

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز مختلط

رساله دکتری

بررسی کرانی ضرایب توابع دو-تک ارز و توابع همساز

نگارنده: محمد مهدی شعبانی

استاد راهنما

دکتر احمد معتمدنژاد

مهرماه ۱۳۹۷



فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

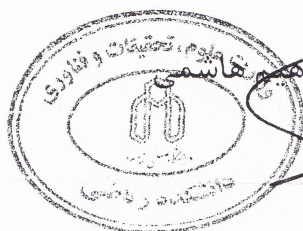
بدینوسیله گواهی می شود آقای محمدمهدی شعبانی دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض - آنالیز - آنالیز مختلط به شماره دانشجویی ۹۲۱۵۶۵۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۲ در تاریخ ۱۳۹۷/۰۷/۲۵ از رساله نظری ☒ عملی ☐ خود با عنوان: بررسی کرانی ضرایب توابع دو تک ارز و توابع همساز دفاع و با اخذ نمره ۱۸/۵ به درجه: بسیار خوب نائل گردید.

☐ الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹	☐ ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵	☐ د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
☐ ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر احمد معتمدنژاد	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر -----	مشاور / مشاورین	-----	
۳	دکتر مهدی ایرانمنش	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۴	دکتر محمود بیدخام	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۵	دکتر علی غفاری	استاد مدعو خارجی	استاد	
۶	دکتر ابراهیم هاشمی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استاد	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای محمدمهدی شعبانی بعمل آید.



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

سپاس‌گزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

خدا را شاکرم که به من این توان را داد که این مرحله از زندگی را با سلامتی و سر بلندی پشت سر بگذارم و سر بر آستان پربرکت او می‌سایم که هرچه عزت و سرافرازی هست، از اوست. پس از خدای بلند مرتبه سر تعظیم در برابر پدر و مادرم فرود می‌آورم، بر پایشان بوسه می‌زنم و ایشان را می‌ستایم که تجلی مهر و لطف خداوندی برای من می‌باشند.

لازم می‌دانم از استاد با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر احمد معتمدنژاد که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و با راهنمایی‌های ارزنده و گهربارشان نقش مهمی در به ثمر رسیدن این پایان نامه داشتند و همچنین از همسر مهربانم که در این مدت با صبر و حوصله وصف نشدنی باعث گردید سختی‌های این راه از تحمل خارج نشود، صمیمانه تقدیر و تشکر را دارم.

محمد مهدی شعبانی
مهرماه ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب محمد مهدی شعبانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **بررسی کرانی ضرایب توابع دو-تک ارز و توابع همساز**، تحت راهنمایی **احمد معتمدنژاد** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محمد مهدی شعبانی

مهرماه ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

رده تمام توابع تحلیلی با بسط سری توانی $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ روی دیسک واحد $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ را با A و آن دسته از توابع متعلق به رده A که دارای خاصیت تک ارزی باشند را با S نمایش می دهیم. رده Σ را رده تمام توابع $f \in S$ در نظر می گیریم که $f^{-1} \in S$ باشد. در قضیه بایبرباخ برای توابع متعلق به رده S ، $|a_n| < n$ اثبات شده است، اما کران ضرایب سری توانی توابع رده Σ بعنوان یک مساله باز مورد توجه بسیاری از محققین می باشد. همچنین تابع پیوسته $f = u + iv$ را در دامنه $D \subseteq \mathbb{C}$ تابع همساز مختلط گویند هرگاه توابع u و v در D همساز حقیقی باشند. نشان داده شده که می توان تابع همساز f را بصورت $f = h + \bar{g}$ (که h و g در D تحلیلی می باشند) نوشت. رده تمام توابع همساز h و g جهت نگهدار $f = h + \bar{g}$ روی دیسک واحد $\mathbb{D}$ با $f(\circ) = f_z(\circ) - 1 = \circ$ نرمالیزه شده اند با S_H نمایش می دهیم. توابع همساز به علت کاربرد و ارتباطی که با سطوح مینیمال در هندسه دارند در سالهای اخیر مورد توجه بسیاری از دانشمندان زمینه آنالیز مختلط قرار گرفته اند.

کلمات کلیدی: توابع تحلیلی، توابع دو-تک از، توابع همساز، کران ضرایب، ترکیبات خطی، پیچش.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. M. M. Shabani, A. Zireh, *On the linear combinations of slanted half-plane harmonic mappings*, Doi:10.22130/scma.2018.72574.293, Sahand Communications in Mathematical Analysis (SCMA), accepted.
2. A. Zireh, M. M. Shabani, *On the partial sums of convex harmonic univalent functions*, TWMS J. of Apl. Eng. Math. , accepted.
3. A. Zireh, M. M. Shabani, *Class of harmonic functions defined by differential operator*, The 47th Annual Iranian Mathematics Conference, Karaj, Iran (2016).
4. A. Zireh, M. M. Shabani, *Coefficient estimates for a new subclass of bi-univalent functions by Dziok-Srivastava operator*, The 4th Seminar on Functional Analysis and its Applications, Ferdowsi University of Mashhad, Iran, (2016).
5. A. Zireh, M. M. Shabani, *Coefficient estimates for a subclass of bi-univalent functions associated with Salagean differential operator*, The 2th National Conference of Mathematics, Urmia, Iran (2017).
6. A. Zireh, M. M. Shabani, *Linear Combinations Of Slanted Half-plane Mappings*, The 2th National Conference of Mathematics, Urmia, Iran (2017).
7. A. Zireh, M. M. Shabani, *Several properties of certain class of univalent harmonic functions*, the 22th Seminar on Mathematical Analysis and its Applications, Bonab, Iran, (2017).
8. A. Zireh, M. M. Shabani, *Coefficient bounds for certain subclass of harmonic mappings convex in one direction*, the 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Hamadan, Iran, (2017).
9. A. Zireh, M. M. Shabani, *Subclass of harmonic univalent functions defined by salagean differential operator*, the 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Hamadan, Iran, (2017).

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
۱	۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۹	۲ نگاشتهای تحلیلی و تك ارز
۹	۱.۲ مقدمه
۱۳	۲.۲ رده $\Sigma H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda]$
۱۷	۳.۲ رده $S_{\Sigma}^{h,p}(k, \lambda)$
۲۱	۴.۲ رده های $\mathcal{K}_n^{\alpha}[A, B]$ و $S_n^{\alpha}[A, B]$
۲۹	۳ نگاشتهای همساز و تك ارز
۲۹	۱.۳ مقدمه
۳۱	۲.۳ رده $S_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$
۴۱	۳.۳ رده $S_H(m, n; \alpha, \beta)$
۵۱	۴.۳ رده $S_{\mathcal{H}}[A, B; n]$
۵۹	۴ تحذب در نگاشتهای همساز و تك ارز
۵۹	۱.۴ ترکیب خطی نگاشت های همساز و تك ارز
۶۵	۲.۴ جمع های جزئی در رده $\mathcal{K}_H$
۷۶	۳.۴ توابع همساز محذب در جهت γ
۸۳	مراجع
۹۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۹۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۳۱	برش افقی از $\varphi(z) = \frac{z}{1-z}$ با دایلتیشن تحلیلی $\omega(z) = z$	۱.۳
۶۴	تصویر $\mathbb{D}$ تحت f_1 و f_2	۱.۴
۶۵	تصویر $\mathbb{D}$ تحت f_3 با $\lambda = \frac{1}{4}$	۲.۴
۷۹	برش تابع $\varphi(z) = \frac{z}{1+iz}$ با $k = \frac{1}{4}, \theta = \frac{\pi}{12}$	۳.۴
۷۹	برش تابع $\varphi(z) = \frac{1}{4} \log\left(\frac{(1+z)^2}{(1+z^2)}\right)$ با $k = \frac{1}{4}, \theta = \frac{\pi}{12}$	۴.۴

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

توابع $\mathbb{C}$ از دیدگاه تحلیلی مشتق مخالف صفر دارند و از دیدگاه هندسی خمهای ساده را به خمهای ساده می‌نگارند. توابعی که هم تحلیلی و هم $\mathbb{C}$ می‌باشند میدانهای همبند ساده را بر میدانهای همبند ساده می‌نگارند. از طرفی با توجه به قضیه نگاشت ریمانی، هر تابع که در $\mathbb{C}$ میدان همبند ساده (بغیر از تمام صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در دیسک واحد تعریف شده است، متناظر کرد. لذا با توجه به مزیت‌هایی که دیسک واحد دارد تمرکز تلاش‌های خود را روی دیسک واحد قرار می‌دهیم.

قضیه ۱.۱ [۵۹] (قضیه نگاشت ریمان) فرض کنید D میدان همبند ساده (بغیر از تمام صفحه) و z_0 نقطه‌ای از D باشد. در این صورت تابع $\mathbb{C}$ از z_0 و منحصر بفرد $f(z)$ موجود است که D را به دیسک واحد $\mathbb{D}$ می‌نگارد به طوریکه $f'(z_0) > 0$ و $f(z_0) = 0$.

نمادگذاری ۱.۱. رده تمام توابع به شکل

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

که روی دیسک واحد $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ تحلیلی می‌باشند را با A نمایش می‌دهیم.

نمادگذاری ۲.۱. رده تمام توابع تحلیلی و $\mathbb{C}$ از روی دیسک واحد $\mathbb{D}$ که با رابطه

$$f(\circ) = f'(\circ) - 1 = 0$$
 نرمالیزه شده اند را با S نمایش می‌دهیم.

¹univalent function

لذا هر تابع $f \in \mathcal{S}$ دارای بسط سری توانی به صورت زیر می باشد:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1 \quad (1.1)$$

نمادگذاری ۳.۱. رده تمام توابع به شکل $f(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$ که روی $|z| > 1$ تحلیلی و تک ارز می باشند را با $\mathcal{T}$ نمایش می دهیم.

قضیه ۲.۱. [۵۹] اگر $f \in \mathcal{S}$ ، آنگاه $\frac{1}{f(\frac{1}{z})} \in \mathcal{T}$.

قضیه ۳.۱. [۵۹] (قضیه مساحت) اگر $g \in \mathcal{T}$ ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$.

لم ۱.۱. [۵۹] اگر $f(z) \in \mathcal{S}$ ، آنگاه $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in \mathcal{S}$.

قضیه ۴.۱. [۵۹] اگر $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in \mathcal{S}$ ، آنگاه $|a_2| \leq 2$.

قضیه ۵.۱. [۵۹] (قضیه بایرباخ) اگر $f \in \mathcal{S}$ ، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

قضیه ۶.۱. [۵۹] (قضیه پوششی $\frac{1}{4}$ - کوئب) فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}$ و برای $|z| < 1$ ، $f(z) \neq c$. آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

یادآوری ۱.۱. قضیه فوق نشان می دهد برد هر تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ شامل دیسک $|w| < \frac{1}{4}$ می باشد.

قضیه ۷.۱. [۵۹] فرض کنید تابع تحلیلی و تک ارز $f(z)$ دامنه D_1 را به D_2 می نگارد. در این صورت برای هر $z \in D_1$ تابع وارون g با $g(f(z)) = z$ تعریف می شود، يك نگاشت تحلیلی و تک ارز از D_2 به D_1 می باشد.

یادآوری ۲.۱. با توجه به قضیه فوق برای هر $f \in \mathcal{S}$ در دیسک $|w| < \frac{1}{4}$ تابع f^{-1} تحلیلی و تک ارز می باشد. بنابراین

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad (z \in \mathbb{D})$$

و

$$f(f^{-1}(w)) = w \quad \left(|w| < r_0(f), r_0(f) \geq \frac{1}{4} \right)$$

که در آن

$$g(w) := f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 + \dots \quad (2.1)$$

تعریف ۴.۱. میدان D را نسبت به z_0 ستارگون گویند هرگاه هر پاره خط مستقیم که هر نقطه D را به z_0 وصل کند در D بیافتد.

تعریف ۵.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ را نسبت به مبدا ستارگون گویند هرگاه دیسک واحد $\mathbb{D}$ تحت $f(z)$ به میدانی نگاشته شود که نسبت به $w = 0$ ستارگون باشد.

نمادگذاری ۶.۱. زیر رده تمام توابع ستارگون از رده $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{S}^*$ نمایش می دهیم.

لم ۲.۱. [۵۹] فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}$. آنگاه $f(z) \in \mathcal{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر دیسک $|z| < r < 1$ را به میدان ستارگون بنگارد.

قضیه ۸.۱. [۵۹] فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}$. آنگاه $f(z) \in \mathcal{S}^*$ اگر و تنها اگر $\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$ ، $(|z| < 1)$.

تعریف ۷.۱. میدان D را محدب گویند هرگاه هر پاره خط مستقیم که هر دو نقطه از D را بهم وصل کند در D بیافتد.

تعریف ۸.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ را محدب گویند هرگاه دیسک واحد $\mathbb{D}$ تحت $f(z)$ به میدانی محدب نگاشته شود.

نمادگذاری ۹.۱. زیر رده تمام توابع محدب از رده $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{K}$ نمایش می دهیم.

لم ۳.۱. [۵۹] فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}$. آنگاه $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر دیسک $|z| < r < 1$ را بر میدان محدب بنگارد.

قضیه ۹.۱. [۵۹] فرض کنید $f(z) \in \mathcal{S}$. آنگاه $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر $\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$ ، $(|z| < 1)$.

قضیه ۱۰.۱. [۵۹] (قضیه پوششی توابع محدب) فرض کنید $f(z) \in \mathcal{K}$ و برای $|z| < 1$ و $f(z) \neq c$ ، آنگاه، $|c| \geq \frac{1}{4}$.

قضیه ۱۱.۱. [۵۹] (لم الکساندر) فرض کنید تابع $f(z)$ روی $\mathbb{D}$ تحلیلی با $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ ، آنگاه،

$$f(z) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow zf'(z) \in \mathcal{S}^*.$$

تعریف ۱۰.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ را تقریباً محدب گویند هرگاه تابع $g(z) \in \mathcal{K}$ موجود باشد که برای هر $z \in \mathbb{D}$ داشته باشیم:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0.$$

نمادگذاری ۱۱.۱. زیر رده تمام توابع تقریباً محدب از رده $\mathcal{S}$ را با $\mathcal{C}$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱۲.۱. [۵۹] اگر $f(z) \in \mathcal{C}$ ، آنگاه $f(z)$ تك ارز است.

یادآوری ۳.۱. می توان رابطه زیر را بین زیر رده های تعریف شده از رده S نشان داد:

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S}.$$

قضیه ۱۳.۱. [۵۹] فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}$ و ضرایب a_n حقیقی باشند. آنگاه برای هر n ، $|a_n| < n$.

تعریف ۱۲.۱. تابع $f \in \mathcal{A}$ را دو-تک ارز^۲ گویند هرگاه f و f^{-1} روی $\mathbb{D}$ تک ارز باشند.

نمادگذاری ۱۳.۱. رده تمام توابعی به شکل $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ که روی دیسک واحد $\mathbb{D}$ دو-تک ارز می باشند را با Σ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ و $g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k$ توابعی از رده $\mathcal{A}$ باشند، پیش^۳ این توابع را با $f * g$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(f * g)(z) := z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k b_k z^k. \quad (۳.۱)$$

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ باشند. تابع $f(z)$ را زیر ترتیب^۴ $g(z)$ گوئیم و با $f(z) \prec g(z)$ نمایش می دهیم هرگاه تابع تحلیلی $\varphi(z)$ روی $\mathbb{D}$ با $\varphi(0) = 0$ و $|\varphi(z)| < 1$ موجود باشد که

$$f(z) = g(\varphi(z)), \quad (|z| < 1)$$

قضیه ۱۴.۱. [۲۶] فرض کنید $g(z)$ در دیسک واحد $\mathbb{D}$ تک ارز باشد آنگاه $f(z) \prec g(z)$ اگر و تنها اگر $f(0) = g(0)$ و $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$.

نمادگذاری ۱۶.۱. رده تمام توابع تحلیلی $p(z)$ روی دیسک واحد $\mathbb{D}$ با $p(0) = 1$ و $Re(p(z)) > 0$ را با $\mathcal{P}$ نمایش می دهیم.

لم ۴.۱. [۲۶] فرض کنید $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \in \mathcal{P}$ باشد. آنگاه $|c_n| \leq 2$ ($n = 1, 2, \dots$).

تعریف ۱۷.۱. تابع فوق هندسی ${}_q F_s(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_s; z)$ با شرط $q \leq s + 1$ و $z \in \mathbb{D}$ را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\begin{aligned} {}_q F_s(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_s; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_q)_n}{(b_1)_n \dots (b_s)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_1)_{n-1} \dots (a_q)_{n-1}}{(b_1)_{n-1} \dots (b_s)_{n-1}} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

²Bi-univalent function

³Hadamard Product

⁴Subordinate

که در آن $(\alpha)_n$ به صورت زیر می باشد:

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

اکنون تابع $h(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_s; z)$ را به صورت زیر تعریف می نماییم:

$$h(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_s; z) = z {}_qF_s(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_s; z). \quad (z \in \mathbb{D})$$

دزیکو و سریواستاوا [۲۳، ۲۴] عملگر $H(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_s; z) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ به صورت زیر معرفی نمودند:

$$H(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_s)f(z) = h(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_s) * f(z) \quad (q \leq s + 1, z \in \mathbb{D}).$$

اگر $f \in \mathcal{A}$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$H(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_s)f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma_n[a_1; b_1] a_n z^n,$$

که در آن $\Gamma_n[a_1; b_1]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma_n[a_1; b_1] = \frac{(a_1)_{n-1} \cdots (a_q)_{n-1}}{(b_1)_{n-1} \cdots (b_s)_{n-1}} \frac{1}{(n-1)!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

به منظور ساده نویسی در نمادها قرار می دهیم:

$$H_{q,s}[a_1; b_1; z] = H(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_s)f(z).$$

تعریف ۱۸.۱. تابع $u(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع همساز حقیقی گویند هرگاه تابع $u(x, y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته و $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

تعریف ۱۹.۱. تابع پیوسته $f = u + iv$ را در دامنه $D \subseteq \mathbb{C}$ تابع همساز مختلط گویند هرگاه توابع u و v در D همساز حقیقی باشند.

نمادگذاری ۲۰.۱. رده تمام توابع همساز روی $\mathbb{D}$ را با $\mathcal{H}$ نمایش می دهیم و $f \in \mathcal{H}$ که با $f(\circ) = f_z(\circ) - 1 = 0$ نرمالیزه شده اند را با $\mathcal{H}_0$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۱.۱. فرض کنید $f = u + iv$. ژاکوبین تابع f را با $J_f(z)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y.$$

تعریف ۲۲.۱. تابع همساز f در دامنه همبند ساده D را جهت نگهدار گویند هرگاه $J_f(z) > 0$ و جهت برگردان گویند هرگاه $J_f(z) < 0$ باشد.

یادآوری ۴.۱. هرگاه f يك تابع همساز مختلط در دامنه همبند ساده D باشد می توان f را به صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت که h و g در D تحلیلی می باشند.

یادآوری ۵.۱. فرض کنید f يك تابع همساز مختلط در دامنه همبند ساده D باشد. آنگاه f در D تك ارز موضعی و جهت نگهدار است اگر و تنها اگر برای هر $z \in D$ ، $|h'(z)| < |g'(z)|$ باشد.

نمادگذاری ۲۳.۱. رده تمام توابع همساز تك ارز و جهت نگهدار $f = h + \bar{g}$ روی دیسك واحد $\mathbb{D}$ با $f(\circ) = f_z(\circ) - 1 = \circ$ نرمالیزه شده اند را با S_H نمایش می دهیم. بنابراین برای هر $f = h + \bar{g} \in S_H$ با توجه به تحلیلی بودن h و g می توان بسط سری توانی f را به صورت زیر نمایش داد:

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k}, \quad (4.1)$$

که در آن $h(z)$ و $g(z)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \quad |b_1| < 1. \quad (5.1)$$

قضیه ۱۵.۱. [۲۵] (قضیه لوی) فرض کنید f يك تابع همساز مختلط موضعا يك به يك بر دامنه D باشد. آنگاه به ازای هر $z \in D$ ، $J_f(z) \neq \circ$.

نمادگذاری ۲۴.۱. رده تمام توابع همساز تك ارز و جهت نگهدار $f \in S_H$ که $g'(\circ) = \circ$ را با S_H° نمایش می دهیم.

تعریف ۲۵.۱. دامنه Ω در صفحه مختلط را محدب در جهت $(\circ \leq \gamma < \pi)$ گویند هرگاه برای هر $a \in \mathbb{C}$ ، مجموعه $\Omega \cap \{a + te^{i\gamma} : t \in \mathbb{R}\}$ همبند یا تهی باشد. در حالت خاص يك دامنه را محدب در جهت محور حقیقی گویند و با CHD نمایش می دهند هرگاه اشتراك آن دامنه با خطوط افقی همبند (یا تهی) باشد. يك نگاشت همساز تك ارز را CHD گویند هرگاه برد آن CHD باشد.

نمادگذاری ۲۶.۱. زیر رده هایی از رده S_H که $|z| = r < 1$ را به دامنه ستارگون، محدب و تقریباً محدب می نگارد را بترتیب با S_H^* ، $\mathcal{K}_H$ و $\mathcal{C}_H$ نمایش می دهیم.

یادآوری ۶.۱. فرض کنید $\circ \leq \theta \leq 2\pi$ و $|z| = r < 1$. آنگاه $f = h + \bar{g} \in S_H^*$ اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\arg f(re^{i\theta})) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) - \overline{g(z)}} \right\} > \circ,$$

همچنین $f = h + \bar{g} \in \mathcal{K}_H$ اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \arg \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z(zh'(z))' + \overline{z(zg'(z))'}}{zh'(z) - \overline{zg'(z)}} \right\} > \circ.$$

یادآوری ۷.۱. فرض کنید $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. آنگاه $\circ$ است اگر و تنها اگر $Re\left\{\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\right\} > \circ$ برای هر z در $\mathbb{D}$ داشته باشیم $|w(z)| \leq |z|$.

تعریف ۲۷.۱. اشتراك تمام مجموعه های محدب شامل مجموعه A را پوسته محدب^۵ مجموعه A گویند و با $co(A)$ نمایش می دهند.

تعریف ۲۸.۱. زیر مجموعه E از مجموعه محدب S را زیر مجموعه اکسترمال^۶ از S گویند هرگاه برای هر x و y از S و $\circ < \lambda < ۱$ ، اگر $\lambda x + (1 - \lambda)y \in E$ آنگاه $x, y \in E$. به عبارتی اگر هر نقطه درونی از يك پاره خط از S در E قرار بگیرد آنگاه تمام پاره خط می باید در E باشد.

تعریف ۲۹.۱. يك مجموعه اکسترمال از S شامل يك نقطه تنها را نقطه اکسترمال^۷ از S گویند. بنابراین $e \in S$ يك نقطه اکسترمال از S گویند هرگاه برای x و y از S و $\circ < \lambda < ۱$ اگر $e = \lambda x + (1 - \lambda)y$ آنگاه $e = x = y$.

⁵the convex hulls

⁶the extreme subset

⁷the extreme points

فصل ۲

نگاشتهای تحلیلی و تك ارز

۱.۲ مقدمه

در اوایل قرن نوزدهم میلادی با نشر مقالاتی از ریاضی دانانی همچون کوئب^۱ و بایبرباخ^۲ توابع مقدار مختلط بعنوان شاخه ای مستقل در آنالیز مختلط ایفای نقش نمود. در این بین توابع تك ارز نقش اصلی را در توابع تحلیلی برعهده دارند. اولین مقاله در سال ۱۹۰۷ توسط کوئب [۴۶] نشان داد برای هر تابع $f \in \mathcal{S}$ ، مقدار ثابت $k > 0$ وجود دارد که برد f شامل دیسکی به شعاع $|w| < k$ می باشد. در سال ۱۹۱۵ بایبرباخ [۱۰] مقدار $k = \frac{1}{4}$ را اثبات کرد. در سال ۱۹۱۴ گرون وال [۳۴] قضیه مساحت را برای توابع متعلق به رده $\mathcal{S}$ مطرح نمود و بایبرباخ با استفاده از این قضیه مقدار $|a_2| \leq 2$ را برای بسط سری توانی توابع رده $\mathcal{S}$ نشان داد.

با مطرح شدن حدس بایبرباخ برای رده توابع $\mathcal{S}$ ، لاونر [۵۰] با استفاده از نمایش پارامتری نگاشتهای سیلت^۳ توانست $|a_3| \leq 3$ را برای حدس بایبرباخ اثبات نماید. در سال ۱۹۵۵ گرابدین و شیفر [۳۱] مقدار $|a_4| \leq 4$ را اثبات نمود و چندین سال بعد پیرسون و شیفر [۵۷] با استفاده از نامعادلات گرونسکی^۴ موفق به اثبات $|a_5| \leq 5$ برای رده $\mathcal{S}$ گردیدند.

^۱Koebe

^۲Bieberbach

^۳slit mappings

^۴the Grunsky inequalities

این روند تا $|a_7|$ ادامه داشت که در نهایت در سال ۱۹۸۵ توسط برانگ [۱۳] در مقاله ای به عنوان اثباتی برای حدس بایبرباخ این حدس به یقین تبدیل شد.

طولانی شدن اثبات حدس بایبرباخ سبب شد که زیر رده های فراوانی از رده S توسط محققین تعریف و به تحقیق روی خواص هندسی و تحلیلی این زیر رده ها پرداخته شود، از جمله این زیر رده ها می توان S^* ، $\mathcal{K}$ و $\mathcal{C}$ اشاره نمود.

در سال ۱۹۶۷ لوین [۴۹] رده Σ را معرفی نمود و به بررسی کران ضرایب بسط سری توانی این رده از توابع پرداخت.

در مورد کران ضرایب بسط سری توانی توابع رده Σ همانند رده S حدسی همچون حدس بایبرباخ مطرح نشده و عمده فعالیت های روی زیر رده های Σ معطوف شده است و تخمین کران ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ بسط سری توانی زیر رده های آن مورد توجه قرار گرفته است. به طور مثال لوین [۴۹] نشان داد اگر $f \in \Sigma$ ، آنگاه $|a_2| \leq 1/51$. برانان و کلونی [۱۱] در سال ۱۹۸۰ مقدار $|a_2| \leq \sqrt{2}$ را حدس زدند و کیدزیرسکی [۴۵] این مقدار را برای زیر رده ستارگونه^۵ اثبات نمود. تان [۷۷] مقدار $|a_2| \leq 1/485$ را اثبات نمود که تاکنون بهترین تخمین برای $|a_2|$ در بسط سری توانی رده توابع Σ می باشد.

بررسی کران برای ضرایب بسط سری توانی توابع رده Σ بعد از معرفی این رده توسط لوین [۴۹] توجه بسیاری از محققین در زمینه آنالیز مختلط را به خود جلب نمود که می توان به مقالاتی همچون ([۳، ۴۴، ۴۸، ۵۲، ۶۴، ۷۶]) اشاره نمود.

زیر رده های تعریف شده در رده Σ بنحوی بود که در بعضی مواقع ضمن اینکه رده های قبلی را پوشش می داد، دامنه وسیعتری از توابع را هم شامل می شد. با تعریف عملگرهایی همچون عملگر دزیکو-سریواستاوا، سالاگون و ... کرانهای $|a_2|$ و $|a_3|$ را که تخمین هایی در کارهای قبل وجود داشت بهبود می دادند. نوع پیدایش این زیر رده ها و تعریف عملگرها روی توابع موجود در آنها توسط محققین این شاخه از آنالیز مختلط از زیباییهای خاصی برخوردار می باشند که در ادامه به ذکر چند مورد از آنها خواهیم پرداخت.

برانان و طاها [۱۲] رده هایی به صورت زیر را معرفی نمودند:

رده $S_\Sigma^*[\alpha]$ به عنوان توابع دو-ستارگون^۶ از مرتبه α ($0 < \alpha \leq 1$) به صورت زیر تعریف می شود:

$$f \in \Sigma \bullet$$

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \bullet$$

$$\left| \arg \frac{wg'(w)}{g(w)} \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \bullet$$

که تابع $g(w)$ معرفی شده در رابطه (۲.۱) می باشد و قضیه زیر را برای رده $S_\Sigma^*[\alpha]$ اثبات نمودند.

⁵starlike

⁶Bi-starlike functions

قضیه ۱.۲. [۱۲] فرض کنید $f \in \mathcal{S}_\Sigma^*[\alpha]$ و دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}, \quad |a_3| \leq 2\alpha$$

و همچنین رده $\mathcal{K}_\Sigma[\beta]$ به عنوان رده تمام توابع دو-محدب^۷ از مرتبه β ($0 \leq \beta < 1$) به صورت زیر تعریف می شود:

$$f \in \Sigma \bullet$$

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta \bullet$$

$$\bullet \operatorname{Re}\left(1 + \frac{wg''(w)}{g'(w)}\right) > \beta$$

و نشان دادند:

قضیه ۲.۲. [۱۲] فرض کنید $f \in \mathcal{K}_\Sigma[\beta]$ و دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \sqrt{2(1-\beta)}, \quad |a_3| \leq 2(1-\beta)$$

سریواستوا و همکاران [۷۵] رده هایی به صورت زیر را معرفی نمودند:
رده $\mathcal{H}_\Sigma^\alpha$ که در آن ($0 < \alpha \leq 1$) و شامل توابعی با شرایط زیر بود:

$$f \in \Sigma \bullet$$

$$\left| \arg(f'(z)) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \bullet$$

$$\bullet \left| \arg(g'(w)) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

و نشان دادند:

قضیه ۳.۲. [۷۵] فرض کنید $f \in \mathcal{H}_\Sigma^\alpha$ و دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \alpha \sqrt{\frac{2}{2+\alpha}}, \quad |a_3| \leq \frac{\alpha(3\alpha+2)}{3}$$

همچنین رده $\mathcal{H}_\Sigma(\beta)$ را معرفی نموده که در آن ($0 \leq \beta < 1$) و شامل توابعی با شرایط زیر بود:

$$f \in \Sigma \bullet$$

$$\operatorname{Re}(f'(z)) > \beta \bullet$$

$$\bullet \operatorname{Re}(g'(w)) > \beta$$

⁷Bi-convex functions

و قضیه زیر را برای رده $\mathcal{H}_\Sigma(\beta)$ اثبات نمودند.

