

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار، گرایش آمار ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

آزمون فرضیه‌ها در محیط فازی رویکرد p-مقدار

نگارنده: محبوبه سادات مدنی

استادان راهنما

دکتر محمدرضا ربیعی
دکتر عباس پرچمی

شهریور ۱۳۹۷

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم محبوبه سادات مدنی با شماره دانشجویی ۹۴۳۹۰۱۴ رشته آمار گرایش آمار ریاضی تحت عنوان آزمون فرضیه در محیط فازی رویکرد p-مقدار که در تاریخ ۱۳۹۷/۰۶/۱۲ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: خیلی.....) مردود

نوع تحقیق: نظری عملی

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استادیار	دکتر محمدرضا ربیعی	۱- استاد راهنمای اول
	استادیار	دکتر عباس پرچی	۲- استاد راهنمای دوم
			۳- استاد مشاور
	استادیار	دکتر نگار آقبال	۴- نماینده تحصیلات تکمیلی
	دانشیار	دکتر محمد آرشی	۵- استاد ممتحن اول
	استادیار	دکتر حسین باغیشنی	۶- استاد ممتحن دوم



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تصوه: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع

مجدد نباید رودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به او که آموخت مرا تا بیا موزم،
خدایی که آفرید جهان را، انسان را، عقل و معرفت را،
تقدیم به مهربان فرشتگانی که سخات ناب و تمام تجربه‌های زیبای زندگی‌م، مدیون حضور سبز
آنهاست...

تقدیم بابوسه بردستان پدرم،
تقدیم به مادر عزیزتر از جانم،
تقدیم به برادر مهربانم،
و تقدیم به اساتید بزرگوارم.

سپاس گزارمی ...

سپاس پروردگار یکتا را که، هستی مان بخشید
به طریق علم و دانش، رهنمونمان شد

و به، همشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود
و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.
با سپاس از خانواده عزیزم و اساتید ارجمندم.

پروردگار احسن عاقبت، سلامت و سعادت را بر آمان مقدر نما.
خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراهی و همبوعلم و دانش و پژوهش جهت رشد و
سکون فانی عنایت بفرما.

محبوبه سادات مدنی

شهریور ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **محبوبه سادات مدنی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آمار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **آزمون فرضیه‌ها در محیط فازی رویکرد p-مقدار**، تحت راهنمایی **محمد رضا ربیعی** و **عباس پرچمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهند رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده‌اند.

محبوبه سادات مدنی

شهریور ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

آزمون فرضیه‌های آماری یکی از پرکاربردترین مباحث آماری در تصمیم‌گیری است. در روش‌های معمول آزمون فرضیه‌های آماری، داده‌ها، فرضیه‌ها، پارامترها و سایر عناصر مساله دقیق هستند. اما در علوم کاربردی مانند اقتصاد، کشاورزی و علوم اجتماعی ممکن است با تعاریف مبهم و مفاهیم فازی مواجه شویم. در چنین شرایطی روش‌های کلاسیک نیاز به تعمیم در محیط‌های فازی دارند. ورود ابهام در مساله‌ی آزمون فرضیه‌ها می‌تواند از طریق داده‌ها یا فرضیه‌ها صورت گیرد. بنابراین سه مساله‌ی عمده‌ی زیر را می‌توان در نظر گرفت

۱. آزمون فرضیه‌های دقیق با داده‌های نادقیق (فازی)،

۲. آزمون فرضیه‌های نادقیق با داده‌های دقیق،

۳. آزمون فرضیه‌های نادقیق با داده‌های نادقیق.

یکی از معمول‌ترین روش‌ها در مواجهه با سه حالت بالا، رویکرد p -مقدار است. در این پایان‌نامه آزمون فرضیه در محیط‌های فازی بیان شده، مبتنی بر p -مقدار را بررسی می‌کنیم و نحوه محاسبه p -مقدار در نرم‌افزار R را با دو بسته کاربردی Fuzzy.p.value و FPV تشریح می‌کنیم. علاوه بر این، تصمیم‌گیری متعادل آزمون فرضیه بر مبنای مقایسه p -مقدار فازی آزمون فرضیه H_0 در مقابل H_1 و p -مقدار فازی آزمون فرضیه H_1 در مقابل H_0 را در محیط فازی انجام می‌دهیم. همچنین به عنوان کاربردی از مطالب بیان شده، رویکردی از کنترل کیفیت را با در نظر گرفتن فرضیه‌های فازی بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: آزمون فرضیه آماری، اصل گسترش، p -مقدار فازی، سطح معنی‌داری فازی، تصمیم‌گیری متعادل.

فهرست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مدنی، محبوبه‌سادات، ربیعی، محمدرضا. آزمون فرضیه‌های دقیق براساس داده‌های فازی نرمال با رویکرد p -مقدار. هفتمین سمینار آمار و احتمال فازی، دانشگاه بیرجند، ۱۳۹۵، ۱۹۱-۱۸۵.
۲. مدنی، محبوبه‌سادات، پرچمی، عباس و ربیعی، محمدرضا. p -مقدار فازی در نرم‌افزار R . ششمین کنگره مشترک سیستم‌های فازی و هوشمند ایران، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۴۰۶-۴۱۳، ۱۳۹۶.
۳. مدنی، محبوبه‌سادات، ربیعی، محمدرضا و پرچمی، عباس. تصمیم‌گیری متعادل آزمون فرضیه در محیط فازی. هشتمین سمینار آمار و احتمال فازی، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۱۲-۱۱۶، ۱۳۹۷.

فهرست مطالب

ق	فهرست تصاویر
ث	فهرست جداول
۱	۱ مروری بر آمار فازی و آزمون فرضیه
۲	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ مروری بر مجموعه‌های فازی و حساب اعداد فازی
۳	۱.۲.۱ مجموعه فازی
۵	۲.۲.۱ α -برش‌ها
۸	۳.۲.۱ حساب اعداد فازی
۹	۴.۲.۱ اصل توسیع (گسترش)
۱۲	۵.۲.۱ اعداد فازی
۱۴	۶.۲.۱ اعداد فازی LR
۱۶	۷.۲.۱ حساب اعداد فازی و عملگرهای دو بعدی
۱۹	۸.۲.۱ رتبه‌بندی اعداد فازی
۲۰	۳.۱ مروری بر مفاهیم اولیه آزمون فرضیه
۲۲	۱.۳.۱ p -مقدار
۲۴	۲.۳.۱ p -مقدار به عنوان معیار پشتیبانی داده‌ها از فرضیه صفر
۲۵	۳.۳.۱ تعریف p -مقدار
۲۶	۴.۳.۱ طریقه محاسبه p -مقدار
۲۷	۵.۳.۱ ملاک‌های تصمیم p -مقدار
۲۹	۶.۳.۱ مزایای p -مقدار
۲۹	۷.۳.۱ معایب p -مقدار
۳۰	۸.۳.۱ اشتباهات متداول درباره p -مقدار

۳۳	۲	آزمون فرضیه در محیط فازی بر پایه p - مقدار
۳۳	۱.۲	آزمون فرضیه‌های دقیق با داده‌های نادقیق
۳۴	۱.۱.۲	آزمون فرضیه‌های دقیق با داده‌های نادقیق مثلثی
۳۹	۲.۱.۲	آزمون فرضیه‌های دقیق با داده‌های نادقیق نرمال
۴۰	۲.۲	آزمون فرضیه‌های نادقیق با داده‌های دقیق
۴۱	۱.۲.۲	فرضیه فازی
۴۲	۲.۲.۲	فرضیه‌های یک‌طرفه و دوطرفه فازی
۴۴	۳.۲.۲	مرز فرضیه فازی
۴۷	۴.۲.۲	p - مقدار فازی
۵۲	۳.۲	آزمون فرضیه‌های نادقیق با داده‌های نادقیق
۵۷	۳	p - مقدار فازی در نرم‌افزار R
۵۷	۱.۳	مقدمه
۵۸	۱.۱.۳	مساله اصلی
۵۸	۲.۳	بسته نرم‌افزاری Fuzzy.p.value
۵۸	۱.۲.۳	چند مجموعه (عدد) فازی در بسته نرم‌افزاری Fuzzy.p.value
۵۹	۲.۲.۳	محاسبه p - مقدار فازی
۵۹	۳.۲.۳	مثال‌ها
۶۳	۳.۳	بسته نرم‌افزاری FPV
۶۳	۱.۳.۳	معرفی مجموعه فازی
۶۴	۲.۳.۳	محاسبه p - مقدار فازی
۶۴	۳.۳.۳	مثال‌ها
۶۹	۴.۳	مقایسه دو بسته Fuzzy.p.value و FPV
۷۱	۵.۳	نتیجه
۷۳	۴	تصمیم‌گیری متعادل آزمون فرضیه در محیط فازی
۷۳	۱.۴	مقدمه
۷۴	۱.۱.۴	قاعده تصمیم‌گیری متعادل
۷۴	۲.۴	آزمون متعادل فرضیه‌های فازی با داده‌های دقیق بر اساس p - مقدار فازی
۷۴	۱.۲.۴	انگیزه و تعریف فرضیه‌های فازی
۷۶	۲.۲.۴	p - مقدار فازی آزمون متعادل
۷۷	۳.۴	آزمون متعادل فرضیه‌های دقیق با داده‌های فازی بر اساس p - مقدار فازی
۷۸	۱.۳.۴	p - مقدار فازی آزمون متعادل
۷۹	۴.۴	آزمون متعادل فرضیه‌های فازی با داده‌های فازی بر اساس p - مقدار فازی

۷۹	۱.۴.۴	p - مقدار فازی آزمون متعادل
۸۳		۵	رویکرد مبتنی بر p - مقدار برای آزمون کیفیت با فرضیه‌های فازی
۸۳	۱.۵	مقدمه
۸۵	۲.۵	ایده مبتنی بر p - مقدار جدید در آزمون فرضیه
۸۶	۱.۲.۵	قاعده تصمیم
۸۶	۳.۵	انگیزه آزمون فرضیه فازی در کنترل کیفیت
۸۸	۴.۵	آزمون کیفیت مبتنی بر شاخص C_p
۹۰	۱.۴.۵	قاعده تصمیم‌گیری در آزمون کیفیت بر اساس C_p
۹۳	۵.۵	آزمون کیفیت بر اساس شاخص C_{pm}
۹۵	۱.۵.۵	قاعده تصمیم‌گیری در آزمون کیفیت بر اساس C_{pm}
۹۷	۶.۵	نتیجه‌گیری
۹۹			مراجع
۱۰۳			آ برنامه های R استفاده شده در پایان نامه
۱۰۳	۱.آ	بسته نرم‌افزاری Fuzzy Numbers
۱۰۳	۱.۱.آ	معرفی عدد فازی
۱۰۸	۲.۱.آ	محاسبه هسته، دامنه و برش‌های عدد فازی
۱۰۹	۲.آ	برخی مثال‌های انجام شده با برنامه‌نویسی در نرم‌افزار R

فهرست تصاویر

۲	۱.۱	پرفسور لطفعلی عسگرزاده
۴	۲.۱	نمودار توابع عضویت مثلثی، دوزنقه‌ای، گوسی و زنگوله‌ای تعمیم‌یافته
۵	۳.۱	نمودار تابع عضویت طول عمر حدوداً ۱۰۰۰ در مثال ۱.۱
۶	۴.۱	α -برش برای بیان تعریف ۳.۱
۶	۵.۱	α -برش مجموعه فازی A در مثال ۲.۱
۱۰	۶.۱	نحوه عملکرد اصل توسیع
۱۱	۷.۱	روش عمل اصل توسیع در مثال ۸.۱
۱۴	۸.۱	توابع \bar{S} ، \bar{B} و \bar{T} برای نمایش برخی مفاهیم فازی
۱۴	۹.۱	نمودار توابع عضویت عدد فازی تقریباً صفر در مثال ۱۰.۱
۱۵	۱۰.۱	نمودار عدد فازی LR تقریباً ۵ در مثال ۱۱.۱
۱۶	۱۱.۱	نمودار تابع عضویت عدد فازی سهموی
۱۷	۱۲.۱	نمودار توابع عضویت اعداد فازی M و N و جمع و تفاضل آن‌ها در مثال ۱۲.۱
	۱۳.۱	نمودار توابع عضویت اعداد فازی M (خط مشکی) و N (خط قرمز) و جمع (خط بریده آبی) و تفاضل (خط آبی) آن‌ها در مثال ۱۳.۱
۱۸	۱۴.۱	تابع محدب فازی
۱۹	۱۵.۱	نمایشی برای تعریف ۱۲.۱
۲۰	۱۶.۱	ناحیه بحرانی با $\alpha = ۰/۰۵$ و $\alpha = ۰/۰۱$
۲۵	۱۷.۱	نمایش p -مقدار
۲۷	۱۸.۱	نمایش H_0 رد نمی‌شود
۲۷	۱۹.۱	نمایش H_0 رد می‌شود
۳۷	۱.۲	تابع عضویت و سطح معنی‌داری p -مقدار فازی در مثال ۱.۲
۳۸	۲.۲	تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی تقریباً ۰.۱۵ در مثال ۲.۲
۳۹	۳.۲	تابع \tilde{N} برای نمایش عدد فازی نرمال
۴۰	۴.۲	تابع عضویت p -مقدار فازی برای داده‌های نرمال در مثال ۳.۲
۴۱	۵.۲	نمودار تابع عضویت فرضیه فازی در مثال ۴.۲

