برای $\gamma \in [0,1]$ تعریف می‌کنیم

$$\mu_{DP}^{\tilde{and}}(x) = \gamma \min_{k=1}^{p} \mu_{G_k}(c_k^T x) + (1-\gamma)\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\mu_{G_k}(c_k^T x)$$

$$\mu_{DP}^{\tilde{or}}(x) = \gamma \max_{k=1}^{p} \mu_{G_k}(c_k^T x) + (1-\gamma)\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\mu_{G_k}(c_k^T x)$$

لازم به ذکر است که این دو خانواده دو گروه از عملگرهای S-OWA هستند [۴۶] که وزنهای OWA برای آنها به‌ترتیب به‌شرح زیر توصیف می‌شود:

$$w_k = \frac{1}{p}(1-\gamma), \quad k = 1,\dots,p-1, \quad w_p = \frac{1}{p}(1-\gamma)+\gamma, \tag{9.2}$$

و

$$w_1 = \frac{1}{p}(1-\gamma)+\gamma, \quad w_k = \frac{1}{p}(1-\gamma), \quad k = 2,\dots,p. \tag{10.2}$$

ملاحظه ۱.۲.۲. از (۹.۲) و (۱۰.۲)، به راحتی می‌توان دریافت که، برای این دو عملگر، همه وزنها به جز یک وزن، یکسان هستند و این یک وزن بیشتر از بقیه است به غیر از مواردی که

[25] CORLP:crisp OR linear program

$\gamma = ۰$. به همین علت، دو جمع‌بندی فوق به سمت یک تابع هدف متمایل هستند، یعنی $\tilde{and}$ به سمت تابع هدفی که مقدار مینیمم دارد متمایل است در حالیکه $\tilde{or}$ به سمت تابع هدف دوقطبی با حداکثر مقدار تمایل دارد.

اگر عملگر F را به‌صورت $F = \tilde{and}$ انتخاب کنیم، آنگاه مسئله (COAP) به مسئله COAANDLP [۲۶] به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{array}{llll}
(\text{COAANDLP}) & \max & \delta & \\
& \text{s.t.} & \alpha + \alpha_k \leq \mu_{G_k}(c_k^T x) & k = ۱, \ldots, p \\
& & \alpha + \alpha_i \leq ۱ & k = ۱, \ldots, p \\
& & \mu_{R_i}(A_i^T x) \geq \delta & i = ۱, \ldots, m \\
& & \alpha + (۱ - \gamma)\frac{۱}{p}\sum_{k=۱}^{p} \alpha_k \geq \delta & \\
& & \delta \leq ۱ & \\
& & \delta, \alpha, \alpha_k \geq ۰ & k = ۱, \ldots, p \\
& & x \in S &
\end{array}
$$

اگر عملگر F را به‌صورت $F = \tilde{or}$ درنظر بگیریم، آنگاه مسئله COAP به مسئله COAORLP

[26] Coherence aggregated AND linear program

[۲۷] به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{array}{llll}
(\text{COAORLP}) & \max & \delta & \\
& \text{s.t.} & \alpha_k \leq \mu_{G_k}(c_k^T x) & k = 1, \dots, p \\
& & \alpha \leq \alpha_k + z_k & k = 1, \dots, p \\
& & \sum_{k=1}^{p} z_k \leq p - 1, & \\
& & \mu_{R_i}(A_i^T x) \geq \delta & i = 1, \dots, m \\
& & \alpha + (1-\gamma)\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \geq \delta, & \\
& & z_k \in \{0, 1\} & k = 1, \dots, p \\
& & \alpha_k \leq 1 & k = 1, \dots, p \\
& & \delta \leq 1 & \\
& & \delta, \alpha, \alpha_k \geq 0 & k = 1, \dots, p \\
& & x \in S &
\end{array}
$$

یک مزیت قابل توجه در استفاده از عملگرهای ‘و‘ یا‘ برای جمع کردن توابع هدف فازی این است که هر دوی آنها به فرایند مرتب‌سازی نیاز ندارند مگر آنکه در یک تجمع OWA باشند. از سوی دیگر، اگر پارامتر جبرانی $\gamma \in [0, 1]$ از قبل شناخته شده باشد، آنگاه وزنهای OWA برای محاسبه نسبتا ساده خواهند بود.

ملاحظه ۲.۲.۲. اگر F را عملگر $\tilde{and}$ یا $\tilde{or}$ کنیم، که نمونه‌های خاصی از عملگرهای اکیدا یکنوای OWA هستند، آنگاه مشابه با اثبات گزاره ۱.۲.۲ می‌توان ثابت کرد که یک جواب بهینه مسئله (COAANDLP) یا (COAORLP) یک جواب بهینه برای مسئله (COAP) تولید می‌کند و بالعکس.

۳.۲.۲ برخی دیگر از عملگرهای تجمعی

لوهانجوی [۲۸] [۲۶] یک عملگر مجموع کراندار مینیمم [۲۹] (mbs) را تعریف کرد که برخی از تغییرات بین توابع عضویت اهداف فازی را برای ترکیب آنها به مفهوم ’و’ ممکن می‌سازد. تابع

[27] coherence aggregated OR linear program

[28] Luhandjula

[29] min bounded sum

عضویت حاصل از آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{D_P}^{mbs}(x) = \gamma \min_{k=1}^{p} \mu_{G_k}(c_k^T x) + (1-\gamma) \min \left(1, \sum_{k=1}^{p} \mu_{G_k}(c_k^T x)\right),$$

که در آن $\gamma \in [0,1]$.

این عملگر تجمیع در شرط اکیدا یکنوایی مورد نیاز برای تجمیع توابع هدف فازی در مدل پیشنهادی (COAP) که پیشنهاد کردیم، صدق نمی‌کند.

عملگر جمع

$$\mu_{D_P}(x) = \sum_{k=1}^{p} \mu_{G_k}(c_k^T x),$$

که در [۳۶] تعریف شده است در تعریف ۱.۰.۲ مربوط به عملگر تجمیع صدق نمی‌کند و عملگر ضرب

$$\mu_{D_P}(x) = \prod_{k=1}^{p} \mu_{G_k}(c_k^T x),$$

که در [۳۹] بکار رفته در یک عملگر عطفی است. از این رو، هیچ کدام از این دو عملگر شرایط تابع تجمعی F در (COAP) داده شده را برآورده نمی‌کنند.

۳.۲ مثال عددی

مثال ساده‌ای برای بحث بالا ارائه می‌کنیم. یک شرکت سه محصول A، B، C را تولید می‌کند. برای تولید آنها، نیاز به سه نوع ماده خام X، Y، Z است. مقدار (کیلوگرم) مواد خام مورد نیاز برای تولید یک واحد از محصولات A، B، C در جدول ۱.۲ آمده است. سه هدف توسط هیئت‌مدیره شرکت در یک برنامه‌ریزی هفته‌ای موردنظر است:

به حداکثر رساندن سود سهام: تنظیم اولویت اول، به حداکثر رساندن کل سود حاصل از فروش است. هیئت‌مدیره برای رساندن سود به ۱۵۰ هزار تومان تلاش می‌کنند، اما سود تا ۱۳۰ هزار تومان مجاز است. سود فروش یک واحد از محصولات A، B، C در جدول ۲.۲ آمده است.

جدول ۱.۲: مقدار مواد مورد نیاز برای تولید هر واحد

	X	Y	Z
A	۲	۸	۴
B	۳	۱	۰
C	۴	۴	۲

به حداقل رساندن تولیدات مضر: دومین هدف کاهش تولیدات مضر آلوده‌کننده است.در

جدول ۲.۲: داده‌های فروش (بردار c_1)

	A	B	C
سود(در هزار) / واحد	۵	۱۰	۱۲

طول فرایند تولید، مواد آلوده مضر را ترجیحا می‌خواهند تا ۳۰ کیلوگرم کاهش دهد، اما نباید بیش از ۳۵ کیلوگرم باشد. مقدار آلودگی مضر تولید شده در هر واحد از محصولات جدول ۳.۲ آمده است.

جدول ۳.۲: داده تولیدات مضر (بردار c_2)

	A	B	C
آلودگی تولید شده(در کیلوگرم) / هر واحد محصول	۱	۲	۱

به حداقل رساندن هزینه تولید: سومین هدف به حداقل رساندن هزینه تولیداتی است که اعلام شد، شامل هر نوع هزینه که در تولید سه محصول رخ داده است البته به‌جز هزینه‌های مواد X، Y، Z. هزینه تولید هر واحد محصول A، B، C در جدول ۴.۲ مشخص شده است. مطلوب است که هزینه تولید بیش از ۷۰ هزار تومان نباشد، اما هیئت‌مدیره شرکت دیدگاه انعطاف‌پذیری بر روی آن دارند و می‌توانند هزینه تا ۸۰ هزار تومان را تحمل کنند.

جدول ۴.۲: هزینه‌های تولید داده‌ها (بردار c_3)

	A	B	C
هزینه تولید (در هزار) / هر واحد محصول	۱	۳	۴

از طرف دیگر، کارکنان شرکت که می‌خواهند محصولات را تولید کنند، برای رسیدن به همه اهداف با محدودیتهای منطقی خاصی مواجه هستند و محدودیتها در یک برنامه‌ریزی هفتگی به‌صورت زیر می‌باشند:

محدودیت ۱.۳.۲. هزینه بازار برای تهیه مواد X خیلی زیاد است؛ از این رو درخواست بیش از ۵۰ کیلوگرم برای X غیرقابل‌قبول است، اما تهیه ۴۰ کیلوگرم یا کمتر قابل قبول است.

محدودیت ۲.۳.۲. عرضه مواد Y کافی نیست و اغلب با کمبود آنها مواجه می‌شوند. در هیچ شرایطی Y موردنیاز بالای ۵۵ کیلوگرم نمی‌تواند برآورده شود. بنابراین توصیه می‌شود فقط از ۵۰ کیلوگرم Y استفاده کنید. دو محدودیت بالا در استفاده از مواد X و Y انعطاف‌پذیر هستند (یا فازی)؛ محدودیت ماده Z سخت است.

محدودیت ۳.۳.۲. استفاده از ماده Z بالای ۵۰ کیلوگرم کاملا غیرقابل‌قبول است.

محدودیت ۴.۳.۲. اطلاعات مربوط به‌تقاضای محصولات A و C در بازار موجود است. بر اساس این، تصمیم داریم درهفته حداقل ۳ واحد از A، و حداقل ۵ واحد C، تولید کنیم.