قضیه ۴.۲. [۷۵] فرض کنید $f \in \mathcal{H}_\Sigma(\beta)$ و دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{3}}, \quad |a_3| \leq \frac{(1-\beta)(5-3\beta)}{3}$$

اورهانا و همکاران [۵۳] رده $\mathcal{N}_\Sigma^\mu(\alpha, \lambda)$ که در آن $(0 < \alpha \leq 1, \mu \geq 0)$ و شامل توابعی با شرایط زیر را معرفی نمودند:

$$f \in \Sigma \bullet$$

$$\left| \arg\left((1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^\mu + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \bullet$$

$$\left| \arg\left((1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^\mu + \lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \bullet$$

قضیه ۵.۲. [۵۳] فرض کنید $f \in \mathcal{N}_\Sigma^\mu(\alpha, \lambda)$ و دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + \alpha(\mu+2\lambda-\lambda^2)}}, \quad |a_3| \leq \frac{4\alpha^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{2\alpha}{2\lambda+\mu}$$

یادآوری ۱.۲. اورهان و همکاران علاوه بر بدست آوردن کران های فوق برای رده $\mathcal{N}_\Sigma^\mu(\alpha, \lambda)$ توانستن رده $\mathcal{S}_\Sigma^*[\alpha]$ تعریف شده توسط برانان و طاها و همچنین $\mathcal{H}_\Sigma^\alpha$ تعریف شده توسط سریواستاوا و همکاران را پوشش دهند یعنی با جایگذاری $\lambda = \mu + 1 = 1$ ، $\mathcal{N}_\Sigma^\circ(\alpha, 1) = \mathcal{S}_\Sigma^*[\alpha]$ و همچنین با جایگذاری $\lambda = \mu = 1$ ، $\mathcal{N}_\Sigma^1(\alpha, 1) = \mathcal{H}_\Sigma^\alpha$ ، بنابراین رده $\mathcal{N}_\Sigma^\mu(\alpha, \lambda)$ دامنه وسیعتری از توابع رده Σ را شامل می گردید.

سالانگن [۶۳] عملگر دیفرانسیل $D^k : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ را به صورت زیر معرفی نمود:

$$D^0 f(z) = f(z),$$

$$D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z),$$

$$D^k f(z) = D(D^{k-1} f(z)) = z(D^{k-1} f(z))', \quad k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

بنابراین،

$$D^k f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^k a_n z^n, \quad k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

جودیباسو [۴۴] با استفاده از عملگر سالانگن رده $\mathcal{S}_\Sigma^{k,\lambda}(\alpha)$ را به صورت زیر معرفی نمود:

$$f \in \Sigma \bullet$$

$$\begin{aligned} & \left| \arg \left(\frac{\mathcal{D}^{k+1} f(z)}{(1-\lambda)\mathcal{D}^k f(z) + \lambda \mathcal{D}^{k+1} f(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \bullet \\ & \cdot \left| \arg \left(\frac{\mathcal{D}^{k+1} g(w)}{(1-\lambda)\mathcal{D}^k g(w) + \lambda \mathcal{D}^{k+1} g(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \bullet \end{aligned}$$

که در آن $0 < \alpha \leq 1$ ، $0 \leq \lambda < 1$ و $z, w \in \mathbb{D}$ می باشد و تابع $g(w)$ در رابطه (۲.۱) آمده است و نشان داد:

قضیه ۶.۲. [۴۴] فرض کنید $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}^{k,\lambda}(\alpha)$ و دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. آنگاه،

$$\begin{aligned} |a_2| & \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(1-\lambda)^{2k} + [2\alpha(\lambda^2 - 1) - (\alpha - 1)(1-\lambda)^2]2^{2k}}}, \\ |a_3| & \leq \frac{4\alpha^2}{(\lambda + \mu)^2} + \frac{2\alpha}{2\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

یادآوری ۲.۲. رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^{k,\lambda}(\alpha)$ به ازای مقادیر مختلف λ و k می توانست رده های قبلی را پوشش دهد. به طور مثال به ازای $\mathcal{S}_{\Sigma}^{\circ,\circ}(\alpha) = \mathcal{S}_{\Sigma}^*[\alpha]$ ، $k = \lambda = 0$ و با ازای $k = 1$ و $\lambda = 0$ ، $\mathcal{S}_{\Sigma}^{1,\circ}(\alpha) = \mathcal{K}_{\Sigma}[\alpha]$ که رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^*[\alpha]$ و $\mathcal{K}_{\Sigma}[\alpha]$ توسط برانان و طاها معرفی شده بود.

در ادامه به تحقیق و بررسی بر روی زیر رده ${}_{\Sigma}H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda]$ از رده توابع Σ می پردازیم.

۲.۲ رده ${}_{\Sigma}H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda]$

در بخشهای قبل به معرفی عملگر دزیکو و سریواستوا (تعریف ۱۷.۱) پرداختیم. حال با استفاده از این عملگر رده ${}_{\Sigma}H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda]$ را بصورت زیر تعریف می نمایم.

تعریف ۱.۲. [۸۳] فرض کنیم $f \in \mathcal{A}$ و توابع $h, p : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ با خاصیت $h(\circ) = p(\circ) = 1$ و $\min \{ \operatorname{Re}(h(z)), \operatorname{Re}(p(z)) \} > 0$ برای $z \in \mathbb{D}$ باشد. گوییم $f \in {}_{\Sigma}H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda]$ است هرگاه $f \in \Sigma$ و در شرایط زیر صدق کند.

$$(1-\lambda) \frac{H_{q,s}[a_1; b_1; z]}{z} + \lambda (H_{q,s}[a_1; b_1; z])' \in h(\mathbb{D}) \quad (1.2)$$

و

$$(1-\lambda) \frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) \in p(\mathbb{D}), \quad (2.2)$$

که در آن $\lambda \geq 1$ ، $z, w \in \mathbb{D}$ و $g(w)$ بصورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} g(w) & = H_{q,s}^{-1}[a_1; b_1; z] \\ & = w - \Gamma_2[a_1; b_1]a_2w^2 + (2(\Gamma_2[a_1; b_1])^2a_2 - \Gamma_3[a_1; b_1]a_3)w^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

در تعریف بالا، انتخابهای متعددی برای توابع $h(z)$ و $p(z)$ وجود دارد. با انتخاب مناسبی از این توابع می توان بعضی از رده های معرفی شده توسط محققین در این زمینه را مشمول در رده ${}_{\Sigma}H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda]$ قرار داد. در ادامه به ذکر دو مورد از این توابع می پردازیم:

یادآوری ۳.۲. برای $z \in \mathbb{D}$ و $0 < \alpha \leq 1$ قرار دهیم:

$$h(z) = p(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}. \quad (4.2)$$

واضح است که توابع فوق در تعریف ۱.۲ صدق می کند. لذا اگر $f \in {}_{\Sigma}H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda]$ و توابع $h(z)$ و $p(z)$ در (۴.۲) صدق نماید آنگاه،

$$\left| \arg \left((1-\lambda) \frac{H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; z]}{z} + \lambda (H_{q,s}[a_1; b_1; z])' \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{\lambda} \quad (z \in \mathbb{D}, \lambda \geq 1)$$

و

$$\left| \arg \left((1-\lambda) \frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{\lambda} \quad (w \in \mathbb{D}, \lambda \geq 1).$$

اکنون با تعیین پارامترهای $q=2$ و $s=a_1=a_2=b_1=\lambda=1$ داریم ${}_{\Sigma}H_{1,2}^{h,p}[1; 1; 1] = H_{\Sigma}^{\alpha}$ که رده H_{Σ}^{α} توسط سریواستاوا [۷۵] معرفی و کران ضرایب آن را بررسی نمود.

یادآوری ۴.۲. برای $z \in \mathbb{D}$ و $0 \leq \beta < 1$ قرار دهیم:

$$h(z) = p(z) = \frac{1 + (1-2\beta)z}{1-z} \quad (5.2)$$

واضح است که توابع فوق در تعریف ۱.۲ صدق می کند. لذا اگر $f \in {}_{\Sigma}H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda]$ و توابع $h(z)$ و $p(z)$ در (۵.۲) صدق نماید آنگاه،

$$\operatorname{Re} \left((1-\lambda) \frac{H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; z]}{z} + \lambda (H_{q,s}[a_1; b_1; z])' \right) > \beta \quad (z \in \mathbb{D}, \lambda \geq 1, 0 \leq \beta < 1)$$

و

$$\operatorname{Re} \left((1-\lambda) \frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) \right) > \beta \quad (w \in \mathbb{D}, \lambda \geq 1, 0 \leq \beta < 1)$$

اکنون با تعیین پارامترهای $q=2$ و $s=a_1=a_2=b_1=\lambda=1$ داریم، ${}_{\Sigma}H_{1,2}^{h,p}[1; 1; 1] = H_{\Sigma}(\beta)$ که رده $H_{\Sigma}(\beta)$ توسط سریواستاوا [۷۵] معرفی و کران ضرایب آن را بررسی نمود.

یادآوری ۵.۲. برای $h(z) = p(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ خواهیم داشت، ${}_{\Sigma}H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda] = T_{q,s}^{\Sigma}[a_1; b_1; \alpha; \lambda]$ که رده $T_{q,s}^{\Sigma}[a_1; b_1; \alpha; \lambda]$ توسط آف [۴] معرفی و کران ضرایب آن را بررسی نمود.

اکنون قضیه زیر را در مورد زیر رده ${}_{\Sigma}H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda]$ اثبات خواهیم نمود.

قضیه ۷.۲. [۸۳] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به رده $\Sigma H_{q,s}^{h,p}[a_1; b_1; \lambda]$ باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \min \left\{ \sqrt{\frac{|h'(\circ)|^2 + |p'(\circ)|^2}{2(\lambda+1)^2 |\Gamma_2[a_1; b_1]|^2}}, \sqrt{\frac{|h''(\circ)| + |p''(\circ)|}{4(2\lambda+1) |\Gamma_2[a_1; b_1]|^2}} \right\}, \quad (6.2)$$

$$|a_3| \leq \min \left\{ \frac{|h'(\circ)|^2 + |p'(\circ)|^2}{2(\lambda+1)^2 |\Gamma_3[a_1; b_1]|} + \frac{|h''(\circ)| + |p''(\circ)|}{4(2\lambda+1) |\Gamma_3[a_1; b_1]|}, \frac{|h''(\circ)|}{2(2\lambda+1) |\Gamma_3[a_1; b_1]|} \right\}. \quad (7.2)$$

برهان. از روابط (۱.۲) و (۲.۲) می توان نتیجه گرفت:

$$(1-\lambda) \frac{H_{q,s}[a_1; b_1; z]}{z} + \lambda (H_{q,s}[a_1; b_1; z])' = h(z) \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (8.2)$$

و

$$(1-\lambda) \frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) = p(w) \quad (w \in \mathbb{D}) \quad (9.2)$$

که در آن توابع $h(z)$ و $p(w)$ در تعریف ۱.۲ صدق می کند و $g(w)$ تابع بیان شده رابطه (۳.۲) می باشد. فرض کنیم توابع $h(z)$ و $p(w)$ دارای بسط سری توانی زیر باشند:

$$h(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots, \quad (10.2)$$

و

$$p(w) = 1 + p_1 w + p_2 w^2 + \dots. \quad (11.2)$$

حال با توجه به ضرایب بسط سری توانی توابع فوق و سمت چپ معادلات (۸.۲) و (۹.۲) داریم:

$$(\lambda+1) \Gamma_2[a_1; b_1] a_2 = h_1, \quad (12.2)$$

$$(2\lambda+1) \Gamma_3[a_1; b_1] a_3 = h_2, \quad (13.2)$$

$$-(\lambda+1) \Gamma_2[a_1; b_1] a_2 = p_1, \quad (14.2)$$

$$(2\lambda+1) (2(\Gamma_2[a_1; b_1]))^2 a_2^2 - \Gamma_3[a_1; b_1] a_3 = p_2. \quad (15.2)$$

از روابط (۱۲.۲) و (۱۴.۲) داریم:

$$h_1 = -p_1 \quad (16.2)$$

و

$$h_1^2 + p_1^2 = 2(\lambda+1)^2 (\Gamma_2[a_1; b_1])^2 a_2^2 \quad (17.2)$$

از (۱۳.۲) و (۱۵.۲) داریم:

$$h_2 + p_2 = 2(2\lambda + 1)(\Gamma_2[a_1; b_1])^2 a_2^2 \quad (18.2)$$

حال از روابط (۱۷.۲) و (۱۸.۲) به ترتیب نتایج زیر بدست می آید:

$$|a_2|^2 \leq \frac{|h'(\circ)|^2 + |p'(\circ)|^2}{2(\lambda + 1)^2 |\Gamma_2[a_1; b_1]|^2} \quad (19.2)$$

و

$$|a_2|^2 \leq \frac{|h''(\circ)| + |p''(\circ)|}{4(2\lambda + 1)|\Gamma_2[a_1; b_1]|^2} \quad (20.2)$$

لذا کران $|a_2|$ در رابطه (۶.۲) اثبات گردید. برای بدست آوردن کران $|a_3|$ ، رابطه (۱۵.۲) را از (۱۳.۲) کم می کنیم

$$h_2 - p_2 = 2(2\lambda + 1)(\Gamma_3[a_1; b_1]a_3 - (\Gamma_2[a_1; b_1])^2 a_2^2). \quad (21.2)$$

با جایگذاری a_2 از رابطه (۱۸.۲) در (۲۱.۲) داریم:

$$|a_3| = \frac{h_2^2 + p_2^2}{2(\lambda + 1)^2 \Gamma_3[a_1; b_1]} + \frac{h_2 - p_2}{2(2\lambda + 1)\Gamma_3[a_1; b_1]} \quad (22.2)$$

همچنین

$$|a_3| \leq \frac{|h'(\circ)|^2 + |p'(\circ)|^2}{2(\lambda + 1)^2 |\Gamma_3[a_1; b_1]|} + \frac{|h''(\circ)| + |p''(\circ)|}{4(2\lambda + 1)|\Gamma_3[a_1; b_1]|} \quad (23.2)$$

از جایگذاری مقدار $|a_2|$ از (۱۹.۲) در (۲۱.۲) داریم:

$$a_3 = \frac{h_2}{(2\lambda + 1)\Gamma_3[a_1; b_1]} \quad (24.2)$$

لذا

$$|a_3| \leq \frac{|h''(\circ)|}{2(2\lambda + 1)|\Gamma_3[a_1; b_1]|} \quad (25.2)$$

□

در نتیجه رابطه (۷.۲) قضیه ۷.۲ اثبات می شود.

در قضیه ۷.۲ با قرار دادن $h(z) = p(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$ و $q = 2$ و $s = \lambda = a_1 = a_2 = b_1 = 1$ ، نتیجه زیر بدست می آید.

نتیجه ۱.۲. [۸۳] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به زیر رده H_Σ^α باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha, \quad |a_3| \leq \frac{2\alpha^2}{3}.$$

یادآوری ۶.۲. نتیجه ۱.۲ کران بدست آمده توسط سریواستوا [۷۵] را که در ادامه به آن اشاره شده است، بهبود می بخشد.

قضیه ۸.۲. [۷۵] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به رده H_{Σ}^{α} باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \alpha \sqrt{\frac{2}{\alpha+2}}, \quad |a_3| \leq \frac{\alpha(3\alpha+2)}{3}.$$

همچنین با قرار دادن $h(z) = p(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ در قضیه ۷.۲ نتیجه زیر بدست می آید.

نتیجه ۲.۲. [۸۳] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به زیر رده $T_{q,s}^{\Sigma}[a_1; b_1; \alpha; \lambda]$ باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \min \left\{ \frac{2\alpha}{|\Gamma_2[a_1; b_1]|(\lambda+1)}, \frac{2\alpha}{|\Gamma_2[a_1; b_1]|\sqrt{2(2\lambda+1)}} \right\},$$

و

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha^2}{|\Gamma_3[a_1; b_1]|(2\lambda+1)},$$

یادآوری ۷.۲. به وضوح نتیجه ۲.۲ کران بدست آمده توسط آف [۴] را که در قضیه ۹.۲ ارائه گردیده، بهبود می بخشد.

قضیه ۹.۲. [۴] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به زیر رده $T_{q,s}^{\Sigma}[a_1; b_1; \alpha; \lambda]$ باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{|\Gamma_2[a_1; b_1]|\sqrt{(\lambda+1)^2 + \alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{4\alpha^2}{|\Gamma_3[a_1; b_1]|(\lambda+1)^2} + \frac{2\alpha}{|\Gamma_3[a_1; b_1]|(2\lambda+1)}.$$

از دیگر اقداماتی که در زمینه پیدا کردن کران ضرایب بسط سری توانی توابع از رده Σ انجام گرفته است، تعریف و تحقیق بر روی زیر رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^{h,p}$ می باشد که در ادامه به بعضی ویژگیهای آن اشاره می کنیم.

۳.۲ رده $\mathcal{S}_{\Sigma}^{h,p}(k, \lambda)$

تعریف ۲.۲. [۸۴] فرض کنیم $f \in \mathcal{A}$ و توابع $h, p : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ با خاصیت $h(\circ) = p(\circ) = 1$ و $\min \{Re(h(z)), Re(p(z))\} > 0$ برای $z \in \mathbb{D}$ باشد. گوییم $f \in \mathcal{S}_{\Sigma}^{h,p}(k, \lambda)$ می باشد هرگاه $f \in \Sigma$ و در شرایط زیر صدق کند،

$$\frac{\mathcal{D}^{k+1}f(z)}{(1-\lambda)\mathcal{D}^k f(z) + \lambda\mathcal{D}^{k+1}f(z)} \in h(\mathbb{D}) \quad (26.2)$$

$$\frac{\mathcal{D}^{k+1}g(w)}{(1-\lambda)\mathcal{D}^k g(w) + \lambda\mathcal{D}^{k+1}g(w)} \in p(\mathbb{D}), \quad (27.2)$$

که در آن $0 \leq \lambda < 1, k \in \mathbb{N}_0, z, w \in \mathbb{D}$ و $g(w)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$f^{-1}(w) = g(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \dots \quad (28.2)$$

همانطور که در بخش قبل ذکر شد، با انتخابهای مناسبی از توابع $h(z)$ و $p(z)$ می توانیم حالت‌های مختلفی را مشمول در این رده نماییم. در زیر به چند مورد آن اشاره می نماییم.

یادآوری ۸.۲. اگر $h(z) = p(z) = (\frac{1+z}{1-z})^\alpha$ و $k = \lambda = 0$ ، آنگاه $\mathcal{S}_\Sigma^{h,p}(\circ, \circ) = \mathcal{S}_\Sigma^*(\alpha)$ و همچنین اگر $k = 1$ و $\lambda = 0$ داریم $\mathcal{S}_\Sigma^{h,p}(1, \circ) = \mathcal{K}_\Sigma(\alpha)$ و رده های $\mathcal{S}_\Sigma^*(\alpha)$ و $\mathcal{K}_\Sigma(\alpha)$ به ترتیب رده توابع دو-ستارگون^۸ و دو-محدب^۹ از مرتبه α ، توسط برانان و طاها [۱۲] معرفی و کران ضرایب آن مطالعه گردید.

یادآوری ۹.۲. اگر $h(z) = p(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ و $k = \lambda = 0$ ، آنگاه $\mathcal{S}_\Sigma^{h,p}(\circ, \circ) = \mathcal{S}_\Sigma^*(\beta)$ و همچنین اگر $k = 1$ و $\lambda = 0$ داریم $\mathcal{S}_\Sigma^{h,p}(1, \circ) = \mathcal{K}_\Sigma(\beta)$ و رده های $\mathcal{S}_\Sigma^*(\beta)$ و $\mathcal{K}_\Sigma(\beta)$ به ترتیب رده توابع دو-ستارگون و دو-محدب از مرتبه β ، توسط برانان و طاها [۱۲] معرفی و کران ضرایب آن مطالعه گردید.

یادآوری ۱۰.۲. اگر $h(z) = p(z) = (\frac{1+z}{1-z})^\alpha$ خواهیم داشت $\mathcal{S}_\Sigma^{h,p}(k, \lambda) = \mathcal{S}_\Sigma^{k,\lambda}(\alpha)$ و همچنین با انتخاب $h(z) = p(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ داریم $\mathcal{S}_\Sigma^{h,p}(k, \lambda) = \mathcal{M}_\Sigma^{k,\lambda}(\beta)$ و رده های $\mathcal{S}_\Sigma^{k,\lambda}(\alpha)$ و $\mathcal{M}_\Sigma^{k,\lambda}(\beta)$ توسط جودیاسو [۴۴] معرفی و کران ضرایب آن مطالعه گردید.

قضیه ۱۰.۲. [۸۴] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به زیر رده $\mathcal{S}_\Sigma^{h,p}(k, \lambda)$ باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \min \left\{ \sqrt{\frac{|h'(\circ)|^2 + |p'(\circ)|^2}{2^{2k+1}(1-\lambda)^2}}, \sqrt{\frac{|h''(\circ)| + |p''(\circ)|}{2^{2k+2}(\lambda^2 - 1) + 8(1-\lambda)3^k}} \right\},$$

$$|a_3| \leq \min \left\{ \frac{|h'(\circ)|^2 + |p'(\circ)|^2}{2^{2k+1}(1-\lambda)^2} + \frac{|h''(\circ)| + |p''(\circ)|}{8(1-\lambda)3^k}, \frac{|h''(\circ)| + |p''(\circ)|}{8(1-\lambda)3^k} + \frac{|h''(\circ)| + |p''(\circ)|}{2^{2k+2}(\lambda^2 - 1) + 8(1-\lambda)3^k} \right\}. \quad (29.2)$$

برهان. از آنجا که روند اثبات قضیه فوق همانند قضیه ۷.۲ می باشد، اثبات آن را به خواننده واگذار می نمایم. $\square$

^۸Bi-starlike function

^۹Bi-convex function

اکنون به بررسی نتایج بدست آمده از قضیه ۱۰.۲ در شرایط مختلف می پردازیم. در ابتدا با انتخاب $h(z) = p(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ داریم:

نتیجه ۳.۲. [۸۴] فرض کنیم $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به رده $S_{\Sigma}^{k,\lambda}(\alpha)$ باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \begin{cases} \frac{\sqrt{2}\alpha}{(1-\lambda)} & k = 0 \\ \frac{2\alpha}{2^k(1-\lambda)} & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (30.2)$$

و

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{2\alpha^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{\alpha^2}{(1-\lambda)} & k = 0 \\ \frac{4\alpha^2}{2^{2k}(1-\lambda)^2} + \frac{\alpha^2}{(1-\lambda)2^k} & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (31.2)$$

یادآوری ۱۱.۲. نتیجه ۳.۲ کران بدست آمده توسط جودیاسو [۴۴] که در ادامه به آن اشاره شده است را بهبود می بخشد.

قضیه ۱۱.۲. [۴۴] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به زیر رده $S_{\Sigma}^{k,\lambda}(\alpha)$ باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(1-\lambda)2^k + [2\alpha(\lambda^2 - 1) - (\alpha - 1)(1-\lambda)^2]2^{2k}}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{4\alpha^2}{2^{2k}(1-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{2^k(1-\lambda)}.$$

یادآوری ۱۲.۲. لازم به ذکر است که

۱. برای کران $|a_2|$ داریم:

(آ) در حالتی که $k = 0$ و $0 < \alpha \leq 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{2\alpha}{(1-\lambda)} \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(1-\lambda) + [2\alpha(\lambda^2 - 1) - (\alpha - 1)(1-\lambda)^2]}}.$$

(ب) برای $k = 1, 2, 3, \dots$ و $0 < \alpha \leq 1$ داریم:

$$\frac{2\alpha}{2^k(1-\lambda)} \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(1-\lambda)2^k + [2\alpha(\lambda^2 - 1) - (\alpha - 1)(1-\lambda)^2]2^{2k}}}.$$

۲. برای کران $|a_3|$ داریم:

(آ) در حالتی که $k = 0$ و $0 < \alpha \leq 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{2\alpha^2}{(1-\lambda)^2} \leq \frac{4\alpha^2}{(1-\lambda)^2}$$

و

$$\frac{\alpha^2}{(1-\lambda)} \leq \frac{\alpha}{(1-\lambda)}.$$

لذا

$$\frac{2\alpha^2}{(\lambda^2-1)+(2-2\lambda)} + \frac{\alpha^2}{(1-\lambda)} \leq \frac{4\alpha^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{(1-\lambda)}.$$

(ب) برای $k = 1, 2, 3, \dots$ و $0 < \alpha \leq 1$ داریم:

$$\frac{\alpha^2}{(1-\lambda)3^k} \leq \frac{\alpha}{(1-\lambda)3^k}.$$

لذا

$$\frac{4\alpha^2}{2^{2k}(1-\lambda)^2} + \frac{\alpha^2}{(1-\lambda)3^k} \leq \frac{4\alpha^2}{2^{2k}(1-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{(1-\lambda)3^k}.$$

بنابراین واضح است که نتیجه ۳.۲ کران بدست آمده برای ضرایب $|a_2|$ و $|a_3|$ را که توسط جودیاسو ارائه گردید، بهبود می بخشد.

همچنین با در نظر گرفتن $h(z) = p(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$ و $k = \lambda = 0$ در قضیه ۱۰.۲ داریم:

نتیجه ۴.۲. [۸۴] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به زیر رده $S_\Sigma^*(\alpha)$ باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \sqrt{2}\alpha, \quad |a_3| \leq 3\alpha^2.$$

یادآوری ۱۳.۲. نتیجه ۴.۲ کران بدست آمده از رده معروف $S_\Sigma^*(\alpha)$ که توسط برانان [۱۲] معرفی و مطالعه گردیده را بهبود می بخشد.

قضیه ۱۲.۲. [۱۲] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به زیر رده $S_\Sigma^*(\alpha)$ باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}, \quad |a_3| \leq 2\alpha.$$

همچنین با در نظر گرفتن $h(z) = p(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ و $h(z) = p(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ و $0 \leq \beta < 1$, $z \in \mathbb{D}$ در قضیه ۱۰.۲ داریم:

نتیجه ۵.۲. [۸۴] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به رده $\mathcal{M}_\Sigma^{k,\lambda}(\beta)$ باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \min \left\{ \frac{2(1-\beta)}{2^k(1-\lambda)}, \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2^{2k}(\lambda^2-1) + (2-2\lambda)3^k}} \right\},$$

و

$$|a_3| \leq \min \left\{ \frac{4(1-\beta)^2}{2^{2k}(1-\lambda)^2} + \frac{1-\beta}{(1-\lambda)3^k}, \frac{2(1-\beta)}{2^{2k}(\lambda^2-1) + (2-2\lambda)3^k} + \frac{1-\beta}{(1-\lambda)3^k} \right\}.$$

یادآوری ۱۴.۲. نتیجه ۵.۲ کران بدست آمده توسط جودیاسو [۴۴] را که در ادامه به آن اشاره شده است را بهبود می بخشد.

قضیه ۱۳.۲. [۴۴] فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و متعلق به زیر رده $\mathcal{M}_\Sigma^{k,\lambda}(\beta)$ باشد. آنگاه،

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2^{2k}(\lambda^2-1) + (2-2\lambda)3^k}}$$

و

$$|a_3| \leq \frac{4(1-\beta)^2}{2^{2k}(1-\lambda)^2} + \frac{1-\beta}{(1-\lambda)3^k}.$$

نتیجه ۶.۲. [۸۴] با قرار دادن $k = \lambda = 0$ در نتیجه ۵.۲، کران ضرایب رده $\mathcal{S}_\Sigma^*(\beta)$ از توابع دو-ستاره گون از مرتبه β معرفی شده توسط برانان [۱۲] حاصل می شود. علاوه بر آن با در نظر گرفتن $k = 1, \lambda = 0$ در نتیجه ۵.۲ کران ضرایب رده $\mathcal{K}_\Sigma(\beta)$ از رده توابع دو-محدب از مرتبه β ، معرفی شده توسط همان نویسندگان خواهد آمد.

۴.۲ رده های $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$

در این بخش به بررسی رده های دیگر از توابع تحلیلی خواهیم پرداخت. از ویژگیهای این رده شامل شدن رده هایی می باشد که در سالهای اخیر محققین در این زمینه مورد مطالعه و بررسی قرار داده اند. در اینجا با استفاده از اصول زیر ترتیبی و پیچش روی توابع تحلیلی رده های زیر را تعریف می نماییم و با استفاده از خواص این رده ها، کارهای گذشته را تعمیم و بهبود می بخشیم.

نمادگذاری ۳.۲. فرض کنیم $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. برای $n \in \mathbb{N}_0$ ، $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ و $-1 \leq B < A \leq 1$ رده های $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ را بصورت زیر معرفی می کنیم.

$$\mathcal{S}_n^\alpha[A, B] = \left\{ f \in \mathcal{S} : e^{i\alpha} \frac{z(\mathcal{D}^n f(z))'}{\mathcal{D}^n f(z)} \prec \cos \alpha \left(\frac{1+Az}{1+Bz} \right) + i \sin \alpha \right\}, \quad (32.2)$$

$$\mathcal{K}_n^\alpha[A, B] = \left\{ f \in \mathcal{S} : e^{i\alpha} \left(1 + \frac{z(\mathcal{D}^n f(z))''}{(\mathcal{D}^n f(z))'} \right) \prec \cos \alpha \left(\frac{1+Az}{1+Bz} \right) + i \sin \alpha \right\}. \quad (33.2)$$

یادآوری ۱۵.۲. مشابه لم الکساندر برای توابع ستارگون و محدب، رابطه زیر برای رده های $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ برقرار است.

$$f(z) \in \mathcal{K}_n^\alpha[A, B] \iff zf'(z) \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]. \quad (۳۴.۲)$$

یادآوری ۱۶.۲. با قرار دادن مقادیر مختلف در پارامترهای موجود در رده های $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ می توان زیر رده هایی از $\mathcal{S}$ که اخیرا محققین در این زمینه تعریف و مورد مطالعه قرار دادند را بدست آورد. در ادامه به ذکر چند مورد آن می پردازیم.

۱. $\mathcal{S}^\circ[A, B] = \mathcal{S}[A, B]$ و $\mathcal{K}^\circ[A, B] = \mathcal{K}[A, B]$ زیر رده های $\mathcal{S}[A, B]$ و $\mathcal{K}[A, B]$ توسط بسیاری از محققین [۲، ۳۲، ۴۱، ۴۲، ۷۱] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

۲. $\mathcal{S}^\circ[1 - 2\beta, -1] = \mathcal{S}^*(\beta)$ و $\mathcal{K}^\circ[1 - 2\beta, -1] = \mathcal{K}(\beta)$ زیر رده های $\mathcal{S}^*(\beta)$ و $\mathcal{K}(\beta)$ توسط گودمن [۳۳] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۳. $\mathcal{S}^\circ\left[\frac{b^2 - a^2 + b}{b}, \frac{1 - b}{a}\right] = \mathcal{S}(a, b)$ و $\mathcal{K}^\circ\left[\frac{b^2 - a^2 + b}{b}, \frac{1 - b}{a}\right] = \mathcal{K}(a, b)$ زیر رده های $\mathcal{S}(a, b)$ و $\mathcal{K}(a, b)$ توسط سیلورمن و سیلویا [۷۱، ۷۲] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۴. $\mathcal{S}^\alpha[A, B] = \mathcal{S}^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{K}^\alpha[A, B] = \mathcal{K}^\alpha[A, B]$ رده های $\mathcal{S}^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{K}^\alpha[A, B]$ توسط افرادی همچون دیووداس [۸، ۹] و نیکیتین [۵۵] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۵. $\mathcal{S}^\circ[A, B] = \mathcal{R}_\circ[A, B]$ و $\mathcal{K}^\circ[A, B] = \mathcal{R}_\circ[A, B]$ رده های $\mathcal{R}_\circ[A, B]$ و $\mathcal{R}_\circ[A, B]$ توسط آهوجا [۲] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

در این قسمت به بررسی ویژگیهای رده های $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ با استفاده از خواص پیچش و عملگر سالاکون می پردازیم.

