

حاشا  
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از برخی از موجک ها

نگارنده: معصومه محمودی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر مهدی قوتمند

۹ بهمن ۱۳۹۷

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم

که در سختی ها و دشواری های زندگی، همواره یاری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده اند.

همسرم که نشانه لطف الهی در زندگی من است.

و خواهران و برادر عزیزم

# سپاس گزاری

حمد و سپاس مختص یگانه بی‌همتایی است که جسم و روح ما در اختیار اوست و پوییدن در مسیر علم و دانش را در وجودمان نهاده است. در آغاز بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادرم که همواره پشتیبان و حامی من بوده و موفقیت‌هایم را مدیون زحماتشان هستم. سپس تشکر و قدردانی می‌کنم از جناب آقای دکتر احسنی طهرانی و دکتر مهدی قوتمند به پاس زحماتی که برایم کشیدند و صبورانه در انجام این کاریاری‌ام کردند. شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.

معصومه محمودی

۹ بهمن ۱۳۹۷

## تعهد نامه

اینجانب معصومه محمودی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از برخی از موجک ها ، تحت راهنمایی حجت احسنی طهرانی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

معصومه محمودی

۹ بهمن ۱۳۹۷

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

## چکیده

در این پایان‌نامه، یک مطالعه محاسباتی از روش‌های عددی نسبتاً جدید از موجک‌های هار برای حل معادلات دیفرانسیل خطی استفاده شده است. یک مقایسه بین روش جدید و برخی از روش‌های کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل خطی ایجاد شده است. هدف این پایان‌نامه، نمایش کارایی روش حاضر و مزیت آن نسبت به سایر روش‌ها است. روش جدید ساده می‌باشد و نتایج عددی آن به نتایج برخی از روش‌های کلاسیکی نزدیک و یا دقیق‌تر از آن‌ها است.

کلمات کلیدی: مسئله مقدار اولیه، مسئله مقدار مرزی، تبدیلات موجک پیوسته، موجک هار، تابع مقیاس هار، تبدیل موجک هار.

# فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر
ف	فهرست جداول
۱	۱ مقدمه
۱	۱.۱ مروری کوتاه
۲	۲.۱ تاریخچه مختصر از توسعه موجک‌ها در حل معادلات دیفرانسیل
۴	۳.۱ فضای ضرب داخلی
۵	۱.۳.۱ فضای $L^2$
۵	۲.۳.۱ تعامد
۶	۴.۱ مفاهیم پایه از تبدیل فوریه
۶	۱.۴.۱ تبدیل فوریه
۱۰	۵.۱ تبدیل موجک پیوسته (CWT)
۱۰	۱.۵.۱ مقیاس
۱۳	۲ مروری بر روش‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل
۱۴	۱.۲ روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی
۱۴	۱.۱.۲ روش‌های عددی برای مسائل مقدار اولیه
۱۸	۲.۱.۲ روش‌های عددی برای مسائل مقدار مرزی
۲۲	۲.۲ روش تفاضل متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی
۲۵	۳ آنالیز موجک
۲۵	۱.۳ تبدیلات موجک
۲۷	۱.۱.۳ تبدیلات موجک پیوسته و معکوس آن
۳۰	۲.۱.۳ تبدیلات موجک گسسته
۳۰	۳.۱.۳ سری موجک
۳۲	۲.۳ برتری‌های نظریه موجک

۳۲	.....	۳.۳	مقایسه تبدیل موجک با تبدیل فوریه
۳۵		<b>۴</b>	<b>موجک هار</b>
۳۶	.....	۱.۴	موجک‌های هار
۳۶	.....	۱.۱.۴	تابع مقیاس هار
۳۶	.....	۲.۱.۴	خواص اساسی تابع مقیاس هار
۴۱	.....	۲.۴	ویژگی‌های موجک هار
۴۲	.....	۳.۴	روش هم‌محلی موجک
۴۲	.....	۱.۳.۴	روش هم‌محلی
۴۳	.....	۴.۴	تبدیل موجک هار
۴۵	.....	۵.۴	تقریب تابع
۴۶	.....	۶.۴	تجزیه و تحلیل همگرایی موجک هار
۴۷	.....	۷.۴	انتگرال‌گیری از موجک هار
۴۸	.....	۸.۴	ماتریس عملیاتی ضربی موجک هار
۵۳		<b>۵</b>	<b>روش‌های موجک برای معادلات دیفرانسیل</b>
۵۳	.....	۱.۵	روش حل برای معادلات دیفرانسیل
۵۵	.....	۲.۵	تبدیل موجک هار برای معادلات دیفرانسیل معمولی خطی
۷۸	.....	۳.۵	روش موجک هار برای معادلات دیفرانسیل جزئی خطی
۹۰	.....	۴.۵	نتیجه‌گیری
۹۳		<b>۶</b>	<b>بررسی روش‌های مقایسه‌ای از موجک هار، با استفاده از مشتقات جزئی</b>
۹۴	.....	۱.۶	روش موجک هار
۹۷	.....	۲.۶	تقریب توابع
۹۸	.....	۳.۶	روش اشمیت
۹۸	.....	۴.۶	روش میلز نیکولسون
۹۹	.....	۵.۶	روش دو فورت فرانکل
۱۰۰	.....	۶.۶	مثال‌های عددی
۱۰۳	.....	۱.۶.۶	نتیجه‌گیری
۱۰۵			<b>مراجع</b>



# فهرست تصاویر

۳	..... موجک هار	۱.۱
۳	..... موجک مادر دابیشز	۲.۱
۶	..... نمونه‌ای از یک سیگنال غیرایستا	۳.۱
۸	..... سیگنال ایستا دارای چهار جزء فرکانسی ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز	۴.۱
۸	..... تبدیل فوریه سیگنال شکل ۴.۱	۵.۱
۹	..... سیگنال غیرایستا دارای چهار جزء فرکانسی ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز	۶.۱
۹	..... تبدیل فوریه سیگنال شکل ۶.۱	۷.۱
۱۱	..... مقیاس‌های مختلف یک تابع کسینوسی	۸.۱
۲۸	..... نمودرای از موجک کلاه مکزیکی	۱.۳
۲۹	.....	۲.۳
۳۶	..... نمودار تابع مقیاس هار	۱.۴
۳۷	..... نمودار عنصر معمولی	۲.۴
۳۷	..... طرح $f$ ، در مثال ۱.۱.۴	۳.۴
۳۸	.....	۴.۴
۳۸	.....	۵.۴
۳۹	..... $\phi(x - j)$ و $\phi(x - k)$ دارای تکیه‌گاه مجزا هستند.	۶.۴
۴۰	..... موجک هار $\psi(x)$	۷.۴
۴۰	..... نمودار موجک مادر	۸.۴
۴۵	..... هشت تابع هار اولیه	۹.۴
۵۷	..... جواب‌های عددی و دقیق مثال ۱.۲.۵	۱.۵
۵۸	..... خطا در جواب موجک مثال ۱.۲.۵	۲.۵
۶۰	..... جواب‌های عددی و دقیق (جواب هار و رانگ کوتای مرتبه ۴)	۳.۵
۶۱	..... خطای روش موجک هار و رانگ کوتای مرتبه‌ی ۴ برای مثال ۲.۲.۵	۴.۵
۶۲	..... مقایسه بین خطای نسبی ماکزیمم و خطای مطلق ماکزیمم در مثال ۲.۲.۵	۵.۵

۶۵	.....	۳.۲.۵	مثال	دقیق	و	عددی	و	جواب‌های	۶.۵
۶۶	.....	۳.۲.۵	مثال	دستگاه	مثال	۴	برای	خطای	۷.۵
۷۲	.....	۴.۲.۵	مثال	دقیق	و	جواب‌های	۸.۵		
۷۳	.....	۴.۲.۵	مثال	هار	نمودار	خطای	۹.۵		
۷۳	.....	۴.۲.۵	مثال	در	مقایسه	بین	خطای	نسبی	۱۰.۵
۷۵	.....			خطای	مطلق	ماکزیمم	و	خطای	۱۱.۵
۷۶	.....	۵.۲.۵	مثال	خطا	در	۱۲.۵			
۸۴	.....	$t = 0.1$		در	موج	شبه	معادله	برای	۱۳.۵
۸۵	.....	$t = 0.1$		در	موج	شبه	معادله	برای	۱۴.۵
۸۶	.....	$t = 0.2$		در	موج	شبه	معادله	برای	۱۵.۵
۱۰۳	.....			برای	نقاط	مختلف	$t$	مقایسه	۱.۶
۱۰۴	.....			برای	نقاط	مختلف	$t$	مقایسه	۲.۶
۱۰۴	.....			برای	نقاط	مختلف	$t$	مقایسه	۳.۶

# فهرست جداول

۱۶	نتایج عددی روش اویلر	۱.۲
۱۷	نتایج روش‌های تیلور مرتبه یک و مرتبه چهار	۲.۲
۱۸	نتایج RK2 و RK4	۳.۲
۲۰	نتایج پرتابی خطی	۴.۲
۲۱	نتایج روش تفاضل متناهی	۵.۲
۲۳	نتیجه روش تفاضل متناهی برای معادله شبه موج	۶.۲
۴۵	محاسبات اندیس برای تابع پایه‌ای هار	۱.۴
۵۸	جواب‌های عددی مثال ۱.۲.۵	۱.۵
۶۰	روش موجک هار و رانگ کوتای مرتبه ۴، برای مثال ۲.۲.۵	۲.۵
۶۱	خطای روش موجک هار و رانگ کوتای مرتبه ۴ برای مثال (۲.۵)	۳.۵
۶۲	همگرایی موجک هار برای مسئله مقدار اولیه	۴.۵
۶۴	جواب عددی مثال ۳.۲.۵	۵.۵
۶۵	خطای روش موجک هار و رانگ کوتای مرتبه ۴ برای دستگاه مثال ۳.۲.۵	۶.۵
۷۲	جواب‌های عددی مثال ۴.۲.۵	۷.۵
۷۳	همگرایی موجک هار برای مسئله مقدار مرزی	۸.۵
۷۶	جواب عددی مثال ۵.۲.۵	۹.۵
۷۷	خطای مطلق ماکزیمم معادله	۱۱.۵
۷۷	خطا در مثال ۵.۲.۵	۱۰.۵
۸۱	نتایج عددی معادله کلین-گوردن خطی	۱۲.۵
۸۱	خطای مطلق ماکزیمم معادله در زمان‌های متفاوت	۱۳.۵
۸۵	نتایج عددی معادله شبه موج در $t = 0.1$	۱۴.۵
۸۶	نتایج عددی معادله شبه موج در $t = 0.1$	۱۵.۵
۸۷	نتایج عددی معادله شبه موج در $t = 0.2$	۱۶.۵
۸۷	حداکثر خطای مطلق معادله در زمان‌های مختلف	۱۷.۵
۸۹	نتایج عددی معادله انتشار در زمان $t = 0.1$	۱۸.۵

---

---

۹۰	نتایج عددی معادله انتشار در زمان $t = ۱\%$ . . . . .	۱۹.۵
۱۰۰	مقایسه نتایج عددی مثال ۱.۶.۶ برای $t = ۱\%$ . . . . .	۱.۶
۱۰۱	مقایسه خطای مطلق مثال ۱.۶.۶ برای $t = ۱\%$ . . . . .	۲.۶
۱۰۱	مقایسه نتایج عددی مثال ۲.۶.۶ برای $t = ۱\%$ . . . . .	۳.۶
۱۰۲	مقایسه خطای مطلق مثال ۲.۶.۶ برای $t = ۱\%$ . . . . .	۴.۶
۱۰۲	مقایسه نتایج عددی مثال ۳.۶.۶ برای $t = ۱\%$ . . . . .	۵.۶
۱۰۳	مقایسه خطای مطلق مثال ۳.۶.۶ برای $t = ۱\%$ . . . . .	۶.۶

# فصل ۱

## مقدمه

### ۱.۱ مروری کوتاه

تجزیه و تحلیل موجک<sup>۱</sup> یک روش جدید حاضر برای حل مسائل مختلف در ریاضیات، فیزیک و مهندسی است [۷]. موجک‌ها توابعی هستند که می‌توانند برای نمایش یک تابع نظیر جواب معادلات دیفرانسیل معمولی<sup>۲</sup> و معادلات دیفرانسیل جزئی<sup>۳</sup> استفاده شوند.

تحلیل تجزیه موجک اغلب در پردازش سیگنال موجک استفاده شده است. این در فشرده‌سازی سیگنال و همچنین در شناسایی سیگنال نیز به کار می‌رود. تبدیل موجک یک تابع، مانند تبدیل فوریه، یک ابزار قدرتمند برای تجزیه و تحلیل مولفه‌های پدیده ایستا است. با این حال، تبدیل موجک دارای مزیت توانایی تجزیه و تحلیل پدیده ناپایداری است که در آن تابع مقدار حقیقی یا مقدار مختلط ریاضی تنها تابعی است که به‌طور گسترده در زمینه‌های مختلف کاربردی، عمدتاً پزشکی، مخابرات، نرم‌افزارهای کامپیوتری و کاربردهای مربوط به انسان مورد استفاده قرار گرفته شده است. در حالت خاص، موجک می‌تواند در اسکن برای تشخیص بیماری به منظور کمک به پزشکان برای اجرای دقیق کار خود در این زمینه حساس انسانی یافت شود. همچنین، می‌تواند به رمزگذاری سیگنال‌های صدا و فیلم در زمینه مخابرات کمک

---

<sup>۱</sup>Wavelet

<sup>۲</sup>Ordinary Differential Equations

<sup>۳</sup>Partial Differential Equations

کند. کاربردهای مفید دیگری وجود دارد که می‌تواند به‌طور موثر به سازمان‌های اطلاعاتی برای تشخیص جزئیات دقیق بدن انسان برای اهداف امنیتی و در حالت فعالیت‌های تروریستی، سقوط هواپیما، خرابکاری کشتی و دیگر استفاده‌های امنیتی انسانی کمک کند. به‌عنوان مثال، تحقیقات اداری فدرال (FBI) ایالات متحده از کاربرد موجک برای شناسایی و تایید انگشت‌های میلیون‌ها انسان استفاده می‌کند. در آینده، چنین انتظار می‌رود که تکنولوژی موجک ریاضی، هزاران برنامه کاربردی را پوشش خواهد داد و این به‌طور اساسی بر رفاه انسانی و بهداشت و درمان مشروط به رسیدن به بهترین نتیجه ممکن را دارد. [۷، ۸، ۹، ۳۰]

## ۲.۱ تاریخچه مختصر از توسعه موجک‌ها در حل معادلات دیفرانسیل

کلمه "موجک" با توجه به مورلت<sup>۴</sup> و گراسمن<sup>۵</sup>، در اوایل دهه ۱۹۸۰، تحت تاثیر ایده‌های ریاضیات نظری و کاربردی آنها از کلمه فرانسوی "ondelete" به معنای موج کوچک است. بعدها با ترجمه انگلیسی "onde" به "wave" تغییر یافت و نام موجک را به خود اختصاص داد [۷]. موجک‌ها به‌طور مستقل در زمینه‌های ریاضیات، فیزیک کوانتومی، مهندسی برق و تکنولوژی پزشکی توسعه یافته است.

شاخه اصلی ریاضیات که منجر به موجک‌ها شده است، توسط جوزف فوریه<sup>۶</sup> در سال ۱۸۰۷ با نظریه‌های تحلیل فرکانسی او آغاز شد. تلاش‌های فوریه با تجزیه و تحلیل فرکانس منجر به تجزیه و تحلیل معروف فوریه شد. کار فوریه بر اساس این حقیقت است که توابع متناوب می‌توانند به عنوان یک ترکیب خطی از سینوس‌ها و کسینوس‌ها نمایش داده شوند [۶]. سهم کمک دیگر فوریه، تبدیل فوریه می‌باشد. این تبدیل، یک تابع  $f$  را از طریق دامنه زمانی خود به دامنه فرکانس خود تبدیل می‌کند [۲۸].

ارتباط شناخته شده بعدی برای موجک به سبب آلفرد هار<sup>۷</sup> در سال ۱۹۱۰ است. این موجک در پیوست پایان نامه او برای دستیابی به درجه دکترای خود نوشته بود، ظاهر شده است. سهم و کمک هار برای موجک بسیار واضح است.

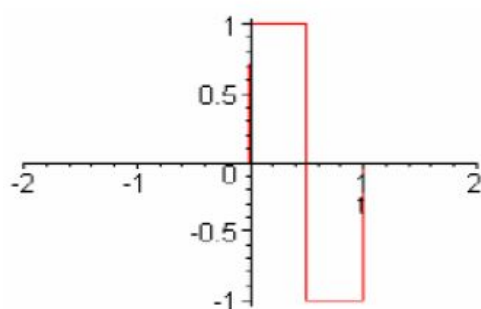
موجک هار معروف، ساده‌ترین و قدیمی‌ترین خانواده موجک است. در سال ۱۹۱۰، آلفرد هار تابعی را معرفی کرد که یک جفت پالس مستطیلی را نمایش می‌دهد. از این رو، تعمیم‌های متنوعی پیشنهاد شده است [۹]. شکل ۱.۱ را مشاهده کنید.

<sup>۴</sup> Morlet

<sup>۵</sup> Grossman

<sup>۶</sup> Josef Fourier

<sup>۷</sup> Alfred Haar

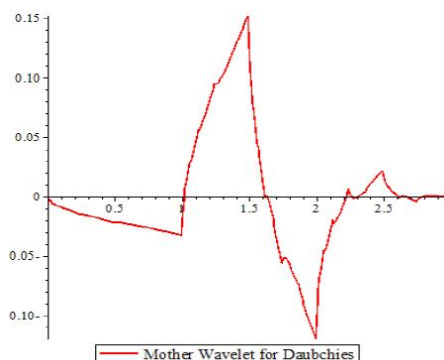


شکل ۱.۱: موجک هار

پس از شراکت و سهم هار در موجک‌ها، تا حدود سال ۱۹۵۴ تنها یک بار از زمان در یک تحقیق درباره توابع استفاده و بهره برده شد و آن هم هنگامی بود که پاول لوی<sup>۸</sup> از موجک‌ها در تحقیق خود روی حرکت براونی استفاده کرد. او کشف کرد که تابع پایه‌ای با مقیاس‌های مختلف که توسط هار تولید شده است، (یعنی موجک هار) یک پایه بهتر نسبت به توابع پایه‌ای فوریه است. برخلاف، توابع پایه‌ای هار که می‌توانند به بازه‌های مختلفی شکسته شوند، مانند بازه از ۰ تا ۱ یا بازه از  $\frac{1}{2}$  تا  $\frac{3}{2}$  و  $\frac{1}{4}$  تا ۱، توابع پایه‌ای فوریه تنها دارای یک بازه هستند. بنابراین، موجک هار می‌تواند در مدل‌سازی بازه یک تابع بسیار دقیق‌تر باشد.

در سال ۱۹۷۵، جین مورلت<sup>۹</sup> اولین محققی بود که از مفهوم ”موجک“ برای توصیف توابع خود استفاده کرد [۸]. به ویژه، آن‌ها موجک‌های شیب ثابت نامیده می‌شدند.

در دهه ۱۹۸۰، اینگراید دابیشز<sup>۱۰</sup> موجک هار را تعمیم داد. در حقیقت، موجک هار، موجک دابیشز مرتبه یک است. شکل ۲.۱ را مشاهده کنید. روش‌های موجک برای حل معادلات دیفرانسیل از آغاز دهه ۱۹۹۰ اعمال شدند [۹].



شکل ۲.۱: موجک مادر دابیشز

<sup>۸</sup>Paul Levy

<sup>۹</sup>Jean Morlet

<sup>۱۰</sup>Ingrid Daubechies

در سال ۱۹۹۷، چن<sup>۱۱</sup> و هسیائو<sup>۱۲</sup> یک روش موجک را برای حل معادلات دیفرانسیل معرفی کردند. در این روش بالاترین مرتبه مشتق در معادله دیفرانسیل را بسط داده و سپس از بسط به منظور رسیدن به جواب انتگرال گرفته می‌شود. برای ساده‌سازی کار، آن‌ها ماتریس عملیاتی‌ها را برای انتگرال‌های بردار تابع‌ها معرفی کردند و اعمال، را در دستگاه دینامیکی برای تجزیه و تحلیل‌ها قرار دادند. از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۴، لپیک<sup>۱۳</sup> [۱۵، ۱۶] یک کاربرد از موجک‌ها را برای جواب معادلات انتگرال خطی و جواب عددی معادلات دیفرانسیل با استفاده از موجک‌های هار ارائه داد، از این‌رو، او روش‌های موجک‌ها را برای حل معادلات تکاملی و معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی معرفی کرد. لپیک، کاربرد موجک‌های هار غیرهمگن را برای حل معادلات انتگرال و دیفرانسیل مرتبه بالا عرضه کرد. او روش موجک‌ها را برای معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر ارائه داد. در سال‌های ۲۰۰۹ تا ۲۰۱۴، هاریهاران<sup>۱۴</sup> و همکارانش [۱۳، ۱۷]، جواب چندین معادله دیفرانسیل را در برنامه‌های کاربردی پیدا کردند. در میان آنها، معادله انتشار گرما، انتشار نور، معادله شعاع با طول متناهی، معادله کلین-گوردن خطی و غیرخطی، معادله گوردن سینوسی و برخی از معادلات سهموی غیرخطی توسط روش موجک‌ها حل شده است. در سال ۲۰۰۷، کاسترو<sup>۱۵</sup> [۱۶] یک روش هم‌محلی موجک را برای تجزیه و تحلیل استاتیک صفحات فشرده با استفاده از یک نظریه عقلانی لایه معرفی کرد. در سال ۲۰۱۰، فضل-ای-هاگ<sup>۱۶</sup> [۲۱]، یک روش موجک‌ها را برای حل مسائل مقدار مرزی از مرتبه ۸ معرفی کرد. از سال‌های ۲۰۱۰ تا ۲۰۱۳، عمران عزیز<sup>۱۷</sup> [۲۳]، یک روش هم‌محلی موجک را برای جواب‌های عددی بیضوی ارائه داد. واضح است که در ۱۰ سال گذشته موضوع روش‌های موجک محققان زیادی را مجذوب خود ساخته است. و این به سبب توانایی آن در حل بسیاری از مسائل است.

## ۳.۱ فضای ضرب داخلی

**تعریف ۱.۳.۱.** یک ضرب داخلی<sup>۱۸</sup> روی یک فضای برداری مختلط  $V$  تابع  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow C$  باشد که در خواص زیر صدق کند:

$$۱. \quad \forall v \in V \text{ به طوری که } v \neq 0 \text{ داریم: } \langle v, v \rangle > 0$$

$$۲. \quad \overline{\langle v, w \rangle} = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in V$$

<sup>۱۱</sup>Chen

<sup>۱۲</sup>Hsiao

<sup>۱۳</sup>Lepik

<sup>۱۴</sup>Hariharan

<sup>۱۵</sup>Castro

<sup>۱۶</sup>Fazal-I-Haq

<sup>۱۷</sup>Imran Aziz

<sup>۱۸</sup>Inner product



$$\langle cv, w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V, \quad \forall c \in C \quad .۳$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall v, w, u \in V \quad .۴$$

یک فضای برداری با یک ضرب داخلی یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

### ۱.۳.۱ فضای $L^2$

برای یک بازه  $a \leq x \leq b$  فضای  $L^2([a, b])$  مجموعه‌ی همه توابع مربع انتگرال‌پذیر روی  $a \leq x \leq b$  است، به عبارت دیگر:

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow C \mid \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

فضای  $L^2([a, b])$  از بعد نامتناهی است. برای مثال اگر  $a = 0$  و  $b = 1$  در نظر گرفته شوند، آنگاه مجموعه توابع  $1, t, t^2, \dots$  مستقل خطی است و به  $L^2([a, b])$  تعلق دارد. تابع  $f(t) = -\frac{1}{t}$  مثالی از یک تابع است که به  $L^2([a, b])$  تعلق ندارد، چون  $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt = \infty$

**تعریف ۲.۳.۱.** ضرب داخلی روی  $L^2([a, b])$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt, \quad \forall f, g \in L^2[a, b]$$

### ۲.۳.۱ تعامد

فرض کنید  $V$  یک فضای ضرب داخلی باشد:

- بردارهای  $x$  و  $y$  متعامد گفته می‌شود، هرگاه:  $\langle x, y \rangle = 0$ .
- گردایه بردارهای  $e_1, e_2, \dots, e_N$ ، اگر هر  $e_i$  طول واحد داشته باشد. یعنی  $\|e_i\| = 1$  و برای  $i \neq j$ ،  $e_i$  و  $e_j$  بر هم عمود باشند.
- دو زیر فضای  $V_1$  و  $V_2$  از  $V$  متعامد گفته می‌شوند اگر برای هر بردار در  $V_1$  بر هر یک از بردارهای  $V_2$  عمود باشد.

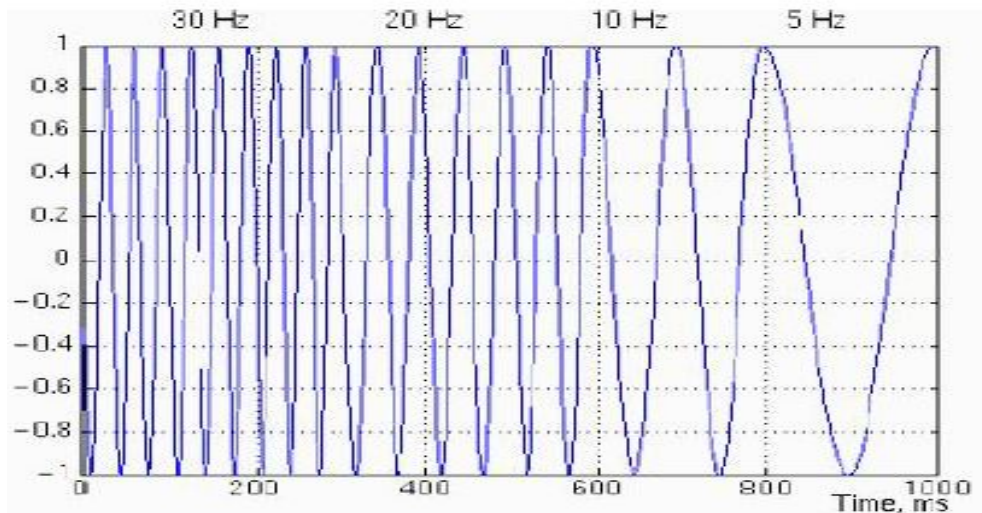
**مثال ۱.۳.۱.** توابع  $f(t) = \sin(t)$  و  $g(t) = \cos(t)$  در  $L^2[-\pi, \pi]$  متعامدند زیرا:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) \cos(t) dt = 0$$

چون  $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(t))^2 dt = \pi$  و  $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(t))^2 dt = \pi$ ، توابع  $\frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}$  و  $\frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}$  در  $L^2[-\pi, \pi]$  متعامد یک‌ه‌اند.

## ۴.۱ مفاهیم پایه از تبدیل فوریه

**تعریف ۱.۴.۱.** سیگنال غیرایستا<sup>۱۹</sup>، سیگنالی است که مشخصات آن در طول زمان (مکان) تغییر می‌کند. ابزار کلاسیک آنالیز سیگنال، تبدیل فوریه<sup>۲۰</sup> است. این تبدیل در مواجهه با سیگنال‌های غیرایستا ضعیف عمل می‌کند.



شکل ۳.۱: نمونه‌ای از یک سیگنال غیرایستا

### ۱.۴.۱ تبدیل فوریه

در قرن ۱۹، ریاضی‌دان فرانسوی جوزف فوریه، نشان داد که هر تابع تناوبی می‌تواند به صورت مجموع توابع نمایی مختلط نمایش داده شود. سال‌ها بعد، ایده او به سیگنال‌های تناوبی و غیرتناوبی ناپیوسته تعمیم داده شد. در سال ۱۹۶۵، الگوریتم (FFT)<sup>۲۱</sup> ارائه شد که موجبات معروفیت بیشتر تبدیل فوریه را فراهم کرد. طرز کار تبدیل فوریه به شکل زیر است که: تبدیل فوریه هر سیگنال را به یک سری توابع نمایی مختلط با فرکانس‌های متفاوت تجزیه می‌کند. طرز کار آن با دو معادله زیر تعریف می‌شود:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-2j\pi ft} \quad (1.1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{-2j\pi ft} \quad (2.1)$$

<sup>۱۹</sup>Non-stationary

<sup>۲۰</sup>Fourier Transform

<sup>۲۱</sup>Fast Fourier Transform

در معادله فوق،  $t$  نشان دهنده زمان،  $f$  فرکانس،  $x$  نشان دهنده سیگنال مورد نظر و  $X$  تبدیل یافته آن است. این قرارداد برای متمایز کردن دو نمایش مختلف سیگنال استفاده می‌شود. معادله (۱.۱) نشان دهنده تبدیل فوریه  $x(t)$  و معادله (۲.۱) عکس تبدیل فوریه  $X(f)$ ، یعنی  $x(t)$  است. حال معادله (۱.۱) را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم: سیگنال  $x(t)$ ، در یک عبارت نمایی در یک فرکانس خاص  $f$  ضرب و سپس مجموع آن برای تمام زمان‌ها محاسبه شده است (مطلب مهم در این‌جا عبارت برای تمام زمان‌هاست که در ادامه شرح داده می‌شود). توجه کنید که عبارت نمایی در معادله (۱.۱) می‌تواند به شکل زیر هم نوشته شود:

$$\cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft) \quad (3.1)$$

که دارای یک قسمت حقیقی از کسینوس فرکانس  $f$  و یک قسمت موهومی از سینوس فرکانس  $f$  است. بنابراین کاری که در واقع صورت می‌گیرد، ضرب سیگنال اصلی در یک عبارت مختلط است که شامل سینوس‌ها و کسینوس‌های فرکانس  $f$  می‌باشد. سپس این حاصل ضرب‌ها با هم جمع می‌شوند. اگر حاصل جمع مقدار بزرگی بود، می‌توان گفت که سیگنال  $x(t)$ ، در فرکانس  $f$  دارای یک جزء طیفی غالب است. بدین معنا که سیگنال  $f$  قسمت عمده‌ای از سیگنال را تشکیل داده است. اگر این رابطه صفر شد، یعنی سیگنال اصلاً دارای فرکانس  $f$  نیست. سیگنال در عبارت سینوسی فرکانس  $f$  ضرب می‌شود. اگر سیگنال مقدار بزرگی در فرکانس  $f$  باشد، این جزء با عبارت سینوسی هم‌زمان خواهند بود و حاصل ضرب آن‌ها هم مقدار نسبتاً بزرگی را بدست می‌دهد. این امر نشان دهنده این است که سیگنال  $x$  دارای جزء فرکانسی عمده‌ای در  $f$  می‌باشد.

اگر سیگنال  $x(t)$  در فرکانس  $f$  دارای جزء عمده‌ای نباشد، حاصل ضرب مقدار نسبتاً کوچکی خواهد بود.

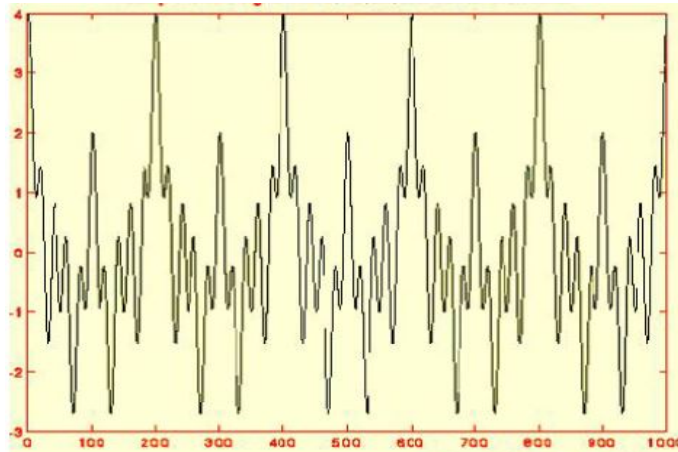
توجه کنید که مجموع مورد نظر در معادله (۱.۱) بر روی زمان محاسبه می‌شود. سمت چپ این عبارت تابعی از فرکانس است. بنابراین، این حاصل جمع به ازای تک‌تک مقادیر  $f$  باید محاسبه شود.

**تذکره ۱.۴.۱.** اطلاعات ارائه شده در جمع ذکر شده، مربوط به تمام زمان‌ها از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت می‌باشد. یعنی در هر زمانی فرکانس  $f$  اتفاق افتاده باشد تاثیر یکسانی در حاصل جمع دارد. این خصوصیت نشان دهنده این است که چرا تبدیل فوریه برای سیگنال‌هایی که در طول زمان تغییر میکنند (سیگنال‌های غیرایستا)، مناسب نیست.

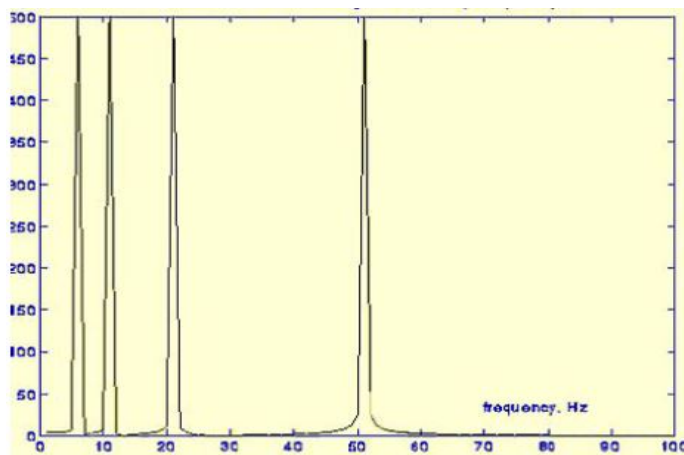
توجه کنید که تبدیل فوریه می‌گوید که آیا یک جزء فرکانسی خاص در سیگنال وجود دارد یا خیر. این اطلاعات مستقل از زمان وقوع این جزء است. این مهم است که قبل پردازش یک سیگنال با تبدیل فوریه بدانیم که آیا سیگنال ایستا هست یا خیر. شکل ۴.۱ نشان دهنده سیگنال زیر است:

$$x(t) = \cos(2\pi 5t) + \cos(2\pi 10t) + \cos(2\pi 20t) + \cos(2\pi 50t) \quad (4.1)$$

این سیگنال دارای چهار جز فرکانسی ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز است که در تمام زمان‌ها اتفاق افتاده‌اند. شکل ۵.۱ تبدیل فوریه این سیگنال است. محور فرکانس در این شکل برای مقادیر محدودی نشان داده شده است. برای تبدیل فوریه پیوسته این تابع تا بی‌نهایت ادامه دارد. در واقع ما در اینجا تبدیل فوریه گسسته را محاسبه کرده‌ایم که محور فرکانس آن (حداقل) تا دو برابر فرکانس‌های نمونه سیگنال بالا می‌رود و سیگنال منتقل شده متقارن است. به چهار قله موجود در شکل ۵.۱ که نشان‌دهنده چهار فرکانس مختلف است، توجه کنید.



