دانشگاه صنعتی شاهرود

حوزه معاونت پژوهشی وفناوری

دانشگاه صنعتی شاهرود

گزارش پایانیطرح پژوهشی

تعداد مولدهای مینیمال زیرمدولها

کد طرح ۲۳۰۷

مجری: مهدی رضا خورسندی

عضو هیات علمی دانشکده ریاضی

مهر ماه ۱۳۸۵

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است و تاریخ تصویب و خاتمه آن به ترتیب ۸۴/۳/۱ و۸۵/۷/۹ می باشد

چکیده

تعداد مولدهای مینیمال زیرمدولها

در این طرح برای تعداد مولدهای مینیمال زیر مدول ها در مدولهای کوهن-مکالی کرانهای مختلف به دست می آوریم، در اکثر موارد تعیین دقیق تعداد مولدهای مینیمال زیرمدولها امکان پذیر نمی باشد و برای آن کرانهای مختلف به دست می آورند ،کارهای زیاد و عمیقی در حالت حلقه ها انجام شده است که برای مطالعه می توان به اثر سنگین پروفسور سلی[1] مراجعه کرد.[2]

در فصل یک به بیان تعاریف مورد نیاز و تاریخچه مختصر کارهای انجام شده می پردازیم.در فصل دوم کران یکنواختی برای تعداد مولدهای مینیمال رده خاصی از زیر مدولهای یک مدول کوهن- مکالی به دست می آوریم و نشان می دهیم این کران یکنواخت همان چندگانگی مدول می باشد و کرانهای به دست آمده در قبل را بهبود می بخشد،به طور دقیق تر نشان خواهیم داد:

قضیه . فرض کنید (R,m) حلقه ای موضعی و نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد وکوهن مکالی باشد و $\dim(M)=d\geq 0$، در این صورت برای هر زیر مدول N از M که $depth(\frac{M}{N})\geq d-1$،

$$\mu(N)\leq e(M)$$

در فصل سوم بعضی از کارهای انجام شده در حلقه ها را به مدولها تعمیم خواهیم داد به طور مثال قضیه زیر را ثابت خواهیم کرد:

قضیه . فرض کنید (R,m) حلقه ای موضعی و نوتری و M یک R- مدول متناهی مولد و کوهن- مکالی باشد، اگر N زیرمدولی از M که $\frac{M}{N}$ یک R-مدول کوهن- مکالی باشد و $h=\dim M-\dim\frac{M}{N}\succ 0$

آنگاه $$\mu(N)\leq e(\frac{M}{N})^{h-1}e(M)+(h-1)\mu(M)$$

توجه شود که کران فوق یکنواخت نمی باشد.

نهایتا در پیوست ۱ مقاله مستخرج از طرح قرار گرفته است.

[1] Sally

[2] مرجع شماره [7]

فهرست

فصل اول

مقدمه

در سر تا سر این گزارش منظور از R حلقه ای جابجایی ، یکدار ،ناصفر، نوتری وموضعی با ایده آل ماکزیمال m و M یک R- مدول متناهی مولد ناصفر یکانی می باشد.

اگر $N \leq M$ آنگاه تعداد مولدهای مینیمال زیر مدول N را با $\mu_R(N)$ نمایش می دهیم.

اگر K یک R- مدول دلخواه باشدآنگاه منظور از $\ell_R(K)$ طول R- مدول K می باشد، می دانیم $\mu_R(N) = \ell_R(\frac{N}{mN})$. در ضمن بعد کرول R - مدول M را با $\dim_R(M)$ نشان می دهیم،در تمامی موارد اگر ابهامی نباشد اندیس R را حذف می کنیم.

رشته $\underline{x} = x_1,\dots,x_d$ در R را که در آن $d = \dim M$ یک دستگاه از پارامترها روی M گوییم هر گاه $\ell(\frac{M}{\underline{x}M}) \prec \infty$ و در صورتی که $\dim M \prec \infty$ همواره وجود خواهد داشت.

اگر M یک R- مدول دلخواه باشد و I ایده آلی از R به طوری که $\ell(\frac{M}{IM}) \prec \infty$ آنگاه منظور از $e(I,M)$ چندگانگی[1] R- مدول M نسبت به I است و به صورت :

$$e(I,M) = \lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d}\ \ell(\frac{M}{I^{n+1}M})$$

تعریف می شود که در آن $d = \dim M$.

[1] multiplicity

در حالتی که $\ell(\frac{M}{IM}) \prec \infty$ هیلبرت و سموئل نشان داده اند که برای $n \succ\succ 0$، $\ell(\frac{M}{I^{n+1}M})$ یک چند جمله ای با ضرایب گویا بر حسب n با درجه d است و $e(I,M) \in \mathbb{N}$. در حالتی که $I = m$ است شرط $\ell(\frac{M}{IM}) \prec \infty$ همواره برقرار است زیرا $\ell(\frac{M}{mM}) = \mu(M) \prec \infty$، در این حالت $e(m,M)$ را با $e(M)$ نمایش می دهیم و آن را چندگانگی R-مدول M می نامیم.