خواص پیچش رده های $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$

لم ۱.۲. فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. آنگاه $f \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ اگر و تنها اگر

$$\frac{1}{z} \left[f * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^n z^k \right) \right] \neq \circ, \quad (۳۵.۲)$$

که در آن

$$\psi = \frac{e^{i\alpha} + (A \cos \alpha + i B \sin \alpha) \zeta}{e^{i\alpha} (1 + B \zeta)} \quad |\zeta| = 1. \quad (۳۶.۲)$$

برهان. با توجه به تعریف رده $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ و قضیه ۱۴.۱ داریم، اگر $f \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ و تنها اگر

$$e^{i\alpha} \frac{z(\mathcal{D}^n f(z))'}{\mathcal{D}^n f(z)} \neq \cos \alpha \left(\frac{1 + A\zeta}{1 + B\zeta} \right) + i \sin \alpha \quad (z \in \mathbb{D}, |\zeta| = 1)$$

به عبارتی دیگر

$$z(\mathcal{D}^n f(z))' - \mathcal{D}^n f(z) \left(\frac{e^{i\alpha} + (A \cos \alpha + i B \sin \alpha) \zeta}{e^{i\alpha} (1 + B\zeta)} \right) \neq 0. \quad (z \in \mathbb{D}, |\zeta| = 1) \quad (37.2)$$

از خواص عملگر پیچش داریم

$$zf' = f * \frac{z}{(1-z)^2}, \quad f = f * \frac{z}{1-z}.$$

لذا برای توابع $\mathcal{D}^n f(z)$ و $z(\mathcal{D}^n f(z))'$ می توان نوشت:

$$\mathcal{D}^n f(z) = f(z) * h(z) * \frac{z}{1-z}, \quad z(\mathcal{D}^n f(z))' = f(z) * h(z) * \frac{z}{(1-z)^2},$$

که در آن $h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n z^k$ می باشد. قرار می دهیم

$$\psi := \frac{e^{i\alpha} + (A \cos \alpha + i B \sin \alpha) \zeta}{e^{i\alpha} (1 + B\zeta)}.$$

اکنون رابطه (۳۷.۲) را بصورت زیر بازنویسی می کنیم

$$f(z) * h(z) * \left(\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{\psi z}{1-z} \right) \neq 0 \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (38.2)$$

همچنین از بسط $\frac{z}{1-z}$ و $\frac{z}{(1-z)^2}$ داریم

$$\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{\psi z}{1-z} = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) z^k \quad (39.2)$$

با جایگذاری (۳۹.۲) در (۳۸.۲) نتیجه بدست می آید. $\square$

قضیه ۱۴.۲. فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. آنگاه $f \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ اگر و تنها اگر

$$1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB\zeta \sin \alpha) - (A-kB)\zeta \cos \alpha}{(A-B)\zeta \cos \alpha} k^n a_k z^{k-1} \neq 0. \quad (40.2)$$

برهان. از تعریف ψ در (۳۶.۲) داریم

$$\frac{k-\psi}{1-\psi} = - \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB\zeta \sin \alpha) - (A-kB)\zeta \cos \alpha}{(A-B)\zeta \cos \alpha} \quad (41.2)$$

حال با استفاده از (۴۱.۲)، رابطه (۳۵.۲) را بصورت زیر می توان نوشت

$$\frac{1}{z} \left[z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB\zeta \sin \alpha) - (A-kB)\zeta \cos \alpha}{(A-B)\zeta \cos \alpha} k^n a_k z^k \right] \neq 0. \quad (42.2)$$

با ساده کرده (۴۲.۲) رابطه (۴۰.۲) بدست می آید. $\square$

لم ۲.۲. فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. آنگاه $f \in \mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ اگر و تنها اگر

$$\frac{1}{z} \left[f * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^{n+1} z^k \right) \right] \neq \circ, \quad (43.2)$$

که ψ در (۳۶.۲) آمده است.

برهان. قرار می دهیم

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^n z^k,$$

لذا

$$zg'(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^{n+1} z^k. \quad (44.2)$$

از خواص عملگر پیچش $zf' * g = f * zg'$ را داریم. همچنین از یاد آوری ۱۵.۲ داریم $f \in \mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ اگر و تنها اگر $zf' \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ باشد، حال با استفاده از لم ۱.۲ داریم:

$$\frac{1}{z} \left[zf'(z) * g(z) \right] = \frac{1}{z} \left[f(z) * zg'(z) \right] \neq \circ \quad (45.2)$$

با جایگزینی رابطه (۴۴.۲) در (۴۵.۲) نتیجه بدست می آید. $\square$

مشابه قضیه ۱۴.۲ و با استفاده از لم ۲.۲ می توان قضیه زیر را برای رده $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ نشان داد.

قضیه ۱۵.۲. فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) باشد. آنگاه $f \in \mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ اگر و تنها اگر

$$1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB\zeta \sin\alpha) - (A-kB)\zeta \cos\alpha}{(A-B)\zeta \cos\alpha} k^{n+1} a_k z^{k-1} \neq \circ \quad (46.2)$$

کران ضرایب رده های $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$

به عنوان کاربرد هایی از قضایای ۱۴.۲ و ۱۵.۲ می توان به قضایای زیر اشاره نمود.

قضیه ۱۶.۲. فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و $f \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ باشد. آنگاه،

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(|k(B+1)-1| + |A\cos\alpha + iB\sin\alpha| \right) k^n |a_k| \leq (A-B)\cos\alpha. \quad (47.2)$$

برهان. با توجه به قضیه ۱۴.۲ داریم

$$\left| 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB\zeta \sin\alpha) - (A-kB)\zeta \cos\alpha}{(A-B)\zeta \cos\alpha} k^n a_k z^{k-1} \right|$$

$$> 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB\zeta \sin\alpha) - (A-kB)\zeta \cos\alpha}{(A-B)\zeta \cos\alpha} \right| k^n |a_k| \geq 0. \quad (48.2)$$

از طرفی $|e^{i\alpha}| = |\zeta| = 1$ می باشد، بنابراین

$$\left| \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB\zeta \sin\alpha) - (A-kB)\zeta \cos\alpha}{(A-B)\zeta \cos\alpha} \right| = \frac{|e^{i\alpha}(k(B+1)-1) - \zeta(A\cos\alpha + iB\sin\alpha)|}{|(A-B)\zeta \cos\alpha|}$$

$$\leq \frac{|k(B+1)-1| + |A\cos\alpha + iB\sin\alpha|}{(A-B)\cos\alpha}. \quad (49.2)$$

اکنون با جایگذاری (۴۹.۲) در نامساوی (۴۸.۲)، کران (۴۷.۲) برای توابع متعلق به رده $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ بدست می آید.

□

به طور مشابه می توان برای رده $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ قضیه زیر را نشان داد.

قضیه ۱۷.۲. فرض کنید $f(z)$ دارای بسط سری توانی (۱.۱) و $f \in \mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ باشد. آنگاه،

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(|k(B+1)-1| + |A\cos\alpha + iB\sin\alpha| \right) k^{n+1} |a_k| \leq (A-B)\cos\alpha. \quad (50.2)$$

شمول در رده های $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$

قضیه ۱۸.۲. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\mathcal{S}_{n+1}^\alpha[A, B] \subset \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$.

برهان. فرض کنیم $f \in \mathcal{S}_{n+1}^\alpha[A, B]$ ، آنگاه از لم ۱.۲ داریم

$$\frac{1}{z} \left[f * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^{n+1} z^k \right) \right] \neq 0, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (51.2)$$

که ψ در (۳۶.۲) آمده است. می توانیم برای $z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^{n+1} z^k$ بنویسیم

$$z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^{n+1} z^k = \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} k z^k \right) * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^n z^k \right). \quad (52.2)$$

از طرفی برای $z + \sum_{k=2}^{\infty} k z^k$ داریم

$$\frac{1}{z} \left[\left(z + \sum_{k=2}^{\infty} k z^k \right) * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} k^{-1} z^k \right) \right] = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} z^{k-1} = \frac{1}{1-z} \neq 0, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (53.2)$$

بنابراین از (۵۲.۲) می توان نتیجه گرفت

$$f * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^n z^k \right) \neq 0. \quad (z \in \mathbb{D})$$

□ لذا $f \in S_n^\alpha[A, B]$ و قضیه اثبات می شود.

به طور مشابه برای رده $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۹.۲. $\mathcal{K}_{n+1}^\alpha[A, B] \subset \mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ برای $n \in \mathbb{N}$.

نتیجه ۷.۲. $S_n^\alpha[A, B] \subset S^\alpha[A, B]$ برای $n \in \mathbb{N}$.

نتیجه ۸.۲. $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B] \subset \mathcal{K}^\alpha[A, B]$ برای $n \in \mathbb{N}$.

یادآوری ۱۷.۲. در حالت خاص از نتایج ۷.۲ و ۸.۲ داریم $\mathcal{K}^\alpha[A, B] \subset S^\alpha[A, B]$.

برنارد [۷] برای پوسته محدب از رده توابع تحلیلی قضیه زیر را نشان داد.

قضیه ۲۰.۲. [۷] فرض کنید توابع $\varphi \in \mathcal{K}$ ، $g \in S^*$ و F با $Re(F(z)) > 0$ روی $\mathbb{D}$ تابع تحلیلی باشد. آنگاه $\frac{\varphi * (F \cdot g)}{\varphi * g}$ در پوسته محدب $F(\mathbb{D})$ قرار دارد. به عبارتی دیگر

$$\frac{\varphi * (F \cdot g)}{\varphi * g} \in coF(\mathbb{D}).$$

قضیه ۲۱.۲. فرض کنید $f \in S_n^\alpha[A, B]$ و $\varphi \in \mathcal{K}$. آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f * \varphi \in S_n^\alpha[A, B]$.

برهان. فرض کنیم $F = \frac{z(D^n f(z))'}{D^n f(z)}$. اگر $f \in S_n^\alpha[A, B]$ ، آنگاه $e^{i\alpha} F \prec h$ که در آن

$$h(z) = \cos \alpha \left(\frac{1 + Az}{1 + Bz} \right) + i \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} G(z) &= e^{i\alpha} \frac{z(\varphi * D^n f(z))'}{\varphi * D^n f(z)} = e^{i\alpha} \frac{z(\varphi * (D^n f(z)))'}{\varphi * D^n f(z)} \\ &= \frac{\varphi * e^{i\alpha} (z(D^n f(z)))'}{\varphi * D^n f(z)} = \frac{\varphi * (e^{i\alpha} F \cdot (D^n f(z)))}{\varphi * D^n f(z)} \end{aligned}$$

از $f \in S_n^\alpha[A, B]$ داریم $D^n f(z) \in S^*$ و همچنین از قضیه ۲۰.۲ داریم:

$$\frac{\varphi * (e^{i\alpha} F \cdot (D^n f(z)))}{\varphi * D^n f(z)} \in co(e^{i\alpha} F(\mathbb{D})). \quad (54.2)$$

با توجه به تعریف زیر ترتیبی از $e^{i\alpha} F \prec h$ داریم $e^{i\alpha} F(\mathbb{D}) \subset h(\mathbb{D})$. همچنین $h(\mathbb{D})$ محدب است لذا $co(e^{i\alpha} F(\mathbb{D})) \subset h(\mathbb{D})$. حال از تابع $G(z)$ و رابطه (۵۴.۲) داریم $G(\mathbb{D}) \subset h(\mathbb{D})$ ، همچنین $G(0) = h(0)$. بنابراین با استفاده از قضیه ۱۴.۱، $e^{i\alpha} G(z) \prec h(z)$ و در نتیجه

□ $f * \varphi \in S_n^\alpha[A, B]$

قضیه ۲۲.۲. فرض کنید $f, g \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$. آنگاه برای $n \geq 1$ ، $f * g \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$.

برهان. فرض کنیم $g \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ ، با استفاده از قضیه ۱۹.۲ داریم

$$\mathcal{S}_n^\alpha[A, B] \subset \mathcal{S}_1^\alpha[A, B] = \mathcal{K}_\circ^\alpha[A, B]$$

از طرفی دیگر $\mathcal{K}_\circ^\alpha[A, B] \subset \mathcal{K}^\alpha[1, -1] \subset \mathcal{K}$ ، لذا $g \in \mathcal{K}$. حال با استفاده از ۲۱.۲ برای

□

$f \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ داریم $f * \varphi \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$.

فصل ۳

نگاشتهای همساز و تك ارز

۱.۳ مقدمه

بخش عمده ای از فعالیت های محققان رشته آنالیز مختلط به توابع همساز ناشی از اهمیت و ارتباط این رده از توابع مختلط با مبحث سطوح مینیمال^۱ در هندسه می باشد. در این راستا می توان به قضیه نمایش وایرستراس^۲ [۳۶] اشاره نمود. با همین انگیزه زیررده های فراوانی از توابع همساز معرفی و روی ویژگی هایی همچون کران ضرایب، بسط سری توانی، قضیه رشد و اغتشاش، خواص پیچش، تحدب، ... مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است.

اما شروع تحقیق بر روی نگاشتهای همساز مختلط را به مقاله کلونی و شیل اسمال [۱۵] و با معرفی رده $\mathcal{S}_H$ می باشد. آنها نشان دادند می توان هرتابع $f \in \mathcal{S}_H$ را به صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت که h و g توابعی تحلیلی می باشند.

با استفاده از تکنیک بُرش^۳ اولین بار کلونی و شیل اسمال [۱۵] روشی را برای ساخت توابع همساز و تك ارز $f = h + \bar{g}$ ارائه نمودند. این روش مبتنی بر دو تابع $\varphi(z)$ و $\omega(z)$ (دایلتیشن^۴) می باشد که در آن $\varphi(z) := h(z) - g(z)$ يك تابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ و محدب در جهت محور حقیقی (CHD) و دایلتیشن $\omega(z) := \frac{g'(z)}{h'(z)}$ روی $\mathbb{D}$ تحلیلی و $|\omega(z)| < 1$ می باشد. با استفاده از این

¹Minimal Surfaces

²Weierstrass representation

³The Shearing Technique

⁴The Dilatation

توابع می توان به معادلات زیر دست یافت.

$$h'(z) = \frac{\varphi'(z)}{1-\omega(z)}, \quad g'(z) = \frac{\varphi'(z)\omega(z)}{1-\omega(z)}.$$

با انتگرالگیری از $h'(z)$ و $g'(z)$ می توان قسمت تحلیلی^۵ و هم تحلیلی^۶ تابع $f = h + \bar{g}$ را بدست می آوریم. این روش را برش افقی از $\varphi(z)$ با دایلتیشن تحلیلی $\omega(z)$ گویند.

قضیه ۱.۳ (Shearing Technique). [۱۵] فرض کنید $f = h + \bar{g}$ تابع همساز و موضعاً تك ارز در $\mathbb{D}$ باشد. آنگاه f تابعی تك ارز و CHD در $\mathbb{D}$ است اگر و تنها اگر $h - g$ يك تابع تحلیلی تك ارز و CHD در $\mathbb{D}$ باشد.

یادآوری ۱.۳. فرض کنیم تابع f در جهت γ محدب باشد، لذا $e^{-i\gamma}f$ و $e^{i\gamma}g$ و $\varphi = e^{-i\gamma}h - e^{i\gamma}g$ توابعی CHD می باشند. بنابراین $h - e^{2i\gamma}g$ در جهت γ محدب است و لذا می توان قضیه ۱.۳ را برای توابعی که در جهتی غیر از جهت محور حقیقی محدب می باشند بکار برد.

قضیه ۲.۳. فرض کنید $f = h + \bar{g}$ تابع همساز و موضعاً تك ارز در $\mathbb{D}$ باشد. آنگاه f تابعی تك ارز و در جهت γ محدب است اگر و تنها اگر $h - e^{2i\gamma}g$ يك تابع تحلیلی تك ارز و در جهت γ محدب باشد.

مثال ۱.۳. فرض کنید $\varphi(z) = \frac{z}{1-z}$ و $\omega(z) = z$ باشد. تابع $\varphi(z)$ تك ارز و دیسك واحد را به نیم صفحه راست می نگارد، لذا يك CHD است. حال با استفاده از $\omega = \frac{g'}{h'}$ و تکنیک برش داریم:

$$\varphi'(z) = h'(z) - g'(z) = h'(z)(1 - \omega(z)) = \frac{1}{(1-z)^2} \Rightarrow h'(z) = \frac{1}{(1-z)^3},$$

با انتگرالگیری از $h'(z)$ داریم:

$$h(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-\zeta)^3} d\zeta = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2},$$

و با استفاده از رابطه $g'(z) = zh'(z)$ داریم:

$$g(z) = \int_0^z \frac{\zeta}{(1-\zeta)^3} d\zeta = \frac{\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}.$$

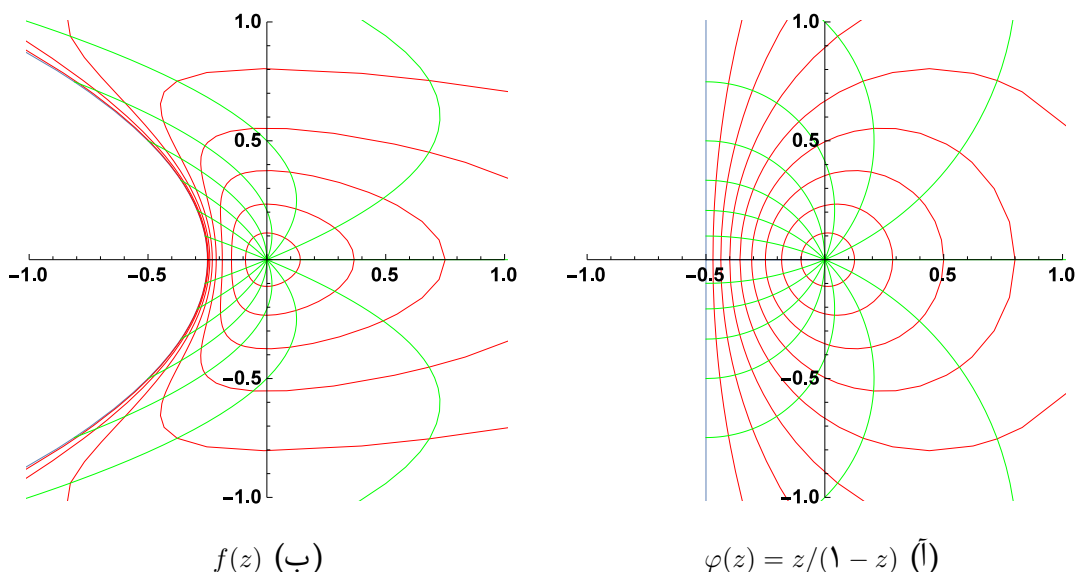
لذا برای تابع f داریم:

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} + \frac{\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}.$$

در شکل ۱.۳ تصویر دیسك واحد $\mathbb{D}$ تحت توابع $\varphi(z)$ و $f(z)$ نشان داده شده است.

⁵The Analytic

⁶The Co-Analytic



شکل ۱.۳: برش افقی از $\varphi(z) = \frac{z}{1-z}$ با دایلیتیشن تحلیلی $\omega(z) = z$

شیل اسمال [۶۹] نشان داد اگر $f \in \mathcal{S}_H^\circ$ و برد f نسبت به مبدا ستارگون باشد، آنگاه کران ضرایب برای بسط سری توانی تابع f به صورت زیر است:

$$|a_n| \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6}, \quad |b_n| \leq \frac{(n-1)(2n-1)}{6}.$$

جهانگیری [۲۸] زیر رده $\mathcal{S}_H^*[\alpha]$ از رده $\mathcal{S}_H$ را به صورت زیر تعریف نمود. زیر رده $\mathcal{S}_H^*[\alpha]$ شامل تمام توابع ستارگون از مرتبه α ($0 \leq \alpha < 1$) با بسط سری توانی (۴.۱) که در شرط زیر صدق می کنند:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\arg f(re^{i\theta})) \geq \alpha, \quad |z| = r < 1$$

و نشان داد اگر $f = h + \bar{g}$ با بسط (۵.۱) در رابطه زیر صدق کند

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| + \frac{n+\alpha}{1-\alpha} |b_n| \right) \leq 2, \quad (|a_1| = 1, 0 \leq \alpha < 1)$$

آنگاه f همساز و تک ارز بر دیسک واحد $\mathbb{D}$ می باشد و $f \in \mathcal{S}_H^*[\alpha]$. در سالهای اخیر مقالات فراوانی در زمینه توابع همساز و خواص تحلیلی و هندسی آنها نوشته شده است که ما در اینجا به معرفی و تحقیق بر روی برخی از زیر رده های توابع همساز خواهیم پرداخت.

۲.۳ رده $\mathcal{S}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$

در فصل ۲ به عملگر سالاگون بر روی توابع تحلیلی اشاره گردید. اما همانطور که می دانیم توابع همساز از دو جزء تحلیلی $h(z)$ و هم تحلیلی $g(z)$ تشکیل شده که جهانگیری [۲۹] برای

استفاده از عملگر سالگون روی تابع همساز $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱)، عملگر اصلاح شده سالگون را بصورت زیر معرفی نمود:

$$\mathcal{D}^n f(z) = \mathcal{D}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)}, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.3)$$

که در آن

$$\mathcal{D}^n h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k, \quad \mathcal{D}^n g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n b_k z^k. \quad (2.3)$$

نمادگذاری ۱.۳. [۸۸] رده تمام توابع $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ با

$$\operatorname{Re} \left\{ (1 + \gamma e^{i\theta}) \frac{\mathcal{D}^m h(z) * \varphi(z) + (-1)^{m+l} \overline{\mathcal{D}^m g(z) * \psi(z)}}{\mathcal{D}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)}} - \gamma e^{i\theta} \right\} > \alpha, \quad (3.3)$$

که در آن $\gamma \geq 0$ ، $0 \leq \alpha < 1$ ، $m \geq n$ ، $m, n \in \mathbb{N}_0$ ، $l \in \{0, 1\}$ و $\theta \in \mathbb{R}$ می باشد و همچنین برای $\lambda_k \geq 1$ و $\mu_k \geq 1$ بترتیب توابع $\varphi(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k z^k$ و $\psi(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k z^k$ روی $\mathbb{D}$ تحلیلی اند را با $\mathcal{S}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ نمایش می دهیم.

همچنین زیر رده ای از $\mathcal{S}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ شامل آن دسته از توابع $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H$ که در آن h و g به شکل

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| z^k, \quad g(z) = (-1)^{m+l-1} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| z^k, \quad |b_1| < 1. \quad (4.3)$$

را با $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ نمایش می دهیم.

در تعریف بالا عملگر * همان ضرب هادامارد یا کانولوشن برای توابع تحلیلی است که در تعریف ۱۴.۱ آورده شده است.

یادآوری ۲.۳. با قرار دادن مقادیر مختلف در پارامترهای موجود در رده $\mathcal{S}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ ، می توان زیر رده هایی از $\mathcal{S}_H$ که اخیراً محققین در این زمینه تعریف و مورد مطالعه قرار دادند را بدست آورد. در ادامه بذکر چند مورد آن می پردازیم.

۱. $\mathcal{S}_H^{\circ,m,n}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}; \circ; \alpha\right) = \mathcal{S}_H(m, n; \alpha)$ و $\mathcal{TS}_H^{\circ,m,n}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}; \circ; \alpha\right) = \mathcal{TS}_H(m, n; \alpha)$ رده های $\mathcal{S}_H(m, n; \alpha)$ و $\mathcal{TS}_H(m, n; \alpha)$ توسط یلسین [۷۹] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲. $\mathcal{S}_H^{\circ,n+1,n}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}; \circ; \alpha\right) = \mathcal{S}_H(n; \alpha)$ و $\mathcal{TS}_H^{\circ,n+1,n}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}; \circ; \alpha\right) = \mathcal{TS}_H(n; \alpha)$ رده های $\mathcal{S}_H(n; \alpha)$ و $\mathcal{TS}_H(n; \alpha)$ توسط جهانگیری [۳۹] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۳. $S_H^{\circ,1,\circ}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}; \circ; \alpha\right) = S_H^{1,\circ,\circ}\left(\frac{z}{(1-z)^2}, \frac{z}{(1-z)^2}; \circ; \alpha\right) = S_H^*(\alpha)$ رده $\mathcal{TS}_H^{\circ,1,\circ}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}; \circ; \alpha\right) = \mathcal{TS}_H^{1,\circ,\circ}\left(\frac{z}{(1-z)^2}, \frac{z}{(1-z)^2}; \circ; \alpha\right) = \mathcal{TS}_H^*(\alpha)$ های $S_H^*(\alpha)$ و $\mathcal{TS}_H^*(\alpha)$ توسط جهانگیری [۳۸] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۴. $S_H^{\circ,2,1}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}; \circ; \alpha\right) = \mathcal{TK}_H(\alpha)$ و $S_H^{1,2,1}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}; \circ; \alpha\right) = \mathcal{TK}_H(\alpha)$ های $\mathcal{TK}_H(\alpha)$ و $\mathcal{TK}_H(\alpha)$ توسط جهانگیری [۳۸] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۵. $S_H^{1,\circ,\circ}(\varphi, \psi; \circ; \alpha) = S_H(\varphi, \psi; \alpha)$ و $\mathcal{TS}_H^{1,\circ,\circ}(\varphi, \psi; \circ; \alpha) = \mathcal{TS}_H(\varphi, \psi; \alpha)$ رده های $S_H(\varphi, \psi; \alpha)$ و $\mathcal{TS}_H(\varphi, \psi; \alpha)$ توسط فراسین [۲۸] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۶. $S_H^{\circ,2,1}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}; \circ; \circ\right) = \mathcal{TK}_H$ و $S_H^{1,2,1}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}; \circ; \circ\right) = \mathcal{TK}_H$ رده های $\mathcal{TK}_H$ و $\mathcal{TK}_H$ توسط سیلورمن [۷۰] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۷. $S_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \circ; \alpha) = S_H^i(m, n, \varphi, \psi; \alpha)$ و $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \circ; \alpha) = \mathcal{TS}_H^i(m, n, \varphi, \psi; \alpha)$ رده های $S_H^i(m, n, \varphi, \psi; \alpha)$ و $\mathcal{TS}_H^i(m, n, \varphi, \psi; \alpha)$ توسط شرما [۶۸] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۸. $S_H^{\circ,\circ,\circ}\left(\frac{z}{(1-z)^2}, \frac{z}{(1-z)^2}; \circ; \alpha\right) = \overline{HST}\left(\frac{z}{(1-z)^2}, \frac{z}{(1-z)^2}; \circ; \alpha\right)$ رده $\overline{HST}\left(\frac{z}{(1-z)^2}, \frac{z}{(1-z)^2}; \circ; \alpha\right)$ توسط اشوا [۵] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۹. $S_H^{\circ,\circ,\circ}\left(\frac{z+z^2}{(1-z)^3}, \frac{z+z^2}{(1-z)^3}; \circ; \alpha\right) = \overline{HST}\left(\frac{z+z^2}{(1-z)^3}, \frac{z+z^2}{(1-z)^3}; \circ; \alpha\right)$ رده $\overline{HST}\left(\frac{z+z^2}{(1-z)^3}, \frac{z+z^2}{(1-z)^3}; \circ; \alpha\right)$ توسط اشوا [۵] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۱۰. $S_H^{\circ,\circ,\circ}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha) = S_H(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ رده $S_H(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ توسط فراسین [۳۰] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

همانطور که در بالا مشاهده نمودید رده $S_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ در بر دارنده زیر رده های مختلفی از رده S_H می باشد که توسط محققین این زمینه به آن پرداخته شده است. به عبارتی دیگر رده تعریف شده توسط ما دربرگیرنده و تعمیم دهنده کارهای موجود در این زمینه می باشد. در ادامه به بررسی خواصی از این رده می پردازیم:

قضیه ۳.۳. [۸۸] فرض کنید تابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) در نامساوی زیر صدق کند:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\gamma)k^m \lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\gamma)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |b_k| \leq 1 \quad (۵.۳)$$

که در آن $\alpha < 1$ ، $\circ \leq \gamma \leq 1$ ، $\mu_k, \lambda_k \geq k$ ، $\alpha \leq \gamma \leq 1$ ، $m \geq n$ ، $m, n \in \mathbb{N}_0$ ، $l \in \{\circ, 1\}$ آنگاه f تابعی همساز، تک ارز و جهت نگهدار در $\mathbb{D}$ است و $f \in S_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$

برهان. با توجه به فرض قضیه برای $k \geq 1$ داریم:

$$k \leq \frac{(\gamma + 1)k^m \lambda_k - (\gamma + \alpha)k^n}{1 - \alpha}, \quad k \leq \frac{(\gamma + 1)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma + \alpha)k^n}{1 - \alpha}$$

لذا برای توابع $h(z)$ و $g(z)$ با بسط سری توانی (۵.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |h'(z)| &\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|r^{k-1} > 1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k| \geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\gamma + 1)k^m \lambda_k - (\gamma + \alpha)k^n}{1 - \alpha} |a_k| \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma + 1)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma + \alpha)k^n}{1 - \alpha} |b_k| \geq \sum_{k=1}^{\infty} k|b_k| > \sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|r^{k-1} \geq |g'(z)|. \end{aligned}$$

بنابراین $f(z)$ روی $\mathbb{D}$ جهت نگهدار است. برای اینکه نشان دهیم $f(z)$ روی $\mathbb{D}$ تك ارز است فرض کنیم $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ و $z_1 \neq z_2$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{h(z_1) - h(z_2)} \right| &\geq 1 - \left| \frac{g(z_1) - g(z_2)}{h(z_1) - h(z_2)} \right| \\ &= 1 - \left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z_1^k - z_2^k)}{(z_1 - z_2) - \sum_{k=2}^{\infty} a_k(z_1^k - z_2^k)} \right| > 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|} \\ &\geq 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma + 1)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma + \alpha)k^n}{1 - \alpha} |b_k|}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\gamma + 1)k^m \lambda_k - (\gamma + \alpha)k^n}{1 - \alpha} |a_k|} \geq 0. \end{aligned}$$

حال برای اثبات $f \in \mathcal{S}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ ، به این نکته توجه داریم که برای $\alpha \geq 0$ ، $Re\{\omega\} \geq \alpha$ ، اگر و تنها اگر $|\omega - \alpha - 1| \leq |\omega - \alpha + 1|$. لذا کافیت نشان دهیم:

$$|(\gamma + 1)e^{i\theta}A(z) - (\gamma e^{i\theta} + \alpha - 1)B(z)| - |(\gamma + 1)e^{i\theta}A(z) - (\gamma e^{i\theta} + \alpha + 1)B(z)| \geq 0 \quad (۶.۳)$$

