دانشکدهٔ علوم ریاضی
گروه : ریاضی محض

بهترین تقریب روی برخی مجموعه‌های نامحدب توسط ستاره گون ها

سیده مرضیه مولایی

استاد راهنما:

دکترمهدی ایرانمنش

استادمشاور:

دکتر کامران شریفی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۸۹

چکیده

این پایان نامه از دو قسمت تشکیل شده است:

در بخش اول به مسایل بهترین تقریب که از طریق تجزیه و جداسازی بدست می آیند، پرداخته ایم. اگر X یک فضای باناخ (حقیقی) باشد و A یک زیر مجموعه از X فرض شود به قسمی که $x \notin A$ ، در این صورت تجزیه مخروطی و جداسازی خطی توسط خانواده ای از توابع مستقل خطی روی X^* تعریف کرده و به شرایط لازم و کافی برای تجزیه ی A از x می پردازیم و در پایان بعنوان کاربردی از این جداسازی خطی ، مشخصه های بهترین تقریب روی ستاره گون ها و مجموعه های بسته را بدست می آوریم .

در بخش دوم نیز به بررسی بهترین تقریب روی مجموعه های بسته در فضای نرمدار توسط مخروطهای ستاره گون پرداخته ایم. ابتدا روی مجموعه های رو به پایین و مجموعه های رو به بالا مطالعه کرده و سپس از نتایج بدست آمده بعنوان ابزاری برای یافتن بهترین تقریب روی مجموعه ی بسته دلخواه استفاده می کنیم .

کلمات کلیدی : تقریب ، تجزیه ، مجموعه ستاره گون ، مجموعه رادیانت ، مجموعه نسبتاً رو به پایین ، مجموعه نسبتاً رو به بالا، تجزیه مخروطی .

تقـدیــم بـــه

تمامی کسانی که بی هیچ شهرتی و چمداشتی مخلصانه و فی سبیل الله به وظایف خود عمل می کنند و می خواهند که برای جامعه فقط یک انسان مفید باشند نه یک انسان مهم .

پیش گفتار

نظریه بهترین تقریب همواره نقش مهمی دربخش های مختلف ریاضیات ازجمله مسایل بهینه سازی واقتصاد و..ایفا کرده است .

از جمله اهداف ما در نظریه بهترین تقریب موارد زیر است :

۱) یافتن کمترین فاصله یک عنصرمانند x از مجموعه ی دلخواه U ،

۲) یافتن بهترین تقریب x نسبت به مجموعه U (یعنی عضوی از مجموعه U که دارای کمترین فاصله از x می باشد.)،

۳) تشخیص اینکه چه مجموعه هایی پروکسیمینال هستند؟(یعنی به ازای هر x دارای عنصر بهترین تقریب میباشند.) ،

۴) مشخصات عنصر بهترین تقریب و ویژگی های آن .

ما همیشه به دنبال شرایط لازم وکافی برای گسترش بحث نظریه بهترین تقریب بر روی مجموعه های گوناگون در شرایط مختلف بوده ایم .

گرچه بحث بهترین تقریب به وسیله عناصرمجموعه های محدب در فضاهای نرمدار کاربرد زیاد و مهمی درریاضیات و دیگر علوم داشته است ، اما گاهی اوقات شرط محدب بودن از شرایط محدود کننده در مسایل کاربردی برای ما می باشد . لذا محققان به دنبال

شرایطی هستند که بتوانند قضایا ومسائل مطرح شده درنظریه بهترین تقریب روی مجموعه های محدب (رجوع شود به [۹] و [۸]) را به مجموعه های نامحدب تعمیم دهند.

در سال ۱۹۹۶ برای اولین بار بحث بهترین تقریب بر روی مجموعه های نا محدبی به نام مجموعه های روبه پایین [۱] و مجموعه های رو به بالا [۲] توسط روبینو ($Rubinov$) مطرح شد[۶] ودر سال های بعد روی گونه های نامحدب و گسترده تری همچون رادیانت ها و ستاره گون ها کار شد .

درسال ۱۹۹۷ شخصی به نام شویدل ($Shevidel$) بحث بهترین تقریب را بر روی ستاره گون ها مطرح کرد که این ستاره گون ها در فضای R^n تعریف شده بودند[۳]، البته در سال ۱۹۹۴ شخصی به نام التقفی ($Al-Thagafi$) این بحث را روی $m-$ستاره گون های قوی مطرح کرده بود اما شرایط و فرض ها وتعاریفشان پیچیده و مبهم بودند[۱۴].

اخیرا نیز در سال ۲۰۰۶ روبینو ($Rubinov$) بحث ستاره گون ها در فضای R^n و کاربردهای آن در مسایل بهترین تقریب را مفصل تعمیم دادند وشرط ها وقیود اضافه را تا حد امکان تعدیل نمودند [۴] .

بعد از ایشان نیز در سال ۲۰۰۷ محبی ($Mohebi$) در ادامه کار روبینو، بحث بهترین تقریب روی ستاره گون ها را در فضای باناخ X کامل کردند[۱۱].

برای مطالعه بهترین تقریب روی مجموعه های نامحدب به طور معمول از دوروش استفاده می کنیم ‒۱‒ به دنبال راهکارهایی برای تجزیه ی مجموعه غیر محدب به محدب می باشیم ۲‒ از مشمول بودن یک مجموعه نامحدب در مجموعه‌ای محدب

---

[۱] down ward set

[۲] up ward set

استفاده میکنیم .

این پایان نامه از دو قسمت مجزا در رابطه با ستاره گون ها و تقریب تهیه شده است :

در قسمت اول که شامل فصل های ۱و۲و ۳ می باشد، بحث تجزیه ستاره گون ها به مجموعه های محدب و جداسازی ستاره گون ها از هم وبعد از آن بحث تجزیه یک شکل نامحدب به ستاره گون ها آمده است ودر پایان نیز به برخی از کاربردهای این عملیات جداسازی وتجزیه در یافتن مشخصه های بهترین تقریب اشاره شده است و همچنین اشاراتی به چند نمونه از کاربردهای تجزیه ستاره گونی در علومی مانند گرافیک و کامپیوتر نموده ایم .

در قسمت دوم یعنی فصل ۴ مبحث مجموعه های رو به پایین و رو به پایین نسبی و مجموعه های رو به بالا و رو به بالای نسبی وقضایایی در مورد پروکسیمینال بودن و وجود بهترین تقریب آنها آمده است و اینکه مخروطهای روبه پایین نسبی و مخروطهای روبه بالای نسبی چه کمکی به یافتن بهترین تقریب بر روی مجموعه های نامحدب می کنند .

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ مفاهیم اولیه و تعاریف مقدماتی

این بخش شامل تعاریف ابتدایی واصول اولیه ای است که لازمه مطالعه وشناخت در زمینه پیدا کردن بهترین تقریب وشناسایی مشخصه های آن می باشد. امابه دلیل بدیهی بودن ومطابقت داشتن با برخی از قضایای ساده آنالیز از بیان جزئیات و اثبات آنها خودداری می‌کنیم. اثبات آنها رابه بخش مراجع ذکر شده در انتهای پایان نامه[۱۵] ، [۲] و [۱۶] می سپاریم.

تعریف. ۱. ۱. ۱ فضای برداری X را یک فضای نرم دار می گوییم در صورتیکه به ازای هر $x \in X$ عدد حقیقی و نامنفی $\| x \|$ تعلق گیرد که :

۱) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

۲) به‌ازای هر $x, y \in X$ داریم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۳) به‌ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in R$ داشته باشیم $||\alpha x|| = |\alpha|\ ||x||$.

تعریف. ۱. ۱. ۲ فضای نرمدار خطی $(X, ||\cdot||)$ را فضای باناخ گوییم هرگاه این فضا کامل باشد، یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن نسبت به $||.||$ همگرا باشد.

تعریف. ۱. ۱. ۳ نگاشت $f : X \to Y$ را خطی می گوییم هرگاه

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad \forall x, y \in X \quad \forall \alpha, \beta \in R.$$

تعریف. ۱. ۱. ۴ اگر در تابع $f : X \to Y$ ، به ازای M مثبت رابطه زیر برقرار باشد

$$||f(x) - f(y)|| \leq M||x - y|| \qquad \forall x, y \in X.$$

آنگاه تابع f را لیپ شیتز می گوییم .

بعنوان مثال اگر تابع $f(x) = x$ فرض شود داریم $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$ بنابراین تابع f لیپ شیتز[1] است .

[1] lipschitz

تعریف. ۱. ۱. ۵ صفحه تولید شده توسط مجموعه A را با $span(A)$ نمایش می دهیم و به شکل زیر تعریف می کنیم

$$span(A) = \{\sum_{۱}^{n} \alpha_i a_i \quad : \quad \alpha_i \in R \ , \ a_i \in A \ , \ n \in N\}.$$

تعریف. ۱. ۱. ۶ بردارهای $l_۱, l_۲, ..., l_n$ را مستقل خطی می گوییم اگرهیچ ترکیب خطی از آنها برابر صفر نباشد یعنی اگر $\alpha_۱ x_۱ + \alpha_۲ x_۲ + ... + \alpha_n x_n = ۰$ و $\alpha_i > ۰$ ها سریعا نتیجه شود $\alpha_۱ = \alpha_۲ = ... = \alpha_n = ۰$.

از تعریف مستقل خطی بودن l_i ها میتوانیم نتیجه بگیریم که هر l_k در صفحه تولید شده توسط $(l_i)_{i \neq k}$ قرار ندارد .

تعریف. ۱. ۱. ۷ فرض کنیم$(X, \| \, . \, \|)$ یک فضای نرمدارباشد و $y \in X$ یک نقطه دلخواه باشد دراین صورت تابع $d : X * X \to R_+$ با ضابطه $d(x, y) = \| y - x \|$ را تابع فاصله می گویند که دارای ویژگی های زیر است :

۱) $d(x, y) \geq ۰$،

۲) $d(x, y) = d(y, x)$،

۳) اگر $d(x, x) = ۰$ آنگاه $x = ۰$،

۴) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

قضیه. ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدارباشد دراین صورت :

$$\forall \;\; z,x,y \in X \quad d(x+y, z+y) = d(x,z),$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = \mid \alpha \mid d(x,y).$$

اثبات قضیه اخیر در [۹] آمده است .

تعریف. ۱.۱.۸ به $K \subseteq X$ بسته می گوییم اگرو فقط اگر به ازای هر دنباله ی $x_n \to x$ که به ازای هر $n \in N$ داشته باشیم $x_n \in K$ آنگاه نتیجه شود $x \in K$.

تذکر: یک زیر مجموعه مانند A باز نامیده می شود درصورتیکه متمم آن یک مجموعه بسته باشد.

مادر این پایان نامه ازنمادهای $intA$ و A° برای درون مجموعه و $\overline{A}$ یاclA برای بستار مجموعهA واز نماد bdA یا ∂A برای نقاط مرزی مجموعه A استفاده خواهیم کرد.

تعریف. ۱.۱.۹ اگر $U \subseteq X$ زیر مجموعه ای ناتهی فرض شود آنگاه هسته U شامل تمام عناصری مانند u از U می باشد که

$$\alpha x + (1-\alpha)u \in U \qquad \forall x \in U \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

این مجموعه را با $kernU$ نشان می دهیم در اشکال زیر هسته چند مجموعه نامحدب نشان داده شده است.

همانطور که از تعریف پیداست ، مجموعه $kernU$ یک مجموعه محدب می باشد واگر مجموعه U بسته باشد هسته آن نیز بسته خواهد بود.

زیرا: اگر $u_k \to u$ دنباله ای دلخواه باشد به گونه ای که $u_k \in kernU$ ، طبق تعریف برای $\alpha \in [۰, ۱]$ و به ازای هر $x \in U$ داریم $\alpha x + (۱ - \alpha)u_k \in U$. از بسته بودن مجموعه U می دانیم که باید نقاط حدی خود را دارا باشد پس $\alpha x + (۱ - \alpha)u \in U$ و این نتیجه می دهد که $u \in kernU$. پس به ازای هر دنباله دلخواه در هسته، نقطه حدی آن دنباله نیز در هسته خواهد بود، بنابراین هسته U بسته است .

تعریف. ۱. ۱. ۱۰ به $U \subset X$ یک مجموعه ستاره گون می گوییم در صورتیکه هسته آن ناتهی باشد. (این تعریف توسط روبینو در [۴] بکار برده شده است)

معادل تعریف فوق در [۱۳] به صورت زیر آمده است :

تعریف. ۱. ۱. ۱۱ اگر عضوی مانند u در مجموعه وجود داشته باشد که برای هر x دلخواه متعلق به مجموعه ، پاره خط $[u,x]$ در آن مجموعه قرار داشته باشد به آن مجموعه ستاره گون می گوییم .

در زیر به اشکالی چند از ستاره گون ها توجه می کنیم :

تعریف. ۱. ۱. ۱۲ یک مجموعه غیر تهی مانند K را مخروط یا مجموعه مخروطی می نامیم در صورتیکه برای هر $x \in K$ و هر $\alpha > 0$ داشته باشیم $\alpha x \in K$.

تعریف. ۱. ۱. ۱۳ اگر $A \subset X$ آنگاه مخروط تولید شده توسط A را به صورت زیر تعریف می کنیم وبا $con(A)$ نمایش می دهیم .

$$con(A) = \{\sum_{1}^{n} \lambda_i x_i \mid \quad x_i \in A \ , \ \lambda_i \geq 0 \ , \ n \in N\}.$$

همچنین پوسته محدب شامل مجموعه A را نیز به فرم زیر تعریف می کنیم :

$$co(A) = \{\sum_{1}^{n} \lambda_i x_i \mid \quad x_i \in A \ , \ \lambda_i \geq 0 \ , \ \sum_{1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

تعریف. ۱. ۱. ۱۴ عنصر $1 \in X$ در فضای مرتب X را عنصر یکه قوی می نامند در صورتیکه $\forall x \in X$ یک $\lambda \in R$ وجود داشته باشد که $x \leq \lambda 1$.

تعریف. ۱. ۱. ۱۵ نگاشت صعودی f را یک نگاشت همگن مثبت گوییم درصورتیکه:

$$\forall \lambda \in R \ \ , \lambda \geq 0 \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

تعریف. ۱. ۱. ۱٦ برای هر زیرمجموعه $G \subset X$ و $x \in X$ عنصر $g_\circ \in G$ را بهترین تقریب G از نقطه x گوییم در صورتیکه :

$$d(x, g_\circ) = \inf_{g \in G} \ d(x, g)$$

مجموعه تمام عناصر بهترین تقریب G از x رابا نماد $P_G(x)$ نشان می دهیم به عبارت دیگر:

$$P_G(x) = \{y \in G : \quad d(x, y) = \inf_{g \in G} \ d(x, g)\}$$

مجموعه غیر تهی G را که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $P_G(x) \neq \emptyset$ ، پروکسیمینال می گوییم .

درصورتیکه $P_G(x)$ به ازای هر x تنها شامل یک نقطه باشد ، یعنی عنصر بهترین تقریب منحصربفرد باشد ، مجموعه G را چبیشف گوییم .

تذکر. ۱. ۱. ۱ اگر G بسته باشد آنگاه $P_G(x)$ نیز بسته خواهد بود و عناصر آن بر روی مرز G قرار خواهند داشت .

برهان .

دنباله $y_n \in P_G(x) \subset G$ که $y_n \to y$ را فرض می کنیم چون G بسته است $y \in G$. از طرفی برای هر $n \in N$ داریم $||x - y_n|| = d(x, G) = r$ و

$||x-y|| = lim_{n\to\infty}||x-y_n|| = d(x,G)$ ، پس $y \in P_G(x)$ بنابراین $P_G(x)$ بسته است . همچنین اگر $x \notin G$ ،می گوییم y جزٔ نقاط حدی مجموعه شده است پس $y \in \overline{G} = G^\circ \cup \partial G$ اگر $y \in G^\circ$ آنگاه $\epsilon > \circ$ و همسایگی $v = \{z \quad : \quad ||z-y|| < \epsilon\}$ وجود دارد که $v \subset G$ اگر $\epsilon_\circ = \frac{\epsilon}{r+\epsilon} < ۱$ و $y_\circ = y + \epsilon_\circ(x-y)$ فرض کنیم آنگاه داریم $||y-y_\circ|| = \epsilon_\circ||y-x|| \leq \epsilon_\circ r < \epsilon$ پس نتیجه می شود $y_\circ \in V$ از طرفی داریم

$$||x-y_\circ|| = ||(x-y)+y-y_\circ|| = ||(x-y)-\epsilon(x-y)||$$

$$r = d(x,G) \leq ||x-y_\circ|| = ||(x-y)-\epsilon_\circ(x-y)|| \leq (۱-\epsilon_\circ)||x-y|| = (۱-\epsilon_\circ)_r < r$$

بنابراین به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل است ، پس $y \in \partial G$ می باشد . □

قضیه. ۱.۱.۲ فرض کنیم $G \subset X$ یک مجموعه پروکسیمینال باشد دراین صورت G یک مجموعه بسته خواهد بود .

برهان . فرض کنیم G بسته نباشد، در این صورت یک دنباله $x_n \to x$ وجود دارد که $\{x_n\} \in G$ و $x \notin G$. از اینکه $x_n \in G$ هستند داریم $d(x,G) \leq ||x_n - x||$. هم چنین از تعریف همگرایی (۲. ۷.۲) داریم $||x_n - x|| \to \circ$ بنابراین $d(x,G) = \circ$.

از طرفی G پروکسیمینال فرض شده است پس برای عنصر x نیز ما عنصر $y_\circ \in G$ را داریم که بهترین تقریب x نسبت به مجموعه G محسوب می شود لذا $d(x,G) = ||y_\circ - x||$ پس از $||y_\circ - x|| = \circ$ نتیجه میگیریم که $y_\circ = x$ و این در حالی است که $y_\circ \in G$ و

$x \notin G$ ، که این یک تناقض است ،لذا فرض خلف باطل است و طبق تعریف (۱. ۱.۸)
G بسته است و حکم ثابت می شود. □

تذکر. ۱. ۱.۲ عکس قضیه فوق لزوماً برقرارنیست. (مرجع [۹] را ملاحظه کنید)

فصل ۲

تجزیه‌مخروطی ، جداسازی ستاره گون ها و کاربردهای آنها

تجزیه دو مجموعه محدب از هم یکی از اصول بنیادی در آنالیز است ، که به عنوان یکی از نتایج هندسی قضیه هان باناخ [۱] به شمار می رود . در زیر به یک نمونه از نتایج قضیه هان باناخ توجه می کنیم .