۴۲	تابع عضویت فرضیه فازی یک‌طرفه راست	۶.۲
۴۳	تابع عضویت فرضیه فازی یک‌طرفه چپ	۷.۲
۴۴	تابع عضویت فرضیه فازی دوطرفه	۸.۲
۴۶	تابع عضویت فرضیه فازی و مرز فرضیه فازی در مثال ۶.۲	۹.۲
۴۷	تابع عضویت فرضیه فازی و مرز فرضیه فازی در مثال ۷.۲	۱۰.۲
		تمام حالت‌های ممکن در مورد (ج)، بین مقادیر مشاهده‌شده آماره آزمون و میانه	۱۱.۲
۴۹	توزیع آماره آزمون تحت مرز فرضیه H_{0b}	۱۲.۲
۵۰	تابع عضویت فرضیه‌های فازی در مثال ۸.۲ و ۱.۳ و ۲.۳ و ۴.۴	۱۳.۲
۵۱	p -مقدار و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۸.۲	۱۴.۲
۵۱	نمودار تابع عضویت فرضیه فازی در مثال ۹.۲	۱۵.۲
۵۲	نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۹.۲	۱۶.۲
۵۵	تابع عضویت و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۱۰.۲	۱.۳
۶۱	نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۱.۳	۲.۳
۶۲	نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۲.۳	۳.۳
۶۲	نمودار تابع عضویت فرضیه فازی در مثال ۳.۳	۴.۳
۶۳	نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۳.۳	۵.۳
۶۶	نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۴.۳	۶.۳
		نمودار سه تابع عضویت مقادیر مشاهده شده آماره آزمون (t)، مرز فرضیه صفر	۷.۳
۶۷	فازی (\tilde{H}_{0b}) و p -مقدار فازی در مثال ۵.۳	۸.۳
۶۸	نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۶.۳	۹.۳
		نمودار تابع عضویت میانگین فازی (خط مشکی)، واریانس فازی (خط بریده) و	۷.۳
		انحراف استاندارد فازی (خط نقطه‌چین) برای داده‌های فازی (خط کم رنگ) در	۹.۳
۶۸	مثال ۷.۳	۱.۴
		نمودار تابع عضویت چندین p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی برای آزمون	۲.۴
۷۰	در نظر گرفته در جدول ۷.۳ در مثال ۶.۳	۳.۴
۷۷	توابع عضویت \tilde{P}^1 (مشکی) و \tilde{P}^1 (قرمز) در مثال ۲.۴	۱.۵
۷۹	توابع عضویت \tilde{P}^1 (مشکی) و \tilde{P}^1 (قرمز) در مثال ۳.۴	۲.۵
۸۱	توابع عضویت \tilde{P}^1 (مشکی) و \tilde{P}^1 (قرمز) در مثال ۴.۴	
۸۷	تابع عضویت فرضیه فازی \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 برای آزمون کیفیت	
		توابع نشانگر برای فرضیه‌های H_0 و H_1 برای آزمون کیفیت، $I_{\{C_p: C_p > c_0\}}$ و $I_{\{C_p: C_p \leq c_0\}}$	
۸۷	برای $c_0 = 1/33$	

۳.۵	تابع چگالی وزنی \hat{C}_p تحت فرضیه \tilde{H}_0 و همچنین توابع چگالی $\hat{C}_p = C_p$ برای	۸۹
۴.۵	مقایسه $P^{(0)}$ و $P^{(1)}$ بر اساس تابع چگالی احتمال وزنی C_p تحت مرز فرضیه فازی	۹۲
۱.آ	نمودار تابع عضویت عدد فازی در مثال ۱.آ	۱۰۵
۲.آ	نمودار تابع عضویت عدد فازی سایه‌دار مربوط به تذکر ۱.آ	۱۰۶
۳.آ	نمودار توابع عضویت مربوط به مثال ۲.آ	۱۰۷
۴.آ	نمودار توابع عضویت عدد فازی قطعه قطعه‌ای خطی در مثال ۳.آ	۱۰۸

فهرست جداول

۲۱	۱.۱	صورت کلی فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 کلاسیک
۳۵	۱.۲	اعداد فازی مثال ۱.۲
۳۹	۲.۲	اعداد فازی نرمال مثال ۳.۲
۶۴	۱.۳	اعداد فازی در بسته Fuzzy Numbers
۶۹	۲.۳	نتیجه چندین آزمون فرضیه‌های نادقیق متفاوت در مثال ۷.۳
۷۵	۱.۴	صورت کلی فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 کلاسیک و فازی
۹۱	۱.۵	داده‌های مثال ۱.۵
۹۷	۲.۵	مقادیر ولتاژ خروجی از آداپتور بر حسب ولت در نمونه تصادفی در مثال ۲.۵

فصل ۱

مروری بر آمار فازی و آزمون فرضیه

منظور از آمار فازی، استفاده از روش‌های فازی در مباحث گوناگون علم آمار است. از دیدگاه یک آماردان فازی هدف آن نیست که روش‌های فازی به جای روش‌های آماری کلاسیک در همه موارد و همه موضوعات جایگزین شود، بلکه صحبت از مکمل بودن روش‌های آماری و روش‌های برگرفته از نظریه مجموعه‌های فازی است.

در جهان واقعیات، بسیاری از مفاهیم را آدمی به صورت فازی (به معنای غیر دقیق، ناواضح و مبهم) درک می‌کند و به کار می‌بندد. به عنوان نمونه، هرچند کلمات و مفاهیمی همچون گرم، سرد، بلند، کوتاه، پیر، جوان و نظایر این‌ها به عدد خاص و دقیقی اشاره ندارند، اما ذهن انسان با سرعت و با انعطاف‌پذیری شگفت‌آوری همه را می‌فهمد و در تصمیمات و نتیجه‌گیری‌های خود به کار می‌گیرد. منطق فازی^۱ تکنولوژی جدیدی است که شیوه‌هایی را برای طراحی و مدل‌سازی این گونه مفاهیم فراهم می‌آورد. این منطق از منطق ارزش‌های صفر و یک فراتر رفته و فضای شناور بین اعداد صفر و یک را نیز در استدلال‌های خود به کار برده و به چالش می‌کشد.

^۱Fuzzy Logic

۱.۱ مقدمه

ایده مجموعه‌های فازی اولین بار توسط پرفسور لطفعلی عسگرزاده (شکل ۱.۱)، دانشمند ایرانی تبار، در سال ۱۹۶۵ میلادی با انتشار مقاله «مجموعه‌های فازی» [۳۳] معرفی شد. در اواسط دهه هشتاد میلادی قرن گذشته صنعتگران ژاپنی معنا و ارزش صنعتی این علم را



شکل ۱.۱: پرفسور لطفعلی عسگرزاده

دریافته و منطق فازی را به کار گرفتند. اولین پروژه آن‌ها طرح هدایت و کنترل تمام خودکار قطار زیرزمینی شهر سندای بود که توسط شرکت هیتاچی برنامه‌ریزی و ساخته شد. نتیجه این طرح موفق و چشم‌گیر ژاپنی‌ها به‌طور ساده این گونه خلاصه می‌شود: آغاز حرکت نامحسوس (تکان‌های ضربه‌ای) قطار، شتاب گرفتن نامحسوس، ترمز و ایستادن نامحسوس و صرفه‌جویی در مصرف برق. از آن پس منطق فازی بسیار سریع در تکنولوژی دستگاه‌های صوتی و تصویری ژاپنی‌ها راه یافت (از جمله نلرزیدن تصویر فیلم دیجیتال ضمن لرزیدن دست فیلم بردار). در دومین کنفرانس سیستم‌های فازی که در توکیو برگزار شد، درست سه روز بعد از افتتاح قطار زیرزمینی سندای، هیروتا یک روبات فازی را به نمایش گذاشت که پینگ پونگ بازی می‌کرد. یاماگاکاوا نیز سیستم فازی را نشان داد که یک پاندول معکوس را در حالت تعادل نشان می‌داد. پس از این کنفرانس، توجه مهندسان، دولت‌مردان و تجار جلب شد و زمینه‌های پیشرفت نظریه فازی فراهم شد. اروپایی‌ها در اواسط دهه ۱۹۹۰ میلادی، استفاده صنعتی از منطق فازی را آغاز کردند.

موضوع آزمون فرضیه بر پایه داده‌های فازی نخستین بار توسط تاناکا و همکاران [۲۹] و در چارچوب نظریه تصمیم فازی مطرح شد. اما مطالعه جدی در این باره توسط کاسالز و همکاران [۱۰] و کاسالز و هیل [۱۱] آغاز شد. آزمون فرضیه‌های فازی با رهیافت کلاسیک، هنگامی که مشاهدات و داده‌ها دقیق هستند اما فرضیه‌های مورد آزمون مبهم و نادقیق‌اند،

نخستین بار توسط آرنولد [۸] و [۹] مطالعه شد. وی روش خود را با بررسی حالاتی از آزمون فرضیه‌های یک‌طرفه و دوطرفه و به ویژه برای توزیع‌های عضو خانواده‌های نمایی توضیح داده است. طاهری و عارفی [۲۸] روشی، مبتنی بر آماره آزمون فازی، برای آزمون فرضیه‌های فازی ارائه نموده‌اند. همچنین ترابی و بهبودیان [۳۰] آزمون نسبت درست‌نمایی را برای آزمون فرضیه‌های فازی ارائه کرده‌اند. پرچمی و همکاران [۲۶] مفهوم p -مقدار فازی را برای آزمون فرضیه‌های فازی (حالت داده‌های دقیق) تعریف و بررسی نموده‌اند.

در بخش اول از این فصل، مفاهیم فازی از جمله تابع عضویت، α -برش‌ها، اتحاد تجزیه، قضیه‌ی نمایش، اصل توسیع، اعداد فازی و حساب اعداد فازی را شرح می‌دهیم. در بخش دوم مروری بر آزمون فرضیه، معرفی رویکرد p -مقدار و طریقه محاسبه آن را مطرح می‌کنیم. برخی تعاریف این فصل برگرفته از کتاب مقدمه‌ای بر آمار و احتمال فازی [۴] و کتاب مبانی آمار ریاضی [۲] است.

۲.۱ مروری بر مجموعه‌های فازی و حساب اعداد فازی

۱.۲.۱ مجموعه فازی

یک روش مفید در تعریف و نشان دادن مجموعه معمولی A ، که با یک ویژگی دقیق و معین مشخص می‌شود، تابع نشانگر است. اگر یک عضو از مجموعه مرجع X ، آن ویژگی را دارا باشد، عضو A است و اگر فاقد آن ویژگی باشد عضو مجموعه A نیست.

مثلاً اگر مجموعه A مجموعه اعداد زوج باشد آنگاه برای هر عدد می‌شود بررسی کرد که آیا زوج است یا خیر و بعد با قطعیت گفت که می‌تواند در A باشد یا نه.

اما بیان مسائل فازی مانند «کوچک بودن»، «بزرگ بودن» و «طول عمر» اولاً: نزد همه دارای تعریف مشخص نیست، مثلاً اگر به یک نفر بگوییم عدد زوج می‌تواند بفهمد که عدد ۳ زوج نیست، اما اگر بگوییم «بزرگ‌تر بودن» برایش واضح نیست و می‌پرسد نسبت به چه بزرگ‌تر است؟ ثانیاً: اگر در بین چند شی بخواهیم صفت «سرد بودن» را در نظر بگیریم، هر چه آن شی دلخواه سردتر باشد عدد بزرگ‌تری (از مجموعه \circ تا ۱) را به آن نسبت می‌دهیم و هرچه گرم‌تر باشد عدد کوچک‌تری را.

این عدد نسبت داده‌شده را درجه عضویت^۲ آن شی در آن مجموعه می‌نامند. یعنی هرچه یک شی درجه عضویتش به ۱ نزدیک‌تر باشد، سردتر است و هرچه درجه عضویتش به \circ نزدیک‌تر باشد، گرم‌تر است. تابعی که هر عضو را به درجه عضویتش می‌برد و در واقع به هر عضو، وابسته به میزان دارا بودن آن صفت مورد نظر، درجه‌ای (عددی از \circ تا ۱) را نسبت می‌دهد، تابع عضویت^۳ نام دارد. اساس کار تابع عضویت، گسترش مفهوم تابع نشانگر به یک تابع با

^۲ Membership Degree

^۳ Membership Function

برد $[0, 1]$ است.

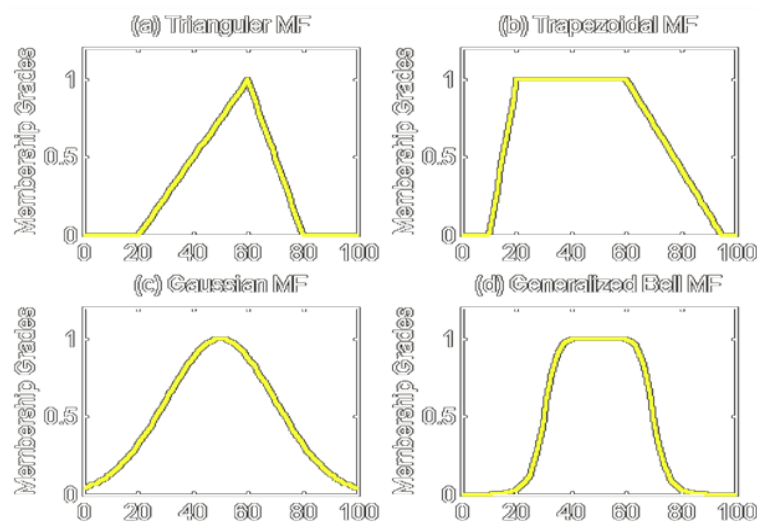
نمونه‌هایی از توابع عضویت به صورت زیر هستند که در شکل ۲.۱ رسم شده‌اند.

الف) مثلثی^۴

ب) ذوزنقه‌ای^۵

ج) گوسی^۶

د) زنگوله‌ای تعمیم‌یافته^۷



شکل ۲.۱: نمودار توابع عضویت مثلثی، ذوزنقه‌ای، گوسی و زنگوله‌ای تعمیم‌یافته

تعریف ۱.۱. یک زیرمجموعه‌ی فازی (به کوتاهی: مجموعه‌ی فازی) از مجموعه‌ی مرجع X ، توسط یک تابع $\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر x از X ، مقدار $\mu_A(x)$ میزان عضویت x در مجموعه‌ی فازی A را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۱. فرض کنید $(0, \infty)$ مجموعه مقادیر ممکن طول عمر یک نوع لامپ برحسب ساعت باشد. مجموعه‌ی فازی A بیانگر طول عمر حدوداً ۱۰۰۰ با تابع عضویت زیر است (شکل ۳.۱).