که در آن $A(z) = \mathcal{D}^m h(z) * \varphi(z) + (-1)^{m+l} \overline{\mathcal{D}^m g(z)} * \psi(z)$ و $B(z) = \mathcal{D}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)}$

با جایگذاری سری های توانی توابع $h(z)$ و $g(z)$ در (۶.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 & |(\mathfrak{I} + \gamma e^{i\theta})A(z) - (\gamma e^{i\theta} + \alpha - \mathfrak{I})B(z)| - |(\mathfrak{I} + \gamma e^{i\theta})A(z) - (\gamma e^{i\theta} + \alpha + \mathfrak{I})B(z)| \\
 &= |(\mathfrak{I} + \gamma e^{i\theta})(\mathcal{D}^m h(z) * \varphi(z) + (-\mathfrak{I})^{m+l} \overline{\mathcal{D}^m g(z) * \psi(z)}) - (\gamma e^{i\theta} + \alpha - \mathfrak{I})(\mathcal{D}^n h(z) + (-\mathfrak{I})^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)})| \\
 &= |(\mathfrak{I} + \gamma e^{i\theta})(\mathcal{D}^m h(z) * \varphi(z) + (-\mathfrak{I})^{m+l} \overline{\mathcal{D}^m g(z) * \psi(z)}) - (\gamma e^{i\theta} + \alpha + \mathfrak{I})(\mathcal{D}^n h(z) + (-\mathfrak{I})^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)})| \\
 &= |(\mathfrak{I} + \gamma e^{i\theta})(z + \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} k^m \lambda_k a_k z^k + (-\mathfrak{I})^{m+l} \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} k^m \mu_k b_k z^k) - (\gamma e^{i\theta} + \alpha - \mathfrak{I})(z + \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} k^n \lambda_k a_k z^k \\
 &+ (-\mathfrak{I})^n \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} k^n \mu_k b_k z^k)| - |(\mathfrak{I} + \gamma e^{i\theta})(z + \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} k^m \lambda_k a_k z^k + (-\mathfrak{I})^{m+l} \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} k^m \mu_k b_k z^k) \\
 &- (\gamma e^{i\theta} + \alpha + \mathfrak{I})(z + \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} k^n \lambda_k a_k z^k + (-\mathfrak{I})^n \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} k^n \mu_k b_k z^k)| = |(\mathfrak{I} - \alpha)z + \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} ((\mathfrak{I} + \gamma e^{i\theta})k^m \lambda_k \\
 &- (\gamma e^{i\theta} + \alpha - \mathfrak{I})k^n) a_k z^k + (-\mathfrak{I})^{m+l} \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} ((\mathfrak{I} + \gamma e^{i\theta})k^m \mu_k - (-\mathfrak{I})^{m+l-n} (\gamma e^{i\theta} + \alpha - \mathfrak{I})k^n) b_k z^k| \\
 &- |-\alpha z + \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} ((\mathfrak{I} + \gamma e^{i\theta})k^m \lambda_k - (\gamma e^{i\theta} + \alpha + \mathfrak{I})k^n) a_k z^k + (-\mathfrak{I})^{m+l} \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} ((\mathfrak{I} + \gamma e^{i\theta})k^m \mu_k \\
 &- (-\mathfrak{I})^{m+l-n} (\gamma e^{i\theta} + \alpha + \mathfrak{I})k^n) b_k z^k| \geq (\mathfrak{I} - \alpha)|z| - \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} ((\mathfrak{I} + \gamma)k^m \lambda_k - (\gamma + \alpha - \mathfrak{I})k^n) |a_k| |z|^k \\
 &- \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} ((\mathfrak{I} + \gamma)k^m \mu_k - (-\mathfrak{I})^{m+l-n} (\gamma + \alpha - \mathfrak{I})k^n) |b_k| |z|^k - \alpha |z| - \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} ((\mathfrak{I} + \gamma)k^m \lambda_k \\
 &- (\gamma + \alpha + \mathfrak{I})k^n) |a_k| |z|^k - \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} ((\mathfrak{I} + \gamma)k^m \mu_k - (-\mathfrak{I})^{m+l-n} (\gamma + \alpha + \mathfrak{I})k^n) |b_k| |z|^k = \mathfrak{I}(\mathfrak{I} - \alpha)|z| \\
 &- \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} \frac{(\mathfrak{I} + \gamma)k^m \lambda_k - (\gamma + \alpha)k^n}{\mathfrak{I} - \alpha} |a_k| |z|^{k-1} + \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} \frac{(\mathfrak{I} + \gamma)k^m \mu_k - (-\mathfrak{I})^{m+l-n} (\gamma + \alpha)k^n}{\mathfrak{I} - \alpha} |b_k| |z|^{k-1} \\
 &\geq \mathfrak{I}(\mathfrak{I} - \alpha) \left\{ \mathfrak{I} - \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} \frac{(\mathfrak{I} + \gamma)k^m \lambda_k - (\gamma + \alpha)k^n}{\mathfrak{I} - \alpha} |a_k| + \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} \frac{(\mathfrak{I} + \gamma)k^m \mu_k - (-\mathfrak{I})^{m+l-n} (\gamma + \alpha)k^n}{\mathfrak{I} - \alpha} |b_k| \right\} \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

بنابراین نامساوی (۶.۳) برقرار است و در نتیجه $f \in S_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$. همچنین نامساوی (۵.۳) برای تابع زیر به مساوی تبدیل می شود.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= z + \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} \frac{\mathfrak{I} - \alpha}{(\mathfrak{I} + \gamma)k^m \lambda_k - (\gamma + \alpha)k^n} x_k z^k \\
 &+ \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} \frac{\mathfrak{I} - \alpha}{(\mathfrak{I} + \gamma)k^m \mu_k - (-\mathfrak{I})^{m+l-n} (\gamma + \alpha)k^n} \overline{y_k z^k},
 \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

که در آن $\sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=\mathfrak{I}}^{\infty} |y_k| = \mathfrak{I}$ است. توابعی به شکل (۷.۳) متعلق به رده $S_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$

می باشند، زیرا

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\gamma + \alpha)k^m \lambda_k - (\gamma + \alpha)k^n}{1 - \alpha} |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma + \alpha)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma + \alpha)k^n}{1 - \alpha} |b_k| \\ = \sum_{k=2}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = 1 \end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۳. [۸۸] فرض کنید تابع $f = h + \bar{g}$ دارای بسط سری توانی (۴.۱) باشد. آنگاه
 $f \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\gamma + \alpha)k^m \lambda_k - (\gamma + \alpha)k^n}{1 - \alpha} |a_k| + \frac{(\gamma + \alpha)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma + \alpha)k^n}{1 - \alpha} |b_k| \right) \leq 2 \quad (۸.۳)$$

که در آن $\gamma \geq 0$ ، $0 \leq \alpha < 1$ ، $m \geq n$ ، $m, n \in \mathbb{N}_0$ ، $l \in \{0, 1\}$ می باشد.

برهان. بنابر قضیه ۳.۳ و با فرض برقراری (۸.۳)، چون $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha) \subset \mathcal{S}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ لذا $f \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ حال به بررسی طرف دیگر حکم می پردازیم.
 از آنجا که شرط لازم و کافی برای $f \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ باشد آن است که

$$\operatorname{Re} \left\{ (\gamma + \alpha) \frac{\mathcal{D}^m h(z) * \varphi(z) + (-1)^{m+l} \overline{\mathcal{D}^m g(z) * \psi(z)}}{\mathcal{D}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)}} - \gamma e^{i\theta} \right\} > \alpha,$$

به عبارتی دیگر

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\gamma + \alpha)(\mathcal{D}^m h(z) * \varphi(z) + (-1)^{m+l} \overline{\mathcal{D}^m g(z) * \psi(z)})}{\mathcal{D}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)}} \right\} \\ - \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\gamma e^{i\theta} + \alpha)(\mathcal{D}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)})}{\mathcal{D}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)}} \right\} > 0. \end{aligned}$$

با جایگذاری سری توانی توابع $h(z)$ و $g(z)$ در نامساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\gamma + \alpha)z - \sum_{k=2}^{\infty} ((\gamma + \alpha)k^m \lambda_k - (\gamma e^{i\theta} + \alpha)k^n) |a_k| z^k}{z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| k^n z^k + (-1)^{m+l+n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n |b_k| \bar{z}^k} \right\} \\ + \operatorname{Re} \left\{ \frac{(-1)^{2m+2l-1} \sum_{k=1}^{\infty} ((\gamma + \alpha)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma e^{i\theta} + \alpha)k^n) |b_k| \bar{z}^k}{z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| k^n z^k + (-1)^{m+l+n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n |b_k| \bar{z}^k} \right\} > 0 \quad (۹.۳) \end{aligned}$$

از طرفی $1 = |e^{i\theta}| \leq \operatorname{Re}\{e^{i\theta}\}$ ، لذا (۹.۳) را بصورت زیر می نویسیم:

$$\left\{ \frac{((1-\alpha) - \sum_{k=2}^{\infty} ((1+\gamma)k^m \lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n))|a_k|r^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|k^n r^{k-1} + (-1)^{m+l+n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n |b_k|r^{k-1}} - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} ((1+\gamma)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n)|b_k|r^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|k^n r^{k-1} + (-1)^{m+l+n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n |b_k|r^{k-1}} \right\} > 0 \quad (10.3)$$

حال اگر (۸.۳) برقرار نباشد، صورت کسر (۱۰.۳) برای $1 \rightarrow r = z$ ، منفی می شود. در نتیجه $z_0 = r_0$ در $(0, 1)$ وجود دارد که مقدار کسر (۱۰.۳) منفی می شود و این با $f \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ در تناقض است. $\square$

در اینجا به بررسی قضیه رشد برای توابع متعلق به $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ می پردازیم.

قضیه ۵.۳. [۸۸] فرض کنید تابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) متعلق به رده $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ باشد. همچنین ضرایب μ_k و λ_k در نمادگذاری ۱.۳ برای توابع φ و ψ بازای $k \geq 2$ ، $\lambda_k, \mu_k \geq \lambda_2$ باشد. آنگاه برای $1 < |z| = r$ داریم:

$$|f(z)| \leq (1 + |b_1|)r + \left(1 - \frac{(1+\gamma) - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)}{1-\alpha}\right)|b_1| \frac{(1-\alpha)r^2}{(1+\gamma)^2 \lambda_2 - (\gamma+\alpha)^2 n}, \quad (11.3)$$

$$|f(z)| \geq (1 - |b_1|)r - \left(1 - \frac{(1+\gamma) - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)}{1-\alpha}\right)|b_1| \frac{(1-\alpha)r^2}{(1+\gamma)^2 \lambda_2 - (\gamma+\alpha)^2 n}. \quad (12.3)$$

برهان. فرض کنیم $f \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ باشد. با توجه به (۸.۳) برای $1 < |z| = r$ داریم:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1 + |b_1|)r + \sum_{k=2}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)r^k \\ &\leq (1 + |b_1|)r + r^2 \sum_{k=2}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \\ &\leq (1 + |b_1|)r + \frac{(1-\alpha)r^2}{(1+\gamma)^2 \lambda_2 - (\gamma+\alpha)^2 n} \cdot \\ &\quad \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\gamma)k^m \lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |a_k| + \frac{(1+\gamma)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |b_k| \right) \\ &\leq (1 + |b_1|)r + \left(1 - \frac{(1+\gamma) - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)}{1-\alpha}\right)|b_1| \frac{(1-\alpha)r^2}{(1+\gamma)^2 \lambda_2 - (\gamma+\alpha)^2 n}, \end{aligned}$$

کران پایین تابع $f(z)$ نیز به طور مشابه اثبات می شود.

برای تابع زیر نامساویهای (۱۱.۳) و (۱۲.۳) به مساوی تبدیل می شود.

$$f(z) = z + |b_1|\bar{z} + \left(1 - \frac{(1+\gamma) - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)}{1-\alpha}\right)|b_1| \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)^m\lambda_2 - (\gamma+\alpha)^n} \cdot \bar{z}^2$$

$$\square \quad \text{که در آن } |b_1| < \frac{1-\alpha}{(1+\gamma) - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)}$$

نتیجه ۱.۳. [۸۸] فرض کنید $f \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ و ضرایب μ_k و λ_k در نمادگذاری ۱.۳ برای توابع φ و ψ به ازای $k \geq 2$ ، $\lambda_k, \mu_k \geq \lambda_2$ باشد. آنگاه،

$$\left\{ w : |w| < 1 - \frac{(1-\alpha)}{(1+\gamma)^m\lambda_2 - (\gamma+\alpha)^n} + \left(\frac{(1+\gamma) - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)}{(1+\gamma)^m\lambda_2 - (\gamma+\alpha)^n} - 1 \right) |b_1| \right\} \subset f(\mathbb{D}).$$

اکنون نشان می دهیم رده $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ تحت ترکیبات محدب از عناصر خود بسته است.

قضیه ۶.۳. [۸۸] رده $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ تحت ترکیبات محدب از عناصر خود بسته است.

برهان. فرض کنیم برای $j = 1, 2, 3, \dots$ ، $f_j \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ که در آن

$$f_j(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_{j,k}| z^k + (-1)^{m+l-n} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{j,k}| \bar{z}^k$$

با توجه به قضیه ۴.۳ داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\gamma)k^m\lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |a_{j,k}| + \frac{(1+\gamma)k^m\mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |b_{j,k}| \right) \leq 2$$

همچنین فرض کنیم $0 \leq \beta_j \leq 1$ و $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 1$. می توان ترکیب محدب از $f_j(z)$ را بصورت زیر نوشت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_j f_j(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j |a_{j,k}| z^k + (-1)^{m+l-n} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j |b_{j,k}| \bar{z}^k,$$

لذا

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\gamma)k^m\lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j |a_{j,k}| + \frac{(1+\gamma)k^m\mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j |b_{j,k}| \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\gamma)k^m\lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |a_{j,k}| + \frac{(1+\gamma)k^m\mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |b_{j,k}| \right) \right) \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 2. \end{aligned}$$

$\square$ حال با توجه به قضیه ۴.۳ داریم $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j f_j \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$

در این قسمت به بررسی نقاط اکستریمال از پوسته محدب رده $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ که با $co\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ نمایش می دهیم می پردازیم.

قضیه ۷.۳. [۸۸] فرض کنید

$$\begin{aligned} h_1(z) &= z, \\ h_k(z) &= z - \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)k^m\lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n} z^k, \quad k \geq 2 \\ g_k(z) &= z + \frac{(-1)^{m+l-1}(1-\alpha)}{(1+\gamma)k^m\mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n} \bar{z}^k, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

باشد. آنگاه $f \in co\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ اگر و تنها اگر f دارای نمایش زیر باشد.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k h_k(z) + y_k g_k(z)), \quad (13.3)$$

که در آن $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) = 1$ و $y_k \geq 0, x_k \geq 0$.
در حالت خاص، $\{h_k\}$ و $\{g_k\}$ نقاط اکستریمال رده $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ می باشد.

برهان. فرض کنیم

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k h_k(z) + y_k g_k(z)),$$

آنگاه،

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)k^m\lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n} x_k z^k \\ &\quad + (-1)^{m+l-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)k^m\mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n} y_k \bar{z}^k \\ &= z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)k^m\lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n} x_k z^k \\ &\quad + (-1)^{m+l-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)k^m\mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n} y_k \bar{z}^k \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha), \end{aligned}$$

زیرا

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\gamma)k^m\lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)k^m\lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n} x_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\gamma)k^m\mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)k^m\mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n} y_k \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k = 1 - x_1 < 1. \end{aligned}$$

در نتیجه $f \in co\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$.

بالعکس، اگر $f \in co\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ با توجه به قضیه ۴.۳، برای $k \geq 2$ ،

$$|a_k| \leq \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)k^m\lambda_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}, \quad |b_k| \leq \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)k^m\mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}, \quad k \geq 1$$

می باشد. حال با قرار دادن

$$x_k = \frac{(1+\gamma)k^m\lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha}|a_k|, \quad k \geq 2$$

$$y_k = \frac{(1+\gamma)k^m\mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha}|b_k|, \quad k \geq 1$$

داریم $\sum_{k=2}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \leq 1$. همچنین برای x_1 تعریف می کنیم:

$$x_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} y_k \geq 0.$$

در نتیجه برای $f(z)$ می توان بسط (۱۳.۳) را بیان نمود. واضح است که $co\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$

□

محدب است. بنابراین $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha) = clco\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$.

در پایان نشان می دهیم رده $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ تحت عملگر کانولوشن از عناصر خود بسته است.

تعریف ۲.۳. برای توابع همساز به شکل

$$f_1(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|z^k + (-1)^{m+l-1} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\bar{z}_k,$$

$$f_2(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |A_k|z^k + (-1)^{m+l-1} \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|\bar{z}_k.$$

کانولوشن $f_1(z)$ در $f_2(z)$ را با $(f_1 * f_2)(z)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$(f_1 * f_2)(z) = f_1(z) * f_2(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k A_k|z^k + (-1)^{m+l-1} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k B_k|\bar{z}_k.$$

قضیه ۸.۳. [۸۸] فرض کنید $f_1, f_2 \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ باشند. آنگاه،

$$f_1 * f_2 \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha).$$

برهان. فرض کنیم f_1 و f_2 با بسط سری توانی زیر متعلق به $\mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$ باشند.

$$f_1(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|z^k + (-1)^{m+l-1} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\bar{z}_k,$$

$$f_2(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |A_k|z^k + (-1)^{m+l-1} \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|\bar{z}_k.$$

همچنین برای ضرایب f_2 با استفاده از قضیه ۴.۳ داریم

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\gamma)k^m \lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |A_k| + \frac{(1+\gamma)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |B_k| \right) \leq 2.$$

بنابراین برای $|A_k| \leq 1, k \geq 2$ و برای $|B_k| \leq 1, k \geq 1$ را داریم. لذا برای $f_1 * f_2$ می توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\gamma)k^m \lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |a_k A_k| + \frac{(1+\gamma)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |b_k B_k| \right) \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1+\gamma)k^m \lambda_k - (\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |a_k| + \frac{(1+\gamma)k^m \mu_k - (-1)^{m+l-n}(\gamma+\alpha)k^n}{1-\alpha} |b_k| \right) \leq 2 \end{aligned}$$

□

در نتیجه $f_1 * f_2 \in \mathcal{TS}_H^{l,m,n}(\varphi, \psi; \gamma; \alpha)$.

۳.۳ رده $S_H(m, n; \alpha, \beta)$

یادآوری ۳.۳. در سال ۲۰۰۲، اوزترک و یلسین [۵۶] رده های $S_H(\alpha)$ و $\mathcal{C}_H(\alpha)$ را بصورت زیر معرفی نمودند:

رده $S_H(\alpha)$ شامل تمام توابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) که در نامساوی زیر صدق می کند

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-\alpha)(|a_k| + |b_k|) \leq (1-\alpha)(1-|b_1|),$$

که در آن $0 \leq \alpha < 1$ و $0 \leq |b_1| < 1$ می باشد. همچنین زیر رده ای از $S_H(\alpha)$ که بسط سری توانی توابع آن در نامساوی

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-\alpha)(|a_k| + |b_k|) \leq (1-\alpha)(1-|b_1|),$$

صدق می کند را با $\mathcal{C}_H(\alpha)$ نمایش می دهند.

در این بخش به بررسی رده دیگر از توابع همساز خواهیم پرداخت. از ویژگیهای این رده شامل شدن رده هایی می باشد که در سالهای اخیر محققین در این زمینه مورد مطالعه و بررسی قرار داده اند. همچنین نتایج بدست آمده توسط اوزترک و یلسین [۵۶] را در بعضی موارد کلیت، بهبود و تصحیح خواهیم کرد و قضایایی در مورد شمول، جهت نگهداری و تک ارزی، قضیه رشد، ترکیبات محدب و خواص کانولوشن آن را بررسی می نماییم.

نمادگذاری ۳.۳. رده تمام توابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) که در نامساوی

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k)(|a_k| + |b_k|) \leq (1-\alpha)(1-|b_1|), \quad (14.3)$$

صدق می کند و در آن $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ ، $m > n$ ، $m, n \in \mathbb{N}_0$ ، $0 \leq \alpha < 1$ ، $0 \leq \beta < 1$ و $|b_1| < 1$ می باشد را با $S_H(m, n; \alpha, \beta)$ نمایش می دهیم.

همچنین زیر مجموعه ای از $S_H(m, n; \alpha, \beta)$ که در آن $b_1 = 0$ باشد را با $S_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ نمایش می دهیم.

یادآوری ۴.۳. همان طوری که در ابتدای بحث به آن اشاره شد با قرار دادن مقادیر مختلف در پارامترهای رده $S_H(m, n; \alpha, \beta)$ ، می توان زیر رده هایی از S_H که اخیراً محققین در این زمینه تعریف و مورد مطالعه قرار دادند را بدست آورد. در ادامه بذکر چند مورد آن می پردازیم.

۱. $S_H(1, 0; 0, 0) = S_H$ و $S_H(2, 1; 0, 0) = C_H$ رده های S_H و C_H توسط آویک [۶] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲. $S_H(1, 0; \alpha, 0) = S_H(\alpha)$ و $S_H(2, 1; \alpha, 0) = C_H(\alpha)$ رده های $S_H(\alpha)$ و $C_H(\alpha)$ توسط اوزترک و یلسین [۵۶] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۳. $S_H(m, n; \alpha, 0) = S_H(m, n, \alpha)$ رده $S_H(m, n, \alpha)$ توسط دیکزیت و پوروال [۱۸] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۴. $S_H(1, 0; \alpha, \beta) = S_H(\alpha, \beta)$ رده $S_H(\alpha, \beta)$ توسط سی او دی [۶۵] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۵. $S_H(n+1, n; \alpha, 0) = S_H(\alpha, n)$ رده $S_H(\alpha, n)$ توسط آوف و سی او دی [۶۶] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

در فصل اول به کانولوشن روی توابع تحلیلی اشاره شد. در اینجا کانولوشن روی توابع همساز را معرفی خواهیم کرد.

تعریف ۴.۳. فرض کنید h و g دارای بسط سری توانی (۴.۱) باشد. اگر $f = h + \bar{g}$ و $F = H + \bar{G}$ باشد که در آن H و G با بسط سری توانی

$$H(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k, \quad G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k, \quad (15.3)$$

باشند. کانولوشن f و F را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$(f * F)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k A_k z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k B_k z^k}. \quad (16.3)$$

همچنین عملگر کانولوشن انتگرال f و F را بصورت

$$(f \diamond F)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k A_k}{k} z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k B_k}{k} z^k}. \quad (17.3)$$

تعریف می شود.

اوزترك و یلسین [۵۶]، α -همسایگی از تابع $f(z)$ را بصورت زیر معرفی نمودند

$$N(f) = \left\{ F : \sum_{k=2}^{\infty} (k - \alpha)(|a_k - A_k| + |b_k - B_k|) + (1 - \alpha)|b_1 - B_1| \leq \delta(1 - \alpha) \right\}$$

که در آن $F = H + \overline{G}$ و H, G با بسط سری توانی (۱۵.۳) می باشند.

قضیه ۹.۳. [۸۶] فرض کنید $1 > \alpha_2 \geq \alpha_1 \geq 0$ آنگاه،

$$\mathcal{S}_H(m, n; \alpha_2, \beta) \subseteq \mathcal{S}_H(m, n; \alpha_1, \beta),$$

$$\mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha_2, \beta) \subseteq \mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha_1, \beta).$$

و در حالت خاص داریم:

$$\mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta) \subseteq \mathcal{S}_H(m, n; 0, \beta),$$

$$\mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta) \subseteq \mathcal{S}_H^\circ(m, n; 0, \beta).$$

که در آن $m, n \in \mathbb{N}$ ، $m > n$ و $\beta \geq 0$ می باشد.

برهان. فرض کنیم $f \in \mathcal{S}_H(m, n; \alpha_2, \beta)$ باشد از تعریف رده $\mathcal{S}_H(m, n; \alpha_2, \beta)$ داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha_2 k^n)(1 - \beta + \beta k)}{1 - \alpha_2} (|a_k| + |b_k|) \leq 1 - |b_1|$$

از طرفی بنا به فرض قضیه $\alpha_1 \leq \alpha_2$ می باشد. لذا

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha_1 k^n)(1 - \beta + \beta k)}{1 - \alpha_1} (|a_k| + |b_k|) &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha_2 k^n)(1 - \beta + \beta k)}{1 - \alpha_2} (|a_k| + |b_k|) \\ &\leq 1 - |b_1|. \end{aligned}$$

□

در نتیجه $f \in \mathcal{S}_H(m, n; \alpha_1, \beta)$.

قضیه ۱۰.۳. [۸۶] $\mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta) \subseteq \mathcal{S}_H(\alpha)$ برای $m, n \in \mathbb{N}$ ، $m > n$ ، $0 \leq \alpha < 1$ و $\beta \geq 0$ همچنین $\mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta) \subseteq \mathcal{C}_H(\alpha)$ اگر $\beta \geq 1$ یا $1 \leq n < m$.

برهان. فرض کنیم $f \in \mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta)$ باشد. با توجه به تعریف رده $\mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta)$ داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k)}{1 - \alpha} (|a_k| + |b_k|) \leq 1 - |b_1|. \quad (۱۸.۳)$$

لذا

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k - \alpha}{1 - \alpha} (|a_k| + |b_k|) \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k)}{1 - \alpha} (|a_k| + |b_k|) \leq 1 - |b_1|,$$

بنابراین $f \in \mathcal{S}_H(\alpha)$ و در نتیجه $\mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta) \subseteq \mathcal{S}_H(\alpha)$.
حال نشان می دهیم $\mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta) \subseteq \mathcal{C}_H(\alpha)$ با استفاده از نامساوی (۱۸.۳) داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} (|a_k| + |b_k|) \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha k^n)(1-\beta + \beta k)}{1-\alpha} (|a_k| + |b_k|) \leq 1 - |b_1|,$$

نامساوی سمت چپ زمانی برقرار است که در آن $\beta \geq 1$ یا $1 \leq n < m$.
بنابراین بازای $\beta \geq 1$ یا $1 \leq n < m$ ، $f \in \mathcal{C}_H(\alpha)$ در نتیجه $\mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta) \subseteq \mathcal{C}_H(\alpha)$. $\square$

قضیه ۱۱.۳. [۸۶] رده $\mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta)$ شامل نگاشتهای جهت نگهدار و تك ارز می باشد.

برهان. فرض کنیم $f \in \mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta)$ برای $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ، $z_1 \neq z_2$ داریم:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{h(z_1) - h(z_2)} \right| &\geq 1 - \left| \frac{g(z_1) - g(z_2)}{h(z_1) - h(z_2)} \right| \\ &= 1 - \left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z_1^k - z_2^k)}{(z_1 - z_2) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(z_1^k - z_2^k)} \right| \\ &> 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|} \geq 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha k^n)(1-\beta + \beta k)}{1-\alpha} |b_k|}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha k^n)(1-\beta + \beta k)}{1-\alpha} |a_k|} \geq 0. \end{aligned}$$

بنابراین f يك به يك است. لازم به یادآوری است که در بالا برای $(z_1^k - z_2^k)$ اتحاد زیر مورد استفاده قرار گرفته است.

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

از طرفی f در $\mathbb{D}$ جهت نگهدار است زیرا

$$\begin{aligned} |h'(z)| &\geq 1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k||z|^k > 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha k^n)(1-\beta + \beta k)}{1-\alpha} |a_k| \\ &\geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha k^n)(1-\beta + \beta k)}{1-\alpha} |b_k| > \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^m - \alpha k^n)(1-\beta + \beta k)}{1-\alpha} |b_k||z|^{k-1} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} k|b_k||z|^{k-1} \geq |g'(z)|. \end{aligned}$$

$\square$

قضیه ۱۲.۳. [۸۶] فرض کنید $f \in \mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta)$ باشد. آنگاه،

$$(1 - |b_1|)(|z| - \psi|z|^2) \leq |f(z)| \leq (1 + |b_1|)|z| + \psi(1 - |b_1|)|z|^2, \quad (19.3)$$

که در آن $\psi = \frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2^m-2^{n\alpha})}$ و مساوی برای توابع زیر به ازای انتخاب مناسبی از $\theta \in \mathbb{R}$ برقرار است.

$$f_\theta(z) = z + |b_1|e^{i\theta}\bar{z} + (1-|b_1|)\psi z^2, \quad (20.3)$$

$$f_\theta(z) = z + |b_1|e^{i\theta}\bar{z} + (1-|b_1|)\psi\bar{z}^2. \quad (21.3)$$

برهان. در اینجا داریم

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1+|b_1|)|z| + |z|^2 \sum_{k=2}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \\ &\leq (1+|b_1|)|z| + |z|^2 \frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2^m-2^{n\alpha})} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\beta+\beta k)(k^m-k^{n\alpha})}{1-\alpha} (|a_k| + |b_k|) \\ &\leq (1+|b_1|)|z| + |z|^2 \frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2^m-2^{n\alpha})} (1-|b_1|). \end{aligned} \quad (22.3)$$

همچنین

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq (1-|b_1|)|z| - \sum_{k=2}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)|z|^k \geq (1-|b_1|)|z| - |z|^2 \sum_{k=2}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \\ &\geq (1-|b_1|)|z| - |z|^2 \frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2^m-2^{n\alpha})} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\beta+\beta k)(k^m-k^{n\alpha})}{1-\alpha} (|a_k| + |b_k|) \\ &\geq (1-|b_1|)|z| - |z|^2 \frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2^m-2^{n\alpha})} (1-|b_1|) \\ &= (1-|b_1|) \left(|z| - |z|^2 \frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2^m-2^{n\alpha})} \right). \end{aligned} \quad (23.3)$$

با تعریف $\psi := \frac{1-\alpha}{(1+\beta)(2^m-2^{n\alpha})}$ در نامساوی های (22.3) و (23.3) رابطه (19.3) بدست می آید.

همچنین به آسانی می توان بررسی نمود که برای توابع (20.3) و (21.3)، نامساوی (19.3) را به مساوی تبدیل می شود. $\square$

اگر در قضیه 12.3 مقادیر $m=1$ ، $n=0$ و $\beta=0$ را قرار دهیم نتیجه زیر را بدست می آوریم که نتایج حاصل در مقاله اوزترک و یلسین [56، قضیه 6.3] را تصحیح می کند.