اگر X یک فضای خطی و $M \subset X$ زیر فضا باشد و $x_\circ \in X - M$ و $d = dist(x_\circ, M)$ آنگاه $\lambda \in X^*$ (منظور از X^* فضای دوگان X می باشد.) وجود دارد که $\lambda(x_\circ) = ۱$ و برای هر $x \in M$ ، $\lambda(x) = \circ$ می باشد .
(اثبات در [۱۲] قضیه (۶.۸))

[۱] Hahn-Banach ([۱۶] بخش ۳)

بعنوان تعمیمی از قضایای مربوط به مجموعه های محدب ، سعی شده است که این قضایا را به تجزیه یک ستاره گون از یک نقطه مانند x تعمیم دهیم . در اینجابه جداسازی ستاره گون ها در فضای باناخ X می پردازیم و به جهت مقایسه ای اجمالی صورت معادل برخی از قضایا در فضای R^n را ذکر میکنیم ومطالعه مفصل آن را در[۳] و [۴] بعهده علاقمندان می گذاریم .

هدف ما این است که اگر X را یک فضای باناخ در نظر بگیریم و $x \in X$ و $A \subseteq X$ ستاره گونی باشد که $x \notin A$ ، جداسازی توسط مجموعه ای از توابع مستقل خطی مانند $\{f_i\}_{i\in N}$ داشته باشیم که x را از مجموعه A جدا کند . همچنین شرایط لازم و کافی برای وجود چنین جداسازی را بررسی می کنیم.

درپایان نیز ارتباط بین این جداسازی و کاربردهای آن را در تشخیص عنصر بهترین تقریب روی ستاره گون ها بیان خواهیم کرد.

۱.۲ تجزیه مخروطی و جداسازی بوسیله توابع خطی

در اینجا X را یک فضای باناخ حقیقی با پایه ی مستقل مانند $\{x_i\}_{i\in N}$ در نظر میگیریم .

تعریف. ۲. ۱.۱ به مجموعه $U \subset X$ رادیانت می گویند در صورتیکه:

$$\forall x \in U \ , 0 \leq \lambda \leq 1 \quad \Rightarrow \lambda x \in U \ .$$

تعریف. ۲. ۲.۱ فرض کنیم $U \subseteq X$ مجموعه‌ای غیر تهی باشد ، در این صورت تابع $\mu_U : X \to [0,\infty]$ با ضابطه زیر را تابع مینکو فسکی متناظر با مجموعه U می گویند:

$$\mu_U(x) = \inf\{\lambda \in R : x \in \lambda U\} \ .$$

(که در آن اینفیموم مجموعه تهی را $+\infty$ قرار داد می کنیم). این تابع ، همواره نامنفی است .

همچنین $R_x = \{\lambda x \quad : \lambda > 0\}$ را شعاع باز و $\tilde{R}_x = \{\lambda x \quad : \lambda \geq 0\}$ شعاع بسته می نامیم . حال در اینجا یک تعریف از مجموعه رادیانت وابسته به مخروط بسته Q ارایه میدهیم :

اگرQ یک مخروط بسته باشد بهU یک زیر مجموعه رادیانت وابسته به مخروط Q می گوییم اگر $U \subset Q$ و برای هر $0 < \lambda \leq 1$ و هر $x \in U$ داشته باشیم $\lambda x \in U$.

در این صورت تابع $\mu_U : Q \to [0,\infty]$ دارای خواص زیر می باشد:

۱) اگر $\circ \in U$ آنگاه $\mu_U(\circ) = \circ$ و اگر $\circ \notin U$ آنگاه $\mu_U(\circ) = \infty$ ،

۲) اگر $\circ \neq x \in X$ آنگاه $\mu_U(x) = \circ$ اگر و فقط اگر $R_x \subset U$ ، و همچنین $\mu_U(x) = +\infty$ اگر و فقط اگر $\tilde{R_x} \cap U = \emptyset$ ،

۳) تابع μ_U یک تابع همگن مثبت و از درجه اول است . (یعنی $\mu_U(\lambda x) = \lambda x$ برای هر $\lambda > \circ$ و هر $x \in Q$).

۴) رابطه زیرهمواره برقرار است :

$$\{x \in Q \quad : \mu_U(x) < ۱\} \subset U \subset \{x \in Q \quad : \mu_U(x) \leq ۱\}.$$

.

لم های زیر در[2] (صفحه ۱۷۱—۱۷۰) اثبات شده اند ، بنابراین از اثبات آنها صرف نظر کرده واز نتایج آن بهره مند می شویم .

لم. ۲. ۱.۱ فرض کنیم $\{U_t\}_{t\in T}$ خانواده‌ای از مجموعه های محدب در X و شامل گوی $B(\circ, \varepsilon)$ باشند و$U = \cup U_t$. در این صورت تابع مینکوفسکی U برابر با تابع مینکوفسکی $\bar{U}$ است و و برای آن داریم :

$$bdU = \{x \in X : \quad \mu_U(x) = ۱\}.$$

لم. ۲. ۱. ۲ فرض کنیم $U \subseteq X$ مجموعه‌ای رادیانت باشد و $\circ \in intkernU$ آنگاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$ خانواده ای از مجموعه های محدب مانند $\{U_t\}_{t\in U}$ وجود دارد به قسمی که

۱) برای هر $t \in U$ داریم $B(\circ, \varepsilon) \subseteq U_t$ ،

۲) $U = \cup_{t\in U} U_t$.

تعریف. ۲. ۱. ۳ فرض کنیم $A \subseteq X$ و $x \in X$ و Q یک مخروط توپر $(intQ \neq \emptyset)$ باشد در اینصورت :

۱) اگر $(x + intQ) \cap A = \emptyset$ می گوییم مجموعه A و عنصر x به وسیله مخروط Q جدا شده اند .

۲) اگر مخروط بسته و توپر محدبی مانند Q وجود داشته باشد که A و x را ازهم جدا کند گوییم مجموعه A و عنصر x مخروطی جدا هستند .

برای اینکه وارد بحث تجزیه توسط خانواده ای از توابع خطی مانند $\{f_i\}_{i\in N}$ شویم مجموعه های زیر را تعریف می کنیم ، اگر $\{f_i\}_{i\in N}$ خانواده ای از توابع خطی در X^* (فضای دوگان) باشند داریم :

$$T_F = \{x \in X : f_i(x) < \circ, \forall i \in N\},$$

$$T^F = \{x \in X : f_i(x) > 0, \forall i \in N\}.$$

در [۱۱] آمده است :

قضیه. ۲. ۱. ۱ فرض کنیم $Q \subseteq X$ مخروطی توپر باشد و $x \in intQ$ ، در این صورت خانواده‌ای از توابع مستقل خطی مانند $F = \{f_i\}_{i\in N}$ در X^* وجود دارد به قسمی که $T_F \subseteq intQ$ به طوری که به ازای هر $i \in N$ داشته باشیم $f_i(x) = -1$.

برهان . فرض کنیم که $f \in X^*$ به طوری که $f(x) = -1$ و

$$H = kern\ f = \{y \in X, \quad f(y) = 0\}$$

باشد ، از آنجایی که $x \in intQ$ می باشد لذا $r > 0$ ای وجود دارد بطوری که $B(x,r) := \{y \in X : ||y-x|| < r\} \subseteq intQ$. $\{e_i\}_{i\in N}$ را پایه ای برای H در نظر میگیریم به قسمی که به ازای هر $i \in N$ $||e_i|| \leq \frac{r}{2}$.

اکنون نشان می دهیم $D = \{x\} \cup \{x+e_i\}$ یک پایه برای X است .

(اثبات مستقل بودن D): برای این امر فرض کنیم اعداد حقیقی λ_j که $j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ وجود داشته باشد که

$$0 = \lambda_0 x + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x + e_{i_j}) = (\sum_{j=0}^{n} \lambda_j) x + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_{i_j}.$$

f راروی طرفین مساوی اثر می دهیم

$$f(0) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(e_{i_j}).$$

از آنجاییکه $f(x) = -1$ و $e_{i_j} \in H$ و $f(0) = 0$ پس داریم $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 0$.

با بکار بردن دوباره رابطه اول داریم $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_{i_j} = 0$ وچون e_{i_j} مستقل خطی هستند پس به ازای هر $j = 1, 2, ..., n$ داریم $\lambda_j = 0$ ، از آن جایی که $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 0$ نتیجه می گیریم $\lambda_0 = 0$ ، پس با توجه به تعریف مستقل خطی بودن که در فصل اول آوردیم نتیجه میگیریم که مجموعه ی $\{x\} \cup \{x + e_i\}$ مستقل خطی میباشد .

پس می توانیم دنباله $\{x_i\}_{i \in N}$ را بعنوان یک پایه برای فضای X به شکل زیر تعریف کنیم که در آن $i = 2, 3, ... \quad x_i = x + e_{i-1} \quad , \quad x_1 = x$ ، از مستقل بودن اعضای پایه می دانیم که برای هر k ، عضو x_k در صفحه تولید شده توسط $\{x_i, \ \ i \in N \ \ i \neq k\}$ قرار ندارد، بنابراین به وسیله نتیجه قضیه هان باناخ وجود خانواده ای از $F_1 = \{f_i\}_{i \in N}$ مستقل خطی درX^* نتیجه میشود به قسمی که

$$f_i(x) = -1 \quad , \quad f_i(x + e_i) = -2 \quad , \quad \forall i \in N \quad , \quad f_i(x + e_j) = 0 \quad \forall j \neq i.$$

اکنون فرض میکنیم $S = \{y \in H : f_i(y) \leq 1 \ \forall i \in N\}$ بوضوح S مجموعه‌ای محدب است .

(زیرا برای هر x, y در S داریم $f_i(y) < 1$ و $f_i(x) < 1$ حال اگر $\lambda \in [0, 1]$ ، رابطه زیر را داریم

$$f_i(\lambda x + (1 - \lambda) y) = \lambda f_i(x) + (1 - \lambda) f_i(y) \leq \lambda 1 + (1 - \lambda) 1 = 1.$$

بنابراین $\lambda x + (1-\lambda)y$ در S قرار دارد و S مجموعه ای محدب است .)

از آن جایی که

$$-2 = f_i(x+e_i) = f_i(x) + f_i(e_i) = -1 + f_i(e_i)$$

داریم $f_i(e_i) = -1$ و هم چنین از

$$0 = f_i(x+e_j) = f_i(x) + f_i(e_j) = -1 + f_i(e_j)$$

نتیجه میگیریم $f_i(e_j) = 1$.

پس داریم $\{e_i\}_{i\in N} \subset S$.

بنابراین برای هر k داریم $f_k(e_i) \leq 1$.

ادعا می کنیم که برای هر $n \in N$ اگر $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \in S$ آنگاه $\sum_{i=0}^{n} \mid \lambda_i \mid e_i \in S$.

برای اثبات ادعا فرض کنیم که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in S$ ، بنابراین داریم :

$$\forall k \quad f_k(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_k(e_i) \leq 1$$

$$\Rightarrow \lambda_k f_k(e_k) + \sum_{i\neq k}^{n} \lambda_i f_k(e_i) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_k + \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \lambda_i \leq 1. \quad (1)$$

از طرفی چون برای هر k داریم $f_k(e_i) \leq 1$ باسوپریمم گرفتن از طرفین رابطه $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_k(e_i) \leq 1$ داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1. \qquad (2)$$

از دو رابطه (۱) و(۲) نتیجه میگیریم

$$\pm\lambda_k + \sum_{i\neq k} \lambda_i \leq 1.$$

پس

$$\sum_{i\neq k}^{n} \lambda_i e_i - \lambda_k e_k \in S.$$

اگر $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in S$ و $\lambda_1, \lambda_2, ..\lambda_m \in R^+$ و $\lambda_{m+1}...\lambda_n \in R^-$ آنگاه

برای $k = n$ داریم:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i - \lambda_n e_n \in S.$$

برای $k = n - 1$ هم داریم

$$\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i e_i - \lambda_{n-1} e_{n-1} - \lambda_n e_n \in S.$$

در این صورت $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' e_i \in S$ که برای هر $i = 1..n-1$، $\lambda_i' = \lambda_i$ و $\lambda_n' = -\lambda_n$.

با ادامه مراحل فوق نتیجه می شود که

$$\sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid e_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i - \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i \in S.$$

حال نشان می دهیم که $S \subseteq H \cap B(0, r)$.

فرض کنیم که $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in S$ در این صورت برای هر $k = 1, 2, ...$ داریم :

$$[\pm\alpha_k + \sum_{i=1, i\neq k}^{\infty} \alpha_i] \leq 1.$$

قرار می دهیم $S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ ، بعلت اینکه $y = lim_{n\to\infty} S_n$ پس $N > 0$ وجود دارد به قسمی که $\| S_N - y \| \leq \frac{r}{2}$.

پس

$$lim_{n\to\infty}[\pm\alpha_k + \sum_{i\neq k}^{n} \alpha_i] \leq 1.$$

حال اگر حالت برابری را در نظر بگیریم یعنی

$$lim_{n\to\infty}[\pm\alpha_k + \sum_{i\neq k}^{n} \alpha_i] = 1.$$

در این صورت $\sum_{i\neq k}^{n} \alpha_i = 1 \pm \alpha_k$ با توجه به اینکه داشتیم $\pm\alpha_k + \sum_{i\neq k}^{n} \alpha_i \leq 1$ ، نتیجه میگیریم $[\pm\alpha_k + 1 \pm \alpha_k] \leq 1$ پس برای هر k داریم $\alpha_k = 0$ که این یک تناقض است ، پس هیچگاه حالت برابری اتفاق نمی افتد وداریم

$$lim_{n\to\infty}[\pm\alpha_k + \sum_{i\neq k}^{n} \alpha_i] < 1.$$

بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می کنیم که

$$[\pm\alpha_k + \sum_{i\neq k, i=1}^{N} \alpha_i] < 1.$$

این نتیجه میدهد که $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \in S$ و همان طور که در ابتدا ثابت شد $\sum_{i=1}^{N} \mid \alpha_i \mid e_i \in S$.

پس $\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \leq 1$.

اکنون نتیجه میگیریم

$$||y|| \leq ||S_N - y|| + ||S_N|| \leq ||S_N - y|| + \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \, ||e_i|| < r/2 + r/2 = r.$$

از این رو $y \in H \cap B(\circ, r)$ و $S \subset H \cap B(\circ, r)$. چون که برای هر i داریم $f_i(x) = -۱$ پس

$$x + S = \{z \in X \quad : \quad z = y + x \ ; \ f(y) = \circ \quad , \quad f_i(y) \leq ۱ \quad \forall i \in N\}$$

$$= \{z \in X \ : \ f_i(z) \leq \circ \ , \forall i \in N \ , \ f_(z) = -۱\}.$$

زیرا:

$f_i(y + x) = f_i(y) + (-۱) \leq ۱ + (-۱) = \circ$ و $f(x + y) = f(x) + f(y) = -۱ + \circ.$

پس از این رابطه می توانیم نتیجه بگیریم

$$cone(x + S) \cup \{\circ\} = \{z \in X \ : \ f_i(z) \leq \circ \ , \ f(z) \leq \circ\}.$$

اگر $F = F_۱ \cup \{f\}$ چونکه $x + S \subset B(x, r) \subset intQ$ نتیجه میگیریم

$$cone(x + S) \cup \{\circ\} \subset intQ.$$

پس

$$T_F = \{z \in X \ : \ f_i(z) < \circ \quad , \quad f(z) < \circ\} \subset cone(x + S) \cup \{\circ\} \subset intQ.$$

در پایان نشان می دهیم که مجموعه F مستقل خطی است :

اگر $\beta_\circ, \beta_۱, ..., \beta_n$ اعداد حقیقی باشند که

$$\beta_\circ f + \sum_{k=۱}^{n} \beta_k f_k = \circ.$$

چون برای هر k داشتیم $f_k(x) = -1$ و $f(x) = -1$ پس

$$0 = \beta_0 f(x) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) = -\beta_0 - \sum_{k=1}^{n} \beta_k. \qquad (1)$$

از طرفی

$$0 = \beta_0 f(e_i) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(e_i) = -\beta_i + \sum_{k\neq i}^{n} \beta_k. \qquad (2)$$

(زیرا : برای هر $k \neq i$ داریم $f_k(e_i) = 1 \quad , \quad f_i(e_i) = -1 \quad , \quad f(e_i) = 0$).

اگر طرفین رابطه (۱) را در منفی ضرب کنیم از تساوی دو رابطه (۱) و (۲) برای هر i داریم ، $\beta_0 = -2\beta_i$. با جایگذاری این نتیجه دررابطه (۲) داریم $\beta_0 = 0$.
پس برای هر i نتیجه می شود $\beta_i = 0$. بنابراین خانواده F تمام ویژگی های قضیه را دارد واین اثبات را تمام می کند. □

تذکر. ۲. ۱. ۱ خانواده $G = \{g_i\}_{i\in N}$ از توابع مستقل خطی در X^* وجود دارد به قسمی که برای هر $i \in N$ ، $g_i(x) = 1$ و $T^G \subset intQ$.
کافیست $G = -F = \{-f_i\}_{i\in N}$ تعریف کنیم اگر $F = \{f_i\}_{i\in N}$ خانواده ای از توابع ، با ویژگی های قضیه قبل باشند.

تعریف. ۲. ۱. ۴ مجموعه $A \subseteq X$ و $x \in X$ را مجزا شده به وسیله $F = \{f_i\}_{i\in N}$ می گوییم اگر در شرط زیر صدق کنند:

$$\inf_{i\in N} f_i(x) \quad \geq \quad \sup_{a\in A} \inf_{i\in N} f_i(a).$$

قضیه. ۲. ۱. ۲ فرض کنیم $A \subseteq X$ و $y \notin A$ آنگاه جملات زیر درست می باشند :

۱) اگرمجموعه A و نقطه y بوسیله مخروط محدب وتوپر وبسته ای مانند Q ، مخروطی جدا باشند به قسمی که $y \in intQ$ آنگاه یک خانواده مانند $F = \{f_i\}_{i\in N}$ از توابع مستقل خطی در X^* وجود دارد که

$$\inf_{i\in N} f_i(y) \; > 1 \; \geq \quad \sup_{a\in A} \inf_{i\in N} f_i(a).$$

۲) اگر خانواده ی $F = \{f_i\}_{i\in N}$ از توابع مستقل خطی روی فضای X^* وجود داشته باشد که در شرط بالا صدق کند ، آنگاه مجموعه A و نقطه y مخروطی جدا هستند .