بررسی تعداد مولد های مینیمال زیرمدولها در جبر جابجایی از اهمیت ویژه ای برخوردار است و گامی در جهت شناخت و رده بندی زیر مدولها می باشد،در اکثر موارد تعیین دقیق تعداد مولدهای مینیمال زیرمدولها امکان پذیر نمی باشد و برای آن کرانهای مختلف به دست می آورند ، ثابت شده است که برای تعداد مولد های مینیمال زیرمدولها کران یکنواخت وجود دارد اگر و فقط اگر بعد مدول حداکثر یک باشد ، به طور دقیق تر

۱. ۱ قضیه.

فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی و نوتری M یک R-مدول متناهی مولد باشد در این صورت : $\dim M \leq ۱$ اگر و تنها اگر $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $N \leq M$ ، $\mu(N) \leq n$.

برای مدولهای با بعد بالاتر برای وجود کران یکنواخت برای تعداد مولد های مینیمال زیرمدولها باید به رده خاصی از زیرمدولها محدود شد که برای حلقه های با بعد حداکثر دو قضیه زیر ثابت شده است:

۱. ۲ قضیه.

فرض کنید (R,m) حلقه ای موضعی و نوتری باشد دراین صورت $\dim R \leq ۲$ اگر و تنها اگر کران یکنواختی برای تعداد مولدهای مینیمال ایده آلهایی مثل I که $m \in Ass(\frac{R}{I})$ وجود داشته باشد.

گوتلیب[۲] در سال ۱۹۹۵ قضیه فوق را به حلقه های با بعد بالاتر به صورت زیر تعمیم داد:

۱. ۳ قضیه.

فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی ونوتری و $\dim R = d \geq ۱$ و q ایده آلی از R باشد که توسط یک دستگاه از پارامترهاروی R تولید شود ، در این صورت برای هر ایده آل R مانند I که

---

[2] Gottlieb

$depth\frac{R}{I} \geq d-۱$ ،

$$\mu(I) \leq \ell(\frac{R}{q})$$

شریف[3] و یاسمی[4] در سال ۲۰۰۲ قضیه فوق را به مدولها تعمیم دادند.

قضیه زیر بیان می کند، در حالتی که R حلقه ای کوهن- مکالی با بعد یک باشد در قضیه ۱. ۳ می توان کران یکنواخت بهتری به دست آورد.

۱. ۴ قضیه.

فرض کنید (R,m) حلقه موضعی ، نوتری وکوهن – مکالی باشد و $\dim R \leq ۱$ در این صورت اگر I ایده آلی از R باشد آنگاه :

$$htI = 0 \Rightarrow \mu(I) \leq e(R) - e(\frac{R}{I})$$
$$htI = 1 \Rightarrow \mu(I) \leq e(R)$$

در فصل دوم این گزارش کران یکنواخت بهتری برای تعداد مولدهای مینیمال رده خاصی از زیر مدولها در یک مدول کوهن- مکالی با بعد دلخواه به دست خواهیم آورد.

در حالتهایی که به دنبال کرانهای غیر یکنواخت برای تعداد مولدهای مینیمال زیر مدول N از M باشیم در حالت حلقه ها کارهای زیادی انجام شده است،این کرانها وابسته به N می باشد. قضیه های زیر بعضی از کارهای انجام شده در این زمینه می باشد.

۱. ۵ قضیه.

فرض کنید (R,m) حلقه موضعی و کوهن – مکالی باشد و I ایده آلی از R باشد به طوری که $htI = h\rangle ۰$ و $\frac{R}{I}$ حلقه ای کوهن – مکالی باشد ، در این صورت:

$$\mu(I) \leq e(\frac{R}{I})^{h-1} e(R) + h - ۱$$

---

[3] Sharif

[4] Yassemi

۱. ۶ قضیه.

فرض کنید (R,m) حلقه موضعی و کوهن – مکالی باشد ، اگر $\dim R = d \rangle ۰$ و I ایده آلی m- اولیه از آن باشد به طوری t کوچکترین عدد طبیعی باشد که $m^t \subseteq I$ آنگاه $.\mu(I) \leq t^{d-1}e(R) + d - 1$

در فصل سوم گزارش دو قضیه فوق را به مدولها تعمیم خواهیم داد.

پرسشهای زیر می تواند ادامه کار این طرح پژوهشی باشد.

۱. ۷ پرسش.