نتیجه 2.3. [86] فرض کنید $f \in \mathcal{S}_H(\alpha)$. آنگاه

$$(1-|b_1|) \left(|z| - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} |z|^2 \right) \leq |f(z)| \leq (1+|b_1|)|z| + \frac{(1-\alpha)(1-|b_1|)}{2-\alpha} |z|^2. \quad (24.3)$$

و مساوی برای توابع زیر به ازای انتخاب مناسبی از $\theta \in \mathbb{R}$ برقرار است.

$$f_\theta(z) = z + |b_1|e^{i\theta}\bar{z} + \frac{(1-\alpha)(1-|b_1|)}{2-\alpha} z^2, \quad (25.3)$$

$$f_\theta(z) = z + |b_1|e^{i\theta}\bar{z} + \frac{(1-\alpha)(1-|b_1|)}{2-\alpha} \bar{z}^2. \quad (26.3)$$

یادآوری ۵.۳. نتیجه ۲.۳ کران بدست آمده توسط اوزترك و یلسین [۵۶، قضیه ۶.۳] را بهبود می بخشد زیرا

$$|f(z)| \leq (1 + |b_1|)|z| + \frac{(1 - \alpha)(1 - |b_1|)}{2 - \alpha}|z|^2 \leq (1 + |b_1|)|z| + \frac{(1 - \alpha^2)(1 - |b_1|)}{2}|z|^2,$$

$$|f(z)| \geq (1 - |b_1|)\left(|z| - \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha}|z|^2\right) \geq (1 - |b_1|)\left(|z| - \frac{1 - \alpha^2}{2}|z|^2\right).$$

همچنین اوزترك و یلسین [۵۶] نشان دادند تابع

$$f_\theta(z) = z + |b_1|e^{i\theta}\bar{z} + \frac{(1 - \alpha^2)(1 - |b_1|)}{2}\bar{z}^2 \quad (27.3)$$

برای کرانهایی که بدست آمده اکید می باشد. حال آنکه با توجه به ضرایب $f_\theta(z)$ معرفی شده توسط آنها، این تابع به رده $\mathcal{S}_H(\alpha)$ متعلق نمی باشد. لذا نتایج بدست آمده از اوزترك و یلسین صحیح نمی باشد. کران صحیح برای توابع متعلق به رده $\mathcal{S}_H(\alpha)$ در (۲۴.۳) آمده است و توابع (۲۵.۳) و (۲۶.۳) نامساوی (۲۴.۳) را به مساوی تبدیل می کنند.

اگر در قضیه ۱۲.۳ مقادیر $m = 2$ ، $n = 1$ و $\beta = 0$ قرار دهیم نتیجه زیر را بدست می آوریم که نتایج حاصل در مقاله اوزترك و یلسین [۵۶، قضیه ۸.۳] را تصحیح می نماید.

نتیجه ۳.۳. [۸۶] فرض کنید $f \in \mathcal{C}_H(\alpha)$. آنگاه،

$$(1 - |b_1|)\left(|z| - \frac{1 - \alpha}{2(2 - \alpha)}|z|^2\right) \leq |f(z)| \leq (1 + |b_1|)|z| + \frac{(1 - \alpha)(1 - |b_1|)}{2(2 - \alpha)}|z|^2. \quad (28.3)$$

و مساوی برای توابع زیر به ازای انتخاب مناسبی از $\theta \in \mathbb{R}$ بر قرار است.

$$f_\theta(z) = z + |b_1|e^{i\theta}\bar{z} + \frac{(1 - \alpha)(1 - |b_1|)}{2(2 - \alpha)}z^2, \quad (29.3)$$

$$f_\theta(z) = z + |b_1|e^{i\theta}\bar{z} + \frac{(1 - \alpha)(1 - |b_1|)}{2(2 - \alpha)}\bar{z}^2. \quad (30.3)$$

یادآوری ۶.۳. نتیجه ۳.۳ کران بدست آمده توسط اوزترك و یلسین [۵۶، قضیه ۸.۳] را بهبود می بخشد. همچنین تابع

$$f_\theta(z) = z + |b_1|e^{i\theta}\bar{z} + \frac{3 - \alpha - 2\alpha}{2\alpha}\bar{z}^2$$

که آنها مطرح نموده اند متعلق به رده $\mathcal{C}_H(\alpha)$ نمی باشد. بنابراین کران و توابع اکید این رده در نتیجه ۳.۳ بیان شده است.

قضیه ۱۳.۳. [۸۶] فرض کنید $f = h + \bar{g}$ دارای بسط سری توانی (۴.۱) باشد. آنگاه $f \in clco\mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ اگر و تنها اگر

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k h_k(z) + y_k g_k(z)],$$

که در آن

$$h_1(z) = z, \quad (31.3)$$

$$h_k(z) = z + \frac{1 - \alpha}{(1 + \beta)(k^m - k^n \alpha)} z^k, \quad k \geq 2$$

$$g_k(z) = z + \frac{1 - \alpha}{(1 + \beta)(k^m - k^n \alpha)} \bar{z}^k, \quad k \geq 2$$

$$x_k, y_k \geq 0, y_1 = 0, x_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} (x_k + y_k).$$

در حالت خاص، $\{h_k\}$ و $\{g_k\}$ نقاط اکستریمال رده $\mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ می باشد.

برهان. فرض کنیم

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k h_k(z) + y_k g_k(z))$$

که در آن h_k و g_k در (31.3) آورده شده است. لذا

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)z + \sum_{k=2}^{\infty} (x_k h_k(z) + y_k g_k(z)) \\ &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{(1 - \beta + \beta z)(k^m - k^n \alpha)} (x_k z^k + y_k \bar{z}^k), \end{aligned}$$

متعلق به رده $\mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ است. زیرا با توجه به تعریف رده $\mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ ، برای کران ضرایب تابع فوق داریم

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1 - \beta + \beta z)(k^m - k^n \alpha)}{1 - \alpha} \left(\frac{1 - \alpha}{(1 - \beta + \beta z)(k^m - k^n \alpha)} x_k \right. \\ \left. + \frac{1 - \alpha}{(1 - \beta + \beta \bar{z})(k^m - k^n \alpha)} y_k \right) = \sum_{k=2}^{\infty} (x_k + y_k) = 1 - x_1 \leq 1 \end{aligned}$$

از طرفی $\mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ محدب است، در نتیجه $f \in \text{clco} \mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ ، اگر $f \in \text{clco} \mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ باشد با توجه به (14.3)، برای $k \geq 2$ بالعکس، $|a_k|, |b_k| \leq \frac{1 - \alpha}{(1 - \beta + \beta k)(k^m - k^n \alpha)}$ می باشد. لذا با قرار دادن

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{(1 - \beta + \beta k)(k^m - k^n \alpha)}{1 - \alpha} |a_k|, \quad k \geq 2 \\ y_k &= \frac{(1 - \beta + \beta k)(k^m - k^n \alpha)}{1 - \alpha} |b_k|, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

داریم $\sum_{k=2}^{\infty} (x_k + y_k) \leq 1$. همچنین برای x_1 تعریف می کنیم:

$$x_1 = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} (x_k + y_k) \geq 0.$$

از طرفی برای $k \geq 1$ با توجه به (۱۴.۳) خواهیم داشت $0 \leq x_k, y_k \leq 1$. در نتیجه نمایش مورد نیاز را بدست خواهیم آورد زیرا

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \sum_{k=2}^{\infty} (|a_k|z^k + |b_k|\bar{z}^k) \\ &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1-\alpha}{(1+\beta)(k^m - k^n\alpha)} x_k z^k + \frac{1-\alpha}{(1+\beta)(k^m - k^n\alpha)} y_k \bar{z}^k \right) \\ &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \left((h_k(z) - z)x_k + (g_k(z) - z)y_k \right) \\ &= \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} x_k - \sum_{k=2}^{\infty} y_k \right) z + \sum_{k=2}^{\infty} h_k(z)x_k + \sum_{k=2}^{\infty} g_k(z)y_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [x_k h_k(z) + y_k g_k(z)]. \end{aligned}$$

□

یادآوری ۷.۳. با قرار دادن $m=1$ ، $n=0$ و $\beta=0$ در قضیه ۱۳.۳، نقاط اکستریمال رده $S_H^\circ(\alpha)$ بدست می آید.

یادآوری ۸.۳. با قرار دادن $m=2$ ، $n=1$ و $\beta=0$ در قضیه ۱۳.۳، نقاط اکستریمال رده $C_H^\circ(\alpha)$ بدست می آید.

یادآوری ۹.۳. رده تمام توابع همساز تک ارز $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1=0$ که $\mathbb{D}$ را به دامنه ای محدب می نگارد را $\mathcal{K}_H^\circ$ نمایش می دهیم. کلونی و شیل اسمال [۱۵، قضیه ۱۰.۵] کران، $|B_k| \leq \frac{k-1}{2}$ ، $|A_k| \leq \frac{k+1}{2}$ را برای ضرایب بسط سری توانی این رده اثبات نمودند.

قضیه ۱۴.۳. [۸۶] فرض کنید $F(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k z^k + \overline{B_k z^k})$ متعلق به رده $\mathcal{K}_H^\circ$ باشد. اگر $f \diamond F \in S_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ و $f * F \in S_H^\circ(m-1, n-1; \alpha, \beta)$ ، $n > 1$ آنگاه برای $f \in S_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$

برهان. فرض کنیم $f \in S_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ باشد. بنابه تعریف این رده داریم:

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k)(|a_k| + |b_k|) \leq (1 - \alpha). \quad (32.3)$$

با استفاده از (۳۲.۳) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} (k^{m-1} - \alpha k^{n-1})(1 - \beta + \beta k)(|a_k A_k| + |b_k B_k|) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k) \left(|a_k| \left| \frac{A_k}{k} \right| + |b_k| \left| \frac{B_k}{k} \right| \right) \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k) \left(|a_k| \left| \frac{k+1}{2k} \right| + |b_k| \left| \frac{k-1}{2k} \right| \right) \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k)(|a_k| + |b_k|) \leq (1 - \alpha). \end{aligned}$$

بنابراین $f * F \in \mathcal{S}_H^\circ(m-1, n-1; \alpha, \beta)$ با استفاده دوباره از (۳۲.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k) \left(\left| \frac{a_k A_k}{k} \right| + \left| \frac{b_k B_k}{k} \right| \right) \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k) \left(|a_k| \left| \frac{k+1}{2k} \right| + |b_k| \left| \frac{k-1}{2k} \right| \right) \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k)(|a_k| + |b_k|) \leq (1 - \alpha). \end{aligned}$$

□

در نتیجه $f \diamond F \in \mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$

قضیه ۱۵.۳. [۸۶] فرض کنید $f \in \mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ و $F = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k \in \mathcal{S}$ باشد. آنگاه برای $n > 1, |\zeta| \leq 1$ داریم $f * (F + \zeta \bar{F}) \in \mathcal{S}_H^\circ(m-1, n-1; \alpha, \beta)$.

برهان. با توجه به تعریف رده $\mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ اگر $f \in \mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k)(|a_k| + |b_k|) \leq (1 - \alpha), \quad (33.3)$$

با استفاده از (۳۳.۳) و قضیه ۵.۱ برای $F \in \mathcal{S}$ داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} (k^{m-1} - \alpha k^{n-1})(1 - \beta + \beta k)(|a_k A_k| + |\zeta b_k \bar{A}_k|) \\ & \sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k)(|a_k| + |b_k|) \leq (1 - \alpha). \end{aligned}$$

□

در نتیجه برای $n > 1$ ، $f * (F + \zeta \bar{F}) \in \mathcal{S}_H^\circ(m-1, n-1; \alpha, \beta)$ را خواهیم داشت.

یادآوری ۱۰.۳. رده تمام توابع همساز $F = H + \bar{G}$ روی $\mathbb{D}$ با بسط سری توانی

$$H(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k, \quad G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k$$

و $Re\{F(z)\} > 0$ را با $\mathcal{P}_H^\circ$ نمایش می دهیم.
 جاکوبوسکی [۴۳، قضیه ۳] کران $|A_k| < k+1$ و $|B_k| < k-1$ را برای ضرایب این رده اثبات نمود.

قضیه ۱۶.۳. [۸۶] فرض کنید $F(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} (A_k z^k + \overline{B_k z^k})$ متعلق به رده $\mathcal{P}_H^\circ$ باشد. اگر $\frac{1}{A_1} f * F \in \mathcal{S}_H^\circ(m-1, n-1; \alpha, \beta)$ ، $n \geq 1$ باشد آنگاه برای $f \in \mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ و $\frac{2}{3} \leq |A_1| \leq 2$ و $\frac{1}{A_1} f \diamond F \in \mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$.

برهان. با توجه به تعریف رده $\mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ اگر $f \in \mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k)(|a_k| + |b_k|) \leq (1 - \alpha), \quad (34.3)$$

با استفاده از (۳۴.۳) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} (k^{m-1} - \alpha k^{n-1})(1 - \beta + \beta k) \left(\left| \frac{a_k A_k}{A_1} \right| + \left| \frac{b_k B_k}{A_1} \right| \right) \\ & \leq \sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k) \left(\left| \frac{a_k}{A_1} \right| \frac{k+1}{k} + \left| \frac{b_k}{A_1} \right| \frac{k-1}{k} \right) \\ & \leq \sum_{k=2}^{\infty} (k^m - \alpha k^n)(1 - \beta + \beta k)(|a_k| + |b_k|) \leq (1 - \alpha). \end{aligned}$$

در نتیجه برای $n \geq 1$ خواهیم داشت $\frac{1}{A_1} f * F \in \mathcal{S}_H^\circ(m-1, n-1; \alpha, \beta)$ و به طور مشابه می توان نشان داد $\frac{1}{A_1} f \diamond F \in \mathcal{S}_H^\circ(m, n; \alpha, \beta)$. $\square$

قضیه ۱۷.۳. [۸۶] فرض کنید

$$f(z) = z + \overline{b_1 z} + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k z^k + \overline{b_k z^k})$$

متعلق به رده $\mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta)$ باشد. اگر

$$\delta \leq (1 - |b_1|) \left(1 - \frac{1}{(2^m - 2^n \alpha)(1 + \beta)} \right),$$

آنگاه $N(f) \subset \mathcal{S}_H(\alpha)$.

برهان. فرض کنیم $f \in \mathcal{S}_H(m, n; \alpha, \beta)$ و $F(z) = z + \overline{B_1 z} + \sum_{k=2}^{\infty} (A_k z^k + \overline{B_k z^k})$ متعلق به

$N(f)$ باشد، داریم

$$\begin{aligned}
 & (1 - \alpha)|B_1| + \sum_{k=2}^{\infty} (k - \alpha)(|A_k| + |B_k|) \\
 & \leq (1 - \alpha)|B_1 - b_1| + \sum_{k=2}^{\infty} (k - \alpha)(|A_k - a_k| + |B_k - b_k|) \\
 & + (1 - \alpha)|b_1| + \sum_{k=2}^{\infty} (k - \alpha)(|a_k| + |b_k|) \\
 & \leq (1 - \alpha)\delta + (1 - \alpha)|b_1| + \frac{1}{(1 + \beta)(2^m - 2^n\alpha)} \sum_{k=2}^{\infty} (1 - \beta + \beta k)(k^m - k^n\alpha)(|a_k| + |b_k|) \\
 & \leq (1 - \alpha)\delta + (1 - \alpha)|b_1| + \frac{(1 - \alpha)(1 - |b_1|)}{(1 + \beta)(2^m - 2^n\alpha)} \leq 1 - \alpha.
 \end{aligned}$$

نامساوی سمت راست برای $(1 - |b_1|)(1 - \frac{1}{(2^m - 2^n\alpha)(1 + \beta)}) \leq \delta$ برقرار است. بنابراین $\square$ $F(z) \in \mathcal{S}_H(\alpha)$

۴.۳ رده $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; n]$

در بخش های قبل به تعریف عملگر سالگون روی توابع همساز اشاره کردیم. حال با استفاده این عملگر و خواص زیر ترتیبها به معرفی رده ای از توابع همساز می پردازیم که علاوه بر تعمیم رده های دیگری از توابع همساز که اخیرا محققین این زمینه به معرفی و بررسی خواص آن پرداخته اند، ویژگیهای کانولوشن، کران ضرایب، قضیه رشد و تحدب این رده را مورد بررسی و مطالعه قرار خواهیم داد.

نمادگذاری ۵.۳. فرض کنیم $-B \leq A < B \leq 1$ و $0 \leq \alpha < 1$ باشد. رده تمام توابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) روی $\mathbb{D}$ که در شرط

$$\frac{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1}f(z)}{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z)} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}, \quad (35.3)$$

صدق می کند را با $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; n]$ نمایش می دهیم.

یادآوری ۱۱.۳. با قرار دادن مقادیر مختلف در پارامترهای رده $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; n]$ ، می توان زیر رده هایی از $\mathcal{S}_H$ را که اخیرا محققین در این زمینه تعریف و مورد مطالعه قرار دادند را بدست آورد. در ادامه بذکر چند مورد آن می پردازیم.

۱. $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}[-1, 1; 1] = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^c$ و $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}[-1, 1; 0] = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^*$. رده های $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^c$ و $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^*$ توسط جهانگیری [۲۸] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲. $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; 1] = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^c(A, B)$ و $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; 0] = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^*(A, B)$. رده های $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^c(A, B)$ و $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^*(A, B)$ توسط دزویک [۲۰] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

قضیه ۱۸.۳. [۸۲] فرض کنید $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. آنگاه $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; n]$ اگر و تنها اگر

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z) * \varphi(z; \xi) \neq \circ, \quad (\xi \in \mathbb{C}, |\xi| = 1) \quad (۳۶.۳)$$

که در آن

$$\varphi(z; \xi) = \frac{(B - A)\xi z + (1 + A\xi)z^2}{(1 - z)^2} - \frac{(2 + (A + B)\xi)\bar{z} - (1 + A\xi)\bar{z}^2}{(1 - \bar{z})^2}. \quad (۳۷.۳)$$

یا

$$f(z) * \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k z^k + (-1)^n \beta_k \bar{z}^k) \neq \circ, \quad (۳۸.۳)$$

که در آن

$$\alpha_k = k^n (k(B\xi + 1) - (A\xi + 1)), \quad \beta_k = k^n (k(B\xi + 1) + (A\xi + 1)). \quad (۳۹.۳)$$

برهان. فرض کنیم $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. آنگاه $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; n]$ است اگر و تنها اگر f در شرط (۳۵.۳) صدق کند یا معادل آن

$$\frac{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} f(z)}{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z)} \neq \frac{1 + A\xi}{1 + B\xi}, \quad (\xi \in \mathbb{C}, |\xi| = 1)$$

با توجه به خاصیت عملگر کانولوشن برای توابع h و g روابط زیر را داریم:

$$\mathcal{D}^{n+1} h(z) = z(\mathcal{D}^n h(z))' = \mathcal{D}^n h(z) * \frac{z}{(1 - z)^2}, \quad \mathcal{D}^n h(z) = \mathcal{D}^n h(z) * \frac{z}{1 - z}.$$

حال با استفاده از (۱.۳) و (۲.۳) می توان نوشت

$$\begin{aligned} & (1 + B\xi)\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} f(z) - (1 + A\xi)\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z) \\ &= (1 + B\xi) \left(\mathcal{D}^{n+1} h(z) + (-1)^{n+1} \overline{\mathcal{D}^{n+1} g(z)} \right) - (1 + A\xi) \left(\mathcal{D}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)} \right) \\ &= (1 + B\xi) \left(z(\mathcal{D}^n h(z))' + (-1)^{n+1} \overline{z(\mathcal{D}^n g(z))'} \right) - (1 + A\xi) \left(\mathcal{D}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)} \right) \\ &= (1 + B\xi) z(\mathcal{D}^n h(z))' - (1 + A\xi) \mathcal{D}^n h(z) - (-1)^n \left((1 + B\xi) \overline{z(\mathcal{D}^n g(z))'} + (1 + A\xi) \overline{\mathcal{D}^n g(z)} \right) \\ &= \mathcal{D}^n h(z) * \left[\frac{(1 + B\xi)z}{(1 - z)^2} - \frac{(1 + A\xi)z}{1 - z} \right] - (-1)^n \overline{\mathcal{D}^n g(z)} * \left[\frac{(1 + B\xi)\bar{z}}{(1 - \bar{z})^2} + \frac{(1 + A\xi)\bar{z}}{1 - \bar{z}} \right] \\ &= \mathcal{D}^n f(z) * \left[\frac{(1 + B\xi)z}{(1 - z)^2} - \frac{(1 + A\xi)z}{1 - z} - \left(\frac{(1 + B\xi)\bar{z}}{(1 - \bar{z})^2} + \frac{(1 + A\xi)\bar{z}}{1 - \bar{z}} \right) \right] \\ &= \mathcal{D}^n f(z) * \sum_{k=1}^{\infty} \left((k(B\xi + 1) - (A\xi + 1))z^k - (k(B\xi + 1) + (A\xi + 1))\bar{z}^k \right) \\ &= f * \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k z^k - (-1)^n \beta_k \bar{z}^k) \neq \circ. \end{aligned}$$

□

قضیه ۱۹.۳. [۸۲] فرض کنید تابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) باشد. همچنین

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k |a_k| + \beta_k |b_k|) \leq 2(B - A), \quad (40.3)$$

که در آن

$$\alpha_k = k^n(k(B+1) - (A+1)), \quad \beta_k = k^n(k(B+1) + (A+1)) \quad (41.3)$$

آنگاه تابع f روی $\mathbb{D}$ همساز و تک ارز و جهت نگهدار است و $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; n]$.

برهان. واضح است که برای $f(z) = z$ قضیه فوق برقرار است. حال فرض کنیم $m \in \{2, 3, \dots\}$ موجود باشد به طوری که $a_m \neq 0$ یا $b_m \neq 0$. چون $\frac{\alpha_k}{B-A} \geq k, \frac{\beta_k}{B-A} \geq k, (k = 2, 3, \dots)$ لذا با توجه به (۴۰.۳) داریم:

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k|a_k| + k|b_k|) \leq 1 - |b_1|. \quad (42.3)$$

حال با استفاده از نامساوی (۴۲.۳)، برای $z \in \mathbb{D}$ داریم:

$$\begin{aligned} |h'(z)| - |g'(z)| &\geq 1 - |b_1| - \sum_{k=2}^{\infty} k(|a_k| + |b_k|)|z|^{k-1} \\ &\geq 1 - |b_1| - |z| \sum_{k=2}^{\infty} k(|a_k| + |b_k|) \geq (1 - |b_1|)(1 - |z|) > 0. \end{aligned}$$

بنابراین f روی $\mathbb{D}$ موضعا تک ارز و جهت نگهدار است. فرض کنیم $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ و $z_1 \neq z_2$ باشد، داریم

$$\left| \frac{z_1^k - z_2^k}{z_1 - z_2} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} z_1^{n-1} z_2^{k-n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_1|^{n-1} |z_2|^{k-n} < k, \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (43.3)$$

از روابط (۴۲.۳) و (۴۳.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\geq |h(z_1) - h(z_2)| - |g(z_1) - g(z_2)| \\ &\geq \left| z_1 - z_2 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k(z_1^k - z_2^k) \right| - \left| \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k}(z_1^k - z_2^k) \right| \\ &\geq |z_1 - z_2| - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| |z_1^k - z_2^k| - \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |z_1^k - z_2^k| \\ &= |z_1 - z_2| \left(1 - |b_1| - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \left| \frac{z_1^k - z_2^k}{z_1 - z_2} \right| - \sum_{k=2}^{\infty} |b_k| \left| \frac{z_1^k - z_2^k}{z_1 - z_2} \right| \right) \\ &> |z_1 - z_2| \left(1 - |b_1| - \sum_{k=2}^{\infty} k(|a_k| + |b_k|) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

در نتیجه f تگ ارز است. لذا $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. حال، $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; n]$ اگر و تنها اگر تابع تحلیلی $\omega(z)$ با $\omega(\circ) = \circ$ و $|\omega(z)| < 1$ روی $\mathbb{D}$ موجود باشد به طوری که

$$\frac{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} f(z)}{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z)} = \frac{1 + A\omega(z)}{1 + B\omega(z)}, \quad (z \in \mathbb{D})$$

یا معادل با آن

$$\left| \frac{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} f(z) - \mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z)}{B\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} f(z) - A\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z)} \right| < 1, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (۴۴.۳)$$

لذا کافیت نشان دهیم

$$|\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} f(z) - \mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z)| - |B\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} f(z) - A\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z)| < \circ, \quad (z \in \mathbb{D} \setminus \{\circ\})$$

برای $|z| = r$ ($\circ < r < 1$) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & |\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} f(z) - \mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z)| - |B\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} f(z) - A\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z)| \\ &= |(\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} h(z) + (-1)^{n+1} \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} g(z)}) - (\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n g(z)})| \\ &- |B(\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} h(z) + (-1)^{n+1} \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} g(z)}) - A(\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n h(z) + (-1)^n \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n g(z)})| \\ &= |\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} h(z) - \mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n h(z) + (-1)^{n+1} \overline{(\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} g(z) + \mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n g(z))}| \\ &- |B\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} h(z) - A\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n h(z) + (-1)^{n+1} \overline{(B\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{n+1} g(z) + A\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n g(z))}| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^n (k-1) a_k z^k + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n (k+1) \overline{b_k z^k} \right| \\ &- \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^n (Bk - A) a_k z^k + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^n (Bk + A) \overline{b_k z^k} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^n (k-1) |a_k| r^k + \sum_{k=1}^{\infty} k^n (k+1) |b_k| r^k - (B-A)r \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k^n (Bk - A) |a_k| r^k + \sum_{k=1}^{\infty} k^n (Bk + A) |b_k| r^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k^n (k(B+1) - (A+1)) |a_k| + k^n (k(B+1) + (A+1)) |b_k|) r^k - 2(B-A)r \\ &= r \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k |a_k| + \beta_k |b_k|) r^{k-1} - 2(B-A) \right\} < \circ. \end{aligned}$$

□

در نتیجه $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; n]$.

نمادگذاری ۶.۳. سیلورمن $[Y^{\circ}]$ رده $\mathcal{T}^{\lambda}$ را رده تمام توابع $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}_{\circ}$ معرفی کرد که ضرایب سری توانی توابع h و g آن برای $k \geq 2$ به ترتیب $a_k = -|a_k|$ و $b_k = (-1)^{\lambda} |b_k|$

باشند. به عبارتی دیگر

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| z^k, \quad g(z) = (-1)^\lambda \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \bar{z}^k \quad (45.3)$$

حال تعریف می کنیم

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n] := \mathcal{J}^1 \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; n].$$

در قضیه بعد نشان می دهیم شرط (۴۰.۳) برای اینکه $f \in \mathcal{J}^1$ به رده $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}[A, B; n]$ تعلق داشته باشد "شرط کافی" است.

قضیه ۲۰.۳. [۸۲] فرض کنید $f \in \mathcal{J}^1$ با بسط سری توانی (۴۵.۳) باشد. آنگاه $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ است اگر و تنها اگر (۴۰.۳) برقرار باشد.

برهان. با توجه به قضیه ۱۹.۳ کافیت نشان دهیم $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ در نامساوی (۴۰.۳) صدق می کند. فرض کنیم $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ باشد. لذا f در نامساوی (۴۴.۳) صدق می کند و به عبارتی

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^n ((k-1)|a_k| z^k + (k+1)|b_k| \bar{z}^k)}{2(B-A)z - \sum_{k=1}^{\infty} k^n ((Bk-A)|a_k| z^k + (Bk+A)|b_k| \bar{z}^k)} \right| < 1, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

برای $z = r$ ($0 < r < 1$) خواهیم داشت

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^n ((k-1)|a_k| + (k+1)|b_k|) r^{k-1}}{2(B-A) - \sum_{k=1}^{\infty} k^n ((Bk-A)|a_k| + (Bk+A)|b_k|) r^{k-1}} < 1. \quad (46.3)$$

واضح است برای $r \in (0, 1)$ مخرج کسر صفر نمی شود، همچنین برای $r = 0$ و در نتیجه برای $r \in (0, 1)$ مقدار مثبت دارد. بنابراین با توجه به (۴۶.۳) داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k |a_k| + \beta_k |b_k|) r^{k-1} \leq 2(B-A), \quad (0 < r < 1)$$

لذا با $r \rightarrow 1^-$ ، نامساوی (۴۰.۳) حاصل می شود. $\square$

فرض کنیم $\mathcal{F}$ زیر رده ای از رده $\mathcal{H}$ باشد. $f \in \mathcal{F}$ را يك نقطه اکسترمال $\mathcal{F}$ می نامیم هرگاه

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}, 0 < \lambda < 1: f = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 \implies f = f_1 = f_2$$

مجموعه تمام نقاط اکسترمال $\mathcal{F}$ را با EF نمایش می دهیم. واضح است که $EF \subset \mathcal{F}$.

تابع $\mathcal{J}: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ را روی رده محدب $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ ، تابع محدب گویند هرگاه

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, 0 \leq \lambda \leq 1: \mathcal{J}(\lambda f + (1-\lambda)g) \leq \lambda \mathcal{J}(f) + (1-\lambda) \mathcal{J}(g).$$

از نتایج مهم قضیه کریم-میلن [۴۷] می توان به لم زیر اشاره کرد.

لم ۱.۳. فرض کنید $\mathcal{F}$ زیر رده ناتهی از رده $\mathcal{H}$ باشد و $\mathcal{J} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعک محدب، پیوسته روی $\mathcal{F}$ باشد. آنگاه

$$\max\{\mathcal{J}(f) : f \in \mathcal{F}\} = \max\{\mathcal{J}(f) : f \in EF\}.$$

همچنین با توجه به اینکه $\mathcal{H}$ فضای متریک کامل می باشد و بنا به قضیه منتل [۵۱]، لم زیر را داریم

لم ۲.۳. رده $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ فشرده است اگر و تنها اگر $\mathcal{F}$ کراندار یکنواخت موضعی و بسته باشد.

قضیه ۲۱.۳. [۸۲] رده $S_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ زیر مجموعه ای محدب و فشرده از رده $\mathcal{H}$ است.

برهان. فرض کنیم توابع

$$f_j = z - \sum_{k=1}^{\infty} |a_{j,k}| z^n + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{j,k}| \bar{z}^k, \quad (z \in \mathbb{D}, j \in \mathbb{N}) \quad (47.3)$$

عناصری از رده $S_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ باشد.

$$\begin{aligned} & \lambda f_1(z) + (1 - \lambda) f_2(z) \\ &= z - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda |a_{1,k}| + (1 - \lambda) |a_{2,k}|) z^n + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda |b_{1,k}| + (1 - \lambda) |b_{2,k}|) \bar{z}^k. \end{aligned}$$

با توجه به قضیه ۲۰.۳ برای $f \in S_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ داریم

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k (\lambda |a_{1,k}| + (1 - \lambda) |a_{2,k}|) + \beta_k (\lambda |b_{1,k}| + (1 - \lambda) |b_{2,k}|) \right) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k |a_{1,k}| + \beta_k |b_{1,k}|) + (1 - \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k |a_{2,k}| + \beta_k |b_{2,k}|) \\ &\leq 2\lambda(B - A) + 2(1 - \lambda)(B - A) = 2(B - A). \end{aligned}$$

لذا تابع $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$ به رده $S_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ متعلق است بنابراین $S_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ محدب است. همچنین برای $|z| \leq r$ ، $0 < r < 1$ و $f \in S_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ خواهیم داشت

$$|f(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) r^n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{B - A} |a_k| + \frac{\beta_k}{B - A} |b_k| \right) \leq 2.$$

لذا رده $S_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ کراندار یکنواخت موضعی است.