برهان . اثبات(۱):

اگر A و y توسط مخروط توپر ومحدب وبسته ای مانند Q از هم جدا شوند طبق تعریف داریم

$$(y + intQ) \cap A = \emptyset.$$

هم چنین طبق فرض $y \in intQ$ می باشد ، پس میتوانیم $\circ < \epsilon < ۱$ پیدا کنیم که $y' = (۱-\epsilon)y \in intQ$. ازتذکر(۲. ۱.۱) نتیجه می گیریم که خانواده ی $F = \{f_i\}_{i\in N}$ از توابع مستقل خطی وجود دارد که

$$T^F \subset intQ \quad , \quad f_i(y') = ۱ \quad \forall i \in N.$$

اگر $z \in y' + T^F$ باشد آنگاه برای هر $i \in N$ داریم $f_i(z) > ۱$ (زیرا: $z - y' \in T^F$).

اکنون اگر $x \in A$ دلخواه فرض شود بعلت اینکه $y' + intQ \subset y + intQ$ ، داریم $x \notin y' + intQ$ ، بنابراین $x \notin y' + T^F$ ، پس نتیجه می شود که اندیس $i_\circ \in N$ وجود دارد به قسمی که $f_{i_\circ}(x) \leq ۱$ (زیرا $x - y' \notin T^F$) .
وقتی برا ی یک $i_\circ \in N$ این رابطه برقرار است میتوانیم نتیجه بگیریم که $inf_{i\in N} f_i(x) \leq ۱$ ، پس برای هر $a \in A$ داریم :

$$inf_{i\in N} f_i(a) \quad \leq \quad ۱ = inf_{i\in N} f_i(y') \quad = \quad (۱-\epsilon) inf_{i\in N} f_i(y) \quad < \quad inf_{i\in N} f_i(y).$$

بنا براین $sup_{\ a\in A} inf_{i\in N} f_i(a) \leq ۱ < inf_{i\in N} f_i(y)$.

اثبات(۲):

فرض کنیم خانواده ای از توابع مستقل خطی مانند $F = \{f_i\}_{i\in N}$ و $c > ۱$ وجود داشته

باشد به گونه ای که

$$sup_{a\in A}\ inf_{i\in N} f_i(a) \leq c < inf_{i\in N} f_i(y).$$

از آن جایی که برای هر $i \in N$ داریم $f_i(y) > c > ۱ > ۰$ ، پس $y \in T^F$ ، از این رو T^F یک مخروط ناتهی است (واضح هست که T^F یک مخروط محدب توپر باز می باشد) . اگر $Q = cl\ T^F$ فرض شود ، Q نیز یک مخروط محدب توپر بسته میباشد ، علاوه براین داریم :

$$y + Q \subset \{z \in X \quad : \quad f_i(z) \geq c \ \ , \ \forall i \in N\} \subset \{z \in X \quad : inf f_i(z) > ۱\}.$$

از این رو طبق فرض نتیجه می گیریم که $(y + Q) \cap A = \emptyset$.

بنابراین عنصر y و مجموعه A مخروطی جدا هستند و این اثبات را تمام می کند. □

۲.۲ جداسازی خطی دو مجموعه ستاره گون

در این بخش جداسازی ضعیف وجداسازی اکید مجموعه ها توسط توابع خطی و مجموعه محافظ را تعریف نموده و بعد از آن جداسازی مجموعه های رادیانت و ستاره گون ها را از نقاط مرزی شان ، توسط خانواده ای از توابع مستقل خطی در فضای R^n و فضای X بیان خواهیم کرد.

تعریف. ۲. ۵.۲ فرض کنیم $U \subseteq X$ و $x \in \bar{U}$ می گوییم که بردار u در مخروط مماس

مجموعه ی U [۲] در نقطه x قرار دارد اگر برای هر $\lambda_\circ$ و ε مثبت بردار v و اسکالر α ، وجود داشته باشد به گونه ای که

$$x + \alpha v \in U \quad , \quad \alpha \in (\circ, \lambda_\circ] \qquad \| v - u \| \leq \varepsilon.$$

ما مخروطی مماس مجموعه U را در نقطه x با نماد $\Gamma(U,x)$ نشان می دهیم .

از تعریف مخروط $\Gamma(U,x)$ داریم:
$x \notin \Gamma(U,x)$ اگر و فقط اگر $\lambda_\circ$ و ε مثبت وجود داشته باشد که

$$(x + \cup_{\circ<\lambda\leq\lambda_\circ} \lambda\, B(x,\varepsilon)) \cap U = \emptyset. \qquad (۲.۱)$$

فرض می کنیم { U یک مجموعه رادیانت در X است : $U_X = \{U \subseteq X$.
برای هر $U \in U_X$ مجموعه زیر را تعریف می کنیم :

$$\Delta(U) = \{x \in U : \ \mu_U(x) = ۱ \ , \ x \notin \Gamma(U,x)\}. \qquad (۲.۲)$$

در [۸] قضیه (۵.۱۵) و (۵.۱۷) داریم :
اگر $\circ \in int\ kernU$ باشد آنگاه $\partial U = \{x \in X \quad \mu_U(x) = ۱\}$ و هم چنین طبق نتیجه (۵.٦) در [۸] اگر $x \in \partial U$ آنگاه $x \notin \Gamma(U,x)$ ، بنابراین می توانیم نتیجه

[۲] Bouligand U

بگیریم که اگر $0 \in int\ kernU$ باشد، آن گاه ∂U بر $\Delta(U)$ منطبق می شود .

از قضیه(۲. ۱.۱) میتوانیم جداسازی خطی یک نقطه بیرونی از مجموعه را نتیجه بگیریم . در ادامه میخواهیم جداسازی مجموعه از یک نقطه مرزی اش را بررسی کنیم . برای رسیدن به این هدف از مخروط مماس مجموعه U در نقطه x ا ستفاده خواهیم کرد. (این یکی از نکات کلیدی در آنالیز نا هموار است برای مثال به[۸] رجوع شود).
در زیر به چند تعریف می پردازیم که در [۱۱] نیز به آنها اشاره شده است :

تعریف. ۲. ٦.۲ اگر A_1, A_2 زیر مجموعه هایی از X و $F = \{f_i\}_{i\in N}$ خانواده ای از توابع مستقل خطی در X^* باشند که برای هر $a_2 \in A_2$ و $a_1 \in A_1$ بتوان $i \in N$ ای یافت به طوری که

$$f_i(a_1) \leq f_i(a_2).$$

در این صورت می گوییم A_2 و A_1 به طور ضعیف از هم مجزا شده اند .

صورت R^n این تعریف که برای جداسازی در [۴] آمده است بدین شکل است :

تعریف. ۲. ۷.۲ فرض کنیم V و U زیر مجموعه های از R^n و $l = (l_i)_{i=1,2,\dots,m}$ یک مجموعه ازبردارهای مستقل در R^n باشند اگر برای هر $v \in V$, $u \in U$ داشته باشیم یک $i \in N$ که

$$[l_i \quad u] \leq [l_i \quad v].$$

آنگاه می گوییم V و U به طور ضعیف از هم مجزا شده اند .

که در اینجا منظور از نماد$[l \quad x]$ همان تعریف ضرب داخلی دو بردار در فضای R^n یعنی $[l \quad x] = \sum_1^n l_i x_i$ می باشد .

تعریف. ۲. ۸.۲ فرض کنیم $A \subseteq X$ گفته می شود $x \in X$ به طور ضعیف از A بوسیله $F = \{f_i\}_{i \in N}$ مجزا شده است اگر برای هر$a \in A$ وجود داشته باشد یک $i \in N$ که $.f_i(a) \leq f_i(x)$

و برای تعریف معادل آن در فضای R^n داریم :

تعریف. ۲. ۹.۲ فرض کنیم $U \subseteq R^n$ گفته می شود $x \in R^n$ به طور ضعیف از U مجزا شده بوسیله $l = (l_1, l_2, ..., l_m)$ ، اگر برای هر $u \in U$ ، یک $i \in \{1, 2, ..., m\}$ وجود داشته باشد که رابطه $[l_i \quad u] \leq [l_i \quad x]$ برای آن برقرار باشد .

تعریف. ۲. ۱۰.۲ فرض کنیم $A \subseteq X$ و $x \notin A$ ، گفته می شود مجموعه $F = \{f_i\}_{i \in N}$ از توابع مستقل خطی مجموعه A و نقطه x رابه طور اکید از هم مجزا می کند اگر $\varepsilon \in (0, 1)$ وجود داشته‌باشد به گونه ای که برای هر $a \in A$ داشته باشیم :

$$f_i(a) \leq 1 - \varepsilon \qquad \exists i \in 1, 2, ... \quad .$$

و

$$f_i(x) = 1 \qquad \forall i \in 1, 2, ... \quad .$$

تعریف. ۲. ۱۱.۲ فرض کنیم $U \subseteq X$ و $\circ \neq x \in bdU$ باشد ، **مجموعه** $F = \{f_i\}_{i\in N}$ از توابع مستقل خطی درX^* را محافظ مجموعه U در نقطه x می نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $i \in N$ داشته باشیم $f_i(x) = ۱$ ،

۲) برای هر $u \in U, u \neq x$ داشته باشیم $\inf f_i(u) < ۱$.

شرط معادل داشتن محافظ در فضای R^n مشابها به صورت زیر است :

برای هر $i = ۱, ۲, ..., m$ ، $[l_i \quad x] = ۱$ وهمچنین برای هر $u \in U$ ، $min[l_i \quad x] < ۱$.

قضیه. ۲. ۳.۲ فرض کنیم $U \subseteq X$ و $\circ \in U$ باشد. U وهر نقطه $x \notin U$ می تواند بوسیله مجموعه $F = \{f_i\}_{i\in N}$ از توابع مستقل خطی از هم مجزا شوند اگر و فقط اگر U یک مجموعه رادیانت بسته باشد.

برهان . ابتدا فرض می کنیم $x \notin U$ و مجموعه U و نقطه x توسط خانواده $F = \{f_i\}_{i\in N}$ مجزا می شوند .

برای هر نقطه $x \notin U$ داریم

$$sup_{u\in U} \ inf \ _{i\in N} f_i(u) \leq inf \ _{i\in N} f_i(x)$$

پس $c \in R$ و خانواده ی $F = \{f_i\}_{i\in N}$ از توابع مستقل خطی وجود دارد به قسمی که $U \subseteq U_{F,c}$ ، به طوری که

$$U_{F,c} = \{y \in X : \inf_{i\in N} f_i(y) \leq c\}.$$

بنابراین یک خانواده از $\{U_{F,c}\}$ وجود دارد که U بر اشتراک این خانواده منطبق می شود . از آن جایی که $\circ \in U$ و $f(\circ) = \circ$ و $U \subseteq U_{F,c}$ ، نتیجه می شود c فرض شده در تعریف بالا نا منفی است . بوضوح مجموعه $U_{F,c}$ بسته است ، حال نشان می دهیم که این مجموعه رادیانت نیز هست.

فرض کنیم که $y \in U_{F,c}$ و $\circ < \lambda \leq ۱$ باشد اگر $inf f_i(y) \leq \circ$ آنگاه $inf f_i(\lambda y) \leq \circ \leq c$ و اگر $inf f_i(y) > \circ$ آن گاه $\circ < inf f_i(\lambda y) \leq \lambda c \leq c$ از این رو $\lambda y \in U_{F,c}$ ، بنابراین $U_{F,c}$ یک مجموعه رادیانت است .

همچنین داریم اشتراک دلخواه از مجموعه های رادیانت و بسته یک مجموعه رادیانت بسته است.

(برهان :فرض می کنیم $U = \cap_{i\in I} U_i$ که U_i ها مجموعه های رادیانت بسته باشند ؛ حال اگر $x \in U$ برای هر $i \in I$ داریم $x \in U_i$ پس برای $\circ \leq \lambda < ۱$ می دانیم که $\lambda x \in U_i$ به ازای هر $i \in I$ بنابراین $\lambda x \in U$ ؛ از طرفی اشتراک دلخواه از مجموعه های بسته ، بسته است .)

از این رو نتیجه می گیریم که U نیز یک مجموعه رادیانت بسته است .

اثبات عکس قضیه :

ابتدا ثابت می کنیم که یک مخروط محدب توپر و بسته مانند Q و $\circ < \lambda < ۱$ وجود دارد به گونه ای که

$$x \in intQ \quad , \quad U \cap (\lambda x + Q) = \emptyset \qquad (۱)$$

. از آنجایی که U یک مجموعه رادیانت بسته و $x \notin U$ فرض شده است ، یک $\circ < \lambda < ۱$ داریم که $x' = \lambda x \notin U$.

ما ادعا می کنیم که U و x' می توانند توسط مخروط محدب و توپر و بسته Q ، جدا شوند

به قسمی که $x^{'} \in intQ$.

(برهان خلف) اگر این ادعا درست نباشد دنباله ای مانند $\{Q_j\}_{j\geq ۱}$ از مخروط های محدب وتوپر وبسته وجود خواهند داشت که

$$Q_{j+۱} - \{۰\} \subset intQ_j \quad , \quad \cap_{j\geq ۱} Q_j = \tilde{R}_x$$

وچون طبق فرض خلف هیچ کدام از مخروط ها نمیتواند $x^{'}$ و U را مجزا کند یعنی داریم:

$$(x^{'} + Q_j) \cap U \neq \emptyset.$$

پس برای هر j ، x_j هایی وجود دارند که $x_j \in U$ و $x_j \in x^{'} + Q_j$ ؛ یعنی $y_j \in Q_j$ هست که $x_j = x^{'} + y_j \in U$.

حال دو حالت پیش می آید:

(۱) دنباله $\{y_j\}_{j\geq ۱}$ یک دنباله غیر کراندار باشد، بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می کنیم $||y_j|| \to +\infty$ آنگاه برای هر $\alpha > ۰$ داریم :

$$\alpha \frac{x_j}{||y_j||} = \alpha \frac{x^{'}}{||y_j||} + \alpha \frac{y_j}{||y_j||}. \qquad (۱^{'})$$

$||y_j|| \to \infty$ ایجاب می کند که $\alpha \frac{x^{'}}{||y_j||}$ به سمت صفر میل می کند واز اینکه $y_j \in Q_j$ داریم $\alpha \frac{y_j}{||y_j||} \in Q_j$ (از تعریف مخروط) ، همچنین ازبرابری $\cap Q_j = \tilde{R}_x$ نتیجه میگیریم که $\alpha \frac{y_j}{||y_j||}$ به سمت $\alpha \frac{x}{||x||}$ میل می کند . چون U یک مجموعه رادیانت فرض شده و $x_j \in U$ پس برای j های خیلی بزرگ از رابطه $(۱^{'})$ داریم $\alpha \frac{y_j}{||y_j||} \in U$. بعلت بسته

بودن مجموعه U و این که $\alpha\frac{x}{||x||} \in U$ داریم $\alpha\frac{y_j}{||y_j||} \to \alpha\frac{x}{||x||}$ ، پس برای هر $\alpha > 0$ داریم $\alpha x \in U$ ؛ به تناقض با فرض رسیدیم پس حالت (۱) غیر ممکن است .

(۲)دنباله $\{y_j\}_{j\geq 1}$ ، یک دنباله کراندار باشد باز هم بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می کنیم $y_j \to y \in R_x$ (زیرا $\cap Q_j = \tilde{R}_x$ و $y_j \in Q_j$).

پس وجود دارد $\gamma \geq 0$ به گونه ای که $y = \gamma x$ ، از آنجایی که $x_j \to x' + y$ و $x' = \lambda x$ پس داریم

$$x_j \to x' + \gamma x = (\lambda + \gamma)x.$$

از این که $x_j \in U$ و U بسته است داریم $(\lambda + \gamma)x \in U$ ، از طرفی دیگر به علت این که $\lambda x \notin U$ و $\lambda \leq \lambda + \gamma$ و ویژگی رادیانت بودن مجموعه U داریم $(\lambda + \gamma)x \notin U$ ، که این دو نتیجه باهم تناقض دارند.

پس هیچ کدام از حالت ها ممکن نیست ، از این رو فرض خلف باطل است و مجموعه U و x' می توانند بوسیله مخروط محدب وتوپری مانند Q از هم جدا شوند به گونه ای که $x' \in intQ$ باشد . بنابراین مخروط محدب و توپر Q و $1 > \lambda > 0$ وجود دارد که ادعای (۱) برای آن برقرار باشد ، حال با استفاده از قضیه (۲. ۱.۱) می توانیم خانواده ای از توابع مستقل خطی مانند $F = \{f_i\}_{i\in N}$ در X^* را داشته باشیم به گونه ای که $T^F \subset intQ$ و به ازای هر $i \in N$ ، $f_i(x) = 1$ پس داریم:

$$T^F + \lambda x = \{y + \lambda x \quad : \quad f_i(y) > 0\} = \{z \quad : \quad f_i(z - \lambda x) > 0\}$$

$$= \{z \quad : \quad f_i(z) - \lambda f_i(x) > 0\} = \{z \quad : \quad f_i(z) > \lambda\}. \quad (۲)$$

بعلت این که $U \cap (\lambda x + Q) = \emptyset$ ، برای هر $u \in U$ وجود دارد $i \in N$ که $f_i(u) \leq \lambda$ ؛ زیرا $u \notin \lambda x + Q$ و چون $T^F \subset intQ$ داریم $\lambda x + T^F \subset \lambda x + intQ$ بنابراین $u \notin \lambda x + T^F$ پس طبق رابطه (۲) نتیجه میگیریم یک $i \in N$ وجود دارد به قسمیکه $f_i(u) \leq \lambda$.