مسئله این است که مقدار تولید مطلوب (به کیلوگرم در هفته) محصولات A، B، C را پیدا کنید. مسئله به‌شرح زیر مدل می‌شود:

$$
\begin{array}{lll}
\tilde{min} z_1 = c_1^T x = 5x_1 + 10x_2 + 12x_3 \geq 150 & g_1 = 20 & \text{با آستانه تحمل}, \\
\tilde{min} z_2 = c_2^T x = x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 & g_2 = 5 & \text{با آستانه تحمل}, \\
\tilde{min} z_3 = c_3^T x = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 70 & g_3 = 10 & \text{با آستانه تحمل}, \\
\text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 40 & r_1 = 10 & \text{با آستانه تحمل}, \\
\quad 8x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 50 & r_2 = 5 & \text{با آستانه تحمل}, \\
\quad 4x_1 + 2x_3 \leq 50 & & \\
\quad x_1 \geq 3 & & \\
\quad x_3 \geq 5 & & \\
\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

ابتدا با استفاده از رویکرد یاگر، مسئله فوق را حل می‌کنیم. برای این منظور، ما به وزنهای عملگر OWA نیاز داریم. فرض کنید که درجه orness برابر $\frac{1}{4}$ می‌باشد. با استفاده از فرمول (۷.۲)، بدست می‌آوریم $q = ۲/۳۰۲۸$. در نتیجه $w_1 = ۰/۱۱۶۲$ و $w_2 = ۰/۲۶۷۶$ و

$w_3 = 0/6162$. مدل قطعی معادل (COAOWALP) به فرم زیر است:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \alpha \\
\text{s.t.} & y_1 - y_2 \leq 0 \\
& y_3 - y_2 \leq 0 \\
& y_3 - 0/25x_1 - 0/5x_2 - 0/6x_3 \leq -6/5, \\
& y_3 + 0/2x_1 + 0/4x_2 + 0/2x_3 \leq 7, \\
& y_3 + 0/1x_1 + 0/3x_2 + 0/4x_3 \leq 8, \\
& y_2 - 0/25x_1 - 0/5x_2 - 0/6x_3 - Mz_{11} \leq -6/5, \\
& y_2 + 0/2x_1 + 0/4x_2 + 0/2x_3 - Mz_{12} \leq 7, \\
& y_2 + 0/1x_1 + 0/3x_2 + 0/4x_3 - Mz_{13} \leq 8, \\
& z_{11} + z_{12} + z_{13} \leq 1 \\
& y_1 - 0/25x_1 - 0/5x_2 - 0/6x_3 - Mz_{21} \leq -6/5, \\
& y_1 + 0/2x_1 + 0/4x_2 + 0/2x_3 - Mz_{22} \leq 7, \\
& y_1 + 0/1x_1 + 0/3x_2 + 0/4x_3 - Mz_{23} \leq 8, \\
& z_{21} + z_{22} + z_{23} \leq 2 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 10\alpha \leq 50 \\
& 8x_1 + x_2 + 4x_3 + 5\alpha \leq 55 \\
& 4x_1 + 2x_3 \leq 50 \\
& x_1 \geq 3 \\
& x_3 \geq 5 \\
& 0/1162y_1 + 0/2676y_2 + 0/6162y_3 \geq \alpha \\
& y_j \leq 1 \quad j = 1, 2, 3, \\
& z_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, 2, 3, \\
& \alpha \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, \alpha, y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3
\end{array}
$$

جواب بهینه به‌صورت $x_1^* = 3$، $x_2^* = 6/1022$، $x_3^* = 5$ است و

$$\min\{\mu_{R_1}(A_1^T x^*), \mu_{R_2}(A_2^T x)\} = \beta^* = 0/5693$$

درجه رضایت سه هدف به‌ترتیب $\mu_{G_1}(c_1^T x^*) = 0/3011$، $\mu_{G_2}(c_2^T x^*) = 1$، $\mu_{G_3}(c_3^T x^*) = 1$

می‌باشد. در نتیجه درجه رضایت تصمیم‌گیرنده، ۰/۵۶۹۳ است. مسئله بالا برای مقادیر مختلف orness حل شده است. جوابهای بهینه برای سه مقدار مختلف orness (ρ) در جدول (۵.۲) ذکر شده است.

جدول ۵.۲: نیاز هر واحد

ρ	w_1	w_2	w_3	x_1^*	x_2^*	x_3^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*	β^*	α^*
$\frac{1}{4}$	۰/۱۱۶۲	۰/۲۶۷۶	۰/۶۱۶۲	۳	۶/۱۰۲۲	۵	۱	۱	۰/۳۰۱۱	۰/۵۶۹۳	۰/۵۶۹۳
$\frac{1}{2}$	۰/۳۳۳۳	۰/۳۳۳۳	۰/۳۳۳۳	۳	۵/۶۷۸۷	۵	۱	۱	۰/۰۸۹۳	۰/۶۹۶۳	۰/۶۹۶۳
$\frac{3}{4}$	۰/۶۱۶۲	۰/۲۶۷۶	۰/۱۱۶۲	۳	۵/۵	۵	۱	۱	۰	۰/۷۵	۰/۷۵

در ادامه دو مدل برنامه‌ریزی قطعی (COAANDLP) و (COAORLP) را نیز برای $\rho = \frac{1}{4}$

جدول ۶.۲: هزینه‌ها

ρ	γ	x_1^*	x_2^*	x_3^*	$\alpha^* + \alpha_1^*$	$\alpha^* + \alpha_2^*$	$\alpha^* + \alpha_3^*$	β^*	δ^*
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۳	۶/۱۵۸۰	۵	۰/۳۲۹۰	۱	۱	۰/۵۵۲۵	۰/۵۵۲۵

جدول ۷.۲: نیاز هر واحد

ρ	γ	x_1^*	x_2^*	x_3^*	α_1^*	α_2^*	α_3^*	β^*	δ^*
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	۳	۵/۵	۵	۰	۱	۱	۰/۷۵	۰/۷۵

و $\rho = \frac{3}{4}$ ، به‌ترتیب فرمول‌بندی و حل می‌کنیم. جداول ۶.۲ و ۷.۲ به‌ترتیب جوابهای بهینه دو مسئله را نشان می‌دهد. برای $\rho = \frac{1}{4}$ و $\rho = \frac{3}{4}$ مقدار آنتروپی عملگر هندسی OWA برابر ۰/۹۰۱۲ است، درحالیکه برای عملگر $\tilde{and}$ و $\tilde{or}$ برابر ۰/۸۶۷۷ است که به‌وضوح نشان می‌دهد که عملگرهای آنتروپی $\tilde{and}$ و $\tilde{or}$ ماکسیمال نیستند (بنابر ملاحظه ۱.۲.۲).

علاوه‌براین، اگر مدل (CORLP) را برای این مثال با $\rho = \frac{3}{4}$ حل کنیم آنگاه جواب بهینه مربوطه $\mu_{R_1}(2x_1^* + 3x_2^* + 4x_3^*) = ۰/۱۵$ است، درحالیکه درجه رضایت هر سه هدف برابر است با ۱ و رضایت کلی ۰/۸۸۵ می‌باشد. به نظر می‌رسد این غیرطبیعی است زیرا جواب بهینه تقریبا اولین محدودیت را نقض می‌کند و هنوز هم باید رضایتمندی با درجه ۰/۸۸۵ بدست بیاید.

۴.۲ به‌کارگیری عملگر جدید

مسئله (FMOLP) می‌تواند به‌صورت زیر بازنویسی بشود:

$$\max_{x\in X}\left(F(\mu_{G_1}(c_1^T x),\mu_{G_2}(c_2^T x),\dots,\mu_{G_p}(c_p^T x))-\max_i(1-\mu_{R_i}(A_i^T x))\right)$$

که با مسئله تجمیع OWA محدود شده که در زیر آمده معادل است :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{COAP})\quad \max\quad & (F(\mu_{G_1}(c_1^T x),\mu_{G_2}(c_2^T x),\dots,\mu_{G_p}(c_p^T x))-\beta)\\
\text{s.t.}\quad & \mu_{R_i}(A_i^T x)\ge 1-\beta \quad i=1,\dots,m,\\
& 0\le\beta\le 1,\quad x\in S.
\end{aligned}$$

هر جواب به‌صورت $x\in S$ که $\mu_{R_i}(A_i^T x)\ge 1-\beta$ به ازای $i=1,\dots,m$ را برآورده کنند، حداکثر، می‌توانند درجه β را داشته باشند. توجه داشته باشید که
اگر $\beta=1$ آنگاه تمام $x\in S$ مجاز هستند ((به عنوان جواب شدنی قابل قبول هستند.)).
در حالیکه اگر $\beta=0$، تنها آن $x\in S$ که شرط شدنی بودن را دارند یعنی $A_i^T x\le b_i$ برای هر i پذیرفته می‌شوند.
گرچه ما همان وابستگی را به درجه مجاز β باهر محدودیت فازی (انعطاف‌پذیر / نرم) داریم، اما همین موضوع می‌تواند روی محدودیتها متفاوت باشد. هرچند مورد اخیر بر ما تاثیر نمی‌گذارد.
ما می‌خواهیم که ساختار F طوری باشد که اگر رضایتمندی در آرمان اهداف شخصی که بدست آمده است، افزایش یابد، آنگاه رضایت کلی تصمیم‌گیرنده در جواب افزایش پیدا کند. همانطور که توسط یاگر [۴۵] پیشنهاد می‌شود، F را به‌صورت یک عملگر OWA در نظرمی‌گیریم. بدین ترتیب،

$$\mu_{D_P}(x)=w_1y_1+w_2y_2+\dots+w_py_p$$

که y_k، k امین عنصر بزرگ در گردایه $\mu_{G_1}(c_1^T x),\dots,\mu_{G_p}(c_p^T x)$ خواهد بود و $W^T=(w_1,\dots,w_p)$ بردار وزن OWA است.
استفاده از روش داده شده توسط یاگر برای حل تجمیع OWA که محدود شده است [۴۸]، مسئله (COAP) را به‌صورت مدل زیر تبدیل می‌کند، برای $w_k\in(0,1)$ که $k=1,\dots,p$ و $\sum_{k=1}^{p} w_1=1$.

$$
\begin{aligned}
(\text{COAP}) \quad \max \quad & w_1 y_1 + w_2 y_2 + \cdots + w_p y_p \\
\text{s.t.} \quad & \mu_{R_i}(A_i^T x) \geq 1 - \beta \quad i = 1, \ldots, m, \\
& GY \leq 0 \\
& y_j I - O - KZ_j \leq 0 \quad j = 1, \ldots, p, \\
& I^T Z_j \leq n - j \quad j = 1, \ldots, p, \\
& z_{j,k} \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, p, \ k = 1, \ldots, p \\
& 0 \leq \beta \leq 1, \qquad x \in S
\end{aligned}
$$

که

$$
G = \begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 & \\
0 & -1 & 1 & \ldots 0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots -1 & 1 &
\end{bmatrix}
$$

G یک ماتریس $(p-1) \times p$ است

Y : یک بردار p ستونی است که اجزای آن y_j هستند،

I : یک بردار p ستونه است که تمام عناصر آن برابر ۱ است،

O : یک بردار p ستونه است که اجزای آن $\mu_{G_j}(c_j^T x)$ هستند،

Z_j : یک بردار p ستونه است که اجزای آن $z_{j,k}$ است

K : یک عدد حقیقی مثبت بزرگ است.