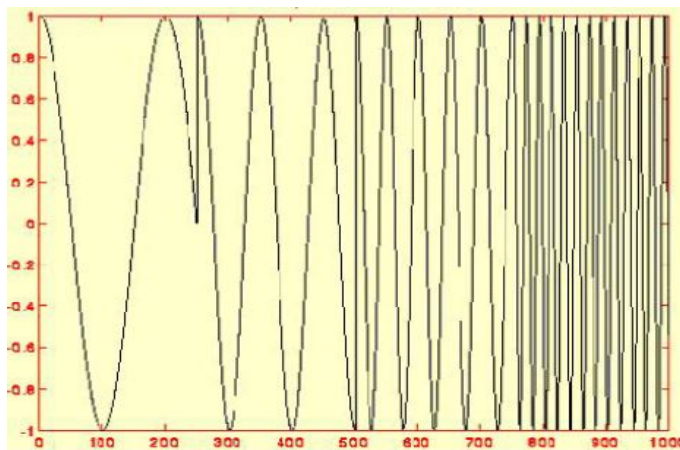
شکل ۴.۱: سیگنال ایستا دارای چهار جزء فرکانسی ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز



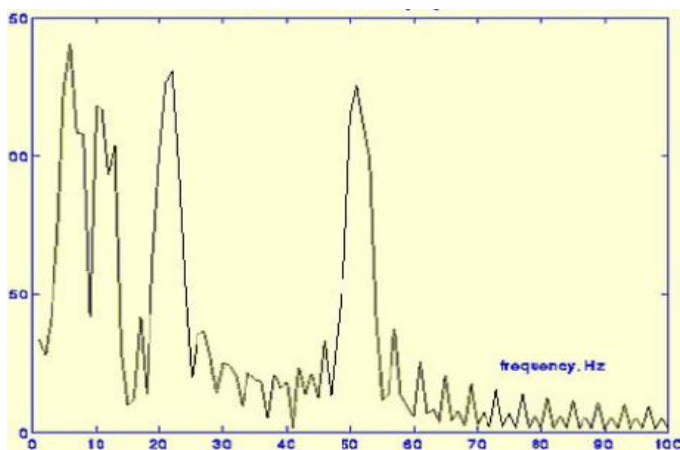
شکل ۵.۱: تبدیل فوریه سیگنال شکل ۴.۱

حال به سیگنال شکل ۶.۱ نگاه کنید. این سیگنال نیز یک سیگنال سینوسوئید است و همان چهار فرکانس را دارد. لیکن این اجزاء در زمان‌های متفاوتی رخ داده‌اند. شکل ۷.۱ تبدیل فوریه سیگنال را نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رود، تبدیل این سیگنال نیز (تقریباً) شبیه سیگنال قبلی است. به چهار

قله‌ای که در نقاط ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز وجود دارند، توجه کنید. نویز مانده‌هایی که در بین دو قله وجود دارد، نشان‌دهنده آن است که این فرکانس‌ها هم در سیگنال وجود دارد و از آن‌جا که اجزای عمده‌ای در طیف سیگنال مورد نظر نیستند، دارای مقادیر کوچکی می‌باشند و دلیل پیدایش آن‌ها هم تغییرات ناگهانی بین فرکانس‌های مختلف است. به‌خصوص توجه کنید که چگونه در بعد زمان در اطراف ۲۵ میلی ثانیه تغییر کرده است (با استفاده از فیلترهای مناسبی می‌توان این نویزها را از بین برد، که البته این مسئله به موضوع بحث ما مربوط نیست).



شکل ۶.۱: سیگنال غیرایستا دارای چهار جزء فرکانسی ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ هرتز



شکل ۷.۱: تبدیل فوریه سیگنال شکل ۶.۱

تا این‌جا باید با مفاهیم پایه تبدیل فوریه آشنا شده باشید. همانطور که در مثال فوق متوجه شدید، تبدیل فوریه نمی‌تواند به‌خوبی دو سیگنال فوق را از هم تمیز دهد. تبدیل فوریه هر دو سیگنال فوق تقریباً یکی هستند چون شامل اجزای فرکانسی یکسانی می‌باشند. بنابراین تبدیل فوریه نمی‌تواند ابزار مناسبی برای تحلیل سیگنال‌های غیرایستا، که در طول زمان طیف آن‌ها

تغییر می‌کند، باشد. البته در مواقعی که زمان رخ دادن یک جز فرکانسی خاص مهم نباشد و فقط وجود فرکانس‌های مختلف مدنظر باشد، تبدیل فوریه می‌تواند مفید باشد.

**تعریف ۲.۴.۱.** تابع تناوبی با دوره تناوب  $2\pi$  را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (5.1)$$

که در آن ضرایب  $a_0$ ،  $a_k$  و  $b_k$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

سری (۵.۱) سری فوریه نامیده می‌شود.

## ۵.۱ تبدیل موجک پیوسته (CWT)

تبدیل موجک پیوسته<sup>۲۲</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CWT_x^\psi = \Psi_x^\psi = (\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int x(t) \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \quad (6.1)$$

همان‌طور که در معادله فوق دیده می‌شود، سیگنال تبدیل شده، تابعی است از دو متغیر  $\tau$  و  $s$ ، که به ترتیب پارامترهای انتقال و مقیاس هستند.  $\psi(t)$  تابع تبدیل است و موجک مادر نامیده می‌شود. این نام به دلیل دو خصوصیت مهم تحلیل موجک که در ادامه توضیح داده شده، تخصیص یافته است.

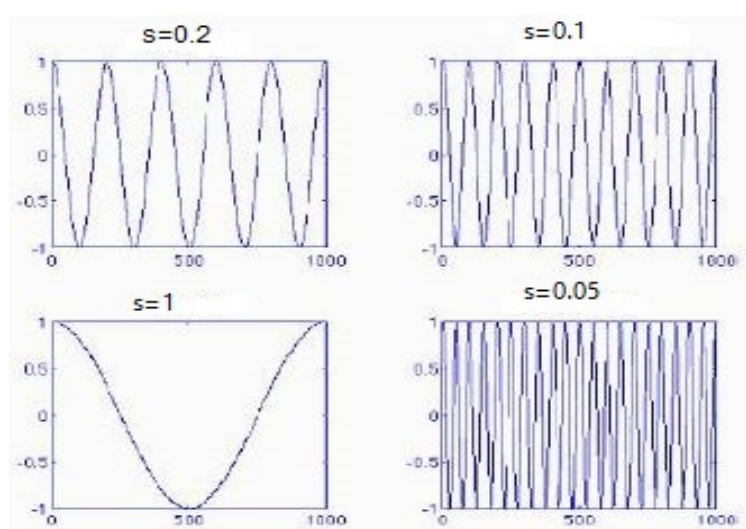
عبارت موجک یعنی موج کوچک. کوچکی مرتبط با این معنی است که تابع (بلوک یا پنجره) دارای طول محدود (تکیه گاه فشرده) است. موج نیز بدین معنی است که تابع دارای شکل نوسان است. عبارت مادر دلالت بر این دارد که توابع با مکان‌ها و پشتیبان‌های متفاوت که فرآیند تبدیل استفاده می‌شوند، حاصل یک تابع اصلی یا موجک مادر هستند. به بیان دیگر، موجک مادر یک نمونه اولیه برای ساخت توابع پنجره است. عبارت انتقال به همان معنایی هست که در تبدیل فوریه بود و به فرآیندی که پنجره در طول سیگنال تغییر مکان می‌دهد، مربوط می‌شود. بدیهی است که این عبارت، بر اطلاعات زمانی در فضای تبدیل دلالت دارد. در این حالت بر خلاف تبدیل فوریه، پارامتر فرکانس نداریم، در عوض پارامتری با نام مقیاس وجود دارد که در ادامه با جزئیات بیشتر توضیح داده می‌شود.

### ۱.۵.۱ مقیاس

این پارامتر در تجزیه و تحلیل موجک، مشابه مقیاسی است که در نقشه‌ها استفاده می‌شود. همانند نقشه، مقیاس‌های بالا نشان دهنده یک دید کلی فاقد جزئیات (از سیگنال) و مقیاس‌های

<sup>۲۲</sup>Continuous Wavelet Transforms

پایین نشان دهنده یک دید با تفضیل بیشتر هستند. به طور مشابه، در مورد فرکانس های پایین (مقیاس های بالا) نمایانگر اطلاعات کلی یک سیگنال (که معمولا تمام محدوده یک سیگنال را می پوشانند)، هستند در حالی که فرکانس های بالا (مقیاس های پایین) نمایانگر اطلاعات جزئی یک الگوی پنهان در سیگنال (که معمولا مربوط به یک زمان نسبتا کوتاه می شود) می باشند. سیگنال های کسینوسی مربوط به مقیاس های مختلف در شکل زیر آورده شده است:



شکل ۸.۱: مقیاس های مختلف یک تابع کسینوسی

خوشبختانه در کاربردهای علمی، مقیاس های پایین (فرکانس های بالا) تمام دوره سیگنال را برخلاف آنچه در شکل نشان داده شده، در بر نمی گیرند و در طول زمان به صورت انفجاری ظاهر می شوند در حالی که مقیاس های بالا (فرکانس های پایین) معمولا در تمام دوره سیگنال تداوم دارند.

مقیاس گذاری به عنوان یک عملیات ریاضی، ممکن است یک سیگنال را فشرده یا باز کند. مقیاس های بزرگ تر نشان دهنده سیگنال های باز شده و مقیاس های کوچک تر نشان دهنده سیگنال های فشرده شده هستند. تمام سیگنال های شکل ۸.۱ از یک کسینوسی مشابه حاصل شده اند. به عبارت دیگر نسخه های باز شده یا فشرده شده یک کسینوس هستند. در شکل ۸.۱،  $s = 0.05$  کوچک ترین و  $s = 1$  بزرگ ترین مقیاس است.

اگر  $f(t)$  یک تابع ریاضی باشد، آنگاه  $f(s_i)$  منقبض شده (فشرده شده)  $f(t)$  است، اگر  $s > 1$  و یک نسخه باز شده است، در صورتی که داشته باشیم  $s < 1$ .

با این حال در تعریف تبدیل موجک، مقیاس در مخرج استفاده شده، یعنی عکس عبارت فوق برقرار است،  $s > 1$  سیگنال را باز و  $s < 1$  سیگنال را فشرده می کند.





## فصل ۲

# مروری بر روش‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل

یک معادله دیفرانسیل، تابعی مجهول وابسته به مشتقات آن است. در مسائل کاربردی، توابع نشان‌دهنده کمیت و مشتقات آن‌ها، نشان‌دهنده میزان تغییرات هستند. معادلات دیفرانسیل نقش مهمی را در مدل‌سازی مسائل فیزیکی در علوم، مهندسی و اقتصاد ایفا می‌کنند. همچنین محدوده‌ای گسترده از پدیده‌های طبیعی نظیر صدا، الکترواستاتیک، الکترودینامیک، جریان سیال، الاستیک و مکانیک کوانتومی را توصیف می‌کنند. این پدیده‌های فیزیکی به ظاهر مجزا را می‌توان از منظر معادلات دیفرانسیل جزئی<sup>۱</sup> (PDEs) فرمول‌بندی کرد. در حالی که، روش‌های تحلیلی را می‌توان برای حل برخی از معادلات دیفرانسیل به کار برد، ولیکن بیشتر معادلات دیفرانسیل را نمی‌توان به روش تحلیلی محاسبه کرد. روش‌های عددی زمانی برای حل معادلات دیفرانسیل در نظر گرفته می‌شود که معادلات دیفرانسیل (معمولی یا جزئی) نتوانند به طور مستقیم توسط روش‌های تحلیلی حل شوند. برخی از روش‌های عددی موجود برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی عبارتند از: روش اویلر، روش‌های تیلور مرتبه بالاتر، روش‌های رونگه کوتا، روش‌های چندگامی، روش‌های پرتابی خطی<sup>۲</sup> و روش‌های تفاضل متناهی.

<sup>۱</sup>Partial Differential Equations

<sup>۲</sup>Shooting Methods

برخی از روش‌های عددی کلاسیکی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی عبارتند از: روش‌های دیفرانسیل متناهی، روش عنصر متناهی، روش تجزیه آدومیان (ADM) و روش‌های چند شبکه‌ای<sup>۳</sup>.

## ۱.۲ روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی

در این بخش، یک شرح مختصر درباره برخی از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی<sup>۴</sup> ارائه می‌دهیم. برای مسائل مقدار اولیه<sup>۵</sup> IVP روش‌های روش اویلر، روش‌های تیلور از مرتبه بالاتر و روش‌های رونگه کوتا را بررسی می‌کنیم. همچنین برای مسائل مقدار مرزی<sup>۶</sup> BVP روش‌های پرتابی خطی و روش‌های تفاضل متناهی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ۱.۱.۲ روش‌های عددی برای مسائل مقدار اولیه

مسئله مقدار اولیه زیر از مرتبه یک را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{du}{dx} = f(x, u), \quad a \leq x \leq b, \quad u(a) = \alpha. \quad (1.2)$$

در بخش‌های بعد سه روش عددی برای مسائل مقدار اولیه را بیان می‌کنیم.

#### روش اویلر

روش اویلر توسط فیزیک‌دان و ریاضی‌دان سویسی به نام لئونارد اویلر<sup>۷</sup> معرفی شده است. وی به اکتشافاتی مهم در زمینه‌هایی مانند حساب دیفرانسیل و انتگرال بی‌نهایت کوچک و نظریه گراف دست یافت و بسیاری از اصطلاحات ریاضیات مدرن را ارائه داد. روش اویلر، روشی ابتدایی و تکنیکی تقریبی برای حل مسائل مقدار اولیه محسوب می‌شود. هدف، به دست آوردن یک جواب تقریبی برای مسئله مقدار اولیه (۱.۲) است [۲۶، ۲۹]. ابتدا، جواب تقریبی در نقاط داده شده به دست می‌آید و سپس جواب تقریبی در نقاط دیگر بازه با درونیابی می‌تواند محاسبه شود.

در این روش ابتدا بازه  $[a, b]$  به  $N$  زیربازه به صورت:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

<sup>۳</sup>Multi gride

<sup>۴</sup>Ordinary Differential Equations

<sup>۵</sup>Initial Value Problems

<sup>۶</sup>Boundary Value Problems

<sup>۷</sup>Leonahard Euler

که در آن

$$h = \frac{b-a}{N} = x_{i+1} - x_i, \quad (3.2)$$

تقسیم می‌شود. سپس با استفاده از فرمول تفاضل پیشرو مرتبه اول برای  $u'$  داریم:

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2} u''(\xi) = f(x_i, u(x_i)) \quad (4.2)$$

با حذف جمله خطا  $-\frac{h}{2} u''(\xi)$  و در نظر گرفتن  $u_i = u(x_i)$  داریم:

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha, \\ u_{i+1} &= u_i + hf(x_i, u_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

این روش اویلر برای مسئله مقدار اولیه (۱.۲) است.

مثال ۱.۱.۲. از روش اویلر برای تقریب جواب مسئله مقدار اولیه زیر

$$u' = \frac{\sin(2x) - 2xu}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad u(1) = 2,$$

با جواب دقیق

$$u(x) = \frac{4 + \cos(2) - \cos(2x)}{2x^2},$$

و همراه با  $N = 10$  زیربازه استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{10}, \\ f(x, u) &= \frac{\sin(2x) - 2xu}{x^2}, \\ u_0 &= u(1) = 2, \\ u_{i+1} &= u_i + hf(x_i, u_i), \quad \forall i = 1, 2, \dots, 9. \end{aligned}$$

نتایج روش اویلر در جدول ۱.۲ ارائه شده است.

$i$	$x_i$	$u_i$
۰	۱/۰	۲/۰۰۰۰۰۰۰۰
۱	۱/۱	۱/۶۹۰۹۲۹۷
۲	۱/۲	۱/۴۵۰۳۰۵۹
۳	۱/۳	۱/۲۵۵۴۹۵۴
۴	۱/۴	۱/۰۹۲۸۴۵۳
۵	۱/۵	۰/۹۵۳۸۱۵۷
۶	۱/۶	۰/۸۳۲۹۱۲۳
۷	۱/۷	۰/۷۲۶۵۱۸۱
۸	۱/۸	۰/۶۳۲۲۰۸۱
۹	۱/۹	۰/۵۴۸۳۰۰۳
۱۰	۲/۰	۰/۴۷۳۶۳۵۵

جدول ۱.۲: نتایج عددی روش اویلر

### روش‌های تیلور مرتبه بالاتر برای حل مسائل مقدار اولیه

خطا در روش اویلر از مرتبه یک است. برای تقریب‌هایی با دقت بیشتر به روش‌هایی با خطاهای مرتبه بالاتر نیاز داریم. برای این منظور از جملات بیشتری در قضیه تیلور برای تقریب مشتق در یک مسئله مقدار اولیه استفاده می‌کنیم و نتیجه یک روش تیلور از مرتبه بالاتر است. روش اویلر، یک روش تیلور مرتبه یک است [۲۶، ۲۹].

روش تیلور مرتبه  $n$  - ام برای مسئله مقدار اولیه (۱.۲) به صورت زیر است:

$$u_0 = \alpha,$$

$$u_{i+1} = u_i + hT^{(n)}(x_i, u_i). \quad (6.2)$$

که در آن

$$T^{(n)}(x_i, u_i) = f(x_i, u_i) + \frac{h}{1} f'(x_i, u_i) + \dots + h^{(n-1)} f^{(n-1)}(x_i, u_i). \quad (7.2)$$

**مثال ۲.۱.۲.** مسئله مقدار اولیه داده شده در مثال ۱.۱.۲ را در نظر می‌گیریم، جدول ۲.۲، تقریب جواب را برای مسئله مقدار اولیه در مثال ۱.۱.۲ با استفاده از روش‌های تیلور مرتبه یک و مرتبه چهار را با  $N = 10$  زیربازه نشان می‌دهد. نتایج روش‌های تیلور مرتبه یک و مرتبه چهار در جدول ۲.۲ داده شده است.

$i$	$x_i$	مرتبه یک $u_i$	مرتبه چهار $u_i$
۰	۱/۰	۲/۰۰۰۰۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰۰۰۰۰
۱	۱/۱	۱/۶۹۰۹۲۹۷	۱/۷۲۴۱۸۲۹
۲	۱/۲	۱/۴۵۰۳۰۵۹	۱/۵۰۰۵۲۷۴
۳	۱/۳	۱/۲۵۵۴۹۵۴	۱/۳۱۳۹۲۹۳
۴	۱/۴	۱/۰۹۲۸۴۵۳	۱/۱۵۴۷۰۹۱
۵	۱/۵	۰/۹۵۳۸۱۵۷	۱/۰۱۶۵۰۲۴
۶	۱/۶	۰/۸۳۲۹۱۲۳	۰/۸۹۵۰۳۶۱
۷	۱/۷	۰/۷۲۶۵۱۸۱	۰/۷۸۷۳۸۸۳
۸	۱/۸	۰/۶۳۲۲۰۸۱	۰/۶۹۱۵۲۴۱
۹	۱/۹	۰/۵۴۸۳۰۰۳	۰/۶۰۵۹۹۶۵
۱۰	۲/۰	۰/۴۷۳۶۳۵۵	۰/۵۲۹۷۴۷۲

جدول ۲.۲: نتایج روش‌های تیلور مرتبه یک و مرتبه چهار

### روش‌های رونگه کوتاه برای حل مسائل مقدار اولیه

محاسبه مشتقات در روش‌های تیلور از مرتبه بالاتر همانطور که مرتبه افزایش می‌یابد پیچیده می‌شود. روش‌های رونگه کوتاه از محاسبه چنین مشتقاتی اجتناب می‌کنند و تنها محاسبه‌های کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

**روش رونگه کوتای مرتبه دوم یا روش نقطه میانی**

این روش به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_0 = \alpha,$$

$$k_1 = hf(x_i, u_i),$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$u_{i+1} = u_i + k_2, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (۸.۲)$$

روش رونگه کوتای مرتبه چهار (RK4) این روش به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_0 = \alpha,$$

$$k_1 = hf(x_i, u_i), \quad (9.2)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{1}{2}k_1\right), \quad (10.2)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{1}{2}k_2\right), \quad (11.2)$$

$$k_4 = hf(x_{i+1}, u_i + k_3), \quad (12.2)$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (13.2)$$

مثال ۳.۱.۲. مسئله مقدار اولیه (۱.۲) را در نظر می‌گیریم:

$$u' = \frac{\sin(2x) - 2xu}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad u(1) = 2.$$

جواب به وسیله روش نقطه میانی (RK2) و روش رونگه کوتای مرتبه چهار (RK4) با استفاده از  $N = 10$  در جدول ۳.۲ ارائه شده است.

$i$	$x_i$	RK2	RK4
0	1/0	2/00000000	2/00000000
1	1/1	1/7251529	1/7241157
2	1/2	1/5019911	1/5004362
3	1/3	1/3156406	1/3138325
4	1/4	1/1565391	1/1546145
5	1/5	1/0183834	1/0164134
6	1/6	0/8969326	0/8949538
7	1/7	0/7892816	0/7873127
8	1/8	0/6934041	0/6914550
9	1/9	0/6078570	0/6099333
10	2/0	0/5315839	0/52966893

جدول ۳.۲: نتایج RK2 و RK4

## ۲.۱.۲ روش‌های عددی برای مسائل مقدار مرزی

یک مسئله مقدار مرزی، یک معادله دیفرانسیل به همراه یک مجموعه از شرایط مرزی است. یک جواب برای یک مسئله مقدار مرزی جوابی برای معادله دیفرانسیل است که در شرایط

مرزی نیز صدق می‌کند.

در این بخش دو روش برای حل تقریبی مسائل مقدار مرزی خطی مرتبه دوم ارائه می‌دهیم. اولین روش، روش پرتابی خطی و دومین روش، روش تفاضل متناهی خطی است. یک مسئله مقدار مرزی خطی مرتبه دوم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x) \quad a \leq x \leq b, \quad (14.2)$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

### روش پرتابی خطی

روش پرتابی خطی برای مسائل مقدار مرزی خطی، بر اساس جایگزینی مسئله مقدار مرزی خطی با دو مسئله مقدار اولیه است. از این رو جواب مسئله مقدار مرزی، یک ترکیب خطی از جواب‌های دو مسئله مقدار اولیه است.

$$u''_1 = p(x)u'_1 + q(x)u_1 + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (15.2)$$

$$u_1(a) = \alpha, \quad u'_1(a) = 0.$$

و

$$u''_2 = p(x)u'_2 + q(x)u_2, \quad a \leq x \leq b, \quad (16.2)$$

$$u_2(a) = 0, \quad u'_2(a) = \beta.$$

جواب مسئله مقدار مرزی معادله (۱۴.۲) به صورت زیر است:

$$u(x_i) = u_1(x_i) + \frac{\beta - u_1(b)}{u_2(b)} u_2(x_i). \quad (17.2)$$

که در آن  $u_1$  و  $u_2$  به ترتیب جواب‌های معادلات (۱۵.۲) و (۱۶.۲) هستند.

**مثال ۴.۱.۲.** مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u'' = -3u' + 2u + 2x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 2, \quad u(1) = 1.$$

از روش پرتابی خطی با  $N = 10$  استفاده می‌کنیم.

ابتدا این مسئله را به دو مسئله مقدار اولیه به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$u''_1 = -3u'_1 + 2u_1 + 2x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u_1(0) = 2, \quad u_1(1) = 1$$

و

$$u''_2 = -3u'_2 + 2u_2 + 2x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u_2(0) = 2, \quad u_2(1) = 1$$

جواب مسئله مقدار مرزی به صورت زیر است:

$$u(x_i) = u_1(x_i) + \frac{1 - u_1(1)}{u_2(1)} u_2(x_i)$$

جواب گسسته دو مسئله مقدار اولیه همراه با مسئله مقدار مرزی، در جدول ۴.۲ ارائه شده است.

$i$	$x_i$	$u_1(x_i)$	$u_2(x_i)$	$u(x_i)$
۰	۰/۰	۲/۰۰۰۰۰۰۰۰	-۷/۱۹۶۱۶۳۱۳	۲/۰۰۰۰۰۰۰۰
۱	۰/۱	۱/۴۰۸۴۳۱۷۱	-۴/۷۷۴۷۰۸۳۸	۱/۴۰۸۴۳۱۷۱
۲	۰/۲	۱/۰۲۲۲۶۳۷۵	-۳/۰۴۶۰۵۶۳۴	۱/۰۲۲۲۶۳۷۵
۳	۰/۳	۰/۷۸۳۳۱۷۷۶	-۱/۸۰۰۷۶۳۹۴	۰/۷۸۳۳۱۷۷۶
۴	۰/۴	۰/۶۵۱۰۳۹۰۴	-۰/۸۹۲۰۲۶۴۸	۰/۶۵۱۰۳۹۰۴
۵	۰/۵	۰/۵۹۷۲۲۷۸۹	-۰/۲۱۶۹۰۵۴۳	۰/۵۹۷۲۲۷۸۹
۶	۰/۶	۰/۶۰۲۳۴۹۹۸	-۰/۲۹۶۸۲۰۱۴	۰/۶۰۲۳۴۹۹۸
۷	۰/۷	۰/۶۵۲۹۵۲۸۳	۰/۶۹۹۸۶۳۳۰	۰/۶۵۲۹۵۲۸۳
۸	۰/۸	۰/۷۳۹۸۵۶۹۹	۱/۰۲۷۸۸۰۲۸	۰/۷۳۹۸۵۶۹۹
۹	۰/۹	۰/۸۵۶۸۸۹۹۳	۱/۳۰۵۹۸۹۲۵	۰/۸۵۶۸۸۹۹۳
۱۰	۱/۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۱/۵۵۱۹۳۵۷۴	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰

جدول ۴.۲: نتایج پرتابی خطی

### روش‌های تفاضل متناهی برای مسائل مقدار مرزی خطی

در این بخش، روش تفاضل متناهی را برای مسئله مقدار مرزی مرور می‌کنیم. از این روش در فصل (۵) برای مقایسه روش‌های موجک هار استفاده خواهیم کرد.

#### ایده اصلی روش تفاضل متناهی

دامنه را به یک عضو زیر بازه‌ها تقسیم می‌کنیم، سپس مشتقات را با استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری عددی در هر نقطه درونی تقریب می‌زنیم. نتیجه یک دستگاه خطی از معادلات است.

این روند را گسسته‌سازی مسئله پیوسته [۲۶، ۲۹] می‌نامیم. جواب دستگاه خطی جواب گسسته مسئله مقدار مرزی خطی است.



## روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی ۲۱

مثال ۵.۱.۲. مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u'' = 4(u - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 2$$

از روش تفاضل متناهی خطی با  $N = 9$ ، برای تقریب جواب استفاده می‌کنیم. لذا،  $h = \frac{b-a}{N+1} = \frac{1}{10}$ ،  $x_0$  و  $x_9$  نقاط مرزی هستند) نقاط شبکه‌ای برابرند با:

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
۰/۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱/۰

از فرمول تفاضل مرکزی مرتبه دوم برای  $i = 1, 2, \dots, 9$  استفاده کرده و جمله خطا را حذف می‌کنیم، از این‌رو داریم:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 4u_i - 4x_i,$$

$$10^2(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = 400u_i - 400x_i, \quad i = 1, 2, \dots, 9$$

$$u_0 = 0, u_{10} = 2$$

دستگاه را برای رسیدن به جواب گسسته حل می‌کنیم. نتایج در جدول ۵.۲ ارائه شده است.

$i$	$x_i$	$u(x_i)$
۰	۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰
۱	۰/۱	۰/۱۰۸۸۲۳۷۸
۲	۰/۲	۰/۲۲۲۰۵۹۴۶
۳	۰/۳	۰/۳۴۱۹۱۲۹۷
۴	۰/۴	۰/۴۷۱۶۹۳۲۴
۵	۰/۵	۰/۶۱۶۳۶۳۶۴
۶	۰/۶	۰/۷۸۳۳۶۹۲۴
۷	۰/۷	۰/۹۸۳۸۷۷۶۴
۸	۰/۸	۱/۲۳۴۶۴۰۲۴
۹	۰/۹	۱/۵۶۰۷۸۴۱۴
۱۰	۱/۰	۲/۰۰۰۰۰۰۰۰

جدول ۵.۲: نتایج روش تفاضل متناهی

## ۲.۲ روش تفاضل متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی

مشابه روش‌های تفاضل متناهی برای مسائل مقدار مرزی، در روش‌های تفاضلات متناهی برای PDEها، مشتقات را با فرمول‌های مشتق‌گیری عددی جایگزین می‌کنیم. با این حال، برای PDEهای دو بعدی (دو متغیر مستقل)، دامنه یک ناحیه مسطح است. برای گسسته‌سازی مسئله، یک شبکه تولید می‌کنیم و مشتقات را در هر نقطه شبکه‌ای<sup>۸</sup> درونی برای دستیابی به دستگاه خطی تقریب می‌زنیم.

مثال ۱.۲.۲. معادله شبه موج زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_{tt} - \frac{x^2}{4} u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1 + \sinh(t)$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = x^2$$

از روش تفاضل متناهی با  $N + 1 = 32$  زیر بازه از  $[0, 1]$  و  $M = 20$  زیر بازه از  $[0, 0.1]$  استفاده می‌کنیم.

گام مرحله مکانی برابر با  $h = \frac{1}{31}$  است.  
گام مرحله زمانی برابر با  $k = \frac{1}{20}$  است.

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad t_j = jk, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1$$

فرض می‌کنیم  $u_{ij}$  تقریب جواب  $u(x_i, t_j)$  باشد، داریم:

$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{x_i^2}{4} u_{xx}(x_i, t_j)$$

با استفاده از فرمول تفاضل مرکزی مرتبه  $2^n$ ام برای  $u_{tt}$  و  $u_{xx}$  در نقطه شبکه‌ای  $(x_i, t_j)$  و حذف جمله خطا، داریم:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \frac{x_i^2}{4} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{k^2}{4h^2} x_i^2 [u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}],$$

فرض  $\lambda = \frac{k^2}{4h^2}$  با فرض

$$u_{i,j+1} = \lambda x_i^2 u_{i+1,j} + 2(1 - \lambda x_i^2) u_{i,j} - \lambda x_i^2 u_{i-1,j} - u_{i,j-1}$$

<sup>۸</sup>Grid point

که با جایگزینی  $j+2$  به جای  $j+1$  داریم:

$$u_{i,j+2} = \lambda x_i^2 u_{i+1,j+1} + 2(1 - \lambda x_i^2) u_{i,j+1} - \lambda x_i^2 u_{i-1,j+1} - u_{i,j}$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, 32 \text{ و } j = 1, 2, 3, 4, \dots, 20.$$

شرایط مرزی ایجاب می کنند که:  $u_{N+1,j} = 1 + \sinh(jk)$  و  $u_{0j} = 0$

شرایط اولیه ایجاب می کند که:  $u_{i,N+1} = (ih)^2$  و  $u_{i0} = ih$

$i$	$x_i$	$u_i$
۱	۰/۰۳۱۲۵	۰/۰۳۱۲۵۹۷۶
۳	۰/۰۹۳۷۵	۰/۰۹۳۸۳۷۸۹۳۴
۵	۰/۱۵۶۲۵	۰/۱۵۶۴۹۴۱۴۶۳
۷	۰/۲۱۸۷۵	۰/۲۱۹۲۲۸۵۲۶۵
۹	۰/۲۸۱۲۵	۰/۲۸۲۰۴۱۰۳۹۲
۱۱	۰/۳۴۳۷۵	۰/۳۴۴۹۳۱۶۶۱۰
۱۳	۰/۴۰۶۲۵	۰/۴۰۷۹۰۰۴۲۳۷
۱۵	۰/۴۶۸۷۵	۰/۴۷۰۹۴۷۳۰۸۹
۱۷	۰/۵۳۱۲۵	۰/۵۳۴۰۷۲۳۱۵۰
۱۹	۰/۵۹۳۷۵	۰/۵۹۷۲۷۵۴۳۲۰
۲۱	۰/۶۵۶۲۵	۰/۶۶۰۵۵۶۷۱۸۰
۲۳	۰/۷۱۸۷۵	۰/۷۲۳۹۱۶۱۱۲۰
۲۵	۰/۷۸۱۲۵	۰/۷۸۷۳۵۳۶۲۸۰
۲۷	۰/۸۴۳۷۵	۰/۸۵۰۸۶۹۲۶۶۰
۲۹	۰/۹۰۶۲۵	۰/۹۱۴۴۶۳۰۳۱۰
۳۱	۰/۹۶۸۷۵	۰/۹۷۸۱۳۴۹۳۶۰

جدول ۶.۲: نتیجه روش تفاضل متناهی برای معادله شبه موج



# فصل ۳

## آنالیز موجک

موجک‌ها را می‌توان به‌عنوان پایه برای گسترش یک مجموعه بزرگ از توابع به کار برد. موجک به معنای یک موج کوچک است، که در آن منحنی‌های سینوسی مورد استفاده در سری فوریه موج‌های بزرگ هستند. به‌طور خلاصه، یک موجک نوسانی است که به سرعت فروپاشی می‌کند. سری فوریه از توابع مثلثاتی استفاده می‌کند؛ سینوس و کسینوس که دچار فروپاشی نمی‌شوند، یعنی آن‌ها دارای تکیه‌گاه نامتناهی هستند. در تعمیم موجک یک تابع، پایه‌ها موجک‌هایی هستند که به سرعت فرومی‌پاشند، یعنی آن‌ها دارای تکیه‌گاه متناهی هستند.

### ۱.۳ تبدیلات موجک

در سال ۱۹۸۲، جین مورلت، ایده‌ی تبدیلات موجک<sup>۱</sup> را معرفی و یک ابزار ریاضی جدید برای تجزیه و تحلیل موجک فراهم کرد.

**تعریف ۱.۱.۳** (موجک‌های مادر). یک موجک مادر، یک تابع  $\psi(x)$  می‌باشد، که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱.

$$c_\psi = \int_0^\infty \frac{|\psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (1.3)$$

---

<sup>۱</sup>Wavelet Transforms

که در آن  $\psi(w)$  تبدیل فوریه  $\psi(x)$  است [۴، ۶]. به عنوان یک نتیجه داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (2.3)$$

۲. یک تابع موجک از تابع واحد است. یعنی،

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (3.3)$$

که در آن یک تابع برای انتگرال گیری تابع مربعی در دامنه خود که در هر دو معادله (۲.۳) و (۳.۳) تعریف شده است. تابع موجک باید دارای ورودی و خروجی ناصفر باشند.