اکنون فقط کافیست $\epsilon > ۰$ را به گونه ای انتخاب کنیم که $۱ - \lambda > \epsilon$ باشد ، پس داریم $f_i(u) \leq \lambda \leq ۱ - \epsilon$ ، از این رو ما خانواده ای از توابع را یافتیم که برای هر $u \in U$ داشته باشیم یک $i \in N$ که $f_i(u) \leq ۱ - \epsilon$ و $f_i(x) = ۱$ برای هر $i \in N$ که طبق تعریف (۲. ۱۰.۲) مجموعه U و x از یکدیگر به طور اکید مجزا شده اند و اثبات تمام است .

بنابراین هر دو طرف قضیه اثبات گردید. □

قضیه. ۲. ۴.۲ فرض کنیم $U \subseteq X$ یک مجموعه رادیانت بسته باشد و $x \in \Delta U$ ، آنگاه یک مجموعه محافظ برای U در نقطه x وجود دارد.

برهان .

ابتدا ثابت می کنیم که یک مخروط محدب توپر و بسته مانند Q و $۱ > \lambda > ۰$ وجود دارد که

$$x \in intQ \quad , \quad U \cap (x + Q) = \{x\}. \qquad (۱)$$

فرض می کنیم که چنین مخروطی وجود نداشته باشد پس می توانیم دنباله ای از مخروط های محدب وتوپر وبسته مانند $\{Q_j\}$ با خواص زیر را داشته باشیم :

۱) برای هر $j = 1, 2, \ldots$ داشته باشیم $Q_{j+1} - \{0\} \subset intQ_j$،

۲) $\cap_{j\geq 1} Q_j = R_x$،

۳) برای هر $j = 1, 2, \ldots$ نیز داشته باشیم $x \in intQ_j$،

۴) $y_j \in Q_j$ که برای هر $j = 1, 2, \ldots$ داشته باشیم $y_j \neq 0$ و $x_j = x + y_j \in U$.

اگر دنباله $\{y_j\}_{j\geq 1}$ غیر کراندار باشد مشابه اثبات قضیه قبل داریم برای هر $\rho > 0$ ، $\rho x \in U$ که این یک تناقض است زیرا $x \in \Delta U \subset \partial U$ و چون x یک نقطه مرزی U است نمی توانیم برای $\rho > 1$ داشته باشیم $\rho x \in U$.

اگر دنباله $\{y_j\}_{j\geq 1}$ کراندار باشد و $y_j \to y \in R_x$ آنگاه $\gamma \geq 0$ وجود دارد که $y = \gamma x$ ، اگر $\gamma > 0$ باشد $x_j \to (1+\gamma)x$ از اینرو $(1+\gamma)x \in U$ ، که این بار نیز با فرض نقطه مرزی بودن x به تناقض می رسیم . (بنابراین در $\gamma \geq 0$ حالت " $>$ " اتفاق نمی افتد).

فرض کنید که $\gamma = 0$ و $\beta_j = \frac{||y_j||}{||x||}$ پس برای هر $j \in N$ داریم $\beta_j > 0$ و $lim_{j\to\infty}\beta_j = \gamma = 0$. علاوه براین چون $\cap_{j\geq 1} Q_j = R_x$ و $y_j \in Q_j$ داریم :

$$lim_{j\to\infty}\frac{y_j}{\beta_j} = \frac{\gamma x}{\gamma} = x. \qquad (2)$$

(زیرا $\frac{1}{\beta_j} > 0$ وطبق تعریف مخروط $\frac{y_j}{\beta_j} \in Q_j$) ، علاوه بر این چون $x \in \Delta(U)$ و $x + y_j \in U$ طبق روابط (۲.۱) و (۲.۲) که در تعاریف ابتدایی بخش آمد داریم : ϵ و λ_0 مثبتی وجود دارد که

$$y_j \notin \cup_{0<\lambda\leq\lambda_0} \lambda\ B(x, \varepsilon).$$

پس برای j های خیلی داریم $||y_j/\beta_j - x|| \geq \epsilon$ که این با عبارت (۲) تناقض دارد .
حال فرض می کنیم که Q مخروط محدب و توپری باشد که فرض (۱) برای آن برقرار باشد پس خانواده ای از توابع مستقل خطی مانند $F = \{f_i\}_{i\in N}$ داریم که $T^F \subset intQ$ و برای هر $i \in N$ ۱ $f_i(x) =$ ، از آن جایی که $x + T^F = \{y \quad f_i(y) > ۱ \quad \forall i \in N\}$ پس برای هر $u \in U$ که $u \neq x$ باشد یک $i \in N$ وجود دارد که ۱ $f_i(u) \leq$ (زیرا $u \notin (x+Q)$ پس $u \notin x + T^F$) ، از آنجایی که $\{z \quad : \quad f_i(z) = ۱ \ , \ \forall i \in N\} = \{x\}$ نتیجه می گیریم که $f_i(u)$ برای هر $x \neq u \in U$ ، کوچکتر از یک می باشد .
پس ۱ $inf \ f_i(u) <$ که با رجوع به تعریف مجموعه محافظ در (۲. ۲. ۱۱) اثبات تمام است . □

قضیه. ۲. ۲. ۵ فرض کنیم $U \subseteq X$ اگر برای هر نقطه $x_\circ \in clU$ یک مجموعه محافظ برای $x_\circ$ نسبت به U وجود داشته باشد آنگاه $x_\circ \notin \Gamma(U, x_\circ)$.

برهان . برهان خلف : فرض کنیم $x_\circ \in \Gamma(U,x)$ پس برای دنباله ای مثبت مانند $\lambda_k \to \circ$ داریم $u_k \to x_\circ$ و به قسمی که $x_\circ + \lambda_k u_k \in U$ ، اگر برای $x_\circ$ یک مجموعه محافظ در U مانند $F = \{f_i\}_{i\in N}$ داشته باشیم آن گاه

$$۱ \geq inf f_i(x_\circ + \lambda_k u_k) = inf(۱ + f_i(\lambda_k u_k)) = ۱ + \lambda_k inf f_i(u_k).$$

(زیرا طبق تعریف مجموعه محافظ برای هر $u \in U$ داریم $(inf \ f_i(u) \leq 1$) ، پس می توانیم نتیجه بگیریم که $.inf f_i(u_k) \leq 0$

علاوه براین چون $u_k \to x_0$ نتیجه می گیریم $inf f_i(x_0) \leq 0$ ؛ که این با $f_i(x_0) = 1$ تناقض دارد پس فرض خلف باطل و حکم درست است . $\square$

لم. ۲. ۳.۲ فرض کنیم $A_1 \subseteq X$ یک ستاره گون و $int \ ker \ A_1 \neq \emptyset$ باشد و $A_2 \subset X$ یک مجموعه رادیانت فرض شود که $intA_1 \cap A_2 = \emptyset$ و $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ آنگاه نتیجه می شود $0 \in \partial(A_1 - A_2)$.

برهان .

ابتدا نشان می دهیم رابطه زیر بر قرار است

$$(\lambda a + A_1) \cap A_2 = \emptyset \qquad , \qquad \forall a \in int \ kernA_1 \ , \ \lambda > 0. \qquad (1)$$

برهان خلف : فرض کنیم که وجود داشته باشد $a_1 \in int \ kerA_1$ و $\lambda > 0$ و $z \in A_1$ به قسمی که $a_2 =: \lambda a_1 + z \in A_2$ ، چون $a_2 \in A_2$ وA_2 یک مجموعه رادیانت است و $1/1 + \lambda$ عددی کوچکتر از یک می باشد داریم $\frac{1}{1+\lambda} a_2 \in A_2$.

از طرفی داریم :

$$\frac{1}{1+\lambda} a_2 = \frac{\lambda}{1+\lambda} a_1 + \frac{1}{1+\lambda} z \in intA_1.$$

زیرا a_1 متعلق به هسته A_1 و z متعلق A_1 می باشد واز تعریف هسته ما رابطه بالا را نتیجه می گیریم .)

بنابراین $\frac{1}{1+\lambda} a_2 \in A_2 \cap intA_1$ که با فرض تناقض دارد ، پس رابطه (۱) برقرار است که این رابطه هم ارز با عبارت زیر است:

$$\lambda a \notin A_2 - A_1 \quad , \quad \forall a \in int\ kernA_1 \quad \lambda > 0.$$

از آنجایی که $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ داریم $0 \in A_2 - A_1$ ، که با رابطه بالا قبلی می شود $0 \in \partial(A_2 - A_1)$ ، بوضوح $0 \in \partial(A_1 - A_2)$ نیز برقرار است و اثبات تمام است . $\square$

حال به مهم ترین قضیه این بخش یعنی تجزیه نقطه از ستاره گون و تجزیه دو ستاره گون از هم میرسیم ابتدا قضیه ای را که در فضای R^n آمده است می آوریم

قضیه. ۲. ۶.۲ اگر U و V مجموعه‌های ستارگون در R^n باشند به قسمی که $int\ kernU \neq \emptyset$ باشد و $intU \cap V = \emptyset$ آنگاه V و U بوسیله مجموعه ای ازبردارها مانند $F = (l_i)_{i=1,2,...,m}$ به طور ضعیف مجزا میشوند.

اثبات تمامی قضایای معادل مربوط به R^n در [۴] آمده است .

اشکال بعد نمایشی از این جداسازی در فضای R^n توسط بردار ها را نشان می دهد :

قضیه. ۲. ۷.۲ اگر $A_۲$ و $A_۱$ دو مجموعه ی ستاره گون در X با $int\ kerA_۱ \neq \emptyset$ باشند و $intA_۱ \cap A_۲ = \emptyset$ آنگاه $A_۲$ و $A_۱$ بوسیله مجموعه توابع خطی مانند $F = \{f_i\}_{i \in N}$ به طور ضعیف مجزا میشوند .

برهان . اگر $a_۱ \in int\ kernA_۱$ آن گاه $U_۱ = A_۱ - a_۱$ یک مجموعه رادیانت است و $\circ \in int\ kernU_۱$.

(زیرا : فرض کنیم $\circ < \lambda < ۱$ و $x \in U_۱$ داریم $z \in A_۱$ و $x = z - a_۱$ ، پس

$$\lambda x = \lambda z - \lambda a_۱ = \lambda z - [(\lambda - ۱)a_۱ + a_۱] = [\lambda z + (۱ - \lambda)a_۱ - a_۱] \in A_۱ - a_۱ = U_۱$$

پس $U_۱$ یک مجموعه رادیانت است) .

با بکار بردن لم (۲. ۱.۲) خانواده ای از مجموعه های محدب مانند $\{U^t\}_{t \in U_۱}$ را داریم که

$$U_۱ = \cup_{t \in U_۱} U^t \quad ; \quad B(\circ, \epsilon) \subset U^t \quad , \quad \forall t \in U_۱.$$

هم چنین $U_۲ = A_۲ - a_۲$ اگر $a_۲ \in kern\ U_۲$ باشد و $U_۲$ مشابه قبل یک مجموعه رادیانت است به شکل $U_۲ = \cup_{v \in U_۲} D_v$ در صورتی که $D_v = \{\alpha v \ . \ \alpha \in [\circ, ۱]\}$ باشد .

حال اگر $U = U_۱ - U_۲$ آنگاه

$$U = U_۱ - U_۲ = \cup_{t \in U_۱} U^t - \cup_{v \in U_۲} D_v = \cup_{t \in U_۱, v \in U_۲} (U^t - D_v).$$

هر کدام از مجموعه های $U^t - D_v$ (که $(U^t - D_v = \{t - v \quad : \quad t \in U^t \ , \ v \in D_v\}$) محدب هستند وهر کدام $B(\circ, \epsilon)$ را در بر دارند زیرا تفاضلی که به این شکل تعریف شده

یک انتقال مجموعه U^t در راستای خط αV می باشد وU^t ها نیز محدب وشامل گوی $B(\circ,\epsilon)$ بودند .

از لم (۲. ۱.۱) می دانیم که μ_U با $\mu_{\bar{U}}$ یکی می شود و

$$\partial U = \partial \bar{U} = \{x \in X \quad : \quad \mu_u(x) = ۱\} .$$

فرض کنیم $a = a_۲ - a_۱$ و $A_۱ - A_۲ = U_۱ - U_۲ - (a_۲ - a_۱) = U - a$ باشد .

اگر $a \notin U$ آنگاه $\mu_U(a) \geq ۱$ می باشد از این رو داریم $\mu_{\bar{U}}(a) = \mu_U(a) \geq ۱$.

از آن جایی که $\bar{U} = \{x \quad : \quad \mu_U(x) \leq ۱\}$ و $\partial \bar{U} = \{x \quad : \quad \mu_U(x) = ۱\}$ برقرار است داریم $a \notin \bar{U}$ یا $a \in \partial \bar{U}$.

حال اگر $a \in U$ باشد آنگاه

$$\circ \in U - a = (U_۱ + a_۱) - (U_۲ + a_۲) = A_۱ - A_۲.$$

از این رو $A_۱ \cap A_۲ \neq \emptyset$ است و همچنین داشتیم $intA_۱ \cap A_۲ = \emptyset$ از لم (۲. ۲.۳) نتیجه می گیریم که $\circ \in \partial(A_۲ - A_۱) = \partial(U - a)$.

بنا براین a یک نقطه مرزی مجموعه U است که با رابطه قبلی می دانیم که a یک نقطه مرزی برای $\bar{U}$ نیز هست ، پس می توانیم نتیجه بگیریم که در هر حالتی $a \notin \bar{U}$ یا $a \in \partial \bar{U}$.

فرض کنیم $a \notin \bar{U}$ ، با بکار بردن قضیه ۲. ۲.۳ می توانیم a را از مجموعه $\bar{U}$ بوسیله $\{f_i\}_{i\in N}$ به طور اکید مجزا کنیم .

به راحتی می بینیم که همین $\{f_i\}_{i\in N}$ دو مجموعه $A_۲$ و $A_۱$ را نیز از هم به طور ضعیف

مجزا می کنند زیرا برای هر $u \in U$ داریم:

$$f_i(u) < f_i(a).$$

یعنی برای هر $x_1 \in U_1$ و $x_2 \in U_2$ داریم $f_i(x_2 - x_1) < f_i(a_2 - a_1)$ که با توجه به خطی بودن f_i ها داریم $f_(x_2 - a_2) < f_i(x_1 - a_1)$ که $x_2 - a_2 \in U_2 - a_2 = A_2$ و $x_1 - a_1 \in U_1 - a_1 = A_1$ پس هما ن f_i ها مجموعه A_1 و A_2 رانیز از هم مجزا می کند .

حال فرض می کنیم حالت دیگر یعنی $a \in \partial\bar{U}$ اتفاق بیافتد ؛ پس طبق نتایجی که تا الان داشتیم می توانیم مجموعه محافظی مانند $\{f_i\}_{i\in N}$ که $\bar{U}$ را از a بطور ضعیف مجزا کند ، داشته باشیم .

بنابراین A_2 و A_1 نیز بطور ضعیف از هم مجزا می شوند و اثبات تمام است .

□

قضیه. ۲. ۸.۲ اگر V و U مجموعه‌های ستاره گون باشند در X به قسمی که $int\ kernU$ ناتهی باشد $U \cap V \neq \emptyset$ و $intU \cap V = \emptyset$ و $z \in kern\ V - int\ ker\ U$ و$Z = U - V + z$.
آنگاه یک مجموعه محافظ از$F = \{f_i\}_{i\in N}$ برای Z در نقطه z وجود دارد که این مجموعه$\{f_i\}_{i\in N}$ دو مجموعه U, V را نیز به طور ضعیف مجزا می کند بعبارتی احکام زیربرقر ارند:

۱) برای هر $i \in N$ داریم $f_i(z) = 1$ ،

۲) برای هر $u \in U$ و $v \in V$ که $u \neq v$ یک $i \in N$ وجود دارد به گونه ای که $f_i(u) < f_i(v)$.

برهان .

اثبات قسمت ۱: فرض می کنیم $v \in kernV$ و $u \in int\ kernU$ باشد اگر $z = v - u$ داریم $Z = (U - u) - (V - v) = U - V + z$ ، بنا بر این Z که به صورت تفاضل دو مجموعه رادیانت است ، یک مجموعه رادیانت با $\circ \in int\ kern\ Z$ خواهد بود.

به وسیله اثباتی مشابه قضیه (۲. ۷.۲) می توانیم نشان دهیم که $z \notin clZ$ یا $z \in \partial \bar{Z}$ ؛ از آن جایی که $U \cap V \neq \emptyset$ داریم $\circ \in U - V$ پس $z \in U - V + z = Z$ بنا بر این z فقط می تواند یک نقطه مرزی در $\bar{Z}$ با شد، علاوه براین چون $z \in kern\ V - int\ ker\ U$ داریم $\circ = z - z \in z - (kern\ V - int\ ker\ U)$ پس از اینکه $\circ \in int\ kern(U - V) + z = int\ kernZ$ می دانیم $\Delta(Z)$ بر مرز Z منطبق می شود پس $z \in \Delta(Z)$.

بنابراین بوسیله قضیه(۲. ۵.۲) یک مجموعه محافظ مانند $F = \{f_i\}_{i \in N}$ در Z نسبت به z وجود دارد ؛ به آسانی دیده می شود که که خانواده F بطور ضعیف V و U را از هم مجزا می کند.

۲.اگر $u \in U$ و $v \in V$ که $u \neq v$ باشد آنگاه $u - v + z \neq z$ می باشد ، لذا یک $i \in N$ وجود دارد که $f_i(u - v + z) < ۱ = f_i(z)$ ، بنابراین داریم $f_i(u) < f_i(v)$ و این اثبات را تمام می کند . $\square$

۳.۲ مشخصه های بهترین تقریب بوسیله مجموعه های ستارگون

اگر X یک فضای باناخ حقیقی با پایه $\{x_i\}_{i\in N}$ باشد و $U \subset X$ یک ستاره گون فرض شود ، همچنین $x \notin U$ و $r = inf_{u\in U}||x-u||$ آنگاه $U \cap intB(x,r) = \emptyset$. بنابراین به وسیله قضیه۲. ۸.۲ مجموعه U و گوی $B(x,r)$ میتوانند بطور ضعیف از هم مجزا شوند و با استفاده از این نتایج به مشخصات بهترین تقریب روی ستاره گون ها دست پیدا می کنیم.