مثال ۱.۴.۲. مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی فوق را با رویکرد زیر حل می‌کنیم: (باکمی تغییر در جداول مثال فوق داریم)

جدول ۸.۲: نیاز هر واحد تولیدی

	X	Y	Z
A	۲	۸	۴
B	۱۰	۱	۰
C	۴	۴	۲

جدول ۹.۲: داده‌های فروش

	A	B	C
قیمت فروش واحد(در هزار)	۱۰	۲۲	۱۲

جدول ۱۰.۲: داده‌های تولیدآلودگی

	A	B	C
آلودگی تولید شده(در کیلوگرم) / هر واحد محصول	۱	۱	۳

جدول ۱۱.۲: داده‌های هزینه تولید

	A	B	C
هزینه تولید هر واحد محصول / (در هزار)	۱	۳	۳

$$\tilde{max} z_1 = 10x_1 + 22x_2 + 12x_3 \succeq 150 \qquad g_1 = 20 \text{ باحدمجاز}$$

$$\tilde{min} z_2 = x_1 + x_2 + 3x_3 \preceq 30 \qquad g_2 = 5 \text{ باحدمجاز}$$

$$\tilde{min} z_3 = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \preceq 70 \qquad g_1 = 10 \text{ باحدمجاز}$$

$$s.t.$$

$$2x_1 + 10x_2 + 4x_3 \preceq 100 \qquad r_1 = 10 \text{ باحدمجاز},$$

$$8x_1 + x_2 + 4x_3 \preceq 50 \qquad r_2 = 10 \text{ باحدمجاز},$$

$$4x_1 + 2x_3 \leq 50$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

برای اعمال روش فوق، به وزنهای عملگر OWA نیاز داریم. فرض کنید درجه Orness برابر

است با $\frac{۳}{۴}$ آنگاه $w_۱ = ۰/۶۱۶۲, w_۲ = ۰/۲۶۷۶$ و $w_۳ = ۰/۱۱۶۲$ از معادله ۷.۲ درنظر می‌گیریم. مدل قطعی((دقیق)) معادل، به‌صورت زیر داده شده است:

$$\max\ ۰/۶۱۶۲y_۱ + ۰/۲۶۷۶y_۲ + ۰/۱۱۶۲y_۳ - \beta$$

$$\begin{aligned}
&s.t.\\
&۰/۲x_۱ + x_۲ + ۰/۴x_۳ - \beta \le ۱۰\\
&۱/۶x_۱ + ۰/۲x_۲ + ۰/۸x_۳ - \beta \le ۱۰\\
&۴x_۱ + ۲x_۳ \le ۵۰\\
&x_۱ \ge ۳\\
&x_۳ \ge ۵\\
&y_۲ - y_۱ \le ۰\\
&y_۳ - y_۲ \le ۰\\
&y_۳ - ۰/۲۵x_۱ - ۰/۵x_۲ - ۰/۶x_۳ \le -۶/۵\\
&y_۳ + ۰/۲x_۱ + ۰/۴x_۲ + ۰/۲x_۳ \le ۷\\
&y_۳ + ۰/۱x_۱ + ۰/۳x_۲ + ۰/۴x_۳ \le ۸\\
&y_۲ - ۰/۲۵x_۱ - ۰/۵x_۲ - ۰/۶x_۳ - Kz_{۱۱} \le -۶/۵\\
&y_۲ + ۰/۲x_۱ + ۰/۴x_۲ + ۰/۲x_۳ - Kz_{۱۲} \le ۷\\
&y_۲ + ۰/۱x_۱ + ۰/۳x_۲ + ۰/۴x_۳ - Kz_{۱۳} \le ۸\\
&z_{۱۱} + z_{۱۲} + z_{۱۳} \le ۱\\
&y_۱ - ۰/۲۵x_۱ - ۰/۵x_۲ - ۰/۶x_۳ - Kz_{۲۱} \le -۶/۵\\
&y_۱ + ۰/۲x_۱ + ۰/۴x_۲ + ۰/۲x_۳ - Kz_{۲۲} \le ۷\\
&y_۱ + ۰/۱x_۱ + ۰/۳x_۲ + ۰/۴x_۳ - Kz_{۲۳} \le ۸\\
&z_{۲۱} + z_{۲۲} + z_{۲۳} \le ۲\\
&y_j \le ۱ \quad j = ۱,۲,۳.\\
&z_i \in \{۰,۱\} \quad i = ۱,\ldots,۶\\
&\beta \le ۱\\
&x_۱, x_۲, x_۳, \beta \ge ۰.
\end{aligned}$$

جواب بهینه به‌صورت: $x_۱^* = ۳, x_۲^* = ۶, x_۳^* = ۵$ و $\beta = ۰$ است. مقادیر سه هدف به ترتیب ۱۳۵، ۲۰ و ۴۲ هستند و درجه رضایت کلی تصمیم‌گیرنده برابر است با ۰/۹۱۲۸.

از سوی دیگر، اگر ما از اصل بلمن زاده و رویکرد زیمرمن برای تجمیع اهداف فازی و

محدودیتهای فازی استفاده کنیم، به‌نظر می‌رسد که مدل قطعی معادل نشدنی باشد. این مثال یک مزیت مدلسازی پیشنهادی ما را نسبت به مدلسازی کلاسیک زیمرمن برای مسائل FMOLPP نشان می‌دهد.

فصل ۳

محاسبه جوابهای بهینه پارتو با رویکرد دوقطبی

۱.۳ معرفی

یک مدل کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر چندهدفه (MOFLP) می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} (\text{MOFLP}) \quad \max \quad & (c_۱^T x, c_۲^T x, \ldots, c_p^T x) \\ \text{s.t.} \quad & a_i^T x \preceq b_i \quad i = ۱, \ldots, m \\ & x \in S, \end{aligned}$$

که $c_k \in \mathbb{R}^n, k = ۱, \ldots, p$، $a_i \in \mathbb{R}^n$، $b_k \in \mathbb{R}, i = ۱, \ldots, m$ و $S \subseteq \mathbb{R}^n$ شامل همه نامساویهای خطی در x است. محدودیتهای $a_i^T x \preceq b_i$ محدودیتهای منابع انعطاف‌پذیر هستند که در آن در دسترس بودن منابع b_i می‌تواند با یک آستانه تحمل مثبت r_i، $i = ۱, \ldots, m$ نقض شود. دراینجا نماد" $\preceq$ " اساسا به معنی "کمتر از" یا "برابر با" است و با کمک یک تابع عضویت انتخاب شده μ_{R_i} برای مجموعه فازی R_i متناظر با i امین محدودیت انعطاف‌پذیر مشخص می‌شود. فرض می‌کنیم که هیچ اثر متقابلی بین توابع هدف (MOFLP) وجود ندارد. هدف

ما در این فصل بر دو محور متمرکز است. اول بدست آوردن بهینگی پارتو برای (MOFLP) و دوم، ارائه فرآیندی برای پیدا کردن چنین جوابی برای (MOFLP) با بالاترین درجه احتمال شدنی بودن در چارچوب دوقطبی ناهمگن.

تعریف ۱.۱.۳. جواب $x \in S$ برای مسئله (MOFLP) کارای فازی نامیده می‌شود اگر هیچ $y \in S$ وجود نداشته باشد بطوریکه $c_k^T y \geq c_k^T x$، $k = ۱, \ldots, p$ و $\mu_{R_i}(a_i^T y) \geq \mu_{R_i}(a_i^T x)$ و $i = ۱, \ldots, m$ و $c_k^T y > c_k^T x$، برای حداقل یک k یا $\mu_{R_i}(a_i^T y) > \mu_{R_i}(a_i^T x)$ برای حداقل یک i .

ورنر [۴۳] یک رویکرد برای تعیین کران بالا و پایین سطح آرمانی تابع هدف پیشنهاد کرد. این کرانها برای ساختن تابع عضویت مجموعه‌های فازی ارائه دهنده توابع هدف استفاده می‌شود. در ادامه با استفاده از رویکرد $\max - \min$ زیمرمن [۵۲]، یک مدل معادل قطعی ساخته شد که مجموعه جواب‌های بهینه آن شامل جواب کارای فازی (MOFLP) است. اگر تصمیم‌گیرنده جواب کارای فازی پیشنهاد شده را قبول کند آنگاه فرایند تصمیم‌گیری با موفقیت به پایان می‌رسد؛ در غیر این صورت ورنر [۴۳] یک روش تعاملی را برای تغییر توابع عضویت توابع هدف و محدودیتها پیشنهاد می‌کند به‌طوری که جواب بهینه مدل قطعی، جواب کارای فازی برای (MOFLP) است. این روش یک رویکرد عملی برای حل (MOFLP) را ارائه می‌دهد. باتوجه به اینکه می‌خواهیم توابع هدف و محدودیتهای انعطاف‌پذیر هر دو به‌طور همزمان برآورده شوند، زیمرمن [۵۲] از اصل بلمن و زاده استفاده کرد و به‌صورت اشتراک مجموعه‌های فازی ارائه دهنده توابع هدف و محدودیتهای انعطاف‌پذیر معرفی کرد. بعدها، لوهانجوی [۱] [۲۶]، سامر [۲] و پولاتسچک [۳] [۳۶]، تسای [۴]، چو [۵] و بارتا [۶] [۳۹]، سوئر [۷]، آریکان [۸] و بابیجیت [۹] [۳۷] و ورنر [۴۴] از عملگرهای تجمیع متعددی برای جمع کردن مجموعه‌های فازی ارائه دهنده توابع هدف و محدودیتهای انعطاف‌پذیر برای حل (MOFLP) استفاده کردند. این رویکردها دارای دو نقص زیر هستند:

۱. مشاهده می‌شود که مفهوم کارایی فازی برای (MOFLP) تقریبا با مفهوم بهینگی پارتو برای MOLP در تناقض است. محدودیتها در MOLP مجموعه‌ای از جوابهای شدنی MOLP را توصیف می‌کنند و توابع هدف برای تعیین جواب‌های بهینه پارتو در میان جواب‌های شدنی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این رویه به نحوی در مفهوم کارایی فازی

[1] Luhandjula
[2] Sommer
[3] Pollatschek
[4] Tsai
[5] Chu
[6] Barta
[7] Sure
[8] Arikan
[9] Babayigit

از بین رفته است. زیرا توابع هدف و محدودیتها نقش یکسانی در تعریف آن دارند. به عبارت دیگر، روشن نیست که چه چیزی را به عنوان یک جواب شدنی MOFLP از نظر محدودیتهای انعطاف‌پذیر معنی می‌کنیم.

۲. ''بنفرهات'' و همکاران [۵] ادعا می‌کنند که جمع کردن تمام مجموعه‌های فازی نشان‌دهنده توابع هدف و محدودیتها باهم ، تمایز بین این دو را از بین می‌برد. از نظر فیزیکی، یک محدودیت چیزی است که باید حداقل تا حدودی برای یک محدودیت انعطاف‌پذیر برآورده شود. از سوی دیگر، هیچ ایده‌ای درمورد الزامات توابع هدف وجود ندارد. سطوح آرمانی توابع هدف در مسئله MOFLP فقط تمایل یا آرزوی تصمیم‌گیرنده را نشان می‌دهد و از این رو غیر اجباری هستند. ''بنفرهات'' [۱۰] و همکاران [۵] پیشنهاد می‌کنند که مجموعه‌های فازی نمایانگر توابع هدف و محدودیتهای انعطاف‌پذیر به‌طورجداگانه بررسی شوند.