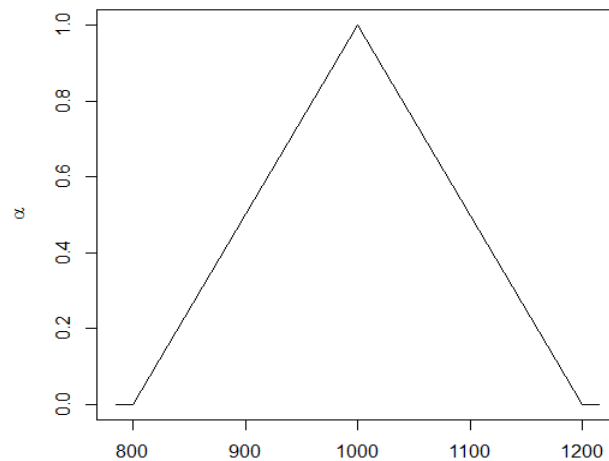
$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-800}{200} & 800 \leq x < 1000 \\ \frac{1200-x}{200} & 1000 \leq x < 1200 \end{cases}$$

^۴ Triangular

^۵ Trapezoidal

^۶ Gaussian

^۷ Generalized bell



شکل ۳.۱: نمودار تابع عضویت طول عمر حدوداً ۱۰۰۰ در مثال ۱.۱

ملاحظه ۱.۱. برای کوتاهی به جای $\mu_A(x)$ می‌نویسیم $\tilde{A}(x)$. در حالت گسسته، x هایی را که برای آن‌ها $\tilde{A}(x) = 0$ ، نخواهیم نوشت. همچنین، برای نشان دادن تابع عضویت فازی A ، از نماد \tilde{A} استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد. مجموعه تمام مجموعه‌های فازی را با $F(X)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$F(X) = \{\tilde{A} | \tilde{A} : X \rightarrow [0, 1]\}.$$

به هر $\tilde{A} \in F(X)$ یک مجموعه فازی روی X می‌گوییم.

۲.۲.۱ - برش‌ها α

تعریف ۳.۱. مجموعه (معمولی) عناصری از X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه‌ی فازی A دست کم به بزرگی α ($0 < \alpha \leq 1$) باشد، α -برش \tilde{A} (مجموعه‌ی تراز α وابسته به \tilde{A}) گوییم و با \tilde{A}_α نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

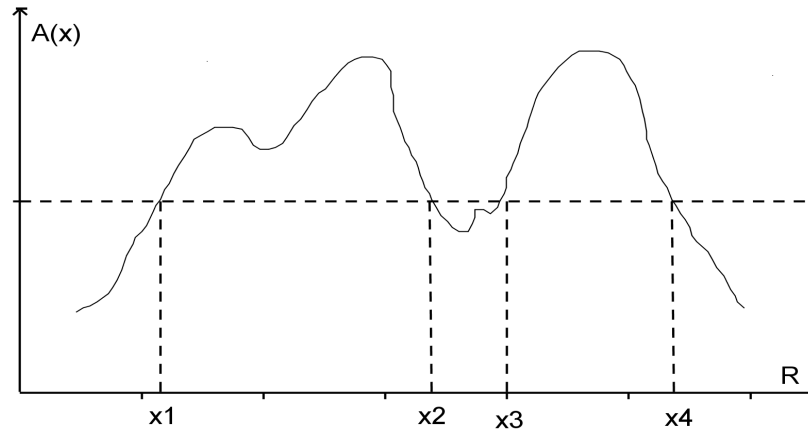
$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X | \tilde{A}(x) \geq \alpha\}.$$

در شکل ۴.۱، α -برش، اجتماعی از دو مجموعه به صورت زیر است

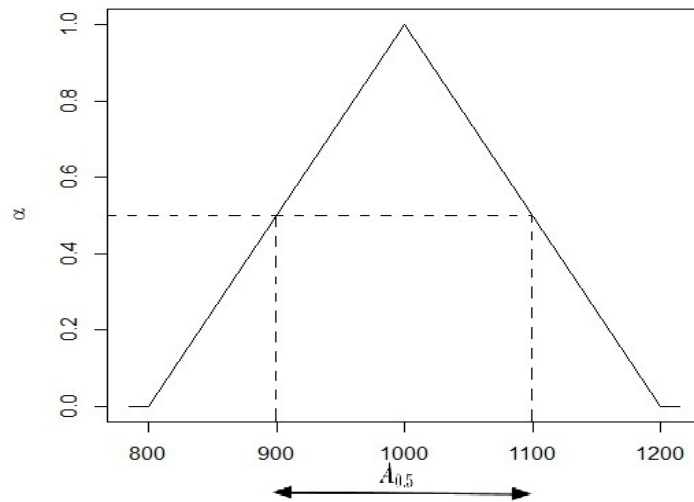
$$\tilde{A}_\alpha(x) = [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]$$

مثال ۲.۱. در مثال ۱.۱، A_α ، به ازای $\alpha = 0.5$ به صورت زیر به دست می‌آید (شکل ۵.۱)

$$\tilde{A}_{0.5} = [900, 1100]$$



شکل ۴.۱: α -برش برای بیان تعریف ۳.۱



شکل ۵.۱: α -برش مجموعه فازی A در مثال ۲.۱

مثال ۳.۱. فرض کنید

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.8}{1}, \frac{0.6}{2}, \frac{0.4}{3}, \frac{0.2}{4} \right\}.$$

که در آن مثلاً $\tilde{A}(2) = 0.6$ بدین معنی است که از نظر تصمیم گیرنده عدد ۲ به اندازه ۰.۶ به مجموعه \tilde{A} تعلق دارد.
در این صورت چند α -برش \tilde{A} عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{0.7} &= \{0, 1, 2, 3, 4\} & \tilde{A}_{0.5} &= \{0, 1, 2\} \\ \tilde{A}_{0.6} &= \{0, 1, 2\} & \tilde{A}_{0.45} &= \{0\} \end{aligned}$$

به طور خلاصه می‌توان نوشت

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, 4\} & 0 < \alpha \leq 0/2 \\ \{0, 1, 2, 3\} & 0/2 < \alpha \leq 0/4 \\ \{0, 1, 2\} & 0/4 < \alpha \leq 0/6 \\ \{0, 1\} & 0/6 < \alpha \leq 0/8 \\ \{0\} & 0/8 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

تعریف ۴.۱. اگر \tilde{A} یک مجموعه فازی باشد، آنگاه $\alpha\tilde{A}$ که در آن $\alpha \in [0, 1]$ ، به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت $(\alpha\tilde{A})(x) = \alpha\tilde{A}(x)$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۱ (اتحاد تجزیه). هر مجموعه فازی مانند \tilde{A} را می‌توان به صورت زیر بر حسب مجموعه‌های تراز آن تجزیه کرد

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha} \alpha\tilde{A}_\alpha$$

که در آن $\alpha\tilde{A}_\alpha$ در تعریف ۴.۱ بیان شده است.

به عبارتی اگر فرض کنیم روی یک مجموعه فازی، α - برش اول دو نقطه روی محور x به ما می‌دهد، یعنی یک بازه ایجاد می‌کند، α - برش بعدی یک بازه دیگر ایجاد کرده و با ادامه این کار بیشمار بازه به دست می‌آوریم. حال اتحاد تجزیه به ما می‌گوید یک مجموعه فازی را می‌توان به بازه‌های حقیقی مقدار روی محور x تبدیل کرد که اجتماع این بازه‌ها در α (ارتفاع) متناظر آن، همان مجموعه فازی مورد نظر است. بیانی دیگر از اتحاد تجزیه به صورت زیر است

هر مجموعه فازی A از مجموعه مرجع X را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tilde{A}(x) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha I_{A_\alpha}(x), \quad \forall x \in X$$

که در آن I_{A_α} تابع نشانگر مجموعه تراز \tilde{A}_α است.

مثال ۴.۱. برای مجموعه فازی A مثال ۳.۱ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= 0/2\{0, 1, 2, 3, 4\} \cup 0/4\{0, 1, 2, 3\} \cup 0/6\{0, 1, 2\} \cup 0/8\{0, 1\} \cup 1\{0\} \\ &= \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0/8}{1}, \frac{0/6}{2}, \frac{0/4}{3}, \frac{0/2}{4} \right\}. \end{aligned}$$

از اتحاد تجزیه نه تنها برای تجزیه یک مجموعه فازی به دنباله‌ای از مجموعه‌های معمولی می‌توان استفاده کرد، بلکه برعکس برای ترکیب دنباله‌ای از مجموعه‌های معمولی و به دست آوردن یک مجموعه فازی نیز می‌توان استفاده نمود. یعنی اگر یک سری بازه α متناظر با آن‌ها را داشته باشیم، می‌توان عدد فازی ساخت. در واقع عکس اصل تجزیه بدین صورت مطرح می‌شود: اگر $\{\tilde{B}_\alpha\}_{\alpha \in [0, 1]}$ یک رده از زیرمجموعه‌های X باشد، تحت شرایطی مجموعه فازی مانند \tilde{A} از X وجود دارد که

$$\tilde{A}_\alpha = \tilde{B}_\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

و به صورت قضیه نمایش، بیان می شود.

قضیه ۲.۱ (قضیه نمایش). فرض کنید $\{\tilde{B}_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که $\tilde{B}_0 = X$. شرط لازم و کافی برای آن که مجموعه فازی A از X وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، داشته باشیم $\tilde{A}_\alpha = \tilde{B}_\alpha$ ، آن است که برای هر $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ ، که $\alpha_1 < \alpha_2$ ، $\tilde{B}_{\alpha_2} \subseteq \tilde{B}_{\alpha_1}$ (خاصیت یکنوا بودن).

مثال ۵.۱. فرض کنید مجموعه‌های معمولی \tilde{B}_{α_1} تا \tilde{B}_{α_4} و اعداد α_1 تا α_4 متناظر با آن‌ها به صورت زیر داده شده باشند

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 1 & \quad \tilde{B}_{\alpha_1} = \{x_3\} \\ \alpha_2 = 0.75 & \quad \tilde{B}_{\alpha_2} = \{x_2, x_3\} \\ \alpha_3 = 0.45 & \quad \tilde{B}_{\alpha_3} = \{x_2, x_3, x_5\} \\ \alpha_4 = 0.25 & \quad \tilde{B}_{\alpha_4} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \end{aligned}$$

چون مجموعه‌های فوق به همراه α_1 تا α_4 در شرط قضیه نمایش صدق می‌کنند پس بر پایه این دنباله از مجموعه‌ها (و با تلقی آن‌ها به عنوان مجموعه‌های تراز) یک مجموعه فازی مانند A (با α -برش‌های $\tilde{A}_\alpha = \tilde{B}_\alpha$) به صورت زیر ساخته می‌شود

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \bigcup_{\alpha} \alpha \tilde{A}_\alpha = \alpha_1 \tilde{A}_{\alpha_1} \cup \alpha_2 \tilde{A}_{\alpha_2} \cup \alpha_3 \tilde{A}_{\alpha_3} \cup \alpha_4 \tilde{A}_{\alpha_4} \\ &= \left\{ \frac{0.25}{x_1}, \frac{0.75}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{0.25}{x_4}, \frac{0.45}{x_5} \right\} \end{aligned}$$

۳.۲.۱ حساب اعداد فازی

اعداد فازی یک تعمیم طبیعی اعداد معمولی هستند. در واقع این اعداد، مجموعه‌های فازی خاص از مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} می‌باشند. اعداد فازی نقش کلیدی در صورت‌بندی و تحلیل بسیاری از مسائل کاربردی ایفا می‌کنند. در این بخش اعداد فازی و عملگرهای حسابی مربوط به این اعداد و همچنین نوع خاصی از اعداد فازی LR معرفی و مرور می‌شوند. برای تعمیم عملگرهای حسابی معمولی به عملگرهای حسابی فازی، نیاز به بیان و تشریح یک اصل اساسی موسوم به اصل توسیع (گسترش) است، که آن را بیان می‌کنیم.

در آمار و ریاضیات معمولی یکی از مهم‌ترین ابزارها، تابع می‌باشد. تابع حقیقی مقدار مانند یک سیستمی عمل می‌کند که با دریافت X به عنوان یک ورودی، $y = g(x)$ به عنوان خروجی حاصل می‌شود و تابع مجموعه‌ای نیز به صورتی عمل می‌کند که ورودی (دامنه) آن مجموعه است و خروجی آن می‌تواند بردار یا عدد باشد.

اکنون فرض کنید ورودی تابع مجموعه فازی باشد. مثلاً اگر تابع اولیه $g(x) = 2x + 1$ باشد، و ورودی تابع تقریباً ۲ باشد، خروجی تقریباً ۵ خواهد بود.

تابع g از X به Y را در نظر بگیرید. وقتی \tilde{A} یک مجموعه فازی روی X و ورودی باشد، می‌خواهیم خروجی آن یعنی $G(\tilde{A})$ را به دست آوریم. این کار را با اصل گسترش انجام می‌دهیم.

۴.۲.۱ اصل توسیع (گسترش)

فرض کنید g یک تابع از X به Y باشد، یعنی

$$y = g(x), \quad x \in X, y \in Y$$

این تابع به هر نقطه از X ، نقطه‌ای را از Y می‌نگارد. حال فرض کنید A زیرمجموعه‌ای معمولی از X باشد. با استفاده از g و A می‌توانیم نگاشت A تحت g ، یعنی $G(A)$ را به صورت زیر به دست آوریم

$$G(A) = \{g(a) \in Y | a \in A\}.$$

اکنون می‌خواهیم g را طوری توسیع (گسترش) دهیم که به جای این که صرفاً روی یک نقطه از X یا یک زیرمجموعه معمولی از X عمل کند، بتواند بر یک زیرمجموعه فازی از X نیز عمل کند. مسلماً انتظار داریم که $G(\tilde{A})$ ، حاصل عمل g بر مجموعه فازی A از X ، دیگر یک مجموعه معمولی از Y نباشد، بلکه یک مجموعه فازی از Y مانند $\tilde{B} = G(\tilde{A})$ باشد. در این جا تعیین تابع عضویت $\tilde{B}(y)$ مهم است. واضح است که اگر g تابعی یک به یک باشد، آن‌گاه $\tilde{B}(y) = \tilde{A}(g^{-1}(y))$. اما در حالت کلی ممکن است $y \in Y$ تصویر چندین نقطه از X باشد. در این حالت اصل گسترش روش تعریف $\tilde{B} = G(\tilde{A})$ را ارائه می‌دهد. ابتدا اصل گسترش را برای توابع یک متغیره بیان و تشریح و سپس حالت کلی آن را مطرح می‌کنیم.