ابتدا یاد آوری میکنیم که گوی $B(x,r)$ یک ستاره گون است، و همچنین $x \in int\ kern\ B(x,r)$ می باشد زیرا اگر $r > ۰$ و V یک همسایگی برای x باشد به گونه ای که برای هر $\lambda \in [۰,۱]$ و $z \in V$ و $y \in B(x,r)$ داریم :

$$|| \ x - [\lambda z + (۱-\lambda)y] \ \ || =$$

$$||\lambda(x-z) + (۱-\lambda)(x-y)||$$

$$\leq ||\lambda(x-z)|| + ||(۱-\lambda)||x-y||$$

$$\leq \lambda r + (۱-\lambda)r = r.$$

پس برای هر $z \in V$ و $y \in B(x,r)$ نتیجه گرفتیم $\lambda z + (۱-\lambda)y \in B(x,r)$ پس $V \subset kern\ B(x,r)$ وچون V یک همسایگی برای x بود داریم $x \in int\ kern\ B(x,r)$.

تذکر. ۲. ۳. ۲ یکی از ابزارهای مهم مطالعه در مورد $\{f_i\}_{i\in N}$ استفاده از تابع فوق خطی $q(x) = inf_{i\in N} f_i(x)$ می باشد. در [۷] آمده است که اگر U و V توسط خانواده $\{f_i\}_{i\in N}$ از هم مجزا شوند آنگاه تابع فوق مشتق پذیر $\bar{\partial}_q$ در صفر که تعریف می شود $\bar{\partial}_q(\circ) = \{f \in X^* \quad : \quad f(x) \geq q(x) \quad , \forall x \in X\}$ برپوسته محدب $co\{f_i \quad ' : i \in N\}$ منطبق می شود .

قضیه. ۲. ۳. ۹ اگر U یک زیر مجموعه رادیانت در X باشد و $u_\circ \in U$ و $x \notin U$ ، آنگاه احکام زیر برقرارند:

۱) اگر $u_\circ \in P_U(x)$ آنگاه خانواده ای مستقل از توابع خطی مانند $F = \{f_i\}_{i\in N}$ وجود دارد که

- الف— برای هر $i \in N$ داریم $f_i(x) = ۱$ ،
- ب— برای هر $u \in U$ و $v \in B(x,r)$ (هنگامی که $r = d(x,U)$) و $u \neq v$، یک $i \in N$ وجود داشته باشد که $f_i(u) < f_i(v)$.

۲) اگر $F = \{f_i\}_{i\in N}$ وجود داشته باشند که شرط زیر برای آن برقرار باشد آنگاه $u_\circ \in P_U(x)$

- ج — $U \times B(x,r) = \cup_{i\in N}(U \times B(x,r))_i$. (هنگامی که $r = ||x - u_\circ||$ و $((U \times B(x,r))_i = \{(u,v) \in U \times B(x,r) : f_i(u) \leq f_i(v)\}$

شرط بالا معنی می دهد که برای هر $u \in U$ و $v \in V$ که $u \neq v$ یک $i \in N$ وجود داشته باشد که $f_i(u) < f_i(v)$ برقرار باشد .

برهان .

(۱) فرض کنیم $u_\circ \in P_U(x)$ باشد آنگاه داریم $||x-u_\circ|| = r = inf_{u\in U}||x-u||$ که این نتیجه می دهد که $u_\circ \in U\cap B(x,r)$ و $U\cap B(x,r) \neq \emptyset$ ، هم چنین می دانیم گوی $B(x,r)$ ستاره گونی است که $x \in int\ kernB(x,r)$ می باشد.

علاوه بر این $U \subset \{u\in X \quad ||u-x|| \geq r\}$ پس $U\cap intB(x,r) = \emptyset$.

حال فرض می کنیم $Z = U - B(x,r)$ از آنجایی که $\circ \in kernU$ و $x \in int\ kernB(x,r)$ لذا $z_\circ = -x \in kern\ \ U - int\ \ kern\ \ B(x,r)$ می باشد .

پس بوسیله قضیه(۲. ۸.۲) می دانیم خا نواده ای از توابع مستقل خطی مانند $F' = \{f'_i\}_{i\in N}$ وجود دارد که برای هر $i\in N$ داریم $f'_i(-x) = ۱$ ، همچنین برای $v\in B(x,r)$ و $u\in U$ که $u\neq v$ یک $i\in N$ وجود دارد که $f'_i(u) \leq f'_i(v)$.

بنابراین هردوحالت (الف) و(ب) برای $F = \{f_i\}_{i\in N}$ بر قرار است هنگامی که به ازای هر $i\in N$ ، $f_i = -f'_i$ باشد ، .

۲.فرض کنیم شرط(ج) برقرار باشد اگر $q(x) = inf_{i\in N} f_i(x)$ آنگاه شرط (ج) باشرط زیرهم ارز است :

$$q(u-v) \leq \circ \qquad \forall u\in U \ \ , \ \ \forall v\in B(x,r) \qquad (۱)$$

ماابتدا نشان می دهیم که $U\cap intB(x,r) = \emptyset$.

برهان خلف : فرض کنیم که وجود دارد $u\in U$ و $u\in int\ B(x,r)$ بنابراین همسایگی از u زیرمجموعه $B(x,r)$ خواهد بود اگر V یک همسایگی از صفر باشد آن گاه $u-V$ همسایگی از u خواهد بود پس داریم یک همسایگی از صفر مانند V که $u-V \subset B(x,r)$ ، هم چنین از آن جایی که U یک رادیانت فرض شده وهر مجموعه رادیانت صفر را در بر

دارد با رابطه (۱) نتیجه می شود که برای هر $v \in V$ ، $q(v) \leq 0$.

(زیرا $u - v \in u - V \subset B(x, r)$ و $u \in U$ بنابراین $(q(u - (u - v)) = q(v) \leq 0$ و از خاصیت همگن مثبت بودن q نتیجه می گیریم برای هر $x \in X$ ، $q(x) \leq 0$ ، بنابراین $0 \in \bar{\partial} q(0)$ ، با استفاده ازتذکر (۲. ۳. ۲) داریم $0 \in co\{f_i : \ i \in N\}$ ، که این با مستقل خطی بودن $f = \{f_i\}_{i \in N}$ تناقض دارد پس فرض خلف باطل است .

بنابراین نتیجه می گیریم که $U \subset \{u \in : \ ||u - x|| \geq r\}$ و از آنجایی که $r = ||x - u_0||$ و $u_0 \in U$ داریم $r = inf_{u \in U}||x - u||$ پس $u_0 \in P_U(x_0)$ و اثبات تمام است.

□

قضیه. ۲. ۳. ۱۰ اگر A ستاره گونی در X باشد و$x_0 \in A$ و $x \notin A$ ، آنگاه احکام زیر برقرارند:

۱) اگر $x_0 \in P_A(x)$ آنگاه مجموعه محافظ از$F = \{f_i\}_{i \in N}$ وجود دارد که

- الف— برای هر$i \in N$ داریم $f_i(x) = 1$ ،
- ب— برای هر $a \in A$ و $v \in B(x, r)$ که $a \neq v$، یک $i \in N$ وجود داشته باشد که $f_i(a) < f_i(v)$.

۲) اگر $F = \{f_i\}_{i \in N}$ وجود داشته باشند که شرط زیر برای آن برقرار باشد آنگاه $x_0 \in P_A(x)$

• ج — $A \times B(x,r) = \cup_{i\in N}(A \times B(x,r))_i$.

(هنگامیکه $((A \times B(x,r))_i = \{(a,v) \in A \times B(x,r) : f_i(a) \leq f_i(v)\}$

برهان .

(۱) فرض کنیم $x_\circ \in P_A(x)$ باشد آنگاه داریم $r = d(x_\circ, A)$ که این نتیجه می دهد که $x_\circ \in A \cap B(x,r)$ و $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$ ، لذا گوی ستاره گون $B(x,r)$ که $x \in int\ kernB(x,r)$ را داریم .

علاوه بر این $A \subset \{u \in X \quad ||u-x|| \geq r\}$ پس $A \cap intB(x,r) \neq \emptyset$.

حال فرض می کنیم $Z = A - B(x,r)$ از آنجایی که $u \in kern\ A$ و $x \in int\ kernB(x,r)$ لذا $z_\circ = u - x \in kern \quad A - int \quad kern \quad B(x,r)$ می باشد .

پس بوسیله قضیه(۲. ۸.۲) می دانیم خا نواده ای از توابع مستقل خطی مانند $G = \{g_i\}_{i\in N}$ وجود دارد که برای هر $i \in N$ داریم $g_i(z_\circ) = ۱$ ، همچنین برای $v \in B(x,r)$ و $a \in A$ که $a \neq v$ یک $i \in N$ وجود دارد که $g_i(a) \leq g_i(v)$.

حال اگر $u \in kernA$ ثابت و برای هر g_i مقداری مانند c_i داشته باشد یعنی $c_i = g_i(u)$ ، برای هر i تعریف می کنیم $f_i(x) = -g_i(x) + c_i$ ؛ که برای هر f_i داریم $f_i(x) = -g_i(x) + c_i = g_i(u-x) = g_i(z_\circ) = ۱$ ،

بنابراین هردوحالت (الف) و(ب) برای $F = \{f_i\}_{i\in N}$ بر قرار است.

۲—اثبات قسمت دوم مشابه قضیه(۲. ۹.۳) برای رادیانت ها می باشد . □

فصل ۳

تجزیه ستاره گون ها و جداسازی شکلهای نامحدب به ستاره گون ها

در این فصل به دنبال این بوده ایم بحث مشخصه های بهترین تقریب را روی مجموعه های نامحدب بیان کنیم . بدین منظور ابتدا چند قضیه والگوریتم برای جداسازی یک مجموعه نامحدب به ستاره گون ها آورده ایم و سپس از این تجزیه برای بدست آوردن مشخصه های بهترین تقریب روی مجموعه های نامحدب کمک گرفته ایم .

۱.۳ تجزیه یک ستاره گون به مجموعه های محدب

قضیه. ۳. ۱.۱۱ اگر $U \subset X$ باشد و $u \in U$ آنگاه جملات زیر هم ارزند:

۱) خانواده اندیسگذاری مانند I و $\epsilon > 0$ وخانواده ای از مجموعه های محدب مانند $(U_i)_{i\in I}$ وجود دارند که

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i \qquad , B(u,\epsilon) \subset U_i \quad \forall i \in I.$$

۲) U یک شکل ستاره گون است و $u \in int\ kernU$.

برهان . $(2 \to 1)$:

فرض کنیم $z \in B(u,\epsilon)$ و $x \in U$ و $\alpha \in [0,1]$ ، از قسمت (۱) نتیجه می گیریم $i \in I$ وجود دارد که $x \in U_i$ ، از آنجایی که U_i محدب است و $z \in B(u,\epsilon) \subset U_i$ نتیجه می گیریم که $(1-\alpha)z + \alpha x \in U_i \subset U$.

چون برای هر x دلخواه متعلق به U این رابطه برقرار است بنا بر این $z \in kernU$ و چون برای هر $z \in B(u,\epsilon)$ این را داشتیم داریم $B(u,\epsilon) \subset kernU$ پس $u \in int\ kernU$.

$(1 \to 2)$:

از آن جایی که $u \in int\ kernU$ پس حتما وجود دارد $\epsilon > 0$ که $B(u,\epsilon) \subset kernU$.

برای هر $x \in U$ تعریف کنیم $U_x = co(x \cup B(u,\epsilon))$.

$coU = \{\sum_1^n \lambda_i\, x_i \ \mid \ x_i \in U,\ \lambda_i \geq 0, \sum_1^n \lambda_i = 1\ , n \in N\})$ که‌در [۹] اثبات می شود $co(U)$ کوچکترین مجموعه محدب شامل U می باشد .) بنابراین U_x تعریف شده محدب و بسته می باشد ، ازآنجایی که برای هر $x \in U$ داریم $x \in U_x$ بنابراین داریم :

$$U \subset \cup_{x\in U} U_x. \qquad (1)$$

از طرفی برای هر U_x داریم $U_x \subset U$ که نتیجه می دهد :

$$\cup U_x \subset U. \qquad (۲)$$

از رابطه (۱) و(۲) نتیجه می گیریم $\cup U_x = U$ و $B(u, \epsilon) \subset U_x$ بنا بر این اثبات تمام شد .

□

همانطور که از تعریف ستاره گون ها داریم می دانیم که هر مجموعه محدب یک ستاره گون نیز هست ، بالعکس اگر داشته باشیم $U = kernU$ می توانیم نتیجه بگیریم مجموعه U حتما محدب است .

بعنوان یکی از کاربردهای این قضیه ، می توانیم از بحث تقریب بر روی مجموعه های محدب استفاده کرده و به مشخصات بهترین تقریب روی ستاره گون ها دست یابیم .

به دو قضیه زیر که در مورد مجموعه های محدب و اجتماع متناهی از مجموعه های پروکسیمینال آمده است توجه می کنیم .

قضیه. ۳. ۱. ۱۲ هر مجموعه محدب بسته در فضای ضرب داخلی چبیشف است .([۹] قضیه ۳.۵)

قضیه. ۳. ۱. ۱۳ اجتماع متناهی از مجموعه های پروکسیمینال ، پروکسیمینال است .

برهان : اگر $U = \cup_{i\in\{۱,۲,\ldots,n\}} U_i$ باشد و هر کدام از U_i ها محدب باشند و r_i فاصله نقطه

x تا مجموعه U_i در نظر گرفته شود آن گاه $r = min\{r_۱, r_۲, ..., r_m\}$ فاصله مجموعه U از x خواهد بود .

بنابراین اگر تحت شرایطی فضای ما ضرب داخلی باشد و تعداد مجموعه های محدب در هر ستاره گون متناهی شود ، می توانیم نتیجه بگیریم که ستاره گون پروکسیمینال است .

در سیزدهمین کنفرانس ملی انجمن کامپیوتر سال ۱۳۸٦ که در جزیره کیش برگزار شد ، الگوریتم و روشی کاربردی برای تجزیه ستاره گون ها و تجزیه اشکال نامحدب در R^n به نواحی ستاره ای مطرح گردید(ببینید در [۱]) که در زیر به آن اشاره می کنیم :

تعریف. ۳. ۱. ۱۲ اگر A یک چند ضلعی در فضای R^n باشد ، راس هایی که دارای زاویه داخلی بیش از ۱۸۰ درجه باشند را مقعر می نامیم.
(نکته : یک مجموعه محدب ، هیچ راس مقعری ندارد.)

حال اگر یک ستاره گون داشته باشیم با امتداد دادن اضلاع رئوس مقعر ستاره گون می توانیم ستاره گون را به نواحی محدب تجزیه کنیم (می توانیم به اشکالی که در تعریف (۱. ۱. ۹) آمد توجه کنیم.)
با امتداد دادن حد اکثر n که این خطوط نیز با هم تداخل خواهند داشت تکه های محدبی بوجود می آیند که کل مجموعه را پوشش می دهند با کنار هم گذاشتن مناسب

تکه های محدب (نحوه کار در ادامه خواهد آمد) نواحی محدب ماکسیمال بدست می آیند . ناحیه مشترک بین نواحی محدب ماکسیمال مجموعه ، هسته ستاره گون خواهد بود .

هرگاه مجموعه نامحدبی داشته باشیم که با اضافه شدن ناحیه ای مانند c_k به مجموعه ای محدب تبدیل شود به c_k مکمل مجموعه می گوییم .

۲.۳ تجزیه اشکال نامحدب به ستاره گون ها با الگوریتم های متفاوت

حال اگر یک شکل نامحدب داشته باشیم باز هم با همین روش جداسازی را انجام خواهیم داد با این تفاوت که در اشکال غیر ستاره گون اشتراک بین نواحی محدب ماکسیمال یکی نخواهد بود و لزوماً یک هسته نخواهیم داشت .
نواحی محدب ماکسیمال مشترک در هر هسته تشکیل یک ستاره گون می دهند ، پس به دنبال این هستیم که نواحی محدب ماکسیمال با کمترین اشتراک را پیدا کنیم و در نهایت یک پوشش از ستاره گون ها روی مجموعه داشته باشیم .
در فاز اول الگوریتم همه نواحی محدب ماکسیمال را می یابیم برای این منظور ابتدا اضلاع رئوس مقعر را امتداد داده و برای هر راس مقعر v_i تکه های محدب را به دو دسته تقسیم می کنیم ، آنهایی که در راس v_i مشترکند و در امتداد لبه i ام راس v_i هستند و آنهایی که در امتداد لبه $i + 1$ ام هستند ، از اجتماع گروه اول یک ناحیه محدب ماکسیمال بدست می آید ، این کار را برای تمام رئوس مقعر شکل انجام می دهیم و بدین ترتیب یک پوشش از نواحی محدب ماکسیمال برای کل شکل بدست خواهیم آورد .
در فاز بعدی الگوریتم به دنبال پیدا کردن نواحی مشترک مجموعه های محدب های

ماکسیمال خواهیم بود .

الگوریتم پوشش چند ضلعی های ساده توسط نواحی محدب ماکسیمال (فاز اول) :

۱) $n = ۱$ و $M_۱ = \emptyset$ قرار بده .(n شمارنده نواحی محدب ماکسیمال است.)

۲) باامتداد دادن اضلاع رئوس مقعر نواحی محدب را بدست می آوریم ، با فرض این که هر تکه محدب را با C_i نمایش دهیم آنگاه $\cup C_i$ مساوی چند ضلعی ما خواهد بود .

۳) برای هر راس مقعر v_i کارهای زیر را تکرار کن :

(a) نواحی محدبی که در راس v_i مشترکند به دو دسته تقسیم کن : آنهایی که در امتداد لبه ی iام هستند و آنهایی که در امتداد لبه $i + ۱$ ام هستند .

(b) مراحل زیر را برای هر دو دسته اجرا کن :

i. اجتماع همه تکه های محدب را مساوی D_j قرار بده و این تکه ها را تیک سفید بزن .

ii. مراحل زیر را تا وقتی که همه همسایه های D_j تیک قرمز نخورده اند ادامه بده .

iii. یکی از همسایه های D_j را که تیک قرمز نخورده است مانند C_k انتخاب کن.

iv. اگر اجتماع D_j و C_k محدب است آن گاه c_k را تیک سفید بزن و $D_j \cup C_k \to D_j$ و برو به ii.

v. اگر $D_j \cup c_k$ تکه مکمل ندارد آنگاه c_k را تیک قرمزبزن و برو به ii.

vi. اگر $D_j \cup c_k$ محدب نشده و تکه مکمل دارد تکه مکمل را به $D_j \cup c_k$ اضافه کن .

vii. اگر $D_j \cup c_k$ محدب است در اینصورت همه تکه های اضافه شده تابحال و c_k را به D_j اضافه کن وکل انها را تیک سفید بزن .و برو به ii.

viii. اکنون D_j یک ناحیه محدب ماکسیمال است ، اگر $D_j \neq M_i$ برای $i = ۱$ تا n آنگاه قرار بده $M_n = D_j$ و $n = n + ۱$.

ix. همه نواحی که تیک قرمز خورده اند پاک کن .