آیا عکس قضیه ۱. ۳ چه در حلقه ها و چه در مدولها برقرار است یعنی اگر کران یکنواختی برای تعداد مولدهای مینیمال زیر مدول N از M که $depth\frac{M}{N} \geq d-۱$ وجود داشته باشد آیا می توان گفت که $\dim M \leq d$ توجه کنید که قضیه ۱. ۱ به حالت $d = ۱$ پاسخ مثبت می دهد و قضیه ۱. ۲ در حالت حلقه ها که $d = \dim R = ۲$ نیز پاسخی مثبت می دهد.

۱. ۸ پرسش.

اگر کران یکنواختی برای تعداد مولدهای منیمال ایده ال های اول یک حلقه موضعی وجود داشته باشد آنگاه آیا می توان گفت بعد حلقه حداکثر دو است، توجه کنید که عکس این مطلب با توجه به قضیه ۱. ۲ برقرار می باشد.

۱. ۹ پرسش.

آیا می توان قضیه ۱. ۲ را به مدولها تعمیم داد.

فصل دوم

کران یکنواخت برای تعداد مولدهای مینیمال رده خاصی از زیر مدولها در یک مدول کوهن- مکالی

در این فصل ارتباط میان $\mu(N)$ و $e(M)$ در حالتی که N زیر مدول خاصی از R- مدول کوهن-مکالی M با بعد دلخواه است را بیان می کنیم و نشان خواهیم داد $e(M)$ یک کران یکنواخت برای تعداد مولدهای مینیمال این زیرمدولهاست و کران های بدست آمده در قبل را بهبود می دهیم.

در دهه ۷۰ میلادی سلی[5] قضیه زیر را ثابت کرد:

۲. ۱ قضیه - [7,1.1 Theorem ,page 49]

فرض کنید (R,m) حلقه ای موضعی ،نوتری وکوهن-مکالی باشد و $\dim R = d \leq ۱$ و I ایده آلی دلخواه از R باشد ،در این صورت

$$\mu(I) \leq e(R)$$

ماتسمورا[6] در سال۱۹۹۰ نشان دادکه

۲. ۲ قضیه -[5,Theorem 2]

فرض کنید (R,m) حلقه ای موضعی و نوتری و M یک R-مدول متناهی مولد باشد و $\dim(M) = d \leq ۱$ و نیز N زیر مدولی دلخواه از M در این صورت برای هر $x \in m$

$$\mu(N) \leq \ell(\frac{M}{xM})$$

[5] Sally
[6] Matsumura

می توان نتیجه گرفت که زنجیر فوق متوقف خواهد شد لذا عدد طبیعی j وجود دارد به طوری که

$$m^j M = m^{j+1} M = m(m^j M)$$

حال بنابر لم ناکایاما $m^j M = \circ$ ودر نتیجه برای هر $n \geq j$،

$$\ell(m^n M) = \circ$$

از طرفی چون $\ell(M) \prec \infty$ لذا با توجه به دنباله دقیق

$$0 \to m^{n+1}M \to M \to \frac{M}{m^{n+1}M} \to 0$$

رابطهٔ

$$\ell(\frac{M}{m^{n+1}M}) = \ell(M) - \ell(m^{n+1}M)$$

به دست می آید و در نتیجه

$$\begin{aligned} e(M) &= \lim_{n\to\infty} \ell(\frac{M}{m^{n+1}M}) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\ell(M) - \ell(m^{n+1}M)) \\ &= \ell(M). \end{aligned}$$

از طرفی طبق قضیه ۲. ۲ ، برای هر $x \in m$

$$\mu(N) \leq \ell(\frac{M}{xM}) \qquad (۲. ۱)$$

وبا توجه به دنباله دقیق

$$0 \to xM \to M \to \frac{M}{xM} \to 0$$

رابطهٔ

$$\ell(\frac{M}{xM}) = \ell(M) - \ell(xM) \leq \ell(M) = e(M) \qquad (۲. ۲)$$

را داریم، حال با توجه به روابط (۲. ۱) و(۲. ۲) می توان نتیجه گرفت:

$$\mu(N) \leq e(M)$$

بنابراین می توان فرض کرد $\dim(M) = d \geq 1$.

ابتدا قضیه را در حالتی که $\frac{R}{m}$ نامتناهی است ثابت می کنیم، در این حالت طبق قضایا[8]

یک دستگاه از پارامترها مانند $\underline{x} = x_1,\ldots,x_d$ از M وجود دارد به طوری که

$$e(M) = e(m,M) = e(\underline{x},M) \qquad (۲. ۳)$$

وچون M یک R-مدول کوهن-مکالی است و $\underline{x}$ یک دستگاه از پارامترها روی M است لذا

$$e(\underline{x},M) = \ell(\frac{M}{\underline{x}M}) \qquad (۲. ۴)$$ [9]