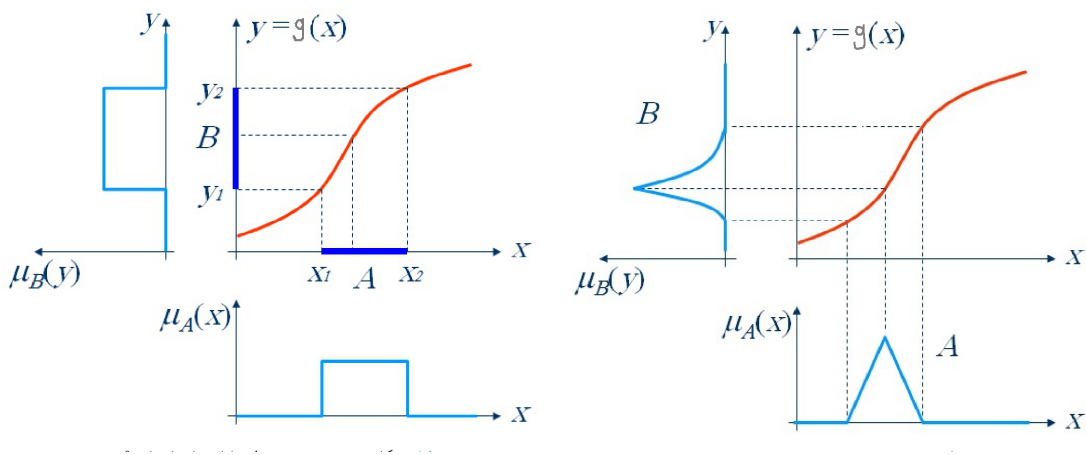
تعریف ۵.۱ (اصل توسیع). فرض کنید $g : X \rightarrow Y$ یک تابع معمولی باشد. تابع g یک تابع $G : F(X) \rightarrow F(Y)$ القا می‌کند. همچنین فرض کنید \tilde{A} یک مجموعه فازی از X ($\tilde{A} \in F(X)$) باشد. در این صورت $\tilde{B} = G(\tilde{A})$ به صورت یک مجموعه فازی از Y ($\tilde{B} \in F(Y)$) با تابع عضویت زیر تعریف می‌کند (شکل ۱۶.۱)

$$\tilde{B}(y) = G(\tilde{A})(y) = \begin{cases} \sup_{y=g(x); x \in X} \tilde{A}(x) & \tilde{A} \in F(X), G^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & G^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن $G^{-1}(\{y\})$ نگاشت معکوس G است.

مثال ۶.۱. فرض کنید $X = Y = Z$ و $g : X \rightarrow Y$ با ضابطه $g(x) = 2x$ تعریف شود. اگر A مجموعه اعداد فرد مثبت باشد، یعنی $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} G(A) &= \{g(a) \in Y | a \in A\} \\ &= \{2, 6, 10, 14, \dots\}. \end{aligned}$$



شکل ۶.۱: نحوه عملکرد اصل توسیع

اکنون فرض کنید مجموعه فازی A از X بیانگر اعداد تقریباً ۵ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0.4}{3}, \frac{0.7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0.7}{6}, \frac{0.4}{7} \right\}.$$

آن‌گاه طبق اصل گسترش

$$\tilde{B} = G(\tilde{A}) = \left\{ \frac{0.4}{6}, \frac{0.7}{8}, \frac{1}{10}, \frac{0.7}{12}, \frac{0.4}{14} \right\}.$$

مثال ۷.۱. در مثال ۶.۱ فرض کنید تابع g با ضابطه $g(x) = x^2$ ، و مجموعه فازی \tilde{A} از X بیانگر اعداد تقریباً ۱ به صورت زیر تعریف شود

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0.1}{-2}, \frac{0.4}{-1}, \frac{0.7}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0.7}{2}, \frac{0.4}{3}, \frac{0.1}{4} \right\}$$

آن‌گاه طبق اصل توسیع

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{0.1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0.7}{4}, \frac{0.4}{9}, \frac{0.1}{16} \right\}.$$

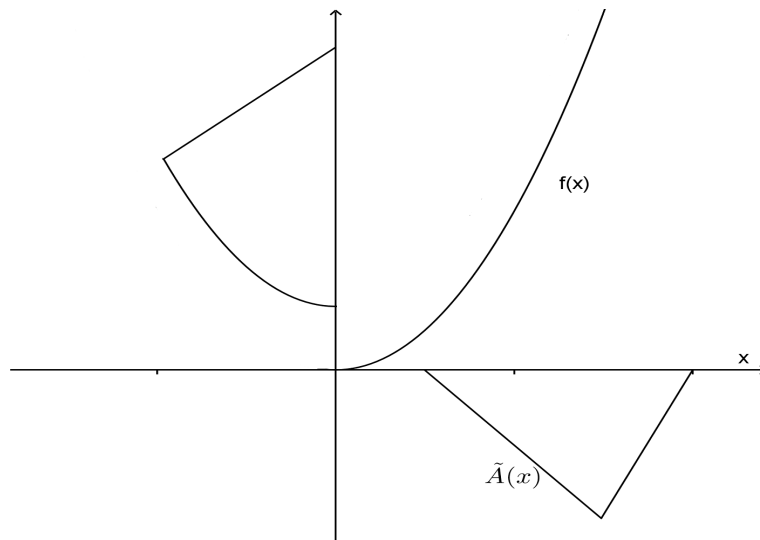
مثال ۸.۱. فرض کنید $g(x) = x^2$ و مجموعه فازی A از مجموعه اعداد حقیقی، توصیف‌کننده تقریباً ۳، این‌گونه تعریف شده باشد

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 \leq x < 3 \\ 4-x & 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

چون در بازه $[1, 4]$ تابع $g(x)$ یک به یک است، پس

$$\begin{aligned} \tilde{B}(y) &= \sup_{x, y=g(x)} \tilde{A}(x) = \tilde{A}(g^{-1}(y)) \\ &= \tilde{A}(\sqrt{y}) \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{y}-1}{2} & 1 \leq y < 9 \\ 4 - \sqrt{y} & 9 \leq y < 16 \end{cases} \end{aligned}$$

چگونگی توسیع $y = g(x) = x^2$ به حالتی که به جای x ، مجموعه فازی A قرار می‌گیرد، در شکل ۷.۱ نشان داده شده است.



شکل ۷.۱: روش عمل اصل توسیع در مثال ۸.۱

اکنون حالت کلی اصل توسیع (اصل گسترش) را بیان می‌کنیم.

تعریف ۶.۱ (اصل توسیع). فرض کنید X_n, \dots, X_1 ، مجموعه مرجع و $X = X_1 \times \dots \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آن‌ها باشد. همچنین $\tilde{A}_n, \dots, \tilde{A}_1$ مجموعه فازی به ترتیب از X_n, \dots, X_1 باشند. به علاوه $y = g(x_1, \dots, x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل عمل g بر n مجموعه فازی A_n, \dots, A_1 به صورت مجموعه فازی B از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{B}(y) = G(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)(y) = \begin{cases} \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ y=g(x_1, \dots, x_n)}} \min\{\tilde{A}_1(x_1), \dots, \tilde{A}_n(x_n)\} & G^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & G^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

که در آن $G^{-1}(y)$ نگاشت معکوس y تحت G است.

مثال ۹.۱. فرض کنید $X_1 = X_2 = N$ مجموعه اعداد صحیح مثبت، \tilde{A}_1 مجموعه فازی تقریباً ۵، و \tilde{A}_2 مجموعه فازی تقریباً ۶ به صورت زیر باشند

$$\tilde{A}_1 = \left\{ \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0}{6}, \frac{0}{7} \right\}, \tilde{A}_2 = \left\{ \frac{0}{5}, \frac{1}{6}, \frac{0}{7} \right\}$$

آن‌گاه بر اساس اصل توسیع می‌توان جمع دو مجموعه فازی تقریباً ۵ و تقریباً ۶ را انجام داد. مثلاً

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2)(\lambda) &= \max_{\substack{x_1, x_2 \\ x_1 + x_2 = \lambda}} \min\{\tilde{A}_1(x_1), \tilde{A}_2(x_2)\} \\ &= \min\{\tilde{A}_1(3), \tilde{A}_2(5)\} = \min\{0/3, 0/6\} = 0/3 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2)(9) &= \max_{\substack{x_1, x_2 \\ x_1 + x_2 = 9}} \min\{\tilde{A}_1(x_1), \tilde{A}_2(x_2)\} \\ &= \max\{\min\{\tilde{A}_1(3), \tilde{A}_2(6)\}, \min\{\tilde{A}_1(4), \tilde{A}_2(5)\}\} \\ &= \max\{0/3, 0/6\} = 0/6 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2)(10) &= \max_{\substack{x_1, x_2 \\ x_1 + x_2 = 10}} \min\{\tilde{A}_1(x_1), \tilde{A}_2(x_2)\} \\ &= \max\{\min\{\tilde{A}_1(5), \tilde{A}_2(5)\}, \min\{\tilde{A}_1(4), \tilde{A}_2(6)\}, \min\{\tilde{A}_1(3), \tilde{A}_2(7)\}\} \\ &= \max\{0/6, 0/7, 0/3\} = 0/7 \end{aligned}$$

و سرانجام

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = \left\{ \frac{0/3}{8}, \frac{0/6}{9}, \frac{0/7}{10}, \frac{1}{11}, \frac{0/7}{12}, \frac{0/6}{13}, \frac{0/3}{14} \right\}.$$

ملاحظه می‌کنید که $\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2$ را می‌توان تعبیری از یک مجموعه فازی که تقریباً ۱۱ را مدل‌سازی می‌کند تعبیر کرد، و این چیزی است که انتظار آن را داریم.

۵.۲.۱ اعداد فازی

اعداد فازی که زیرمجموعه‌های فازی خاصی از مجموعه اعداد حقیقی هستند، در بیشتر مسائل کاربردی استفاده می‌شوند. در این بخش اعداد فازی و نوع ویژه‌ای از آن‌ها، موسوم به اعداد فازی LR را مرور می‌کنیم.

تعریف ۷.۱. مجموعه فازی N از \mathbb{R} (اعداد حقیقی) را یک عدد فازی (حقیقی) گوئیم، اگر

۱. N نرمال و تک‌نمایی باشد. یعنی یک و دقیقاً یک $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $N(x_0) = 1$.

۲. α -برش‌های N ، به‌ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، به‌صورت بازه‌های بسته باشند.

ملاحظه ۲.۱. در بعضی از منابع لزوم تک‌نمایی بودن برای تعریف عدد فازی ذکر نمی‌شود.

تکیه‌گاه عدد فازی A (که یک مجموعه‌ی دقیق است) را با نماد $Supp(\tilde{A})$ نشان می‌دهیم، و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$Supp(\tilde{A}) = \{x | \tilde{A}(x) > 0\}.$$

مجموعه همه اعداد فازی را با $F(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر است

$$F(\mathbb{R}) = \{\tilde{A} | \tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]\}.$$

اگر \tilde{A} یک تابع پیوسته روی \mathbb{R} باشد، آن گاه آن را با $F_C(\mathbb{R})$ نشان داده و به صورت زیر می‌نویسیم

$$F_C(\mathbb{R}) = \{\tilde{A} | \tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \text{ باشد یک تابع پیوسته}\}$$

حالت‌های خاص $F_C(\mathbb{R})$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$F_S(\mathbb{R}) = \{\tilde{S}(a, b) | a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

$$F_B(\mathbb{R}) = \{\tilde{B}(c, d) | c, d \in \mathbb{R}, c \leq d\}$$

$$F_T(\mathbb{R}) = \{\tilde{T}(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \leq c\}$$

که در آن‌ها توابع $\tilde{T}, \tilde{B}, \tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ به ترتیب نشان دهنده «تقریباً کوچکتر بودن»، «تقریباً بزرگتر بودن» و «تقریباً برابر بودن» هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند (شکل ۸.۱).

$$\tilde{S}(a, b)(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ \frac{x-b}{a-b} & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases} \quad (۲.۱)$$

$$\tilde{B}(c, d)(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ \frac{x-c}{d-c} & c \leq x < d \\ 1 & x \geq d \end{cases} \quad (۳.۱)$$

و

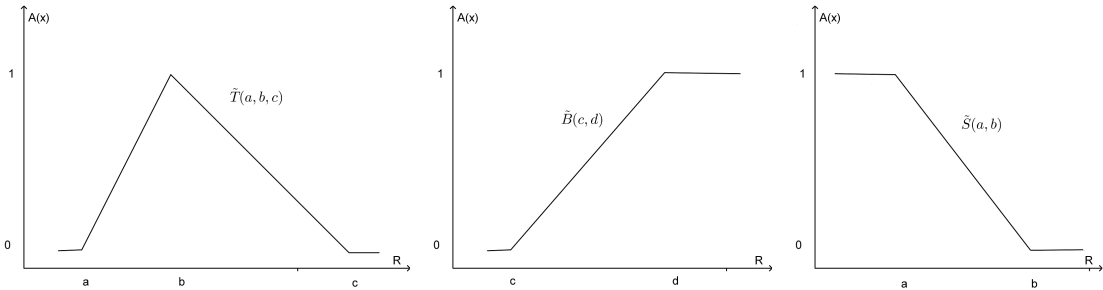
$$\tilde{T}(a, b, c)(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c} & b < x \leq c \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (۴.۱)$$

به $\tilde{T}(a, b, c)$ عدد فازی مثلثی نیز می‌گویند که در بخش ۶.۲.۱ به آن می‌پردازیم. توجه کنید که $\tilde{S}(a, a) = I_{\{x: x \leq a\}}$ ، $\tilde{B}(a, a) = I_{\{x: x \geq a\}}$ و $\tilde{T}(a, a, a) = I_{\{a\}}$ که در آن I تابع نشانگر و $a \in \mathbb{R}$ می‌باشد. باید اشاره کرد که توابع عضویت ارائه شده در این پایان‌نامه می‌توانند کلیت داشته باشند و ما تنها به منظور بیان آسان‌تر، از این سه نوع تابع عضویت جهت صورت‌بندی فرضیه‌ها و داده‌های نادقیق استفاده خواهیم کرد.