محاسبه اشتراک نواحی محدب ماکسیمال بوسیله الگوریتم تقریبی جانسون[۱] (فاز دوم) :

۱) فرض اینکه X مجموعه همه نواحی محدب ماکسیمال شکل باشد برای هر راس مقعر از هر تکه محدب C_i واقع در X ، مجموعه ای مانند A_i متشکل از تمام نواحی محدب ماکسیمالی که در آن راس مشترکند ایجاد کن مجموعه F را مساوی اجتماع همه A_i ها و Q را مساوی تهی قرار بده .

[۱] Johnson

۲) A_j متعلق به F را پیدا کن و برای هر $i \neq j$ اگر داشته باشیم $|A_i| \leq |A_j|$. آنگاه آن را از F حذف کن و $A_j \cup Q \to Q$.

۳) به ازای هر A_i متعلق به F قرار بده $A_i = A_i - A_j$ و $X = X - A_j$.

۴) اگر F مخالف تهی بود برو به ۲

۵) مجموعه Q را بعنوان یک مولفه ستاره گون از مجموعه اعلام کن .

۶) اگر X مخالف تهی بود برو به ۱.

در این الگوریتم –فاز اول و دوم – تعداد نواحی ستاره ای به دو عامل بستگی دارد: ۱–تعداد نواحی محدب ماکسیمال ۲–کم یا زیاد بودن اشتراکات آنها.
از آن جایی که تجزیه هر شکل به ستاره گون ها در علوم مختلف کاربرد های زیادی دارد روشی دیگر در [۱۳] مربوط به علم گرافیک وعکاسی پیدا نمودیم و در راستای تجزیه هر مجموعه به نواحی ستاره ای مجزا ، به الگوریتم و شیوه ای متفاوت با الگوریتم قبلی رسیدیم که از نظر پیچیدگی در مرتبه پایین تری قرار دارد .

تعاریفی جدید برای این قسمت خواهیم آورد و بعد از آن الگوریتمی برای تجزیه ارائه خواهیم کرد که در آن مجموعه ی نامحدب S را به اجتماعی از ستاره گون های مجزا مانند $\{s_i\}_{i \in T}$ تجزیه خواهیم کرد .

تعریف. ۳. ۱۳.۲ اگر p وq دو نقطه دلخواه در مجموعه S باشند ما می گوییم این دو نقطه قابل دید یکدیگرند (یا p میتواند q را ببیند) اگر $S^c \cap \overline{pq} = \emptyset$ ؛($\overline{pq}$ یعنی پاره خط

واصل بین p و q وS^c یعنی متمم مجموعه S .) رابطه بالا زمانی اتفاق می افتد که پاره خط $\overline{pq}$ از مرز عبور نکند و درون مجموعه قرار گیرد.

مثلا در شکل زیر می گوییم نقطه p و q قابل دید از یکدیگرند .

تعریف. ۳. ۱۴.۲ در مجموعه نامحدب S ، مجموعه تمام نقاط قابل دید توسط نقطه x را با V_x نشان می دهیم و به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$V_x = \{q \in S : \quad \overline{xq} \cap S^c = \emptyset\}.$$

که در شکل بالا ناحیه قابل دید x را با رنگ تیره نشان داده ایم.

لم. ۳. ۴.۲ شکل S یک ستاره گون است اگر وفقط اگر وجود داشته باشد $p \in S$ که $V_p \equiv S$

الگوریتم تجزیه مجموعه نامحدب به ستاره گون های مجزا :

۱) شکل دلخواه U را در نظر بگیر و قرار بده $i = ۱$.

۲) ابتدا x ای را به دلخواه ازدرون مجموعه Uانتخاب کن .

۳) V_x یعنی ناحیه قابل دید x را پیدا کن .

۴) هسته شکل ستاره گون V_x رابیاب .

۵) عنصر جدید y را از هسته V_x انتخاب کن .

٦) ناحیه V_y را بیاب واگر $|V_y| > |V_x|$ آنگاه قرار بده $x = y$ وبرگرد به گام ۴. (منظور از نماد | | اندازه و بزرگی مجموعه است)
در غیر اینصورت برو به مرحله بعد.

۷) حال قرار بده $A_i = V_x$ و$U = U - A_i$ اگر $U \neq \emptyset$ $i = i + ۱$ برگرد به گام ۲
در غیر این صورت الگوریتم تمام است .

ما با این الگوریتم شکل نامحدب خود را به ستاره گون های مجزای A_i تجزیه کردیم و با گذاشتن شرط ۴ و ۵ به کمتر شدن تعداد A_i ها و بزرگتر شدن آنها کمک نمودیم زیرا طبق لم زیر همیشه عناصری که در هسته قرار دارند میدان دید بزرگتری نسبت به عناصر بیرون هسته دارند.

لم. ۳. ۲.۵ اگر مجموعه U و $V_x \subset U$ را فرض کنیم به ازای هر$y \in kern\ V_x$ ناحیه دید مساوی یا بزرگتر خواهد شد.

زیرا: عناصر متعلق به هسته V_x یعنی عناصری که تمام ناحیه V_x را میبینند بنابراین برای $y \in kernV_x$ بدیهاً داریم $V_x \subseteq V_y$ و $|V_x| \leq |V_y|$.

اشکال زیر نمونه هایی از تجزیه به ستاره گون ها در عکاسی می باشند .

در ادامه کار به دنبال این بودیم که الگوریتم مینی مال رابیابیم ، یعنی الگوریتمی که با کمترین تعداد نواحی ستاره ای شکل را بپوشاند . و در این راستای بر حسب تجربه و مثالهای گوناگون به این نتیجه رسیدیم که نقاط گوشه ای هر شکل بیشترین دید را دارند که با اثبات این موضوع الگوریتم قبلی از دو جهت بهبود می یابد:

۱– از نظر سرعت اجرای الگوریتم زیرا در گام ۲ دیگر نیازی نیست تمام نقاط مجموعه بررسی شود.

۲– از نظر کمتر بودن تعداد نواحی ستاره ای زیرا هر نقطه گوشه ای باناحیه دید بزرگتر منجر به پوشاندن قسمت بزرگتری از مجموعه و در نتیجه کمتر شدن تعداد نواحی ستاره ای پوشاننده می شود .

بنابراین الگوریتم کاراتر زیر را ارائه دادیم :

الگوریتم بهبود یافته تجزیه مجموعه نامحدب به ستاره گون های مجزا :

۱) چند ضلعی M را در نظر بگیر و قرار بده $j = ۱$ و $U = M$.

۲) تمام نقاط گوشه ای U را بیاب و تعداد آن را در n قرار بده و $V_{max} = \emptyset$ (رئوس را با $x_۱, x_۲, ..., x_n$ نمایش می دهیم).

۳) اگر $n \neq ۱$ گام های زیر را برای $i = ۱$ تا n تکرار کن در غیر اینصورت برو به٦ .

(a) ناحیه قابل دید x_i را بیاب .

(b) اگر $|V_{x_i}| < |V_{max}|$ آنگاه $V_{max} = V_{x_i}$.

۴) اگر $U - V_{max} = \emptyset$ برو به ٦.

۵) هسته V_{max} را بیاب و اگر $V_{max} \neq U$ آن گاه $U = kern\ V_{max}$ و برو به گام۲ .

٦) قرار بده $A_j = V_{max}$ و $j = j + ۱$.

۷) اگر $M - A_j \neq \emptyset$ آنگاه $U = M - A_j{}^{\circ}$ و برو به گام ۲.

۸) A_j ها را بعنوان مولفه های ستاره گون و j رابا نام تعداد مولفه های ستاره گون چاپ کن .

۳.۳ بهترین تقریب در مجموعه های تجزیه شده به ستاره گون ها

همان طور که در یاد آوری (۲. ۳.۲) اشاره نمودیم یکی از ابزار مهم مطالعه در مورد $\{f_i\}_{i\in N}$ استفاده از تابع فوق خطی $q(x) = inf_{i\in N} f_i(x)$ می باشد . حال اگر بخواهیم از نتایج تجزیه الگوریتم های فصل ۳ برای بدست آوردن مشخصه ی عنصر بهترین تقریب مجموعه های نامحدب تجزیه شده به نواحی ستاره ای استفاده کنیم می بایست با خانواده ای از توابع فوق خطی سروکار داشته باشیم. پس ابتدا تابع فوق خطی را تعریف کرده و بعد از آن برخی از قضایای اثبات شده در فصل ۲ را با تابع فوق خطی $q(x)$ باز نویسی می کنیم.

تعریف. ۳. ۱۵.۳ اگر X یک فضای خطی نرمدار باشد تابع $q : X \to R$ یک تابع فوق خطی نامیده می شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$q(x) + q(y) \leq q(x + y) \quad \forall x, y \in X,$$

$$q(\alpha x) = \alpha q(x) \quad \forall \alpha \in R.$$

خانواده تمام توابع فوق خطی را با L^c نشان می دهیم .

تعریف. ۳. ۱۶.۳ به تابع $q \in L^c$ نا منفی می گوییم اگر وجود داشته باشد $x \in X$ ای که $q(x) > 0$.

با این فرض قضیه های (۲. ۷.۲) و(۲. ۸.۲) از بخش ۲ به صورت زیر تغییر می یابند.

قضیه. ۳. ۱۴.۳ اگر U و V مجموعه‌های ستارگون باشند به قسمی که $int\ kernU \neq \emptyset$ و $intU \cap V = \emptyset$ آنگاه برای V و U تابع فوق خطی مانند q وجود دارد که

$$q(u-v) < 0 \qquad \forall \ \ u \in U \ \ , \ \ \forall v \in V.$$

قضیه. ۳. ۱۵.۳ اکر V و U مجموعه‌های ستاره گون باشند در X به قسمی که $int\ kernU$ ناتهی باشد $U \cap V \neq \emptyset$ و $intU \cap V = \emptyset$ و $z \in kern\ V - int\ ker\ U$ و $Z = U - V + z$. آنگاه یک تابع فوق خطی مانند $p \in L^c$ وجود دارد که

۱) $p(z) = 1$،

۲) برای هر $u \in U$ و $v \in V$ که $u \neq v$ وجود دارد $p \in L^c$ به قسمی که $p(u-v) < 0$.

قضیه. ۳. ۱۶.۳ اگر U ستاره گونی در X باشد و $x_\circ \in U$ و $x \notin U$ ، آنگاه احکام زیر برقرارند:

۱) اگر $x_\circ \in P_U(x)$ آنگاه‌تابع فوق خطی مانند $q \in L^c$ وجود دارد که

- الف—همواره $q(x) = 1$،
- ب— برای هر $u \in U$ و $v \in B(x,r)$ که $u \neq v$ داشته باشیم $q(u-v) < 0$ (منظور از r فاصله $x_\circ$ از مجموعه U می باشد یعنی $r = d(x_\circ, U)$).

۲) اگر $p \in L^c$ وجود داشته باشند که شرط بالا برای آن برقرار باشد آنگاه $x_\circ \in P_U(x)$.

که این قضیه نیز معادل با قضیه(۲. ۳.۱۰) می باشد .

حال اگر مجموعه U توسط الگوریتم های ذکر شده به نواحی ستاره ای تجزیه شود یعنی داشته باشیم خانواده $\{A_i\}_{i\in I}$ از مجموعه ستاره گون های مجزا که $U = \cup_{i\in I} A_i$ ، طبق قضیه(۳. ١٦.۳) هر کدام از این ستاره گون ها دارای عنصر بهترین تقریب خواهند بود اگر تابع فوق خطی نامنفی مانند p_i وجود داشته باشد که

$$p_i(u-v) < 0 \quad ,\forall u \in A_i \quad , \quad v \in B(x,r_i)$$

حال می توانیم از قضیه (۳. ۱.۱۳) در صورت متناهی بودن ستاره گون ها استفاده نموده وبرای مشخصه عنصر بهترین تقریب U قضیه زیر را داشته باشیم .

قضیه. ۳. ۱۷.۳ فرض می کنیم مجموعه $U \subset X$ توسط تعدادی متناهی ستاره گون مانند A_i پوشیده شود یعنی $U = \cup_{i=1}^{m} A_i$ و $x \notin U$ در این صورت اگر خانواده ای از توابع فوق خطی نامنفی مانند $\{p_i\}_{i=1}^{m}$ وجود داشته باشد که

$$\forall u \in A_i \quad , \quad \forall v \in B(x,r_i) \quad , \quad \exists P_i \in \{p_i\}_{i=1,2,\ldots,m} \quad , \quad P_i(u_i - v) < 0 \quad .$$

آنگاه مجموعه U پروکسیمینال است (در این قضیه $r_i = d(x, A_i)$ فرض شده است و کمترین فاصله x از مجموعه U برابر با$r = min\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ خواهد بود).

فصل ۴

بهترین تقریب روی مجموعه های بسته توسط مخروط های ستاره گون

در این فصل با ابزاری متفاوت از تجزیه ، به بحث بهترین تقریب روی برخی مجموعه های نامحدب توسط مخروط های ستاره گون می پردازیم . در این فصل می خواهیم نظریه بهترین تقریب را به مجموعه های بسته در فضاهای نرم دار شده توسط مخروطهای ستاره گون گسترش دهیم .
همانطور که در قسمت تاریخچه بیان شد پیش از این بر روی مجموعه های رو به پایین و رو به بالا مطالعه شده (به تعاریف وقضایای مربوط به آن اشاره خواهیم کرد) و پرو کسیمینال بودن آنها در صورت بسته بودن شان در[٦] اثبات گردیده است .
ما در این جا با تعریف نرم هایی وابسته به مخروط های K_i و K_* و K مجموعه های نسبتاً روبه پایین ونسبتاً رو به بالا را تعریف می کنیم که رده این مجموعه ها بسیار گسترده تر از قبل می باشد و حتی شامل آنها نیز می شود. همچنین اکثر قضایای مجموعه های

روبه پایین و رو به بالا نیز برای آنها صادقند که برخی از اثبات ها را در اینجا ذکر کرده ایم .
علاوه براین توسط دو مجموعه Z_+ و Z_- که به ترتیب یک مخروط نسبتاً رو به پایین و نسبتاً رو به بالا می باشند مجموعه های U_* و U^* شامل U را تعریف می کنیم و پیدا کردن تقریب روی U را تحت شرایطی به U_* یا U^* تقلیل می دهیم .

۱.۴ مخروط های نسبتاً رو به بالا و نسبتاً رو به پایین

گزاره. ۴. ۱.۱ اگر K یک مخروط ستاره گون باشد و $k_* = kern\ K$ آنگاه k_* نیز یک مخروط است .

برهان : اگر $u \in K_*$ و $\lambda > 0$ و $x \in K$ باشد داریم $x' = \frac{x}{\lambda} \in K$ بنابر این طبق تعریف هسته برای هر $\alpha \in [0, 1]$ داریم :

$$(1 - \alpha)u + \alpha x' \in K$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \alpha)\lambda u + \lambda\alpha x' \in K$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \alpha)\lambda u + \alpha x \in K.$$

برای هر $x \in k$ رابطه بالا برقرار است بنابراین طبق تعریف هسته نتیجه می گیریم که $\lambda u \in kern\ K = k_*$ ، پس k_* یک مخروطاست .

قضیه. ۴. ۱.۱ اگر K یک مخروط ستاره گون باشد و $K = \cup_{i\in I} K_i$ و $K_* = \cap_{i\in I} K_i$ به قسمی که هر K_i یک مخروط محدب باشد آن گاه داریم $K_* \subset kernK$.

برهان . فرض کنیم $u \in K_*$ و $x \in K$ از آن جایی که $K = \cup_{i\in I} K_i$ داریم یک K_j که $x \in K_j$ ، پس برای هر $\alpha \in [\text{۰}, \text{۱}]$ داریم $\alpha x + (\text{۱} - \alpha)u \in K_j \subset K$ ، که این نتیجه می دهد $u \in kernK$ ؛ چون برای هر $u \in K_*$ این رابطه را داریم نتیجه می گیریم $K_* \subset kernK$.

□

تعریف. ۴. ۱.۱ اگر K یک مخروط ستاره گون بسته باشد و $u \in int\ kernK$ تابع زیر را تعریف می کنیم:

$$P_{u,K}(x) = inf\{\lambda \in R \ \ , \ \ \lambda u - x \in K\}.$$

در [۵] نشان داده شده است که $p_{u,k}$ یک تابع هومومورفیسم ، مثبت و درجه اول است و همچنین رابطه زیر برای آن برقرار است :

$$p_{u,k}(x-\gamma u)=\mu_{K-u}(\gamma u-x).$$

زیرا :

$$\mu_{K-u}(\gamma u-x)=inf\{\lambda\in R \quad , \quad \gamma u-x\in\lambda(K-u)\}$$

$$=inf\{\lambda\in R \quad , \quad \gamma u-x+\lambda u\in\lambda K\} \ .$$

از آن جایی که $\lambda K=K$ داریم :

$$=inf\{\lambda\in R \quad , \quad \gamma u-x+\lambda u\in K\}=p_{u,k}(x-\gamma u).$$

هم چنین در [۵] روابط زیر اثبات شده است :

قضیه. ۴. ۱. ۲ اگر K یک مخروط ستاره گون باشد و $u\in int\ kern\ U$ آنگاه

$$p_{u,k}(x+\lambda u)=P_{u,k}(x)+\lambda \qquad , \qquad \lambda\in R.$$

$$\{x: \quad P_{u,k}(x)\leq\lambda\}=\lambda u-K \qquad , \qquad \lambda\in R.$$

قضیه. ۴. ۳.۱ اگر $(K_i)_{i\in I}$ یک خانواده از مخروط های ستاره گون بسته باشند با $\cap int\ kern\ K_i \neq \emptyset$ و $K_* = \cap K_i$ و $K = \cup K_i$ و $u \in \cap int\ kern\ K_i$ آنگاه

$$P_{u,k}(x) = inf_{i\in I} P_{u,k_i}(x).$$

$$P_{u,k_*}(x) = sup\ _{i\in I} P_{u,k_i}(x).$$

برهان . اگر $u \in int\ kern\ k$ و K یک مخروط فرض شود داریم :

$$\{\lambda \in R\ \ ,\ \ \lambda u - x \in K\} = \{\lambda \in R\ \ ,\ \ \lambda u \in x + K\}$$

$$= \{\lambda \in R\ \ ,\ \ \lambda u \in x + \cup K_i\} = \{\lambda \in R\ \ ,\ \ \lambda u \in \cup(x + K_i)\}$$

$$= \cup\{\lambda \in R\ \ ,\ \ \lambda u \in x + K_i\}.$$

بنابراین اگر از طرفین رابطه اینفیموم بگیریم، نتیجه می شود :

$$Pu,k(x) = inf\{\lambda \in R\ ,\ \lambda u - x \in K\} = inf\cup\{\lambda \in R\ ,\ \lambda u \in x + K_i\} = inf Pu,k_i(x).$$

قسمت دوم نیز به طریقی مشابه ثابت می شود . □

مخروط ستاره گون دلخواه K روی فضای نرم دار X یک رابطه $\geq_k$ ایجاد می کند هنگامی که :

$$y \geq_k x \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in K.$$

همچنین می گوییم $y <_k x \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in K - \{0\}$.