۳.  $\psi$  هموار است، که حتی اغلب ممکن است بی نهایت بار مشتق پذیر باشد.

۴.  $\psi$  دارای یک فرم مناسب محاسباتی است، به عنوان مثال  $\psi$  یک چندجمله ای تکه ای است.

۵.  $\psi$ ، دارای تکیه گاه فشرده است، یعنی تمام مقادیر تابع در خارج یک بازه کراندار معین صفر هستند.

یک موجک  $\psi_{a,b}(x)$ ، از طریق موجک مادر با مقیاس و انتقال به صورت ساخته می شود.

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \quad (4.3)$$

پارامتر  $a$ ، پارامتر مقیاس گیری یا مقیاس است و درجه فشردگی را اندازه گیری می کند. پارامتر  $b$ ، پارامتر انتقال هست که  $x$  - امین مکان موجک را تعیین می کند.

اگر  $|a| < 1$  باشد، آنگاه موجک در حالت فشرده (تکیه گاه کوچکتر در دامنه  $x$ ) موجک مادر و اساساً متناظر با فرکانس های بالاتر است. از سوی دیگر، هنگامی که  $|a| > 1$ ، آنگاه  $\psi_{a,b}(x)$  دارای یک پهنا  $x$  بزرگتر از  $\psi(x)$  است و متناظر با دو فرکانس کوچکتر می باشد. از این رو موجک ها دارای پهنای فضای متناسب با فرکانس خود هستند. این دلیل اصلی برای موفقیت موجک های جین مورلت در پردازش سیگنال و تجزیه و تحلیل سیگنال فرکانسی زمانی است. سه نوع تبدیل موجک وجود دارد:

تبدیل موجک پیوسته <sup>۲</sup>(CWT)، تبدیل موجک گسسته <sup>۳</sup>(DWT) و سری موجک <sup>۴</sup>.

CWT، یک تابع پیوسته را به تابع پیوسته تبدیل می کند و DWT، یک تابع گسسته را به تابعی گسسته تبدیل می کند و سری موجک، یک تابع پیوسته را به تابعی گسسته تبدیل می کند.

<sup>۲</sup>Continuous Wavelet Transforms

<sup>۳</sup>Discrete Wavelet Transforms

<sup>۴</sup>Wavelet Series

### ۱.۱.۳ تبدیلات موجک پیوسته و معکوس آن

تعریف ۲.۱.۳. [۵] تبدیل موجک پیوسته تابع  $f(x) \in L^2$  با توجه به موجک مادر  $\psi$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$W_\psi f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b} dx \quad (۵.۳)$$

که در آن

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a \neq 0 \quad (۶.۳)$$

تعریف ۳.۱.۳. عامل  $\frac{1}{\sqrt{|a|}} = a^{-\frac{1}{2}}$  یک عامل نرمال سازی است. به عنوان نتیجه،

$$\|\psi_{a,b}\|_2 = \|\psi\|_2 \quad (۷.۳)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a,b}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \quad (۸.۳)$$

مثال ۱.۱.۳. موجک کلاه مکزیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\psi(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

همچنین

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left(1 - 2\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right) e^{-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}$$

با در نظر گرفتن ثابت  $a = 1$  و عامل انتقال  $b$  برای هر عدد صحیح داریم:

$$\psi_{1,b} = \psi(x-b) = (1 - 2(x-b)^2)e^{-(x-b)^2} \quad (\text{شکل ۱.۳ را ببینید})$$

شکل ۱.۳ (آ) و ۱.۳ (ب) نمودار موجک کلاه مکزیکی است، که به ترتیب در آن

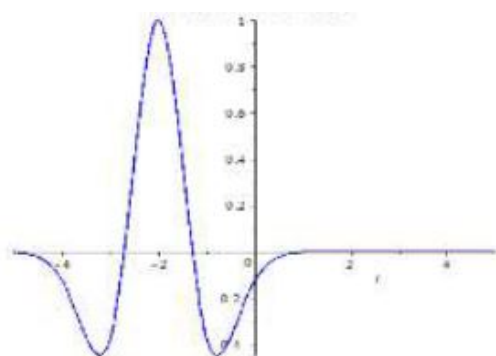
$$a = 1, b = 2 \quad a = 1, b = -2$$

همچنین با ثابت در نظر گرفتن  $b = 0$  و پارامتر عامل مقیاس (اتساع)  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  داریم:

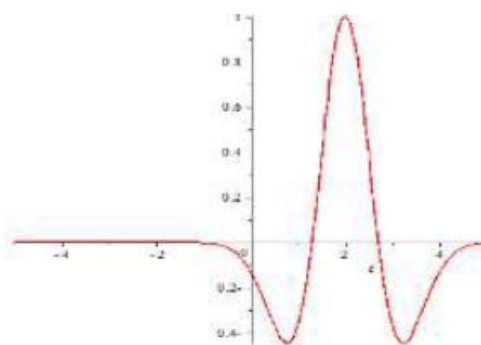
$$\psi_{a,0} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(1 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

توجه داشته باشید که می توانید عامل مقیاس  $a > 1$  موج کشش را در شکل ۱.۳ (ج) ببینید.

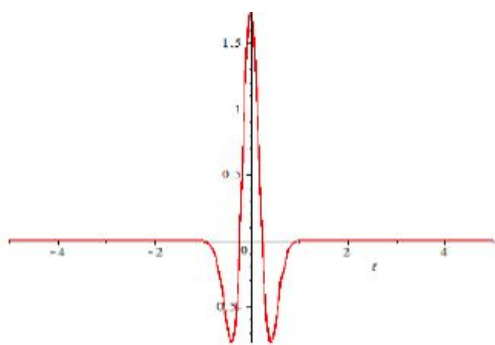
برای  $0 < a < 1$  موج کوچک در شکل ۱.۳ (د) قابل رؤیت است.



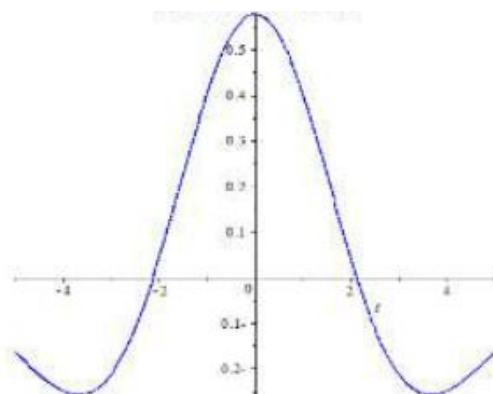
$$\psi_{1,-2} = (1 - 2(x + 2)^2)e^{-(x+2)^2} \quad (\text{ب})$$



$$\psi_{1,2} = (1 - 2(x - 2)^2)e^{-(x-2)^2} \quad (\bar{\text{ا}})$$



$$\psi_{\frac{1}{\sqrt{3}},0} = \sqrt{3}(1 - 2(\sqrt{3}x)^2)e^{-(\sqrt{3}x)^2} \quad (\text{د})$$



$$\psi_{\frac{3}{\sqrt{3}},0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - 2(\frac{x}{\sqrt{3}})^2)e^{-\frac{x^2}{3}} \quad (\text{ج})$$

شکل ۱.۳: نمودرای از موجک کلاه مکزیکی



**تعریف ۴.۱.۳.** [۴، ۶] [تبدیل موجک معکوس]

فرض کنید  $\psi(w)$  تبدیل فوریه  $\psi(x)$  باشد،

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(w) e^{-iwx} dx \quad (۹.۳)$$

اگر  $W_{\psi} f(a, b)$  یک CWT از تابع  $f(x)$  با یک موجک مادر  $\psi(x)$  باشد، آن‌گاه CWT معکوس توسط رابطه زیر بیان می‌شود:

$$f(x) = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^2} W_{\psi} f(a, b) \psi_{a,b}(x) da db \quad (۱۰.۳)$$

که در آن  $c_{\psi}$  یک ثابت است که به انتخاب موجک بستگی دارد و به وسیله عبارت زیر داده شده است:

$$c_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(w)|^2}{|W|} dw < \infty \quad (۱۱.۳)$$

CWT معکوس موجود است، هرگاه  $c_{\psi}$  مثبت و متناهی باشد.

**تعریف ۵.۱.۳.** [۳] فرض کنید  $\psi$  تابعی هموار باشد که روی  $\mathbb{R}$  تعریف شده است و دارای تکیه‌گاه فشرده است. برای  $j, k \in \mathbb{Z}$  تابع  $\psi_{j,k}$  را توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} (\psi(2^j x - k)), \quad x \in \mathbb{R} \quad (۱۲.۳)$$

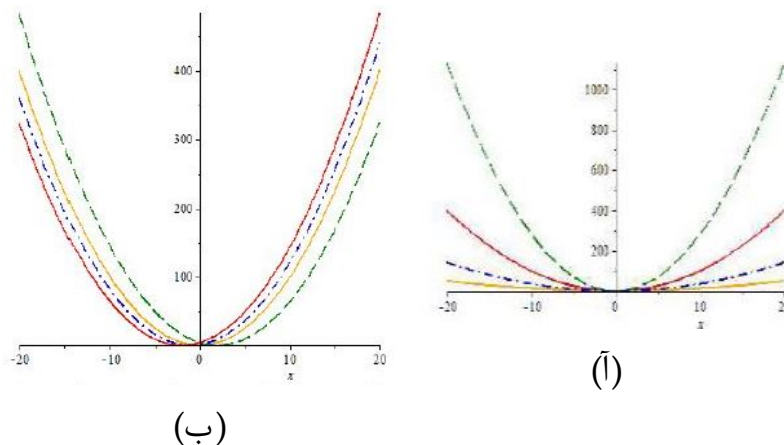
تابع  $\psi_{j,k}$  یک مقیاس با واحد  $j$  و یک انتقال با واحد  $k$  موجک مادر  $\psi$  است.

**مثال ۲.۱.۳.** برای نمایش تاثیر مقیاس و انتقال، تابع  $\psi(x) = x^2$  را در نظر بگیرید. از توابع مقیاس و انتقال زیر

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} (\psi(2^j x - k)) = 2^{\frac{j}{2}} (2^j x - k)^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

برای درک نقش مقیاس  $j$  با ثابت  $k = 0$  داریم:

$$\psi_{j,0}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x) = 2^{\frac{j}{2}} (2^j x)^2 \quad j \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}$$



شکل ۲.۳

(آ). نقش مقیاس  $j$ ، با ثابت  $k = 0$ ، در ”موجک مادر“

(ب). نقش انتقال  $k$ ، با ثابت  $j = 0$ ، در ”موجک مادر“

در شکل ۲.۳(آ)، اگر  $j$  مثبت باشد، آن گاه نمودار  $\psi_{j,0}$  مشابه با نمودار فشرده است، اما اگر  $j$  منفی باشد، آن گاه نمودار  $\psi_{j,0}$  مشابه با نمودار  $\psi$  می باشد، ولی مانند شکل ۲.۳(ب) محلی سازی شده است. همچنین برای درک نقش انتقال  $k$ ، از توابع مقیاس و انتقال استفاده می کنیم.

$$F_i(x) = 0$$

$$\psi_{0,k} = \psi(x - k) = (x - k)^2 \quad k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

در شکل ۲.۳(ب)، اگر  $k$  مثبت باشد، آن گاه نمودار  $\psi_{0,k}$  مشابه با نمودار  $\psi$  است، ولی به سمت راست انتقال یافته است، اگر  $k$  منفی باشد، آن گاه نمودار  $\psi_{0,k}$  مشابه با نمودار  $\psi$  است. ولی به سمت چپ مانند شکل ۲.۳(ب)، انتقال یافته است.

**تعریف ۶.۱.۳.** [۳] دستگاه موجک  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  یک پایه متعامد برای  $L^2(\mathbb{R})$  است که در آن

$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R} \quad (13.3)$$

$$w_{j,k} = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle_{nn} = 2^{\frac{j}{2}} w_{\psi} f \left( \frac{1}{2^j}, 2^{\frac{k}{j}} \right) \quad (14.3)$$

**قضیه ۱.۱.۳.** [۳] دستگاه  $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  روی  $(-\infty, \infty)$  متعامد است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(x) \psi_{\hat{j}, \hat{k}}(x) dx = \begin{cases} 1, & j = \hat{j}, k = \hat{k}, \\ 0, & \text{سایر نقاط.} \end{cases} \quad (15.3)$$

### ۲.۱.۳ تبدیلات موجک گسسته

**تعریف ۷.۱.۳** (تبدیل موجک گسسته). [۹]

در تبدیل موجک پیوسته، انتگرال (۲.۳) با جایگزینی پارامتر مقیاس  $a$  با  $2^{-j}$  و پارامتر  $b$  با  $k2^{-j}$  تبدیل به رابطه زیر می شود:

$$w_{\psi} f(2^{-j}, k2^{-j}) = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^j x - k) dx \quad (16.3)$$

### ۳.۱.۳ سری موجک

تحت شرایط خاص، بسط سری یک تابع از منظر یک مجموعه از توابع ساده  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  داده شده برابر است با:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (17.3)$$

تابع و مجموعه  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  باید در شرایط خاصی صدق کنند که به ما در یافتن ضرایب  $a_n$  کمک می‌کند. به‌عنوان مثال سری تیلور، یک تابع متناوب از دوره تناوبی  $p = L$  را تعمیم می‌دهد که در نقطه  $x_0$  با استفاده از دستگاه متعامد  $\{(x - x_0)^n\}_{n=0}^{\infty}$  تحلیلی است. در حالی که سری فوریه یک تابع انتگرال‌پذیر مربعی را با استفاده از دستگاه‌های مثلثاتی متعامد  $\{\sin(\frac{n\pi x}{L}), \cos(\frac{n\pi x}{L})\}_{n=0}^{\infty}$  بسط می‌دهد. با چنین سیستمی در  $[-L, L]$  می‌توانیم ضرایب را در بسط تابع محاسبه کنیم.

### تعریف ۸.۱.۳ (سری موجک). [۳]

بسط سری موجک یک تابع  $f$  داده شده به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle f_{j,k} \quad (18.3)$$

که در آن ضرایب  $c_{j,k}$  یا  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  به‌طور منحصربفرد به‌وسیله رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx \quad (19.3)$$

که در آن

$$\psi_{j,k} = 2^j \psi(2^j x - k)$$

دستگاه موجک  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  به‌طور کامل توسط تابع  $\psi$  تعیین می‌شود. یعنی ما تنها به ذخیره‌سازی اطلاعات درباره تابع منفرد  $\psi$  برای استفاده در معادله (۱۹.۳) نیاز داریم. موجک مادر باید در شرایط بیان شده که در تعریف ۱.۱.۳ ارائه شده برای وجود تعمیم سری موجک صدق کند.

به خصوص ما انتظار نداریم که  $\psi$  دارای تمام ویژگی‌های فوق باشد. از این‌رو نیاز داریم تا روی ویژگی‌هایی دقت کنیم که در کاربردی که از آن‌ها در ذهن داریم مورد نیاز هستند. در حالتی که نیازمند کار با رفتار زمانی توابع و همچنین محتوای فرکانسی آن‌ها هستیم، باید عضو دلخواهی را تکیه‌گاه فشرده  $\psi$  یا  $\bar{\psi}$  با عضوی مورد نیاز جایگزین کنیم که تابع در آن حداقل به سرعت به صفر میل می‌کند. فرمول‌بندی برای تابع  $\psi$  می‌تواند به‌عنوان یک نیاز باشد که ثابت‌های  $c, \alpha > 0$  وجود دارند، به طوری که:

$$|\psi(x)| \leq ce^{-\alpha|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ممکن است از رابطه فوق با فرض همگرایی سری موجک برای تقریب یک تابع داده شده به‌صورت زیر استفاده کنیم،

$$f(x) \approx \sum_{j=-n} \sum_{k=-N} C_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

برای مقدار به اندازه کافی بزرگ  $n \in \mathbb{N}$  [۳].

## ۲.۳ برتری‌های نظریه موجک

۱. بیشترین مزیت موجک‌ها این است که آن‌ها یک محلی‌سازی همزمان را در دامنه زمان و فرکانس نمایش می‌دهند.
۲. مزیت بعدی موجک سرعت بالای تبدیل موجک در حل معادلات دیفرانسیل است.
۳. موجک‌ها دارای مزیت بزرگی هستند که آن‌ها را قادر می‌سازد تا جزئیات ریز را در سیگنال مجزا کنند. موجک‌های بسیار کوچک می‌توانند برای منزوی‌سازی جزئیات بسیار ریز در یک سیگنال استفاده شوند. در حالی که، موجک‌های بسیار بزرگ قادرند جزئیات درست را شناسایی کنند.
۴. یک تبدیل موجک می‌تواند برای تجزیه یک سیگنال به موجک‌های مولفه استفاده شود.
۵. در نظریه موجک، اغلب ممکن است یک تقریب خوب از تابع  $f$  داده شده را با استفاده از تنها تعداد کمی ضریب به دست آورد، که یک دستاورد بزرگ در مقایسه با تبدیل فوریه است.
۶. نظریه موجک، قادر به افشای جنبه‌های اطلاعات نظیر گرایش‌ها، نقاط تجزیه و ناپیوستگی‌هایی در مشتقات بالاتر و خود تشابهی است.
۷. نظریه موجک اغلب می‌تواند یک سیگنال را بدون تخریب قابل‌تحسینی فشرده یا بدون اختلال سازد.

## ۳.۳ مقایسه تبدیل موجک با تبدیل فوریه

۱. تبدیل فوریه یک ابزار قدرتمند برای تجزیه و تحلیل مجموعه‌ای از سیگنال‌های ایستا است (یک سیگنال بدون تغییر در خواص). به‌عنوان مثال، سینوس و کسینوس (سیگنال‌های سینوسی) توسط کاربرد فوریه پردازش می‌شوند. در مقابل، تبدیل موجک قادر به اجرای سیگنال‌های ایستا و غیرایستا است [۷، ۸].
۲. تبدیل فوریه به منظور مفید بودن در نواحی خاص پردازش سیگنال قدیمی اثبات شده است. اما باید توجه داشته باشید که طراحی ریاضی موجک‌ها نسبت به تبدیل فوریه گسترده‌تر است و به‌طور ویژه، ریاضیات موجک شامل تبدیل فوریه می‌باشد [۷، ۸].
۳. تبدیلات موجک و فوریه اساساً در دامنه‌های زمانی و فرکانسی متفاوت هستند. موجک‌ها در زمان و فرکانس به خوبی محلی‌سازی شده‌اند، در حالی که عملکرد فوریه در برخی از دامنه‌های محلی‌سازی آن‌ها استاندارد شده است. در حالی که هر دوی آن‌ها دارای

تأثیرات خوبی خارج از زمان و فرکانس محلی سازی شده هستند، موجک نمایش بهتری را با تجزیه و تحلیل چند دقتی والنوت<sup>۵</sup> نمایش می دهد [۹، ۲، ۷].

۴. تبدیل فوریه متکی بر یک تابع مقیاسی منفرد  $\psi(x)$  است، اما تبدیل موجک دارای توانایی حرکت تابع و تولید یک سری دو پارامتری از توابع  $\psi_{a,b}(x)$  است که در مقالات [۹، ۸] تعریف شده است.



# فصل ۴

## موجک هار

اخیراً، تبدیل موجک یا آنالیز موجک، کاربردهای ریاضی را برای بسیاری از مسائل گسترش داده است. موجک‌های بسیاری وجود دارد، یکی از ساده‌ترین و معروف‌ترین آن‌ها موجک‌های هار هستند.

به دلیل سادگی موجک هار، تبدیل به روشی موثر برای حل بسیاری از مسائلی شده است که ناشی از شاخه‌های زیادی از علوم، مهندسی و اقتصاد هستند. از این رو، در فصل بعدی، از موجک‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده خواهیم کرد. تابع هار، ابتدا توسط آلفرد هار<sup>۱</sup> در پیوست پایان نامه دکترای وی در سال ۱۹۱۰ معرفی شد و سپس توسط دیگران توسعه یافت. تابع هار یک جفت پالس مستطیلی، فرد است که ساده‌ترین و قدیمی‌ترین موجک متعامد<sup>۲</sup> همراه با تکیه‌گاه فشرده<sup>۳</sup> است. تعاریف متفاوتی از تابع هار وجود دارد و تعمیم‌های متنوعی استفاده شده است [۹، ۲۵].

---

<sup>۱</sup> Alfred Haar

<sup>۲</sup> Orthonormal wavelet

<sup>۳</sup> Compact support

## ۱.۴ موجک‌های هار

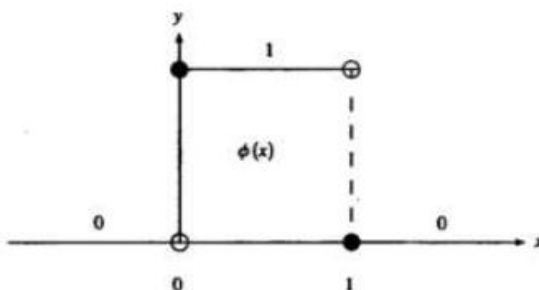
### ۱.۱.۴ تابع مقیاس هار

توابع مقیاس  $\phi$  و موجک  $\psi$  نقش اساسی در تجزیه و تحلیل موجک ایفا می‌کنند. این دو تابع، خانواده‌ای از توابع را تولید می‌کنند که می‌توانند برای برهم‌زدن یا بازسازی سیگنال‌ها استفاده شوند. برای تاکید بر خانواده شامل  $\phi$  و  $\psi$  است، که  $\phi$  "موجک پدر" و  $\psi$  "موجک مادر" می‌نامیم.

### ۲.۱.۴ خواص اساسی تابع مقیاس هار

تعریف ۱.۱.۴ [۲] تابع مقیاس هار را که موجک پدر نیز می‌نامیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{سایر نقاط.} \end{cases} \quad (1.4)$$



شکل ۱.۴: نمودار تابع مقیاس هار

تذکر ۱.۱.۴ [۲، ۵] نمودار تابع  $\phi(x-k)$  مشابه با  $\phi$  است، اما  $k$  واحد به سمت راست (فرض کنید  $k$  مثبت است) منتقل شده است.

نمادگذاری ۱.۱.۴. از  $V_0$  برای فضای تمام توابع به صورت زیر استفاده خواهیم کرد،

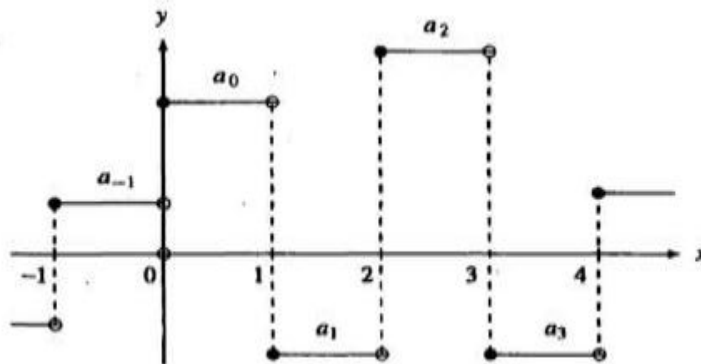
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(x-k), \quad a_k \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

که در آن  $k$  محدود به هر مجموعه متناهی از اعداد صحیح مثبت یا منفی است.

تذکر ۲.۱.۴ [۲] از آن جایی که  $\phi(x-k)$  در  $x=k$  و  $x=k+1$  ناپیوسته است، یک توصیف جایگزین از  $V_0$  این است که شامل تمام توابع قطعه‌ای ثابت با ناپیوستگی‌هایی ممکن در اعداد صحیح است. هر عنصر  $V_0$  دارای تکیه‌گاهی متناهی یا فشرده است که آن به این معناست که



عنصر در بیرون یک مجموعه کران دار صفر است. نمودار یک عنصر معمولی  $V_0$  در شکل ۲.۴ ارائه شده است.



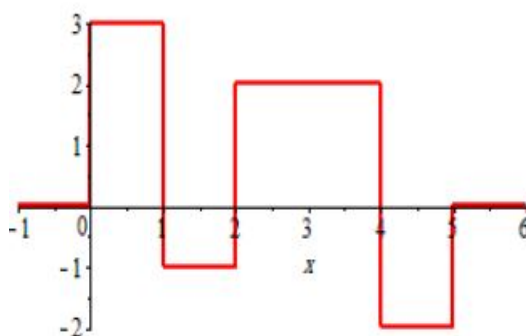
شکل ۲.۴: نمودار عنصر معمولی

توجه داشته باشید که یک تابع در  $V_0$  ممکن است دارای ناپیوستگی‌هایی در تمام اعداد صحیح نباشد. به عنوان مثال اگر  $a_1 = a_2$  آن گاه مجموع پیشین در  $x = 2$  پیوسته است.

مثال ۱.۱.۴. تابع

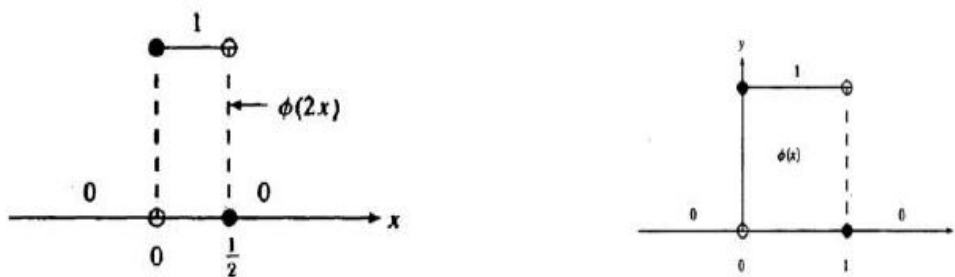
$$f(x) = 3\phi(x) - \phi(x-1) + 2\phi(x-2) + 2\phi(x-3) - 2\phi(x-4) \in V_0$$

در  $x = 0, 1, 2, 4, 5$  دارای ناپیوستگی است، اما در  $x = 3$  ناپیوستگی ندارد، شکل ۳.۴ را مشاهده کنید.



شکل ۳.۴: طرح  $f$ ، در مثال ۱.۱.۴

ما به بلوک‌هایی باریک‌تر برای تجزیه و تحلیل سیگنال‌های فرکانس بالا نیاز داریم. به عنوان مثال، پهناهای بلوک‌های ساخته شده  $\phi(2x)$  برابر با نیمی از پهناهای  $\phi(x)$  است، شکل ۴.۴ را مشاهده کنید.



شکل ۴.۴

تابع  $\phi(2x - k) = \phi(2(x - \frac{k}{2}))$  همان نمودار تابع  $\phi(2x)$  است، ولی  $\frac{k}{2}$  واحد به سمت راست منتقل شده است [۲، ۵].

نمادگذاری ۲.۱.۴. فرض کنید  $V_1$  فضای توابع به صورت زیر باشد:

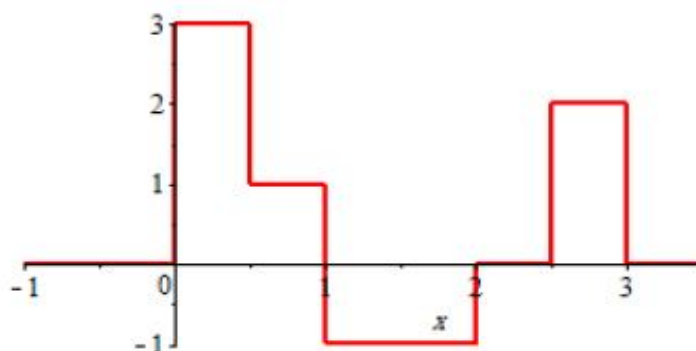
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k) \quad a_k \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

از نظر هندسی،  $V_1$  فضای ثابت تکه‌ای از تکیه‌گاه متناهی همراه با ناپیوستگی‌هایی ممکن در نیمه صحیح‌های  $\{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots\}$  است.

مثال ۲.۱.۴. تابع

$$f(x) = 3\phi(2x) - \phi(2x - 1) - 2\phi(2x - 2) + 2\phi(2x - 3) \in V_1$$

در  $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$  همان‌گونه که در شکل ۵.۴ نشان داده شده دارای ناپیوستگی است.



شکل ۵.۴

تعریف ۲.۱.۴. [۲] فضای  $V_0$ ، فضای همه توابع ثابت تکه‌ای با پیوستگی‌های موجود در مجموعه اعداد صحیح است. فضای  $V_0$ ، فضای همه توابع ثابت تکه‌ای با ناپیوستگی‌های موجود در نیمه صحیح‌های  $\{\frac{2n+1}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$  است.

**تعریف ۳.۱.۴.** [۲] فرض کنید  $j$  یک عدد صحیح نامنفی باشد. فضای تابع مرحله‌ای در سطح  $j$ ، که به وسیله  $V_j$  نمایش داده می‌شود برای فضاهای تولید شده به وسیله مجموعه

$$\{\dots, \phi(2^j x + 1), \phi(2^j x), \phi(2^j x - 1), \phi(2^j x - 2), \dots\}$$

روی اعداد حقیقی تعریف شده است. فضای توابع ثابت تکه‌ای از تکیه‌گاه متناهی است که در آن ناپیوستگی‌ها در مجموعه  $\{\dots, -\frac{1}{2^j}, 0, \frac{1}{2^j}, \frac{2}{2^j}, \frac{3}{2^j}, \dots\}$  گنجانده شده‌اند. همان روند برای  $V_1 \subset V_2$  و غیره اعمال می‌شود:

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \dots$$

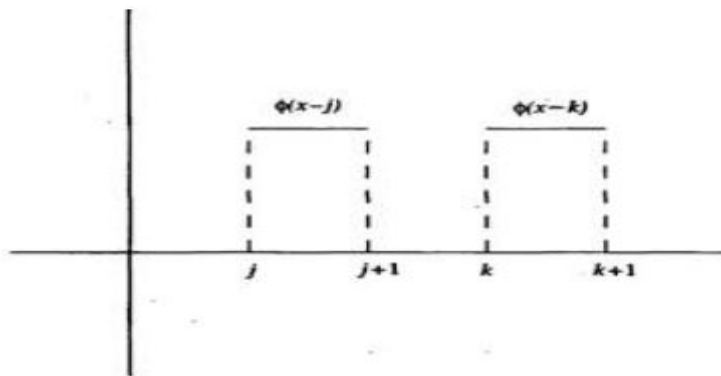
**تذکر ۳.۱.۴.** این محدود کردن اکید است. به‌عنوان مثال، تابع  $\phi(2x)$  متعلق به  $V_1$  است، اما به  $V_0$  تعلق ندارد (زیرا  $\phi(2x)$  در  $x = \frac{1}{4}$  ناپیوسته است).

**قضیه ۱.۱.۴.** [۲] یک تابع  $f(x)$  متعلق به  $V_0$  است، اگر و تنها اگر  $f(2^j x)$  متعلق به  $V_j$  باشد. تابع  $f(x)$  متعلق به  $V_j$  است اگر و تنها اگر  $f(2^{-j} x)$  متعلق به  $V_0$  باشد.

**قضیه ۲.۱.۴.** [۱۰] یک مجموعه از توابع ناصفر  $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  در فضای  $L^2$  برای هر مولفه  $V_j$  متعامد است.

$$\|\phi(x-k)\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-k)^2 dx = \int_k^{k+1} 1 dx = 1 \quad (4.4)$$

$$\langle \phi(x-j), \phi(x-k) \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-j)\phi(x-k) dx = 0, \quad j \neq k \quad (5.4)$$



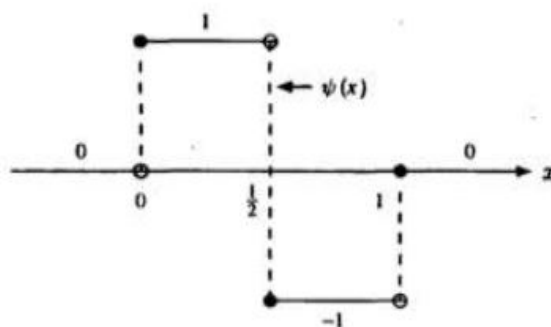
شکل ۶.۴:  $\phi(x-j)$  و  $\phi(x-k)$  دارای تکیه‌گاه مجزا هستند.

**قضیه ۳.۱.۴.** [۱۱] مجموعه توابع  $\{2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  یک پایه متعامد  $V_j$  است.

**تعریف ۴.۱.۴.** [۱۵] تابع

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{سایر نقاط.} \end{cases} \quad (6.4)$$

را موجک مادر می‌نامیم. موجک هار دارای تکیه‌گاه مختلط و به‌طور واضح  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$  و  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  است، اما این موجک ناپیوسته است.



شکل ۷.۴: موجک هار  $\psi(x)$

#### تعریف ۵.۱.۴. [۵]

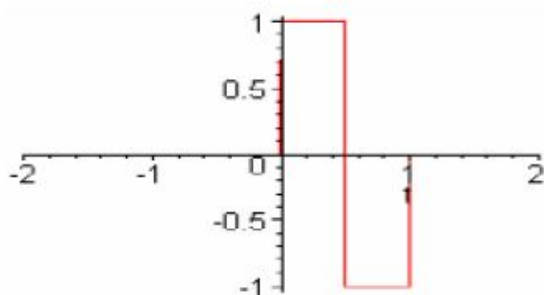
گویند موجک دارای لحظه به صفر رسیدن  $M$  است، هرگاه برای هر  $M \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M-1. \quad (7.4)$$

تذکر ۴.۱.۴. [۲۸، ۳۰] همواری موجک زمانی افزایش می‌یابد که عدد لحظه به صفر رسیدن افزایش یابد.

تذکر ۵.۱.۴. [۲۸] موجک هار  $\psi$ ، دارای تکیه‌گاه پیوسته روی  $I$  است، هرگاه خارج از  $I$  صفر شود.

اگر  $\psi$  دارای لحظه صفر شدن  $M$  باشد، آن‌گاه تکیه‌گاه آن حداقل از طول  $2M - 1$  است، از این‌رو موجک دارای تکیه‌گاهی مینیمم است که برابر با یک است.



شکل ۸.۴: نمودار موجک مادر

**تعریف ۶.۱.۴.** [۱۴] یک تابع در  $V_1$  برای  $V_0$  متعامد است، اگر و تنها اگر این تابع به صورت زیر باشد.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(x - k) \quad a_k \in \mathbb{R} \quad (۸.۴)$$

فرض کنیم  $W$  فضای تمام توابعی باشد که دارای صورت زیر است

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(x - k) \quad a_k \in \mathbb{R}$$

که در آن دوباره فرض می‌کنیم که تنها تعداد متناهی از  $a_k$ ها ناصفر هستند. در این صورت،  $W$  متمم متعامد از  $V_0$  در  $V_1$  است. به بیان دیگر

$$V_1 = V_0 \oplus W.$$

**قضیه ۴.۱.۴.** [۲] فرض کنیم فضای توابعی به فرم زیر باشد:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(2^j x - k) \quad a_k \in \mathbb{R} \quad (۹.۴)$$

که در آن تنها تعداد متناهی از  $a_k$ ها ناصفر هستند.  $W_j$  متمم متعامد از  $V_j$  در  $V_{j+1}$  است و می‌نویسیم:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (۱۰.۴)$$

**تعریف ۷.۱.۴.** [۲] موجک هار را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) \quad (۱۱.۴)$$

## ۲.۴ ویژگی‌های موجک هار

۱. موجک هار در دامنه  $x$ ، به خوبی محلی‌سازی شده است. اما پیوسته نیست.