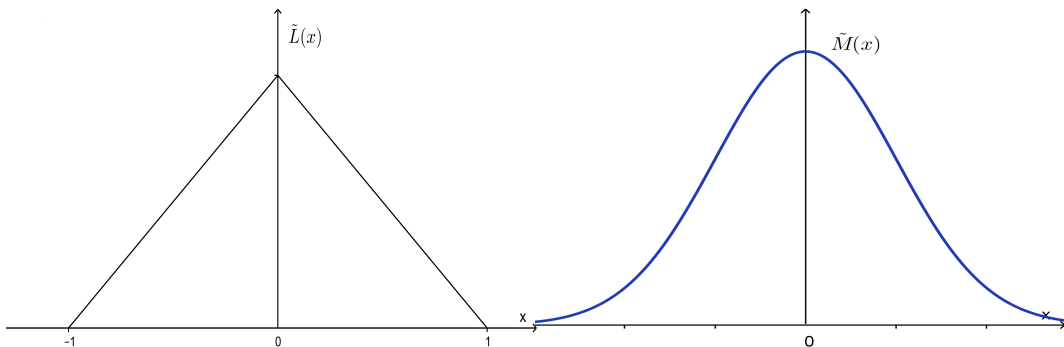
مثال ۱۰.۱. مجموعه‌های فازی L و M با توابع عضویت زیر صورت‌های مختلف یک مدل‌سازی برای عدد فازی تقریباً صفر هستند (شکل ۹.۱).

$$\tilde{L}(x) = 1 - |x| \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\tilde{M}(x) = e^{-x^2} \quad x \in \mathbb{R}$$



شکل ۸.۱: توابع \tilde{T} ، \tilde{B} ، \tilde{S} برای نمایش برخی مفاهیم فازی



شکل ۹.۱: نمودار توابع عضویت عدد فازی تقریباً صفر در مثال ۱۰.۱

۶.۲.۱ اعداد فازی LR

اعداد فازی LR نوع خاصی از اعداد فازی هستند که علاوه بر آن که ساختار ویژه‌ای دارند، اعمال حسابی بر آنها نیز از قواعد خاصی پیروی می‌کنند. این ساختار و این قواعد باعث شده‌اند که در عمل، معمولاً از این نوع اعداد فازی استفاده شود.

تعریف ۸.۱. اگر ساختار تابع عضویت عدد فازی N به صورت زیر باشد

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیرصعودی از \mathbb{R}^+ (مجموعه اعداد حقیقی مثبت) به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$ ، آن‌گاه \tilde{N} را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $\tilde{N} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. عدد m را مقدار نما (یا میانه) و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست \tilde{N} می‌نامیم. L و R توابع مرجع (یا توابع شکل) نامیده می‌شوند. توابع رایج برای L (به‌طور مشابه برای R) عبارتند از:

$$L(x) = \max\{0, 1 - |x|^p\} \quad (L(x) = 1 - |x|^p \text{ به کوتاهی})$$

$$L(x) = e^{-|x|^p}$$

$$L(x) = \frac{1}{1 + |x|^p}$$

$$L(x) = \frac{1}{1 - p|x|}$$

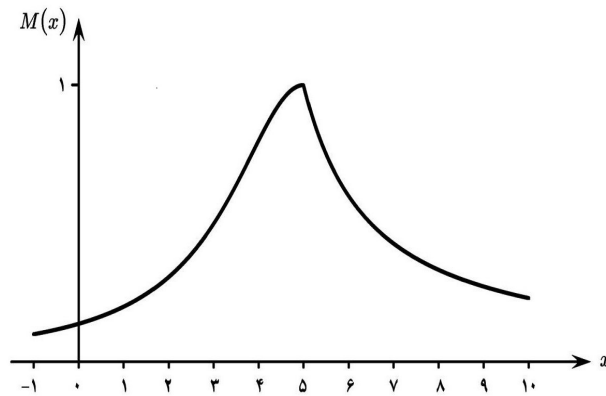
که در آن‌ها $p > 0$.

مثال ۱۱.۱. فرض کنید $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ ،

$$L(x) = \frac{1}{1 + x^2}, R(x) = \frac{1}{1 + 2x}$$

و $m = 5$ ، $\alpha = 2$ و $\beta = 3$ ، آن‌گاه (شکل ۱۰.۱)

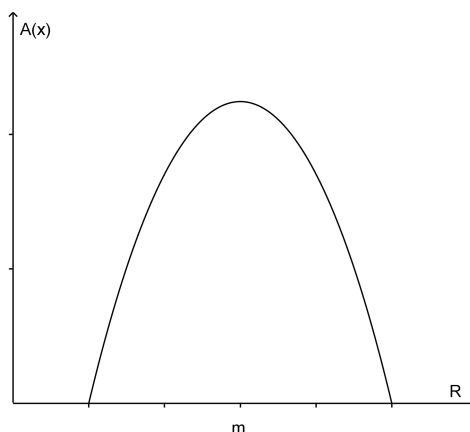
$$\tilde{M}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{5-x}{2}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{5-x}{2}\right)^2} & x \leq 5 \\ R\left(\frac{x-5}{3}\right) = \frac{1}{1 + \frac{x-5}{3}} & x > 5 \end{cases}$$



شکل ۱۰.۱: نمودار عدد فازی LR تقریباً ۵ در مثال ۱۱.۱

تعریف ۹.۱. فرض کنید $\tilde{N} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L = R$. در این صورت

(الف) \tilde{N} را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $\tilde{N} = (m, \alpha, \beta)_T$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$ همان‌طور که در قبل بیان شد، عدد فازی مثلثی را با $\tilde{T}(a, b, c)$ نیز نشان می‌دهند (شکل ۸.۱).



شکل ۱۱.۱: نمودار تابع عضویت عدد فازی سهموی

(ب) \tilde{N} را یک عدد فازی نرمال نامیده و با $\tilde{N} = (m, \alpha, \beta)_N$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = e^{-x^2}$ در شکل (۹.۱).

(پ) \tilde{N} را یک عدد فازی سهموی نامیده و با $\tilde{N} = (m, \alpha, \beta)_P$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = \max\{0, 1 - x^2\}$ در شکل (۱۱.۱).

۷.۲.۱ حساب اعداد فازی و عملگرهای دو بعدی

در این بخش به کوتاهی، به موضوع حساب اعداد فازی می‌پردازیم و عملگرهای دو بعدی را برای اعداد فازی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید \tilde{M} و \tilde{N} دو عدد فازی و $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم عملگر * را برای اعداد فازی با \otimes نشان دهیم، با استفاده از اصل توسیع، حاصل $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر می‌شود

$$(\tilde{M} \otimes \tilde{N})(z) = \sup_{z=x*y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)].$$

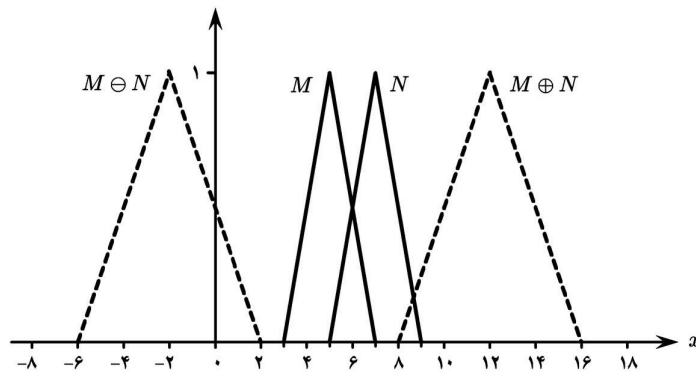
در حالت خاص برای چهار عمل اصلی، تعریف بالا به صورت‌های زیر در می‌آید

$$(\tilde{M} \oplus \tilde{N})(z) = \sup_{z=x+y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]$$

$$(\tilde{M} \ominus \tilde{N})(z) = \sup_{z=x-y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]$$

$$(\tilde{M} \otimes \tilde{N})(z) = \sup_{z=x*y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]$$

$$(\tilde{M} \oslash \tilde{N})(z) = \sup_{z=x/y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]$$



شکل ۱۲.۱: نمودار توابع عضویت اعداد فازی M و N و جمع و تفاضل آن‌ها در مثال ۱۲.۱

مثال ۱۲.۱. دو عدد فازی مثلثی M به صورت تقریباً ۵ و N به صورت تقریباً ۷ با توابع عضویت زیر در نظر بگیرید

$$\tilde{M}(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{2} & 3 \leq x < 5 \\ \frac{7-x}{2} & 5 \leq x < 7 \end{cases}$$

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{2} & 5 \leq x < 7 \\ \frac{9-x}{2} & 7 \leq x < 9 \end{cases}$$

جمع و تفاضل دو عدد فازی بالا، اعداد فازی با توابع عضویت زیر هستند (شکل ۱۲.۱)

$$(\tilde{M} \oplus \tilde{N})(x) = \begin{cases} \frac{x-8}{4} & 8 \leq x < 12 \\ \frac{16-x}{4} & 12 \leq x < 16 \end{cases}$$

$$(\tilde{M} \ominus \tilde{N})(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{4} & -6 \leq x < -2 \\ \frac{2-x}{4} & -2 \leq x < 2 \end{cases}$$

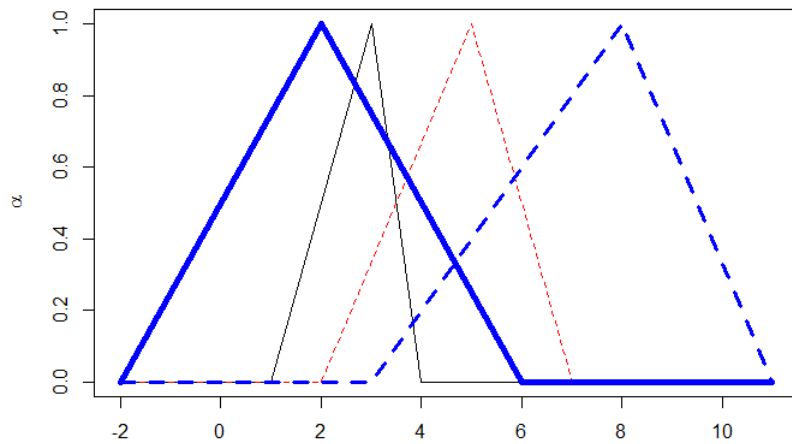
حساب اعداد فازی LR

برخی اعمال جبری در اعداد فازی LR ساده و دارای الگوی مشخص است که در این جا برخی روابط مهم و مورد استفاده را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۱. اگر $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\lambda \in R$ آن‌گاه

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, \lambda \alpha, \lambda \beta)_{LR} \quad \lambda > 0$$

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, -\lambda \beta, -\lambda \alpha)_{RL} \quad \lambda < 0$$



شکل ۱۳.۱: نمودار توابع عضویت اعداد فازی M (خط مشکی) و N (خط قرمز) و جمع (خط بریده آبی) و تفاضل (خط آبی) آن‌ها در مثال ۱۳.۱

نتیجه ۱.۱. اگر $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ آن‌گاه $\ominus \tilde{M} = (-m, \beta, \alpha)_{RL}$.

قضیه ۴.۱. اگر $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{N} = (n, \delta, \gamma)_{LR}$ ، آن‌گاه $\tilde{M} \oplus \tilde{N}$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = (m + n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

قضیه ۵.۱. اگر $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$ ، آن‌گاه $\tilde{M} \ominus \tilde{N}$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$\tilde{M} \ominus \tilde{N} = (m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

مثال ۱۳.۱. فرض کنید $\tilde{M} = (5, 3, 2)_T$ و $\tilde{N} = (3, 2, 1)_T$ ، آن‌گاه (شکل ۱۳.۱)

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = (8, 5, 3)_T \quad \tilde{M} \ominus \tilde{N} = (2, 4, 4)_T$$

ضمناً اگر \tilde{M} و \tilde{N} را به صورت $\tilde{T}(2, 5, 7)$ و $\tilde{T}(1, 3, 4)$ نمایش دهیم، آن‌گاه

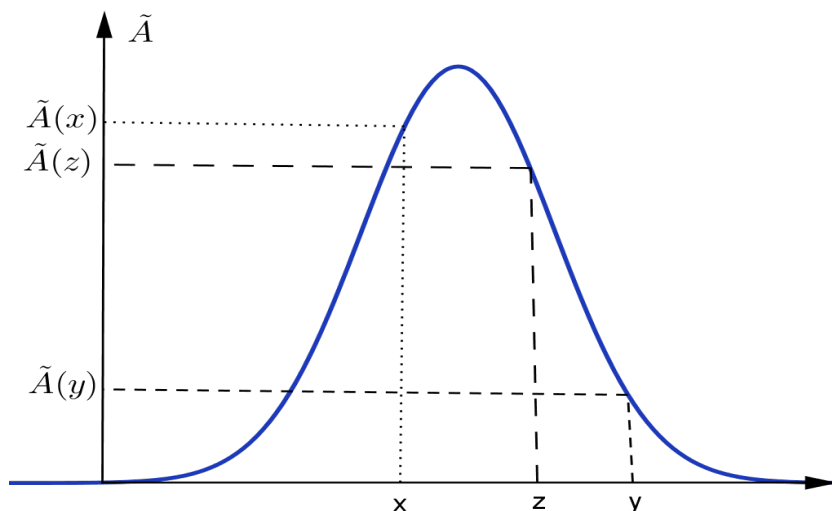
$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = \tilde{T}(3, 8, 11) \quad \tilde{M} \ominus \tilde{N} = \tilde{T}(-2, 2, 6)$$

برای ضرب و تقسیم روابط دقیقی وجود ندارند و تنها روابطی تقریبی پیشنهاد شده‌اند. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به دوبوا و پراد [۱۴] مراجعه کرد.

تعریف ۱۱.۱ (محدب بودن فازی). فرض کنید x و y دو نقطه روی محور اعداد حقیقی و $\lambda \in [0, 1]$ باشد. عدد فازی A را محدب گوییم هرگاه

$$\tilde{A}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(\tilde{A}(x), \tilde{A}(y))$$

برای روشن شدن موضوع در شکل ۱۴.۱ تابع \tilde{A} محدب است زیرا به ازای هر نقطه بین x و y مانند $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ که در آن $\lambda \in [0, 1]$ ، $\tilde{A}(z)$ از مینیمم مقدار $\tilde{A}(x)$ و $\tilde{A}(y)$ بزرگتر یا مساوی است.