در این فصل می‌خواهیم دو موضوع زیر را مورد بررسی قرار دهیم: ابتدا شدنی‌بودن یک جواب را برای (MOFLP) تعریف می‌کنیم و سپس مفهوم بهینگی پارتو برای (MOFLP) را مطرح می‌کنیم. به‌علاوه ما یک رویکرد دوقطبی ارائه شده در فصل قبل را دنبال می‌کنیم که از دیدگاه دوقطبی در مدل‌سازی پیشنهاد شده توسط ''بنفرهات'' و همکاران [۵] سرچشمه گرفته است. دراین رویکرد (MOFLP) را به‌صورت یک مسئله با اولویتهای مثبت و منفی در نظر می‌گیریم. اولویتهای منفی مربوط به آنچه غیرقابل‌قبول است، در حالی که اولویتهای مثبت با آنچه که مطلوب است، مطابقت دارد. محدودیتهای انعطاف‌پذیر در (MOFLP) به اولویتهای ''منفی'' مربوط می‌شود به این معنی که مکمل آنها یک مجموعه فازی از مقادیر را تعیین می‌کند که به عنوان غیرقابل‌قبول رد می‌شوند. توابع هدف با نوع دیگری از اولویتها مطابقت دارد که می‌تواند به‌صورت مثبت در نظر گرفته شوند. در فصل قبل یک رویکرد دوقطبی برای حل مسائل MOFLP پیشنهاد شد. در فصل قبل یک عملگر تجمیع اکیداً یکنوا، میانگین وزنی مرتب (OWA) برای تجمیع مجموعه‌های فازی که توابع هدف را نشان می‌دهند استفاده شد؛ در حالیکه عملگر min برای جمع‌کردن مجموعه‌های فازی نمایانگر محدودیتها استفاده می‌شود.

۱.۱.۳ مسئله برآورده شدن محدودیت انعطاف‌پذیر

مسئله فاز I از این رویکرد که پیشنهاد می‌شود، یک مسئله برآورده شدن محدودیت انعطاف‌پذیر (FCSP) است. برای تسهیل بحث، برخی مفاهیم اساسی راجع به FCSP [۱۱] برگرفته از دوبیس و فورتمپس [۳۰] را یادآوری می‌کنیم.

[10] Benferhat

[11] flexible constraint satisfaction problem

FCSP، مساله برآورده شدن محدودیت کلاسیک را با آزاد کردن محدودیتها، به این مفهوم که آنها تا حدی می‌توانند برآورده شوند، اما برآورده شدن کامل آنها موردنظر است، تعمیم می‌دهد.
فرض کنید X مجموعه همه جوابها باشد. یک محدودیت انعطاف‌پذیر C می‌تواند توسط یک مجموعه فازی R روی X تعریف شود.
فرض کنید $\mu_R : X \to [0,1]$ تابع عضویت آن باشد:

$\mu_R(x) = 1$ به این معنی است که x به‌طورکامل C را برآورده می‌کند،
$\mu_R(x) = 0$ به این معنی است که x کاملا C رانقض می‌کند،
$\mu_R(x) \in]0,1[$ به این معنی است که x بخشی از C را برآورده می‌کند.

محدودیت انعطاف‌پذیر، مجموعه همه جوابها را به سه دسته شدنی، نشدنی و تقریبا شدنی تقسیم می‌کند. اگر FCSP شامل یک مجموعه m عضوی از محدودیتهای انعطاف‌پذیر $C = \{R_1, \ldots, R_m\}$ باشد، آنگاه عملگر تجمیع min برای تعریف درجه برآورده شدن کامل $\mu_D(x)$، جواب $x \in X$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، یعنی:

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{R_1}(x), \ldots, \mu_{R_m}(x)\}$$

۲.۳ چارچوب رویکرد پیشنهادی

تعریف ۱.۲.۳. درجه شدنی بودن $x \in S$ برای (MOFLP) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_x = \min\left\{\mu_{R_1}(a_1^T x), \ldots, \mu_{R_m}(a_m^T x)\right\}.$$

لذا، x را یک جواب β_x شدنی (MOFLP) می‌نامیم.
در ادامه مفهوم بهینگی پارتو را از (MOLP) به (MOFLP) به‌صورت زیر توسیع می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۳. یک جواب β_x شدنی به‌صورت $x \in S$، بهینه پارتو برای (MOFLP) است؛ اگر جواب β_y شدنی دیگری مانند $y \in S$ وجود نداشته باشد به‌طوریکه $\beta_y \geq \beta_x$ و $c_k^T y \geq c_k^T x$ برای $k = 1, \ldots, p$ و $\beta_y > \beta_x$ یا $c_k^T y > c_k^T x$ برای حداقل یک k.

توجه داشته باشید که هنگامی که (MOFLP) بدون محدودیتهای انعطاف‌پذیر باشد آنگاه $\beta_x = 1$ ، $\forall x \in S$ و در این مورد تعریف ۲.۲.۳ با تعریف بهینگی پارتو برای (MOLP) سازگار است.

توجه شود که همانگونه که در فصل قبل ذکر شد مسئله (FMOLP) با مسئله زیر معادل است:

$$\begin{aligned} &(\text{FCSP}) \quad c_k^T x \succeq Z_k && k = 1, \dots, p, \\ &A_i^T x \preceq b_i && i = 1, \dots, m, \\ &x \in S. \end{aligned}$$

اگر μ_{G_k} و μ_{R_i} را به‌صورت زیر تعریف کنیم: $k = 1, \dots, p$، $i = 1, \dots, m$

$$\mu_{G_k}(c_k^T x) = \begin{cases} 0 & c_k^T x < Z_k - g_k, \\ 1 - \frac{Z_k - c_k^T x}{g_k} & Z_k - g_k \leq c_k^T x < Z_k, \\ 1 & c_k^T x \geq Z_k, \end{cases}$$

$$\mu_{R_i}(A_i^T x) = \begin{cases} 0 & A_i^T x > b_i + r_i, \\ 1 - \frac{A_i^T x - b_i}{r_i} & b_i < A_i^T x \leq b_i + r_i, \\ 1 & A_i^T x \leq bi, \end{cases}$$

آنگاه داریم:

$$\mu_{D_P}(x) = \mathrm{F}(\mu_{G_1(c_1^T x)}, \mu_{G_2(c_2^T x)}, \dots, \mu_{G_p(c_p^T x)}),$$

و

$$\mu_{D_N}(x) = \min(\mu_{R_1(A_1^T x)}, \mu_{R_2(A_2^T x)}, \dots, \mu_{R_m(A_m^T x)}).$$

توجه داشته باشید که طبق موارد فوق اگر برای بردار تصمیم $x_0 \in S$، $\mu_{D_P}(x_0) > \mu_{D_N}(x_0)$، آنگاه μ_{D_P} و μ_{D_N} وابسته نیستند. بنابراین، بازگرداندن وابستگی منجر به μ_{D_P} و μ_{D_N} می‌شود که به‌شرح زیر است:

$$\mu_{D_{prev}}(x) = \min\{\mu_{D_P}(x), \mu_{D_N}(x)\}, \quad x \in S.$$

پس از تکمیل اطلاعات مثبت و منفی به‌طور جداگانه، ابتدا جواب برای حل (MOFLP) ارائه می‌کنیم و در این بین ارتباط مربوط به ضریب همبستگی را توضیح می‌دهیم.

۳.۳ روش حل پیشنهادی

مسئله یافتن یک جواب بهینه پارتو برای (MOFLP) می‌تواند به‌عنوان یک مسئله بهینه‌سازی شامل مجموعه‌های S و D_N و D_p درنظرگرفته شود. با توجه به سه گانه داده شده (S, D_N, D_p)، اولین هدف ما بدست آوردن یک مجموعه جواب شدنی است که یک توافقی را بین محدودیتهای انعطاف‌پذیر روی S ایجاد کند. بنابراین مسئله در فاز I به‌شرح زیر است : (مسئله فاز I : PIP)

$$\begin{aligned} \text{(PIP)} \quad \max \quad & \beta \\ \text{s.t.} \quad & \mu_{R_i(a_i^T x)} \geq \beta \quad i = ۱, \dots, m \\ & ۰ \leq \beta \leq ۱ \\ & x \in S. \end{aligned}$$

اگر (PIP) نشدنی باشد آنگاه محدودیتهای انعطاف‌پذیر روی S ناسازگارند و بنابراین (MOFLP) هیچ جواب شدنی ندارد. در غیر این‌صورت یک جواب بهینه‌ی (x^*, β^*) از (PIP) داریم. دو احتمال وجود دارد: یا اینکه (x^*, β^*) جواب بهینه منحصر به فرد (PIP) است یا اینکه (PIP) جواب بهینه دگرین دارد. اگر (x^*, β^*) جواب بهینه منحصربفرد (PIP) باشد آنگاه β^* بالاترین درجه شدنی بودن ممکن است و به وضوح x^* بهینه پارتو برای (MOFLP) است. در غیر این صورت یک مجموعه از جوابهای β^* شدنی از (MOFLP) که با $\mathbb{F} = \bigcap_{i=۱}^m R_i^{\beta^*}$ نشان داده شده را درنظر می‌گیریم که در آن $R_i^{\beta^*} = \{x \in S | \mu_{R_i(a_i^T x)} \geq \beta^*\}$. توجه شود که اگر $\beta^* = ۰$ آنگاه همه $x \in S$ جواب شدنی (MOFLP) هستند که برای آنها $a_i^T x \leq b_i + p_i$ برای $i = ۱, \dots, m$. در حالیکه اگر $\beta^* = ۱$ آنگاه فقط x های متعلق به S که در شرط $a_i^T x \leq b_i, i = ۱, \dots, m$ صدق کند، شدنی خواهند بود. در فاز دوم، قصد داریم یک جواب بهینه متناظر با μ_{D_P} روی $\mathbb{F}$ پیدا کنیم. مسئله فاز دو به‌صورت مسئله بهینه‌سازی زیر است (PIIP : مسئله فاز دوم):

$$\begin{aligned} \text{(PIIP)} \quad & \max \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{F}\Big(\mu_{G_۱}(c_۱^T x), \mu_{G_۲}(c_۲^T x), \dots, \mu_{G_p}(c_p^T x)\Big) \geq \alpha \\ & ۰ \leq \alpha \leq ۱, \quad x \in \mathbb{F} \end{aligned}$$

توجه کنید که برای هر $x \in \mathbb{F}$، $\mu_{D_N}(x) = \beta^*$.
بنابراین از بازگرداندن همبستگی داریم:

$$\mu_{D_{prev}}(x) = \min\{\mu_{D_P}(x), \beta^*\}, \quad x \in \mathbb{F}.$$

بنابراین، مینیمم کردن $\mu_{D_{prev}}$ معادل با مینیمم کردن μ_{D_p} است.
دو احتمال وجود دارد: یا یک جواب بهینه برای (PIIP) داریم یا (PIIP) نشدنی است. ابتدا در مورد احتمال اول بحث می‌کنیم. مورد دیگر نشدنی بودن (PIIP) است که در بخش بعدی بحث شده است. نتیجه زیر شرایطی فراهم می‌کند که یک جواب بهینه برای (PIIP) بهینه پارتو (MOFLP) باشد.