۲.

$$\int_0^\infty \psi(x) dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^\infty |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (۱۲.۴)$$

۳. هر تابع حقیقی پیوسته را می‌توان توسط ترکیب خطی  $\phi(x), \phi(2x), \phi(4x), \dots, \phi(2^j x)$  و توابع انتقال یافته آن تقریب زد. این فضای تابعی را تعمیم می‌دهد که در آن هر تابع را می‌توان توسط توابع پیوسته تقریب زد.

۴. هر تابع حقیقی پیوسته را می توان توسط ترکیب خطی از توابع ثابت

$$\psi(x), \psi(2x), \psi(4x), \dots, \psi(2^j x)$$

و توابع انتقال یافته آن تقریب زد.

۵. یک تابع موجک را می توان به صورت ترکیب خطی از توابع موجک با مقیاس های مختلف نوشت:

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) \quad (13.4)$$

به طور مشابه برای تابع مقیاس:

$$\phi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) \quad (14.4)$$

۶. توابع هار متعامد هستند. یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2^{jm} \psi(2^j x - k) (2^m x - n) dx = \delta_{jm} \delta_{kn} \quad (15.4)$$

۷. انتگرال توابع هار را می توان به سری های هار بسط داد.

## ۳.۴ روش هم محلی موجک

روش هم محلی [۹] در حل عددی معادلات دیفرانسیل استفاده شده است. ایده اصلی استفاده از عملگرهای عددی فعال در مقادیر نقطه ای (نقاط هم محلی) در فضای فیزیکی است که دامنه را به صورت یک تعداد از نقاط تقسیم و جواب آن را محاسبه می کند. در حالت کلی، روش های هم محلی موجک با انتخاب یک موجک و برخی از انواع ساختار های شبکه ای تولید می شوند که به طور محاسباتی اقتباس خواهند شد. در حقیقت، یکی از آنها تفاضلات متناهی را روی شبکه های غیریکنواخت به دست می آورد. عملیات غیرخطی سازی در روش هم محلی موجک کاری سر راست است.

### ۱.۳.۴ روش هم محلی

روش هم محلی استراتژی فراهم می کند که توسط آن می توانیم بسیاری از مسائل را در ریاضیات کاربردی حل کنیم. ابتدا یک توصیف کلی ارائه می دهیم. فرض کنید یک عملگر خطی  $L$  داشته باشیم (مانند یک عملگر انتگرال یا عملگر دیفرانسیل) و بخواهیم معادله ی زیر را حل کنیم

$$Lu = w \quad (16.4)$$

در این معادله  $w$  مفروض،  $u$  مورد جستجو است. برخی روش‌های تقریبی برای حل معادله (۱۶.۴) با انتخاب یک مجموعه بردارهای پایه‌ای  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  شروع می‌کنند و سپس سعی می‌کنند معادله‌ی (۱۶.۴) را با یک بردار  $u$  به شکل زیر حل کنند.

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \quad (17.4)$$

چون  $L$  یک عملگر خطی است، داریم:

$$Lu = \sum_{j=1}^n c_j Lv_j$$

و بنابراین معادله‌ی (۱۶.۴) منجر به معادله‌ی زیر می‌شود:

$$\sum_{j=1}^n c_j Lv_j = w \quad (18.4)$$

به‌طور کلی، ما قادر به حل دستگاه (۱۸.۴) نسبت به ضرایب  $c_1, c_2, \dots, c_n$  نخواهیم بود. ولی احتمالاً می‌توانیم دستگاه (۱۸.۴) را تقریباً برقرار سازیم. در روش هم‌محلی بردارهای  $u$ ،  $w$  و  $v_j$  همگی توابعی بر روی یک دامنه مشترک هستند. بنابراین نیاز داریم که مقادیر توابع  $w$  و  $\sum_{j=1}^n c_j Lv_j$  در  $n$  نقطه از پیش تعیین شده یکسان باشند:

$$\sum_{j=1}^n c_j (Lv_j)(t_i) = w(t_i) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (19.4)$$

این یک دستگاه  $n$  معادله خطی است که از آن می‌توانیم مقادیر  $n$  ضریب مجهول  $c_j$  را محاسبه کنیم. البته، توابع  $v_j$  و نقاط  $t_i$  باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که ماتریس با  $(Lv_j)(t_i)$  درایه‌های نامنفرد باشد.

## ۴.۴ تبدیل موجک هار

دستگاه موجک هار به‌صورت زیر است: [۱۷، ۱۵]

$$h_i(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) = \begin{cases} 1, & x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ -1, & x \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3), \\ 0, & \text{سایر نقاط.} \end{cases} \quad (20.4)$$

که در آن:

$$\varepsilon_1 = \frac{k}{m}, \quad \varepsilon_2 = \frac{k + \circ/\Delta}{m}, \quad \varepsilon_3 = \frac{k + 1}{m}$$

و

$$m = 2^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

$j$  نشان دهنده سطح موجک یا پارامتر اتساع یا مقیاس بندی (تغییر سطح) است.  $k$  پارامتر انتقال را نشان می دهد.  $J$  سطح ماکزیمم دقت را نشان می دهد. شاخص  $i$  در  $h_i(x)$  توسط  $i = m + k + 1$  تعیین می شود. در حالت مقادیر مینیمم  $m - 1$  و  $k = 0$  داریم،  $i = 2$  و مقدار ماکزیمم  $i$  برابر  $i = 2M = 2^{J+1}$  است. برای  $i = 1$ ، تابع  $h_1(x)$ ، تابع مقیاس یا موجک مادر برای خانواده موجک هار است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 0, & \text{سایر نقاط.} \end{cases} \quad (21.4)$$

برای  $i = 2$ ، تابع  $h_2(x)$  موجک مادر برای خانواده موجک هار است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$h_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{سایر نقاط.} \end{cases} \quad (22.4)$$

برای  $i = 3$ ، تابع  $h_3(x)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$h_3(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ -1, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{سایر نقاط.} \end{cases} \quad (23.4)$$

برای  $i = 4$ ، تابع  $h_4(x)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$h_4(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ -1, & \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{8}, \\ 0, & \text{سایر نقاط.} \end{cases} \quad (24.4)$$

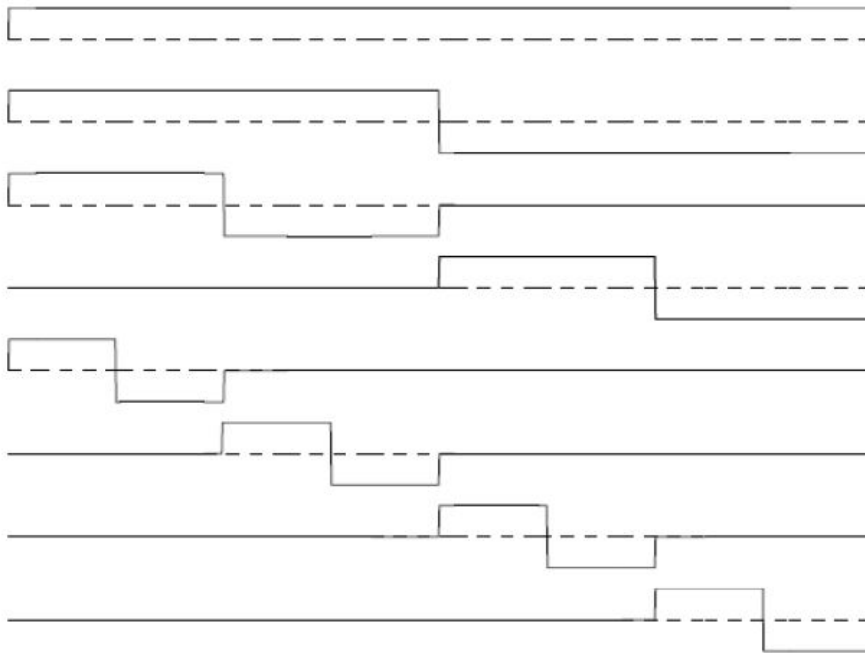
**قضیه ۱.۴.۴.** موجک های هار با یکدیگر متعامد هستند و از این رو، تشکیل یک پایه متعامد می دهند که به صورت زیر نمایش داده شده است:

$$\int_0^1 h_i h_l dx = \begin{cases} 2^j, & i = l = 2^J + k + 1, \\ 0, & i \neq l. \end{cases} \quad (25.4)$$



j	۰	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۳	۳	۳	۳	۳	.....
k	۰	۰	۱	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۴	.....
$i = 2^{j+k} + 1$	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	.....

جدول ۱.۴: محاسبات اندیس برای تابع پایه‌ای هار



شکل ۹.۴: هشت تابع هار اولیه

مجموعه موجک‌های هار متعامد از  $h_1(x)$  تا  $h_8(x)$  در شکل ۹.۴ نمایش داده شده‌اند که شامل یک خانواده‌ای از موجک‌های مربعی منفرد هستند. اولین پایه  $h_1(x)$  را تابع مقیاس می‌نامیم که برای بازه زمانی واحد کامل برابر با یک است. دومین پایه  $h_2(x)$ ، موج مربعی اساسی است که موجک مادر می‌نامیم. پایه‌های دیگر یعنی پایه‌های  $h_3(x)$  تا  $h_8(x)$  از طریق  $h_2(x)$  توسط دو عملگر تولید می‌شوند.

## ۵.۴ تقریب تابع

هر تابع  $u(x) \in L^2[0, 1]$  را می‌توان به صورت زیر تقریب زد:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n h_n, \quad i \in \{0\} \cup \mathbb{N} \quad (26.4)$$

که در آن ضرایب  $a_n$  به صورت زیر تعیین می شوند:

$$a_0 = \int_0^1 u(x)h_0(x)dx, \quad a_n = 2^j \int_0^1 u(x)h_i(x)dx \quad (27.4)$$

که در آن

$$n = 2^j + k, \quad j \geq 0, \quad 0 \leq k \leq 2^j, \quad x \in [0, 1)$$

به طوری که نرم خطای  $\epsilon$  زیر کمینه گردد:

$$\epsilon = \int_0^1 \left[ u(x) - \sum_{i=0}^{m-1} a_i h_i(x) \right]^2 dx, \quad m = 2^j, \quad j \in \{0\} \cup \mathbb{N} \quad (28.4)$$

معمولاً، تعمیم سری  $u(x)$  شامل تعداد نامتناهی شرط است. اگر  $u(x)$  تکه ای ثابت باشد آن گاه توسط خود و یا بسیاری از سری ها به صورت ثابت تکه ای در طی هر زیر بازه تقریب زده می شود.

## ۶.۴ تجزیه و تحلیل همگرایی موجک هار

فرض کنید که  $f(x)$  تابعی مشتق پذیر با:

$$|f(x)| \leq K, \quad \forall x \in (a, b), \quad |f'(x)| \leq K.$$

باشد، که در آن  $K$  یک ثابت مثبت است. تقریب موجک هار برای تابع  $f(x)$  به صورت زیر ارائه می شود:

$$f_M(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad (29.4)$$

بابلیان و شهسواران [۲۱] نشان دادند که مربع نرم خطا برای تقریب موجک توسط رابطه زیر ارائه شده است:

$$\|f(x) - f_M(x)\|^2 = \frac{k^2}{12M^2} \quad (30.4)$$

بنابراین

$$\|f(x) - f_M(x)\|^2 = O\left(\frac{1}{M}\right)$$

$$\text{خطای مطلق ماکزیمم} = L_\infty = \max \cdot |u_l^e(x) - u_l^a(x)| \quad (31.4)$$

$$\text{خطای نسبی ماکزیمم} = L_{mre} = \frac{L_\infty}{u_l^e(x)} \quad (32.4)$$

که در آن  $u_l^e$  و  $u_l^a$  به ترتیب جواب های دقیق و هار در  $l^{\text{th}}$  - امین نقاط هم محلی  $x_l$  هستند.  $l = 1, 2, \dots, 2m$

دامنه محاسباتی را برای هر مثال عددی  $[0, 1]$  انتخاب می کنیم.

## ۷.۴ انتگرال گیری از موجک هار

ما می‌خواهیم تا از معادلات دیفرانسیل زیر با استفاده از روش چن و هسیائو (CHM)<sup>۴</sup> انتگرال بگیریم و در فصل بعدی به صورت واضح‌تر درباره این روش اساسی صحبت خواهیم کرد [۱۶].

$$P_{i,\alpha}(x) = \underbrace{\int_A^x \int_A^x \cdots \int_A^x}_{(\alpha\text{-بار})} h_i(\tau) d\tau^\alpha = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_A^x (x-\tau)^{\alpha-1} h_i(\tau) d\tau \quad (33.4)$$

حالت  $\alpha = 0$  متناظر با تابع  $h_i(\tau)$  است.

با در نظر گرفتن مقدار  $h_i(x)$ ، این انتگرال را می‌توان به‌طور تحلیلی محاسبه کرد. با ادامه این روند داریم:

$$P_{\alpha,i}(x) = \begin{cases} 0, & x < \varepsilon_1, \\ \frac{1}{\alpha!} [x - \varepsilon_1]^\alpha, & x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2], \\ \frac{1}{\alpha!} \{ [x - \varepsilon_1]^\alpha - \gamma [x - \varepsilon_2]^\alpha \}, & x \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3], \\ \frac{1}{\alpha!} \{ [x - \varepsilon_1]^\alpha - \gamma [x - \varepsilon_2]^\alpha + [x - \varepsilon_3] \}, & x > \varepsilon_3. \end{cases} \quad (34.4)$$

این فرمول برای  $i > 1$  برقرار است. در حالت  $i = 1$ ،  $\varepsilon_1 = A$  و  $\varepsilon_2 = B$  داریم:

$$P_{1,\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha!} (a - A)^\alpha$$

در روش هار [۱۶]، انتگرال‌های زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند:

$$P_{i,1}(x) = \int_0^x h_i(\tau) d\tau \quad (35.4)$$

$$P_{i,1}(x) = \begin{cases} x - \varepsilon_1, & x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2], \\ \varepsilon_3 - x, & x \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3], \\ 0, & \text{سایر نقاط.} \end{cases} \quad (36.4)$$

$$P_{i,v+1}(x) = \int_0^x P_{i,v}(\tau) d\tau, \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad (37.4)$$

رای برخی از  $P_{i,v+1}(x)$ ،  $v = 1, 2, 3, \dots$  محاسبه شده توسط روابط زیر ارائه شده‌اند:

$$P_{i,2} = \begin{cases} 0, & x \in [0, \varepsilon_1], \\ \frac{(x-\varepsilon_1)^2}{2}, & x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2], \\ \frac{1}{2m^2} - \frac{(\varepsilon_3-x)^2}{2}, & x \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3], \\ \frac{1}{2m^2}, & x \in [\varepsilon_3, 1]. \end{cases} \quad (38.4)$$

$$P_{i,3} = \begin{cases} 0, & x \in [0, \varepsilon_1), \\ \frac{(x-\varepsilon_1)^3}{6}, & x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ \frac{(x-\varepsilon_2)}{4m^3} - \frac{(\varepsilon_2-x)^3}{6}, & x \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3), \\ \frac{x-\varepsilon_2}{4m^3}, & x \in [\varepsilon_3, 1]. \end{cases} \quad (39.4)$$

$$P_{i,4} = \begin{cases} 0, & x \in [0, \varepsilon_1), \\ \frac{(x-\varepsilon_1)^4}{24}, & x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ \frac{(x-\varepsilon_2)}{\lambda m^4} - \frac{(\varepsilon_2-x)^4}{24} + \frac{1}{192m^4}, & x \in [\varepsilon_2, \varepsilon_3), \\ \frac{x-\varepsilon_2}{\lambda m^4} + \frac{1}{192m^4}, & x \in [\varepsilon_3, 1]. \end{cases} \quad (40.4)$$

به طور مشابه برای  $v = 5, 6, \dots$  در  $P_{i,v}(x)$  روندی مشابه به دست می آیند.

## ۸.۴ ماتریس عملیاتی ضربی موجک هار

انتگرال‌هایی که در (۳۶.۴) - (۴۰.۴) محاسبه شدند را می توان برای هر معادله دیفرانسیل به کار برد [۱۴].

کافیست به بررسی فرمول بندی ماتریس بپردازیم. برای این منظور، بازه  $x \in [0, 1]$  را به  $2m$  افراز تقسیم می کنیم که هر کدام به طول  $\Delta x = \frac{1}{2m}$  هستند، که در آن  $m = 2^j$ . نقاط هم محلی را تعریف می کنیم که در آن هر تابع را به صورت زیر تقریب خواهیم زد:

$$x_l = \frac{2l-1}{4m}, \quad \text{for } l = 1, 2, \dots, 2m \quad (41.4)$$

در این نقاط هم محلی، تابع هار  $h_i(x)$  را به منظور دستیابی به ماتریس ضرایب  $H_{2m \times 2m}$  که آن را ماتریس هار می نامیم گسسته سازی می کنیم. ماتریس ضرایب هار  $H$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$H_{(m)}(i, l) = h_i(x_l) \quad (42.4)$$

یک بردار از توابع هار را برای محاسبه  $H$  تعریف می کنیم:

$$h_{(m)}(x) = [h_0(x), h_1(x), \dots, h_{m-1}(x)]^T \quad (43.4)$$

که در آن  $m$  بعد بردار است. این بردارها برای محاسبه هر ستون ماتریس هار به صورت زیر استفاده می شوند:

$$H_{(m)} = \left[ h_{(m)}\left(\frac{1}{4m}\right), h_{(m)}\left(\frac{3}{4m}\right), \dots, h_{(m)}\left(\frac{4m-1}{4m}\right) \right]^T \quad (44.4)$$

ماتریس‌های انتگرال  $P_v$  دارای عناصر  $P_v(i, l) = P_{i,v}(l)$  هستند. چن و هسیائو، ماتریس انتگرال را در روندی متفاوت تعریف کردند. آن‌ها  $P_{(m)}$  را از طریق معادله زیر محاسبه کردند،

$$\int_0^x h_{(m)}(\tau) d\tau = P_{(m)} h_{(m)}(x), \quad x \in [0, 1) \quad (45.4)$$

نتیجه برابر با ماتریس مربعی  $P_{(m)} = P_{(m \times n)}$  است که ماتریس عملیاتی انتگرال گیری نامیده می‌شود [۱۳].

روش چن و هسیائو نشان می‌دهد که رابطه بازگشتی زیر برقرار است:

$$P_{(m)} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \sqrt{m} P_{(\frac{m}{\sqrt{m}} \times \frac{m}{\sqrt{m}})} & -H_{(\frac{m}{\sqrt{m}} \times \frac{m}{\sqrt{m}})} \\ H_{(\frac{m}{\sqrt{m}} \times \frac{m}{\sqrt{m}})}^{-1} & O_{(\frac{m}{\sqrt{m}} \times \frac{m}{\sqrt{m}})} \end{bmatrix} \quad (46.4)$$

که در آن  $O_{(\frac{m}{\sqrt{m}} \times \frac{m}{\sqrt{m}})}$ ، ماتریس صفر است.

$$H_{(m)} = [h_{(m)}(x_0), h_{(m)}(x_1), \dots, h_{(m)}(x_{m-1})]^T \quad (47.4)$$

که در آن

$$\frac{1}{m} \leq x_l \leq \frac{l}{m} \quad \text{و} \quad H_{(m \times m)}^{-1} = \frac{1}{m} H_{(m \times m)}^T \text{diag}(r)$$

باید توجه داشته باشید که محاسبات برای  $P_{(m)}$  و  $H_{(m)}$  باید تنها یک مرتبه اجرا شوند. از آن جایی که  $H$  و  $H^{-1}$  شامل صفرهای بسیاری هستند، این پدیده، سرعت تبدیل هار را بیشتر از تبدیل فوریه می‌کند، این یکی از دلایل همگرایی سریع سری‌های موجک هار است [۱۹]. بنابراین، در شرایط متناهی زیر خاتمه می‌یابد [۱۷].

$$u(x) \cong \sum_{i=0}^{m-1} a_i h_i(x) = \mathbf{a}_{(m)}^T \mathbf{h}_{(m)}(x) \quad (48.4)$$

که در آن بردار ضریب  $\mathbf{a}_{(m)}^T$  و بردار تابع هار  $\mathbf{h}_{(m)}(x)$  به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\mathbf{a}_{(m)}^T = [a_0, a_1, \dots, a_{m-1}] \quad , \quad \mathbf{h}_{(m)}(x) = [h_0(x), h_1(x), \dots, h_{m-1}(x)]^T$$

#### مثال ۱.۸.۴. ماتریس‌های هار

با ماتریس هار از مرتبه یک شروع به کار می‌کنیم:

$$H_{(1)} = [1]$$

۱. ماتریس هار مرتبه دوم

دو بردار تابع هار اولیه را همراه با  $l = 1, 3$ ،  $x = \frac{1}{4}$  می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$h_{(2)}\left(\frac{1}{4}\right) = [h_0\left(\frac{1}{4}\right), h_1\left(\frac{1}{4}\right)]^T = [1, 1]^T$$

$$h_{(2)}\left(\frac{3}{4}\right) = [h_0\left(\frac{3}{4}\right), h_1\left(\frac{3}{4}\right)]^T = [1, -1]^T$$

که این ماتریس را می توان به فرم زیر نوشت:

$$H_{(2)} = [h_{(2)}(\frac{1}{4}), h_{(2)}(\frac{3}{4})]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۲. ماتریس هار از مرتبه چهارم

ابتدایدارهای تابع هار دوم را با استفاده از  $l = 1, 3, 5, 7$  از  $x = \frac{1}{\lambda}$  را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} h_{(4)}(\frac{1}{\lambda}) &= [h_0(\frac{1}{\lambda}), h_1(\frac{1}{\lambda}), h_2(\frac{1}{\lambda}), h_3(\frac{1}{\lambda})]^T = [1, 1, 1, 0]^T \\ h_{(4)}(\frac{3}{\lambda}) &= [h_0(\frac{3}{\lambda}), h_1(\frac{3}{\lambda}), h_2(\frac{3}{\lambda}), h_3(\frac{3}{\lambda})]^T = [1, 1, -1, 0]^T \\ h_{(4)}(\frac{5}{\lambda}) &= [h_0(\frac{5}{\lambda}), h_1(\frac{5}{\lambda}), h_2(\frac{5}{\lambda}), h_3(\frac{5}{\lambda})]^T = [1, -1, 0, 1]^T \\ h_{(4)}(\frac{7}{\lambda}) &= [h_0(\frac{7}{\lambda}), h_1(\frac{7}{\lambda}), h_2(\frac{7}{\lambda}), h_3(\frac{7}{\lambda})]^T = [1, -1, 0, -1]^T \end{aligned}$$

که این ماتریس را می توان به فرم زیر نوشت:

$$H_{(4)}(x) = \begin{bmatrix} h_{(4)}(\frac{1}{\lambda}) & h_{(4)}(\frac{3}{\lambda}) & h_{(4)}(\frac{5}{\lambda}) & h_{(4)}(\frac{7}{\lambda}) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۳. همان روش را می توان به صورت ماتریس هار مرتبه هشت زیر نوشت:

$$H_{(8)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال ۲.۸.۴. ماتریس عملیاتی انتگرال گیری به همان صورتی که نمایش داده شد

با ماتریس عملیاتی مرتبه یک شروع به کار می کنیم:  $P_{(1)} = [\frac{1}{4}]$

۱. ماتریس عملیاتی مرتبه دوم توسط فرمول بازگشتی به دست آمده است و ماتریس عملیاتی از رتبه یک به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_{(2)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۲. ماتریس عملیاتی مرتبه چهار توسط فرمول بازگشتی به دست آمده است و ماتریس عملیاتی از رتبه دوم به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_{(4)} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۳. ماتریس عملیاتی مرتبه هشت توسط فرمول بازگشتی به دست آمده است و ماتریس عملیاتی از رتبه چهار به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_{(4)} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 32 & -16 & -8 & -8 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 16 & 0 & -8 & 8 & -4 & -4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





# فصل ۵

## روش‌های موجک برای معادلات دیفرانسیل

توابع موجک در بسیاری از کاربردها نظیر معادلات دیفرانسیل، پردازش تصاویر، فشرده‌سازی اطلاعات و گرافیک‌های کامپیوتری به‌طور بسیار جذاب ظاهر می‌شوند. در این پایان‌نامه، از روش موجک هار برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده می‌کنیم. در این فصل، معادلات دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم و معادلات دیفرانسیل جزئی خطی را در نظر می‌گیریم.

### ۱.۵ روش حل برای معادلات دیفرانسیل

موجک هار، ساده‌ترین موجک متعامد با تکیه‌گاه فشرده است. نقص اساسی موجک این است که پیوسته نیست و از آن جایی که در نقاط ناپیوستگی مشتق وجود ندارد، از این رو به کار بردن موجک هار برای حل معادلات دیفرانسیل به‌طور مستقیم ممکن نیست. دو روش برای اجتناب از این مشکل ناپیوستگی وجود دارد. اولین روش این است که توابع هار قطعه‌ای ثابت را می‌توان با اسپلاین‌های درونیاب مرتب کرد. این روش توسط کاتانی<sup>۱</sup> ارائه شد. این روش تا حد زیادی روند حل را پیچیده می‌کند که مزیت اصلی موجک هار یعنی

<sup>۱</sup>Cattani

سادگی آن را از بین می‌برد.

دومین روش یعنی همان روشی که اتخاذ می‌کنیم، استفاده از روش چن<sup>۲</sup> و هسیائو<sup>۳</sup> است. آن‌ها بسط بالاترین مرتبه مشتق معادله دیفرانسیل را به جای بسط جواب پیشنهاد دادند. سپس از بسط، به تعداد مرتبه مشتق انتگرال گرفته تا بسط جواب و تمام مشتق‌های آن به دست آید. در روش سری‌های توانی، با بسط سری‌های توانی جواب شروع می‌کنیم و سپس بسط مشتقات را از طریق دیفرانسیل‌گیری به دست می‌آوریم. در این جا، با بسط موجک از بالاترین مشتق شروع به کار می‌کنیم و جواب خود را از طریق انتگرال‌گیری و بسط موجک متعلق به مشتقات مرتبه پایین‌تر را به دست می‌آوریم.

در این پایان‌نامه روش چن و روش هسیائو (CHM)<sup>۴</sup> را اتخاذ خواهیم کرد. چن و هسیائو، احتمالات روش خود را با حل دستگاه خطی معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) و معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) نمایش دادند [۲۳، ۲۴].

ایده اصلی تکنیک روش چن و هسیائو (CHM)، تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک دستگاه از معادلات جبری است؛ که شامل تعداد متناهی متغیر می‌باشد و روند حل یا کاهش یافته و یا بر این اساس ساده شده است [۱۷، ۱۸].

شرایط مرزی با استفاده از ثابت‌های انتگرال‌گیری گنجانده شده‌اند. این روش برای موجک‌ها توسط روش چن و هسیائو تحقق یافته است [۱۸، ۲۰].  
که در پنج گام زیر داده شده است:

**گام (۱)** در معادله دیفرانسیل، بالاترین مشتق در سری‌ها را بسط می‌دهیم.

**گام (۲)** بسط موجود در گام (۱) تا رسیدن به تابع مجهول  $u(x)$  با استفاده از شرایط داده شده تا زمانی که به توسعه جواب متعلق به این جواب برسیم انتگرال می‌گیریم، با این روش، بسط جواب و بسط تمام مشتقات آن‌ها در معادله ظاهر می‌شوند.

**گام (۳)** بسط جواب و مشتقات آن را که در گام (۲) به دست آمده را در معادله جایگزین می‌کنیم و در نقاط هم‌محلی  $x_l = \frac{2l-1}{4m}$  یا  $x_l = \frac{l-0.5}{4m}$ ،  $l = 1, 2, \dots, 2m$ ، برای یک دقت داده شده  $M$ ، محاسبه می‌کنیم. نتیجه دستگاهی از معادلات جبری است.

**گام (۴)** دستگاه معادلات جبری به دست آمده در گام (۳) را برای ضرایب موجک  $a_i$  حل می‌کنیم.

**گام (۵)** ضرایب  $a_i$  را در بسط جواب برای رسیدن به جواب با دقت  $M$  جایگزین می‌کنیم.

<sup>۲</sup>Chen

<sup>۳</sup>Hsiao

<sup>۴</sup>Chen and Hsiao Method

## ۲.۵ تبدیل موجک هار برای معادلات دیفرانسیل معمولی خطی

در این بخش، معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) خطی از مرتبه دوم را با استفاده از روش موجک هار حل می‌کنیم.

صورت کلی معادله دیفرانسیل معمولی خطی از مرتبه دو به صورت زیر است،

$$u'' + \mu_1(x)u'(x) + \mu_2(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.5)$$

قصد داریم تا سطح دقت  $J$  را اجرا کنیم. از این رو،  $2M = 2^{J+1}$  را در نظر می‌گیریم. بازه  $[a, b]$  به  $2M$  زیر بازه تقسیم خواهد شد، از این رو  $\Delta x = \frac{b-a}{2M}$  و ماتریس‌ها از بعد  $2M \times 2M$  هستند.

### مسائل مقدار اولیه

به منظور توصیف و شرح تقریب جواب‌ها برای مسئله مقدار اولیه خطی مرتبه دو از سری موجک هار استفاده می‌کنیم.

فرم کلی مسئله مقدار اولیه خطی مرتبه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u'' + \mu_1(x)u'(x) + \mu_2(x)u(x) = f(x) \quad (2.5)$$

با شرایط اولیه  $u'(\circ) = \sigma$ ،  $u(\circ) = \alpha$  که در آن فرض می‌کنیم ضرایب  $\mu_1(x)$  و  $\mu_2(x)$  در سری‌های هار بسط پذیر هستند.

برای شروع تقریب، از روند کار لپیک را پیروی می‌کنیم [۱۵، ۲۱، ۲۲، ۲۴].

گام (۱) فرض می‌کنیم که

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x), \quad (3.5)$$

برای یک سطح دقت،  $M$  داده شده است.

گام (۲) اکنون از روابط (۳.۵) و (۴.۵) از  $\circ$  تا  $x$  به منظور رسیدن به رابطه زیر انتگرال می‌گیریم:

$$u'(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + u'(\circ) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + \sigma \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + x\sigma + u(\circ) \\ &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + x\sigma + \alpha \end{aligned} \quad (5.5)$$

گام (۳) روابط (۳.۵) تا (۵.۵) را در رابطه (۲.۵) جایگزین می‌کنیم، سپس با ساده‌سازی و محاسبه در نقاط هم‌محل  $x_l = \frac{2l-1}{2m}$  و  $l = 1, 2, \dots, 2m$  داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(x_l) + \mu_1(x_l)P_{i,1}(x_l) + \mu_2(x_l)P_{i,2}(x_l)] \\ = f(x_l) - \mu_1(x_l)\sigma - \mu_2(x_l)[x_l\sigma - \alpha] \end{aligned} \quad (۶.۵)$$

گام (۴) دستگاه واقع در گام (۳) را برای ضرایب موجک  $a_i$  حل می‌کنیم.

گام (۵) جواب عددی را برای  $u(x)$  با استفاده از ضرایب  $a_i$  در بسط سری‌های موجک جواب به دست می‌آوریم.

همین روند، برای مسائل مقدار اولیه مرتبه بالاتر نیز در روشی مشابه تعمیم یافته است.