شکل ۱۴.۱: تابع محدب فازی

۸.۲.۱ رتبه‌بندی اعداد فازی

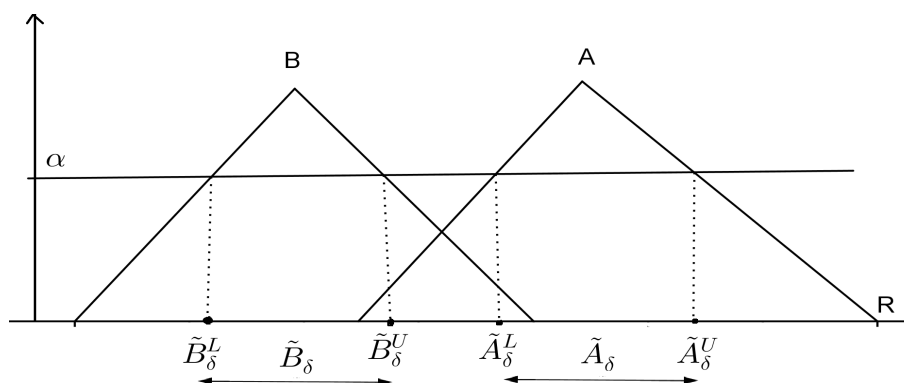
به دلیل قابلیت اعداد فازی در نشان دادن ارزش‌های نادقیق، رتبه‌بندی این اعداد دارای کاربردهای وسیعی در علوم مختلف است. در زمینه رتبه‌بندی اعداد فازی تاکنون مدل‌های بسیاری ارائه شده‌اند که هر یک بر اساس معیارها و ویژگی‌های خاصی از اعداد فازی این رتبه‌بندی را انجام می‌دهند. در این پایان‌نامه از معیار D که در ادامه به آن اشاره خواهد شد، استفاده می‌کنیم. برای توضیحات و ویژگی‌های بیشتر این معیار به یوآن [۳۲] مراجعه کنید.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_C(\mathbb{R})$ و

$$\Delta_{\tilde{A}\tilde{B}} = \int_{\tilde{A}_\delta^U > \tilde{B}_\delta^L} (\tilde{A}_\delta^U - \tilde{B}_\delta^L) d\delta + \int_{\tilde{A}_\delta^L > \tilde{B}_\delta^U} (\tilde{A}_\delta^L - \tilde{B}_\delta^U) d\delta \quad (5.1)$$

که در آن $\delta \in (0, 1)$ ، $\tilde{A}_\delta^U = \sup\{x | x \in \tilde{A}_\delta\}$ و $\tilde{A}_\delta^L = \inf\{x | x \in \tilde{A}_\delta\}$ (شکل ۱۵.۱). در این صورت درجه بزرگی A از B به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$D(\tilde{A} \succ \tilde{B}) = \frac{\Delta_{\tilde{A}\tilde{B}}}{\Delta_{\tilde{A}\tilde{B}} + \Delta_{\tilde{B}\tilde{A}}} \quad (6.1)$$



شکل ۱۵.۱: نمایشی برای تعریف ۱۲.۱

۳.۱ مروری بر مفاهیم اولیه آزمون فرضیه

آزمون فرضیه آماری برای تصمیم‌گیری در مسائل کاربردی بسیار حائز اهمیت است. در بسیاری از زمینه‌های فعالیت بشری، اغلب لازم است تا تصمیم گرفته شود که کدام یک از دو حالت ممکن بالفعل درست است؟ محققان علوم، بررسی‌کنندگان کنترل کیفیت کالاهای ساخته‌شده، محققان بازاریابی، تصمیم‌گیرندگان حکومتی، محققان علوم تجربی و بسیاری دیگر از این قبیل، اغلب نیازمند تصمیم‌گیری در مورد فرضیه‌ی مورد نظر خود هستند. برای مثال: آیا یک محموله از بلبرینگ‌های ساخته‌شده‌ی آماده‌ی تحویل در کارخانه در سطح استاندارد هست یا نه؟ گاهی یافته‌ی یک متغیر تصادفی X می‌تواند در افزایش انتخاب ما برای تصمیم‌گیری صحیح به کار رود. چگونه این کار را انجام می‌دهیم؟ این یکی از مسائل مهم و کلاسیک در آمار ریاضی است که از آن با نام آزمون فرضیه یاد می‌کنیم. در این بخش بر حسب نیاز به تعاریف اساسی و مفاهیم لازم در آزمون فرضیه‌های کلاسیک می‌پردازیم. با توجه به هدف اصلی پایان‌نامه به معرفی p -مقدار در مساله آزمون فرضیه‌های آماری اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱۳.۱ (آزمون آماری). برای آزمون یک فرضیه آماری نظیر H یک آزمایش تصادفی را انجام می‌دهیم (جمع‌آوری داده‌ها). اگر نتیجه‌ی آزمایش تفاوت معنی‌داری از آنچه که انتظار داریم داشته باشد زمانی که فرضیه H صحیح فرض شود، H را رد می‌کنیم و در غیر اینصورت H را می‌پذیریم. پذیرفتن یک فرضیه در یک آزمون آماری بدین معنی نیست که آن فرضیه به بیان دقیقی اثبات شده‌است. در واقع در این‌جا ما به‌جای این‌که بگوییم فرضیه رد نشده از لفظ پذیرفتن فرضیه استفاده خواهیم کرد.

فرض کنید $X = (X_1, \dots, X_n)$ یک نمونه تصادفی با مقادیر مشاهده شده $x = (x_1, \dots, x_n)$ باشد که X_i دارای تابع چگالی احتمال $f(x_i; \theta)$ ، $i = 1, \dots, n$ با پارامتر نامعلوم $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ باشد. مساله آزمون فرضیه‌های آماری، تصمیم‌گیری برای پذیرش (یا رد) فرضیه $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta$ در برابر $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0$ بر اساس نمونه تصادفی X است. معمولاً فرضیه‌های آماری به یکی از

مروری بر مفاهیم اولیه آزمون فرضیه ۲۱

صورت‌های جدول ۱.۱ هستند که θ_0 و θ_1 دو عدد معلوم بوده و به ترتیب مرز فرضیه صفر و مرز فرضیه جایگزین نامیده می‌شوند.

آزمون Φ آزمون در سطح $\alpha \in [0, 1]$ نامیده می‌شود، اگر $\alpha_\Phi \leq \alpha$ که در آن $\alpha_\Phi = \sup_{\theta \in \Theta} P_\theta(RH_0)$ و RH_0 به معنای رد فرضیه H_0 است. اگر $\alpha_\Phi = \alpha$ باشد، آزمون در اندازه α نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱ (انواع آزمون‌های آماری). اگر فرض کنیم θ مشخصه‌ای از جامعه و θ_0 یک عدد (ادعای محقق) باشد، برخی آزمون‌های آماری به صورت جدول ۱.۱ هستند.

جدول ۱.۱: صورت کلی فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 کلاسیک

آزمون	فرضیه	فرضیه‌های آماری کلاسیک	ناحیه بحرانی
۱	H_0	$\theta = \theta_0$	$T \leq t_l$
	H_1	$(\theta_0 > \theta_1) \theta = \theta_1$	
۲	H_0	$\theta = \theta_0$	$T \geq t_r$
	H_1	$(\theta_0 < \theta_1) \theta = \theta_1$	
۳	H_0	$\theta \geq \theta_0$	$T \leq t_l$
	H_1	$\theta < \theta_0$	
۴	H_0	$\theta \leq \theta_0$	$T \geq t_r$
	H_1	$\theta > \theta_0$	
۵	H_0	$\theta = \theta_0$	$T \notin (t_1, t_2)$
	H_1	$\theta \neq \theta_0$	

تعریف ۱۵.۱ (ناحیه رد). در آزمون غیرتصادفی، فضای مقادیر ممکن برای آماره آزمون T به دو ناحیه رد H_0 (ناحیه بحرانی) و ناحیه پذیرش H_0 (مکمل ناحیه بحرانی) تقسیم می‌شود. با توجه به فرضیه‌های H_0 و H_1 معمولاً ناحیه بحرانی به یکی از سه صورت زیر می‌باشد (جدول ۱.۱)

$$(۷.۱) \quad \text{الف) } T \leq t_l \quad \text{ب) } T \geq t_r \quad \text{ج) } T \notin (t_1, t_2)$$

که در آن t_l یا t_r ، یا t_1 و t_2 چندک‌های توزیع T است (با مشخص شدن سطح معناداری آزمون مقادیر عددی آن‌ها تعیین می‌گردد)، به طوری که

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta} P_\theta\{RH_0\}.$$

در مورد (ج) معمولاً t_1 و t_2 به روش دم‌های برابر به دست می‌آیند، به طوری که

$$P_\theta(T \leq t_1) = P_\theta(T \geq t_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

اگر مقدار $t = t(x)$ در ناحیه بحرانی قرار بگیرد، فرضیه H_0 رد می‌شود [۱۶].

تعریف ۱۶.۱ (خاصیت نسبت درست‌نمایی). فرض کنید خانواده توابع چگالی $\{f_{\theta}(x); \theta \in \Theta\}$ مفروض باشد که $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ و به ازای هر $\theta_0 < \theta_1$ که $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ و $f_{\theta_0} \neq f_{\theta_1}$ باشد. گوییم خانواده توابع چگالی‌های $\{f_{\theta}(x); \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ دارای خاصیت MLR نسبت به آماره $T(X)$ است، هرگاه $\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}$ به ازای هر $\theta_0 < \theta_1$ تابعی غیرنزولی از $T(X)$ باشد.

مثال ۱۴.۱. فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد. برای $\theta_0 < \theta_1$ نسبت

$$\begin{aligned} \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} &= \frac{(\sqrt{\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i - \theta_1)^2}}{(\sqrt{\pi})^{-n} e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i - \theta_0)^2}} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum(x_i - \theta_1)^2 - \sum(x_i - \theta_0)^2\right]\right\} \\ &= e^{(\theta_1 - \theta_0)\sum x_i + \frac{n}{2}(\theta_0^2 - \theta_1^2)} \end{aligned}$$

تابعی صعودی از $\sum_{i=1}^n x_i$ (یا \bar{x}) است. بنابراین خانواده توزیع‌های $\{N(\theta, 1) : \theta \in \mathbb{R}\}$ دارای خاصیت MLR در $\bar{X} = T(X)$ است.

در آزمون فرضیه‌های آماری، چندین دیدگاه آماری از جمله نیمن-پیرسون، بیزی، مینیماکس، نسبت درست‌نمایی و p -مقدار در تصمیم‌گیری برای رد یا پذیرش فرضیه صفر وجود دارند. در این پایان‌نامه برای تصمیم‌گیری از روش p -مقدار استفاده شده است که در ادامه به معرفی و شرح آن می‌پردازیم.

۱.۳.۱ p -مقدار

برای تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرضیه صفر، باید ملاک آماری تعیین شود که در این پایان‌نامه، ملاک ما همان مقدار احتمال^۸ یا p -مقدار است. p -مقدار واژه‌ایست که از بیش از ربع قرن پیش متداول شده است. به گفته‌ای واژه p -value را برای نخستین بار در سال ۱۹۴۳، دمینگ^۹ در کتاب خود به کار برده است. برخی مباحث زیر برگرفته از [۱] هستند.

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید $X \sim P_{\theta}$ ، $\theta \in \Theta$ و C کلاسی از آزمون‌ها (توابع آزمون) برای آزمون فرضیه $H_0 : \theta \in \Theta_0$ در مقابل فرضیه $H_1 : \theta \in \Theta_1$ باشد. در این صورت کلاس C را کامل^{۱۰} گوییم، هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \exists \varphi_{\alpha} \in C \quad \text{به طوری که} \quad \alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} E_{\theta}(\varphi_{\alpha}(X)).$$

به عبارت دیگر یک کلاس از آزمون‌ها را کامل گوییم، هرگاه برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ حداقل یک آزمون در اندازه α در این کلاس موجود باشد.

^۸Probability Value

^۹Deming

^{۱۰}Complete

تعریف ۱۸.۱. فرض کنید $X \sim P_\theta$ ، $\theta \in \Theta$ و C کلاسی از آزمون‌ها برای آزمون فرضیه $H_0: \theta \in \Theta_0$ در مقابل فرضیه $H_1: \theta \in \Theta_1$ باشد. در این صورت کلاس C را تو در تو^{۱۱} می‌گوییم، هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$\alpha_1 < \alpha_2, \varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2} \in C \Rightarrow \forall x \in S_X \varphi_{\alpha_1}(x) \leq \varphi_{\alpha_2}(x).$$

که در آن S_X تکیه‌گاه متغیر تصادفی X است. در حالت خاص، اگر C کلاسی از آزمون‌های غیر تصادفی باشد، آن‌گاه به‌جای شرط فوق به‌طور معادل می‌توان نوشت: $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow R_{\alpha_1} \subseteq R_{\alpha_2}$ که در آن R_α ناحیه رد آزمون در اندازه α است. ثابت می‌شود کلاس آزمون‌های MP که در آن توزیع $\frac{f_1(x)}{f_0(x)}$ تحت فرضیه ساده H_0 پیوسته است همواره تو در تو خواهد بود. اما، اگر توزیع $\frac{f_1(x)}{f_0(x)}$ تحت فرضیه H_0 پیوسته نباشد لزومی ندارد که حتی کلاس آزمون‌های MP نیز تو در تو باشد. اما، در چارچوب لم نیمن-پیرسن همواره زیرکلاسی از آزمون‌های MP وجود دارد که تو در تو باشد [۲۷].

تعریف ۱۹.۱. فرض کنید $X \sim P_\theta$ ، $\theta \in \Theta$ و C کلاسی از آزمون‌های تو در تو برای فرضیه $H_0: \theta \in \Theta_0$ در مقابل فرضیه $H_1: \theta \in \Theta_1$ باشد، آن‌گاه p -مقدار به‌ازای مقدار مشاهده‌شده x بر اساس کلاس C عبارت است از:

$$\hat{p}(x) = \inf\{\alpha | E_\theta(\varphi(x)) \leq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0, \varphi(x) = 1, \varphi \in C\}.$$

و در حالتی که برای مشاهده x ، مجموعه

$$A = \{\alpha | E_\theta(\varphi(X)) \leq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0, \varphi(x) = 1, \varphi \in C\}. \quad (۸.۱)$$

تهی باشد تعریف می‌کنیم:

$$\hat{p}(x) = 1$$

به عبارت دیگر، p -مقدار کوچک‌ترین سطح آزمونی است که در آن مشاهده حاصل از نمونه با احتمال یک منجر به رد فرضیه صفر می‌شود.