گزاره ۱.۳.۳. فرض کنید (x^{**},α^{**}) یک جواب بهینه برای مسئله (PIIP) باشد. اگر (x^{**},α^{**}) منحصر به فرد باشد یا $\mu_{G_k}(c_k^T x^{**}) < 1,\ k=1,\dots,p$، آنگاه x^{**} یک جواب بهینه پارتو برای (MOFLP) است.

برهان. برهان خلف، فرض کنید که x^{**} یک جواب بهینه پارتو برای (MOFLP) نباشد. لذا یک جواب β_y شدنی، برای y برای (MOFLP) وجود دارد، به‌طوریکه
$\beta_y = \beta^*,\ c_k^T y > c_k^T x^{**},\ k=1,\dots,p,$ و $c_{k_0}^T y \geq c_{k_0}^T x^{**}$ برای حداقل یک k_0. از آنجا که برای μ_{G_k}، $k=1,\dots,p$ به‌طور یکنوا صعودی هستند و F اکیداً صعودی است، نتیجه می‌گیریم

$$\mathrm{F}\Big(\mu_{G_1}(c_1^T y),\dots,\mu_{G_p}(c_p^T y)\Big) \geq \mathrm{F}\Big(\mu_{G_1}(c_1^T x^{**}),\mu_{G_2}(c_2^T x^{**}),\dots,\mu_{G_p}(c_p^T x^{**})\Big)$$
$$\geq \alpha^{**}.$$

بنابراین (y,α^{**}) برای (PIIP) شدنی است.
اگر (x^{**},α^{**}) جواب بهینه منحصربه‌فرد (PIIP) باشد، آنگاه α^{**} مقدار بهینه هدف است و بنابراین (y,α^{**}) نیز یک جواب بهینه (PIIP) است که با منحصربه‌فرد بودن (x^{**},α^{**}) متناقض است.
در ادامه حالتی را در نظر بگیرید که $\mu_{G_k}(c_k^T x^{**}) < 1,\ k=1,\dots,p$. آنگاه برای $k=1,\dots,p$ داریم $c_k^T x^{**} \in [Z_k - g_k, Z_k)$. چون μ_{G_k} برای $k=1,\dots,p$ توابع اکیداً صعودی روی $[Z_k - g_k, Z_k)$ هستند، داریم: $\mu_{G_k}(c_k^T x^{**}) \leq \mu_{G_k}(c_k^T y),\ k=1,\dots,p$ و $\mu_{G_{k_0}}(c_{k_0}^T x^{**}) < \mu_{G_{k_0}}(c_{k_0}^T y)$. از آنجا که F اکیداًصعودی است، داریم:

$$\mathrm{F}\Big(\mu_{G_1}(c_1^T y),\dots,\mu_{G_p}(c_p^T)\Big) > \mathrm{F}\Big(\mu_{G_1}(c_1^T x^{**}),\mu_{G_2}(c_2^T x^{**}),\dots,\mu_{G_p}(c_p^T x^{**})\Big)$$
$$\geq \alpha^{**}$$

که با بهینگی (x^{**},α^{**}) تناقض دارد.

□

اگر مسئله (PIIP) جوابهای بهینه دگرین داشته باشد و (x^{**},α^{**}) یک جواب بهینه (PIIP) باشد، به‌طوریکه برای یک یا چند k داشته باشیم $\mu_{G_k}(c_k^T x^{**}) = 1$، یعنی به یک یا چند سطح آرمانی به‌طور کامل دست یابیم، آنگاه ممکن است x^{**} برای (MOFLP) بهینه پارتو نباشد. در این مورد، به فاز سه می‌رویم و رویکردی را که توسط جیمنز و بیلبائو [۲۴] برای بدست آوردن یک جواب بهینه پارتو برای (MOFLP) پیشنهاد شده است را دنبال می‌کنیم. مسئله در فاز سه بدنبال ماکزیمم کردن مجموع انحرافات مثبت در توابع هدفی است که سطوح آرمانی آن به‌طورکامل بدست می‌آید، بدون اینکه مقادیر تابع هدف بدست آمده در فاز قبلی را بدتر کند. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید $\mu_{G_k}(c_k^T x^{**}) = 1$ برای $k=1,\dots,l$. در

فاز سه مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر می‌گیریم.(مسئله فاز III : $PIIIP$)

$$\begin{array}{lll} \text{PIIIP} & \max & \sum_{k=1}^{l} p_k^x \\ & \text{s.t.} & c_k^T x - p_k^x = c_k^T x^{**}, \quad k = 1, \dots l \\ & & \mu_{G_k}\left(c_k^T x\right) = \mu_{G_k}\left(c_k^T x^{**}\right), \quad k = l+1, \dots p \\ & & x \in \mathbb{F}, \quad p_k^x \geq 0, \end{array}$$

که در برنامه‌ریزی آرمانی متداول، متغیرهای p_k^x اهمیتی مشابه انحراف مثبت دارند. مشاهده می‌شود که (PIIIP) همیشه شدنی است. بعداً ثابت می‌کنیم که جوابهای بهینه (PIIIP) بهینه پارتو برای مسئله (MOFLP) هستند.

گزاره ۲.۳.۳. فرض کنیدکه $(\hat{x}, p_k^{\hat{x}})$ برای $k = 1, \dots, l$ یک جواب بهینه برای مسئله (PIIIP) باشد، آنگاه $\hat{x}$ یک جواب بهینه پارتو برای مسئله (MOFLP) است.

برهان. بدیهی است که $(\hat{x}, \alpha^{**})$ یک جواب بهینه برای (PIIP) است. فرض کنید $\hat{x}$ یک جواب بهینه پارتو برای (MOFLP) نباشد. آنگاه یک جواب β_y شدنی برای (MOFLP) وجود دارد بطوریکه

$\beta_y = \beta^*$ و $c_k^T y \geq c_k^T \hat{x}$ و $k = 1, \dots, p,$ $c_{k_0}^T y > c_{k_0}^T \hat{x}$، برای یک k_0.

با توجه به ماهیت صعودی μ_{G_k}, $k = 1, \dots, p$ می‌توان به آسانی نشان داد که (y, α^{**}) برای (PIIP) شدنی است. علاوه بر این، اگر $k_0 \in \{l+1, \dots, p\}$ آنگاه، چون $\mu_{G_{k_0}}$ در $[Z_{k_0} - g_{k_0}, Z_{k_0})$ اکیداً صعودی است و با اکیداً صعودی بودن F ، داریم

$$\mathrm{F}\left(\mu_{G_1}(c_1^T y), \dots, \mu_{G_p}(c_p^T y)\right) > \alpha^{**},$$

که با بهینه بودن $(\hat{x}, \alpha^{**})$ برای (PIIP) تناقض دارد. از این رو $k_0 \in \{1, \dots, l\}$. فرض کنید که

$$\begin{array}{ll} p_k^y = c_k^T y - c_k^T \hat{x} + p_k^{\hat{x}} & k = 1, \dots, l \\ p_k^y = 0 & k = l+1, \dots, p \end{array}$$

آنگاه (y, p_k^y) برای (PIIIP) شدنی است با $\sum_{k=1}^{l} p_k^y > \sum_{k=1}^{l} p_k^{\hat{x}}$ که با فرض در تناقض است.
$\square$

در ادامه، فرمول‌بندی مسئله فاز II را برای حالتی که F یک عملگر ساده‌ی میانگین است، ارائه می‌دهیم و سپس موردی را بررسی می‌کنیم که F یک عملگر OWA اکیداً یکنوا است. عملگر میانگین ساده ترین عملگر OWA اکیداً یکنوا است. این فرایند به محاسبات ترتیبی

و محاسبات وزنی نیاز ندارد. این مورد، توسط $\mu_{D_P}(x) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\mu_{G_k}\left(c_k^T x\right)$ توصیف شده است. مسئله (PIIP) به مسئله میانگین برنامه‌ریزی خطی [۱۲] زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\text{(AVGLP)} \qquad \max \quad & \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\alpha_k \\
\text{s.t.} \quad & \mu_{G_k}(c_k^T x) \geq \alpha_k \quad k = 1, \ldots, p \\
& 0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad k = 1, \ldots, p \\
& x \in \mathbb{F}.
\end{aligned}
$$

اگر ما F را به عنوان یک عملگر اکیداً یکنوا OWA درنظر بگیریم، آنگاه تابع هدف مسئله (PIIP) می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\mu_{D_P}(x) = w_1 y_1 + w_2 y_2 + \cdots + w_p y_p$$

که y_k، k امین عنصر بزرگ در مجموعه $\{\mu_{G_1}(c_1^T x), \ldots, \mu_{G_p}(c_p^T x)\}$ است و $W^T = (w_1, \ldots, w_p)$ یک بردار وزن OWA است. همان‌گونه که در فصل قبل بیان شد، با کمک روش یاگر، مسئله (PIIP) به مسئله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\text{(OWALP)} \qquad \max \quad & \sum_{k=1}^{p} w_k y_k \\
\text{s.t.} \quad & GY \leq 0 \\
& y_j e - O - M Z_j \leq 0 \quad j = 1, \ldots, p \\
& e^T Z_j \leq p - j \quad j = 1, \ldots, p \\
& z_{jk} \in \{0, 1\} \quad j, k = 1, \ldots, p \\
& 0 \leq y_k \leq 1 \quad k = 1, \ldots, p \\
& x \in \mathbb{F},
\end{aligned}
$$

که در آن

$$
G = \begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1
\end{bmatrix}
$$

یک ماتریس $p \times (p-1)$ است.

Y: یک بردار با p ستون است که مولفه‌های آن y_j هستند؛

[12] Average Linear Programming

e: یک بردار با p ستون با تمام ورودی‌های ۱؛
O: یک بردار با p ستون است که مولفه‌های آن $\mu_{G_j(c_j^T x)}$ هستند؛
z_j: یک بردار با p ستون است که مولفه‌های آن z_{jk} هستند؛
M: یک عدد حقیقی مثبت بزرگ است.

۴.۳ رفع نشدنی بودن فاز دوم

ملاحظه می‌شود که (PIIP) می‌تواند نشدنی هم باشد. در این بخش به دنبال رفع نشدنی بودن مسئله فاز دوم هستیم. بدون کاستن از کلیت مسئله، می‌توانیم مسئله (AVGLP) را به عنوان مسئله فاز II در نظر بگیریم. این مسئله نشدنی است اگر سیستم زیر ناسازگار باشد:

$$\text{(CS۱)} \qquad \begin{aligned} &\mu_{G_k}(c_k^T x) \geq \alpha_k \quad k = 1, \dots, p \\ &0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, p \\ &x \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

نتیجه زیر به سادگی بدست می‌آید.

