چکیده

فرض کنید R یک حلقه شرکت‌پذیر و یکدار باشد. گراف مقسوم علیه صفر R، که آن را با $\Gamma(R)$ نشان می دهیم گرافی است که رئوس آن، مقسوم علیه‌های صفر نابدیهی R هستند و هر دو رأس متمایز مانند x و y مجاورند هرگاه $xy = 0$ یا $yx = 0$.

در این رساله برخی از خواص گراف‌های مقسوم علیه صفر حلقه‌های برگشت‌پذیر را ثابت می‌کنیم. سپس قطر و کمر گراف‌های مقسوم علیه صفر $\Gamma(R)$، $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ و $\Gamma(R[[x;\alpha]])$ را در حالتی که R برگشت‌پذیر و (α,δ)ــ سازگار است مقایسه می‌کنیم. در ادامه، زمانی که R یک حلقه شرکت‌پذیر و مجهز به یک درونریختی α و یک αــ مشتق δ است رابطه بین خواص جبری حلقه چندجمله‌ای‌های اریب $R[X;\alpha,\delta]$ و خواص گرافیکی $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ را بررسی کرده و یک دسته بندی برای مقادیر ممکن قطر گراف $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ بر اساس قطر $\Gamma(R)$ ارائه می‌کنیم. همچنین تمام حلقه‌های شرکت‌پذیر که گراف مقسوم علیه صفر حلقه چندجمله‌ای‌های اریب آنها کامل است را توصیف می‌نماییم.

گراف شبه مقسوم علیه صفر حلقه R، که با $\Gamma^*(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی غیرجهتدار با مجموعه رئوس $Z(R)^*$ است و رئوس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر عنصر ناصفر $r \in R\setminus(\mathrm{ann}(x)\cup\mathrm{ann}(y))$ وجود داشته باشد به طوری که $xry = 0$ یا $yrx = 0$. در این رساله، قطر و کمر گراف $\Gamma^*(R)$ را مطالعه کرده و همچنین بررسی می کنیم که چه زمانی $\Gamma^*(R)$ با $\Gamma(R)$ برابر است. به علاوه، برای حلقه برگشت پذیر R، قطر و کمر گراف $\Gamma^*(R[x])$ را مطالعه کرده و بررسی می کنیم که چه زمانی $\Gamma^*(R[x])$ با $\Gamma(R[x])$ برابر است.

درنهایت، گراف پوچ ساز حلقه R را معرفی و مطالعه می نماییم. گراف پوچ ساز حلقه R که آن را با $AG(R)$ نشان می دهیم یک گراف غیرجهتدار است که مجموعه رئوس آن $Z(R)^*$ است و رئوس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $0 \neq r \in R\setminus(\mathrm{ann}(x)\cup\mathrm{ann}(y))$ وجود داشته باشد به طوری که $\{rx, xr\}\cap\mathrm{ann}(y) \neq 0$ یا $\{ry, yr\}\cap\mathrm{ann}(x) \neq 0$. نشان می دهیم که $\mathrm{diam}(AG(R)) \leq 3$ و در صورتی که $AG(R)$ شامل یک دور باشد آن گاه $\mathrm{g}(AG(R)) \leq 4$. اگر R یک حلقه نیم‌جابجایی باشد، نشان می دهیم که $\mathrm{diam}(AG(R)) \leq 2$ و درصورتی که R یک حلقه برگشت پذیر یا دوئو باشد، آن گاه $\mathrm{diam}(AG(R[x])) \leq 2$. همچنین بررسی می کنیم که چه زمانی $AG(R)$ با $\Gamma(R)$ برابر است. به علاوه برای حلقه آرتینی چپ R بررسی می کنیم که چه زمانی $AG(R)$ یک گراف ستاره است.

کلمات کلیدی: گراف پوچ ساز، گراف شبه مقسوم علیه صفر، گراف مقسوم علیه صفر، حلقه برگشت‌پذیر، حلقه دوئو، حلقه نیم‌جابجایی، حلقه چندجمله‌ای‌های اریب، حلقه سری‌های توانی اریب.

Aabstract

Let R be an associative ring with identity. The undirected zero-divisor graph of R is the graph $\Gamma(R)$ such that vertices of $\Gamma(R)$ are all of the nonzero zero-divisor of R and two distinct vertices x and y are connected by an edge if and only if $xy = 0$ or $yx = 0$. In this thesis we firstly prove some results about zero-divisor graphs of reversible rings. Then we compare the diameter and girth of the zero-divisor graphs $\Gamma(R)$, $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ and $\Gamma(R[[x;\alpha]])$, whenever R is reversible and (α,δ)-compatible. We investigate the interplay between the ring-theoretical properties of a skew polynomial ring $R[x;\alpha,\delta]$ and the graph-theoretical properties of its zero-divisor graph $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$. We give a charecterization of the possible diameteres of $\Gamma(R[x;\alpha,\delta])$ in terms of the diameter of $\Gamma(R)$, when the base ring R is reversible and also have the (α,δ)-compatible property. We also completely describe the associative rings all of whose zero-divisor graphs of skew polynomials are complete.

Furthermore, we introduce the quasi-zero-divisor graph of R, denoted by $\Gamma^*(R)$, that is an undirected graph whose vertex set is $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ and two distinct vertices x and y are adjacent if and only if there exists $0 \neq r \in R\setminus(\mathrm{ann}(x)\cup\mathrm{ann}(y))$ such that $xry = 0$ or $yrx = 0$. In this thesis, we determine the diameter and girth of $\Gamma^*(R)$. We investigate when $\Gamma^*(R)$ is identical to $\Gamma(R)$. Moreover, for a reversible ring R, we study the diameter and girth of $\Gamma^*(R[x])$ and we investigate, when $\Gamma^*(R[x])$ is identical to $\Gamma(R[x])$.

Finally, we introduce and study the annihilator graph of a non-commutative ring R. The annihilator graph of R, denoted by $AG(R)$, is an undirected graph with vertex set $Z(R)^*$, and two distinct vertices x and y are adjacent if and only if there exists $0 \neq r \in R \setminus (ann(x) \cup ann(y))$ such that $\{rx, xr\} \cap ann(y) \neq 0$ or $\{ry, yr\} \cap ann(x) \neq 0$. It follows that $\mathrm{diam}(AG(R)) \leq 3$ and $\mathrm{g}(\Gamma^*(R)) \leq 4$, provided that $\Gamma^*(R)$ has a cycle. We show that, for a semi-commutative ring R, $\mathrm{diam}(AG(R)) \leq 2$, and for a reversible or a duo ring R, $\mathrm{diam}(AG(R[x])) \leq 2$. We investigate, when $AG(R)$ is identical to $\Gamma(R)$. Moreover, for a left Artinian ring R, we investigate, when $AG(R)$ is a star graph.

keywords: annihilator graph; quasi-zero-divisor graph; zero-divisor graphs; duo rings; reversible rings; semi-commutative rings; skew polynomial rings; skew power series rings.