ملاحظه ۳.۱. با توجه به این‌که اندازه آزمون کوچک‌ترین سطح آزمون است، اگر به‌جای سطح آزمون از اندازه آزمون جهت محاسبه p -مقدار استفاده شود تغییری در p -مقدار حاصل به‌وجود نمی‌آید. به عبارت دیگر، p -مقدار را به‌طور معادل می‌توان بر اساس اندازه آزمون تعریف کرد، یعنی

$$\hat{p}(x) = \inf\{\alpha | \alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta(\varphi_\alpha(x)) = 1, \varphi_\alpha \in C\}.$$

ملاحظه ۴.۱. گرچه در تعریف p -مقدار، کامل نبودن کلاس آزمون‌ها اشکالی منطقی (جهت ارایه نتیجه آزمون) ایجاد نمی‌کند، اما، منطقی‌تر این است که برای محاسبه p -مقدار، کلاس آزمون‌ها کامل باشد. علاوه بر این، اگر کلاس آزمون‌ها کامل باشد، آن‌گاه مجموعه A در رابطه ۸.۱ هیچ‌گاه تهی نخواهد بود.

^{۱۱}Nested

ملاحظه ۵.۱. پرسش اساسی که مطرح می‌شود این است که چرا تو در تو بودن کلاس آزمون‌ها برای تعریف p -مقدار الزامی است. در جواب می‌توان این‌گونه بیان کرد: به صرف این که p -مقدار کوچک‌ترین سطح آزمون است که در آن مشاهده حاصل از نمونه با احتمال یک منجر به رد فرضیه صفر می‌شود، نمی‌توان مطمئن بود که برای یک سطح آزمون بزرگ‌تر از p -مقدار نیز الزاماً فرضیه صفر با احتمال یک رد شود. اما تو در تو بودن کلاس آزمون‌ها این مطلب را تضمین می‌کند. برای درک بهتر موضوع به مثال زیر توجه کنید. در این مثال، تناقضی که عدم تو در تو بودن کلاس آزمون‌ها موجب می‌شود به خوبی نشان داده شده است.

مثال ۱۵.۱. فرض کنید X متغیر تصادفی باشد که مقادیر ۱، ۲ و ۳ را با احتمال‌های $0/85$ ، $0/1$ و $0/05$ تحت فرضیه H_0 و احتمال‌های $0/7$ ، $0/2$ و $0/1$ را تحت فرضیه H_1 اختیار می‌کند. بر اساس کلیه آزمون‌های MP برای مشاهده $x = 3$ ، p -مقدار آزمون عبارت است از

$$\hat{p}(3) = \inf\{\alpha | \varphi_\alpha(3) = 1\} = 0/05$$

در نتیجه، بر مبنای p -مقدار از آن جا که $0/1 < \hat{p}(3)$ با مشاهده $x = 3$ فرضیه صفر در سطح معنی‌داری $0/1$ رد می‌شود، در حالی که بر مبنای آزمون MP می

$$\varphi_{0/1}(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ 0 & x = 1, 3 \end{cases}$$

مشاهده $x = 3$ در سطح معنی‌داری $0/1$ منجر به رد فرضیه صفر نمی‌شود.

۲.۳.۱ p -مقدار به عنوان معیار پشتیبانی داده‌ها از فرضیه صفر

با توجه به این که رد فرضیه صفر در سطح معنی‌داری کوچک‌تر حاکی از شواهد متقاعدکننده‌تری بر نادرستی فرضیه صفر می‌باشد، بنابراین p -مقدار کوچک‌تر حاکی از شواهد قوی‌تری بر نادرستی فرضیه صفر خواهد بود. لذا می‌توان p -مقدار را به عنوان معیاری برای پشتیبانی داده‌ها از فرضیه صفر در نظر گرفت (برای شرح بیشتر به مرجع [۱۲] مراجعه کنید).

مثال ۱۶.۱. در یک فرایند تولید لامپ تلوزیون میلیون‌ها لامپ را با میانگین طول عمر 1200 ساعت و انحراف معیار 200 ساعت تولید کرده‌اند. فرایند جدیدی که از سوی بخش مهندسی به عنوان فرایند بهتر توصیه شده، نمونه‌ای شامل 100 لامپ با میانگین طول عمر 1240 را تولید می‌کند. می‌خواهیم با میزان $\alpha = 0/05$ این ادعا را آزمون کنیم.

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \mu \text{ برابر } 1200 \text{ است} \\ \tilde{H}_1: \mu \text{ بزرگتر از } 1200 \text{ است} \end{cases}$$

می‌دانیم برآورد پارامتر μ آماره \bar{X} است.

حال یک ناحیه بحرانی برای رد پیدا می‌کنیم که به صورت $\bar{X} > c$ است که به α بستگی دارد.

$$\alpha = P(RH_0 | H_0)$$

$$0.05 = P(\bar{X} > c | RH_0)$$

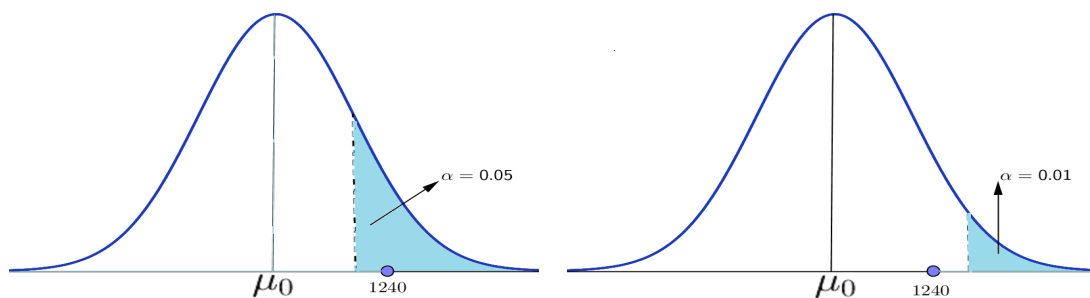
$$\bar{X} \sim N(1200, 400)$$

$$0.05 = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c - 1200}{20}\right) = P\left(Z \leq \frac{c - 1200}{20}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c - 1200}{20}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{c - 1200}{20}\right) = 0.95$$

$$\frac{c - 1200}{20} = 1.65 \implies c = 1233$$

بنابراین ناحیه بحرانی با میزان 0.05 می‌شود $\bar{X} > 1233$. چون یافته \bar{X} یعنی عدد $\bar{x} = 1240$ در ناحیه بحرانی می‌افتد، پس فرضیه صفر را با میزان 0.05 رد می‌کنیم. ناحیه بحرانی با میزان 0.01 می‌شود $\bar{X} > 1246$ که یافته ما در ناحیه بحرانی قرار نمی‌گیرد بنابراین فرضیه صفر با میزان 0.01 رد نمی‌شود (شکل ۱۶.۱).



شکل ۱۶.۱: ناحیه بحرانی با $\alpha = 0.05$ و $\alpha = 0.01$

۳.۳.۱ تعریف p -مقدار

تعریف ۲۰.۱. [۲۰] یک خانواده از توابع آزمون φ_α برای $0 < \alpha < 1$ ، در نظر بگیرید، به طوری که تابع آزمون φ_α در سطح α است. فرض کنید دنباله توابع آزمون $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in (0,1)}$ را طوری در نظر بگیرید که برای هر $\alpha_1 < \alpha_2$ اگر $\varphi_{\alpha_1}(x) = 1$ آنگاه $\varphi_{\alpha_2}(x) = 1$. در این صورت p -مقدار (سطح معنی‌داری مشاهده‌شده) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$p\text{-مقدار} = \inf\{\alpha : \varphi_\alpha(x) = 1\}.$$

به عبارتی p -مقدار، کمترین مقداری از α (میزان یا سطح آزمون) است، که یافته آماره آزمون ممکن است موجب رد فرضیه H_0 شود.

۴.۳.۱. p -مقدار

ملاحظه ۶.۱. فرض کنید T آماره آزمون و t یافته آن باشد. با تعریف ۲۰.۱، p -مقدار برای سه ناحیه بحرانی که در رابطه (۷.۱) اشاره شد و برای سه آزمون معمول، به صورت زیر به دست می‌آید

الف: آزمون یکسویی چپ:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \implies p\text{-مقدار} = P_{\theta_0}(T \leq t)$$

ب: آزمون یکسویی راست:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \implies p\text{-مقدار} = P_{\theta_0}(T \geq t)$$

ج: آزمون دوسویی:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \implies p\text{-مقدار} = \begin{cases} 2P_{\theta_0}(T \geq t) & t \geq m \\ 2P_{\theta_0}(T \leq t) & t \leq m \end{cases}$$

که در آن t مقدار مشاهده شده آماره آزمون T ، θ_0 نقطه مرزی فرضیه H_0 و m میانه توزیع T است.

ملاحظه ۷.۱. در مساله آزمون فرضیه‌ها p -مقدار تابعی است از

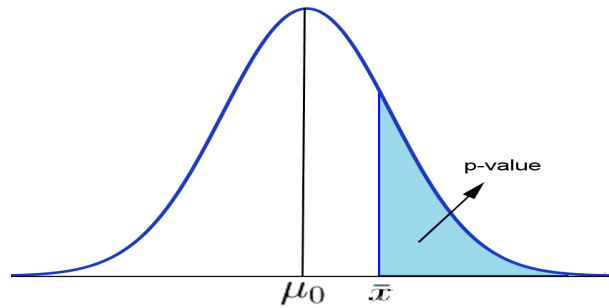
- نقطه مرزی فرضیه H_0 ،
- توزیع آماره آزمون،
- مقدار مشاهده شده توزیع آماره آزمون (t) و
- نوع فرضیه H_1 .

برای آزمون زیر داریم (۱۷.۱)

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

$$p\text{-مقدار} = P(\bar{X} > \bar{x} | \mu = \mu_0)$$

$$p\text{-مقدار} = P(\bar{X} > ۱۲۴۰ | \mu = ۱۲۰۰) = ۱ - \Phi(۲) = ۰/۰۲۲۸.$$

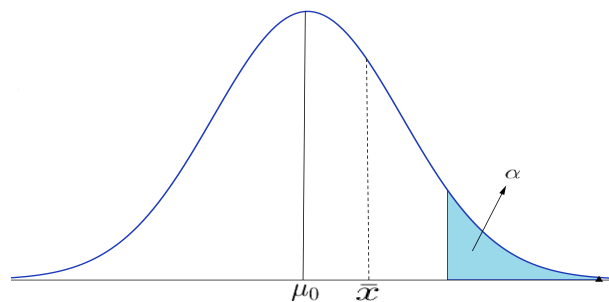


شکل ۱۷.۱: نمایش p -مقدار

۵.۳.۱ ملاک‌های تصمیم p -مقدار

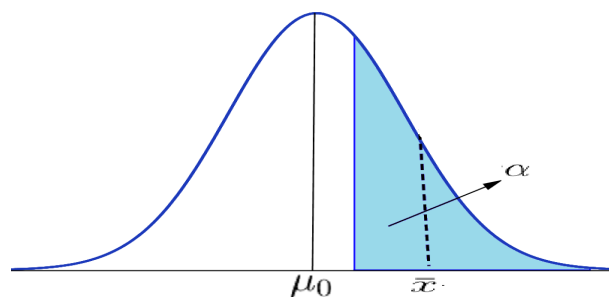
تصمیم در مورد فرضیه‌های مورد آزمون، بر اساس مقایسه p -مقدار مشاهده شده با α یعنی سطح معنی‌داری آزمون اتخاذ می‌شود. اگر p -مقدار کمتر از α باشد، در H_0 سطح معنی‌داری α رد می‌شود و در غیر این صورت رد نمی‌شود (پذیرفته می‌شود).

$$H_0 \text{ رد نمی‌شود} \Rightarrow p \geq \alpha - \text{مقدار}$$



شکل ۱۸.۱: نمایش H_0 رد نمی‌شود

$$H_0 \text{ رد می‌شود} \Rightarrow p < \alpha - \text{مقدار}$$



شکل ۱۹.۱: نمایش H_0 رد می‌شود

مثال ۱۷.۱. تولید کننده باطری‌های ۶ ولتی می‌گوید طول عمر آن‌ها دارای توزیع $N(۵۵, ۱۰۰)$ است. معدل طول عمر ۲۵ عدد از این باطری‌ها ۵۰ ساعت بوده است. آیا گفته تولید کننده را با میزان $\alpha = ۰/۰۵$ می‌پذیرید؟

$$\begin{cases} H_0 : \mu = ۵۵ \\ H_1 : \mu < ۵۵ \end{cases}$$

$$\bar{X} \sim N(۵۵, ۴), \bar{x} = ۵۰, \mu = ۵۵$$

$$\text{مقدار} = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{۵۰ - ۵۵}{۲}\right) = P(Z \leq ۲/۵) = ۰/۰۰۶۲$$

چون p - مقدار از $۰/۰۵$ کمتر است، فرض صفر را با میزان $۰/۰۵$ حتی $۰/۰۱$ رد می‌کنیم.

مثال ۱۸.۱. رئیس یک کارخانه ساعت سازی می‌گوید روزانه به‌طور متوسط ۵ عدد ساعت معیوب در میان ساعت‌های تولید شده یافت می‌شود. در یکی از روزها بر حسب تصادف ۱۰ ساعت معیوب دیده شده‌اند. آیا گفته رییس کارخانه با میزان $\alpha = ۰/۰۵$ پذیرفته می‌شود؟

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = ۵ \\ H_1 : \lambda \neq ۵ \end{cases}$$

تعداد ساعت‌های معیوب در روز یک متغیر تصادفی پواسون X با پارامتر λ است. X در حکم برآوردگر نا اریب λ است. بنابراین X را به عنوان آماره آزمون اختیار می‌کنیم و p - مقدار را با فرض اینکه $\lambda = ۵$ درست باشد می‌یابیم.

$$\text{مقدار} - p = ۲ \min\{P(X \leq ۱۰), P(X \geq ۱۰)\}$$

$$P(X \leq ۱۰) = ۰/۹۸۶۳$$

$$P(X \leq ۹) = ۱ - ۰/۹۶۸۲ = ۰/۰۳۱۸$$

$$\text{مقدار} = ۲ \min\{۰/۹۸۶۳, ۰/۰۳۱۸\} = ۰/۰۶۳۶$$

چون p - مقدار از $۰/۰۵$ بیشتر است، گفته رئیس کارخانه را با میزان $۰/۰۵$ رد نمی‌کنیم.