برای مثال از روی شکل بعد می بینیم که در فضای R^2 ، چه عناصری نسبت به مخروط Q بزرگتر از x هستند :

بوضوح این رابطه ، جزیا مرتب می باشد .

برای اینکه نرم تعریف شده ما خوش تعریف باشد مخروط ها را نو ک دار(یعنی $K \cap -K = \{0\}$) تعریف می کنیم، یعنی هیچ گاه همزمان برای x و y متمایز $x <_k y$ و $x >_k y$ را نخواهیم داشت زیرا حالت های زیر با هم رخ نخواهند داد.

$$y - x \in -K \quad \Rightarrow \quad y - x \notin K.$$

اگر $K = \cup K_i$ و K_i ها مخروط های محدبی باشند که هر کدام از آن ها رابطه $\leq_{k_i}$ رابر روی فضای X القا کنند این رابطه همان رابطه القا شده توسط مخروط K می باشد ، یعنی داریم:

$$x \leq_k y \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists i \in I \ , \ \ x \leq_{k_i} y.$$

در ادامه این بحث فرض می کنیم فضای X ما به یک مخروط محدب ستاره گون مانند K با $int\ kernK \neq \emptyset$ مجهز است و $K = \cup_{i\in I} K_i$ که K_i ها مخروط های نوک دار ، توپر ، بسته هستند و $K_* = \cap k_i$ با $۱ \in int\ K_*$ فرض شده است ، بنابراین برای هر $i \in I$ داریم $۱ \in K_i$ ؛ در ادامه بحث ما موارد زیر را بصورت قرارداد می پذیریم :

$$P_{۱,K} = P \quad , \quad P_{۱,K_i} = P_i \quad , \quad P_{۱,K_*} = P_* \ .$$

یعنی از قضیه (۴. ۱.۳) استنباط کردیم که :

$$p(x) = inf_{i\in I} p_i(x) \qquad , \qquad p_*(x) = sup_{i\in I} p_i(x).$$

در اینجا منظورمان از گوی B_i مجموعه زیر است :

$$B_i = \{x \in X \quad : \quad -۱ \leq_{K_i} x \leq_{K_i} +۱\}. \qquad (۴.۱)$$

که B_i گوی یکه با نرم $||.||_i$ می باشد که نرم $||.||$ بر روی فضا به شکل زیر است :

$$||x||_i = max(p_i(x) \quad , \quad p_i(-x)).$$

$$||x||_* = sup\ _{i\in I} ||x||_i.$$

لم. ۴.۱.۱ برای هر $x \neq 0$ داریم $||x||_* < \infty$.

برهان .

$$1 \in intK_* \subset intK_i$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \qquad 1 + \varepsilon\ B \subset K_i\ , \quad (B = \{x \in X \quad ||x|| < 1\})$$

$$\Rightarrow x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x' = \tfrac{\varepsilon}{||x||} x \in \varepsilon B$$

$$\Rightarrow 1 + x' \in 1 + \varepsilon B \subset K_i \quad \to \quad 1 + x' \in K_i$$

$$\Rightarrow P_i(-x') = inf\{\lambda \in R \ : \ \lambda 1 + x' \in K_i\} \leq 1$$

$$\Rightarrow -x \in \varepsilon B \quad \to \quad 1 - x' \in \varepsilon B$$

$$\Rightarrow P_i(x') = inf\{\lambda \in R \ : \ \lambda 1 - x' \in K_i\} \leq 1$$

$$\Rightarrow P_i(x) = P_i(\tfrac{||x||x'}{\varepsilon}) = \tfrac{||x||}{\varepsilon} P_i(x') \leq \tfrac{||x||}{\varepsilon}.$$

در نتیجه داریم :

$$\Rightarrow ||x||_* = sup||x||_i = sup_{i \in I} \ max(P_i(x), P_i(-x)) \leq \frac{||x||}{\varepsilon} < +\infty.$$

□

همچنین داریم $||.||_*$ یک نرم روی فضای X است به‌صورت

$$||x||_* = max(P_*(x) \ , \ P_*(-x)).$$

برای گوی به مرکز X وشعاع r داریم

$$B_i(x,r) := \{y \in X \quad : \quad ||y-x||_i \leq r\}$$

$$= \{y \in X \quad : \quad x - r\mathbf{1} \leq_{K_i} y \leq_{K_i} x + r\mathbf{1}\}.$$

$$B(x,r) := \{y \in X \quad : \quad ||y-x||_* \leq r\}$$

$$= \{y \in X \quad : \quad x - r\mathbf{1} \leq_{K_*} y \leq_{K_*} x + r\mathbf{1}\}.$$

از این روابط نتیجه می شود که

$$B(x,r) = \cap B_i(x,r).$$

زیرا داریم : $x \leq_{K_*} y$ اگر وتنها اگر برای هر $i \in I$ داشته باشیم $x \leq_{k_i} y$.

مثال . ۴. ۱. ۱ در اینجا $X = R^{\mathbf{2}}$ فرض می کنیم ومجموعه های زیر را تعریف می کنیم :

$$A = \{(x,y) \in X \quad : \quad x \geq 0 \ , \quad y \geq \mathbf{2}x\}.$$

$$B = \{(x,y) \in X \quad : \quad x \leq 0 \ , \quad y \geq \frac{x}{\mathbf{2}}\}.$$

$$C = \{(x,y) \in X \quad : \quad x \geq 0 \ , \quad y \geq \frac{-x}{\mathbf{2}}\}.$$

$$D = \{(x,y) \in X \quad : \quad x \leq 0 \ , \quad y \geq -\mathbf{2}x\}.$$

با توجه به مجموعه های بالا مخروطهای زیر را در نظر می گیریم :

$$K_۱ = A \cup B \qquad , \qquad K_۲ = C \cup D.$$

$$K = K_۱ \cup K_۲ \qquad , \qquad K_* = k_۱ \cap K_۲ = A \cup D.$$

همان طور که می بینیم حتی ممکن است $K_۲$ و $K_۱$ و K_* محدب باشند ، در حالی که K محدب نیست .

اگر $1 = (0, 1)$ (عنصر یکه) باشد داریم :

$$P_*(x) = P_{۱,K_*}(x) = max_{i=۱,۲}(P_۱(x)\ ,\ P_۲(x)).$$

که مجموعه های $P_۱(x)$ و $P_۲(x)$ برابرند با :

$$P_۱(x) = inf\{\lambda \mid \ \lambda(۰, ۱) - (x, y) \in A \cup B\}$$

$$= inf\{\lambda \mid \ (-x\ ,\ \lambda - y) \in A \cup B\}.$$

و

$$P_۲(x) = inf\{\lambda \mid \ \lambda(۰, ۱) - (x, y) \in C \cup D\}$$

$$= inf\{\lambda \mid \ (-x\ ,\ \lambda - y) \in C \cup D\}.$$

با توجه به مجموعه های تعریف شده بالا داریم :

$$P_*(x) = max(y - ۲x \ \ ,\ \ y + ۲x) \qquad \forall (x, y) \in X\ .$$

$$||x||_* = |y| + ۲|x| \qquad \forall (x,y) \in X.$$

تعریف. ۴. ۱. ۲ به $U \subset X$ مجموعه رو به پایین می گوییم اگر رابطه زیر را داشته باشیم :

$$\forall u \in U \ \ , \ \ x \leq u \quad \Rightarrow \qquad x \in U.$$

همچنین به مجموعه $U \subset X$ رو به بالا می گوییم اگر رابطه زیر را داشته باشیم :

$$\forall u \in U \ \ , \ \ x \geq u \quad \Rightarrow x \in U.$$

قضیه. ۴. ۱. ۴ اگر مجموعه W یک مجموعه رو به پایین باشد آنگاه :

۱) اگر $x \in W$ آنگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ داریم $x - \varepsilon ۱ \in intW$ ،

۲) $intW = \{x \in X \ \ : \ \ \exists \varepsilon > ۰ \ \ , \ \ x + \varepsilon ۱ \in W\}$.

برهان .

۱) اثبات قسمت (۱):

فرض می کنیم $x \in W$ و $\varepsilon > ۰$ یک همسایگی باز برای $x - \varepsilon ۱$ مانند زیر تعریف

میکنیم:

$$V = \{y \in X \quad ||y - (x - \varepsilon ۱)||_* < \varepsilon\}.$$

پس داریم :

$$V = \{y \in X \quad : \quad x - \varepsilon ۱ - \varepsilon ۱ <_{K_*} y <_{K_*} x - \varepsilon ۱ + \varepsilon ۱\}$$

$$= \{y \in X \quad : \quad x - ۲\varepsilon ۱ <_{K_*} y <_{K_*} x\}$$

$$\subset \{y \in X \quad : \quad x - ۲\varepsilon ۱ <_K y <_K x\}.$$

واز آنجایی که مجموعه W را رو به پایین فرض کرده بودیم نتیجه میگیریم $V \subset W$. بنابراین با وجود این همسایگی نتیجه می شود : $x - \varepsilon ۱ \in intW$.

۲) اثبات قسمت(۲):

اگر $x \in intW$ باشد همسایگی $B(x, \varepsilon_۰)$ حول x وجود دارد که زیر مجموعه W باشد .

از آنجاکه داشتیم $B(x, \epsilon_۰) = \{y \quad : \quad x - \varepsilon_۰ ۱ \leq y \leq x + \varepsilon_۰\}$ ؛ پس داریم:

$$x + \varepsilon_۰\ ۱ \in B(x, \varepsilon_۰) \quad \Rightarrow \quad x + \varepsilon_۰\ ۱ \in W$$

$$\Rightarrow x \in \{x \in X \quad : \ \exists \varepsilon > ۰ \quad , \ x + \varepsilon ۱ \in W \quad \}.$$

و بالعکس اگر فرض کنیم که $\varepsilon > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که $x + \varepsilon ۱ \in W$ ، بوسیله قسمت اول همین قضیه داریم $x = x + \varepsilon ۱ - \varepsilon ۱ \in intW$ ؛ بنابراین داریم :

$$intW = \{x \in X \quad : \quad \exists \varepsilon > 0 \quad , \quad x + \varepsilon 1 \in W\}.$$

□

تمامی قضایای این بخش که در رابطه با مجموعه های رو به پایین آمد در [٦] اثبات شده اند.

لم. ۴. ۱. ۲ اگر W یک زیر مجموعه رو به پایین و بسته در X باشد آنگاه داریم :
$w \in \partial W$ اگر و فقط اگربرای هر $0 < \lambda$ داشته باشیم $\lambda 1 + w \notin W$.

قضیه. ۴. ۱. ۵ هر زیر مجموعه بسته و رو به پایین مانند W در فضای X یک پروکسیمینال است و اگر $r = d(x_0, W)$ داریم $w_0 = x_0 - r1 \in P_W(x_0)$.

برهان . اگر $x_0 \in X - W$ را دلخواه فرض کنیم و

$$r = d(x_0, W) = inf_{w \in W} ||x_0 - w|| > 0.$$

که صریحاً نتیجه می شود:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists w_1 \in W \quad , \; ||x_0 - w_1||_* < r + \varepsilon.$$

$$\to x_\circ - (r+\varepsilon)\mathbf{1} \leq w_\mathbf{1}.$$

قرار می دهیم $w_\circ = x_\circ - r\mathbf{1}$ آنگاه داریم

$$||x_- w_\circ||_* = ||r\mathbf{1}||_* = r = d(x_\circ, w).$$

$$w_\circ - \varepsilon\mathbf{1} = x_\circ - r\mathbf{1} - \varepsilon\mathbf{1} \leq w_\mathbf{1}.$$

از آن جایی که W یک مجموعه رو به پایین فرض شده بود و$w_\mathbf{1} \in W$ سریعا نتیجه میگیریم که برای هر $\varepsilon > \circ$ و $w_\circ - \varepsilon\mathbf{1} \in W$.

به علت فرض بسته بودن مجموعه W و دلخواه بودن ε داریم $w_\circ \in W$. بنابراین $w_\circ \in P_W(x_\circ)$ ، اگر $x_\circ \in W$ باشد آنگاه $w_\circ = x_\circ$ و $P_W(x_\circ) = \{x_\circ\}$ خواهد بود .

□

یک عنصر مانند u را کمترین عضو مجموعه U می گوییم اگر برای هر $u' \in U$ داشته باشیم $u \leq_k u'$ یعنی $U \subset u + K$.

(زیرا : $u \leq_k u'$ یعنی $u' - u \in K$ چون برای هر $u' \in U$ این را داریم نتیجه میگیریم : $U - u \subset K$).

لم. ۴. ۱. ۳ اگر W یک مجموعه رو به پایین و بسته باشد و $x_\circ \in X$ در این صورت مجموعه ما دارای کمترین عضو مانند $w_\circ = min\ P_W(x_\circ)$ برای $P_W(x_\circ)$ می باشد به عبارتی اگر $r = d(x_\circ, W)$ آنگاه $w_\circ = x_\circ - r\mathbf{1}$.

نتیجه . ۴. ۱.۱ اگر W یک مجموعه رو به پایین وبسته باشد آنگاه

$$d(x,W) = min\{\lambda \geq 0 \quad : \quad x - \lambda 1 \in W\}.$$

از نتیجه قبلی می توانیم برای جستجوی بهترین تقریب در مجموعه های بسته وروبه پایین استفاده کرده ومسایل بهینه سازی را به مسایل تک بعدی (مینی موم سازی λ) با حل آسان تر است تبدیل کنیم ، زیرا حل یک مساله بهینه سازی تک بعدی بسیار آسان تر از مسایل کلی تر است ؛ مثلا حل مساله با استفاده از روش دودویی :

۱) r_1, π_1 را به گونه ای انتخاب کن که $x - \pi_1 1 \notin W$ و $x - r_1 1 \in W$ و $k = 1$ ،

۲) اگر $k \geq 1$ فرض می کنیم $x - \pi_k 1 \notin W$ و $x - r_k 1 \in W$ ،

۳) قرار بده $p_k = 1/2(r_k + \pi_k)$،

۴) اگر $x - p_k 1 \in W$ آنگاه $r_{k+1} = p_k$ و $\pi_{k+1} = \pi_k$،
اگر $x - p_k 1 \notin W$ آنگاه $r_{k+1} = r_k$ و $\pi_{k+1} = p_k$،

۵) برگرد به گام ۲.

با اجرای این الگوریتم در پایان داریم $r = lim r_k = lim \pi_k$ که r بهترین مقدار برای مساله بهینه ماست .

تمامی قضایای ذکر شده میتوانند عیناً برای مجموعه های رو به بالا نیز بیان شوند ، بدیهاً V یک مجموعه روبه بالا است اگرو تنها اگر $-V$ یک مجموعه رو به پایین باشد.

قضیه. ۴. ۱. ٦ هر زیر مجموعه بسته و رو به بالا در فضای X ، پروکسیمینال است و اگر $r = d(x_\circ, V)$ باشد آنگاه $v_\circ = x_\circ + r\mathbf{1}$ بزرگترین عضو مجموعه$P_V(x_\circ)$ می باشد و

$$d(x, V) = min\{\lambda \geq \circ \quad , x + \lambda \mathbf{1} \in V\}.$$

تعریف. ۴. ۱. ۳ زیر مجموعه U از فضای X را نسبتاً رو به پایین می گوییم اگر نسبت به رابطه مرتب ایجاد شده توسط K_* رو به پایین باشد.

تعریف. ۴. ۱. ۴ زیر مجموعه U از فضای X را نسبتاً رو به بالا می گوییم اگر نسبت به رابطه مرتب ایجاد شده توسط K_* رو به بالا باشد.

بوضوح هر مجموعه روبه پایین (رو به بالا) یک مجموعه نسبتاً رو به پایین (نسبتاً رو به بالا) نیز هست ، با این تفاوت که در این مجموعه ها رابطه " $\geq$ " فقط توسط

یک مخروط خاص در نظر گرفته می شود مثلا در فضای $R^۲$ این مخروط همان ربع اول مختصات است ؛ شکل های زیر مجموعه های رو به پایین در فضای $R^۲$ می باشد.

اما حال نسبت به مخرو های نوکدار وتوپر Q ، مجموعه های نسبتاً رو به پایین زیر را داریم :

همانطور که می بینیم این مجموعه ها بسیار گسترده تر از قبلی ها هستند و چون تنها تفاوت در تبدیل " $\geq$ " به " $\geq_K$ " می باشد تمام اثبات ها وقضایای مجموعه های رو به پایین برای مجموعه ها ی نسبتا رو به پایین نیز صادقند بنابراین این مجموعه ها نیز در صورت بسته بودن پروکسیمینال خواهند بود .

۲.۴ مجموعه های Z_- , Z_+

تابع s را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$s(x) = ۱/۲[P_*(x) - p_*(-x)].$$

که این تابع خواص بدیهی زیر را دارد(این خواص را از P_* که در ابتدای فصل معرفی کردیم به ارث می برد):

۱) s یک تابع همگن ودرجه اول است یعنی برای هر x و $\lambda \in R$ داریم : $s(\lambda x) = \lambda s(x)$.