حال طبق قضیه ۲. ۳

$$\mu(N) \leq \ell(\frac{M}{\underline{x}M}) \qquad (۲. ۵)$$

با استفاده از روابط (۲. ۳) و(۲ .۴) و(۲. ۵) نتیجه مورد نظر به دست می آید یعنی

$$\mu(N) \leq e(M)$$

حال اگر $\frac{R}{m}$ متناهی باشدآنگاه از تغییر حلقه زیبای یکدست وفادار

$$R \to R[u] \to R[u]_{m[u]} = R(u)$$

کمک می گیریم که در آن u یک متغیر مستقل و $R(u)$ حلقه حاصل از موضعی سازی حلقه چند جمله ای $R[u]$نسبت به ایده ال ماکزیمال $m[u]$ می باشد.توجه شود که $R(u)$ حلقه ای موضعی و نوتری با ایده آل ماکزیمال $mR(u)$ می باشد و به ویژه $\frac{R(u)}{mR(u)}$ نامتناهی می باشد.

چون قضیه ۲. ۴ در حالتی که $\frac{R}{m}$ نامتناهی باشد اثبات شده است لذا در قضیه به جای R از $R(u)$ و به جای M از $M(u) = M \otimes_R R(u)$ استفاده می کنیم.

برای کامل شدن اثبات باید موارد زیر را نشان دهیم:

الف) $M(u)$ یک $R(u)$-مدول متناهی مولد و کوهن-مکالی است.

ب) $\dim_{R(u)}(M(u)) = \dim_R(M) = d$و به طور کلی برای هر $N \leq M$ ،

8 [1,Corollary 4.5.10]
9 [4,Theorem 17.11]

$$\dim_{R(u)}(\frac{M(u)}{N(u)}) = \dim_R(\frac{M}{N})$$

که در آن $N(u) = N \otimes_R R(u)$.

ج)برای هر زیر مدول N از M (از جمله $N = 0$)

$$depth_{R(u)}(\frac{M(u)}{N(u)}) = depth_R(\frac{M}{N})$$

د) $\mu_{R(u)}(N(u)) = \mu_R(N)$

ه) $e_{R(u)}(M(u)) = e_R(M)$

مورد (الف) از موارد (ب) و(ج) نتیجه خواهد شد.

حال به تفصیل مورد (ب) را ثابت خواهیم کرد :

ابتدا قضیه زیر را بیان می کنیم:

۲. ۵ قضیه- [1,Theorem A.11] و [1,Proposition 1.2.16(a)] و [1,Exercise 1.2.25]

فرض کنید $\varphi:(R,m)\to(S,n)$ یک همریختی از حلقه های موضعی و نوتری باشد.اگر M یک R-مدول متناهی مولد باشد و N یک S-مدول فرض شود که به عنوان R-مدول یکدست است در این صورت

۱) اگر N یک S-مدول متناهی مولد نیز باشد آنگاه

$$\dim_S(M\otimes_R N) = \dim_R(M) + \dim_S \frac{N}{mN}$$

۲) اگر N یک S-مدول متناهی مولد نیز باشد آنگاه

$$depth_S(M\otimes_R N) = depth_R(M) + depth_S \frac{N}{mN}$$

۳)اگر $\ell_S(\frac{N}{mN}) \prec \infty$ و $\ell_R(M) \prec \infty$ آنگاه

$$\ell_S(M\otimes_R N) = \ell_R(M).\ell_S(\frac{N}{mN})$$

حال برای اثبات (ب) در قضیه فوق قسمت (۱) قرار دهید:

$S = R(u)$ و $N = R(u)$ و $n = m^e = mR(u)$، به سا دگی می توان دید که شرایط قضیه ۲. ۵ قسمت ۱) برقرار است لذا

$$\begin{aligned}
&\dim_{R(u)}(M(u)) = \dim_{R(u)}(M \otimes_R R(u)) \\
&= \dim_R(M) + \dim_{R(u)} \frac{R(u)}{mR(u)} \\
&= \dim_R(M) + 0 \\
&= \dim_R(M)
\end{aligned}$$

در حالتی که $N \leq M$ اثبات مشابه (ج) خواهد بود،فقط کافیست به جای $depth$، $\dim$ قرار دهید.

ج)چون دنباله

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{N} \to 0$$

یک دنباله دقیق است و $R(u)$ یک R - مدول یکدست است، لذا دنباله زیر نیز دقیق خواهد بود:

$$0 \to N \otimes_R R(u) \xrightarrow{i \otimes 1} M \otimes_R R(u) \xrightarrow{\pi \otimes 1} \frac{M}{N} \otimes_R R(u) \to 0$$