مثال ۱.۲.۵. مسئله مقدار اولیه همگن مرتبه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u''(x) + \frac{1}{4}u(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

با جواب دقیق

$$u(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

با استفاده از سطح سه از موجک هار ( $J = 3$ )

گام (۱) بالاترین مشتق  $u''(x)$  را بسط می‌دهیم،

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x)$$

گام (۲) از هر دو طرف رابطه فوق از  $0$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \int_0^x u''(\tau) d\tau &= \int_0^x \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(\tau) d\tau \\ \Rightarrow u'(x) - u'(0) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_0^x h_i(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$u'(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + 0$$

دوباره، از هر دو طرف رابطه جدید از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{\circ}^x u'(\tau) d\tau = \int_{\circ}^x \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x)$$

$$u(x) - u(\circ) = \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_{\circ}^x a_i P_{i,1}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x)$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + 1$$

**گام (۳)**  $u(x)$  و مشتقات آن را در معادله جایگذاری می‌کنیم و در نقاط هم‌محلی  $x_l$  محاسبه می‌نماییم.

$$u''(x) + \frac{1}{4}u(x) = \circ$$

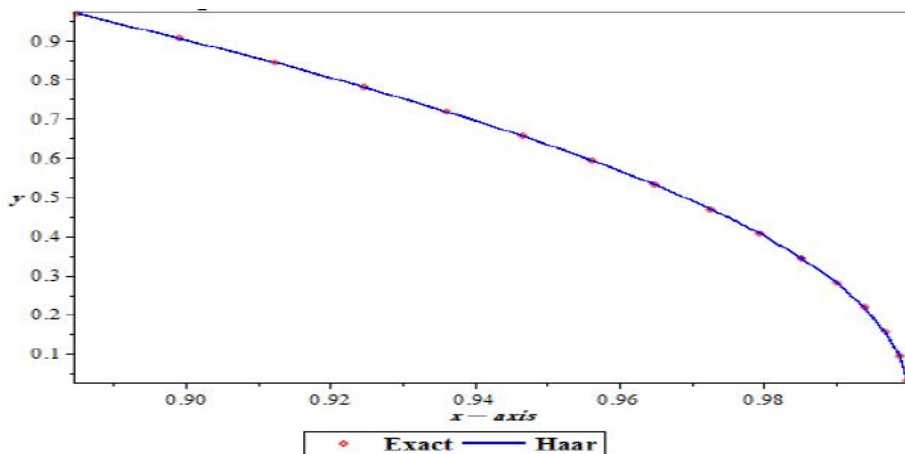
$$\sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) = -\frac{1}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i \left[ h_i(x) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2M} P_{i,2}(x) \right] = -\frac{1}{4}, \quad l = 1, 2, \dots, 16$$

**گام (۴)** دستگاه معادله خطی را با روش مستقیم حل می‌کنیم، ضرایب موجک  $a_i$  را به دست می‌آوریم.

**گام (۵)** ضرایب حاصل از گام (۴) را در  $u(x)$  برای دستیابی به جواب جایگذاری می‌کنیم.

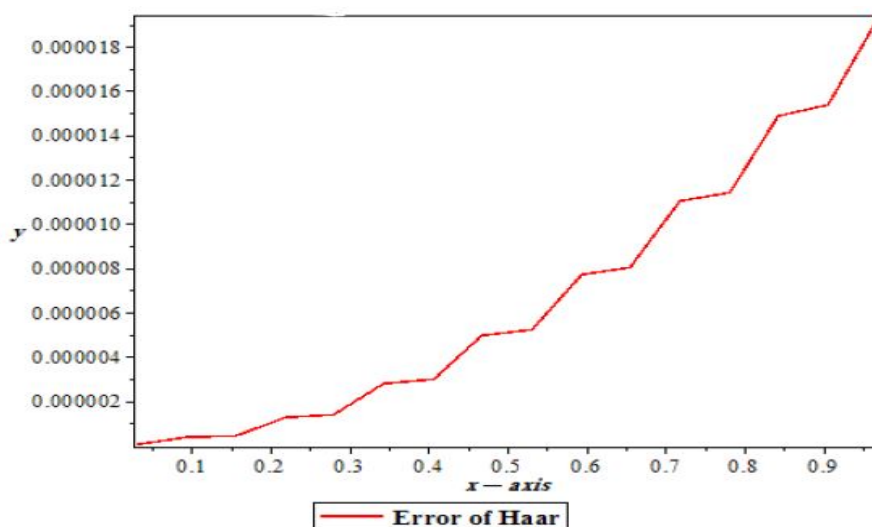
جدول ۱.۵ جواب‌های تقریبی و دقیق در نقاط مختلف را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۵: جواب‌های عددی و دقیق مثال ۱.۲.۵

$(x_i/32)$	جواب دقیق	جواب هار	خطا
۱	$6/000 \times 10^{-8}$	۰.۹۹۹۸۷۷۹۹	۰.۹۹۹۸۷۷۹۳
۳	$3/400 \times 10^{-7}$	۰.۹۹۸۹۰۱۹۰	۰.۹۹۸۹۰۱۵۷
۵	$4/100 \times 10^{-7}$	۰.۹۹۶۵۰۲۱	۰.۹۹۶۹۴۹۷۹
۷	$1/250 \times 10^{-6}$	۰.۹۹۴۰۲۵۷۶	۰.۹۹۴۰۲۴۵۲
۹	$1/400 \times 10^{-6}$	۰.۹۹۰۱۲۹۹۹	۰.۹۹۰۱۲۸۵۹
۱۱	$2/780 \times 10^{-6}$	۰.۹۸۵۲۶۸۶۰	۰.۹۸۵۲۶۵۸۲
۱۳	$3/010 \times 10^{-6}$	۰.۹۷۹۴۴۳۹۷	۰.۹۷۹۴۴۰۹۵
۱۵	$4/940 \times 10^{-6}$	۰.۹۷۲۶۶۴۶۱	۰.۹۷۲۶۵۹۶۸
۱۷	$5/240 \times 10^{-6}$	۰.۹۶۴۹۳۳۸۵	۰.۹۶۴۹۲۸۶۲
۱۹	$7/690 \times 10^{-6}$	۰.۹۵۶۲۶۳۰۱	۰.۹۵۶۲۵۵۳۲
۲۱	$8/050 \times 10^{-6}$	۰.۹۴۶۶۵۶۳۱	۰.۹۴۶۶۴۸۲۶
۲۳	$1/101 \times 10^{-5}$	۰.۹۳۶۱۲۷۸۳	۰.۹۳۶۱۱۶۸۱
۲۵	$1/143 \times 10^{-5}$	۰.۹۲۴۶۸۲۶۹	۰.۹۲۴۶۷۱۲۶
۲۷	$1/489 \times 10^{-5}$	۰.۹۱۲۳۳۷۶۸	۰.۹۱۲۳۲۲۷۸
۲۹	$1/536 \times 10^{-5}$	۰.۸۹۹۰۹۸۸۰	۰.۸۹۹۰۸۳۴۴
۳۰	$1/929 \times 10^{-5}$	۰.۸۸۴۹۸۵۴۵	۰.۸۸۴۶۶۱۶

جدول ۱.۵: جواب‌های عددی مثال ۱.۲.۵



شکل ۲.۵: خطا در جواب موجک مثال ۱.۲.۵

مثال ۲.۲.۵. مسئله مقدار اولیه غیرهمگن مرتبه دوم را در نظر می‌گیریم:

$$u''(x) + u(x) = \sin(x) + x \cos(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1.$$

با جواب دقیق

$$u(x) = \cos(x) + \frac{5}{4} \sin(x) + \frac{1}{4} (x^2 \sin(x) - x \cos(x))$$

با استفاده از سطح سه از موجک هار (یعنی  $J = 3$ )

گام (۱) بالاترین مشتق یعنی  $u''(x)$  را بسط می‌دهیم،

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x)$$

گام (۲) از هر دو طرف رابطه فوق از  $0$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^x u''(\tau) d\tau = \int_0^x \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow u'(x) - u'(0) = \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_0^x h_i(\tau) d\tau$$

$$u'(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + 1$$

دوباره، هر دو طرف رابطه جدید را از  $0$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^x u'(\tau) d\tau = \int_0^x \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(\tau) d\tau + \int_0^x d\tau$$

$$u(x) - u(0) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + x$$

$$\Rightarrow u(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + x + 1$$

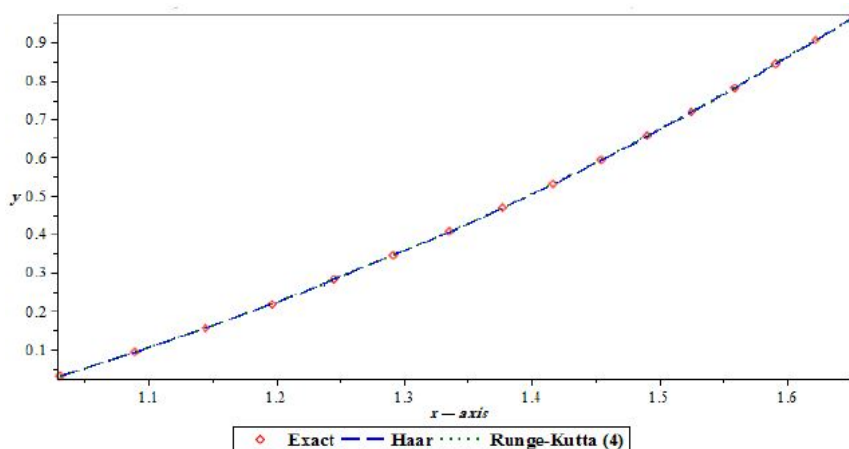
گام (۳)  $u(x)$  و مشتقات آن را در معادله جایگذاری می‌کنیم و در نقاط هم‌محلی  $x_l$  محاسبه می‌نماییم:

$$u''(x) + u(x) = \sin(x) + x \cos(x)$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(x_l) + P_{i,2}(x_l)] = \sin(x_l) x_l \cos(x_l) - x_l - 1, \quad l = 1, 2, \dots, 16$$

گام (۴) دستگاه معادلات خطی موجود در گام (۳) را حل می‌کنیم و ضرایب موجک  $a_i$  را به دست می‌آوریم.

گام (۵) ضرایب حاصل از گام (۴) را در  $u(x)$  برای دستیابی به جواب جایگذاری می‌کنیم. جدول ۲.۵ جواب‌های تقریبی و دقیق در نقاط مختلف را نشان می‌دهد.



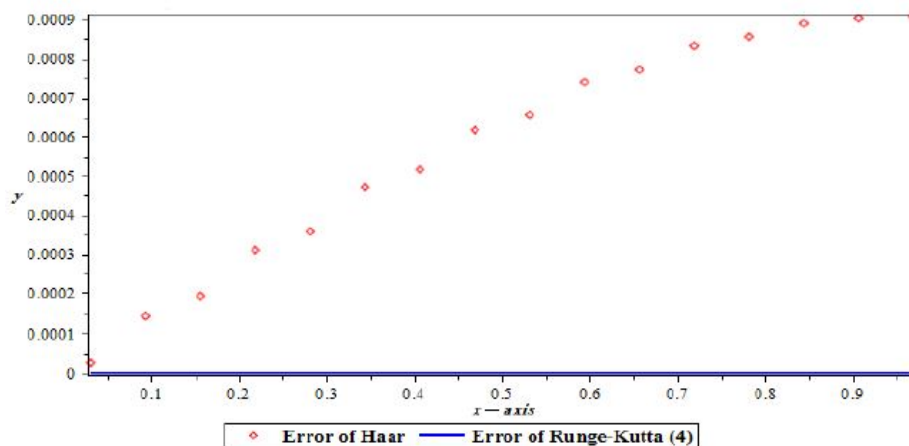
شکل ۳.۵: جواب‌های عددی و دقیق (جواب هار و رانگ کوتای مرتبه ۴)

$(x_l/32)$	جواب دقیق	جواب هار	رانگ کوتا مرتبه ۴
۱	۱/۰۳۰۷۶۶۸۴	۱/۰۳۰۷۹۹۳۰۵	۱/۰۳۰۷۶۶۸۴
۳	۱/۰۸۹۴۹۵۷۱	۱/۰۸۹۶۳۷۴۴	۱/۰۸۹۴۹۵۷۲
۵	۱/۱۴۴۶۹۹۶۹	۱/۴۴۸۹۲۲۲	۱/۱۴۴۶۹۹۶۹
۷	۱/۹۶۶۴۳۲۴	۱/۹۶۹۵۳۲۹	۱/۹۶۶۴۳۲۵
۹	۱/۲۴۵۵۹۴۱۱	۱/۲۴۵۹۵۳۲۹	۱/۲۴۵۵۹۴۱۱
۱۱	۱/۲۹۱۸۱۸۵۳	۱/۲۹۲۲۹۰۱۵	۱/۲۹۱۸۱۸۵۳
۱۳	۱/۳۳۵۵۷۶۵۹	۱/۳۳۶۰۹۳۲۰	۱/۳۳۵۵۷۶۵۹
۱۵	۱/۳۷۷۱۱۷۶۷	۱/۳۷۷۳۵۵۷	۱/۳۷۷۱۱۷۶۸
۱۷	۱/۴۱۶۶۷۶۰۵	۱/۴۱۷۳۳۳۱۱	۱/۴۱۶۶۷۶۰۶
۱۹	۱/۴۵۴۴۶۶۷۴	۱/۴۵۵۲۰۷۶۹	۱/۴۵۴۴۶۶۷۵
۲۱	۱/۴۹۰۶۸۱۴۸	۱/۴۹۱۴۵۴۰۹	۱/۴۹۰۶۸۱۵۰
۲۳	۱/۵۲۵۴۸۵۱۳	۱/۵۲۶۳۱۹۰۴	۱/۵۲۵۴۸۵۱۴
۲۵	۱/۵۵۹۰۱۲۲۲	۱/۵۵۹۸۶۸۸۹	۱/۵۵۹۰۱۲۲۳
۲۷	۱/۵۹۱۳۶۳۹۰	۱/۵۹۲۲۵۵۰۴	۱/۵۹۱۳۶۳۹۱
۲۹	۱/۶۲۲۶۰۵۳۱	۱/۶۲۳۵۰۹۳۵	۱/۶۲۲۶۰۵۳۲
۳۱	۱/۶۵۲۷۶۳۲۰	۱/۶۵۳۶۷۱۷۵	۱/۶۵۲۷۶۳۲۱

جدول ۲.۵: روش موجک هار و رانگ کوتای مرتبه ۴، برای مثال ۲.۲.۵



## تبدیل موجک هار برای معادلات دیفرانسیل معمولی خطی ۶۱



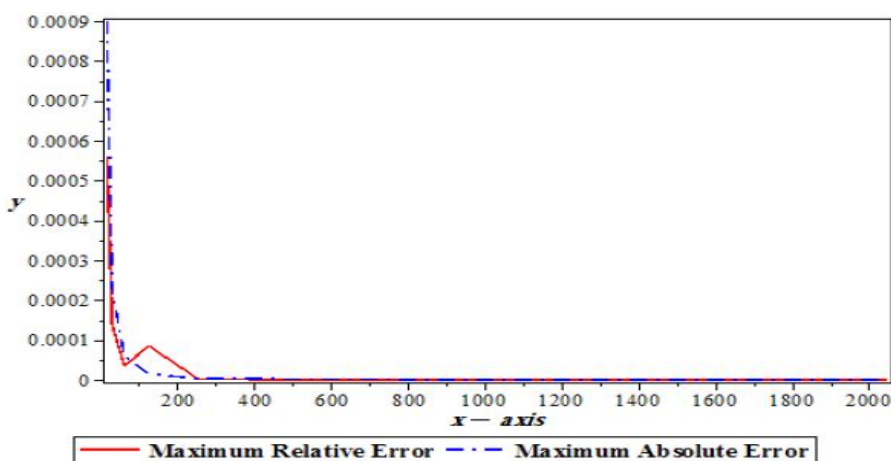
شکل ۴.۵: خطای روش موجک هار و رانگ کوتای مرتبه‌ی ۴ برای مثال ۲.۲.۵

$(x_i/32)$	خطای هار	خطای رانگ کوتا مرتبه ۴
۱	$2/2610 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-8}$
۳	$1/4173 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۵	$1/9253 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۷	$3/1004 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۹	$3/5896 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-7}$
۱۱	$4/7163 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۱۳	$5/1662 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۱۵	$6/1790 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۱۷	$6/5705 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۱۹	$7/4095 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۲۱	$7/7260 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-7}$
۲۳	$8/3390 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-7}$
۲۵	$8/5663 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۲۷	$8/9113 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۲۹	$9/0404 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$
۳۱	$9/0855 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-8}$

جدول ۳.۵: خطای روش موجک هار و رانگ کوتای مرتبه ۴ برای مثال (۲.۵)

$L_{mre}$	نسبت $L_\infty$	$L_\infty$	$2M$	سطح دقت
J=۳	۱۶	$9/0855 \times 10^{-4}$		$5/6024 \times 10^{-4}$
J=۴	۳۲	$2/2735 \times 10^{-4}$	$0/2525044810$	$1/3881 \times 10^{-4}$
J=۵	۶۴	$5/6910 \times 10^{-5}$	$0/2503188916$	$3/4433 \times 10^{-5}$
J=۶	۱۲۸	$1/4220 \times 10^{-5}$	$0/2498682130$	$8/5655 \times 10^{-6}$
J=۷	۲۵۶	$3/5600 \times 10^{-6}$	$0/2503516174$	$2/1491 \times 10^{-6}$
J=۸	۵۱۲	$8/9010 \times 10^{-7}$	$0/2500280899$	$5/3433 \times 10^{-7}$
J=۹	۱۰۲۴	$2/2011 \times 10^{-7}$	$0/2472868217$	$1/3201 \times 10^{-7}$
J=۱۰	۲۰۸۴	$6/0012 \times 10^{-8}$	$0/2726454954$	$3/5901 \times 10^{-8}$

جدول ۴.۵: همگرایی موجک هار برای مسئله مقدار اولیه



شکل ۵.۵: مقایسه بین خطای نسبی ماکزیمم و خطای مطلق ماکزیمم در مثال

۲.۲.۵

مثال ۳.۲.۵. مسئله مقدار اولیه مرتبه چهار زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u^{(4)}(x) + xu(x) = 16 \sin(2x) + x \sin(2x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 2, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = -8.$$

با جواب دقیق

$$u(x) = \sin(2x)$$

با استفاده از سطح سه موجک هار ( $J = 3$ )

گام (۱) بالاترین مشتق یعنی  $u^{(۴)}$  را بسط می‌دهیم.

$$u^{(۴)}(x) = \sum_{i=1}^{۲M} a_i h_i(x)$$

گام (۲) از هر دو طرف رابطه فوق از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{\circ}^x u^{(۴)}(\tau) d\tau = \int_{\circ}^x \sum_{i=1}^{۲M} a_i h_i(\tau) d\tau$$

$$u'''(x) - u'''(\circ) = \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,1}(x) \Rightarrow u'''(x) = \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,1}(x) + u'''(\circ)$$

$$u'''(x) = \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,1}(x) - \lambda$$

دوباره، از هر دو طرف رابطه جدید از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{\circ}^x u'''(\tau) d\tau = \int_{\circ}^x \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,1}(\tau) d\tau - \int_{\circ}^x \lambda d\tau$$

$$\Rightarrow u''(x) - u''(\circ) = \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,2}(x) - \lambda x$$

$$\Rightarrow u''(x) = \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,2}(x) - \lambda x$$

دوباره، از هر دو طرف رابطه جدید از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{\circ}^x u''(\tau) d\tau = \int_{\circ}^x \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,2}(\tau) d\tau - \int_{\circ}^x \lambda(\tau) d\tau$$

$$u'(x) - u'(\circ) = \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,3}(x) - \frac{1}{2} \lambda x^2$$

$$u'(x) = \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,3}(x) - \frac{1}{2} \lambda x^2 + \frac{1}{2} \lambda \circ^2$$

دوباره، از هر دو طرف رابطه جدید از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{\circ}^x u'(\tau) d\tau = \int_{\circ}^x \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,3}(\tau) d\tau - \int_{\circ}^x \frac{1}{6} \lambda(\tau)^3 d\tau + \int_{\circ}^x \frac{1}{2} \lambda \tau d\tau$$

$$u(x) - u(\circ) = \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,4}(x) - \frac{1}{24} \lambda x^4 + \frac{1}{4} \lambda x^2$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{۲M} a_i P_{i,4}(x) - \frac{1}{24} \lambda x^4 + \frac{1}{4} \lambda x^2 + u(\circ)$$

گام (۳)  $u(x)$  و مشتقات آن در معادله جایگذاری می‌کنیم و در نقاط هم‌محل  $x_l$ ، محاسبه می‌نماییم:

$$u^{(4)}(x) + xu(x) = 16 \sin(2x) + x \sin(2x)$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) x \left( \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,4}(x) - \frac{4}{3} x^3 + 2x \right) = 16 \sin(2x) + x \sin(2x)$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(x_l) + x_l P_{i,4}(x_l)] = 16 \sin(2x_l) + x_l \sin(2x_l) + \frac{4}{3} x_l^4 - 2x_l^2, \quad l = 1, 2, \dots, 16$$

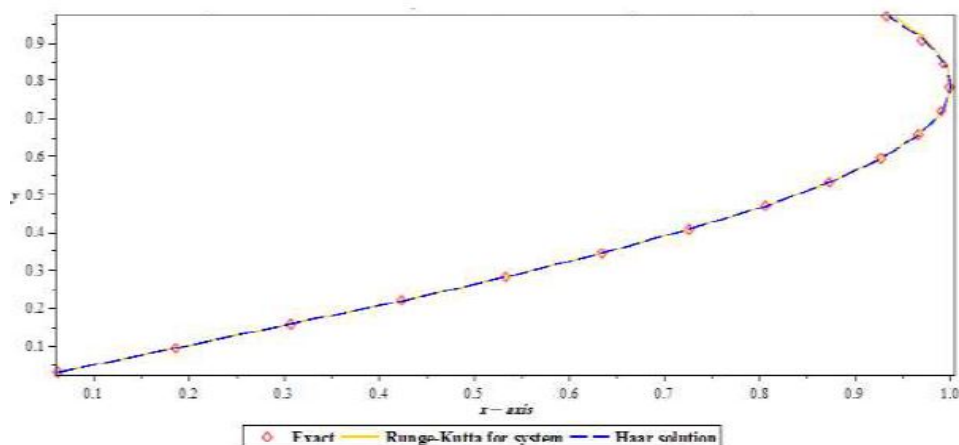
گام (۴) دستگاه معادله خطی را حل می‌کنیم. ضرایب موجک،  $a_i$  را به دست می‌آوریم.

گام (۵) ضرایب حاصل از گام (۴) را در  $u(x)$  برای دستیابی به جواب جایگذاری می‌کنیم.

جدول ۵.۵ نشان‌دهنده جواب‌های دقیق و تقریبی در نقاط مختلف است.

$(x_l/32)$	جواب دقیق	جواب هار	رانگ کوتای مرتبه ۴ برای دستگاه
۱	۰/۰۶۲۴۵۹۳۲	۰/۰۶۲۴۵۹۳۹	۰/۰۶۲۴۵۹۳۱
۳	۰/۱۸۶۴۰۳۳۰	۰/۱۸۶۴۰۷۶۱	۰/۱۸۶۴۰۳۲۸
۵	۰/۳۰۷۴۳۸۵۱	۰/۳۰۷۴۶۲۰۷	۰/۳۰۷۴۳۸۶۴
۷	۰/۴۲۳۶۷۶۲۶	۰/۴۲۳۷۴۰۶۳	۰/۴۲۳۶۷۷۴۱
۹	۰/۵۳۳۳۰۲۶۷	۰/۵۳۳۴۳۷۲۶	۰/۵۳۳۳۰۸۰۴
۱۱	۰/۶۳۴۶۰۷۰۸	۰/۶۳۴۸۴۴۰۹	۰/۶۳۴۶۲۵۰۲
۱۳	۰/۷۲۶۰۰۸۶۶	۰/۷۲۶۳۸۳۵۴	۰/۷۲۶۰۵۷۳۴
۱۵	۰/۸۲۶۰۸۱۱۱	۰/۸۰۶۶۲۷۷۵	۰/۸۰۶۱۹۵۲۲
۱۷	۰/۸۷۳۵۷۴۹۴	۰/۸۷۴۳۲۵۷۶	۰/۸۷۳۸۱۴۷۱
۱۹	۰/۹۲۷۴۳۶۹۲	۰/۹۲۸۴۱۹۰۱	۰/۹۲۷۸۹۹۶۸
۲۱	۰/۹۶۶۸۲۶۵۶	۰/۹۶۸۰۶۱۵۹	۰/۹۶۷۶۶۰۸۸
۲۳	۰/۹۹۱۱۲۹۱۹	۰/۹۹۲۶۳۰۷۲	۰/۹۹۲۵۵۱۷۳
۲۵	۰/۹۹۹۹۶۵۵۹	۱/۰۰۱۷۳۸۵۷	۱/۰۰۲۲۸۰۳۷
۲۷	۰/۹۹۳۱۹۷۸۵	۰/۹۹۵۲۳۶۸۵	۰/۹۹۶۸۱۸۰۳
۲۹	۰/۹۷۰۹۳۱۶۰	۰/۹۷۳۲۱۹۱۴	۰/۹۷۶۴۰۳۲۴
۳۱	۰/۹۳۳۵۱۴۲۸	۰/۹۳۶۰۱۹۰۵	۰/۹۴۱۵۴۱۹۰

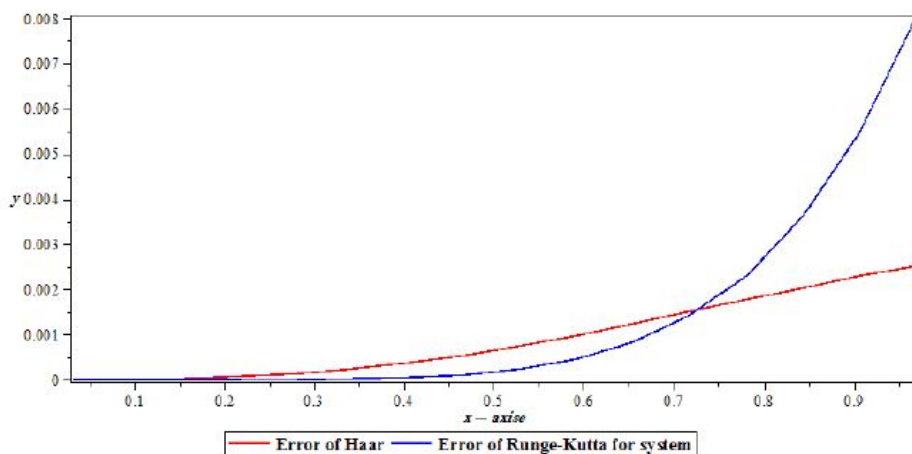
جدول ۵.۵: جواب عددی مثال ۳.۲.۵



شکل ۶.۵: جواب‌های عددی و دقیق مثال ۳.۲.۵

$(x_i/32)$	خطای هار	خطای رانگ کوتای مرتبه ۴ برای دستگاه
۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱
۳	۰/۰۰۰۰۰۰۴۳۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۲
۵	۰/۰۰۰۰۰۰۲۳۵۶	۰/۰۰۰۰۰۰۰۱۳
۷	۰/۰۰۰۰۰۰۶۴۳۷	۰/۰۰۰۰۰۰۱۱۵
۹	۰/۰۰۰۰۰۱۳۴۵۹	۰/۰۰۰۰۰۰۵۳۷
۱۱	۰/۰۰۰۰۰۲۳۷۰۱	۰/۰۰۰۰۰۰۱۷۹۴
۱۳	۰/۰۰۰۰۰۳۷۴۸۸	۰/۰۰۰۰۰۰۴۸۶۸
۱۵	۰/۰۰۰۰۰۵۴۶۶۴	۰/۰۰۰۰۰۱۱۴۱۱
۱۷	۰/۰۰۰۰۰۷۵۰۸۲	۰/۰۰۰۰۰۲۳۹۷۷
۱۹	۰/۰۰۰۰۰۹۸۲۱۰	۰/۰۰۰۰۰۴۶۲۷۶
۲۱	۰/۰۰۰۰۱۲۳۵۰۴	۰/۰۰۰۰۰۸۳۴۳۲
۲۳	۰/۰۰۰۰۱۵۰۱۵۳	۰/۰۰۰۰۱۴۲۲۵۴
۲۵	۰/۰۰۰۰۱۷۷۷۲۹۸	۰/۰۰۰۰۲۳۱۴۷۸
۲۷	۰/۰۰۰۰۲۰۳۹۰۰	۰/۰۰۰۰۳۶۲۰۱۸
۲۹	۰/۰۰۰۰۲۲۸۷۵۵	۰/۰۰۰۰۵۴۷۱۶۲
۳۱	۰/۰۰۰۰۲۵۰۴۷۷	۰/۰۰۰۰۸۰۲۷۶۲

جدول ۶.۵: خطای روش موجک هار و رانگ کوتای مرتبه ۴ برای دستگاه مثال ۳.۲.۵



شکل ۷.۵: خطای روش موجک هار و رانگ کوتای مرتبه ۴ برای دستگاه مثال ۳.۲.۵

### جواب کلی برای مسائل مقدار مرزی

هدف از این بخش ایجاد یک روش هم‌محلی ساده با توابع پایه‌ای هار برای حل عددی مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم خطی است که ناشی از مدل‌سازی ریاضی کاربردهای مهندسی مختلف است. برای بررسی کاربرد موجک‌های هار، بر مسائل مقدار مرزی تعریف شده در بازه  $[0, 1]$  و از نوع زیر تمرکز می‌کنیم.

فرم کلی مسئله مقدار مرزی خطی مرتبه دو به صورت زیر است:

$$u''(x) + \mu_1(x)u'(x) + \mu_2 u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (7.5)$$

مشروط به چهار مجموعه از شرایط مرزی زیر است:

حالت ۱ /  $u'(0) = \alpha_1, \quad u'(1) = \beta_1;$

حالت ۲ /  $u(0) = \alpha_2, \quad u(1) = \beta_2;$

حالت ۳ /  $u'(0) = \alpha_3, \quad u(1) = \beta_3;$

حالت ۴ /  $u(0) = \alpha_4, \quad u'(1) = \beta_4;$

که در آن  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  و  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  ثابت‌های حقیقی هستند. از روند کار لپیک [۱۵، ۲۱، ۲۴، ۲۷] پیروی و نماد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$c_{i,1} = \int_0^1 P_{i,1}(\tau) d\tau$$

حالت ۱ /  $u''(x) = \Phi(x, u(x), u'(x))$  با  $u'(1) = \beta_1$  و  $u'(0) = \alpha_1$

گام (۱) رابطه زیر را در نظر می‌گیریم.

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad (8.5)$$

گام (۲) اکنون از رابطه (۸.۵) از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + u'(\circ) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + \alpha_1 \quad (9.5)$$

حال از رابطه (۹.۵) از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \int_x^1 u''(\tau) d\tau &= \int_x^1 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(\tau) d\tau \\ \int_x^1 u''(\tau) d\tau &= \sum_{i=1}^{2M} \left[ \int_{\circ}^1 a_i h_i(\tau) d\tau - \int_{\circ}^x a_i h_i(\tau) d\tau \right] \\ \beta_1 - u'(x) &= \alpha_1 - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) \end{aligned} \quad (10.5)$$

براساس روابط (۹.۵) و (۱۰.۵) داریم:

$$a_1 = \beta_1 - \alpha_1$$

از این‌رو، تقریب‌های متناظر برابرند با:

$$u''(x) = (\beta_1 - \alpha_1) h_1(x) + \sum_{i=2}^{2M} a_i h_i(x) \quad (11.5)$$

از رابطه (۱۱.۵) از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$u' = \alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1) P_{1,1}(x) + \sum_{i=2}^{2M} a_i P_{i,1}(x) \quad (12.5)$$

دوباره، از رابطه (۱۲.۵) از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$u(x) = u(\circ) + \alpha_1 x + (\beta_1 - \alpha_1) P_{1,2}(x) + \sum_{i=2}^{2M} a_i P_{i,2}(x) \quad (13.5)$$

گام (۳) دستگاه معادلات را با جایگزینی مقدار  $u(x)$ ،  $u'(x)$  و  $u''(x)$  را در معادله دیفرانسیل

به‌دست می‌آوریم و سپس با ساده‌سازی و محاسبه در نقاط هم‌محلی  $x_l = \frac{2l-1}{2m}$ ،  $l = 1, 2, \dots, 2m$  داریم:

$$\begin{aligned} (\beta_1 - \alpha_1) h_1(x_l) + \sum_{i=2}^{2M} a_i h_i(x_l) &= \Phi \left( x_l, \alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1) P_{1,1}(x_l) + \right. \\ &\left. \sum_{i=2}^{2M} a_i P_{i,1}(x_l), u(\circ) + \alpha_1 x_l + (\beta_1 - \alpha_1) P_{1,2}(x_l) + \sum_{i=2}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) \right). \end{aligned}$$

گام (۴) دستگاه فوق از معادلات جبری را برای مجهولات  $u(\circ)$  و  $a_i$  برای  $i \neq 1$  حل می‌کنیم.

گام (۵) جواب عددی را برای  $u(x)$  در (۱۳.۵) به دست می‌آوریم.

$$\text{حالت ۲} / u''(x) = \Phi(x, u(x), u'(x)) \text{ با } u(0) = \alpha_2, u(1) = \beta_2$$

گام (۱) رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad (14.5)$$

گام (۲) از رابطه (۱۴.۵) از  $0$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم:

$$u'(x) = u'(0) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) \quad (15.5)$$

دوباره، از رابطه (۱۵.۵) از  $0$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$u(x) = u(0) + xu'(0) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) \quad (16.5)$$

حال  $x = 1$  را در معادله (۱۶.۵) به منظور رسیدن به رابطه زیر جایگزین می‌کنیم:

$$u(1) = u(0) + u'(0) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 + u'(0) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1)$$

$$u'(0) = \beta_2 - \alpha_2 - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1)$$

$$u'(x) = \alpha_2 + x(\beta_2 - \alpha_2 - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1)) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x)$$

$$u(x) = \alpha_2 + x\beta_2 - x\alpha_2 - x \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) \quad (17.5)$$

$$u'(x) = \beta_2 - \alpha_2 - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) \quad (18.5)$$

گام (۳) دستگاه معادلات را با جایگزینی مقادیر  $u(x)$ ،  $u'(x)$  و  $u''(x)$  در معادله دیفرانسیل

داده شده به دست می‌آوریم، سپس با ساده‌سازی و محاسبه نقاط هم‌محلی  $x_l =$

$$\frac{l-1}{2m}, l = 1, 2, \dots, 2m \text{ داریم:}$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l) = \Phi(x_l, \alpha_2 + x_l \beta_2 - x_l \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l), \beta_2 - \alpha_2 - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l)),$$

$$l = 1, 2, \dots, 16 \quad (19.5)$$



گام (۴) دستگاه فوق از معادلات را برای مجهولات  $a_i$  حل می‌کنیم.

گام (۵) جواب عددی را برای  $u(x)$  در (۱۷.۵) به دست می‌آوریم.

حالت ۳ /  $u''(x) = \Phi(x, u(x), u'(x))$  با  $u'(\circ) = \alpha_3$  و  $u(1) = \beta_3$ ؛

گام (۱) رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad (20.5)$$

گام (۲) حال از رابطه (۲۰.۵) از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$u'(x) = u'(\circ) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x)$$

$$u'(x) = \alpha_3 + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) \quad (21.5)$$

دوباره، از رابطه (۲۱.۵) از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$u(1) - u(x) = \alpha_3 \int_x^1 (\tau) d\tau - \sum_{i=1}^{2M} [a_i \int_{\circ}^1 P_{i,1}(\tau) d\tau + a_i \int_{\circ}^x P_{i,1}(\tau) d\tau]$$

$$u(1) - u(x) = \alpha_3(1-x) - \sum_{i=1}^{2M} a_i C_{i,1} + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x)$$

$$u(x) = \beta_3 - \alpha_3(1-x) - \sum_{i=1}^{2M} a_i C_{i,1} + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) \quad (22.5)$$

گام (۳) مقادیر  $u(x)$ ،  $u'(x)$  و  $u''(x)$  را در معادله دیفرانسیل داده شده جایگذاری می‌کنیم

و دستگاه معادلات حاصل می‌شود، سپس با ساده‌سازی و محاسبه در نقاط

هم‌محلی  $x_l = \frac{l-1}{2m}$ ،  $l = 1, 2, \dots, 2m$  داریم:

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i h_i = \Phi(x_l, \beta_3 - \alpha_3(1-x_l)$$

$$- \sum_{i=1}^{2M} a_i C_{i,1} + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l), \alpha_3 + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x_l))$$

گام (۴) دستگاه معادلات فوق را برای مجهولات  $a_i$  حل می‌کنیم.

گام (۵) جواب عددی را برای  $u(x)$  در رابطه (۲۲.۵) به دست می‌آوریم.