حال فرض کنیم برای $j \in \mathbb{N}$ ، $f_j \in S_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ و $f_j \rightarrow f$ باشد.

نشان می دهیم $f \in S_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ است. برای f و f_j به ترتیب بسط سری های توانی (۴.۱) و

(۴۷.۳) را در نظر می گیریم. با توجه به قضیه ۲۰.۳ برای f_j ها داریم

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k |a_{j,k}| + \beta_k |b_{j,k}|) \leq 2(B - A), \quad (j \in \mathbb{N}) \quad (48.3)$$

از همگرایی f_j به f برای $j \rightarrow \infty$ و $k \in \mathbb{N}$ ، $a_{j,k} \rightarrow a_k$ و $b_{j,k} \rightarrow b_k$ را داریم. حال دنباله جمع های جزئی $\{S_k\}$ از سری $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k |a_k| + \beta_k |b_k|)$ را در نظر می گیریم. این دنباله صعودی اکید است و با توجه (۴۸.۳) این دنباله با $2(B - A)$ کراندار می شود. بنابراین دنباله $\{S_k\}$ همگراست و داریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k |a_k| + \beta_k |b_k|) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \leq B - A.$$

پس نامساوی (۴۰.۳) برای تابع f برقرار است و $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$. در نتیجه $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ مجموعه ای بسته می باشد. حال با توجه به لم ۲.۳ رده $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ فشرده است. $\square$

قضیه ۲۲.۳. [۸۲]

$$ES_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n] = \{h_k^* : k \in \mathbb{N}\} \cup \{g_k^* : k \in \mathbb{N}\}$$

که در آن

$$h_1^* = z, \quad h_k^* = z - \frac{B - A}{\alpha_k} z^k, \quad g_k^* = z + \frac{B - A}{\beta_k} \bar{z}^k, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (۴۹.۳)$$

همچنین α_k و β_k در (۴۱.۳) آمده است.

برهان. فرض کنیم $0 < \lambda < 1$ ، $k \in \mathbb{N}$ و

$$g_k^* = \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2,$$

که در آن $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ توابعی با بسط سری توانی زیر باشند.

$$f_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_{i,k} z^k}, \quad (z \in \mathbb{D}, i \in \{1, 2\})$$

از بسط بالا و رابطه (۴۰.۳) داریم

$$|b_{1,k}| = |b_{2,k}| = \frac{B - A}{\beta_k},$$

$$a_{1,l} = a_{2,l} = 0, \quad l \in \{2, 3, \dots\}$$

$$b_{1,l} = b_{2,l} = 0, \quad l \in \mathbb{N} \setminus \{k\}$$

لذا $g_k^* = f_1 = f_2$ و در نتیجه بنابه تعریف نقاط اکسترمال $g_k^* \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ می باشد. به طور مشابه توابع h_k^* در (۴۹.۳) نیز نقاط اکسترمال $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ می باشند.

حال فرض کنیم $f \in ES_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ و f به شکل (۴۹.۳) نباشد. بنابراین $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $|a_m| < \frac{B - A}{\alpha_m}$ یا $|b_m| < \frac{B - A}{\beta_m}$ اگر $|a_m| < \frac{B - A}{\alpha_m}$ ، $0 < |b_m| < \frac{B - A}{\beta_m}$ با قرار دادن

$\lambda = \frac{|a_m| \alpha_m}{B - A}$ ، $\varphi = \frac{1}{1 - \lambda} (f - \lambda h_m^*)$ و برای $0 < \lambda < 1$ و $h_m^* \neq \varphi$ و $h_m^*, \varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ داریم

$f = \lambda h_m^* + (1 - \lambda) \varphi$. در نتیجه $f \notin ES_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$. به طور مشابه اگر $|b_m| < \frac{B - A}{\beta_m}$ می

$\square$

توان نشان داد $f \notin ES_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$.

یادآوری ۱۲.۳. همانطور که می دانیم برای رده های کراندار یکنواخت موضعی همچون

$$\mathcal{F} = \{f_m \in \mathcal{H} : m \in \mathbb{N}\}$$

داریم

$$\overline{clco}\mathcal{F} = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m f_m : \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m = 1, \lambda_m \geq 0 \right\}. \quad (50.3)$$

حال با استفاده از قضایای ۲۱.۳ و ۲۲.۳ نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۴.۳. [۸۲] فرض کنید h_k^* و g_k^* در (۴۹.۳) تعریف شده باشد. آنگاه،

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n] = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k h_k^* + \delta_k g_k^*) : \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k + \delta_k) = 1, \delta_1 = 0, \gamma \geq 0, \delta \geq 0 \right\}.$$

یادآوری ۱۳.۳. برای هر مقدار ثابت $k \in \mathbb{N}$ و $z \in \mathbb{D}$ تابعهای زیر روی $\mathcal{H}$ پیوسته و محدب است.

$$\mathcal{J}(f) = |a_k|, \quad \mathcal{J}(f) = |b_k|, \quad \mathcal{J}(f) = |f(z)|, \quad \mathcal{J}(f) = |\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^n f(z)|$$

$$\mathcal{J}(f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\gamma d\theta \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (f \in \mathcal{H}, \gamma \geq 1, 0 < r < 1).$$

بنابراین با استفاده از لم ۱.۳ و قضیه ۲۲.۳ نتایج زیر را داریم:

نتیجه ۵.۳. [۸۲] فرض کنید $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ با بسط سری توانی (۴۵.۳) باشد. آنگاه،

$$|a_k| \leq \frac{B-A}{\alpha_k}, \quad |b_k| \leq \frac{B-A}{\beta_k}, \quad (k = 2, 3, \dots),$$

که α_k و β_k در (۴۱.۳) آمده است.

نتیجه ۶.۳. [۸۲] فرض کنید $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ با بسط سری توانی (۴۵.۳) باشد. آنگاه،

$$r - \frac{B-A}{2^n(2B-A+1)} r^2 \leq |f(z)| \leq r + \frac{B-A}{2^n(2B-A+1)} r^2,$$

$$r - \frac{2^m(B-A)}{2^n(2B-A+1)} r^2 \leq |\mathcal{D}_{\mathcal{H}}^m f(z)| \leq r + \frac{2^m(B-A)}{2^n(2B-A+1)} r^2, \quad (m \in \mathbb{N})$$

نتیجه ۷.۳. [۸۲] فرض کنید $0 < r < 1$ و $\gamma \geq 1$. اگر $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ ، آنگاه،

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\gamma d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_\gamma^*(re^{i\theta})|^\gamma d\theta$$

که h_γ^* در (۴۹.۳) آمده است.

در پایان از نتیجه ۶.۳ داریم:

نتیجه ۸.۳. [۸۲] اگر $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{J}}[A, B; n]$ ، آنگاه

$$\left\{ \omega : |\omega| < \frac{2^n(2B-A+1) - (B-A)}{2^n(2B-A+1)} \right\} \subset f(\mathbb{D}).$$

فصل ۴

تحدب در نگاشتهای همساز و تك ارز

در فصل قبل به تکنیک برش که یکی از روشهای معروف برای ساخت تابع همساز تك ارز اشاره و مثالی در این زمینه آورده شد. در ابتدای این فصل روش دیگری از ساخت تابع همساز تك ارز ارائه می نماییم که اساس آن بر مبنای ترکیبات خطی از توابع همساز می باشد. در ادامه به جمع های جزئی مرتب اشاره می کنیم و در بخش پایانی این فصل زیر رده ای از توابع همساز محدب در جهت خاص را معرفی نموده و کران ضرایب سری توانی زیر رده ای از این توابع را بررسی خواهیم نمود.

۱.۴ ترکیب خطی نگاشت های همساز و تك ارز

یکی دیگر از روشهای ساخت توابع همساز تك ارز استفاده از ترکیبات خطی از دو نگاشت همساز مناسب می باشد. لازم به ذکر است که ترکیب خطی از دو تابع $f_1 = h_1 + \overline{g}_1$ و $f_2 = h_2 + \overline{g}_2$ به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} f_3 &= \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 = \lambda(h_1 + \overline{g}_1) + (1 - \lambda)(h_2 + \overline{g}_2) \\ &= [\lambda h_1 + (1 - \lambda) h_2] + [\lambda \overline{g}_1 + (1 - \lambda) \overline{g}_2] = h_3 + \overline{g}_3. \end{aligned} \quad (1.4)$$

یادآوری ۱.۴. فرض کنید f_1 و f_2 توابعی تحلیلی و محدب در $\mathbb{D}$ باشند. ترکیب خطی $f_3 = \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$ لزوماً تابعی تك ارز نمی باشد.

مثال ۱.۴. فرض کنید $f_1 = \frac{z}{1-z}$ و $f_2 = \frac{z}{1+iz}$ باشد. f_1 و f_2 توابعی محدب و بترتیب دیسک واحد را به نیم صفحه $\frac{-1}{4} < \operatorname{Re}\{w\} < \frac{1}{4}$ و $\operatorname{Re}\{iw\} < \frac{1}{4}$ می نگارند. حال قرار می دهیم $f = \lambda f_1 + (1-\lambda)f_2$ ، $a = \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ و $z_0 = \frac{a+i}{a+1}$ باشد. در اینصورت $|z_0| < 1$ و $f'(z_0) = 0$. بنابراین f تك ارز نمی باشد. (شرط کافی برای تك ارزی f روی $\mathbb{D}$ ، $\operatorname{Re}\{f'(z)\} > 0$).

اولین بار میشل دورف [۱۹] نشان داد که تحت چه شرایطی، ترکیب خطی از دو تابع همساز تك ارز و محدب در جهت محور موهومی، تابعی همساز و محدب در همان جهت است.

قضیه ۱.۴. [۱۹] فرض کنید برای $j = 1, 2$ ، $f_j = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ محدب در جهت محور موهومی با $\omega_1 = \omega_2$ باشد. اگر $\operatorname{Re}\{(1-z^2)(h'_j + g'_j)\} \geq 0$ ، آنگاه ترکیب خطی از f_1 و f_2 متعلق به S_H و محدب در جهت محور موهومی می باشد.

اخیراً وانگ [۷۸] قضایای زیر را در مورد توابع محدب در جهت محور حقیقی اثبات نموده است.

قضیه ۲.۴. [۷۸] فرض کنید برای $j = 1, 2$ ، $f_j = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ با $\omega_1 = \omega_2$ باشد. همچنین در $\mathbb{D}$ ، $\operatorname{Re}\left\{\frac{z(h'_j - g'_j)}{\varphi}\right\} > 0$ و φ تابع (۲.۴) باشد. آنگاه ترکیب خطی از f_1 و f_2 متعلق به S_H و محدب در جهت محور حقیقی می باشد.

قضیه ۳.۴. [۷۸] فرض کنید برای $j = 1, 2$ ، $f_j = h_j + \overline{g_j} \in S_H$ با $h_j + g_j = \frac{z}{1-z}$ باشد. آنگاه ترکیب خطی از f_1 و f_2 متعلق به S_H و محدب در جهت محور حقیقی می باشد.

همچنین پومرنکه [۵۸] در قضیه ۴.۴ نشان داد که تحت شرایطی يك تابع تحلیلی CHD می باشد.

قضیه ۴.۴. فرض کنید $f(z)$ تابع تحلیلی در $\mathbb{D}$ ، $f(0) = 0$ و $f'(0) \neq 0$ باشد. همچنین

$$\varphi(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\theta}z)(1 + e^{-i\theta}z)} \quad (2.4)$$

که در آن $\theta \in \mathbb{R}$. اگر

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{\varphi(z)}\right\} > 0, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

آنگاه f يك نگاشت CHD است.

نمادگذاری ۱.۴. رده تمام توابع همساز تك ارز $f = h + \overline{g}$ که $\mathbb{D}$ را پوشا به $\mathcal{H}_\gamma$ می نگارد را با $\mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma)$ نمایش می دهیم که در آن

$$\mathcal{H}_\gamma = \left\{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \gamma < \pi : \operatorname{Re}(e^{i\gamma}z) > -\frac{1}{4}\right\}$$

واضح است $\mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma) \subset S_H$.

در حالت خاص، $\mathcal{S}(\mathcal{H}_0)$ شامل توابع همساز تك ارزی است که $\mathbb{D}$ را پوشا به نیم صفحه $\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > -\frac{1}{4}\right\}$ می نگارد.

لم ۱.۴. [۶۷] فرض کنید $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma)$ باشد. آنگاه،

$$h(z) + e^{-2i\gamma}g(z) = \frac{z}{1 - e^{i\gamma}z}.$$

برهان. بنا به فرض $f \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma)$ ، لذا از تعریف رده $\mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma)$ داریم:

$$\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}(h(z) + \overline{g(z)})\} = \operatorname{Re}\{e^{i\gamma}h(z) + e^{-i\gamma}g(z)\} > -\frac{1}{\gamma}$$

به عبارتی دیگر

$$\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}(h(z) + e^{-2i\gamma}g(z))\} > -\frac{1}{\gamma}$$

از طرفی $h(z) + e^{-2i\gamma}g(z) = h(z) - e^{2i(\frac{\pi}{\gamma} - \gamma)}g(z)$ بنا بر قضیه ۲.۳ تابع $h(z) + e^{-2i\gamma}g(z)$ تك ارز و محدب در جهت $\frac{\pi}{\gamma} - \gamma$ است. واضح است که $z \mapsto h(z) + e^{-2i\gamma}g(z)$ را برو به $\mathcal{H}_\gamma$ می نگارد و لذا $h(z) + e^{-2i\gamma}g(z) = \frac{z}{1 - e^{i\gamma}z}$. $\square$

قضیه ۵.۴. [۶۷] فرض کنید برای $j = 1, 2$ ، $f_j = h_j + \bar{g}_j \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma)$ با $\omega_1 = \omega_2$ باشد. آنگاه ترکیب خطی از f_1 و f_2 متعلق به $\mathcal{S}_H$ و محدب در جهت $-\gamma$ می باشد.

برهان. قرار می دهیم $f_3 = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$ و با توجه به فرض $g'_1 = \omega_2 h'_1 = \omega_1 h'_1$ ، لذا

$$\omega_3 = \frac{g'_3}{h'_3} = \frac{\lambda g'_1 + (1 - \lambda)g'_2}{\lambda h'_1 + (1 - \lambda)h'_2} = \frac{\lambda \omega_1 h'_1 + (1 - \lambda)\omega_1 h'_2}{\lambda h'_1 + (1 - \lambda)h'_2} = \omega_1.$$

از طرفی $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma) \subset \mathcal{S}_H$. در نتیجه برای $j = 1, 2$ ، $|\omega_j| < 1$ پس $|\omega_3| = |\omega_1| < 1$. بنابراین f_3 حافظ جهت و موضعاً تك ارز می باشد. اکنون نشان می دهیم f_3 محدب در جهت $-\gamma$ می باشد.

فرض کنیم $F = h_3 - e^{-2i\gamma}g_3$ با توجه به رابطه (۱.۴) داریم:

$$\begin{aligned} F &= h_3 - e^{-2i\gamma}g_3 = (\lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2) - e^{-2i\gamma}(\lambda g_1 + (1 - \lambda)g_2) \\ &= \lambda(h_1 - e^{-2i\gamma}g_1) + (1 - \lambda)(h_2 - e^{-2i\gamma}g_2), \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} F' &= \lambda(h'_1 - e^{-2i\gamma}g'_1) + (1 - \lambda)(h'_2 - e^{-2i\gamma}g'_2) \\ &= \lambda(h'_1 + e^{-2i\gamma}g'_1) \left(\frac{h'_1 - e^{-2i\gamma}g'_1}{h'_1 + e^{-2i\gamma}g'_1} \right) + (1 - \lambda)(h'_2 + e^{-2i\gamma}g'_2) \left(\frac{h'_2 - e^{-2i\gamma}g'_2}{h'_2 + e^{-2i\gamma}g'_2} \right) \\ &= \frac{\lambda}{(1 - e^{i\gamma}z)^2} \cdot P_1(z) + \frac{(1 - \lambda)}{(1 - e^{i\gamma}z)^2} \cdot P_2(z), \end{aligned}$$

که در آن:

$$P_j(z) = \frac{h'_j - e^{-2i\gamma}g'_j}{h'_j + e^{-2i\gamma}g'_j} = \frac{1 - e^{-2i\gamma} \frac{g'_j}{h'_j}}{1 + e^{-2i\gamma} \frac{g'_j}{h'_j}} = \frac{1 - e^{-2i\gamma}\omega_j}{1 + e^{-2i\gamma}\omega_j} \quad j = 1, 2$$

از آنجا که $\omega_1 = \omega_2$ و بنا به یادآوری ۷.۱، در $\mathbb{D}$ ، $Re\{P_1(z)\} = Re\{P_2(z)\} > 0$ ، حال در رابطه (۲.۴) قرار می دهیم $\varphi(e^{i\gamma}z) = e^{i\gamma} \frac{z}{(1 - e^{i\gamma}z)^2}$ ، لذا

$$\begin{aligned} Re\left\{e^{i\gamma} \frac{zF'}{\varphi(z)}\right\} &= Re\left\{(1 - e^{i\gamma}z)^2 \left(\frac{\lambda}{(1 - e^{i\gamma}z)^2} \cdot P_1(z) + \frac{(1 - \lambda)}{(1 - e^{i\gamma}z)^2} \cdot P_1(z)\right)\right\} \\ &= \lambda Re\{P_1(z)\} + (1 - \lambda)Re\{P_1(z)\} = Re\{P_1(z)\} > 0. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از قضیه ۴.۴، تابع $e^{i\gamma}F = e^{i\gamma}(h_3 - e^{-2i\gamma}g_3)$ تابعی CHD است و لذا $F = h_3 - e^{-2i\gamma}g_3$ محدب در جهت $-\gamma$ است. در پایان با بکار بردن قضیه ۲.۳ برای $F = h_3 - e^{-2i\gamma}g_3$ قضیه اثبات می شود. $\square$

نتیجه ۱.۴. [۶۷] فرض کنید برای $j = 1, 2, \dots, n$ ، $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma)$ ، $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n$ باشد. آنگاه برای $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ و $0 \leq \lambda_j \leq 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ترکیب خطی $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$ متعلق به $\mathcal{S}_H$ و محدب در جهت $-\gamma$ می باشد.

قضیه ۶.۴. [۶۷] فرض کنید برای $j = 1, 2$ ، $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma)$ ، $\omega_1 \neq \omega_2$ باشد. آنگاه $f_3 = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$ موضعاً تك ارز می باشد.

برهان. برای $j = 1, 2$ از $h_j(z) + e^{-2i\gamma}g_j(z) = \frac{z}{1 - ze^{i\gamma}}$ داریم:

$$h'_j = \frac{1}{(1 + \omega e^{-2i\gamma})(1 - ze^{i\gamma})^2}, \quad j = 1, 2$$

لذا

$$\begin{aligned} |\omega_3| &= \left| \frac{\lambda g'_1 + (1 - \lambda)g'_2}{\lambda h'_1 + (1 - \lambda)h'_2} \right| = \left| \frac{\lambda \omega_1 h'_1 + (1 - \lambda)\omega_2 h'_2}{\lambda h'_1 + (1 - \lambda)h'_2} \right| \\ &= \frac{|\lambda \omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2 + \omega_1 \omega_2 e^{-2i\gamma}|}{|1 + (1 - \lambda)\omega_1 e^{-2i\gamma} + \lambda \omega_2 e^{-2i\gamma}|}. \end{aligned}$$

نشان می دهیم $|\omega_3| < 1$. فرض کنیم:

$$\omega_j = r_j e^{i\theta_j} = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j) \quad (0 \leq r_j < 1, \quad j = 1, 2)$$

قرار می دهیم:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda) &= \left| 1 + (1 - \lambda)\omega_1 e^{-i\gamma} + \lambda\omega_2 e^{-i\gamma} \right|^2 - \left| \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2 + \omega_1\omega_2 e^{-i\gamma} \right|^2 \\
 &= \left| 1 + (1 - \lambda)r_1 e^{i(\theta_1 - \gamma)} + \lambda r_2 e^{i(\theta_2 - \gamma)} \right|^2 - \left| \lambda r_1 e^{i\theta_1} + (1 - \lambda)r_2 e^{i\theta_2} \right. \\
 &\quad \left. + r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2 - \gamma)} \right|^2 = \left[1 + (1 - \lambda)r_1 \cos(\theta_1 - \gamma) + \lambda r_2 \cos(\theta_2 - \gamma) \right]^2 \\
 &\quad + \left[(1 - \lambda)r_1 \sin(\theta_1 - \gamma) + \lambda r_2 \sin(\theta_2 - \gamma) \right]^2 - \left[\lambda r_1 \cos\theta_1 + (1 - \lambda)r_2 \cos\theta_2 \right. \\
 &\quad \left. + r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \gamma) \right]^2 - \left[\lambda r_1 \sin\theta_1 + (1 - \lambda)r_2 \sin\theta_2 + r_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \gamma) \right]^2 \\
 &= 1 + (1 - \lambda)^2 r_1^2 \cos^2(\theta_1 - \gamma) + \lambda^2 r_2^2 \cos^2(\theta_2 - \gamma) + 2(1 - \lambda)r_1 \cos(\theta_1 - \gamma) \\
 &\quad + 2\lambda r_2 \cos(\theta_2 - \gamma) + 2\lambda(1 - \lambda)r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \gamma)\cos(\theta_2 - \gamma) \\
 &\quad + (1 - \lambda)^2 r_1^2 \sin^2(\theta_1 - \gamma) + \lambda^2 r_2^2 \sin^2(\theta_2 - \gamma) + 2\lambda(1 - \lambda)r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \gamma)\sin(\theta_2 - \gamma) \\
 &\quad - \left[\lambda^2 r_1^2 \cos^2\theta_1 + (1 - \lambda)^2 r_2^2 \cos^2\theta_2 + r_1^2 r_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2 - \gamma) + 2\lambda(1 - \lambda)r_1 r_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \right. \\
 &\quad \left. + 2\lambda r_1 r_2 \cos\theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \gamma) + 2(1 - \lambda)r_1 r_2 \cos\theta_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \gamma) \right. \\
 &\quad \left. + \lambda^2 r_1^2 \sin^2\theta_1 + (1 - \lambda)^2 r_2^2 \sin^2\theta_2 + r_1^2 r_2^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2 - \gamma) + 2\lambda(1 - \lambda)r_1 r_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \right. \\
 &\quad \left. + 2\lambda r_1 r_2 \sin\theta_1 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \gamma) + 2(1 - \lambda)r_1 r_2 \sin\theta_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \gamma) \right] \\
 &= 1 + r_1^2 - r_2^2 - r_1^2 r_2^2 + 2r_1 \cos(\theta_1 - \gamma) - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \gamma) + 2\lambda \left(r_2 \cos(\theta_2 - \gamma) \right. \\
 &\quad \left. - r_1 \cos(\theta_1 - \gamma) - r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \gamma) + r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \gamma) + r_2^2 - r_1^2 \right)
 \end{aligned}$$

تابع $\varphi(\lambda)$ تابعی یکنوا و پیوسته در بازه $[0, 1]$ نسبت به λ می باشد و مشاهده می کنیم:

$$\begin{aligned}
 \varphi(0) &= (1 - r_1^2)(r_1^2 + 2r_1 \cos(\theta_1 - \gamma) + 1) \\
 &= (1 - r_1^2)[(r_1 + \cos(\theta_1 - \gamma))^2 + \sin^2(\theta_1 - \gamma)] > 0,
 \end{aligned}$$

و

$$\varphi(1) = (1 - r_2^2)[(r_2 + \cos(\theta_2 - \gamma))^2 + \sin^2(\theta_2 - \gamma)] > 0.$$

بنابراین در بازه $[0, 1]$ ، $\varphi(\lambda) > 0$ می باشد. در نتیجه $|\omega_3| < 1$ و f_3 در $\mathbb{D}$ موضعاً تکه ارز می باشد. $\square$

نتیجه ۲.۴. [۶۷] فرض کنید برای $j = 1, 2$ ، $f_j = h_j + \overline{g_j} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma)$ ، $j = 1, 2$ باشد. آنگاه $\lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2 \in \mathcal{S}_H$ و محدب در جهت $-\gamma$ می باشد.

مثال ۲.۴. فرض کنیم برای $f_1 = h_1 + \overline{g_1} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_\gamma)$ با $h_1(z) + e^{-i\gamma} g_1(z) = \frac{z}{1 - ze^{i\gamma}}$ و $\omega_1 = -e^{i\gamma} z$ استفاده از تکنیک برش داریم:

$$h_1(z) = \frac{z - \frac{1}{\gamma} z^2 e^{i\gamma}}{(1 - ze^{i\gamma})^2},$$

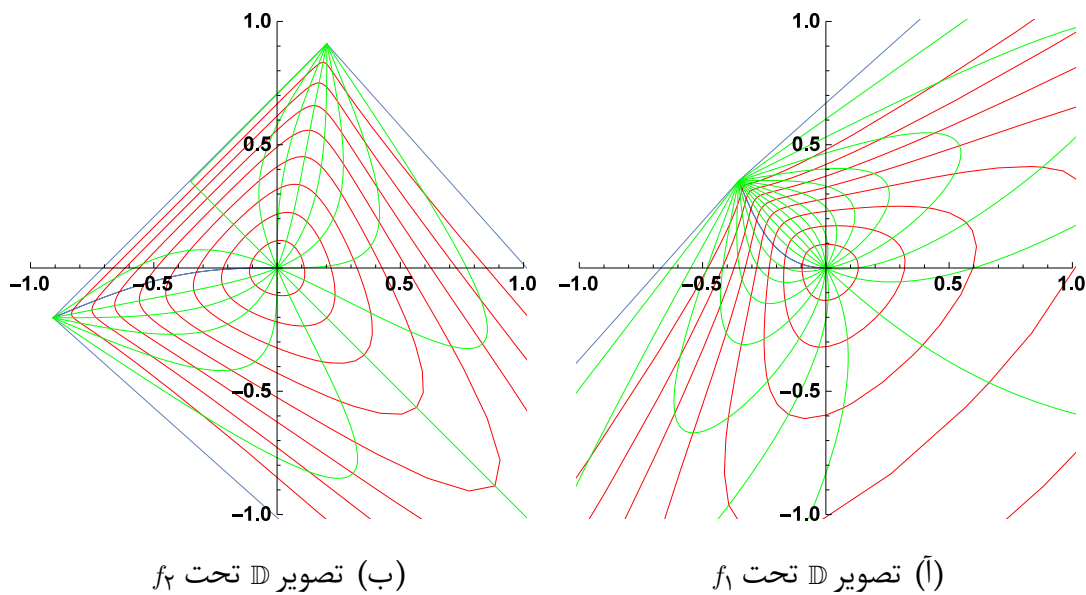
$$g_1(z) = \frac{-\frac{1}{4}z^2 e^{3i\gamma}}{(1 - ze^{i\gamma})^2}.$$

همچنین فرض کنیم $f_2 = h_2 + \overline{g_2}$ با $\frac{z}{1 - ze^{i\gamma}}$ و $h_2(z) + e^{-2i\gamma}g_2(z) = \frac{z}{1 - ze^{i\gamma}}$ و $\omega_1 = e^{3i\gamma}z$. لذا

$$h_2(z) = \frac{1}{4e^{i\gamma}} \left(\ln\left(\frac{1 + ze^{i\gamma}}{1 - ze^{i\gamma}}\right) + \frac{2}{1 - ze^{i\gamma}} \right) - \frac{1}{2e^{i\gamma}},$$

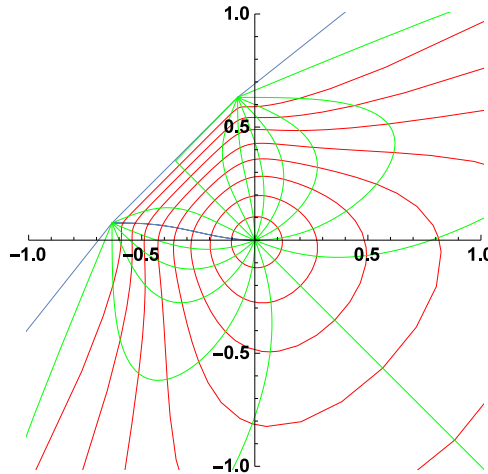
$$g_2(z) = \frac{e^{i\gamma}}{2} \left(\frac{2ze^{i\gamma} - 1}{1 - ze^{i\gamma}} \right) - \frac{e^{i\gamma}}{4} \ln\left(\frac{1 + ze^{i\gamma}}{1 - ze^{i\gamma}}\right) + \frac{e^{i\gamma}}{2}.$$

اگر $\gamma = \frac{\pi}{4}$ قرار دهیم، آنگاه تصویر $\mathbb{D}$ تحت f_1 و f_2 در شکل ۱.۴ آمده است. از آنجا که f_1 و f_2 در شرایط نتیجه ۲.۴ صدق می کند، تابع $(0 \leq \lambda \leq 1)$ $f_3 = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$



شکل ۱.۴: تصویر $\mathbb{D}$ تحت f_1 و f_2

محدب در جهت $-\frac{\pi}{4}$ می باشد. تصویر $\mathbb{D}$ تحت f_3 با $\lambda = \frac{1}{4}$ در شکل ۲.۴ آمده است.



شکل ۲.۴: تصویر $\mathbb{D}$ تحت f_3 با $\lambda = \frac{1}{4}$

۲.۴ جمع های جزئی در رده $\mathcal{K}_H$

جمع های جزئی در توابع تحلیلی دامنه وسیعی از تحقیقات را به خود اختصاص داده است. شروع بحث در زمینه جمع های جزئی را می توان به مقاله سیلویا [۷۳] روی توابع محدب در سال ۱۹۸۵ اشاره کرد. بعد از آن سیلورمن [۷۴]، داروس [۱]، پاروال و دیکزیت [۱۷]، فراسین [۲۷، ۲۹]، بانسال و راینا [۶۱]، و رویس [۶۲] روی جمع های جزئی در رده های مختلفی از توابع تحلیلی را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. اخیرا پاروال و دیکزیت [۶۰] جمع های جزئی را برای توابع همساز ستاره گون بررسی نموده اند. در این بخش به بررسی جمع های جزئی روی توابع همساز محدب می پردازیم.

تعریف ۲.۴. تابع همساز و α آرژ $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) را محدب از مرتبه α ، $(0 \leq \alpha < 1)$ گویند هرگاه

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \arg \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z(zh'(z))' + \overline{z(zg'(z))'}}{zh'(z) - \overline{zg'(z)}} \right\} \geq \alpha,$$

که در آن $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $|z| = r < 1$ می باشد. رده تمام توابع همساز α آرژ و محدب را با $\mathcal{K}_H(\alpha)$ نمایش می دهیم.