و در نتیجه

$$\frac{M \otimes_R R(u)}{N \otimes_R R(u)} \simeq \frac{M}{N} \otimes_R R(u)$$

توجه کنید که$i \otimes 1$ و$\pi \otimes 1$، $R(u)$ - همریختی نیز هستند و لذا یکریختی فوق را می توان به عنوان $R(u)$ - مدولی نیز در نظر گرفت،بنابراین

$$\begin{aligned}
&depth_{R(u)}(\frac{M(u)}{N(u)}) = depth_{R(u)}(\frac{M \otimes_R R(u)}{N \otimes_R R(u)}) \\
&= depth_{R(u)}(\frac{M}{N} \otimes_R R(u))
\end{aligned} \tag{۲. ۶}$$

حال اگر در قسمت (۲) قضیه ۲. ۵ قرار دهیم

$$S = R(u), N = R(u), M = \frac{M}{N}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\mu_{R(u)}(N(u)) = \mu_R(N).$$

ه)با توجه به تعریف چندگانگی کافیست نشان دهیم برای $n \succ\succ 0$ ،

$$\ell_R(\frac{M}{m^{n+1}M}) = \ell_{R(u)}(\frac{M(u)}{(mR(u))^{n+1}M(u)})$$

برای راحتی کار قرار دهید:

$$I = m^{n+1}, J = (mR(u))^{n+1}, S = R(u)$$

توجه شود که $J = IR(u)$ ،حال

$$\begin{aligned}
&\ell_S(\frac{M(u)}{JM(u)}) = \ell_S(M(u) \otimes_S \frac{S}{J}) \\
&= \ell_S(M \otimes_R S \otimes_S \frac{S}{J}) \\
&= \ell_S(M \otimes_R \frac{S}{J}) \\
&= \ell_S(M \otimes_R \frac{S}{IS}) \\
&= \ell_S(M \otimes_R \frac{R}{I} \otimes_R S) \\
&= \ell_S(\frac{M}{IM} \otimes_R S)
\end{aligned} \qquad (۲. ۱۰)$$

اکنون در قسمت (۳) قضیه ۲. ۵ چون $\ell_S(\frac{S}{mS}) = 1 \prec \infty$ و برای $n \succ\succ 0$، $\ell_R(\frac{M}{IM}) \prec \infty$ قرار دهید:

$$M = \frac{M}{\mathrm{I}M}, N = S$$

لذا

۳. ۳ قضیه.[11]

فرض کنید (R,m) حلقه ای موضعی و نوتری باشد و M_1 و M_2...و M_s ، R- مدول های متناهی مولد باشند، در این صورت

الف) اگر $\frac{R}{m}$ نامتناهی باشد آنگاه $x \in m$ وجود دارد به طوری که یک عنصر سطحی برای هر M_j است.

ب)اگر $x \in m$ یک عنصر سطحی برای M_j باشد و $depth_R M_j \geq ۱$، آنگاه $x \notin Z(M_j)$[12] و برای $n \succ\succ ۰$،

$$(m^n M_j :_{M_j} x) = m^{n-1} M_j$$

و به ویژه

$$e(\frac{M_j}{xM_j}) = e(M_j)$$

برهان قضیه ۳. ۱ . به استقرا روی $\dim M = d$ حکم را ثابت می کنیم. حالت $d = ۱$ در قضیه ۲. ۴ ثابت شده است، لذا فرض کنید $d \succ ۱$ و حکم برای اعداد کمتر از d ثابت شده باشد.

با توجه به قضیه ۳. ۳ چون $depthM = \dim M \geq ۱$ لذا $x \in m$ وجود دارد به طوری که یک عنصر سطحی برای M است و $x \notin Z(M)$. چون $x \notin Z(M)$ لذا $x^t \notin Z(M)$ و در نتیجه

$$^{۱۳}\dim \frac{M}{x^t M} = \dim M - 1, depth \frac{M}{x^t M} = depthM - 1$$

و لذا $\frac{M}{x^t M}$ نیز یک R- مدول کوهن مکالی است و چون $m^t(\frac{N}{x^t M}) \subseteq \frac{M}{x^t M}$ ، طبق فرض استقرا

$$\begin{aligned}\mu(\frac{N}{x^t N}) &\leq t^{d-2} e(\frac{M}{x^t M}) + (d-2)\mu(\frac{M}{x^t M}) \\ &\leq t^{d-2} e(\frac{M}{x^t M}) + (d-2)\mu(M)\end{aligned} \qquad (۱ . ۳)$$

حال دنباله دقیق

---

[11] برای اثبات این قضیه می توانید به مراجع ۳و۴ مراجعه کنید.