گزاره ۱.۴.۳. سیستم (CS۱) ناسازگار است اگر و فقط اگر سیستم (CS۲) یا به‌طور معادل (CS۳) ناسازگار باشد:

$$\text{(CS۲)} \qquad \begin{aligned} &\mu_{G_k}(c_k^T x) \geq 0 \quad k = 1, \dots, p \\ &x \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

$$\text{(CS۳)} \qquad \begin{aligned} &c_k^T x \geq Z_k - g_k \quad k = 1, \dots, p \\ &x \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

از آنجا که $\mathbb{F} \neq \emptyset$، مسئله (AVGLP) در فاز II نشدنی است اگر و فقط اگر آستانه موردنظر برای برخی از توابع هدف روی $\mathbb{F}$ قابل دسترس نباشد. برای رفع نشدنی بودن، یا باید $\mathbb{F}$ را اصلاح کنیم یا آستانه‌های موردنظری که روی $\mathbb{F}$ قابل دستیابی نیستند را اصلاح کنیم. بنابراین، ما دو روش کاربردی زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

۱. اصلاح مسئله فاز I با اضافه کردن محدودیتهای $c_k^T x \geq Z_k - g_k$، $k = 1, \dots, p$ به خود مسئله. اگر مسئله اصلاح شده فاز I نشدنی باشد، نتیجه می‌گیریم که (MOFLP) نشدنی است. در غیر این صورت در فاز I داریم: $\beta^*_{mod} \leq \beta^*$ و از این رو $\mathbb{F}_{mod} = \bigcap_{i=1}^{m} R_i^{\beta^*_{mod}}$

۲. جیمنز و همکاران [۲۳]، یک رویکرد جالب برای تنظیم آستانه‌های مورد نظر برای برخی از توابع هدف را پیشنهاد کرده‌اند، به‌طوری که مسئله را با آستانه تنظیم شده، شدنی بکند.

اولین گام شناسایی یک زیرمجموعه عددی مینیمم از محدودیتهای $c_k^T x \geq Z_k - g_k$ برای $k = ۱, \dots, p$ است، که ما با (ICS) مشخص کنیم، به‌طوری که اگر (ICS) از (CS۳) حذف شد، آنگاه به یک سیستم شدنی تبدیل می‌شود.
به‌طورخلاصه و به منظور کامل بودن، این روش را توضیح می‌دهیم. فرض کنید یک مجموعه از مجموعه نامساویهای خطی داده شده باشد. مسائل فاز II زیرمجموعه‌هایی از نامعادلات خطی را تعیین می‌کنند، به‌طوریکه حداقل یک عضو از هر زیرمجموعه به منظور دستیابی به یک سیستم شدنی حذف می‌شود.
یک مجموعه از نامعادلات خطی نشدنی می‌تواند یک یا چند مسئله فاز II با محدودیتهایی را داشته باشد که می‌توانند همپوشانی داشته باشند. مسئله MIN IIS COVER ((مسئله پوشش فاز II)) کوچکترین مجموعه از محدودیتهای عددی را پیدا می‌کند که همه مسائل فاز II را پوشش بدهد. در یک مدل نشدنی می‌تواند چندین MIN IIS COVER وجود داشته باشد، اما همه آنها یک ویژگی مشترک دارند: حذف یک MIN IIS COVER از مجموعه‌ای از محدودیتهای نشدنی، مجموعه محدودیتهای باقیمانده را شدنی می‌سازد.
همانطور که توسط جیمنز و همکاران [۲۳] پیشنهاد شده است، الگوریتم پیشنهاد شده توسط چینک و درانیک [۸] را به (CS۳) برای شناسایی یک MIN IIS COVER اعمال می‌کنیم.
تمام محدودیتهای $c_k^T x \geq Z_k - g_k$ را با اضافه کردن متغیرهای انعطاف‌پذیر ((الاستیک)) نامنفی e_k برای $k = ۱, \dots, p$ به محدودیتهای انعطاف‌پذیر تبدیل می‌کنیم و فیلتر کردن انعطاف‌پذیر را با مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر شروع می کنیم:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{k=۱}^{p} e_k \\
\text{s.t.} \quad & c_k^T x - e_k \geq Z_k - g_k \quad k = ۱, \dots, p \\
& e_k \geq ۰, \quad k = ۱, \dots, p \\
& x \in \mathbb{F},
\end{aligned}$$

در پایان فیلتر کردن انعطاف‌پذیر، زیر مجموعه‌ای از (CS۳) را که حاوی حداقل یک IIS است بدست می‌آوریم. از این پس، فیلترینگ حذف را به این زیرمجموعه اعمال می‌کنیم تا یک کاردینالیتی مینیمم (ICS) را بدست آوریم. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنیم که (ICS) شامل r تابع هدف اول است (r تای اول). گام بعدی این است که کمترین آزادسازی مورد نیاز در آستانه‌ها را برای این r تابع هدف چنان تعیین کنیم که مسئله فاز II شدنی شود.

برای این منظور، جیمنز و همکاران [۲۳] مسئله زیر را در نظر گرفتند:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^{r} \omega_k t_k \\ \text{s.t.} \quad & c_k^T x + t_k \geq Z_k - g_k \quad k = 1, \dots, r \\ & c_k^T x \geq Z_k - g_k \quad k = r+1, \dots, p \\ & t_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, r \\ & x \in \mathbb{F}, \end{aligned}$$

که $\sum_{k=1}^{r} \omega_k = 1$ و $k = 1, \dots, r, \omega_k \geq 0$ ، نشان‌دهنده اهمیت آزادسازی سطح آستانه $Z_k - g_k$ است. فرض کنید $(\tilde{x}, \tilde{t_k})$ یک جواب بهینه این مسئله باشد، پس $Z_k - g_k - \tilde{t}_k$ برای $k = 1, \dots, r$ آستانه‌های جدید برای r هدف اول هستند یا می‌توان گفت که حدهای مجاز تنظیم شده به‌صورت زیر هستند: $k = 1, \dots, r, g_k^{adj} = g_k - \tilde{t}_k$.
سپس در فاز II مسئله زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \\ \text{s.t.} \quad & c_k^T x \geq Z_k - (1 - \alpha_k) g_k^{adj} \quad k = 1, \dots, r \\ & c_k^T x \geq Z_k - (1 - \alpha_k) g_k \quad k = r+1, \dots, p \\ & 0 \leq \alpha_k \leq 1 \quad k = 1, \dots, p \\ & x \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

ملاحظه ۱.۴.۳. رویکرد ارائه شده توسط جیمنز و همکاران [۲۳] چهار مرحله نیاز دارد تا نشدنی بودن را رفع کند، که این کار با اصلاح سطوح آرمانی و هم حدمجاز برای توابع هدفی که به مینیمم عددی IIS تعلق دارند، انجام می‌شود. ولی در این طرح، تنها دو مرحله اول رویکرد جیمنز و همکاران [۲۳] را برای اطمینان از شدنی بودن مسئله فاز II اجرا کردیم.

ملاحظه ۲.۴.۳. رویکرد دوم فقط درصورتی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد که تصمیم گیرنده بخواهد حدمجاز را در حداقل تعداد تابع هدف که توسط الگوریتمش مشخص شده است، تغییر بدهد. بخش قابل توجه این الگوریتم این است که نه تنها به شناسایی تغییرات مورد نیاز اهداف کمک می‌کند، بلکه حداقل تغییرات را شناسایی می‌کند، همچنین نشان می‌دهد که چه میزان تنظیمات باید در سطوح حدمجاز مربوط به این اهداف اعمال شود. در صورتی که، اگر تصمیم گیرنده مایل نباشد حتی این حداقل تغییرات را انجام دهد آنگاه پیشنهاد می‌کنیم روش اول را بوسیله اصلاح مسئله فاز I اعمال کنید.

گزاره ۱.۳.۳ و ۲.۳.۳ برای مسئله جدید فاز II که توسط هر یک از دو روش ذکر شده بدست آمده، درست است. بنابراین، ما می‌توانیم یک جواب بهینه پارتو برای (MOFLP) را بدست

آوریم .

۵.۳ مثال عددی

راه‌حل پیشنهادی را از طریق مثالی که از زیمرمن [۵۴] گرفته شده است، ارائه می‌دهیم.

مثال ۱.۵.۳. مسئله (MOFLP) زیر را درنظر بگیرید:

$$\max z_۱ = ۱۰۰x_۱ + ۱۵۰x_۲$$

$$\max z_۱ = ۰/۱x_۱ + ۰/۰۵x_۲$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_۱ + x_۲ \preceq ۱۰۰۰\\
& ۳x_۱ + ۲x_۲ \preceq ۲۴۰۰\\
& x_۱ \preceq ۶۰۰\\
& x_۲ \preceq ۸۰۰\\
& x_۱, x_۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

حدمجاز محدودیتهای انعطاف‌پذیر توسط $r_۱ = ۱۰۰, r_۲ = ۲۰۰, r_۳ = ۲۰۰$ و $r_۴ = ۱۰۰$ داده شده است. سطوح آرمانی برای تابع هدف اول و دوم به‌ترتیب $Z_۱ = ۱۵۵۰۰۰$ و $Z_۲ = ۸۵$ و $g_۱ = ۶۰۰۰۰$ و $g_۲ = ۲۵$ هستند.
در فاز I، مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\max\quad & \beta\\
\text{s.t.}\quad & x_۱ + x_۲ + ۱۰۰\beta \leq ۱۱۰۰\\
& ۳x_۱ + ۱۲x_۲ + ۲۰۰\beta \leq ۲۶۰۰\\
& x_۱ + ۲۰۰\beta \leq ۸۰۰\\
& x_۲ + ۱۰۰\beta \leq ۹۰۰\\
& x_۱, x_۲ \geq ۰\\
& ۰ \leq \beta \leq ۱.
\end{aligned}$$

یک مقدار بهینه برای این مسئله $\beta^* = ۱$ است، و این مسئله جواب بهینه دگرین دارد. بنابراین، به فاز II مسئله می‌رویم.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{۱}{۲}\alpha_۱ + \frac{۱}{۲}\alpha_۲ \\
\text{s.t.} \quad & -۱۰۰x_۱ - ۱۵۰x_۲ + ۶۰۰۰۰\alpha_۱ \leq -۹۵۰۰۰ \\
& -۰/۱x_۱ - ۰/۰۵x_۲ + ۲۵\alpha_۲ \leq -۶۰ \\
& x_۱ + x_۲ \leq ۱۰۰۰ \\
& ۳x_۱ + ۱۲x_۲ \leq ۲۴۰۰ \\
& x_۱ \leq ۶۰۰ \\
& x_۲ \leq ۸۰۰ \\
& x_۱, x_۲ \geq ۰ \\
& ۰ \leq \alpha \leq ۱
\end{aligned}$$

جواب بهینه برابر است با: $x_۱^{**} = ۴۰۰, x_۲^{**} = ۶۰۰, \alpha_۱^{**} = ۰/۵۸, \alpha_۱^{**} = ۰/۴$ با مقدار بهینه هدف ۰/۴۹ و این جواب بهینه منحصر به فرد است. بنابراین، با گزاره ۱.۳.۳ ، (۴۰۰،۶۰۰) یک جواب بهینه پارتو برای MOFLP، با درجه ی شدنی بودن ۱ است.

هرچند، یک جواب پارتو بدست آمده از این مثال توسط زیمرمن [۵۴] برابر $x_۱^{\circ} = ۴۶۶/۷$ و $x_۲^{\circ} = ۵۴۴/۴$ است با درجه شدنی بودن $\beta^{\circ} = ۰/۵۶$.