اخیرا جهانگیری [۳۷] نشان داد شرط کافی برای اینکه تابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) متعلق به رده $\mathcal{K}_H(\alpha)$ باشد آن است که کران ضرایب تابع f در رابطه زیر صدق نماید.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} |a_k| + \frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} |b_k| \right) \leq 2. \quad (3.4)$$

جمع های جزئی از تابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ را که در رابطه (۳.۴)

صدق می کند را به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$f_m(z) = z + \sum_{k=2}^m a_k z^k + \sum_{k=2}^{\infty} \overline{b_k z^k},$$

$$f_n(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=2}^n \overline{b_k z^k},$$

$$f_{m,n}(z) = z + \sum_{k=2}^m a_k z^k + \sum_{k=2}^n \overline{b_k z^k}.$$

و در ادامه به بررسی کران پایین $\operatorname{Re}\left\{\frac{f_n}{f}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\frac{f}{f_n}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\frac{f'_m}{f'}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\frac{f'}{f'_m}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\frac{f_m}{f}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\frac{f}{f_m}\right\}$ و $\operatorname{Re}\left\{\frac{f'_{m,n}}{f'}\right\}$ که در آن $\operatorname{Re}\left\{\frac{f'}{f'_{m,n}}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\frac{f_{m,n}}{f}\right\}$, $\operatorname{Re}\left\{\frac{f}{f_{m,n}}\right\}$

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) = i(zh'(z) - \overline{zg'(z)}).$$

است، خواهیم پرداخت.

قضیه ۷.۴. [۸۰] فرض کنید تابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ در نامساوی (۳.۴) صدق کند. آنگاه،

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f(z)}{f_m(z)}\right\} \geq \frac{m(m+2-\alpha)}{(m+1)(m+1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (4.4)$$

نامساوی (۴.۴) برای تابع (۵.۴) اکید^۱ است.

$$f(z) = z + \frac{1-\alpha}{(m+1)(m+1-\alpha)} z^{m+1}. \quad (5.4)$$

برهان. فرض کنیم

$$\begin{aligned} & \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left[\frac{f(z)}{f_m(z)} - \frac{m(m+2-\alpha)}{(m+1)(m+1-\alpha)} \right] = \\ & \frac{1 + \sum_{k=2}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} + \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k \right]}{1 + \sum_{k=2}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k}} \\ & := \frac{1+A(z)}{1+B(z)}. \end{aligned}$$

قرار می دهیم $\frac{1+A(z)}{1+B(z)} = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}$ ، بنابراین $\omega(z) = \frac{A(z)-B(z)}{2+A(z)+B(z)}$. لذا

$$\omega(z) =$$

$$\frac{\frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k \right]}{2 + 2 \left(\sum_{k=2}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right) + \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k \right)}.$$

¹Sharp

پس

$$|\omega(z)| \leq \frac{\frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \right]}{2 - 2 \left(\sum_{k=1}^m |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \right) - \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \right)}.$$

سمت راست نامساوی بالا کمتر از ۱ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=1}^m |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| + \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \right) \leq 1, \quad (6.4)$$

از طرفی سمت چپ رابطه (۶.۴) توسط $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} |a_k| + \frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} |b_k| \right)$ کران دار است، زیرا

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} - 1 \right) |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} - 1 \right) |b_k| \\ + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} - \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \right) |a_k| \geq 0. \end{aligned}$$

بنابراین با در نظر گرفتن نامساوی (۳.۴)، تابع f در رابطه (۶.۴) صدق می کند و لذا $|\omega(z)| \leq 1$. حال با توجه به یادآوری ۷.۱، رابطه (۴.۴) اثبات می گردد. برای اینکه نشان دهیم نامساوی (۴.۴) برای تابع $f(z) = z + \frac{1-\alpha}{(m+1)(m+1-\alpha)} z^{m+1}$ اکید است، داریم:

$$\frac{f(z)}{f_m(z)} = 1 + \frac{1-\alpha}{(m+1)(m+1-\alpha)} z^m$$

با در نظر گرفتن $z = re^{i\frac{\pi}{m}}$ و $r \rightarrow 1^-$ داریم:

$$1 - \frac{1-\alpha}{(m+1)(m+1-\alpha)} = \frac{m(m+2-\alpha)}{(m+1)(m+1-\alpha)}$$

در نتیجه سمت چپ رابطه (۴.۴) نیز بدست می آید.

□

قضیه ۸.۴. [۸۰] فرض کنید تابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ در نامساوی (۳.۴) صدق کند. آنگاه،

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f_m(z)}{f(z)} \right\} \geq \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{m(m+2-\alpha) + 2(1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (7.4)$$

نامساوی (۷.۴) برای تابع (۵.۴) اکید است.

برهان. قرار دهیم:

$$\frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} = \frac{m(m + 2 - \alpha) + 2(1 - \alpha)}{1 - \alpha} \left[\frac{f_m(z)}{f(z)} - \frac{(m + 1)(m + 1 - \alpha)}{m(m + 2 - \alpha) + 2(1 - \alpha)} \right] =$$

$$\frac{1 + \sum_{k=2}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} - \frac{(m + 1)(m + 1 - \alpha)}{1 - \alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k \right)}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k}}$$

بنابراین:

$$|\omega(z)| \leq \frac{\frac{m(m + 2 - \alpha) + 2(1 - \alpha)}{1 - \alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \right]}{2 - 2 \left(\sum_{k=2}^m |a_k| + \sum_{k=2}^{\infty} |b_k| \right) - \frac{m(m + 2 - \alpha)}{1 - \alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \right)},$$

سمت راست نامساوی بالا کمتر از ۱ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=2}^m |a_k| + \sum_{k=2}^{\infty} |b_k| + \frac{m(m + 2 - \alpha) + (1 - \alpha)}{1 - \alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \right) \leq 1. \quad (8.4)$$

از طرفی سمت چپ رابطه (۸.۴) توسط $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k - \alpha)}{1 - \alpha} |a_k| + \frac{k(k + \alpha)}{1 - \alpha} |b_k| \right)$ کران دار است و اثبات تمام است. $\square$

قضیه ۹.۴. [۸۰] فرض کنید تابع $f = h + \overline{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ در نامساوی (۳.۴) صدق کند. آنگاه،

$$Re \left\{ \frac{f'(z)}{f'_m(z)} \right\} \geq \frac{m}{m + 1 - \alpha}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (9.4)$$

نامساوی (۹.۴) برای تابع (۵.۴) اکید می باشد.

برهان. قرار می دهیم:

$$\frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} = \frac{m + 1 - \alpha}{1 - \alpha} \left[\frac{f'(z)}{f'_m(z)} - \frac{m}{m + 1 - \alpha} \right]$$

$$= \frac{1 + \sum_{k=2}^m k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k - \sum_{k=2}^{\infty} k r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} + \frac{m + 1 - \alpha}{1 - \alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k \right]}{1 + \sum_{k=2}^m k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k - \sum_{k=2}^{\infty} k r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k}}.$$

لذا

$$\omega(z) =$$

$$\frac{\frac{m + 1 - \alpha}{1 - \alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k \right]}{2 + 2 \left(\sum_{k=2}^m k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k - \sum_{k=2}^{\infty} k r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right) + \frac{m + 1 - \alpha}{1 - \alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k \right)}$$

با استفاده از روش استفاده شده در اثبات قضیه ۷.۴ نتیجه مطلوب حاصل می شود. $\square$

قضیه ۱۰.۴. [۸۰] فرض کنید تابع $f = h + \bar{g}$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ در نامساوی (۳.۴) صدق کند. آنگاه،

$$Re\left\{\frac{f'_m(z)}{f'(z)}\right\} \geq \frac{m+1-\alpha}{m+2(1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (10.4)$$

نامساوی (۱۰.۴) برای تابع (۵.۴) اکید است.

برهان. می نویسیم:

$$\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = \frac{m+2(1-\alpha)}{1-\alpha} \left[\frac{f'_m(z)}{f'(z)} - \frac{m+1-\alpha}{m+2(1-\alpha)} \right]$$

ادامه اثبات همانند قضیه ۹.۴ می باشد. $\square$

قضیه ۱۱.۴. [۸۰] فرض کنید تابع $f(z)$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ در نامساوی (۳.۴) صدق کند. آنگاه،

$$Re\left\{\frac{f(z)}{f_n(z)}\right\} \geq \frac{n(n+2+\alpha)}{(n+1)(n+1+\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (11.4)$$

نامساوی (۱۱.۴) برای تابع زیر اکید است.

$$f(z) = z + \frac{1-\alpha}{(n+1)(n+1+\alpha)} \bar{z}^{n+1}. \quad (12.4)$$

برهان. ابتدا قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} &= \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left[\frac{f(z)}{f_n(z)} - \frac{n(n+2+\alpha)}{(n+1)(n+1+\alpha)} \right] = \\ &= \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \bar{b}_k + \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \bar{b}_k \right]}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \bar{b}_k}, \end{aligned}$$

لذا

$$\omega(z) =$$

$$\frac{\frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \bar{b}_k \right]}{2 + 2 \left(\sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \bar{b}_k \right) + \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \bar{b}_k \right)}$$

در نتیجه

$$|\omega(z)| \leq \frac{\frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right]}{2 - 2 \left(\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=2}^n |b_k| \right) - \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right)}$$

سمت راست نامساوی بالا کمتر از ۱ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=2}^n |b_k| + \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right) \leq 1. \quad (13.4)$$

از طرفی سمت چپ رابطه (۱۳.۴) توسط $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} |a_k| + \frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} |b_k| \right)$ کران دار است، زیرا

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} - 1 \right) |a_k| + \sum_{k=2}^n \left(\frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} - 1 \right) |b_k| \\ + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} - \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \right) |b_k| \geq 0. \end{aligned}$$

برای اینکه نشان دهیم تابع $f(z) = z + \frac{1-\alpha}{(n+1)(n+1+\alpha)} \bar{z}^{n+1}$ در رابطه (۱۱.۴) دقیق است، با در نظر گرفتن $z = re^{i\frac{\pi}{n+2}}$ و $r \rightarrow 1^-$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{f_n(z)} &= 1 + \frac{1-\alpha}{(n+1)(n+1+\alpha)} r^n e^{-\frac{i\pi}{n+2}(n+2)} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1-\alpha}{(n+1)(n+1+\alpha)} = \frac{n(n+2+\alpha)}{(n+1)(n+1+\alpha)} \end{aligned}$$

□

در نتیجه سمت چپ رابطه (۱۱.۴) نیز بدست می آید.

قضیه ۱۲.۴. [۸۰] فرض کنید تابع $f(z)$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ در نامساوی (۳.۴) صدق کند. آنگاه،

$$Re \left\{ \frac{f_n(z)}{f(z)} \right\} \geq \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{n(n+2+\alpha)+2}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (14.4)$$

نامساوی (۱۴.۴) برای تابع (۵.۴) اکید است.

برهان. می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} &= \frac{n(n+2+\alpha)+2}{1-\alpha} \left[\frac{f_n(z)}{f(z)} - \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{n(n+2+\alpha)+2} \right] = \\ &= \frac{1 + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \bar{b}_k - \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \bar{b}_k \right]}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \bar{b}_k}. \end{aligned}$$

□

ادامه اثبات همانند قضیه ۸.۴ می باشد.

قضیه ۱۳.۴. [۸۰] فرض کنید تابع $f(z)$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ در نامساوی (۳.۴) صدق کند. آنگاه،

۱. اگر $n(n+2+\alpha)+2\alpha \geq m(m+2-\alpha)$ یا برای $k \geq 2, b_k = 0$ باشد، آنگاه

$$Re\left\{\frac{f(z)}{f_{m,n}(z)}\right\} \geq \frac{m(m+2-\alpha)}{(m+1)(m+1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (15.4)$$

۲. اگر $n(n+2+\alpha)+2\alpha \leq m(m+2-\alpha)$ یا برای $k \geq 2, a_k = 0$ باشد، آنگاه

$$Re\left\{\frac{f(z)}{f_{m,n}(z)}\right\} \geq \frac{n(n+2+\alpha)}{(n+1)(n+1+\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (16.4)$$

برهان. برای اثبات قسمت اول قضیه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} &= \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left[\frac{f(z)}{f_{m,n}(z)} - \frac{m(m+2-\alpha)}{(m+1)(m+1-\alpha)} \right] \\ &= \frac{P}{1 + \sum_{k=2}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k}}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} P &= 1 + \sum_{k=2}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \\ &+ \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right]. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\omega(z) = \frac{\frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right]}{Q},$$

که

$$\begin{aligned} Q &= 2+2 \left(\sum_{k=2}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right) \\ &+ \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right). \end{aligned}$$

لذا

$$|\omega(z)| \leq \frac{\frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right]}{2-2 \left(\sum_{k=2}^m |a_k| + \sum_{k=2}^n |b_k| \right) - \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right)}.$$

سمت راست نامساوی بالا کمتر از ۱ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=2}^m |a_k| + \sum_{k=2}^n |b_k| + \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right) \leq 1. \quad (17.4)$$

از طرفی سمت چپ رابطه (۱۷.۴) توسط $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} |a_k| + \frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} |b_k| \right)$ کران دار است، زیرا

$$\sum_{k=2}^m \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} - 1 \right) |a_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} - \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \right) |a_k| \\ + \sum_{k=2}^n \left(\frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} - 1 \right) |b_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} - \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{1-\alpha} \right) |b_k| \geq 0.$$

برای اینکه نشان دهیم تابع $f(z) = z + \frac{1-\alpha}{(m+1)(m+1-\alpha)} z^{m+1}$ در رابطه (۱۵.۴) اکید است، با در نظر گرفتن $z = re^{i\frac{\pi}{m}}$ و $r \rightarrow 1^-$ داریم:

$$\frac{f(z)}{f_{m,n}(z)} = 1 + \frac{1-\alpha}{(m+1)(m+1-\alpha)} z^m \\ \Rightarrow 1 - \frac{1-\alpha}{(m+1)(m+1-\alpha)} = \frac{m(m+2-\alpha)}{(m+1)(m+1-\alpha)}$$

در نتیجه سمت چپ رابطه (۱۵.۴) نیز بدست می آید. همچنین برای اثبات قسمت دوم داریم:

$$\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left[\frac{f(z)}{f_{m,n}(z)} - \frac{n(n+2+\alpha)}{(n+1)(n+1+\alpha)} \right] \\ = \frac{P}{1 + \sum_{k=2}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k}},$$

که در آن

$$P = 1 + \sum_{k=2}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \\ + \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right].$$

لذا

$$\omega(z) = \frac{\frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right]}{Q},$$

که

$$Q = 2 + 2 \left(\sum_{k=2}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=2}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right) \\ + \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right).$$

$$|\omega(z)| \leq \frac{\frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right]}{2 - 2 \left(\sum_{k=2}^m |a_k| + \sum_{k=2}^n |b_k| \right) - \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right)}.$$

سمت راست نامساوی بالا کمتر از ۱ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=2}^m |a_k| + \sum_{k=2}^n |b_k| + \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right) \leq 1. \quad (18.4)$$

از طرفی سمت چپ رابطه (۱۸.۴) توسط $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} |a_k| + \frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} |b_k| \right)$ کران دار است، زیرا

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^m \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} - 1 \right) |a_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} - \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \right) |a_k| \\ & + \sum_{k=2}^n \left(\frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} - 1 \right) |b_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} - \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{1-\alpha} \right) |b_k| \geq 0. \end{aligned}$$

برای اینکه نشان دهیم تابع $f(z) = z + \frac{1-\alpha}{(n+1)(n+1+\alpha)} \bar{z}^{n+1}$ در رابطه (۱۶.۴) اکید است، با در نظر گرفتن $z = re^{i\frac{\pi}{n+1}}$ و $r \rightarrow 1^-$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{f_{m,n}(z)} &= 1 + \frac{1-\alpha}{(n+1)(n+1+\alpha)} r^n e^{-\frac{i\pi}{n+1}(n+2)} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1-\alpha}{(n+1)(n+1+\alpha)} = \frac{n(n+2+\alpha)}{(n+1)(n+1+\alpha)} \end{aligned}$$

در نتیجه سمت چپ رابطه (۱۶.۴) نیز بدست می آید.

□

قضیه ۱۴.۴. [۸۰] فرض کنید تابع $f(z)$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ در نامساوی (۳.۴) صدق کند. آنگاه،

۱. اگر $n(n+2+\alpha) + 2\alpha \geq m(m+2-\alpha)$ یا برای $k \geq 2$ ، $b_k = 0$ باشد، آنگاه،

$$Re \left\{ \frac{f_{m,n}(z)}{f(z)} \right\} \geq \frac{(m+1)(m+1-\alpha)}{m(m+2-\alpha) + 2(1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (19.4)$$

۲. اگر $n(n+2+\alpha) + 2\alpha \leq m(m+2-\alpha)$ یا برای $k \geq 2$ ، $a_k = 0$ باشد. آنگاه،

$$Re \left\{ \frac{f_{m,n}(z)}{f(z)} \right\} \geq \frac{(n+1)(n+1+\alpha)}{n(n+2+\alpha) + 2}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (20.4)$$

برهان. برای اثبات قسمت اول قضیه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} &= \frac{m(m + \gamma - \alpha) + \gamma(1 - \alpha)}{1 - \alpha} \left[\frac{f_{m,n}(z)}{f(z)} - \frac{(m + 1)(m + 1 - \alpha)}{m(m + \gamma - \alpha) + \gamma(1 - \alpha)} \right] \\ &= \frac{P}{1 + \sum_{k=\gamma}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=\gamma}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k}}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} P &= 1 + \sum_{k=\gamma}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=\gamma}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \\ &\quad - \frac{(m + 1)(m + 1 - \alpha)}{1 - \alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right]. \end{aligned}$$

لذا

$$|\omega(z)| \leq \frac{\frac{m(m + \gamma - \alpha) + \gamma(1 - \alpha)}{1 - \alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right]}{\gamma - \gamma \left(\sum_{k=\gamma}^m |a_k| + \sum_{k=\gamma}^n |b_k| \right) - \frac{m(m + \gamma - \alpha)}{1 - \alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right)} \leq 1.$$

سمت راست نامساوی بالا کمتر از ۱ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=\gamma}^m |a_k| + \sum_{k=\gamma}^n |b_k| + \frac{m(m + \gamma - \alpha) + (1 - \alpha)}{1 - \alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right) \leq 1. \quad (21.4)$$

از طرفی سمت چپ رابطه (۲۱.۴) توسط $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k - \alpha)}{1 - \alpha} |a_k| + \frac{k(k + \alpha)}{1 - \alpha} |b_k| \right)$ کران دار است. همچنین برای قسمت دوم قضیه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} &= \frac{n(n + \gamma + \alpha) + \gamma}{1 - \alpha} \left[\frac{f_{m,n}(z)}{f(z)} - \frac{(n + 1)(n + 1 + \alpha)}{n(n + \gamma + \alpha) + \gamma} \right] \\ &= \frac{P}{1 + \sum_{k=\gamma}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=\gamma}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k}}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} P &= 1 + \sum_{k=\gamma}^m r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=\gamma}^n r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \\ &\quad - \frac{(n + 1)(n + 1 + \alpha)}{1 - \alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right]. \end{aligned}$$

لذا

$$|\omega(z)| \leq \frac{\frac{n(n + \gamma + \alpha) + \gamma}{1 - \alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right]}{\gamma - \gamma \left(\sum_{k=\gamma}^m |a_k| + \sum_{k=\gamma}^n |b_k| \right) - \frac{n(n + \gamma + \alpha) + \gamma \alpha}{1 - \alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right)}.$$

سمت راست نامساوی بالا کمتر از ۱ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=2}^m |a_k| + \sum_{k=2}^n |b_k| + \frac{n(n+2+\alpha) + (1+\alpha)}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \right) \leq 1. \quad (22.4)$$

از طرفی سمت چپ رابطه (۲۲.۴) توسط $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} |a_k| + \frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} |b_k| \right)$ کران دار است.

□

قضیه ۱۵.۴. [۸۰] فرض کنید تابع $f(z)$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ در نامساوی (۳.۴) صدق کند. آنگاه،

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{f'_{m,n}(z)} \right\} \geq \frac{m}{m+1-\alpha}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad \text{if } n > m \quad (23.4)$$

نامساوی (۲۳.۴) برای تابع (۵.۴) اکید است.

برهان. قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} &= \frac{m+1-\alpha}{1-\alpha} \left[\frac{f'(z)}{f'_{m,n}(z)} - \frac{m}{m+1-\alpha} \right] \\ &= \frac{P}{1 + \sum_{k=2}^m k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k - \sum_{k=2}^n k r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k}}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} P &= 1 + \sum_{k=2}^m k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k - \sum_{k=2}^n k r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \\ &\quad + \frac{m+1-\alpha}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} k r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right]. \end{aligned}$$

لذا

$$\omega(z) = \frac{\frac{m+1-\alpha}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} k r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right]}{Q}.$$

که

$$\begin{aligned} Q &= 2 + 2 \left(\sum_{k=2}^m k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k - \sum_{k=2}^n k r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right) \\ &\quad + \frac{m+1-\alpha}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} k r^{k-1} e^{-i(k+1)\theta} \overline{b_k} \right). \end{aligned}$$

بنابراین

$$|\omega(z)| \leq \frac{\frac{m+1-\alpha}{1-\alpha} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} k |a_k| - \sum_{k=n+1}^{\infty} k |b_k| \right]}{2 - 2 \left(\sum_{k=2}^m k |a_k| + \sum_{k=2}^n k |b_k| \right) - \frac{m+1-\alpha}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} k |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} k |b_k| \right)}.$$

سمت راست نامساوی بالا کمتر از ۱ است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=2}^m k|a_k| + \sum_{k=2}^n k|b_k| + \frac{m+1-\alpha}{1-\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} k|b_k| \right) \leq 1. \quad (24.4)$$

از طرفی سمت چپ رابطه (۲۴.۴) توسط $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} |a_k| + \frac{k(k+\alpha)}{1-\alpha} |b_k| \right)$ کران دار است.

□

قضیه ۱۶.۴. [۸۰] فرض کنید تابع $f(z)$ با بسط سری توانی (۴.۱) و $b_1 = 0$ در نامساوی (۳.۴) صدق کند. آنگاه،

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'_{m,n}(z)}{f'(z)} \right\} \geq \frac{m+1-\alpha}{m+2(1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (25.4)$$

نامساوی (۲۳.۴) برای تابع $f(z) = z + \frac{1-\alpha}{(m+1)(m+1-\alpha)} z^{m+1}$ اکید است.

□

برهان. اثبات همانند قضیه ۱۵.۴ می باشد.

۳.۴ توابع همساز محدب در جهت γ

هانگرتنر و اسچوبر [۳۵] در سال ۱۹۷۰ قضیه رشد و اغتشاش را برای تابع تحلیلی $\psi(z)$ که در شرط $\operatorname{Re}\{(1-z^2)\psi'(z)\} \geq 0$ صدق نماید، بدست آوردند. اما شرط $\operatorname{Re}\{(1-z^2)\psi'(z)\} \geq 0$ برای تابع $\psi(z)$ معادل با این بود که تابع $\psi(z)$ تك ارز، محدب در جهت محور موهومی و در نرمالیزاسیون خاصی صدق نماید. در این قسمت قصد داریم با استفاده از نتایج بدست آمده در [۳۵]، قضیه رشد و اغتشاش و کران ضرایب را برای رده خاصی از توابع همساز بررسی نماییم. در ابتدا به دو قضیه زیر اشاره خواهیم داشت:

قضیه ۱۷.۴. [۳۵] فرض کنید تابع $\psi(z)$ روی $|z| < 1$ تحلیلی و غیر ثابت باشد. آنگاه روی $|z| < 1$ ، $\operatorname{Re}\{(1-z^2)\psi'(z)\} \geq 0$ است اگر و تنها اگر

۱. $\psi(z)$ تك ارز روی $\mathbb{D}$ است.

۲. $\psi(z)$ محدب در جهت محور موهومی است.

۳. دنباله های z'_n و z''_n بترتیب همگرا به $z = 1$ و $z = -1$ موجود است که در شرایط زیر صدق می نماید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\{\psi(z'_n)\} = \sup_{|z| < 1} \operatorname{Re}\{\psi(z)\}, \quad (26.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\{\psi(z''_n)\} = \inf_{|z| < 1} \operatorname{Re}\{\psi(z)\}.$$

قضیه ۱۸.۴. [۲۵] فرض کنید تابع $\psi(z)$ روی $|z| < 1$ تحلیلی و در شرط $Re\{(1-z^2)\psi'(z)\} \geq 0$ صدق کند. آنگاه برای $1 > r \geq |z|$ داریم:

$$\frac{|\psi'(\circ)|(1-r)}{(1+r)(1+r^2)} \leq |\psi'(z)| \leq \frac{|\psi'(\circ)|}{(1-r)^2}. \quad (27.4)$$

کران بالا و پایین نامساوی فوق بترتیب برای توابع $\psi(z) = \frac{z}{1-z}$ و $\psi(z) = \frac{i}{2} \log \left[\frac{(1-iz)^2}{(1-z^2)} \right]$ اکید است.

همانطور که بیان گردید هانگرتنر و اسچوبر در قضیه ۱۸.۴ کران را برای توابعی که در شرط $Re\{(1-z^2)\psi'(z)\} \geq 0$ صدق کنند، بدست آوردند و در قضیه ما قبل آن این شرط در توابع تحلیلی معادل با تحدب تابع در جهت محور موهومی بود. در نتیجه ۳.۴ تحت قیودی این شرط را برای توابعی که در جهت دلخواه محدب می باشند تعمیم می دهیم.

نتیجه ۳.۴. فرض کنیم تابع $\varphi(z)$ تحلیلی و محدب در جهت θ ، $(0 \leq \theta < \pi)$ باشد و همچنین $\varphi(z)$ در شرایط زیر صدق نماید.

دنباله های z'_n و z''_n بترتیب همگرا به $z = 1$ و $z = -1$ موجود است که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Im\{e^{-i\theta}\varphi(z'_n)\} = \sup_{|z|<1} Im\{e^{-i\theta}\varphi(z)\}, \quad (28.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Im\{e^{-i\theta}\varphi(z''_n)\} = \inf_{|z|<1} Im\{e^{-i\theta}\varphi(z)\}.$$

اکنون تابع $\psi(z)$ را به صورت زیر معرفی نماییم:

$$\psi(z) := ie^{-i\theta}\varphi(z). \quad (29.4)$$

تابع $\psi(z)$ در شرایط (۲۶.۴) صدق می کند. همچنین با توجه با تابع $\varphi(z)$ ، تابع $\psi(z)$ تک ارز، محدب در جهت محور موهومی روی $\mathbb{D}$ می باشد. با بکاربردن قضیه ۱۷.۴ برای تابع $\psi(z)$ داریم:

$$Re\{(1-z^2)\psi'(z)\} = Re\{ie^{-i\theta}(1-z^2)\varphi'(z)\} \geq 0.$$

بنابراین می توان قضیه ۱۸.۴ را برای $ie^{-i\theta}\varphi(z)$ بکار برد و در نتیجه برای $\varphi(z)$ داریم:

$$\frac{|\varphi'(\circ)|(1-r)}{(1+r)(1+r^2)} \leq |\varphi'(z)| \leq \frac{|\varphi'(\circ)|}{(1-r)^2}. \quad (30.4)$$

لذا قادر هستیم کران بدست آمده در قضیه ۱۸.۴ را برای توابع محدب در جهت θ ، $(0 \leq \theta < \pi)$ که در نرمالیزایسون (۲۸.۴) صدق می کند بکار ببریم.

نمادگذاری ۳.۴. رده تمام توابع $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\circ}$ محدب در جهت θ ، $(0 \leq \theta < \pi)$ با $h - e^{2i\theta}g$ و $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| \leq k < 1$ که در رابطه (۲۸.۴) صدق می کند را با $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\circ}(k, \theta)$ نمایش می دهیم.