[12] $Z(M) = \{r \in R | \exists 0 \neq x \in M s.t. rx = 0\}$

[13] برای اثبات می توانید به فصل اول مرجع [1] مراجعه کنید.

$$0 \to x^t M \to N \to \frac{N}{x^t M} \to 0$$

دنباله دقیق زیر را نتیجه خواهد داد:

$$x^t M \otimes \frac{R}{m} \to N \otimes \frac{R}{m} \to \frac{N}{x^t M} \otimes \frac{R}{m} \to 0$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \mu(N) &= \ell(\frac{N}{mN}) \\ &= \ell(N \otimes \frac{R}{m}) \le \ell(x^t M \otimes \frac{R}{m}) + \ell(\frac{N}{x^t M} \otimes \frac{R}{m}) \\ &= \mu(x^t M) + \mu(\frac{N}{x^t M}) \end{aligned} \qquad (۳. ۲)$$

چون $x^t \notin Z(M)$ لذا

$$\mu(x^t M) = \mu(M) \qquad (۳. ۳)$$

حال با توجه به روابط

۳. ۱ و ۳. ۲ و ۳. ۳ داریم:

$$\begin{aligned} \mu(N) &\le \mu(M) + t^{d-2} e(\frac{M}{x^t M}) + (d-2)\mu(M) \\ &= t^{d-2} e(\frac{M}{x^t M}) + (d-1)\mu(M) \end{aligned} \qquad (۳. ۴)$$

حال اگر نشان دهیم ، $e(\frac{M}{x^t M}) = te(M)$ آنگاه با جایگذاری در رابطه ۳. ۴ حکم نتیجه خواهد شد. این رابطه نیز به استقرا روی "t" ثابت خواهد شد ، حالت $t = ۱$ در قضیه ۳. ۳ قسمت (ب) آورده شده است،برای کامل شدن اثبات نشان می دهیم ، $e(\frac{M}{x^t M}) = e(\frac{M}{xM}) + e(\frac{M}{x^{t-1} M})$.

با توجه به قضیه ۳. ۳ قسمت (ب) برای $n \succ\succ ۰$،

$$(m^n M_j :_{M_j} x) = m^{n-1} M_j$$

حال برای $n \succ\succ ۰$ ،

$$\begin{aligned}
&\frac{m^n M + xM}{m^n M + x'M} = \frac{m^n M + x'M + xM}{m^n M + x'M} \\
&\simeq \frac{xM}{(m^n M + x'M) \cap xM} = \frac{xM}{(m^n M \cap xM) + x'M} \\
&= \frac{xM}{x(m^n M :_M x) + x'M} = \frac{xM}{x(m^{n-1} M) + x'M} \\
&\simeq \frac{M}{m^{n-1} M + x'^{-1} M}
\end{aligned} \tag{۳. ۵}$$

توجه شود که یکریختی آخر به خاطر اینکه $x \notin Z(M)$ صحیح می باشد. حال با توجه به دنباله دقیق

$$0 \to \frac{m^n M + xM}{m^n M + x'M} \to \frac{M}{m^n M + x'M} \to \frac{M}{m^n M + xM} \to 0$$

می توان نتیجه گرفت برای $n \succ\succ$ ۰ ،

$$\begin{aligned}
\ell\left(\frac{M}{m^n M + x'M}\right) &= \ell\left(\frac{m^n M + xM}{m^n M + x'M}\right) + \ell\left(\frac{M}{m^n M + xM}\right) \\
&= \ell\left(\frac{M}{m^{n-1} M + x'^{-1} M}\right) + \ell\left(\frac{M}{m^n M + xM}\right)
\end{aligned}$$

که در تساوی آخر از رابطه ۳. ۵ استفاده شده است، بنابراین

$$\begin{aligned}
e\left(\frac{M}{x'M}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(d-1)!}{n^{d-1}} \ell\left(\frac{\frac{M}{x'M}}{m^{n+1}\frac{M}{x'M}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(d-1)!}{n^{d-1}} \ell\left(\frac{M}{m^{n+1} M + x'M}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(d-1)!}{n^{d-1}} \ell\left(\frac{M}{m^n M + x'^{-1} M}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{(d-1)!}{n^{d-1}} \ell\left(\frac{M}{m^{n+1} M + xM}\right) \\
&= e\left(\frac{M}{x'^{-1} M}\right) + e\left(\frac{M}{xM}\right)
\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می رسد. ■

۳. ۴ تذکر .

توجه کنید که مشابه اثبات قضیه ۲. ۴ با توجه به تغییر حلقه

$$R \to R[u] \to R[u]_{m[u]} = R(u)$$

و اینکه $M(u) = M \otimes_R R(u)$ و $N(u) = N \otimes_R R(u)$ اگر رابطه

$$(m^t R(u))M(u) \subseteq N(u)$$

صحیح باشد می توان شرط " $\frac{R}{m}$ نامتناهی" را در قضیه ۳. ۱ حذف کرد.