۲) s نسبت به رابطه تولید شده توسط k_* یک تابع افزایشی است .

$$x \leq_{k_*} y \quad \Rightarrow \quad s(x) \leq s(y) \ .$$

۳) s یک تابع همگن جمعی است یعنی برای هر x و $\lambda \in R$ داریم :

$$s(x + \lambda ۱) = s(x) + \lambda \ .$$

۴) s یک تابع پیوسته است .

هم چنین برای ادامه کارمان به مجموعه های هم تراز زیر احتیاج داریم :

$$Z_+ = \{x \in X \quad : \quad s(x) \geq \circ\} \qquad , \qquad Z_- = \{x \in X \quad : \quad s(x) \leq \circ\}$$

وبخاطر افزایشی بودن s داریم $-K_* \subset Z_-$ و $K_* \subset Z_+$.

(زیرا $s(x) \geq \circ = s(\circ)$ که این ایجاب می کند $x >_{K_*} \circ$ که با توجه به رابطه ای که ما تعریف کردیم $x \in K_*$).

بوضوح $Z_+ \cup Z_- = X$ بنابراین داریم :

$$x \in Z_+ \quad \leftrightarrow \quad P_*(x) \geq P_*(-x) \quad \leftrightarrow \quad P_*(x) = ||x||_*.$$

$$x \in Z_- \quad \leftrightarrow \quad P_*(x) \leq P_*(-x) \quad \leftrightarrow \quad P_*(-x) = ||x||_*.$$

همچنین داریم $Z_- = -Z_+$ و اگر $Z_\circ = \{x \in X \quad : \quad s(x) = \circ\}$ باشد ، آنگاه $Z_+ \cap Z_- = Z_\circ$ و چون s پیوسته فرض شده پس Z_- و Z_+ بسته خواهند بود ، همچنین طبق تعریف Z_- و Z_+ شکل مخروطی دارند .

لم. ۴. ۲. ۴ مجموعه های Z_- و Z_+ به ترتیب نسبتاً رو به پایین و نسبتاً رو به بالا می باشند.

برهان . اثبات رو به پایین بودن Z_- :

اگر $x \in Z_-$ و x $<_{K_*}$ y فرض شود داریم $s(y) < s(x) \leq 0$ که این نتیجه می دهد $s(y) < 0$ بنابراین $y \in Z_-$.

رو به بالا بودن Z_+ :

اگر $x \in Z_+$ و x $>_{K_*}$ y فرض شود داریم $s(y) > s(x) \geq 0$ که این نتیجه می دهد $s(y) > 0$ بنابراین $y \in Z_+$.

□

مثال . ۴. ۲. ۲ اگر X, K همان هایی باشند که در مثال ۴. ۱. ۱ آمد داریم : چون $P_*(x) = max(y - 2x \ , \ y + 2x)$ و $P_*(x) = max(y - 2x \ , \ y + 2x)$ بنابراین

$$s(x, y) = y \ \ ; \qquad \forall (x, y) \in X.$$

$$z_+ = \{(x, y) \in X \qquad y \geq 0\},$$

$$z_- = \{(x, y) \in X \qquad y \leq 0\},$$

$$z_0 = \{(x, y) \in X \qquad y = 0\},$$

حال به مهم ترین قسمت بخش یعنی تقریب روی مجموعه های بسته می رسیم .

اگر $U \subset X$ باشد اشتراک تمام مجموعه های نسبتاً رو به پایین شامل U را را پوسته نسبتاً رو به پایین U نامیده و آن را با U_* نشان میدهیم ، هم چنین اشتراک تمام مجموعه های

نسبتاً رو به بالا شامل U را پوسته نسبتاً رو به بالای U می نامیم و با U^* مشخص می سازیم .
بوضوح U_* کوچکترین مجموعه نسبتا رو به پایین شامل U و U^* نیز کوچکترین مجموعه نسبتا رو به بالای شامل U می باشد.

گزاره. ۴. ۲.۲ اگر $U \subset X$ باشد آنگاه

$$U_* = U - K_* = \{u - v \quad : \quad u \in U \ , \ v \in K_*\}$$

$$U^* = U + K_* = \{u + v \quad : \quad u \in U \ , \ v \in K_*\}$$

برهان . اثبات : باید ثابت کنیم $U - K_*$ کوچکترین مجموعه نسبتا رو به پایین شامل U است .
چون $0 \in K_*$ طبق تعریف مجموعه $U - K_*$ ، حتما شامل خود U هست برای اثبات رو به پایین بودن آن فرض می کنیم $x \in U - K_*$ و $y <_{K_*} x$ باید ثابت کنیم $y \in U - K_*$.
از آنجایی که $x \in U - K_*$ پس وجود دارد $u_1 \in U$ و $k_1 \in K_*$ که $x = u_1 - k_1$ ، بنابراین $u_1 - x = k_1 \in K_*$ طبق تعریف رابطه $u_1 >_{K_*} x$ و چون $y <_{K_*} x$ پس $u_1 > K_* y$ و داریم $y - u_1 \in -K_*$ یعنی $y \in u_1 - K_* \subset U - K_*$ پس $U_* = U - K$ از طرفی چون $U \subset U_*$ و برای هر $k \in K_*$ داریم $U - k \subset U_*$ پس $U - K_* \subset U_*$ واثبات تمام است .

□

قضیه. ۴. ۲. ۷ فرض می کنیم $U \subset X$ باشد

۱) اگر $t \in X$ به گونه ای باشد که $t - U \subset Z_+$ آنگاه داریم $d(t, U) = d(t, U_*)$.

۲) اگر $t \in X$ به گونه ای باشد که $t - U \subset Z_-$ آنگاه داریم $d(t, U) = d(t, U^*)$.

برهان . فقط قسمت اول را اثبات کرده، قسمت دوم بطور مشابه نتیجه میشود .

اگر$r = d(t, U_*)$ از آنجایی که $U \subset U_*$ داریم $r \leq d(t, U)$.

حال عکس این نامساوی را نشان می دهیم ؛ اگر $u_* \in U_*$ دلخواه فرض شود آنگاه بوسیله گزاره (۴. ۲. ۲) می گوییم $v \in K_*$ و $u \in U$ وجود دارد به قسمی که $u_* = u - v$ هم چنین $t - u \in Z_+$ ، و چون P_* یک تابع افزایشی است از تعریف نرم $||x||_*$ نتیجه می گیریم که

$$||t - u||_* = P_*(t - u) \leq p_*(t - u + v) = P_*(t - u_*) \leq ||t - u_*||_*.$$

(چون که $t - u \in Z_+$ ، داشتیم $||x||_* = P_*(x)$ و از افزایشی بودن P_* واینکه $t - u \leq t - u + v$ نتیجه می گیریم که $P_*(t - u) \leq p_*(t - u + v)$ ، نامساوی آخر نیز از تعریف نرم $||.||_*$ نتیجه می شود).

بنابراین برای هر $u_* \in U_*$ یک $u \in U$ وجود دارد که $||t - u||_* \leq ||t - u_*||_*$ که با اینفیوم گرفتن از طرفین داریم $r \geq d(t, U)$ ؛ از این رو داریم $r = d(t, U)$.

$\square$

ما اصطلاحاً جفت (U,t) را که $t \in X$ و $U \subset X$ می باشد پروکسیمینال می گوییم در صورتی که بهترین تقریب t نسبت به U وجود داشته باشد.

قضیه. ۴. ۸.۲

۱) اگر $t \in X$ عنصری باشد که $t - U \subset Z_+$ و U_* یک مجموعه بسته باشد آنگاه جفت (U,t) پروکسیمینال است.

۲) اگر $t \in X$ عنصری باشد که $t - U \subset Z_-$ و U^* یک مجموعه بسته باشد آنگاه جفت (U,t) پروکسیمینال است.

برهان . کافیست فقط قسمت اول را ثابت کنیم ، از آنجایی که U_* یک مجموعه بسته و نسبتاً روبه پایین است از روشی مشابه اثبات قضیه(۴. ۵.۱) می دانیم کوچکترین عضو $u_\circ$ از مجموعه $P_U(t)$ وجود دارد که اگر $r = d(t, U_*)$ آنگاه $u_\circ = t - r۱$ ، به وسیله قضیه (۴. ۷.۲) داریم $r = d(t, U)$ از آنجایی که $u_\circ \in U_*$ پس وجود دارد $v \in K_*$ و $u \in U$ که $u_\circ = t - r۱ = u - v$ ، بوسیله فرض $t - u \in Z_+$ و افزایشی بودن P_* داریم:

$$||t - u||_* = P_*(t - u) = P_*(r۱ - v) \leq P_*(r۱) = r.$$

از طرفی $||t - u||_* \geq d(t, U) = r$ بنابراین $||t - u||_* = r$ بنابراین $u \in P_U(t)$ واثبات کامل است .

□

اثبات قضیه بعد نیز مشابه اثبات این قضیه است که از آوردن آن صرف نظر کرده ایم .

قضیه. ۴. ۲. ۹

۱) اگر $t - U \subset Z_+$ و U_* یک مجموعه بسته باشد اگر $r = d(t, U_*)$ پس وجود دارد $u_\circ \in U$ که $t - r \geq_{K_*} u_\circ$ (علاوه براین داریم $t - r \geq_K u_\circ$) ؛ هر عنصر $u_\circ$ با این خاصیت بهترین تقریب t بوسیله U محسوب می شود .

۲) اگر $t - U \subset Z_-$ و U_* یک مجموعه بسته باشد اگر $r = d(t, U_*)$ پس وجود دارد $u_\circ \in U$ که $t - r \leq_{K_*} u_\circ$ (علاوه بر این داریم $t - r \leq_K u_\circ$) ؛ هر عنصر $u_\circ$ با این خاصیت بهترین تقریب t بوسیله U می باشد .

۳.۴ بهترین تقریب روی مجموعه های بسته

ما در این بخش از روابط پوسته های نسبتاً رو به پایین و نسبتاً رو به بالا برای تشخیص بهترین تقریب یک عنصر معین نسبت به مجموعه U استفاده خواهیم کرد .

قضیه. ۴. ۳. ۱۰ اگر $U \subset X$ زیر مجموعه‌ای بسته و $t \in X$ باشد آنگاه ب:رای مجموعه های

$$U_t^+ = U \cap (t - Z_+) \qquad\qquad U_t^- = U \cap (t - Z_-)$$

داریم :

۱) $t - U_t^+ \subset Z_+$ و $t - U_t^- \subset Z_-$ (از این رو قضیه های (۴. ۲. ۷) و (۴. ۲. ۸) برای آن صدق می کنند .)

۲) $U_t^+ \cup U_t^- = U$ ،

۳) $U \cap (t - Z_\circ) = U_t^+ \cap U_t^-$ ،

۴) U_t^- و U_t^+ دو مجموعه بسته هستند .

بعلت اینکه $U = U_t^+ \cup U_t^-$ برای جفت (U, t) می توانیم داشته باشیم :

$$inf||t - U||_* = min(inf_{U^+ \in U_t^+}||t - U^+||_* \quad , inf_{u^- \in U_t^-}||t - U^-||_*).$$

ما فرض می کنیم جفت (U, t) پروکسیمینال باشد بنابراین حداقل یکی از جفت های (U_t^+, t) یا (U_t^-, t) پروکسیمینال است ، هم چنین بهترین تقریب t بوسیله U با بهترین تقریب t نسبت به U_t^+ یا t نسبت به U_t^- یکی خواهد شد.

فرض می کنیم

$$r_+ = d(t, U_t^+) \quad , \quad r_- = d(t, U_t^-) \quad , \quad r = min(r_+, r_-).$$

پس برای پیدا کردن کمترین فاصله بایستی عناصر r_- و r_+ توسط مسایل بهینه سازی تک بعدی پیدا کنیم ؛ اگر $r_- > r_+$ باشد آنگاه به جای پیدا کردن بهترین تقریب t نسبت به U ، به پیدا کردن بهترین تقریب نسبت به U_t^+ می پردازیم و اگر پوسته نسبتا رو به پایین U_t^+ از مجموعه U_t^+ بسته باشد آنگاه طبق قضایای بحث شده داریم :

$$P_U(t) = P_{U_t^+}(t) = \{u \in U_t^+ \quad : \quad u \geq_{K_*} t - r\mathbf{1}\}.$$

هم چنین اگر $r_+ > r_-$ آنگاه بجای پیدا کردن بهترین تقریب t نسبت به U به پیدا کردن بهترین تقریب نسبت به U_t^- خود را محدود میکنیم . و اگر پوسته نسبتا رو به پایین U_t^- از مجموعه U_t^- بسته باشد آنگاه داریم :

$$P_U(t) = P_{U_t^-}(t) = \{u \in U_t^- \qquad u \leq_{K_*} t - r\mathbf{1}\}.$$

واگر $r_- = r_+$ باشد آن گاه $r_+ = r_- = r$ هرکدام از آنها را به دلخواه می توانیم استفاده کنیم .

کتاب‌نامه

[۱] م. مقدم ، باقری ، پوشش چند ضلعی های ساده به نواحی ستاره ای سیزدهمین کنفرانس ملی انجمن کامپیوتر،۱۳۸۶.

[۲] و. رودین ، آنالیز ریاضی ، ترجمه دکتر علی اکبر عالم زاده تهران : انتشارات جهاد دانشگاهی، تهران ، ۱۳۸۳.

[3] A. Shevidel, Separability of star shaped sets and its applications to an optimization problem, Optimization 40, pp. 207-227, 1997.

[4] A.M. Rubinov, E.V. Sharikov , Star-shaped separability with application, Journal of Convex Analysis 13, pp. 849-860, 2007.

[5] A.M. Rubinov,R.N.Gasimov Scalarization and nonlinear scalar duality for vector optimization with preferences that are not necessary a pre-order relation ,Jornal of Global Optimization ,pp.307-351, 2004.

[6] A.M. Rubinov, I. Singer , Donward set and their sepreation and approximation properties, Journal Global Optimization 23, pp. 111-137, 2002.

[7] A.M. Rubinov, Sublinear operators and their applications,Russian Mathematical Surveys 32, pp.115-175, 1997.

[8] A.M. Rubinov, Abstract Convexity and Global Optimization, Kluwer Academic Publisher, Boston, Dordrecht, london, 2000.

[9] F. Deutch, Best approximation in inner product spaces, springer-verla, New York, 2001.

[10] H. Mohebi, A.M. Rubinov, H. Sadeghi, Best approximation in a class of normed spaces with star-shaped cones,Journal of Numerical Functional Analysis and Optimization 27, pp. 411-436 , 2006.

[11] H. Mohebi , E. Naraghirad , Cone-separation and star-shaped separability with applications , Journal nonlinear analysis , pp. 2412-2421, 2007.

[12] J.B. Conway , A Corse in Functional Analysis, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1985.

[13] J.M. Lien, Approximation Star-Shaped Decomposition of Point Set Data,Eurographics Symposium on Point-Based Graphics, Virginia, USA 2007.

[14] M.A. AL-Thaghafi ,Best approximation and fixed pointes in strong M-star shaped metric spaces, Journal Math and Math scientail ,pp. 613-616, 1994.

[15] W. Rudin ,Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1970.

[16] W. Rudin , Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1991.

پیوست ۵

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

اجتماع .... Union

اشتراک .... Intersection

اکیداً .... Strictly

بستار .... Closure

بهترین تقریب .... Best approximation

پروکسیمینال .... Proximinal

پوسته .... Hull

پیوسته .... Continuous

تابع خطی .... Linear function

تجزیه .... Separation

تهی .... Empty

ثابت .... Constant

چبیشف .... Chebyshev
رو به بالا .... Upward
روبه پایین .... Downward
درون .... Interior
رابطه .... Relation
زیرمجموعه سره .... Proper subset
ستاره گون .... Starshaped
شعاع .... Ray
صعودی .... Increasing
فشرده .... Compact
فضای باناخ .... Banach space
متمم .... Complement
محدب .... Convex
مخروط .... Cone
مرزی .... Boundary
مشخصات .... Characterization
نسبتا .... Relatively
نزولی .... Decreasing
نگاشت .... Mapping
هسته .... Kern
همگرایی .... Convergence

واحد .... Unit

وجود .... Existence

یکتا .... Unique

پیوست ٦

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

فضای باناخ .... Banach space

بهترین تقریب .... Best approximation

مرزی .... Boundary

بسته و کراندار .... Bounded closed

مشخصات .... Characterization

بستار .... Closure

فشرده .... Compact

متمم .... Complement

مخروطی .... Conical

تجزیه مخروطی .... Con separation

ثابت .... Constant

پیوسته .... Continuous

همگرایی .... Convergence

مخروط .... Cone

محدب .... Convex

هم‌ارزی .... Correspond

نزولی .... Decreasing

دانوارد .... Downward

تهی .... Empty

پوسته .... Hull

درون .... Interior

اشتراک .... Intersection

تابع خطی .... Linear function

نگاشت .... Mapping

یکنوایی .... Monotonic

محافظ .... Preserving

نقطه .... Point

زیرمجموعه سره .... Proper subset

نسبتاً .... Relatively

رابطه .... Relation

تجزیه .... Separation

ستاره گون .... Starshaped

یکنواخت .... Uniform

واحد .... Unit

اجتماع .... Union

یکتا .... Unique

رو به بالا .... Upward

Abstract

This thesis have two parts:

In part one we will describe the general problem of best approximation in separation theorems. Let X be a (real) Banach space , A be a subset of X and $x \notin A$, we present cone-separation in terms of separation by a collection of linear functionals defined on X and obtain sufficient and necessary conditions for existance cone-separation A and x . Also we give charatrization for star-shaped separability . Finally, as an application of separability , we characterize best approximation problem by elements of starshaped sets.

In part two , we examine best approximation by closed sets in a class of normed spaces with star-shaped cones . First we study best approximation by downward and upward sets then we use the obtained results as a tools for examination of best approximation by an arbitary closed set.

Key Words : approximation , separation, star shaped set, radiant set, Relatively down ward set, Relatively upward set , Cone-separation.

SHahrood University of Technology

Faculty of Mathematic

BEST APPROXIMATION ON SOME NONCONVEX SETS WITH STAR – SHAPED

Supervisor :

Dr. Mehdi Iranmanesh

Advisor :

Dr. Kamran SHarifi

By

Seyede Marzieh molayee

Feb 2011