فصل ۴

نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

در مدلی که زیمرمن مورد بررسی قرار داد، یک سطح آرمانی برای تابع هدف با یک حدمجاز خاص داده شده و نامساوی‌ها در محدودیتهای خطی، انعطاف‌پذیر یا نرم هستند (در یک حالت مناسب). از این به بعد، تابع هدف فازی و محدودیتهای فازی همان رفتاری را که منجر به یک مدل متقارن می‌شد، دریافت کردند. اصل کلاسیک بلمن زاده [۲] با جمع همه نامساوی‌های فازی که با استفاده از عملگر تجمیع ' min ' بوده یک مجموعه تصمیم فازی از جواب‌ها را تعریف کرده است. یک جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی جوابی است که حداکثر مقدار برای مینیمم باشد(تابع جمع شده). فایده اصلی رویکرد $\max - \min$ این است که باعث می‌شود تمایز بهتری بین جوابهای خوب و بد یک مجموعه از نامساوی‌هایی که توسط تابع هدف فازی و محدودیتهای فازی (انعطاف‌پذیر، نرم) ارائه شده‌اند، ایجاد شود.
هرچند، معایب اصلی استفاده از رویکرد فوق، این است که تمایل دارد تا تمایز بین آرمان هدف و محدودیتها را، با ترکیب تمام مجموعه‌های فازی نمایانگر آنها از بین ببرد. در واقع موضوع بحث این است. یک محدودیت چیزی است که باید برآورده شود، حداقل تا حدودی برای یک محدودیت انعطاف‌پذیر، یا تا آنجا که منجر به ایجاد یک مجموعه تهی از جوابهای شدنی برای محدودیتی که اولویت آن حداکثرسازی نیست، نشود. به عبارت دیگر، محدودیتها چیزی هستند که باید برآورده شوند. از سوی دیگر، ایده‌ی مورد نیاز مربوط به معیارهای هدف وجود ندارد. به‌ویژه در مورد مسائل FMOLP ، سطوح آرمانی توابع هدف تنها نشان‌دهنده تمایل یا آرزوی تصمیم گیرنده (DM) است و از این رو غیراجباری است. حتی اگر برخی از اهداف

آرمانی برآورده شده باشد، جواب مربوطه (حتی اگر محدودیتها را هم برآورده کند) باید دلیلی برای رضایت تصمیم‌گیرنده داشته باشد.

این موردی است که به‌طور کامل در تمام مطالعاتی که بر اساس اصل بلمن_زاده صورت گرفته است،از بین رفته است به‌طوریکه تمام آرمانهای هدف یرای رسیدن به رضایتمندی دلخواه تصمیم‌گیرنده برآورده شده بودند.

بنفرهات و همکاران و دوبیس استفاده از اولویتهای منفی و اولویتهای مثبت را مورد حمایت قرار دادند تا بین آنچه غیرقابل‌قبول است و آنچه که واقعا برای تصمیم‌گیرنده رضایت‌بخش است، تمایز باشد. اولویتهای منفی به‌عنوان محدودیتهای جوابهای نشدنی غیرقابل‌قبول است، عمل می‌کنند و اولویتهای مثبت منجر به جوابهای مطلوب می‌شوند. بدین ترتیب، این مسئله می‌تواند برای محاسبه بهترین جوابها بعد از ادغام اولویتهای مثبت و منفی به‌طور جداگانه، مدل‌بندی شود. به‌وضوح این ایده‌ها یک رویکرد دوقطبی از اولویتها را فراهم می‌کند. بر اساس این افکار، در این پایان‌نامه تلاش کردیم مسائل FMOLP را با رویکرد دوقطبی بررسی کنیم. باید از رویه تجمیع دیگری برای جمع محدودیتهای فازی (انعطاف‌پذیر / نرم) که حدمجازهای از پیش تعریف شده دارند و توابع هدف با سطوح آرمانی موردنظر از پیش تعیین شده توسط تصمیم‌گیرنده، استفاده کنیم.

در واقع سعی کردیم یک مسئله FMOLP را با یک رویکرد دوقطبی ناهمگن کنترل کنیم که این موضوع مربوط می‌شود به اختلاف میان محدودیتها و اهداف است. رویکرد ارائه شده برای بیان تفاوت بین دو مفهوم اساسی موجود در فرمول‌بندی LP است:

یکی نشان‌دهنده محدودیتهایی است که نقض آن غیرقابل‌قبول است و دیگری اهدافی است که دستیابی به آن باعث رضایت می‌شود. ما از اپراتور OWA برای تجمیع اهداف فازی استفاده کردیم و عملگر min برای تجمیع محدودیتها است. در روش حل مسئله که توسط یاگر ارائه شد برای حل مسئله COAP، از تجمیع OWA محدود شده استفاده شده است.

تفاوت رویکرد ما، هم در نظر و مدلسازی، از سایر مطالعات الهام گرفته از اصل توسیع بلمن زاده و هم از نظر ایده‌های مدلسازی زیمرمن بر روی مسایل کلاس مشابه، چند تفاوت مهم و برجسته دارد. از نظر فرمول‌بندی مدل ما کاملاً واضح است که فرم کلی تابع تصمیم‌گیری بر اساس وزن مجموع اهداف فردی، بیشتر مربوط به موقعیتی است که ما قصد داریم به رضایت اهداف برسیم برخلاف سایر مطالعات که هدفشان دستیابی به تمام آرمان اهداف است.

استفاده از دیگر عملگرهای تجمیع [۱۰،۱۱،۱۳،۱۸]، که توسط یک داور ناشناس پیشنهاد شد نسبت به مطالعات فعلی و برای تجزیه و تحلیل متناظر با مسئله ما بدترین کاوش به‌نظر می‌رسد. ما در واقع در انجام بروز رسانی این کار به آنها کمک کردیم.

MOFLP را به عنوان یک مسئله به عنوان اولویتهای مثبت و منفی در نظر گرفتیم. مفهوم جواب بهینگی پارتو به مسئله MOFLP بسط داده شده است. یک فرایند حل برای بدست آوردن یک جواب بهینه پارتو برای MOFLP ، برای زمانیکه رضایت محدودیتهای انعطاف‌پذیر، نخستین اولویت تصمیم‌گیرنده است، پیشنهاد کردیم. در حالیکه می‌دانیم

رویکردهای ارائه شده توسط ورنر (۱۹۸۷) و زیمرمن(۱۹۷۸) زمانی کاربردی هستند که محدودیتهای انعطاف‌پذیر و توابع هدف برای تصمیم گیرنده، اولویتهای برابر دارند.
یک سوال بسیار طبیعی این است که با توجه به پارامترهای توابع عضویت، جوابهای بهینه مسائل بهینه‌سازی، دراین فصل چقدر حساس هستند. در این مقاله تلاش می‌کنیم تا یک مسئله FMOLP را با یک رویکرد دوقطبی ناهمگن بررسی کنیم که منجر به مخالفت بین محدودیتها و اهداف می‌شود. رویکرد دوقطبی اجازه می‌دهد تا بین دو مفهوم بنیادی که در یک فرمول مسئله FMOLP دخیل هستند تمایز وجود داشته باشد. یکی از آنها نشان‌دهنده محدودیتهایی است که نقض آن غیرقابل‌قبول است و دیگری اهدافی را نشان می‌دهد که موفقیت آن رضایت را ایجاد می‌کند. از عملگر OWA مانند 'و فازی' و 'یا فازی' برای تجمیع اهداف فازی استفاده کردیم. درحالیکه عملگر min برای تجمیع محدودیتها استفاده می‌شود.
روش‌های حل ارائه شده توسط یاگر [۴۸] و ورنر [۴۴] برای حل مسائل تجمیع شده برای حل FMOLPP استفاده می‌شود. رویکرد [۴۸] یاگر یک مسئله بهینه‌سازی OWA را به عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی خطی آمیخته فرمول‌بندی می‌کند. آگریکزاک [۱] و اسلیوینسکای [۲] در [۳۱] نشان دادند که یک مسئله بهینه‌سازی OWA با وزن‌های یکنواخت می‌تواند به عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی خطی استاندارد در ابعاد بالاتر برای فرمول‌بندی کردن مسئله قطعی FMOLP استفاده گیرد.
بنابراین، برای یک عملگر تجمیع OWA مانند F با وزنهای یکنواخت، مدلهای پیشنهاد شده در [۳۱] می‌توانند برای فرمول معادله قطعی استفاده شود مسئله (FMOLP)
رویکرد ما در این مقاله از دیدگاه دیگر مطالعات دیگر با رده مشابه مسائل بهینه‌سازی فازی که عمدتا توسط ایده‌های مدل‌سازی زیمرمن [۳] الهام گرفته شده است، متفاوت است. ما یک تفاوت مهم بین رویکرد دوقطبی و رویکرد $\max - \min$ برای مدل‌بندی کردن مسائل FMOLP را برجسته می‌کنیم. در مدل پیشنهادی ما (با استفاده از روش دوقطبی) برای مسائل FMOLP، شکل به‌دست آمده از یک تصمیم کلی روی تجمیع اهداف فردی تقریبا عمدتا مطابق با وضعیتی است که تا حدی که امکان داره مورد رضایت باشند. (با استفاده از رویکرد $\max - \min$) برخلاف سایر مطالعات هدف آن دستیابی به رضایت مثبت در تمام اهداف به‌طور همزمان است. به نظر می‌رسد رویکرد دوقطبی در برنامه‌ریزی ریاضی فازی امیدوارکننده است. تحقیقات بعدی می‌تواند حقایق بیشتری از حالتی از مدل‌سازی را برای چنین طبقه‌ای از مسائل بهینه‌سازی به‌کار گیرد تا مسائل عملی بیشتری را مرتبط با آنها درنظر بگیرد. این مقاله تلاش می‌کند تا دوقطبی را در برنامه‌ریزی خطی فازی نشان دهد و دروازه را برای کشف سایر زمینه‌های کاربردی مرتبط باز می‌کند. مطمئنا یکی هم می‌تواند طراحی عملگرهای جدید تجمعی را به‌ویژه برای نیاز مسئله آغاز کند.

[1]، Ogryczak
[2]'Sliwi'nski
[3]Zimmermann

یکی دیگر از راه‌های جالب در زمینه‌های مشابه، توسط فیلیکس[4] [۲۷] گرابیش[5] [۲۱] و بسیاری دیگر برای مدل‌بندی ارائه شده است تعامل بین توابع هدف با استفاده از روابط فازی که نیازی به‌ترتیب ترجیحی ندارند. در مقابل رویکردی که در این مقاله به کار برده شده است، جایی که فرض می‌کنیم که مقادیر هدف و تحمل در آنها برای هر یک از اهداف اولویت بندی شده p، ساختار تعاملی اهداف برای هر موقعیت تصمیم‌گیری محاسبه می‌شود به صراحت بر اساس انواع فازی تعامل بین توابع هدف است. تجمع توابع هدف بر اساس نوع روابط فازی که آنها در میان خودشان به اشتراک می‌گذارند به [۱۸] نگاه کنید، به راحتی عملگر OWA، می‌تواند در یک چارچوب دوقطبی از FMOLPP در تحقیقات آینده مورد مطالعه قرار گیرد.