۳. ۵ قضیه . (تعمیم قضیه ۱. ۵)

فرض کنید (R,m) حلقه ای موضعی و نوتری و M یک R- مدول های متناهی مولد و کوهن- مکالی باشد، اگر N زیر مدولی از M که $\frac{M}{N}$ یک R-مدول کوهن مکالی باشد و $h = \dim M - \dim \frac{M}{N} \succ \circ$ آنگاه

$$\mu(N) \leq e(\frac{M}{N})^{h-1} e(M) + (h-1)\mu(M)$$

برهان. توجه کنید که با توجه به تغییر حلقه یکدست وفادار

$$R \to R[u] \to R[u]_{m[u]} = R(u)$$

و اینکه $M(u) = M \otimes_R R(u)$ و $N(u) = N \otimes_R R(u)$ و برهان قضیه ۲. ۴ می توان فرض کرد که $\frac{R}{m}$ نامتناهی است، اثبات به استقرا روی $s = \dim \frac{M}{N}$ انجام می شود.

اگر $s = \circ$ آنگاه $j = \ell(\frac{M}{N}) \prec \infty$ و مشابه اثبات قضیه ۲. ۴ ، $j = e(\frac{M}{N}) = \ell(\frac{M}{N})$.از طرفی چون $j = \ell(\frac{M}{N}) \prec \infty$ لذا $m^j \subseteq Ann(\frac{M}{N})$ و در نتیجه $m^j M \subseteq N$ و با توجه به قضیه ۳. ۱

$$\mu(N) \leq j^{d-1} e(M) + (d-1)\mu(M)$$
$$= e(\frac{M}{N})^{d-1} e(M) + (d-1)\mu(M)$$

که در آن $d = h = \dim M$ و حکم در این حالت به اثبات می رسد.

حال فرض کنید $s = \dim\frac{M}{N} \succ 0$ و حکم برای اعداد کمتر از s ثابت شده باشد ،چون M و $\frac{M}{N}$، R- مدولهای متناهی مولدو کوهن-مکالی هستند لذا $depthM = \dim M = h + \dim\frac{M}{N} \succ 0$ و $depth\frac{M}{N} = \dim\frac{M}{N} \succ 0$ و طبق قضیه ۳. ۳ ، $x \in m$ وجود دارد به طوری که x یک عنصر سطحی برای M و $\frac{M}{N}$ است و $x \notin Z(M)$ و $x \notin Z(\frac{M}{N})$ لذا

$$\dim\frac{M}{xM} = \dim M - 1, depth\frac{M}{xM} = depthM - 1 \text{ و}$$

$$\dim\frac{\frac{M}{N}}{x\frac{M}{N}} = \dim\frac{M}{N} - 1, depth\frac{\frac{M}{N}}{x\frac{M}{N}} = depth\frac{M}{N} - 1$$

ودر نتیجه $\frac{M}{xM}$ و $\frac{\frac{M}{N}}{x\frac{M}{N}} \simeq \frac{M}{xM+N} \simeq \frac{\frac{M}{xM}}{\frac{N+xM}{xM}}$کوهن-مکالی خواهند شد حال با توجه به فرض استقرا داریم:

$$\begin{aligned}
\mu(\frac{N+xM}{xM}) &\le e(\frac{\frac{M}{xM}}{\frac{N+xM}{xM}})^{h-1} e(\frac{M}{xM}) + (h-1)\mu(\frac{M}{xM}) \\
&= e(\frac{\frac{M}{N}}{x\frac{M}{N}})^{h-1} e(\frac{M}{xM}) + (h-1)\mu(\frac{M}{xM}) \qquad (۶ .۳) \\
&\le e(\frac{\frac{M}{N}}{x\frac{M}{N}})^{h-1} e(\frac{M}{xM}) + (h-1)\mu(M)
\end{aligned}$$

توجه کنید که

$$\dim(\frac{M}{xM})-\dim(\frac{\frac{M}{xM}}{\frac{N+xM}{xM}})=\dim(\frac{M}{xM})-\dim(\frac{\frac{M}{N}}{x\frac{M}{N}})$$
$$=(\dim M-1)-(\dim(\frac{M}{N})-1)=h$$

حال با توجه به قسمت (ب) قضیه ۳. ۳،

$$e(\frac{M}{xM})=e(M),e(\frac{\frac{M}{N}}{x\frac{M}{N}})=e(\frac{M}{N}) \qquad (۳. ۷)$$

برای اثبات حکم با توجه به رابطه (۳. ۶) و (۳. ۷) کا فیست نشان دهیم:

$$\mu(\frac{N+xM}{xM})=\mu(N)$$

فرض کنید $\mu(N)=n$ و $N=(y_1,...,y_n)$ لذا $\frac{N+xM}{xM}=(y_1+xM,...,y_n+xM)$،حال اگر