حالت ۴ /  $u''(x) = \Phi(x, u(x), u'(x))$  با  $u'(\circ) = \alpha_4$ ،  $u'(1) = \beta_4$ ؛

گام (۱) رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) \quad (23.5)$$

گام (۲) حال از رابطه (۲۳.۵) نسبت به  $\tau$  از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\begin{aligned} u'(1) - u'(x) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_{\circ}^1 h_i(\tau) d\tau - \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_{\circ}^x h_i(\tau) d\tau \\ u'(x) &= u'(1) - a_1 + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) \\ u'(x) &= \beta_4 - a_1 + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) \end{aligned} \quad (24.5)$$

دوباره، از رابطه (۲۴.۵) نسبت به  $\tau$  از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\begin{aligned} u(x) &= u(\circ) + (\beta_4 - a_1)x + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) \\ u(x) &= \alpha_4 + (\beta_4 - a_1)x + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) \end{aligned} \quad (25.5)$$

گام (۳) مقادیر  $u(x)$ ،  $u'(x)$  و  $u''(x)$  را در معادله دیفرانسیل داده شده جایگذاری می‌کنیم و دستگاه معادلات حاصل می‌شود، سپس با ساده‌سازی و محاسبه در نقاط هم‌محلی

$$x_l = \frac{2l-1}{4m}, \quad l = 1, 2, \dots, 2m$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l) = \Phi(x_l, \alpha_4 + (\beta_4 - a_1)x_l + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l), \beta_4 - a_1 + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x_l))$$

گام (۴) دستگاه معادلات فوق را برای مجهولات  $a_i$ ، با استفاده از روش هم‌محلی حل می‌کنیم.

گام (۵) جواب عددی را برای  $u(x)$  در رابطه (۲۵.۵) به دست می‌آوریم.

مثال ۴.۲.۵. مسائل مقدار مرزی همگن مرتبه دوم زیر را در نظر می‌گیریم.

$$u''(x) - 5u'(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

با جواب دقیق

$$u(x) = \frac{e^5 - e^{5x}}{e^5 - 1}$$

با استفاده از سطح سوم موجک هار (یعنی  $J = 3$ )

گام (۱)  $u''(x)$  را در سری موجک بسط می‌دهیم.

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x)$$

گام (۲) از هر دو طرف رابطه فوق از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{\circ}^x u''(\tau) d\tau = \int_{\circ}^x \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(\tau) d\tau$$

$$u'(x) - u'(\circ) = \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_{\circ}^x h_i(\tau) d\tau$$

$$u'(x) = u'(\circ) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x)$$

دوباره، از هر دو طرف رابطه فوق از  $\circ$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$u(x) = u(\circ) + x u'(\circ) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x)$$

حال  $u(1)$  را برای تعیین  $u'(\circ)$  جایگزین می‌کنیم.

$$u(1) = u(\circ) + u'(\circ) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1)$$

$$u'(\circ) = -1 - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1)$$

$$u(x) = u(\circ) - x - x \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x)$$

$$u(x) = 1 - x - x \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x)$$

گام (۳)  $u(x)$  و مشتقات آن را در معادله جایگذاری می‌کنیم و در نقاط هم‌محلی  $x_l$  بررسی می‌کنیم.

$$u''(x) - \delta u'(x) = \circ$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(x_l) + \delta P_{i,2}(1) - \delta P_{i,1}(x_l)] = -\delta, \quad l = 1, 2, \dots, 16$$

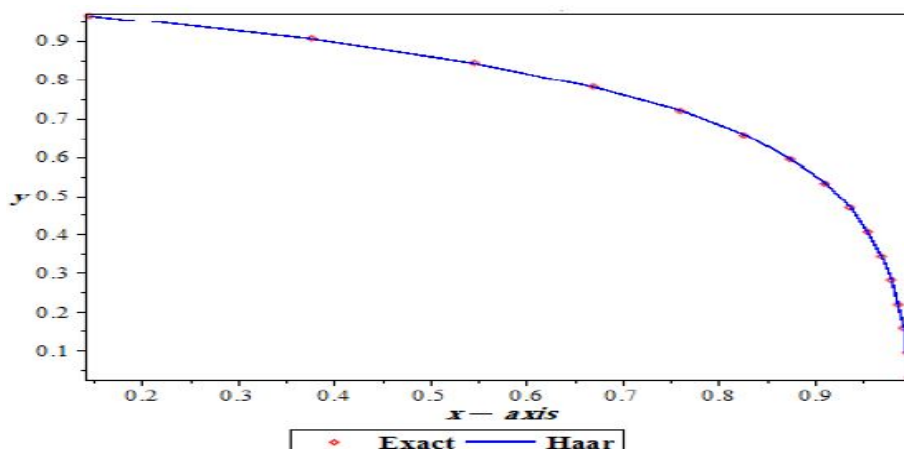
گام (۴) در نقاط هم‌محلی  $x_l$  بررسی می‌کنیم و دستگاه معادلات خطی را برای ضرایب موجک  $a_i$  حل می‌کنیم.

گام (۵) ضرایب را در  $u(x)$  برای رسیدن به جواب جایگذاری می‌کنیم.

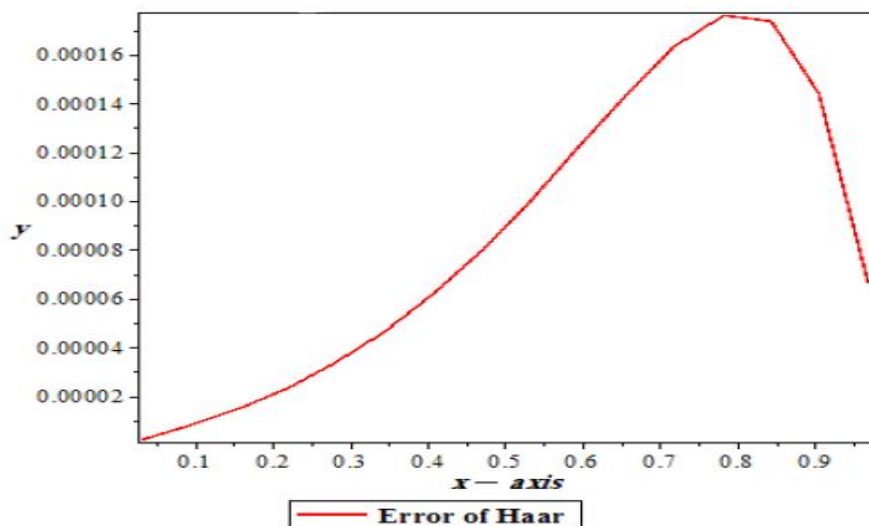
جدول ۷.۵ جواب‌های دقیق در نقاط مختلف را نشان می‌دهد.

$x_l/32$	جواب دقیق	جواب هار	خطا
۱	۰/۹۹۸۸۵۲۷۶	۰/۹۹۸۸۵۵۰۷	۰/۰۰۰۰۰۲۳۱
۳	۰/۹۹۵۹۴۳۴۱	۰/۹۹۵۹۵۱۲۱	۰/۰۰۰۰۰۷۸۰
۵	۰/۹۹۱۹۶۶۷۹	۰/۹۹۱۹۸۱۴۷	۰/۰۰۰۰۱۴۶۸
۷	۰/۹۸۶۵۳۱۴۰	۰/۹۸۶۵۵۴۶۲	۰/۰۰۰۰۲۳۲۲
۹	۰/۹۷۹۱۰۲۱۱	۰/۹۷۹۱۳۵۸۲	۰/۰۰۰۰۳۳۷۱
۱۱	۰/۹۶۸۹۴۷۴۷	۰/۹۶۸۹۹۳۹۱	۰/۰۰۰۰۴۶۴۴
۱۳	۰/۹۵۵۰۶۷۷۲	۰/۹۵۵۱۲۹۳۵	۰/۰۰۰۰۶۱۶۳
۱۵	۰/۹۳۶۰۹۶۳۵	۰/۹۳۶۱۷۵۷۳	۰/۰۰۰۰۷۹۳۸
۱۷	۰/۹۱۰۱۶۵۵۶	۰/۹۱۰۲۶۵۰۸	۰/۰۰۰۰۹۹۵۲
۱۹	۰/۸۷۴۲۲۲۳۸	۰/۸۷۴۸۴۳۷۸	۰/۰۰۰۱۲۱۴۱
۲۱	۰/۸۲۶۲۷۷۲۹	۰/۸۲۶۴۲۰۹۱	۰/۰۰۰۱۴۳۶۲
۲۳	۰/۷۶۰۰۶۰۷۱	۰/۷۶۰۲۲۴۱۷	۰/۰۰۰۱۶۳۶۴
۲۵	۰/۶۶۹۵۵۳۳۷	۰/۶۶۹۷۲۹۵۵	۰/۰۰۰۱۷۶۱۷
۲۷	۰/۵۴۵۸۴۴۵۱	۰/۵۴۶۰۱۸۳۹	۰/۰۰۰۱۷۳۸۸
۲۹	۰/۳۷۶۷۵۴۵۴	۰/۳۷۶۸۹۸۳۷	۰/۰۰۰۱۴۳۸۳
۳۱	۰/۱۴۵۶۳۵۹۶	۰/۱۴۵۷۰۱۹۵	۰/۰۰۰۰۶۵۹۸

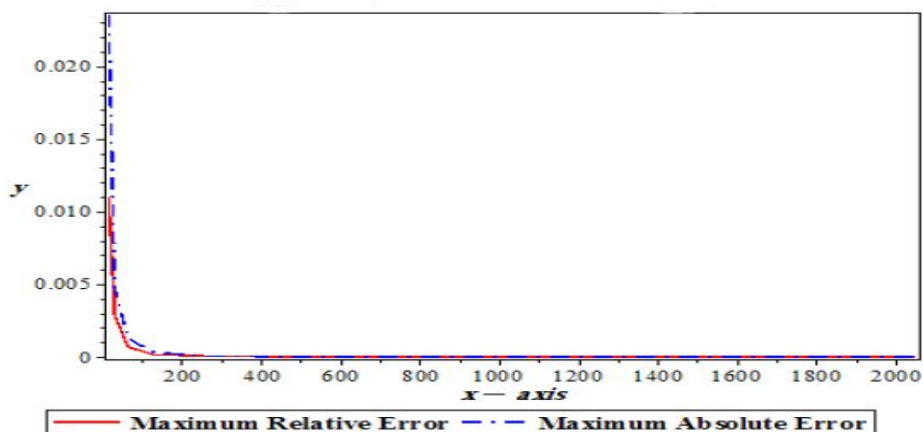
جدول ۷.۵: جواب‌های عددی مثال ۴.۲.۵



شکل ۸.۵: جواب‌های عددی و دقیق مثال ۴.۲.۵



شکل ۹.۵: نمودار خطای هار مثال ۴.۲.۵



شکل ۱۰.۵: مقایسه بین خطای نسبی ماکزیمم و خطای مطلق ماکزیمم در مثال ۴.۲.۵

سطح دقت	$2M$	$L_{\infty}$	نسبت $L_{\infty}$
$J=3$	۱۶	$1/7617 \times 10^{-4}$	
$J=4$	۳۲	$4/33322 \times 10^{-5}$	۰/۲۴۵۹۶۸۷۱۰۰
$J=5$	۶۴	$1/5517 \times 10^{-5}$	۰/۲۴۲۷۱۰۹۰۸۴
$J=6$	۱۲۸	$6/4961 \times 10^{-6}$	۰/۲۵۴۵۰۰۸۵۳۵
$J=7$	۲۵۶	$1/6532 \times 10^{-6}$	۰/۲۵۰۱۵۵۰۰۸۲
$J=8$	۵۱۲	$4/1357 \times 10^{-7}$	۰/۲۵۰۰۹۰۱۳۰۹
$J=9$	۱۰۲۴	$1/343 \times 10^{-7}$	۰/۲۴۹۵۸۱۰۴۳۳
$J=10$	۲۰۴۸	$2/5814 \times 10^{-8}$	۰/۲۴۹۱۲۴۵۸۰۳

جدول ۸.۵: همگرایی موجک هار برای مسئله مقدار مرزی

مثال ۵.۲.۵. مسئله مقدار مرزی غیرهمگن مرتبه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u''(x) + u(x) = \sin(x) + x \cos(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 1, u(1) = 1/667433.$$

با جواب دقیق

$$u(x) = \cos(x) + \frac{5}{4} \sin(x) + \frac{1}{4}(x^2 \sin(x) - x \cos(x))$$

با استفاده از سطح سوم موجک هار (یعنی  $J = 3$ )

گام (۱)  $u''(x)$  در سری موجک را بسط می‌دهیم،

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x)$$

گام (۲) از هر دو طرف رابطه فوق از  $0$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^x u''(\tau) d\tau = \int_0^x \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(\tau) d\tau$$

$$u'(x) - u'(0) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x)$$

$$u'(x) = u'(0) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x)$$

دوباره، از هر دو طرف رابطه فوق از  $0$  تا  $x$  انتگرال می‌گیریم.

$$u(x) - u(0) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + x u'(0)$$

$$u(x) = u(0) + x u'(0) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x)$$

که در آن  $u'(0)$  مجهول است،  $u'(0)$  را می‌توان با در نظر گرفتن رابطه زیر پیدا کرد

$$u(1) = 1/667433$$

$$u(1) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2} + u'(0) + 1$$

$$u'(0) = 0/667433 - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1)$$

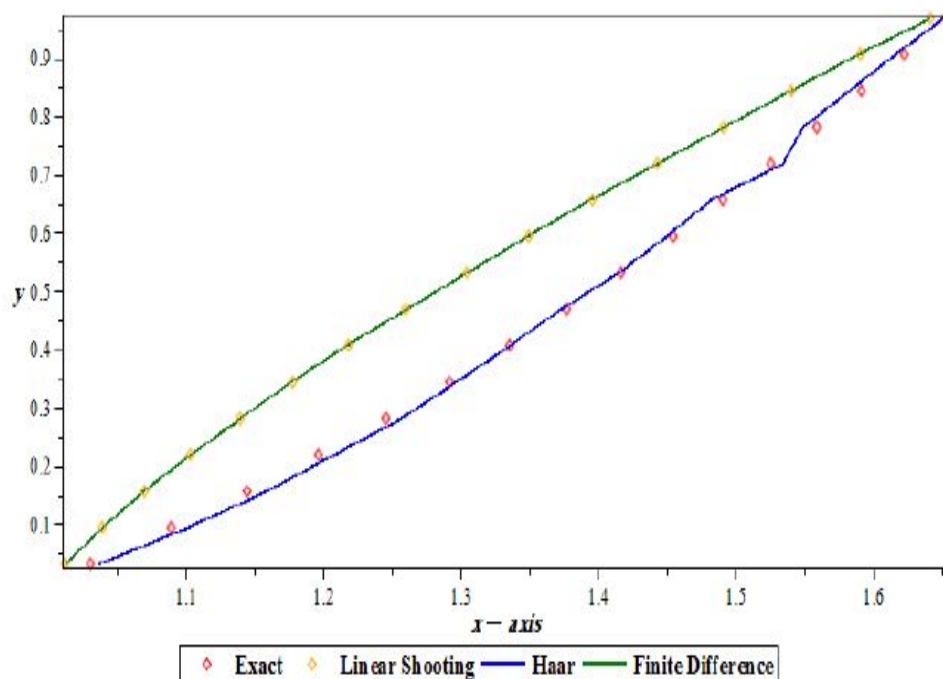
$$u(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + 0/667433 x + 1$$

گام (۳)  $u(x)$  و مشتقات آن در را معادله جایگذاری می کنیم

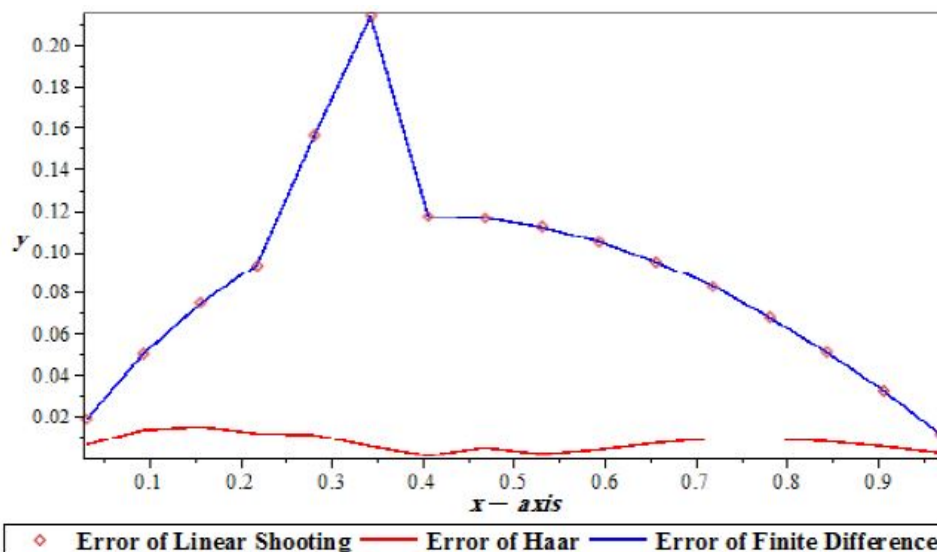
$$\begin{aligned}
 u''(x) + u(x) &= \sin(x) + x \cos(x) \\
 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + 1 + x \left[ - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(1) + 0.667433 \right] \\
 &= \sin(x) + x \cos(x) \\
 \sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(x_l) + P_{i,2}(x_l) - x_l P_{i,2}(1)] \\
 &= \sin(x_l) + x_l \cos(x_l) - 0.667433 x_l - 1, \\
 l &= 1, 2, \dots, 16
 \end{aligned}$$

گام (۴) در نقاط هم محلی  $x_l$  بررسی می کنیم و دستگاه معادلات خطی را برای ضرایب موجک  $a_i$  حل می کنیم.

گام (۵) ضرایب را در  $u(x)$  برای رسیدن به جواب جایگذاری می کنیم.



شکل ۱۱.۵: جواب های دقیق و عددی (جواب هار، پرتابی خطی و تفاضل متناهی)



شکل ۱۲.۵: خطا در مثال ۵.۲.۵

$(x_l/32)$	جواب دقیق	جواب هار	تفاضل متناهی	روش پرتابی خطی
۱	۱/۰۳۰۷۶۶۸۴	۱/۰۳۷۳۱۱۹۴	۱/۰۱۲۲۳۰۱۷	۱/۰۲۲۸۱۰۰
۳	۱/۰۸۹۴۹۵۷۱	۱/۱۰۲۴۰۶۷۲	۱/۰۳۹۴۲۴۹۵	۱/۰۳۹۴۱۸۹۷
۵	۱/۱۴۴۶۹۹۶۹	۱/۱۵۹۶۶۸۸۱	۱/۰۶۹۹۵۰۸۶	۱/۰۶۹۹۴۱۳۶
۷	۱/۱۹۶۶۴۳۲۴	۱/۲۰۸۱۶۷۴۵	۱/۱۰۳۴۴۶۸۰	۱/۱۰۳۴۳۴۴۱۸
۹	۱/۲۴۵۵۹۴۱۱	۱/۲۵۶۶۷۵۴۲	۱/۱۳۹۵۷۲۷۲	۱/۱۳۹۵۵۷۹۱
۱۱	۱/۲۹۱۸۱۸۵۳	۱/۲۹۷۰۳۶۵۸	۱/۱۷۸۰۱۲۰۴	۱/۱۷۷۹۹۴۵۳
۱۳	۱/۳۳۵۵۷۶۵۹	۱/۳۳۶۶۷۶۰۹	۱/۲۱۸۴۷۴۰۳	۱/۲۱۸۴۵۴۸۴
۱۵	۱/۳۷۷۱۱۷۶۷	۱/۳۷۲۶۰۷۳۰	۱/۲۶۰۶۹۶۲۱	۱/۲۶۰۰۶۷۵۹
۱۷	۱/۴۱۶۶۷۶۰۵	۱/۴۱۵۲۶۰۶۶	۱/۳۰۴۴۴۶۷۷	۱/۳۰۴۴۲۵۹۸
۱۹	۱/۴۵۴۴۶۶۷۴	۱/۴۵۰۵۰۸۷۳	۱/۳۴۹۵۲۶۹۰	۱/۳۴۹۵۰۷۲۷
۲۱	۱/۴۹۰۶۸۱۴۸	۱/۴۸۳۳۹۹۵۸	۱/۳۹۵۷۷۳۱۶	۱/۳۹۵۷۵۳۴۰
۲۳	۱/۵۲۵۴۸۵۱۳	۱/۵۳۴۴۸۸۴۵	۱/۴۴۳۰۵۹۷۴	۱/۴۴۳۰۹۱۶۰
۲۵	۱/۵۵۹۰۱۲۲۲	۱/۵۴۹۵۱۳۱۲	۱/۴۹۱۳۰۰۷۵	۱/۴۹۱۲۸۵۰۵
۲۷	۱/۵۹۱۳۶۳۹۰	۱/۵۸۳۴۸۰۸۰	۱/۵۴۰۴۵۲۴۲	۱/۵۴۰۴۴۰۶۲
۲۹	۱/۶۲۲۶۰۵۳۱	۱/۶۱۷۰۳۸۹۹	۱/۵۹۰۵۱۵۱۸	۱/۵۹۰۵۰۷۰۰
۳۱	۱/۶۵۲۷۶۳۲۰	۱/۶۵۰۶۶۳۸۵	۱/۶۴۱۵۳۵۷۷	۱/۶۴۱۵۳۲۷۸

جدول ۹.۵: جواب عددی مثال ۵.۲.۵



حداکثر خطای مطلق		
جواب هار	تفاضل متناهی	روش پرتابی خطی
۰/۰۱۴۹۶۹۱۲	۰/۲۱۳۸۰۶۴۹	۰/۲۱۳۸۲۴۰۰

جدول ۱۱.۵: خطای مطلق ماکزیمم معادله

$(x_l/32)$	جواب دقیق	جواب هار	خطای روش پرتابی خطی
۱	۰/۰۰۶۵۴۵۱۰	۰/۰۱۸۵۳۶۶۷	۰/۰۱۸۸۵۳۸۷۴
۳	۰/۰۱۲۹۱۱۰۱	۰/۰۵۰۰۷۰۷۵	۰/۰۵۰۰۷۶۷۴
۵	۰/۰۱۴۹۶۹۱۲	۰/۰۷۴۷۴۸۸۳	۰/۰۷۴۷۵۸۳۳
۷	۰/۰۱۱۵۲۴۲۱	۰/۰۹۳۱۹۶۴۴	۰/۰۹۳۲۰۹۰۷
۹	۰/۰۱۱۰۸۱۳۱	۰/۱۵۶۰۲۱۳۹	۰/۱۵۶۳۶۲۰
۱۱	۰/۰۰۵۲۱۸۰۵	۰/۲۱۳۸۰۶۴۹	۰/۲۱۳۸۲۴۰۰
۱۳	۰/۰۰۱۰۹۹۵۰	۰/۱۱۷۱۰۲۵۶	۰/۱۱۷۱۲۱۷۵
۱۵	۰/۰۰۴۵۱۰۳۷	۰/۱۱۶۴۲۱۴۶	۰/۱۱۶۴۴۱۷۵
۱۷	۰/۰۰۱۴۱۵۳۹	۰/۱۱۲۲۲۹۲۸	۰/۱۱۲۲۵۰۰۷
۱۹	۰/۰۰۳۹۵۸۰۱	۰/۱۰۵۰۳۹۸۴	۰/۱۰۴۹۶۰۴۶
۲۱	۰/۰۰۷۷۲۸۱۹۰	۰/۰۹۴۹۰۸۳۲	۰/۰۹۴۹۲۸۰۹
۲۳	۰/۰۰۹۰۰۳۳۲	۰/۰۸۲۴۲۵۳۹	۰/۰۸۲۴۴۳۵۳
۲۵	۰/۰۰۹۴۹۹۱۰	۰/۰۶۷۷۱۱۴۷	۰/۰۶۷۷۲۷۱۶
۲۷	۰/۰۰۷۸۸۳۱۰	۰/۰۵۰۹۱۱۴۸	۰/۰۵۰۹۲۳۸۸
۲۹	۰/۰۰۵۵۶۶۳۲	۰/۰۳۲۰۷۰۱۳	۰/۰۳۲۰۹۸۳۱
۳۱	۰/۰۰۲۰۹۹۳۵	۳/۰۱۱۲۲۷۴	۰/۰۱۱۲۳۰۴۱

جدول ۱۰.۵: خطا در مثال ۵.۲.۵

## ۳.۵ روش موجک هار برای معادلات دیفرانسیل جزئی خطی

در این بخش، روش موجک هار را برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی بررسی می‌کنیم. از دو مدل مسئله استفاده می‌کنیم: معادله مشهور کلین-گوردن<sup>۵</sup> و معادله شبه موج. <sup>۶</sup> هر دو معادله از نوع همگن خطی مرتبه دو در یک بعد هستند. از نمادگذاری  $\dot{u} = u_t, \dot{u}' = u_{tx}$  و غیره استفاده خواهیم کرد.

این روش ابتدا شامل کاهش مسئله به یک دستگاه از معادلات جبری، توسط بسط شروط مشتق ماکزیمم در معادله به‌عنوان سری‌های موجک هار با تعداد متناهی شرط است. پس از آن، از ماتریس عملیاتی موجک هار که در بخش‌های قبلی ایجاد کردیم استفاده می‌کنیم و سپس از دستگاه معادلات جبری خطی را برای ضریب موجک استفاده می‌نماییم.

مثال ۱.۳.۵. معادله کلین-گوردن<sup>۷</sup> [۱۷] خطی زیر را

$$u_{tt} - u_{xx} = u, \quad 0 < x < 1 \quad (26.5)$$

تحت شرایط اولیه

$$u(x, 0) = 1 + \sin(x), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (27.5)$$

و شرایط مرزی

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0. \quad (28.5)$$

با جواب دقیق

$$u(x, t) = \sin(x) + \cosh(x)$$

در نظر می‌گیریم.

گام (۱) دو رابطه زیر را با استفاده از سطح دقت  $J = 4$  در نظر می‌گیریم:

$$t_s = \frac{(s-1)}{N}, \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

فرض می‌کنیم:

$$x_l = \frac{2l-1}{4m}, \quad l = 1, 2, \dots, 2m.$$

<sup>۵</sup>Klein-Gordon

<sup>۶</sup>Wave-like

<sup>۷</sup>Klein-Gordon

عبارت  $\ddot{u}''(x, t)$  از موجک هار را بسط می‌دهیم.

$$\ddot{u}''(x, t) = \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i h_i(x), \quad t \in (t_s, t_{s+1}], \quad (29.5)$$

که در آن بردار ستونی  $a_i$  در زیربازه  $t \in (t_s, t_{s+1}]$  ثابت است.

**گام (۲)** از معادله (۳۰.۵) نسبت به  $t$  از  $t_s$  تا  $t$  و از  $\circ$  تا  $x$  دو مرتبه انتگرال می‌گیریم.

$$\dot{u}''(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i h_i(x) + \dot{u}''(x, t_s), \quad (30.5)$$

$$u''(x, t) = \frac{(t - t_s)^2}{2} \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i h_i(x) + (t - t_s) \dot{u}''(x, t_s) + u''(x, t_s) \quad (31.5)$$

$$\ddot{u}'(x, t) = \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i P_{i,\Psi}(x) + \ddot{u}'(\circ, t) \quad (32.5)$$

$$\ddot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i P_{i,\Psi}(x) + \ddot{u}(\circ, t) + x \ddot{u}'(\circ, t) \quad (33.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, t) &= (t - t_s) \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i P_{i,\Psi}(x) + \dot{u}(x, t_s) + \dot{u}(\circ, t) - \dot{u}(\circ, t_s) \\ &+ x [\dot{u}'(\circ, t) - \dot{u}'(\circ, t_s)] \end{aligned} \quad (34.5)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{(t - t_s)^2}{2} \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i P_{i,\Psi}(x) + u(x, t_s) + (t - t_s) \dot{u}(x, t_s) + u(\circ, t) \\ &- u(\circ, t_s) - (t - t_s) \dot{u}(\circ, t_s) + x [u'(x, t_s) - (u'(\circ, t_s)) - (t - t_s) \dot{u}'(\circ, t_s)] \end{aligned} \quad (35.5)$$

معادلات (۳۳.۵)–(۳۵.۵) با استفاده از شرایط مرزی به روابط زیر تبدیل می‌شوند:

$$\ddot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i P_{i,\Psi}(x) - x \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i P_{i,\Psi}(1) \quad (36.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, t) &= (t - t_s) \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i P_{i,\Psi}(x) + \dot{u}(x, t_s) \\ &- x(t - t_s) \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i P_{i,\Psi}(1) \end{aligned} \quad (37.5)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{(t - t_s)^2}{2} \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i P_{i,\Psi}(x) + u(x, t_s) + (t - t_s) \dot{u}(x, t_s) \\ &- \frac{x}{2} (t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{\Psi M} a_i P_{i,\Psi}(1) \end{aligned} \quad (38.5)$$

مقدار معادلات (۳۰.۵)–(۳۱.۵) و معادلات (۳۵.۵) را در  $x = x_l$  و  $t = t_{s+1}$  با استفاده

از  $\Delta t = t_{s+1} - t_s$  بررسی می‌کنیم. که در آن

$$\ddot{u}''(x_l, t_{s+1}) = \Delta t \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l) + \dot{u}''(x_l, t_s), \quad (39.5)$$

$$u''(x_l, t_{s+1}) = \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l) + \Delta t \dot{u}''(x_l, t_s) + u''(x_l, t_s) \quad (40.5)$$

$$\ddot{u}(x_l, t_{s+1}) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) - x_l \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \quad (41.5)$$

$$\dot{u}(x_l, t_{s+1}) = \Delta t \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) + \dot{u}(x_l, t_s) + \Delta t x_l \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \quad (42.5)$$

$$u(x_l, t_{s+1}) = \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) + u(x_l, t_s) + \Delta t \dot{u}(x_l, t_s) - \frac{1}{2} \Delta t^2 x_l \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \quad (43.5)$$

$$.x_l = \frac{2l-1}{2m}, \quad l = 1, 2, \dots, 2m \text{ که}$$

گام (۳) طرح کلی به صورت زیر است:

$$\ddot{u}(x_l, t_{s+1}) - u''(x_l, t_{s+1}) = u(x_l, t_{s+1}) \quad (44.5)$$

$$(i.e.) \quad \ddot{u}(x_l, t_{s+1}) = u(x_l, t_{s+1}) + u''(x_l, t_{s+1}) \quad (45.5)$$

$$a_i \left[ \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) - x_l \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) - \Delta t^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x_l) + \frac{1}{2} \Delta t^2 x_l \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \right] = u(x_l, t_s) + \Delta t [\dot{u}(x_l, t_s) + \dot{u}''(x_l, t_s)] + u''(x_l, t_s) \quad (46.5)$$

گام (۴) بردار ضرایب  $a_i$  از طریق دستگاه معادله خطی (۴۶.۵) محاسبه می‌شوند.

گام (۵) جواب مسئله طبق معادله (۴۳.۵) از [۱۷] به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$u(x_l, 0) = 1 + \sin(x_l)$$

$$u'(x_l, 0) = \cos(x_l), \quad u''(x_l, 0) = -\sin(x_l), \quad \dot{u}''(x_l, 0) = 0,$$

$$\dot{u}(x_l, 0) = 0$$

### روش تجزیه ادومیان<sup>۸</sup> (ADM)

روش‌های تسخیر<sup>۹</sup> و تقسیم<sup>۱۰</sup> از روش‌های تجزیه ادومیان هستند و اغلب برای جواب موازی و محاسباتی معادلات دیفرانسیل جزئی از نوع بیضوی و سهموی است. آن‌ها شامل

<sup>۸</sup>Adomain Decomposition Method

<sup>۹</sup>Conquer

<sup>۱۰</sup>Dividing

## روش موجک هار برای معادلات دیفرانسیل جزئی خطی ۸۱

الگوریتم‌های تکراری برای حل معادلات گسسته، تکنیک‌هایی برای گسسته‌سازی‌های شبکه غیرتطبیقی و تکنیک‌هایی برای تقریب‌های ناهمگن هستند. یک تعریف برای این روش را می‌توان در مقاله [۲۶] یافت.

نتایج موجود در جدول ۱۲.۵ و جدول ۱۳.۵ از طریق مقاله [۱۷] حاصل شده‌اند. جدول ۱۲.۵ نشان‌دهنده جواب‌های دقیق و تقریبی در نقاط مختلف است.