---

[4]Felix
[5]Grabisch

مراجع

[1] K. Atanassov, Intuitionistic Fuzzy Sets, Physica-Verlag, Heidelberg, 1999.

[2] C.R. Bector, S. Chandra, On duality in linear programming under fuzzy environment, Fuzzy Sets and Systems 125 (2002) 317–325.

[3] C.R. Bector, S. Chandra, Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games, Springer, 2005.

[4] R.E. Bellman, L.A. Zadeh, Decision making in fuzzy environment, Management Sciences 17 (1970) B-141–B-164.

[5] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, H. Prade, Bipolar possibility theory in preference modeling: representation, fusion and optimal solutions, Information Fusion 7 (2006) 135–150.

[6] J.M. Cadenes, F. Jimènez, Interactive decision making in multiobjective fuzzy programming, Mathware and Soft Computing 3 (1994) 210–230.

[7] S. Chanas, The use of parametric programming in fuzzy linear programming, Fuzzy Sets and Systems 11 (1983) 243–251.

[8] Chinnek, J. W., and E. W. Dravnieks. 1991. "Locating Minimal Infeasible Constraint Sets in the Linear Programmes." ORSA Journal on Computing 3 (2): 157–168.

[9] M. Detyniecki, Numerical aggregation operators: state of the art, in: International Summer School on Aggregation Operators and Their Applications, Asturias, Spain, July 2001.

[10] D. Dubey, A. Mehra, Fuzzy multiobjective linear programming: a bipolar view, in: S. Greco, et al. (Eds.), IPMU 2012, Part IV, CCS, vol. 300, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012, pp. 458–468.

[11] Dubey, D., and A. Mehra. 2014. "A Bipolar Approach in Fuzzy Multi-objective Linear Programming." Fuzzy Sets and Systems 246: 127–141.

[12] Dubois, D., and P. Fortemps. 1999. "Computing Improved Optimal Solutions to Max-min Flexible Constraint Satisfaction Problems." European Journal of Operational Research 118 (1): 95–126.

[13] D. Dubois, H. Prade, Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: a clarification, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 32 (2001) 35–66.

[14] D. Dubois, H. Prade, On the use of aggregation operations in information fusion processes, Fuzzy Sets and Systems 142 (2004) 143–161.

[15] D. Dubois, H. Prade, Bipolar representations in reasoning, knowledge extraction and decision, in: S. Greco, Y. Hata, S. Hirano, M. Inuiguchi (Eds.), Proc. 5th International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing, RSCTC 2006, Kobè, Japan, Lecture Notes in Artificial Intelligence 4259 (2006) 15–26. Also available at, 2006.

[16] D. Dubois, H. Prade, Gradualness, uncertainty and bipolarity: making sense of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 192 (2012) 3–24.

[17] R. Felix, Relationship between goals in multiple attribute decision making, Fuzzy Sets and Systems 67 (1994) 47–52.

[18] R. Felix, Efficient decision making with interactions between goals, in: Proceedings of the 2007 IEEE Symposium on Computational Intelli- gence in Multicriteria Decision Making, MCDM, 2007, pp. 221–226.

[19] R. Fullér, OWA operators in decision making, in: Christer Carlsson (Ed.), Exploring the Limits of Support Systems, in: TUCS General Publications, ISSN 1239-1905, vol. 3, Turku Centre for Computer Science, Abo, ISBN 951-650-947-9, 1996, pp. 85–104.

[20] R. Fullér, On obtaining OWA operator weights: a short survey of recent developments, in: Proceedings of 5th IEEE International Conference on Computational Cybernatics, ICCC, 2007, pp. 241–244. Gammarth, Tunisia.

[21] M. Grabisch, Fuzzy integral in multicriteria decision making, Fuzzy Sets and Systems 69 (1995) 279–298.

[22] B. Jana, T.K. Roy, Multi-objective fuzzy linear programming and its application in transportation model, Tamsui Oxford Journal of Mathe- matical Sciences 21 (2005) 243–268.

[23] Jiménez, M., A. Bilbao, M. Arenas, and M. V. Rodriguez-Uria. 2009. "Repairing Infeasibilty in Fuzzy Goal Programming." In IFSA-EUSFLAT, 20–24 July 2009, 1486–1489. Lisban, Portugal.

[24] M. Jiménez, A. Bilbao, Pareto-optimal solutions in fuzzy multi-objective linear programming, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 2714–2721.

[25] X.W. Liu, L.H. Chen, The equivalence of maximal entropy OWA operator and geometric OWA operator, in: 2nd International Conference of Machine Learning and Cybernetics, Xi'an, 2003, pp. 2673–2676.

[26] M.K. Luhandjula, Compensatory operators in fuzzy linear programming with multiple objectives, Fuzzy Sets and Systems 8 (1982) 245–252.

[27] R. Mesiar, M. Komorníková, Aggregation operators, in: D. Surla, K. Herceg (Eds.), XI Conference on Applied Mathematics, PRIM' 96, Novi Sad, 1997, pp. 193–211.

[28] K. Nakamura, Some extensions of fuzzy linear programming, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 211–229.

[29] M. O'Hagan, Aggregating template or rule antecedents in real time expert systems with fuzzy set logic, in: 22nd Annual IEEE Asilomar Conference Signals, Systems, Computers, Pacific Grove, 1988, pp. 681–689.

[30] M. O'Hagan, "Fuzzy Decision Aids", Proc. t l s t Annual Asilomar Conf. on Signals, Systems, and Computers, IEEE and Maple Press, Vol. 2, pp. 624-628, Pacific Grove, CA, November 2-4, 1987.

[31] W. Ogryczak, T. Sliwinski, On solving linear programs with the ordered weighted averaging objective, European Journal of Operational Research 148 (2003) 80–91.

[32] H. Rommelfanger, R. Hanuscheck, J. Wolf, Linear programming with fuzzy objectives, Fuzzy Sets and Systems 29 (1989) 31–48.

[33] H. Rommelfanger, Fuzzy linear programming and applications, European Journal of Operational Research 92 (1996) 512–527.

[34] M.R. Safi, H.R. Maleki, E. Zaeimazad, A note on the Zimmermann method for solving fuzzy linear programming problems, Iranian Journal of Fuzzy Systems 4 (2007) 31–45.

[35] M. Sakawa, M. Inuiguchi, A fuzzy satisficing method for large-scale multiobjective linear programming problems with block angular structure, Fuzzy Sets and Systems 78 (1996) 279–288.

[36] G. Sommer, M.A. Pollatschek, A fuzzy programming approach to an air pollution regulation problem, in: R. Trappl, G.J. Klir, L. Ricciardi (Eds.), Progress of Cybernetics and Systems Research, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1978, pp. 303–313.

[37] G.A. Süer, F. Arikan, C. Babayi�it, Effects of different fuzzy operators on fuzzy biobjective cell loading problem in labor-intensive manufac- turing cells, Computers and Industrial Engineering 56 (2009) 476–488.

[38] H. Tanaka, T. Okuda, K. Asai, On fuzzy-mathematical programming, Journal of Cybernetics 3 (1974) 37–46.

[39] C.C. Tsai, C.H. Chu, T.A. Barta, Modelling and analysis of a manufacturing cell formation problem with fuzzy mixed integer programming, IIE Transactions 29 (1997) 533–547.

[40] A. Tversky, D. Kahneman, Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty, Journal of Risk and Uncertainty 5 (1992) 297–323

[41] C. Veeramani, C. Duraisamy, A. Nagoorgani, Solving fuzzy multi-objective linear programming problems with linear membership functions, Australian Journal of Basic and Applied Sciences 5 (2011) 1163–1171.

[42] H.F. Wang, M.L. Wang, A fuzzy multiobjective linear programming, Fuzzy Sets and Systems 86 (1997) 61–72.

[43] B. Werners, Interactive multiple objective programming subject to flexible constraints, European Journal of Operational Research 31 (1987) 342–349.

[44] B.M. Werner, Aggregation models in mathematical programming, in: G. Mitra (Ed.), Mathematical Models for Decision Support, Springer, Berlin, 1988, pp. 295–305.

[45] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making, IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics 18 (1988) 183–190.

[46] R.R. Yager, D.P. Filev, Parametrized andlike and orlike OWA operator, International Journal of General Systems 22 (1994) 297–316.

[47] R.R. Yager, Quantifier guided aggregation using OWA operator, International Journal Intelligent Systems 11 (1996) 49–73.

[48] R.R. Yager, Constrained OWA aggregation, Fuzzy Sets and Systems 81 (1996) 89–101.

[49] R.R. Yager, J. Kacprzyk, The Ordered Weighted Averaging Operation: Theory, Methodology and Applications, Kluwer, Norwell, 1997.

[50] G.D. Yalcin, N. Erginel, Determining weights in multi-objective linear programming under fuzziness, in: Proceedings of the World Congress on Engineering, vol. II, WCE 2011, London, UK, 2011.

[51] H.J. Zimmerman, Description and optimization of fuzzy systems, International Journal of General Systems 2 (1976) 209–214.

[52] H.J. Zimmerman, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 45–55.

[53] H.J. Zimmerman, P. Zysno, Latent connectives in human decision making, Fuzzy Sets and Systems 4 (1980) 37–51.

[54] H.J. Zimmerman, Applications of fuzzy set theory to mathematical programming, Information Sciences 36 (1985) 29–58.

Aabstract

The traditional frameworks for fuzzy linear optimization problems that are inspired by the max–min model proposed by Zimmermann, use the Bellman–Zadeh extension principle to aggregate all the fuzzy sets representing flexible (fuzzy) constraints and objective functions together. In this thesis, we attempt to view fuzzy multi-objective linear programming problems (FMOLPPs) from a perspective of preference modeling. The multi-objective flexible linear programming (MOFLP) problems (or fuzzy multiobjective linear programming problems) are studied in the heterogeneous bipolar framework. Bipolarity allows us to distinguish between the negative and the positive preferences. Negative preferences denote what is unacceptable while positive preferences are less restrictive and express what is desirable. The fuzzy constraints are viewed as (representing) negative preferences, while the objective functions are viewed as positive preferences. The approach of bipolarity enables us to handle fuzzy sets representing constraints and objective functions separately and combine them in distinct ways. In this paper, an approach is proposed to single out such a solution of Pareto-optimality for MOFLP with highest possible degree of feasibility. The optimal solution of FMOLPP maximizes the disjunctive combination of the weighted positive preferences provided it satisfy the negative preferences combined in conjunctive way.

Keywords: Fuzzy mathematical programming; Fuzzy multi-objective linear programming; Bipolarity; Coherence condition; Aggregation operator; OWA operator flexible linear programming; fuzzy sets; feasibility degree; Pareto-optimal solution; bipolarity

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operations Research

Solving Fuzzy Multiobjective Linear Optimization Problems By Bipolar Approach

By: Afsane Delkhah

Supervisors

Dr. Mehrdad Ghaznavi
Dr. Maryam Ghorani

January 2019