بررسی رشد و اغتشاش برای رده $S_{\mathcal{H}}^{\circ}(k, \theta)$

قضیه ۱۹.۴. [۸۷] فرض کنید $f = h + \bar{g} \in S_{\mathcal{H}}^{\circ}(k, \theta)$. آنگاه برای $|z| \leq r < 1$ داریم:

$$\frac{1-r}{(1+kr)(1+r)(1+r^2)} \leq |f_z(z)| \leq \frac{1}{(1-kr)(1-r)^2}, \quad (31.4)$$

$$\frac{|\omega(z)|(1-r)}{(1+kr)(1+r)(1+r^2)} \leq |f_{\bar{z}}(z)| \leq \frac{kr}{(1-kr)(1-r)^2}. \quad (32.4)$$

برهان. فرض کنیم $f = h + \bar{g} \in S_{\mathcal{H}}^{\circ}(k, \theta)$ باشد. با توجه به تعریف رده $S_{\mathcal{H}}^{\circ}(k, \theta)$ ، تابع $f = h + \bar{g}$ روی $\mathbb{D}$ همساز و تك ارز می باشد لذا بنابر قضیه ۲.۳ تابع $\varphi = h - e^{i\theta}g$ روی $\mathbb{D}$ تحلیلی و تك ارز و محدب در جهت θ می باشد. حال با مشتقگیری از $\varphi = h - e^{i\theta}g$ و رابطه $g' = \omega h'$ داریم:

$$f_z(z) = h'(z) = \frac{\varphi'(z)}{1 - e^{2i\theta}\omega(z)}, \quad \overline{f_{\bar{z}}(z)} = g'(z) = \frac{\omega(z)\varphi'(z)}{1 - e^{2i\theta}\omega(z)}.$$

از طرفی $\omega(z)/k$ تابع شوارتس است، لذا

$$|f_z(z)| = \left| \frac{\varphi'(z)}{1 - e^{2i\theta}\omega(z)} \right| \leq \frac{|\varphi'(z)|}{1 - |e^{2i\theta}||\omega(z)|} \leq \frac{|\varphi'(z)|}{1 - k|z|},$$

همچنین برای کران پایین $f_z(z)$ داریم:

$$|f_z(z)| \geq \frac{|\varphi'(z)|}{1 + |e^{2i\theta}||\omega(z)|} \geq \frac{|\varphi'(z)|}{1 + k|z|}.$$

اکنون با توجه به نتیجه ۳.۴ می توان قضیه ۱۸.۴ را برای تابع $\varphi(z)$ بکار برد، بنابراین

$$\frac{1-r}{(1+kr)(1+r)(1+r^2)} \leq |f_z(z)| \leq \frac{1}{(1-kr)(1-r)^2}.$$

به طور مشابه برای $f_{\bar{z}}(z)$ می نویسیم:

$$|f_{\bar{z}}(z)| = \left| \frac{\omega(z)\varphi'(z)}{1 - e^{2i\theta}\omega(z)} \right| \leq \frac{|\omega(z)||\varphi'(z)|}{1 - |e^{2i\theta}||\omega(z)|} \leq \frac{k|z|}{1 - k|z|}|\varphi'(z)|,$$

و

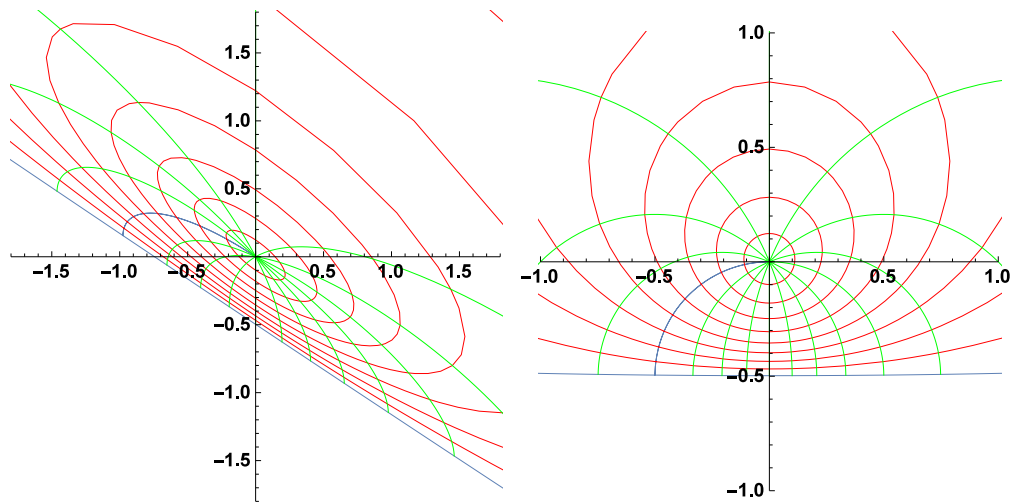
$$|f_{\bar{z}}(z)| \geq \frac{|\omega(z)||\varphi'(z)|}{1 + |e^{2i\theta}||\omega(z)|} \geq \frac{|\omega(z)||\varphi'(z)|}{1 + k|z|}.$$

حال با بکارگیری قضیه ۱۸.۴ برای تابع $\varphi(z)$ خواهیم داشت:

$$\frac{|\omega(z)|(1-r)}{(1+kr)(1+r)(1+r^2)} \leq |f_{\bar{z}}(z)| \leq \frac{kr}{(1-kr)(1-r)^2}.$$

□

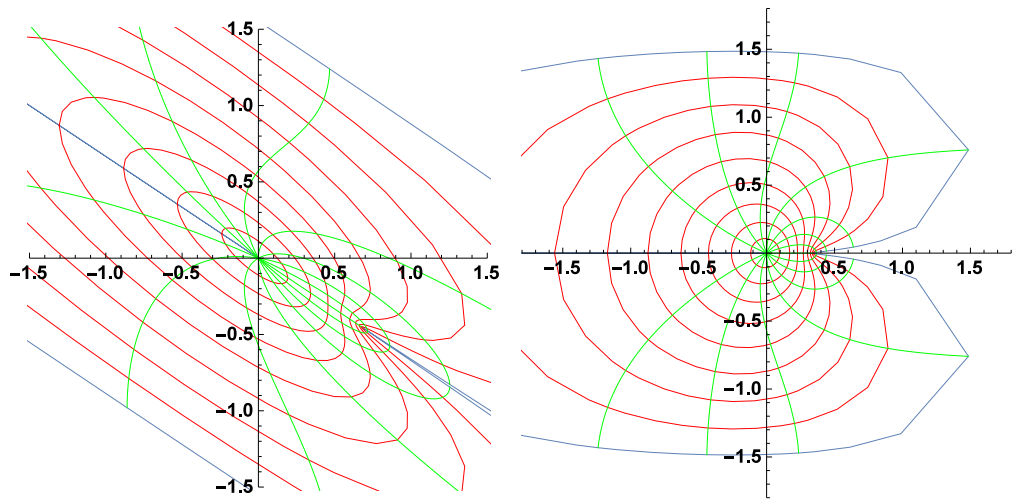
در شکل ۳.۴ و ۴.۴ تصویر $\mathbb{D}$ تحت تابع $\varphi(z)$ و تابع همساز $f(z)$ حاصل از تکنیک برش آن آورده شده است.



(ب) برشی از $\varphi(z)$

(آ) تصویر $\mathbb{D}$ تحت $\varphi(z)$

شکل ۳.۴: برش تابع $\varphi(z) = \frac{z}{1+iz}$ با $k = \frac{1}{4}, \theta = \frac{\pi}{12}$.



(ب) برشی از $\varphi(z)$

(آ) تصویر $\mathbb{D}$ تحت $\varphi(z)$

شکل ۴.۴: برش تابع $\varphi(z) = \frac{1}{4} \log\left(\frac{(1+z)^2}{1+z^2}\right)$ با $k = \frac{1}{4}, \theta = \frac{\pi}{12}$.

قضیه ۲۰.۴. [۸۷] فرض کنید $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}^{\circ}(k, \theta)$. آنگاه برای $|z| \leq r$ داریم:

$$|f(z)| \leq \frac{2k}{(1-k)^2} \ln\left(\frac{1-r}{1-kr}\right) + \frac{(1+k)r}{2(1-k)(1-r)}. \quad (33.4)$$

برهان. با توجه به نمایش $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ توابع متعلق به رده $S_{\mathcal{H}}^{\circ}(k, \theta)$ داریم:

$$\begin{aligned} f(z) &= h(z) + \overline{g(z)} \\ &= \int_0^r h'(\rho e^{i\gamma}) e^{i\gamma} d\rho + \overline{\int_0^r g'(\rho e^{i\gamma}) e^{i\gamma} d\rho} \\ &= \int_0^r h'(\rho e^{i\gamma}) e^{i\gamma} d\rho + \int_0^r \overline{g'(\rho e^{i\gamma})} e^{-i\gamma} d\rho \\ &= \int_0^r f_z(\rho e^{i\gamma}) e^{i\gamma} d\rho + \int_0^r f_{\bar{z}}(\rho e^{i\gamma}) e^{-i\gamma} d\rho, \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |h(z) + g(z)| \leq |h(z)| + |g(z)| \\ &\leq \int_0^r |f_z(\rho e^{i\gamma})| d\rho + \int_0^r |f_{\bar{z}}(\rho e^{i\gamma})| d\rho, \end{aligned}$$

حال با توجه به روابط (۳۱.۴) و (۳۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \int_0^r \frac{1}{(1-k\rho)(1-\rho)^2} d\rho + \int_0^r \frac{k\rho}{(1-k\rho)(1-\rho)^2} d\rho \\ &= \frac{2k}{(1-k)^2} \ln\left(\frac{1-r}{1-kr}\right) + \frac{(1+k)r}{2(1-k)(1-r)}. \end{aligned}$$

□

پیدا کردن کران $|a_n|$ و $|b_n|$ برای رده $S_{\mathcal{H}}^{\circ}(k, \theta)$

شیل اسمال [۶۹] در سال ۱۹۹۰ برای آن دسته از توابع $f \in S_{\mathcal{H}}^{\circ}$ که در آن $\mathbb{D}$ تحت f به دامنه محدب در يك جهت نگاشته شود، کران های زیر را اثبات کرد.

$$|a_n| \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6}, \quad |b_n| \leq \frac{(n-1)(2n-1)}{6},$$

که در آن

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k}.$$

در این بخش با استفاده از قضیه زیر که توسط هانگرتنر و اسچوبر [۲۵] ارائه گردید به بررسی کران ضرایب توابع همساز در رده $S_{\mathcal{H}}^{\circ}(k, \theta)$ خواهیم پرداخت.

قضیه ۲۱.۴. [۲۵] فرض کنید تابع $\psi(z) = a_0 + (\alpha + i\beta)z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ با $Re\{(1-z^2)\psi'(z)\} \geq 0$ روی $\mathbb{D}$ تحلیلی باشد. آنگاه،

$$|a_n| \leq \alpha, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

$$|a_n| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha + \frac{1}{n}|\alpha + i\beta|, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

در نتیجه

$$|a_n| \leq |\psi'(\circ)|, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

در هر سه نامساوی بالا، برای تابع $\psi(z) = 1/(1-z)$ مساوی برقرار است.

قضیه ۲۲.۴. [۸۷] فرض کنید $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}(k, \theta)$. آنگاه برای $|z| \leq r$ داریم:

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{r}, \quad |b_n| \leq \frac{n-1}{r} \quad n \geq 2.$$

برهان. برای توابع $h(z)$ و $g(z)$ نمایش انتگرالی زیر را داریم:

$$h(z) = \int_{\circ}^z \frac{\varphi'(\zeta)}{1 - e^{i\theta}\omega(\zeta)} d\zeta, \quad g(z) = \int_{\circ}^z \frac{\omega(\zeta)\varphi'(\zeta)}{1 - e^{i\theta}\omega(\zeta)} d\zeta,$$

که در آن $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ می باشد، حال فرض کنیم

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n z^n,$$

و

$$\frac{\omega(z)}{1 - e^{i\theta}\omega(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n z^n,$$

بنابراین

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_{\circ}^z [\phi_1 + 2\phi_2\zeta + 3\phi_3\zeta^2 + \dots][w_1\zeta + w_2\zeta^2 + w_3\zeta^3 + \dots] d\zeta \\ &= \int_{\circ}^z [\phi_1 w_1 \zeta + (\phi_1 w_2 + 2\phi_2 w_1)\zeta^2 + (\phi_1 w_3 + 2\phi_2 w_2 + 3\phi_3 w_1)\zeta^3 + \dots] d\zeta \\ &= \frac{1}{2}(\phi_1 w_1)z^2 + \frac{1}{3}(\phi_1 w_2 + 2\phi_2 w_1)z^3 + \frac{1}{4}(\phi_1 w_3 + \phi_2 w_2 + 3\phi_3 w_1)z^4 + \dots \end{aligned}$$

در نتیجه

$$b_1 = \circ,$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\phi_1 w_1,$$

$$b_3 = \frac{1}{3}(\phi_1 w_2 + 2\phi_2 w_1),$$

$\vdots$

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \phi_k w_{n-k}, \quad n \geq 2.$$

همچنین برای $h(z)$ داریم:

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^z \varphi'(\zeta) \frac{1}{1 - e^{i\theta} \omega(\zeta)} d\zeta = \int_0^z \varphi'(\zeta) e^{i\theta} \left(\frac{\omega(\zeta)}{1 - e^{i\theta} \omega(\zeta)} + \frac{1}{e^{i\theta}} \right) d\zeta \\ &= e^{i\theta} \left(\int_0^z \varphi'(\zeta) \frac{\omega(\zeta)}{1 - e^{i\theta} \omega(\zeta)} d\zeta \right) + \int_0^z \varphi'(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

لذا

$$a_n = e^{i\theta} b_n + \phi_n = \phi_n + e^{i\theta} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \phi_k w_{n-k} \right).$$

از طرفی $\omega(z)/(1 - e^{i\theta} \omega(z))$ زیر ترتیبی از $z/(1 - e^{i\theta} z)$ است، لذا برای تمام n ، $|w_n| \leq 1$.
حال با توجه به نتیجه ۳.۴ و قضیه ۲۱.۴ داریم:

$$|\phi_k| \leq |\phi'(\circ)| = 1$$

در نتیجه برای $|b_n|$ خواهیم داشت:

$$|b_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \phi_k w_{n-k} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k |\phi_k| |w_{n-k}| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n-1}{2}.$$

و به طور مشابه برای $|a_n|$ داریم:

$$|a_n| \leq |\phi_n| + |e^{i\theta}| \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \phi_k w_{n-k} \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2}.$$

□

مراجع

- [1] Afaf, A. Ali Abubaker and M. Darus, *Partial sums of analytic functions involving generalized Cho-Kwon-Srivastava operator*, Int. J. Open Prob. Compl. Anal., **2(3)**, 181-188, (2010).
- [2] O. P. Ahuja, *Families of analytic functions related to Ruscheweyh derivatives and subordinate to convex functions*, Yokohama Math. J. **41**, 39-50, (1993).
- [3] S. Altinkaya and S. Yalcin, *Coefficient estimates for two new subclasses of biunivalent functions with respect to symmetric points*, Journal of Function Spaces Volume, Article ID 145242, 5 pages, (2015).
- [4] M. K. Aouf, R. M. El-Ashwah and A. Abd-Eltawab, *New Subclasses of Biunivalent Functions Involving Dziok-Srivastava Operator*, ISRN Mathematical Analysis, Article ID 387178, 5 pages, (2013).
- [5] R. M. El-Ashwah, *Subclass of univalent harmonic functions defined by dual convolution*, Journal of Inequalities and Applications, **537**, (2013).
- [6] Y. Avci and E. Zlotkiewicz, *On Harmonic Univalent Mappings*, Anna Mariae Curie University, Sklodowska, pp. 1-7, (1990).
- [7] R.W. Barnard, and C. Kellogg, *Applications of convolution operators to problems in univalent function theory*, Michigan Math. J. **27**, pp. 81-94, (1980).
- [8] S. S. Bhoosnurmath and M.V. Devadas, *Subclasses of spirallike functions defined by subordination*, J. of Analysis Madras **4**, pp. 173-183, (1996).
- [9] S. S. Bhoosnurmath and M.V. Devadas, *Subclasses of spirallike functions defined by Ruschweyh derivatives*, Tamkang J. Math. **28**, pp. 59-65, (1997).
- [10] L. Bieberbach, *Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung*. Math. Ann., **77**, pp. 153-172, (1915-1916).

- [11] D. A. Brannan and J. G. Clunie (Eds.), *Aspects of Contemporary Complex Analysis* Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1-20, 1979, Academic Press, New York and London, (1980).
- [12] D. A. Brannan and T. S. Taha, *On some classes of bi-univalent functions*, Kuwait; February 18–21, (1985), KFAS Proceedings Series, Vol. 3 (Elsevier Science Limited), Oxford, 1988, pp. 53–60; see also Studia Univ. Babes, -Bolyai Math. 31 (2), pp. 70-77, (1986).
- [13] L. Brange, *A proof of the bieberbach conjecture*, ACTA. MATH.154, pp. 137-152, (1985).
- [14] D. M. Campbell, *A survey of properties of the convex combination of univalent functions*, Rocky Mountain J. Math. 5, pp. 475-492, (1975).
- [15] J. Clunie, T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 9, pp. 3-25, (1984).
- [16] F. R. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer, (2001).
- [17] K. K. Dixit, S. Porwal, *A convolution approach on partial sums of certain analytic and univalent functions*, J. Inequal. Pure Appl. Math., 10(4), Art. 101, pp. 1-17, (2009).
- [18] K.K. Dixit and S. Porwal, *On a subclass of harmonic univalent functions*, Journal of inequalities in pure and applied mathematics, Volume 10(27), 9pp, (2009).
- [19] M. Dorff and J. Rolf, *Anamorphosis, mapping problems, and harmonic univalent functions, explorations in complex analysis*, Math. Assoc. of America, Inc, Washington, D.C., pp. 197-269, (2012).
- [20] J. Dziok, *Classes of harmonic functions defined by subordination*. Abstr. Appl. Anal., Art. ID 756928, 9 pp, (2015).
- [21] J. Dziok, M. Darus, J. Sokół and T. Bulboacă, *Generalizations of starlike harmonic functions*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 354, no. 1, pp. 13-18, (2016).
- [22] J. Dziok, J. Jahangiri and H. Silverman, *Harmonic functions with varying coefficients*, J. Inequal. Appl., 139, 12 pp, (2016).
- [23] J. Dziok and H. M. Srivastava, *Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function*, Integral Transforms and Special Functions, 14, pp. 7-18, (2003).

- [24] J. Dziok and H. M. Srivastava, *Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function*, Appl. Math. Comput. **103**, pp. 1-13, (1999).
- [25] P. Duren, *Harmonic mappings in the plane*. Cambridge Tracts in Mathematics, 156. Cambridge University Press, Cambridge, (2004).
- [26] P. Duren, *Univalent functions*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 259. Springer-Verlag, New York, (1983).
- [27] B. A. Frasin, *Partial sums of certain analytic and univalent functions*, Acta Math. Acad. Paed. Nyir., **21**, pp. 135-145, (2005).
- [28] B.A. Frasin, *Comprehensive family of harmonic univalent functions*, SUT J. Math, **42**, pp. 145-155, (2006).
- [29] B. A. Frasin, *Generalization of partial sums of certain analytic and univalent functions*, Applied Mathematics Letters, **21**, no. 7, pp. 735-741, (2008).
- [30] B. A. Frasin and G. Murugusundaramoorthy, *Comprehensive family of k -uniformly harmonic starlike functions*, Matematik Vesnik **63**, pp. 171-180, (2011).
- [31] P. R. Garabedian, M. Schiffer, *A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient*. J. Rational Mech. Anal., 4, pp. 427-465, (1955).
- [32] R. M. Goel and B. S. Mehrotra, *On the coefficients of a subclass of starlike functions*, Indian J. Pure Appl. Math. **12**, pp. 634-647, (1981).
- [33] A. W. Goodman, *Univalent functions* Vol. I Vol. II Polygonal Publishing House, Washington, FI, (1983).
- [34] T. H. Gronwall, *Some remarks on conformal representation*. Ann. of Math.. 16, pp. 72-76, (1914-1915).
- [35] W. Hengartner and G. Schober, *On schlicht mappings to domains convex in one direction*, Comment. Math. Helv. **45**, pp. 303-314, (1970).
- [36] W. Hengartner and G. Schober, *Curvature estimates for some minimal surfaces*. Complex analysis, Birkhauser, Basel, pp. 87-100, (1988).
- [37] J. M. Jahangiri, *Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients*, Ann. Univ. Mariae Cruie-Sklodowska Sect. A **52**, no. 2, pp. 57-66, (1998).

-
- [38] J. M. Jahangiri, *Harmonic functions starlike in the unit disk*, J. Math. Anal. Appl. **235**, pp. 470-477, (1999).
- [39] J.M. Jahangiri, G. Murugusundaramoorthy And K. Vijaya, *Salagean-type harmonic univalent functions*, South. J. Pure and Appl. Math., Issue 2, pp. 77-82, (2002).
- [40] J. Jahangiri, H. Silverman and E.M. Silvia, *Construction of planar harmonic functions*, Int. J. Math. Math. Sci. Art. ID 70192, 11 pp, (2007).
- [41] W. Janowski, *Some extremal problems for certain families of analytic functions*, Bull. Polish Acad. Sci. **21**, pp. 17-25, (1973).
- [42] W. Janowski, *Some extremal problems for certain families of analytic functions*, Annl. Polon. Math. **28**, 297–326, (1973).
- [43] Z. J. Jakubowski, W. Majchrzak and K. Skalska, *Harmonic mappings with a positive real part*, Materialy Konferencji z Teorii Zagadnien Ekstremalnych Lodz **14**, pp. 17-24, (1993)
- [44] J. Jothibas, *Certain subclasses of bi-univalent functions defined by salagean operator*, EJMAA, Vol. **3(1)** Jan., pp. 150-157, (2015).
- [45] A. W. Kedzierawski, *Some remarks on bi-univalent functions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A. **39**, pp. 77-81, (1985).
- [46] P. Koebe, *Tiber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*. Nachr. Akad. Wiss. Gottingeru Math.-Phys. KL, pp. 191-210, (1907).
- [47] M. Krein, D. Milman, *On extreme points of regular convex sets*. Studia Math. **9**, pp. 133-138, (1940).
- [48] A. Y. Lashin, *On certain subclasses of analytic and bi-univalent functions*, Journal of the Egyptian Mathematical Society, pp. 1-6, (2015).
- [49] M. Lewin, *On a coefficient problem for bi-univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **18**, pp. 63-68, (1967).
- [50] C. Loewner, *Uniersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, I, Math, Ann., **89**, pp. 103-121, (1923).
- [51] P. Montel, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine*. (French) Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **29**, pp. 487-535, (1912).

- [52] G. Murugusundaramoorthy, T. Janani and M. Darus, *Coefficient estimate of bi-univalent functions based on q -hypergeometric functions*, Applied Sciences, Vol.17, pp. 75-85, (2015).
- [53] A. Murat, H. Orhana and N. Yagmurb, *Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions*, Published by Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia 7, pp. 1165-1171, (2013).
- [54] Z. Nehari, *Conformal mappings*, McGraw Hill, New York, 1952, Dover reprint, New York, (1975).
- [55] S.V. Nikitin, *A class of regular functions*, current problems in function theory (Russian) **188**, Rostov-Gos. Univ. Rostov-on-Don, pp. 143-147, (1987).
- [56] M. Ozturk and S. Yalcin, *On univalent harmonic functions*, J. Inequal. Pure Appl. Math. **3(4)**, pp. 1-8, (2002).
- [57] R. Pederson, M. Schiffer, *A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient*. Arch. Rational Mech. Anal.. 45, pp. 161-193, (1972).
- [58] C. Pommerenke, *On starlike and close-to-convex functions*, Proc. London Math. Soc. **13(3)**, pp. 290-304, (1963).
- [59] S. Ponnusamy, H. Silverman, *Complex variables with applications*, (Birkhauser, 2006)(520s) ISBN-13: 978-0-8176-4457-4
- [60] S. Porwal, K. K. Dixit, *Partial sums of starlike harmonic univalent functions*, Kyungpook Mathematical Journal, **50**, no. 3, pp. 433-445, (2010).
- [61] R. K. Raina, D. Bansal, *Some properties of a new class of analytic functions defined in terms of a Hadamard product*, J. Inequal. Pure. Appl. Math. **9**, No. 1, Art 22, pp. 1-9, (2008).
- [62] T. Rosy, K. G. Subramanian and G. Murugusundaramoorthy, *Neighbourhoods and partial sums of starlike functions based on Ruscheweyh derivatives*, J. Ineq. Pure and Appl. Math., **4(64)**, (2003).
- [63] G. S. Salagean, *Subclasses of univalent functions*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1013, pp. 362-372, (1983).
- [64] C. Selvaraj, O.S. Babu and G. Murugusundaramoorthy, *Coefficient estimate of ma-minda type bi-bazilevic functions of complex order involving generalized operator* International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 101 No. 5, pp. 615-624, (2015).

-
- [65] T.M. Seoudy, *Some properties of certain classes of harmonic univalent functions*, AL.I. CUZA, pp. 1-10, (2013).
- [66] T. M. Seoudy and M. K. Aouf, *Several properties of certain classes of univalent harmonic functions*, Afr. Mat, pp. 1-10, (2014).
- [67] M. M. Shabani, A. Zireh, *On the linear combinations of slanted half-plane harmonic mappings*, Doi:10.22130/scma.2018.72574.293, Sahand Communications in Mathematical Analysis (SCMA), accepted.
- [68] P. Sharma, S. Porwal and A. Kanaujia, *A generalized class of harmonic univalent functions associated with Salagean operators involving convolutions*, Acta Universitatis Apulensis **39**, pp. 99-110, (2014).
- [69] T. Sheil-small, *Constants for planar harmonic mappings*, J. London Math. Soc. (2) **42**, pp. 237-248, (1990).
- [70] H. Silverman, *Harmonic univalent functions with negative coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **220**, pp. 283-289, (1998).
- [71] H. Silverman and E. M. Silvia, *Subclasses of starlike functions subordinate to convex functions*, Canad. J. Math. **1**, pp. 48-61, (1985).
- [72] H. Silverman, *Subclasses of starlike functions*, Rev. Roumaine. Math. Pures Appl, **231**, pp. 1093-1099, (1978).
- [73] E.M. Silvia, *Partial sums of convex functions of order α* , Houston.J.Math., Math.Soc., **11(3)**, pp. 397-404, (1985).
- [74] H. Silverman, *Partial sums of starlike and convex functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **209**, no. 1, pp. 221-227, (1997).
- [75] H. M. Srivastava, A. K. Mishra and P. Gochhayat, *Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions*, Appl. Math. Lett. **23**, pp. 1188-1192, (2010).
- [76] H. M. Srivastava, S. Gaboury and F. Ghanim, *Coefficient estimates for some subclass of m -fold symmetric bi-univalent functions*, Acta Universitatis Apulensis, pp. 153-164, (2015).
- [77] D. L. Tan, *Coefficient estimates for bi-univalent functions*, Chinese Ann. Math. Ser. A. **5**, pp. 559-568, (1984).

- [78] Z.G. Wang, Z.H. Liu and Y.C. Li, *On the linear combinations of harmonic univalent mappings*, J. Math. Anal. Appl. Vol. **400** (2), pp. 452-459, (2013).
- [79] S. Yalcin, *A new class of Salagean-type harmonic univalent functions*, Applied Mathematics Letters **18**, pp. 191-198, (2005).
- [80] A. Zireh, M. M. Shabani, *On the partial sums of convex harmonic univalent functions* , TWMS J. of Apl. Eng. Math. , accepted.
- [81] A. Zireh, M. M. Shabani, *Class of harmonic functions defined by differential operator*, The 47th Annual Iranian Mathematics Conference, Karaj, Iran (2016).
- [82] A. Zireh, M. M. Shabani, *Generalizations of harmonic functions defined by salagean differential operator*, submitted.
- [83] A. Zireh, M. M. Shabani, *Coefficient estimates for a new subclass of bi-univalent functions by Dziok-Srivastava operator*, The 4th Seminar on Functional Analysis and its Applications, Ferdowsi University of Mashhad, Iran, (2016).
- [84] A. Zireh, M. M. Shabani, *Coefficient estimates for a subclass of bi-univalent functions associated with Salagean differential operator*, The 2th National Conference of Mathematics, Urmia, Iran (2017).
- [85] A. Zireh, M. M. Shabani, *Linear Combinations Of Slanted Half-plane Mappings*, The 2th National Conference of Mathematics, Urmia, Iran (2017).
- [86] A. Zireh, M. M. Shabani, *Several properties of certain class of univalent harmonic functions*, the 22th Seminar on Mathematical Analysis and its Applications, Bonab, Iran, (2017).
- [87] A. Zireh, M. M. Shabani, *Coefficient bounds for certain subclass of harmonic mappings convex in one direction*, the 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Hamadan, Iran, (2017).
- [88] A. Zireh, M. M. Shabani, *Subclass of harmonic univalent functions defined by salagean differential operator*, the 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Hamadan, Iran, (2017).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اکید	sharp
بخش هم تحلیلی	co-analytic part
بسط سری تیلور-مکلورن	Taylor-Maclaurin series expansion
تابعك	functional
تابع تحلیلی	analytic function
تابع دو-محدب	bi-convex function
تابع دو-ستارگون	bi-starlike function
تابع دو-تك ارز	bi-univalent function
تابع کراندار	bounded function
تابع تقریبا محدب	close-to-convex function
تابع فوق هندسی	hypergeometric function
تابع چند مقدار	multiple-values function
تابع ستارهگون	starlike function
تابع تك ارز	univalent function
تخمین ضرایب	coefficient estimate
ترکیب	composition
جهت نگهدار	sense-preserving
حدس بایبرباخ	bieberbach conjecture
دامنه همبند ساده	simply connected domain
دایلتیشن	dilatation
دیسك واحد	unit disk
زیر ترتیب	subordination
زیر رده	subclass
ژاکوبین	jacobian
ساختار برش	shear construction
سطح مینیمال	minimal surface

complex numbers	عدد مختلط
differential operator	عملگر مشتق
distortion theorem	قضیه اغتشاش
growth theorem	قضیه رشد
Montel's theorem	قضیه منتل
coefficient bound	کران ضرایب
Schwarz lemma	لم شوارتس
convex in horizontal direction (CHD)	محدب در جهت محور افقی
differentiable	مشتق پذیر
locally univalent	موضعا تک ارز
affine mapping	نگاشت آفین
conformal mapping	نگاشت همدیس
harmonic mapping	نگاشت همساز
identity mapping	نگاشت همانی
linear mapping	نگاشت خطی
quasiconformal mapping	نگاشت شبه همدیس
canonical representation	نمایش استاندارد
locally uniform convergence	همگرای یکنواخت موضعی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

affine mapping	نگاشت آفین
analytic function	تابع تحلیلی
bieberbach conjecture	حدس بایبرباخ
bi-convex function	تابع دو-محدب
bi-starlike function	تابع دو-ستارگون
bi-univalent function	تابع دو-تک‌ارز
bounded function	تابع کراندار
canonical representation	نمایش استاندارد
close-to-convex function	تابع تقریباً محدب
co-analytic part	بخش هم تحلیلی
coefficient estimate	تخمین ضرایب
coefficient bound	کران ضرایب
complex numbers	عدد مختلط
composition	ترکیب
conformal mapping	نگاشت هم‌دیس
convex in horizontal direction (CHD)	محدب در جهت محور افقی
differential operator	عملگر مشتق
differentiable	مشتق پذیر
dilatation	دایلتیشن
distortion theorem	قضیه اغتشاش
functional	تابعک
growth theorem	قضیه رشد
harmonic mapping	نگاشت همساز
hypergeometric function	تابع فوق هندسی
identity mapping	نگاشت همانی
jacobian	ژاکوبین

linear mapping	نگاشت خطی
locally uniform convergence	همگرای یکنواخت موضعی
locally univalent	موضعا تک ارز
minimal surface	سطح مینیمال
Montel's theorem	قضیه منتل
multiple-values function	تابع چند مقدار
quasiconformal mapping	نگاشت شبه همدیس
Schwarz lemma	لم شوارتس
sense-preserving	جهت نگهدار
shear construction	ساختار برش
subclass	زیر رده
subordination	زیر ترتیب
sharp	اکید
simply connected domain	دامنه همبند ساده
starlike function	تابع ستارهگون
Taylor-Maclaurin series expansion	بسط سری تیلور-مکلورن
univalent function	تابع تک ارز
unit disk	دیسک واحد

Aabstract

Let $\mathcal{A}$ be a class of functions of the form $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ which are analytic in the open unit disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Also, we let $\mathcal{S}$ to denote the class of functions $f \in \mathcal{A}$ which are univalent in $\mathbb{D}$. A function $f \in \mathcal{A}$ is said to be bi-univalent in $\mathbb{D}$ if both f and f^{-1} are univalent in $\mathbb{D}$. Let Σ denote the class of bi-univalent functions in $\mathbb{D}$. We introduce and investigate a new subclass of analytic and bi-univalent functions defined in the open unit disk $\mathbb{D}$. In other section of my thesis associated with harmonic mapping. A continuous function $f = u + iv$ is a complex valued harmonic function in a complex domain $D \subset \mathbb{C}$ if both u and v are real harmonic in D . A harmonic, complex-valued, orientation preserving, univalent mapping f defined on $\mathbb{D}$ can be written as, $f = h + \bar{g}$. We call h the analytic part and g the co-analytic part of f . A necessary and sufficient condition for f to be locally univalent and sense-preserving in D is that $|h'(z)| > |g'(z)|$ in D . We introduce and study new classes of harmonic univalent functions on unit disc $\mathbb{D}$. Also obtain coefficient conditions, extreme points, linear combinations, partial sums, convolution condition for the above class of harmonic univalent functions.

Keywords. Analytic functions, Bi-univalent functions, Harmonic mappings, Coefficient estimates, Linear combination, Convolution.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Complex Analysis

**BOUND ESTIMATES FOR COEFFICIENT
OF BI-UNIVALENT FUNCTIONS AND
HARMONIC FUNCTIONS**

By: Mohammad Mehdi Shabani

Supervisor

Dr. Ahmad Motamednezhad

October 2018