$x_l$	جواب دقیق	جواب هار
۰/۰۱۵	$۲/۴۵۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۱۳۳ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۰۴۶	$۹/۷۷۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۹/۳۸۵ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۰۷۸	$۲/۵۲۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۵۴۹ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۱۰۹	$۱/۱۷۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۱۱۸ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۴۵۳	$۴/۵۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۵۵۶ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۴۸۴	$۲/۱۱۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۱۵۳ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۵۱۵	$۳/۳۲۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۳۴۲ \times ۱۰^{-۵}$

جدول ۱۲.۵: نتایج عددی معادله کلین-گوردن خطی

$t$	حداکثر خطای مطلق	
	جواب هار	روش آدومیان
۰/۱	$۵/۲۰۱ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۳/۲۰۱ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰/۳	$۴/۴۲۷ \times ۱۰^{-۸}$	$۳/۱۲۱ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۵	$۲/۳۲۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۹۰۷ \times ۱۰^{-۳}$

جدول ۱۳.۵: خطای مطلق ماکزیمم معادله در زمان‌های متفاوت

مثال ۲.۳.۵. معادله شبه موج تک بعدی زیر را [۱۹]

$$u_{tt} - \frac{x^2}{4} u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (۴۷.۵)$$

با توجه به شرایط اولیه

$$u(x, 0) = x, \quad \dot{u}(x, 0) = x^2 \quad (۴۸.۵)$$

و شرایط مرزی

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1 + \sinh(t) \quad t > 0 \quad (۴۹.۵)$$

در نظر می‌گیریم، جواب دقیق به صورت زیر است:

$$u(x, t) = x + x^2 \sinh(t)$$

گام (۱) دو رابطه زیر را با استفاده از سطح دقت  $J = 3$

در نظر می‌گیریم:

$$t_s = \frac{(s-1)}{N}, \quad s = 1, 2, \dots, N$$

فرض می‌کنیم:

$$x_l = \frac{2l-1}{4m}, \quad l = 1, 2, \dots, 2m$$

حال در موجک‌ها عبارت  $\ddot{u}''(x, t)$  را به صورت زیر بسط می‌دهیم.

$$\ddot{u}''(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x), \quad t \in [t_s, t_{s+1}] \quad (50.5)$$

گام (۲) از معادله (50.5) نسبت به  $t$  از  $t_s$  تا  $t$  و نسبت به  $x$  از  $\circ$  تا  $x$  دو مرتبه انتگرال می‌گیریم.

$$\dot{u}''(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + \dot{u}''(x, t_s), \quad (51.5)$$

$$u''(x, t) = \frac{(t - t_s)^2}{2} \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) (t - t_s) \dot{u}''(x, t_s) + u''(x, t_s) \quad (52.5)$$

$$u'(x, t) = \frac{(t - t_s)^2}{2} \sum_{i=1}^{2M} a_i P_i(x) + (t - t_s) [\dot{u}'(x, t_s) - \dot{u}'(\circ, t_s)] + u'(x, t_s) - u'(\circ, t_s) + u'(\circ, t) \quad (53.5)$$

$$u(x, t) = \frac{(t - t_s)^2}{2} \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + (t - t_s) [\dot{u}(x, t_s) - \dot{u}(\circ, t_s) - x \dot{u}'(\circ, t_s)] + u(x, t) - u(\circ, t_s) - x [u'(\circ, t_s) - u'(\circ, t)] + u(\circ, t) \quad (54.5)$$

$$\dot{u}(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + [\dot{u}(x, t_s) - \dot{u}(\circ, t_s) + x \dot{u}'(\circ, t_s)] + x \dot{u}'(\circ, t) + \dot{u}(\circ, t) \quad (55.5)$$

$$\ddot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) - x \ddot{u}'(\circ, t) + \ddot{u}(\circ, t) \quad (56.5)$$

معادلات زیر را با استفاده از شرایط اولیه و مرزی داریم:

$$u(x, \circ) = x, \quad \dot{u}(x, \circ) = x^\gamma \quad \circ < x < 1$$

$$u(\circ, t) = g_\circ(t) = \circ$$

$$u(\circ, t_s) = g_\circ(t_s) = \circ$$

$$u(1, t_s) = g_1(t_s) = 1 + \sinh(t_s)$$

$$\dot{u}(\circ, t_s) = g'_\circ(t_s) = \circ$$

$$\dot{u}(1, t_s) = g'_1(t_s) = \cosh(t_s)$$

$$\ddot{u}(\circ, t_s) = g''_\circ(t_s) = \circ$$

$$\ddot{u}(1, t_s) = g''_1(t_s) = \sinh(t_s)$$

$x = 1$  را در فرمول‌های (۵۳.۵) و (۵۵.۵) قرار می‌دهیم و با استفاده از شرایط، داریم:

$$u'(\circ, t) - u'(\circ, t_s) = -\frac{(t - t_s)^\gamma}{\gamma} \sum_{i=1}^{\gamma M} a_i P_{i,\gamma}(1) + (t - t_s)[\cosh(t_s) - \dot{u}'(\circ, t_s)] + (1 + \sinh(t) - 1 - \sinh(t_s)) \quad (57.5)$$

$$\ddot{u}'(\circ, t) = -\sum_{i=1}^{\gamma M} a_i P_{i,\gamma}(1) - \sinh(t) \quad (58.5)$$

معادلات (۵۷.۵) و (۵۸.۵) را در معادلات (۵۲.۵) از طریق (۶۰.۵) جایگذاری می‌کنیم و مقادیر  $x = x_l$  و  $t = t_{s+1}$  را بررسی می‌کنیم.

$$u''(x_l, t_{s+1}) = \frac{(t_{s+1} - t_s)^\gamma}{\gamma} \sum_{i=1}^{\gamma M} a_i h_i(x_l) + (t_{s+1} - t_s) \ddot{u}''(x_l, t_s) + u''(x_l, t_s) \quad (59.5)$$

$$u'(x_l, t_{s+1}) = \frac{\Delta t^\gamma}{\gamma} \sum_{i=1}^{\gamma M} a_i P_i(x_l) + \Delta t \dot{u}'(x_l, t_s) - u'(x_l, t_s) - \frac{\Delta t^\gamma}{\gamma} \sum_{i=1}^{\gamma M} a_i P_i(x_l) + \Delta t [\cosh(t_s)] + \sinh(t_{s+1}) - \sinh(t_s) \quad (60.5)$$

$$u(x_l, t_{s+1}) = \frac{\Delta t^\gamma}{\gamma} \sum_{i=1}^{\gamma M} a_i P_{i,\gamma}(x_l) + \Delta t [\dot{u}(x_l, t_s) - \dot{u}(\circ, t_s)] + u(x_l, t_s) - u(\circ, t_s) - x_l \frac{\Delta t^\gamma}{\gamma} \sum_{i=1}^{\gamma M} a_i P_{i,\gamma}(1) - x_l \Delta t \cosh(t_s) - x_l [1 + \sinh(t_s) - 1 - \sinh(t_{s+1})] \quad (61.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(x_l, t_{s+1}) = & \Delta t \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,\gamma}(x_l) + [\dot{u}(x_l, t_s) - \dot{u}(\circ, t_s)] \\ & - \Delta t x_l \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,\gamma}(1) + x_l \cosh(t_s) + x_l \cosh(t_{s+1}) \end{aligned} \quad (62.5)$$

$$\ddot{u}(x_l, t_{s+1}) = \sum_{i=1}^{2M} a_i [P_{i,\gamma}(x_l) - x_l P_{i,\gamma}(1)] + x_l \sinh(t_{s+1}) \quad (63.5)$$

$$P_{i,\gamma}(1) = \begin{cases} \circ/\delta & \text{if } i = 1 \\ \frac{1}{\gamma m^\gamma} & \text{if } i > 1 \end{cases}$$

گام (۳) پس از جایگزینی مقدار در معادله شبه موج از طریق معادله (۶۳.۵) داریم:

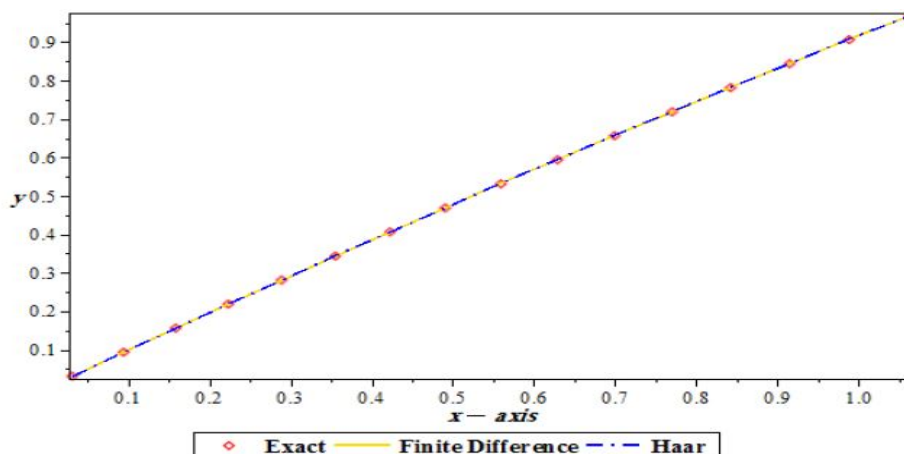
$$\sum_{i=1}^{2M} a_i [P_{i,\gamma}(x_l) - x_l P_{i,\gamma}(1)] = \frac{x_l^\gamma}{\gamma} u''(x_l, t_s) + x_l \sinh(t_{s+1}) \quad (64.5)$$

معادله (۶۴.۵) طبق معادله موج مشابه (۴۷.۵) جبری می‌باشد.

گام (۴) معادلات جبری را برای ضرایب موجک‌ها  $a_i$  حل می‌کنیم. بنابراین، از طریق معادله (۶۱.۵)، جواب  $u$  را به دست می‌آوریم که بسیار نزدیک به جواب دقیق است. این روند جواب با مقادیر زیر آغاز شده است:

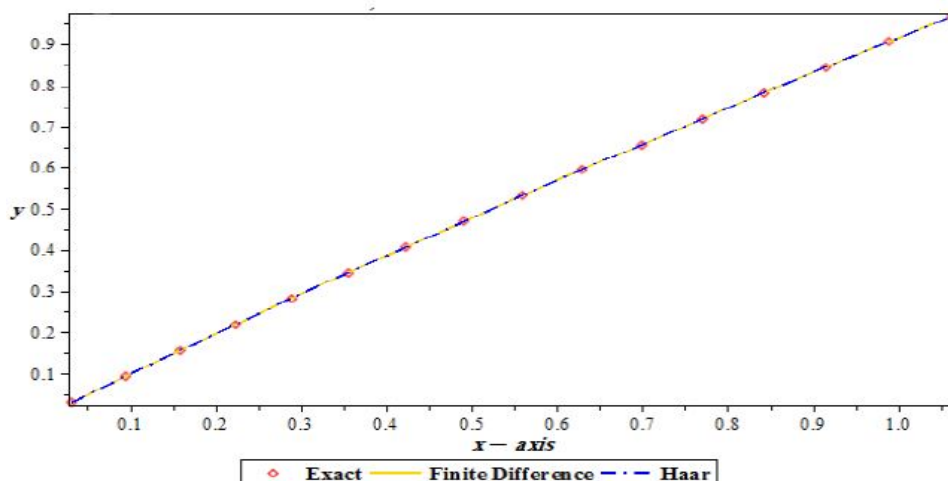
$$u(x_l, \circ) = x_l, \quad u_t(x_l, \circ) = x_l^\gamma, \quad u'(x_l, \circ) = \circ, \quad u''(x_l, \circ) = \circ$$

گام (۵) ضریب را در  $u(x, t)$  برای دستیابی به جواب جایگذاری می‌کنیم.



شکل ۱۳.۵: جواب‌های عددی و دقیق برای معادله شبه موج در  $t = \circ/\circ 1$





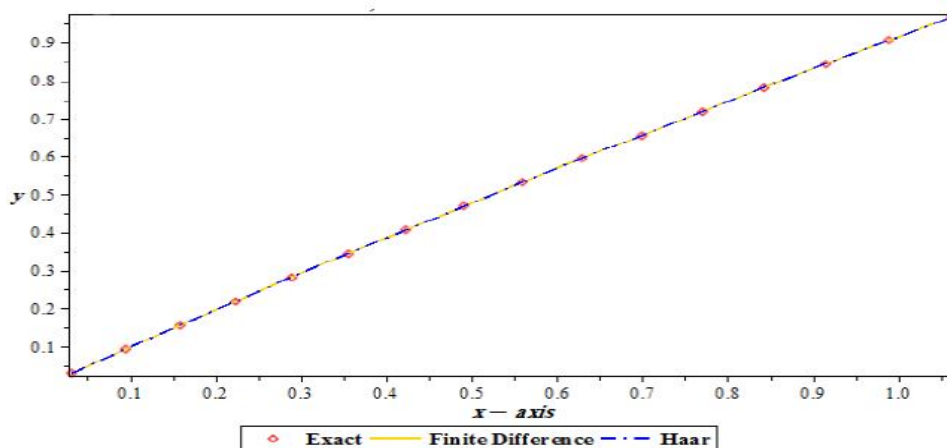
شکل ۱۴.۵: جواب‌های عددی و دقیق برای معادله شبه موج در  $t = 0.1$

$(x_i/32)$	جواب دقیق	جواب هار	تفاضل متناهی
۱	۰/۰۳۱۲۵۹۷۶۵۷	۰/۰۳۱۲۵۹۹۲۹۸	۰/۰۳۱۲۵۹۷۶۴۸
۳	۰/۰۹۳۸۳۷۸۹۲۰	۰/۰۹۳۸۳۸۰۲۲۳	۰/۰۹۳۸۳۷۸۹۳۴
۵	۰/۱۵۶۴۹۴۱۴۴۶	۰/۱۵۶۴۹۴۲۳۹۸	۰/۱۵۶۴۹۴۱۴۶۳
۷	۰/۲۱۹۲۲۸۵۲۳۶	۰/۲۱۹۲۲۸۵۸۲۴	۰/۲۱۹۲۲۸۵۲۶۵
۹	۰/۲۸۲۰۴۱۰۲۸۸	۰/۲۸۲۰۴۱۰۴۹۹	۰/۲۸۲۰۴۱۰۳۹۲
۱۱	۰/۳۴۴۹۳۱۶۶۰۳	۰/۳۴۴۹۳۱۶۴۲۴	۰/۳۴۴۹۳۱۶۶۱۰
۱۳	۰/۴۰۷۹۰۰۴۱۸۱	۰/۴۰۷۹۰۰۳۵۹۹	۰/۴۰۷۹۰۰۴۲۳۷
۱۵	۰/۴۷۰۹۴۷۳۰۲۲	۰/۴۷۰۹۴۷۲۰۲۵	۰/۴۷۰۹۴۷۳۰۸۹
۱۷	۰/۵۳۴۰۷۲۳۱۲۶	۰/۵۳۴۰۷۲۱۷۰۰	۰/۵۳۴۰۷۲۳۱۵۰
۱۹	۰/۵۹۷۲۷۵۴۴۹۳	۰/۵۹۷۲۷۵۲۶۲۵	۰/۵۹۷۲۷۵۴۳۲۰
۲۱	۰/۶۶۰۵۵۶۷۱۲۴	۰/۶۶۰۵۵۶۴۸۰۰	۰/۶۶۰۵۵۶۷۱۸۰
۲۳	۰/۷۲۳۹۱۶۱۰۱۷	۰/۷۲۳۹۱۵۸۲۲۵	۰/۷۲۳۹۱۶۱۱۲۰
۲۵	۰/۷۸۷۳۵۳۶۱۷۳	۰/۷۸۷۳۵۲۹۰۱۱	۰/۷۸۷۳۵۳۶۲۸۰
۲۷	۰/۸۵۰۸۶۹۲۵۹۲	۰/۸۵۰۸۶۸۸۸۲۶	۰/۸۵۰۸۶۹۲۶۶۰
۲۹	۰/۹۱۴۴۶۳۰۲۷۵	۰/۹۱۴۴۶۲۶۰۰۱	۰/۹۱۴۴۶۳۰۳۱۰
۳۱	۰/۹۷۸۱۳۴۹۲۲۰	۰/۹۷۸۱۳۴۴۴۲۶	۰/۹۷۸۱۳۴۹۳۶۰

جدول ۱۴.۵: نتایج عددی معادله شبه موج در  $t = 0.1$

$(x_l/32)$	جواب دقیق	جواب هار	تفاضل منتهی
۱	۰/۰۳۱۳۴۷۸۱۹۱	۰/۰۳۱۳۳۷۲۱۶۴	۰/۰۳۱۳۴۸۳۰۵۶
۳	۰/۰۹۴۶۳۰۳۷۱۸	۰/۰۹۴۵۹۷۵۸۵۱	۰/۰۹۴۶۳۱۵۰۱۵
۵	۰/۱۵۸۶۹۵۴۷۷۳	۰/۱۵۸۶۳۹۲۰۳۳	۰/۱۵۸۶۹۷۲۵۷۵
۷	۰/۲۲۳۵۴۳۱۳۵۵	۰/۲۲۳۴۶۲۰۸۰۵	۰/۲۲۳۵۴۵۵۴۸۹
۹	۰/۲۸۹۱۷۳۳۴۶۴	۰/۲۸۹۰۶۶۲۰۹۳	۰/۲۸۹۱۷۶۴۰۱۳
۱۱	۰/۳۵۵۵۸۶۱۱۰۱	۰/۳۵۵۴۵۱۵۳۵۴	۰/۳۵۵۵۸۹۷۹۰۲
۱۳	۰/۴۲۲۷۸۱۴۲۶۵	۰/۴۲۲۶۱۸۱۰۲۶	۰/۴۲۲۷۸۵۷۴۶۰
۱۵	۰/۴۹۰۷۵۹۲۹۵۷	۰/۴۹۰۵۶۶۲۲۶۶	۰/۴۹۰۷۶۴۲۳۷۶
۱۷	۰/۵۵۹۵۱۹۷۱۷۵	۰/۵۵۹۲۹۵۶۵۳۲	۰/۵۵۹۵۲۵۲۷۶۰
۱۹	۰/۶۲۹۰۶۲۶۹۲۱	۰/۶۲۸۸۰۴۵۴۱۲	۰/۶۲۹۰۶۸۸۷۴۰
۲۱	۰/۶۹۹۳۸۸۲۱۹۵	۰/۶۹۹۰۹۴۳۷۲۳	۰/۶۹۹۳۹۴۹۹۷۰
۲۳	۰/۷۷۰۴۹۶۲۹۹۶	۰/۷۷۰۱۷۵۸۷۸۴	۰/۷۷۰۵۰۳۷۰۶۰
۲۵	۰/۸۴۲۳۸۶۹۳۲۴	۰/۸۴۲۰۴۰۴۲۳۲	۰/۸۴۲۳۹۴۹۶۱۰
۲۷	۰/۹۱۵۰۶۰۱۱۷۹	۰/۹۱۴۶۲۵۴۵۶۶	۰/۹۱۵۰۶۸۷۴۲۰
۲۹	۰/۹۸۸۵۱۵۸۵۶۲	۰/۹۸۷۹۸۱۳۱۵۱	۰/۹۸۸۵۲۵۰۷۷۰
۳۱	۱/۰۶۲۷۵۴۱۴۷۲	۱/۰۶۲۴۷۲۵۶۶۵	۱/۰۶۲۷۶۲۰۷۶۰

جدول ۱۵.۵: نتایج عددی معادله شبه موج در  $t = 0.1$



شکل ۱۵.۵: جواب‌های عددی و دقیق برای معادله شبه موج در  $t = 0.2$

$(x_l/32)$	جواب دقیق	جواب هار	تفاضل متناهی
۱	۰/۰۳۱۴۴۶۶۱۷۱	۰/۰۳۱۵۰۹۰۵۲۷	۰/۰۳۱۴۵۰۵۱۲۹
۳	۰/۰۹۵۵۱۹۵۵۴۷	۰/۰۹۵۷۰۰۰۱۰۰	۰/۰۹۵۵۲۸۶۳۳۸
۵	۰/۱۶۱۱۶۵۴۲۹۷	۰/۱۶۱۴۵۴۷۷۰۱	۰/۱۶۱۱۷۹۶۶۴۶
۷	۰/۲۲۸۳۸۴۲۴۲۳	۰/۲۲۸۶۸۵۱۴۱۴	۰/۲۲۸۴۰۳۵۹۹۱
۹	۰/۲۹۷۱۷۵۹۹۲۳	۰/۲۹۷۵۵۳۳۳۸۰	۰/۲۹۷۲۰۰۴۵۲۷
۱۱	۰/۰۳۶۷۵۴۰۶۷۹۹	۰/۰۳۶۷۹۷۶۷۵۹۵	۰/۰۳۶۷۵۷۰۲۱۲۶
۱۳	۰/۴۳۹۴۷۸۳۰۵۱	۰/۴۳۹۹۷۱۱۵۷۱	۰/۴۳۹۵۱۲۸۸۹۴
۱۵	۰/۵۱۲۹۸۸۸۶۷۷	۰/۵۱۳۵۱۵۰۱۰۷	۰/۵۱۳۰۲۸۴۷۸۲
۱۷	۰/۵۸۸۰۷۲۳۶۷۹	۰/۵۸۸۶۳۱۹۰۶۳	۰/۵۸۸۱۱۶۹۸۸۰
۱۹	۰/۶۶۴۷۲۸۸۰۵۵	۰/۶۶۵۳۰۸۴۷۳۰	۰/۶۶۴۷۷۸۳۶۲۰
۲۱	۰/۷۴۲۹۵۸۱۸۰۷	۰/۷۴۳۶۸۱۰۰۲۶	۰/۷۴۳۰۱۲۶۸۶۰
۲۳	۰/۸۲۲۷۲۰۴۹۳۵	۰/۸۲۳۳۵۷۱۴۶۰	۰/۸۲۲۸۱۹۹۱۵۰
۲۵	۰/۹۰۴۱۳۵۷۴۳۷	۰/۹۰۴۷۲۷۱۸۶۷	۰/۹۰۴۲۰۰۰۶۳۰
۲۷	۰/۹۸۷۰۸۳۹۳۱۴	۰/۹۸۷۰۱۷۳۷۳۰	۰/۹۸۷۱۵۳۱۰۰۰
۲۹	۱/۰۷۱۶۰۵۰۵۶۷	۱/۰۷۲۱۵۸۶۷۶۳	۱/۰۷۱۶۷۶۵۰۵۰
۳۱	۱/۱۵۷۶۹۹۱۱۹۵	۱/۱۵۸۲۲۰۱۲۵۲	۱/۱۵۷۷۴۰۵۶۸۰

جدول ۱۶.۵: نتایج عددی معادله شبه موج در  $t = ۰/۲$

$t$	حداکثر خطای مطلق	
	جواب هار	تفاضل متناهی
۰/۰۱	$۴/۷۹۳۴ \times ۱۰^{-۷}$	$۱/۷۴۰۰ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۱	$۳/۴۶۵۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۸/۰۲۸۷ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۲	$۷/۲۲۸۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۱۴۴۸ \times ۱۰^{-۵}$

جدول ۱۷.۵: حداکثر خطای مطلق معادله در زمان‌های مختلف

مثال ۳.۳.۵. معادله انتشار تک بعدی

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (۶۵.۵)$$

را با شرایط اولیه

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (۶۶.۵)$$

و شرایط مرزی

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (67.5)$$

با جواب دقیق

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$$

در نظر می‌گیریم.

گام (۱) رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_l = \frac{2l-1}{4m}, \quad l = 1, 2, \dots, 2m.$$

حال، عبارت  $\ddot{u}''(x, t)$  از موجک‌ها را با استفاده از گام زمانی از  $0$  تا  $x$  بسط می‌دهیم.

$$\dot{u}''(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x), \quad t \in (0, t] \quad (68.5)$$

گام (۲) از معادله (۶۲.۵) با توجه به  $t$  از  $0$  تا  $t$  یک مرتبه و از  $0$  تا  $x$  دو مرتبه انتگرال می‌گیریم.

$$u''(x, t) = t \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) - \pi^2 \sin(\pi x) \quad (69.5)$$

$$u'(x, t) = t \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) - \pi \cos(\pi x) + \pi \quad (70.5)$$

$$u(x, t) = t \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) - \sin(\pi x) + \pi x \quad (71.5)$$

حال

$$\dot{u}'(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + \dot{u}'(0, t) \quad (72.5)$$

$$\dot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + x \dot{u}'(0, t) + \dot{u}(0, t) \quad (73.5)$$

$x$  را با استفاده از شرایط مرزی برابر با یک قرار می‌دهیم تا به  $\dot{u}'(0, t)$  در معادله (۷۳.۵) دست یابیم.

$$\dot{u}'(0, t) = - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \quad (74.5)$$

$$\dot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) \quad (75.5)$$

معادلات را در  $x = x_l$  و با استفاده از گام زمانی بررسی می‌کنیم. که در آن  $x_l = \frac{2l-1}{4m}$ ,  $l = 1, 2, \dots, 2m$ .

گام (۳) طرح کلی به صورت زیر است:

$$\dot{u}(x_l, t) = u''(x_l, t) \quad (۷۶.۵)$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i [th_i(x_l) - P_{i,2}(x_l) + x_l P_{i,2}(1)] = \pi^2 \sin(\pi x_l) \quad (۷۷.۵)$$

گام (۴) این معادلات جبری را برای ضرایب موجک هار  $a_i$  حل می کنیم. در این صورت، جواب  $u$  را از معادله (۷۷.۵) به دست می آوریم.

گام (۵) ضریب را در  $u(x, t)$  برای رسیدن به جواب جایگذاری می کنیم.

با استفاده از سطح دقت ( $J = 3$ ) موجک هار.

جدول ۱۸.۵ نشان دهنده جواب دقیق و تقریبی در نقاط مختلف است.

$l$	$x_l$	جواب دقیق	جواب هار	خطای مربوطه
۱	۰/۰۶۲۵۰۰۰۰	۰/۰۰۷۳۱۷۶۳	۰/۰۰۷۳۱۸۵۹	$۱/۳۰۹۲۹۶۴۶۸۰۰۷ \times ۱۰^{-۴}$
۲	۰/۱۲۵۰۰۰۰۰	۰/۰۰۱۴۶۳۲۴۴	۰/۰۱۴۶۳۴۳۳	$۱/۲۸۷۶۴۴۵۲۶۳۷۲ \times ۱۰^{-۴}$
۳	۰/۱۸۷۵۰۰۰۰	۰/۰۲۱۹۴۱۶۱	۰/۰۲۱۹۴۴۳۶	$۱/۲۵۱۸۸۳۲۵۲۸۹۳ \times ۱۰^{-۴}$
۴	۰/۲۵۰۰۰۰۰۰	۰/۰۲۹۲۴۲۳۲	۰/۰۲۹۲۴۵۸۴	$۱/۲۰۲۵۰۱۲۶۱۱۶۷ \times ۱۰^{-۴}$
۵	۰/۳۱۲۵۰۰۰۰	۰/۰۳۶۳۵۳۱۷۶	۰/۰۳۶۵۳۵۹۲	$۱/۱۴۰۱۸۳۹۵۱۶۳۰ \times ۱۰^{-۴}$
۶	۰/۳۷۵۰۰۰۰۰	۰/۰۴۳۸۰۷۱۱	۰/۰۴۳۸۱۱۷۸	$۱/۰۶۵۸۱۴۸۵۶۴۷۲ \times ۱۰^{-۴}$
۷	۰/۴۳۷۵۰۰۰۰	۰/۰۵۱۰۶۵۵۷	۰/۰۵۱۰۷۰۵۸	$۹/۸۰۴۷۷۳۷۶۳۹۹۸ \times ۱۰^{-۵}$
۸	۰/۵۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۵۸۳۰۴۳۵	۰/۰۵۸۳۰۹۵۱	$۸/۸۵۴۵۶۹۰۹۵۲۰۰ \times ۱۰^{-۵}$
۹	۰/۵۶۲۵۰۰۰۰	۰/۰۶۵۵۲۰۶۵	۰/۰۶۵۵۲۵۷۸	$۷/۸۲۲۴۳۳۸۴۰۸۸۶ \times ۱۰^{-۵}$
۱۰	۰/۶۲۵۰۰۰۰۰	۰/۰۷۲۷۱۱۶۹	۰/۰۷۲۷۱۶۵۸	$۶/۷۲۵۳۴۱۹۴۳۶۵۳ \times ۱۰^{-۵}$
۱۱	۰/۶۸۷۵۰۰۰۰	۰/۰۷۹۸۷۴۷۰	۰/۰۷۹۸۷۹۱۶	$۵/۵۸۲۳۷۵۵۵۱۵۱۴ \times ۱۰^{-۵}$
۱۲	۰/۷۵۰۰۰۰۰۰	۰/۰۸۷۰۰۶۹۲	۰/۰۸۷۰۱۰۷۶	$۴/۴۱۴۷۶۲۷۵۹۰۹۹ \times ۱۰^{-۵}$
۱۳	۰/۸۱۲۵۰۰۰۰	۰/۰۹۴۱۰۵۵۹	۰/۰۹۴۱۰۸۶۴	$۳/۲۴۵۹۱۹۶۹۳۲۵۶ \times ۱۰^{-۵}$
۱۴	۰/۸۷۵۰۰۰۰۰	۰/۱۰۱۱۶۷۹۸	۰/۱۰۱۱۷۰۱۱	$۲/۱۰۱۴۹۷۰۵۸۲۲۹ \times ۱۰^{-۵}$
۱۵	۰/۹۳۷۵۰۰۰۰	۰/۱۰۸۱۹۱۳۷	۰/۱۰۸۱۹۲۴۷	$۱/۰۰۹۴۳۱۲۱۷۵۱۶ \times ۱۰^{-۵}$

جدول ۱۸.۵: نتایج عددی معادله انتشار در زمان  $t = ۰/۱$

از سطح دقت ( $J = 4$ ) موجک هار استفاده شده است.

$l$	$x_l$	جواب دقیق	جواب هار	خطای مربوطه
۱	۰/۰۳۱۲۵۰۰۰	۰/۰۰۳۶۵۸۹۹	۰/۰۰۳۶۵۹۴۷	$۱/۳۱۲۸۱۱۹۹۱۰۰۵ \times ۱۰^{-۴}$
۳	۰/۰۹۳۷۵۰۰۰	۰/۰۱۰۹۷۵۵۷	۰/۰۱۰۹۷۶۹۹	$۱/۲۹۸۳۵۱۵۴۷۱۶۵ \times ۱۰^{-۴}$
۵	۰/۱۵۶۲۵۰۰۰	۰/۰۱۸۲۸۷۹۱	۰/۰۱۸۲۹۰۲۳	$۱/۲۶۹۶۲۵۷۷۸۷۵۴ \times ۱۰^{-۴}$
۷	۰/۲۱۸۷۵۰۰۰	۰/۰۲۵۵۹۳۲۰	۰/۰۲۵۵۹۶۳۴	$۱/۲۲۷۰۲۵۳۰۷۸۶۳ \times ۱۰^{-۴}$
۹	۰/۲۸۱۲۵۰۰۰	۰/۰۳۲۸۸۸۶۲	۰/۰۳۲۸۹۲۴۷	$۱/۱۷۱۱۳۷۰۲۴۶۱۱ \times ۱۰^{-۴}$
۱۱	۰/۳۴۳۷۵۰۰۰	۰/۰۴۰۱۷۱۳۷	۰/۰۴۰۱۷۵۸۰	$۱/۱۰۲۷۴۵۲۳۹۰۲۱ \times ۱۰^{-۴}$
۱۳	۰/۴۰۶۲۵۰۰۰	۰/۰۴۷۴۳۸۶۳	۰/۰۴۷۴۴۳۴۸	$۱/۰۲۲۸۳۳۲۲۰۹۰۱ \times ۱۰^{-۴}$
۱۵	۰/۴۶۸۷۵۰۰۰	۰/۰۵۴۶۸۷۶۰	۰/۰۵۴۶۹۲۷۰	$۹/۳۲۵۸۵۱۳۳۰۶۲۶ \times ۱۰^{-۵}$
۱۷	۰/۵۳۱۲۵۰۰۰	۰/۰۶۱۹۱۵۴۹	۰/۰۶۱۹۲۰۶۵	$۸/۳۳۳۸۸۳۶۰۹۱۱۷ \times ۱۰^{-۵}$
۱۹	۰/۵۹۳۷۵۰۰۰	۰/۰۶۹۱۱۹۵۰	۰/۰۶۹۱۲۴۵۳	$۷/۲۶۸۳۶۲۴۵۲۵۳۷ \times ۱۰^{-۵}$
۲۱	۰/۶۵۶۲۵۰۰۰	۰/۰۷۶۲۹۶۸۷	۰/۰۷۶۳۰۱۵۶	$۶/۱۴۷۳۱۲۲۸۲۷۵۶ \times ۱۰^{-۵}$
۲۳	۰/۷۱۸۷۵۰۰۰	۰/۰۸۳۴۴۴۸۳	۰/۰۸۳۴۴۹۰۰	$۴/۹۹۰۸۸۴۱۴۷۱۹۰ \times ۱۰^{-۵}$
۲۵	۰/۷۸۱۲۵۰۰۰	۰/۰۹۰۵۶۰۶۲	۰/۰۹۰۵۶۴۰۸	$۳/۸۲۱۳۹۵۶۳۴۷۸۹ \times ۱۰^{-۵}$
۲۷	۰/۸۴۳۷۵۰۰۰	۰/۰۹۷۶۴۱۴۹	۰/۰۹۷۶۴۴۰۹	$۲/۶۶۳۳۷۵۱۷۹۱۱ \times ۱۰^{-۵}$
۲۹	۰/۹۰۶۲۵۰۰۰	۰/۱۰۴۶۸۴۷۲	۰/۱۰۴۶۸۶۳۴	$۱/۵۴۳۶۱۰۸۴۴۱۶۶ \times ۱۰^{-۵}$
۳۱	۰/۹۶۸۷۵۰۰۰	۰/۱۱۱۶۸۷۶۰	۰/۱۱۱۶۸۸۱۵	$۴/۹۱۲۰۳۷۶۲۹۶۰۵ \times ۱۰^{-۶}$

جدول ۱۹.۵: نتایج عددی معادله انتشار در زمان  $t = ۱$

## ۴.۵ نتیجه گیری

روش موجک هار از نظر محاسباتی کارآمد است و الگوریتم آن را می‌توان به آسانی در کامپیوتر اجرا کرد.

۱. مقایسه‌های عددی نشان داد که روش عددی کلاسیک معتبر و دقیق است. به مثال‌های ۲.۲.۵، ۳.۲.۵، ۵.۲.۵، ۱.۳.۵، ۲.۳.۵ رجوع شود.

۲. ویژگی ممتاز این روش، این است که می‌تواند برای مسائل مقدار اولیه و مرزی بدون تبدیل مسائل مقدار مرزی به مسائل مقدار اولیه مورد نیاز برای روش رانگ کوتا اعمال کرد. در روش موجک هار، شرایط اولیه و مرزی بدون هیچ پیچیدگی به‌طور مستقیم اجرا می‌شوند.

۳. کاربرد ساده و همگرایی سریع موجک‌های هار ارائه دهنده یک تابع تحلیلی است و با

استفاده از این توابع جواب عددی معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی به دست می آید.

۴. مزیت اصلی این روش، سادگی و هزینه‌های محاسباتی کم است و این مزیت به سبب تُنک بودن ماتریس‌های تبدیل و تعداد کم ضرایب موجک قابل توجه می‌باشد، از این رو، روش حاضر بسیار معتبر، ساده، سریع، دارای هزینه‌های محاسباتی کم و انعطاف‌پذیر است.

۵. نتایج محاسباتی نشان می‌دهند که همگرایی روش برابر با مرتبه دوم نرم بی‌نهایت است، اما نیاز به بررسی دارد.





# فصل ۶

## بررسی روش‌های مقایسه‌ای از موجک هار، با استفاده از روش‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی

بیشتر پدیده‌های فیزیکی و فرآیندهای مواجه شده در مسائل مهندسی با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کنترل می‌شوند. با استفاده از معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی به توصیف پدیده‌های مورد نظر در زمینه‌های مکانیک سیالات مانند جریان در خطوط راه آهن، جریان خون، جریان‌های هوای اقیانوس، دینامیک اتمسفر، آلودگی هوا، پراکندگی آلاینده‌های زیرزمینی، راکتورهای پلاسما برای تجهیزات نیمه هادی، جریان توربین گاز و موتورهای احتراق داخلی. در مکانیک جامدات مسائل موجود در ارتعاشات، کشش، پلاستیسته و بارگذاری ساختار با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کنترل می‌شود و انتشار امواج صوتی و الکترومغناطیسی و مشکلات انتقال گرما و جرم نیز به وسیله معادلات دیفرانسیل مختلط پرداخته می‌شود. شبیه‌سازی عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به مراتب بیشتر از معادلات دیفرانسیل معمولی است.

در بسیاری از روش‌های عددی و موجک برای یافتن راه حل عددی معادلات دیفرانسیل از مشتقات جزئی استفاده می‌شود. تجزیه و تحلیل موجک اخیراً ابزار ریاضی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی خطی و غیرخطی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است، موجک‌ها نیز در رشته‌های متعددی از قبیل فشرده سازی تصویر، فشرده سازی داده‌ها و حذف داده‌ها و غیره استفاده می‌شوند.

روش‌های موجک برای حل انواع مختلف معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از اوایل دهه ۱۹۹۰ استفاده شده است. موجک هار، لژاندر، چپیشف ابزارهای ریاضی هستند که برای یافتن راه حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می‌شود. روش‌های موجک برای حل معادلات دیفرانسیل در بسیاری از مقالات مورد بحث قرار گرفته است. موجک یک ابزار قدرتمند ریاضی است، به طور گسترده‌ای در پردازش تصاویر دیجیتال، نظریه میدان کوانتومی و تجزیه و تحلیل عددی استفاده شده است. رایج‌ترین موجک‌های مورد استفاده برای حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال، موجک هار، موجک هارمونیک تقریب متوالی، موجک چپیشف و موجک لژاندر هستند.