مثلا عناصر r_2 و...و r_n موجود باشند به طوری که

$$y_1+xM=\sum_{i=2}^{n}r_i(y_i+xM)$$

آنگاه

$$y_1-\sum_{i=2}^{n}r_iy_i\in xM$$

و در نتیجه $z\in M$ وجود دارد به طوری که

$$y_1-\sum_{i=2}^{n}r_iy_i=xz \qquad (۳. ۸)$$

چون $xz\in N$ و $x\notin Z(\frac{M}{N})$ لذا $z\in N$ و در نتیجه عناصر s_1و...و s_n در R وجود دارند به طوری که

$$z=\sum_{i=1}^{n}s_iy_i$$

که با جایگذاری در رابطه (۳. ۸) داریم:

$$(1-s_1x)y_1=\sum_{i=2}^{n}(r_i+s_ix)y_i$$

و چون $x \in m$ و حلقه موضعی است لذا " $1-s_1x$ " یکه است و در نتیجه

$$y_1=\sum_{i=2}^{n}(1-s_1x)^{-1}(r_i+s_ix)y_i$$

که متناقض $\mu(N)=n$ می باشد. ■

مراجع

[1] Bruns ,W.;Herzog,J. *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press:Cambridge,1993.

[2] Gottlieb , C .*Bounding the Number of Generators for a class of Ideals in Local Rings*, Comm. Algebra ,**1995**,23,1499-1502.

[3] Iyengar, S; Puthenpurakal, TJ.,*Hilbert-Samuel function over cohen-macaulay rings,* Arxiv preprint math.AC/0412194, **2004** - arxiv.org

[4] Matsunura, H. *Commutative Ring Theory,*Cambridge University Press,1986.

[5] Matsumura,H. *Some New Result on Number of Generators of Ideals in Local Rings,*Topics in Algebra,Banach Center Publ.,26,Part 2 ,PWN,**1990**,157-161.

[6] Puthenpurakal T. J. ,*Hilbert coefficients of a Cohen-Macaulay module*, J. Algebra 264 (**2003**),82–97.

[7] Sally , J.D .*Numbers of Generators of Ideals in Local Ring,*Marcel Dekker,Inc:New York,1978.

[8] Sharif, T.;Yassemi, S. *Bound for the number of Genertors for a Calss of Submodules of Finitely Generated Modules.* : Comm. Algebra (**2002),**vol. 30,No .9,4377-4381

36th Annual Iranian Mathematics Conference
Sep. 10-13 2005 – Yazd University

BOUND FOR NUMBERS OF GENERATORS FOR A CLASS OF SUBMODULES IN COHEN-MACAULAY MODULES

M.R.Khorsandi
Departmant of Mathematics, Shahrood University of Thecdnology, Shahrood, Iran
mrkhsh@shahrood.ac.ir

Abstract

In this paper we determinate a bound for numbers of minimal generators for a class of submodules in Cohen-Macaulay modules.

Keywords: Minimal number of generators, Cohen-Macaulay modules and multiplicity.
MSC(2000): Primary 13C99, 13E15,13H15.

Throughout this paper the ring R is commutative with non-zero identity. In this note we use the notation $\mu(K)$ and $e(K)$ respectly for the minimal number of generators and multiplicity of an R-module K.

In [3;1.1 Theorem,page 49] Sally proved the following theorem:
Theorem. Let (R,m) be a local Notherian Cohen-Macaulay ring of dimention d$\leq$1.Let I be an ideal of R then $\mu(I)\leq e(R)$.

We generalize this Theorem to Cohen-Macaulay modules with dimention $d\succeq 0$.
Theorem 1.1. *Let (R,m) be a local Notherian ring and M is a finitley generated and Cohen-macaulay R-module with dim M=d$\succeq$0. let N be a submodule of M with depth M/N$\succeq$d-1 then* $\mu(N)\leq e(M)$.

We also generalize [3;2.2 theorem,page 79] and [3;2.3 Theorem,page 80] to modules,for example the generalization of [3;2.3 Theorem,page 80] is:
Theorem 1.2.*Let (R,m) be a local Notherian ring and M is a finitley generated and Cohen-macaulay R-module with dim M =d$\succ$0.If N be a submodules of M such that M/N be a Cohen-Macaulay R-module and h=dim M - dim M/N $\succ$ 0 then* $\mu(N)\preceq e(M/N)^{h-1}e(M)+(h-1)\mu(M)$
Remark . In the proof of theorem 1.1 we use essentialy from [2],[4].

References

[1] Bruns, W.;Herzog, J., *Cohen-Macualy Rings*;Cambridge University Press:Cambridge,1993.

[2] Gottlieb, C. *Bounding the Number of Generators for a Class of Ideals in Local Ring*.Comm. Algebra (1995),*23*,1499-1502.

[3] Sally, J.D .*Numbers of Generators of Ideals in Local Ring*;Marcel Dekker,Inc.:New York, 1978.

[4] Sharif, T.;Yassemi, S. *Bound for the Number of Generators for a Class of Submodules of Finitely Generated Modules*.Comm. Algebra (2002),vol. *30*,No. *9*,4377-4381.