## ۱.۶ روش موجک هار

موجک هار به طور گسترده برای پردازش سیگنال در ارتباطات و زمینه‌های تحقیقاتی در علوم فیزیک، ریاضی، شیمی و زیست‌شناسی به کار برده می‌شود. از دهه ۱۹۸۰ برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار برده شده است. الگوریتم‌های موجک برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی براساس تکنیک‌های گالرکین یا روش‌های هم‌محلی است. واضح است که تمام تلاش‌ها برای ساده سازی راه حل‌های موجک، برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خوشایند است. که برای این کار امکان دارد یک خانواده از موجک‌های هار ایجاد شود. موجک‌های هار دابیشز<sup>۱</sup> مرتبه یک، شامل توابع ثابت تکه‌ای هستند. از این رو ساده‌ترین موجک‌های متعامد فشرده هستند.

ضعف موجک هار ناپیوستگی آن‌هاست، از آن جایی که مشتق در نقاط ناپیوستگی وجود ندارد، موجک هار برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نمی‌تواند به طور مستقیم اعمال شود. برای غلبه براین شرایط دو حالت وجود دارد:

- مرتب کردن موجک هار با اسپلاین‌های درون‌یابی (به عنوان مثال B-اسپلاین)،
- استفاده از روش انتگرال .

با در نظر گرفتن بازه  $[A, B]$ ، که در آن  $A$  و  $B$  ثابت هستند بایستی با تعریف مقدار  $M = 2^J$  جایی که  $J$  حداکثر سطح است. بازه  $[A, B]$  به زیر بازه‌های  $2M$  با طول برابر تقسیم می‌شود.

<sup>۱</sup>Haar Wavelets Daubechies

طول هر زیر مجموعه  $\Delta x = (B - A)/2M$ . حال پارامتر اتساع  $j = 0, 1, 2, \dots, J$  و پارامتر انتقال  $i = m + k + 1$  طبق فرمول  $m = 2^j$ ، که  $x = 0, 1, 2, \dots, m - 1$  اندیس  $i$  طبق فرمول  $i = m + k + 1$  محاسبه می‌شود. در مورد مقادیر، حداقل مقدار  $m = 1$  و  $k = 0$  و  $i = 2$  و حداکثر مقدار  $i = 2m$  است.

$$h_i(x) = \begin{cases} 1, & \xi_1(i) \leq x < \xi_2(i) \\ -1, & \xi_2(i) \leq x < \xi_3(i) \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (1.6)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \xi_1(i) &= A + 2k\mu\Delta x, \\ \xi_2(i) &= A + (2k + 1)\mu\Delta x, \\ \xi_3(i) &= A + 2(k + 1)\mu\Delta x, \\ \mu &= \frac{M}{m}. \end{aligned}$$

با فرض مقدار  $i = 1$ ، مطابق تابع مقیاس در  $[A, B]$  داریم:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & A \leq x \leq B \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (2.6)$$

برای حل  $r$ -امین معادله دیفرانسیل مشتق جزئی، به انتگرال نیاز داریم،

$$P_{n,i} = \int_A^x \int_A^x \dots \int_A^x h_i(t) dt^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_A^x (x-t)^{n-1} h_i(t) dt. \quad (3.6)$$

نقاط هم محلی  $x_l = 0/5(\bar{x}_{l-1} + \bar{x}_l)$  ،  $l = 1, 2, \dots, 2M$  هستند، که نشان دهنده  $l$ -امین نقطه شبکه  $\bar{x}_l = A + l\Delta x$  ،  $l = 1, 2, \dots, 2M$  است. ماتریس عملیاتی انتگرال گیری  $P$ ، که یک ماتریس مربعی  $2M$  می‌باشد به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$P_{i,1} = \int_0^x h_i dt \quad (4.6)$$

$$P_{i,n+1} = \int_0^x P_{i,n} dt \quad (5.6)$$

که  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(6.6)$$

$$P_{\alpha,i}(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi_1(i) \\ \frac{1}{(\alpha)!} \{(x - \xi_1(i))^\alpha\}, & x \in [\xi_1(i), \xi_2(i)] \\ \frac{1}{(\alpha)!} \{(x - \xi_1(i))^\alpha - 2(x - \xi_2(i))^\alpha\}, & x \in [\xi_2(i), \xi_3(i)] \\ \frac{1}{(\alpha)!} \{(x - \xi_1(i))^\alpha - 2(x - \xi_2(i))^\alpha + (x - \xi_3(i))^\alpha\}, & x > \xi_3(i) \end{cases}$$

فرض کنید بسط  $u''(x, t)$  را می‌توان در شرایط موجک هار به صورت زیر تعمیم داد:

$$u''(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x), \quad t \in (t_s, t_{s+1}) \quad (7.6)$$

با انتگرال‌گیری معادله فوق نسبت به  $t$  از  $t_s$  تا  $t$  و دوباره نسبت به  $x$ ، از  $0$  تا  $x$ ، داریم:

$$u''(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + u''(x, t_s) \quad (8.6)$$

$$u'(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{\gamma, i}(x) + u'(x, t_s) - u'(\circ, t_s) + u'(\circ, t), \quad (9.6)$$

$$u(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} \alpha_i P_{\gamma, i}(x) + u(x, t_s) - u(\circ, t_s) - x[u'(\circ, t_s) - u'(\circ, t)] + u(\circ, t), \quad (10.6)$$

$$\dot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} \alpha_i P_{\gamma, i}(x) + x + \dot{u}'(\circ, t), \quad (11.6)$$

از شرایط اولیه و مرزی داریم:

$$u(x, \circ) = f(x), u(\circ, t) = g_{\circ}(t), u(1, t) = g_1(t), u(\circ, t_s) = g_{\circ}(t_s), u(1, t_s) = g_1(t_s), \\ \dot{u}(\circ, t) = \dot{g}_{\circ}(t), \dot{u}(1, t) = \dot{g}_1(t).$$

در  $x = 1$  در فرمول‌های (۱۰.۶) و (۱۱.۶) و با استفاده از شرایط به کار برده شده، داریم:

$$u'(\circ, t) - u'(\circ, t_s) = -(t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{\gamma, i}(1) + g_1(t) - g_1(t_s) + g_{\circ}(t_s) + g_{\circ}(t) \quad (12.6)$$

$$\dot{u}'(\circ, t) = - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{\gamma, i}(1) + \dot{g}_{\circ}(t) + \ddot{g}_1(t) \quad (13.6)$$

اگر معادلات (۱۲.۶) و (۱۳.۶) با معادلات (۸.۶)–(۱۱.۶) تعویض کنیم، نتایج قابل قبول با فرض  $x \rightarrow x_1$  و  $t \rightarrow t_{s+1}$  حاصل می‌شود:

$$u''(x_1, t_{s+1}) = (t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_1) + u''(x_1, t_s), \quad (14.6)$$

$$u'(x_1, t_{s+1}) = (t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{\gamma, i}(x_1) - (t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{\gamma, i}(1) \\ + u'(x_1, t_s) + g_1(t_{s+1}) - g_1(t_s) + g_{\circ}(t_s) - g_{\circ}(t_{s+1}), \quad (15.6)$$

$$\begin{aligned}
 u(x_l, t_{s+1}) &= (t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{\Upsilon, i}(x_l) \\
 &+ x_l [(t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{\Upsilon, i}(x_l) - g_{\Upsilon}(t_{s+1}) + g_{\Upsilon}(t_s) + g_{\circ}(t_s) + g_{\circ}(t_{s+1})] \\
 &+ u(x_l t_s) + g_{\circ}(t_{s+1}) - g_{\circ}(t_s), \tag{۱۶.۶}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{u}(x_l, t_{s+1}) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{\Upsilon, i}(x_l) \\
 &+ x_l [\sum_{i=1}^{2M} a_i P_{\Upsilon, i}(1) \dot{g}_{\circ}(t_{s+1}) - \dot{g}_{\Upsilon}(t_{s+1})] + \dot{g}_{\circ}(t_{s+1}), \tag{۱۷.۶}
 \end{aligned}$$

اما می‌دانیم که:

$$P_{\Upsilon, i}(1) = \begin{cases} \circ/\Delta, & i = 1, \\ \frac{1}{4m^{\Upsilon}}, & i > 1, \end{cases} \tag{۱۸.۶}$$

در طرح داده شده، که از  $t_s$  تا  $t_{s+1}$  میل می‌کند، استفاده می‌شود. در اینجا ضریب موجک محاسبه شده و راه حل معادلات دیفراسیل با مشتقات جزئی بدست می‌آید.

## ۲.۶ تقریب توابع

می‌دانیم همه‌ی موجک‌های هار با یکدیگر متعامد هستند:

$$\int_{\circ}^1 h_i(x) h_l(x) dx = \begin{cases} 2^{-j}, & i = l = 2^j + k, \\ \circ, & i \neq l. \end{cases} \tag{۱۹.۶}$$

بنابراین آن‌ها یک پایه‌ی تبدیل خیلی خوب را ایجاد می‌کنند. هر تابع مربع انتگرال‌پذیر  $y(x)$  در فاصله  $[0, 1]$  می‌تواند توسط یک سری هار از شرایط بی‌نهایت گسترش یابد:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i h_i(x) \tag{۲۰.۶}$$

که،  $c_i$  به عنوان ضریب هار بصورت زیر بدست می‌آید:

$$c_{\circ} = \int_{\circ}^1 y(x) h_{\circ}(x) dx \tag{۲۱.۶}$$

$$c_i = 2^j \int_{\circ}^1 y(x) h_i(x) dx \tag{۲۲.۶}$$

که،  $x \in [0, 1]$ ،  $0 \leq k < 2^j$  و  $i = 2^j + k, j \geq 0$  بطوریکه خطای مربع انتگرال پذیر  $\epsilon$  به حداقل می‌رسد:

$$\epsilon = \int_0^1 [y(x) - \sum_{i=1}^m c_i h_i(x)]^2 dx \quad (23.6)$$

که  $m = 2^j$  و  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$  معمولاً بسط سری (۲۰.۶) دارای شرایط بی نهایت است. اگر تابع  $y(x)$  به صورت تکه‌ای ثابت باشد در هر زیر بازه به صورت تکه‌ای ثابت تقریب زده می‌شود در این صورت  $y(x)$  می‌تواند در  $m$  جمله متناهی محدود شود. بدین معنی که:

$$y(x) \cong \sum_{i=1}^m c_i h_i(x) = c_m^T h_m(x) \quad (24.6)$$

که ضریب  $c_m^T$  و بردارهای تابع هار  $h_m(x)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:  $c_m^T = [c_1, c_2, \dots, c_m]$  و  $h_m(x) = [h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)]^T$

## ۳.۶ روش اشمیت<sup>۲</sup>

یک مش مستطیل شکل در صفحه  $x - t$  را با فاصله  $\Delta x$  در جهت  $x$  و در بازه‌ی زمانی  $\delta t$  در جهت  $t$  در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم یک نقطه مش<sup>۳</sup>  $(i, j, k) = (x, t)$  داریم،

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} \quad (25.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (26.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (27.6)$$

این مقادیر را در معادله دیفرانسیل جزئی داده شده تغییر می‌دهیم. با استفاده از رابطه بدست آمده مقدار  $u$  را در  $(i, j+1)$  - اُمین نقطه‌ی گره‌ای از نظر مقادیر تابع معین در نقاط  $X(i-1)$  و  $X(i+1)$  در لحظه  $t_j$  مشخص می‌کنیم.

## ۴.۶ روش میلز نیکولسون<sup>۴</sup>

با توجه به این روش  $\partial u / \partial x$  و  $\partial^2 u / \partial x^2$  با میانگین تقریبی تفاضل مرکزی در  $j$ -اُمین و  $j+1$ -اُمین بازه زمانی جایگزین می‌شوند.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} \quad (28.6)$$

<sup>۲</sup> Schmidt Method

<sup>۳</sup> Mesh Point

<sup>۴</sup> Crank-Nicolson Method

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right\} \quad (29.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \right\} \quad (30.6)$$

این مقادیر را در معادله دیفرانسیل جزئی داده شده تغییر می‌دهیم. با استفاده از رابطه بدست آمده مقدار  $u$  را در  $(i, j+1)$  - آمین نقطه‌ی گره‌ای از نظر مقادیر تابع معین در نقاط  $X(i-1)$ ،  $X(i)$  و  $X(i+1)$  در لحظه  $t_j$  مشخص می‌کنیم.

## ۵.۶ روش دو فورت فرانکل<sup>۵</sup>

اگر مشتق بدست آمده از معادلات دیفرانسیل جزئی را با تقریب تفاضل مرکزی جایگذاری کنیم، داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t} \quad (31.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (32.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (33.6)$$

مقدار معادله دیفرانسیل جزئی داده شده را در رابطه‌ی بدست آمده جایگزین می‌کنیم.

$$u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2} \quad (34.6)$$

این شکل تفاضل، روش دو فورت فرانکل نامیده می‌شود.

## ۶.۶ مثال‌های عددی

مثال ۱.۶.۶. معادله مشتقات جزئی زیر را

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

تحت شرایط اولیه و مرزی  $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  و مرزی  $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  حل می‌کنیم. جدول ۱.۶ مقایسه نتایج عددی برای  $t = 0.1$  و جدول ۲.۶ مقایسه خطای مطلق برای  $t = 0.1$  را نشان می‌دهند. نتایج عددی برای  $\Delta t = 0.001, 0.01, 0.015, 0.02, 0.1$  مختلف برای  $t = 0.001, 0.01, 0.015, 0.02, 0.1$  نشان می‌دهد.

$x_i/16$	دقیق	هار	اشمیت	میلزنیکولسون	دو-فورت-فرانک
۱	۰/۱۷۶۸	۰/۱۷۶۸	۰/۱۷۶۸	۰/۱۷۶۸	۰/۱۷۶۸
۳	۰/۵۰۳۴	۰/۵۰۳۶	۰/۵۰۳۳	۰/۵۰۳۵	۰/۵۰۳۴
۵	۰/۷۵۳۳	۰/۷۵۳۷	۰/۷۵۳۲	۰/۷۵۳۶	۰/۷۵۳۴
۷	۰/۸۸۸۶	۰/۸۸۹۱	۰/۸۸۸۵	۰/۸۸۸۹	۰/۸۸۸۷
۹	۰/۸۸۸۶	۰/۸۸۹۱	۰/۸۸۸۵	۰/۸۸۸۹	۰/۸۸۸۷
۱۱	۰/۷۵۳۳	۰/۷۵۳۷	۰/۷۵۳۲	۰/۷۵۳۶	۰/۷۵۳۴
۱۳	۰/۵۰۳۴	۰/۵۰۳۶	۰/۵۰۳۳	۰/۵۰۳۵	۰/۵۰۳۴
۱۵	۰/۱۷۶۸	۰/۱۷۶۸	۰/۱۷۶۸	۰/۱۷۶۸	۰/۱۷۶۸

جدول ۱.۶: مقایسه نتایج عددی مثال ۱.۶.۶ برای  $t = 0.1$



$x_i/16$	هار	اشمیت	میلزنیکولسون	دو-فورت-فرانک
۱	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰
۳	$2 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	۰/۰۰۰۰۰
۵	$4 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
۷	$5 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
۹	$5 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
۱۱	$4 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
۱۳	$2 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	۰/۰۰۰۰۰
۱۵	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰

جدول ۲.۶: مقایسه خطای مطلق مثال ۱.۶.۶ برای  $t = 0.1$

مثال ۲.۶.۶. معادله مشتقات جزئی زیر را

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

تحت شرایط اولیه و مرزی  $u(x, 0) = \sin \pi x + \sin 2\pi x$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$  حل می‌کنیم. جدول ۳.۶ مقایسه نتایج عددی برای  $t = 0.1$  و جدول ۴.۶ مقایسه خطای مطلق برای  $t = 0.1$  را نشان می‌دهند. نتایج عددی برای  $\Delta t = 0.001$  بدست می‌آوریم. شکل ۲.۶ مقایسه جواب‌های عددی مختلف برای  $t = 0.001, 0.01, 0.015, 0.02, 0.05$  نشان می‌دهد.

$x_i/16$	دقیق	هار	اشمیت	میلزنیکولسون	دو-فورت-فرانک
۱	۰/۴۳۴۶	۰/۴۳۷۳	۰/۴۳۳۹	۰/۴۳۶۰	۰/۴۳۵۰
۳	۱/۱۲۵۹	۱/۱۳۲۳	۱/۱۲۴۱	۱/۱۲۹۲	۱/۱۲۶۹
۵	۱/۳۷۵۹	۱/۳۸۲۴	۱/۳۷۴۰	۱/۳۷۹۲	۱/۳۷۶۸
۷	۱/۱۴۶۵	۱/۱۴۹۵	۱/۱۴۵۶	۱/۱۴۸۰	۱/۱۴۶۹
۹	۰/۶۳۰۷	۰/۶۲۸۶	۰/۶۳۱۳	۰/۶۲۹۷	۰/۶۳۰۵
۱۱	۰/۱۳۰۸	۰/۱۲۵۰	۰/۱۳۲۴	۰/۱۲۷۹	۰/۱۳۰۰
۱۳	-۰/۱۱۹۲	-۰/۱۲۵۱	-۰/۱۱۷۶	-۰/۱۲۲۱	-۰/۱۲۰۰
۱۵	-۰/۰۸۱۱	-۰/۰۸۳۶	-۰/۰۸۰۴	-۰/۰۸۲۳	-۰/۰۸۱۵

جدول ۳.۶: مقایسه نتایج عددی مثال ۲.۶.۶ برای  $t = 0.1$

$x_i/16$	هار	اشمیت	میلزنیکولسون	دو-فورت-فرانک
۱	$2/7 \times 10^{-3}$	$7 \times 10^{-4}$	$1/4 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-4}$
۳	$6/4 \times 10^{-3}$	$1/8 \times 10^{-3}$	$3/3 \times 10^{-3}$	$1/0 \times 10^{-3}$
۵	$6/6 \times 10^{-3}$	$1/9 \times 10^{-3}$	$3/3 \times 10^{-3}$	$9 \times 10^{-4}$
۷	$3/0 \times 10^{-3}$	$9 \times 10^{-4}$	$1/5 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-4}$
۹	$2/1 \times 10^{-3}$	$6 \times 10^{-4}$	$1/0 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-4}$
۱۱	$5/8 \times 10^{-3}$	$1/6 \times 10^{-3}$	$2/9 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-4}$
۱۳	$5/9 \times 10^{-3}$	$1/6 \times 10^{-3}$	$2/9 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-4}$
۱۵	$2/5 \times 10^{-3}$	$7 \times 10^{-4}$	$1/2 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-4}$

جدول ۴.۶: مقایسه خطای مطلق مثال ۲.۶.۶ برای  $t = 0.1$

مثال ۳.۶.۶. معادله مشتقات جزئی زیر را

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

تحت شرایط اولیه و مرزی  $u(x, 0) = 1 + 2x + 3 \sin \pi x$ ,  $u(0, t) = 1$ ,  $u(1, t) = 3$  مرزی و مرزی  $u(x, 0) = 1 + 2x + 3 \sin \pi x$ ,  $u(0, t) = 1$ ,  $u(1, t) = 3$  حل می‌کنیم. جدول ۵.۶ مقایسه نتایج عددی برای  $t = 0.1$  و جدول ۶.۶ مقایسه خطای مطلق برای  $t = 0.1$  را نشان می‌دهند. نتایج عددی برای  $\Delta t = 0.001$  بدست می‌آوریم. شکل ۳.۶ مقایسه جواب‌های عددی مختلف برای  $t = 0.001, 0.01, 0.015, 0.02, 0.1$  نشان می‌دهد.

$x_i/16$	دقیق	هار	اشمیت	میلزنیکولسون	دو-فورت-فرانک
۱	۱/۶۵۵۳	۱/۶۵۵۵	۱/۶۵۵۲	۱/۶۵۵۴	۱/۶۵۵۳
۳	۲/۸۸۵۱	۲/۸۸۵۹	۲/۸۸۴۸	۲/۸۸۵۵	۲/۸۸۵۲
۵	۳/۸۸۵۰	۳/۸۸۶۲	۳/۸۸۴۶	۳/۸۸۵۷	۳/۸۸۵۱
۷	۴/۵۴۰۸	۴/۵۴۲۲	۴/۵۴۰۴	۴/۵۴۱۷	۴/۵۴۱۰
۹	۴/۷۹۰۸	۴/۷۹۲۲	۴/۷۹۰۴	۴/۷۹۱۷	۴/۷۹۱۰
۱۱	۴/۶۳۵۰	۴/۶۳۶۲	۴/۶۳۴۶	۴/۶۳۵۷	۴/۶۳۵۱
۱۳	۴/۱۳۵۱	۴/۱۳۵۹	۴/۱۳۴۸	۴/۱۳۵۵	۴/۱۳۵۲
۱۵	۳/۴۰۵۳	۳/۴۰۵۵	۳/۴۰۵۲	۳/۴۰۵۴	۳/۴۰۵۳

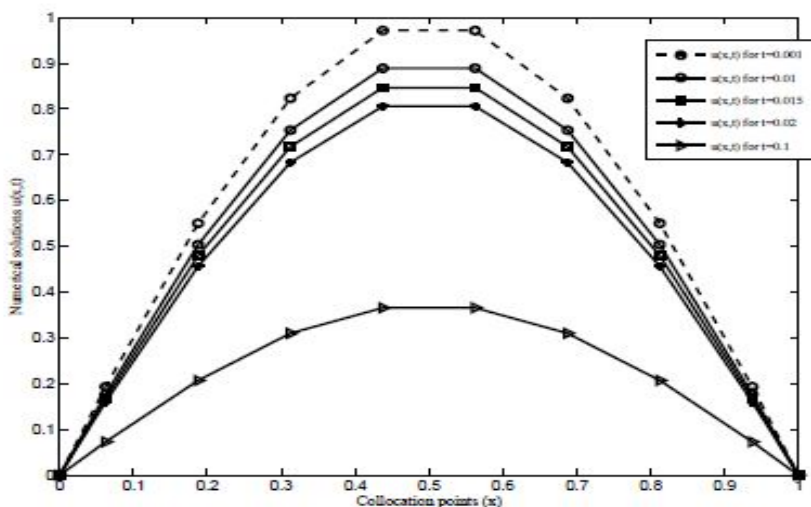
جدول ۵.۶: مقایسه نتایج عددی مثال ۲.۶.۶ برای  $t = 0.1$

دو-فورت-فرانک	میلز نیکولسون	اشمیت	هار	$x_l/16$
۰/۰۰۰۰۰	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	۱
$1 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-4}$	۳
$1 \times 10^{-4}$	$7 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$1/2 \times 10^{-3}$	۵
$2 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$1/4 \times 10^{-3}$	۷
$2 \times 10^{-4}$	$9 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$1/4 \times 10^{-3}$	۹
$1 \times 10^{-4}$	$7 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$1/2 \times 10^{-3}$	۱۱
$1 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-4}$	۱۳
۰/۰۰۰۰۰	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	۱۵

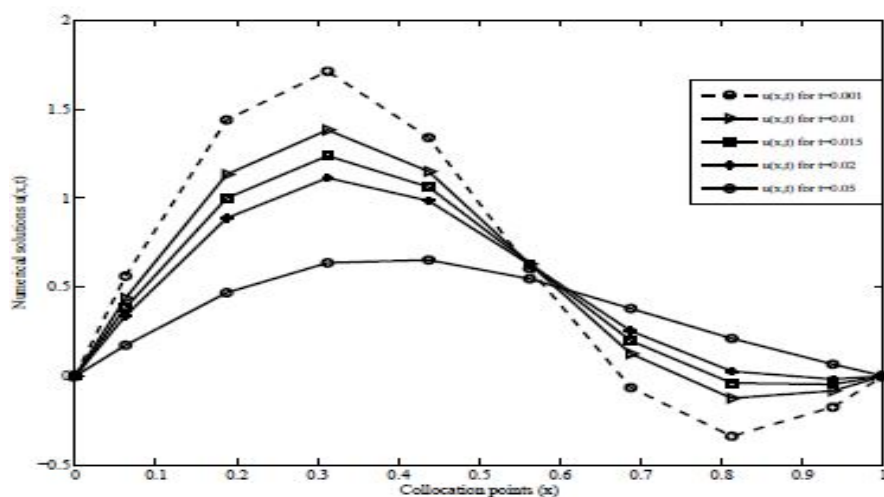
جدول ۶.۶: مقایسه خطای مطلق مثال ۳.۶.۶ برای  $t = 0.01$

### ۱.۶.۶ نتیجه گیری

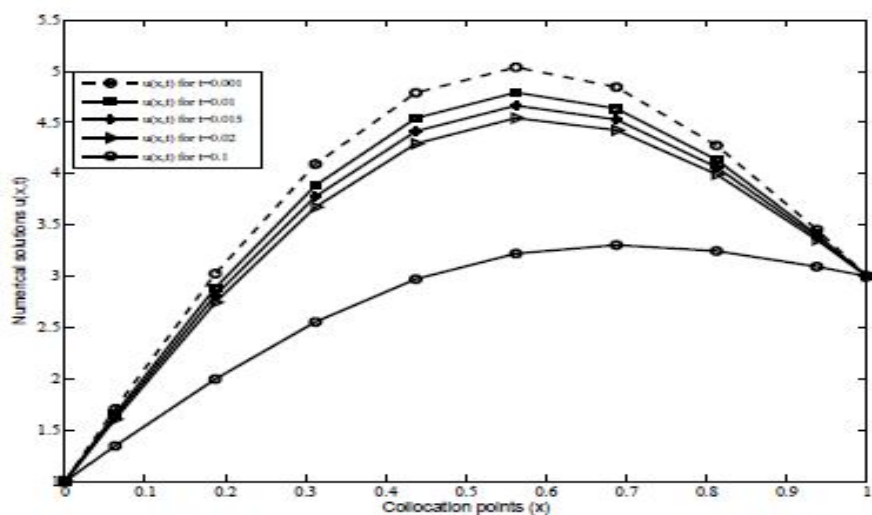
نتیجه می‌شود که، نتایج عددی حاصل از روش‌های متمایز محدود مانند روش اشمیت، روش نیکولسون و روش دو فورت فرانکل بسیار شبیه به روش موجک هار است. خطاهای مطلق از نمونه‌های عددی نشان می‌دهد که روش اشمیت، روش نیکولسون و روش دو فورت فرانکل به معنی روش موجک هار است.



شکل ۱.۶: مقایسه نتایج عددی مثال ۱.۶.۶ برای نقاط مختلف  $t$



شکل ۲.۶: مقایسه نتایج عددی مثال ۲.۶.۶ برای نقاط مختلف  $t$



شکل ۳.۶: مقایسه نتایج عددی مثال ۳.۶.۶ برای نقاط مختلف  $t$

# مراجع

- [1] Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, Student Solution Manual and Study Guide, U.S.A, Tenth Edition, Wiley, (2011).
- [2] Albert Boggess, Francis J. Narcowich, First Course in Wavelets with Fourier Analysis, Prentice Hall, (2001).
- [3] Ole Christensen, Khadija L.Christensen, Approximation Theory from Taylor Polynomial to Wavelets, Kgs.Lyngby, Denmark, (2004).
- [4] Goswami J.C, Chan A.K, Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithm, and Applications, U.S.A , IEEE, (1995).
- [5] Ramazan Gencay, Faruk Selc11k. Brandon Whitcher. An Introduction To wavelets and other Filtering methods In Finance and economic, Canada, Turkey, U.S.A, Academic Press, (Apr-2001).
- [6] Mark Piusky, Introduction to Fourier Analysis and wavelets, U.S.A, American Mathematical Society, (2009).
- [7] M. Rafiqul Isla111, Wavelets, its Application and Technique in signal and image processing, U.S.A, Global Journals of Computer Science and Technology, Volume 11, Issue 4 Version 1.0, March (2011).
- [8] M. Sifuzzaman, M.R. Islam and M.Z. Ali, Application of Wavelet Transform and its Advantages Compared to Fourier Transform, Bangladesh, Journal of Physical Sciences, Vol. 13, (2009), pp.121- 134.
- [9] Manoj Klumar, Sapna Pandit, Wavelet Transform and Wavelet Based Numerical Methods: an Introduction, India, International Journal of Nonlinear Science, Vol.13(2012), No.3, pp.325-345.

- [10] Mehdi Rashidi Kouchi, Mostafa Khosravi, Javad Bahmani, A Numerical Solution of Homogeneous and Inhomogeneous Harmonic Differential Equation with Haar Wavelet, Iran, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol.6, 2011, No.41.
- [11] Phang Chang, Phang Piau, Simple Procedure for the Designation of Haar Wavelet Matrices for Differential Equations, Hong Kong, Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists, (2008).
- [12] Jianzhong Wang, Spline Wavelets in Numerical Resolution of Partial Differential Equations, Hlmtsville, Texas, U.S.A. By SHSUFRC,(1998).
- [13] G.Hanriharau and K.Kannan, A comparative study of Haar Wavelet Method and Homotopy Perturbation Method for solving one- dimensional Reaction-Diffusion Equations, India, International Journal of Applied Mathematics and Computation, Volmne 3(1), pp.21—34, (2011).
- [14] S.G.Ve11katesh, S.K.AyyasWamy and G.Hariharan, Haar wavelet method for solving Initial and Boundary Value Problems of Brutu- type, India, International Scholarly and Scientific Research & Innovation, Vol:4 ,pp.385-388, (2010).
- [15] Ülo Lepik, Application of the Haar wavelet Transform to Solving Integral and Differential Equations, Estonia, pp.28-46, (2006).
- [16] Ülo Lepik, Solving PDEs with the aid of two—dimensional Haar Wavelets, Estonia, ELSEVIER, Computers and Mathematics with Applications, (2011), pp. 1873-1879.
- [17] G. Haiiharan, The Wavelet Method for Solving a Few Linear and Nonlinear Wave-type Equations, Florida, U.S.A, International Journal of Modern Mathematical Sciences, Volume 5(2), pp.77-91, (2013).
- [18] Naresh Berwal, Dinesh Panchal. C. L. Parihar, Solution of wave- Like Equation Based on Haar wavelet, India, pp.157-167, (2012).
- [19] Naresh Berwal, Dinesh Panchal and C.L. Palihar, Solution of Differential Equation Based on Haar Operational Matrix, India, Palestine Journal of Mathematics, Vol. 3(2) (2014), pp.281—288.
- [20] Sapna Pandit and Manoj Kumar, Haar Wavelet Approach for Numerical Solution of Two Parameters Singularly Perturbed Boundary Value Problems, India, Appl. Math. Inf. Sci. 8, No. 6, pp.2965-2974, (2014).

- [21] Fazal-i-Haq, Imran Aziz and Siraj-ul-Islam, A Haar wavelets Based Numerical Method for eight-order Boundary Problems, Peshawar, Pakistan, (2010).
- [22] Siraj-ul-Islam , Bozidar Sarler, Imran Aziz and Fazal-i-Haq, Haar wavelet collocation method for the numerical solution of boundary layer fluid flow problems, Slovenia, Pakistan, ELSEVIER, (2011), pp.686-697.
- [23] Imran Aziz, Siraj-111-Islam, Bozidar Šarler, wavelets collocation methods for the numerical solution of elliptic BV problems, Slovenia, Pakistan, ELSEVIER, (2013), pp.676-694.
- [24] Siraj-ul-Islam, Imran Aziz, Bozidar Sarler, The numerical solution of second-order boundary-value problems by collocation method with the Haar wavelets, Slovenia, Pakistan, ELSEVIER, (2010). pp.1577-1590.
- [25] C.Sidney Burrus, Ramesh A.Gopi11ath, and Haitao Guo, Introduction to Wavelets and wavelet Transforms, Houston, Texas, Prentice Hall, (1998).
- [26] Richard L.Burden and J.Douglas Faires, Numerical Analysis, Canada, Nelson Education, Ninth Edition, (2010).
- [27] A defemi Sunmonu, Implementation of Wavelet Solutions to Second Order Differential Equations with Maple, New York, USA, Applied Mathematical Sciences, Vol.6,(2012),no.127,pp.6311-6326.
- [28] Bothina Gaimam, Mathematical Theory of Wavelets, Faculty of Graduate Studies, at An Najah National University, Nablus, Palestine (2009).
- [29] Mark.H.Holmes, Introduction to Numerical Methods Differential Equation, Troy, New York, Springer, (2006).
- [30] Rana Ismirate, Data Compression with Wavelets, Faculty of Graduate Studies, at All Najah National University, Nablus, Palestine (2009).
- [31] C.F. Chen and C.H. Hsiao, Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems, IEE Proc., Control Theory Appl., 144 (1997) 87-94.
- [32] W. Dahmen, R. Schneider and Y. Xu : Nonlinear functionals of wavelet expansions-adaptive reconstruction and fast evaluation, Numerische Mathematik, 86 (2000) 49-101.
- [33] A. M. Wazwaz, Partial differential equation and solitary waves theory, Springer, USA, (2009).

- 
- [34] G. Hariharan, K. Kannan and R.K. Sharma, Haar wavelet method for solving Fisher's equation, *Applied Mathematics and Computational Science*, 211 (2009) 284-292.
- [35] G. Hariharan and K. Kannan, Haar wavelet method for solving Fitzhugh- Nagumo equation, *World Academy of Sciences, Engineering and Technology*, 43 (2010) 560-563.
- [36] G. Hariharan, An overview of Haar wavelet method for solving differential and integral equations, *World Applied Sciences Journal*, 23 (2013) 01-14.
- [37] I. Daubechies, *Ten Lectures on wavelets*, CBMS-NCF, SIAM, Philadelphia, (1992).
- [38] A. Haar, *Zur theorie der orthogonalen Funktionssysteme*, *Math. Annal*, 69 (1910) 331-371.



## **Abstract**

In this thesis, a computational study of the relatively new numerical methods of Haar wavelets for solving linear differential equations is used. A comparison between the new method and some classical methods for linear differential equations has been made. The aim is to show the efficiency of the presented method and its advantage over other method. The new method is simple and its numerical results are close or more accurate than some classical methods.

**keywords:**Initial Value Problem, Partial Value Problem value, Continuous wavelet transforms, Haar wavelet, Haar scale function, Haar wavelet transform.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mathematical Sciences**

**MSc Thesis in: Numerical Analysis**

**Numerical solution of partial differential  
equations using some wavelets**

**By: Masoumeh Mahmoodi**

**Supervisor**

**Dr. H. Ahsani Tehrani**

**Advisor**

**Dr. M. Ghovatmand**

**9 February 2019**