ملاحظه ۸.۱. ۱ - محاسبه p - مقدار در آزمون‌های دوسویی در توزیع‌های گسسته تقریبی می‌باشد. زیرا در توزیع‌های گسسته مقدار احتمال در یک نقطه موجود است و با استفاده از این فرمول برای محاسبه p - مقدار ممکن است با مشکل روبرو شویم.

۲ - در مواردی که مقدار p مربوط به آزمون‌های F یا t باشد، آنرا با $prob - f$ یا $prob - t$ نشان می‌دهند.

۶.۳.۱ مزایای p -مقدار

مورد استفاده اولیه و اصلی p -مقدار این است که محقق را از مراجعه به جدول بی نیاز می‌کند و در واقع با توجه به ملاک‌های تصمیم p -مقدار، تصمیم‌گیری می‌شود. یکی دیگر از دلایل این که p -مقدار در آمار کاربردی به‌طور فزاینده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد، این است که نیازی به تعیین مقدار α در یک سطح خاص داریم و به جای وارد کردن یک چنین عنصری اختیاری، اغلب رایج است فقط مقدار احتمالی را ذکر می‌کنند که این امکان را در اختیار محقق قرار دهیم که خودش درباره فرضیه H_0 قضاوت کند.

۷.۳.۱ معایب p -مقدار

۱- p -مقدار به H_1 بستگی ندارد.

اگر X_1, X_2, \dots, X_n دارای توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ و $n = 1, \sigma = 1$ باشد، داریم:

$$H_0 : \mu = 0, H_1 : \mu = 1, \bar{X} = 1/5 \Rightarrow \text{مقدار } -p = 0/05$$

$$H_0 : \mu = 0, H_1 : \mu = 1, \bar{X} = 1/5 \Rightarrow \text{مقدار } -p = 0/05$$

مشاهده می‌شود که p -مقدار به H_1 بستگی ندارد.

۲- p -مقدار نسبت به H_0 و H_1 متقارن نیست.

$$\begin{cases} H_0 : A \\ H_1 : B \end{cases} \quad \text{مقدار } -p = v_1$$

$$\begin{cases} H_0 : B \\ H_1 : A \end{cases} \quad \text{مقدار } -p = v_2$$

در حالت دوم انتظار داریم که $v_2 = 1 - v_1$ اما چنین نیست.

برای مثال در توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = 1, \sigma = 1$ داریم:

$$H_0 : \mu = 0, H_1 : \mu = 1, \bar{X} = 1/5 \Rightarrow v_1 = 0/05$$

$$H_0 : \mu = 1, H_1 : \mu = 0, \bar{X} = 1/5 \Rightarrow \text{مقدار } -p = 0/69$$

$$v_2 \neq 1 - 0/05$$

۳- p -مقدار در اصل درست‌نمایی صدق نمی‌کند.

و مشابه این موارد. برای اطلاعات بیشتر به [۱] مراجعه کنید.

۸.۳.۱ اشتباهات متداول درباره p - مقدار

۱. همواره بین α و p - مقدار اشتباه گرفته می‌شود، p - مقدار همان α نیست، یا سطح معنی‌داری مقدار ثابت از پیش تعیین شده‌ای است که توسط محقق، قبل از جمع آوری داده‌ها و بر اساس حساسیت موضوع، منابع و شرایط انتخاب می‌شود ولی p - مقدار یا احتمال معنی‌داری متغیری است که پس از جمع آوری بر اساس شاخص آزمون، تعداد نمونه و توزیع احتمالی داده‌ها محاسبه می‌شود. در واقع α یک نقطه برش برای p - مقدار تعیین می‌کند به طوری که مقادیر کمتر از α برای p - مقدار، معنی‌دار بودن رابطه یا اختلاف را نشان می‌دهد.
 ۲. p - مقدار احتمال صحیح بودن فرضیه صفر یا غلط بودن فرضیه مقابل نیست. به عبارت دیگر از دیدگاه مکتب فراوانی نمی‌توان برای صحیح یا غلط بودن یک فرضیه، احتمالی قائل شد و این موضوع را در مکتب بیزی می‌توان دنبال کرد.
 ۳. p - مقدار این احتمال نیست که تا چه حد یافته‌ها حاصل شانس هستند، و این موضوع متفاوت از آن است که p - مقدار شانس به دست آوردن چنین نتیجه‌ای در داده‌ها است اگر فرضیه صفر صحیح باشد.
 ۴. p - مقدار این احتمال را نتیجه نمی‌دهد که با تکرار مطالعه همان یافته‌ها حاصل خواهند شد. به عبارت دیگر، p - مقدار تنها بر مبنای نتایج یک مطالعه محاسبه می‌شود و این احتمال تکرارپذیر نیست و تکرارپذیری نتایج را تضمین نمی‌کند.
 ۵. p - مقدار اندازه اثر (اندازه اختلاف یا رابطه) را نشان نمی‌دهد. اگر چه هر دو معیار با هم تغییر می‌کنند، ولی p - مقدار علاوه بر اندازه اختلاف یا رابطه به حجم نمونه هم بستگی دارد، به طوری که برای موارد زیر تناقض وجود دارد: زمانی که اندازه اثر بزرگ باشد ولی حجم نمونه کوچک، ممکن است اختلاف یا رابطه مورد مطالعه معنی‌دار نشود و برعکس.
- شایان ذکر است که برآورد نهایی یک آزمون معنی‌داری، p - مقدار است و نه رد یا پذیرش فرضیه صفر. در نتیجه ممکن است برای داده‌های حاصل از یک مطالعه واحد با تغییر مورد ادعا در فرضیه، مقادیر مختلفی برای p - مقدار به دست آیند که البته این موضوع منطقی است چون فرضیات مختلفی بررسی می‌شوند و برای آن‌ها p - مقدارهای مختلفی به دست می‌آیند. بنابراین نیاز است به عنوان احتمالی از سازگاری داده‌ها با فرضیه صفر و بر اساس مبانی نظری و میزان اعتقاد افراد خبره در زمینه تعبیر شود.
- در لم زیر، رابطه بین p - مقدار و نقطه مرزی فرضیه H_0 را ارائه می‌دهیم، که برای تعمیم p - مقدار پذیرفته شده در آزمون فرضیه‌های فازی مورد نیاز است.
- لم ۱.۱.** فرض کنید $X \sim \{f_\theta, \theta \in \Theta\}$ که دارای نسبت درستنمایی یکنوا در $T(x)$ است. θ_0 را نقطه مرزی فرضیه H_0 در نظر بگیرید، در این صورت برای آزمون‌های به شکل (۷.۱ الف)، (۷.۱ ب) و (۷.۱ ج) داریم

(الف.۱) p -مقدار یک تابع اکیداً نزولی از θ_0 است.

(ب.۱) p -مقدار یک تابع اکیداً صعودی از θ_0 است.

(ج.۱) p -مقدار یک تابع اکیداً صعودی از θ_0 است وقتی که t بزرگتر از میانه‌ی توزیع T باشد، و در غیر این صورت یک تابع اکیداً نزولی از θ_0 است.

برهان. با فرض این که هر آزمون به شکل (الف.۷.۱) دارای یک تابع توان اکیدا نزولی است، داریم

$$\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow P_{\theta_1}(T \leq t_l) > P_{\theta_2}(T \leq t_l)$$

اما t_l به مقدار α وابسته است و می‌تواند هر مقدار از بازه آماره آزمون باشد. بنابراین برای هر مقدار t داریم

$$\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow P_{\theta_1}(T \leq t) > P_{\theta_2}(T \leq t).$$

□

فصل ۲

آزمون فرضیه در محیط فازی بر پایه p - مقدار

در این فصل به بررسی سه مساله

- آزمون فرضیه‌های دقیق با داده‌های نادقیق
- آزمون فرضیه‌های نادقیق با داده‌های دقیق
- آزمون فرضیه‌های نادقیق با داده‌های نادقیق

می‌پردازیم. در هر مورد ابتدا ناحیه‌ی بحرانی و p -مقدار را بررسی و سپس با قضیه‌ای به بحث درباره‌ی هر کدام از آزمون‌ها پرداخته و تصمیم‌گیری صورت می‌گیرد. برخی مطالب این فصل برگرفته از [۳] است.

۱.۲ آزمون فرضیه‌های دقیق با داده‌های نادقیق

گاهی با موضوع آزمون فرضیه بر پایه داده‌های نادقیق (فازی) مواجه می‌شویم. برای مثال در بررسی درآمد ماهیانه خانوارهای یک جامعه، می‌خواهیم آزمون کنیم این فرضیه که μ ، متوسط درآمد ماهیانه خانوارها، بیش از ۸۰۰ هزار تومان است قابل قبول می‌باشد یا نه؟ حال فرض کنید

که نتایج مربوط به درآمد خانوارهای نمونه به صورت «تقریباً ۶۰۰ هزار تومان»، «حدوداً ۷۰۰ هزار تومان»، «بیش از ۸۰۰ هزار تومان ولی نه خیلی بیش از ۹۰۰ هزار تومان» و مشابه این گزاره‌ها باشد. همچنین در مثالی دیگر برای بررسی طول عمر لامپ‌های تولیدی یک کارخانه، نتایج اندازه طول عمر مفید لامپ‌ها به صورت «حدوداً ۱۳۰۰ ساعت»، «تقریباً ۱۲۸۷ ساعت» و مشابه ثبت شده است. این‌ها نمونه‌هایی از مساله آزمون فرضیه بر پایه داده‌های نادقیق هستند که در این‌جا بر اساس داده‌های نادقیق مثلثی و همچنین داده‌های نادقیق نرمال [۷] مطرح می‌کنیم.

۱.۱.۲ آزمون فرضیه‌های دقیق با داده‌های نادقیق مثلثی

فرض کنید مشاهدات استفاده‌شده در آزمون فرضیه دقیق H_0 در مقابل فرضیه دقیق H_1 ، دارای ابهام بوده و به صورت $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in F_c(\mathbb{R})$ باشند. در این حالت با استفاده از اصل گسترش، می‌توان گفت که مقدار مشاهده‌شده‌ی آماره‌ی آزمون یک مجموعه فازی به صورت $t = h(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ است. در این حالت p -مقدار به عنوان تابعی از t خود نیز به یک مجموعه فازی تبدیل می‌شود که آن را به اختصار با \tilde{P} نشان می‌دهیم. در قضیه ۱.۲، δ -برش‌های p -مقدار فازی برای سه نوع ناحیه بحرانی مطرح‌شده در (۷.۱)، ارائه شده است.

قضیه ۱.۲. [۳] فرض کنید $X \sim f_\theta$ و $\theta \in \Theta$. در مساله آزمون فرضیه‌ها با داده‌های فازی، δ -برش‌های p -مقدار فازی در سه حالت مطرح‌شده در رابطه (۷.۱) به صورت زیر می‌باشند [۱۶]

$$\tilde{P}_\delta = [P_{\theta_0}(T \leq t_1(\delta)), P_{\theta_0}(T \leq t_2(\delta))] \quad (۱۱.۲)$$

$$\tilde{P}_\delta = [P_{\theta_0}(T \geq t_2(\delta)), P_{\theta_0}(T \geq t_1(\delta))] \quad (ب۱.۲)$$

$$\tilde{P}_\delta = \begin{cases} [2P_{\theta_0}(T \geq t_2(\delta)), 2P_{\theta_0}(T \geq t_1(\delta))] & t_l \geq m \\ [2P_{\theta_0}(T \leq t_1(\delta)), 2P_{\theta_0}(T \leq t_2(\delta))] & t_r \leq m \end{cases} \quad (ج۱.۲)$$

که در آن $\delta \in (0, 1)$ ، θ_0 نقطه مرزی فرضیه H_0 و توابع t_1 و t_2 با استفاده از رابطه $\tilde{t}_\delta = [t_1(\delta), t_2(\delta)]$ حاصل می‌شوند. در رابطه (ج۱.۲) داریم $t_l = \inf\{t | t \in \text{supp}(\tilde{t})\}$ و $t_r = \sup\{t | t \in \text{supp}(\tilde{t})\}$.

تعریف ۱.۲ (سطح معنی‌داری فازی). سطح معنی‌داری^۱ فازی، زیرمجموعه‌ای فازی است که بر بازه $(0, 1)$ تعریف می‌شود و آن را با \tilde{S} نشان می‌دهیم.

یک روش برای آزمون فرضیه‌های فازی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد، ایده p -مقدار فازی است. اگر p -مقدار فازی از \tilde{S} کمتر باشد، آنگاه فرضیه صفر در سطح معنی‌داری فازی \tilde{S} رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود که \tilde{S} در تعریف ۱.۲ بیان شده است.

^۱Significance Level

ملاحظه ۱.۲. برخلاف آزمون فرضیه‌های معمولی، امکان وجود اشتراک بین مجموعه‌های $supp(\tilde{P})$ و $supp(\tilde{S})$ وجود داشته و در چنین مواردی نمی‌توان با اطمینان کامل ادعا کرد که $\tilde{P} \succ \tilde{S}$ یا $\tilde{S} \succ \tilde{P}$. بنابراین برای انجام این مقایسه نیاز به معیاری جهت مقایسه دقیق‌تر دو مجموعه فازی \tilde{S} و \tilde{P} داریم که در تعریف ۱۲.۱ مطرح شد. اکنون قاعده تصمیم‌گیری بر اساس آن به صورت زیر بیان می‌شود.

قاعده تصمیم‌گیری

تعریف ۲.۲. اگر در یک مساله آزمون فرضیه تصمیم به رد یا قبول فرضیه صفر بگیریم، آن‌گاه $D(\tilde{P} \succ \tilde{S})$ درجه پذیرش فرضیه صفر، و $D(\tilde{P} \succ \tilde{S}) = 1 - D(\tilde{S} \succ \tilde{P})$ درجه رد فرضیه صفر نامیده می‌شود، که در آن $D(\cdot)$ از رابطه (۶.۱) محاسبه می‌گردد.

مثال ۱.۲. فرض کنید طول عمر مفید لامپ‌های تولیدی در یک کارخانه دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu = 1300$ و انحراف معیار $\sigma = 30$ ساعت باشد. بعد از اعمال برخی تصحیحات در خط تولید این کارخانه، نمونه‌ای تصادفی به حجم ۱۰ لامپ از خط تولید گرفته شده و از آن‌جا که اندازه طول عمر مفید لامپ یک اندازه نادقیق است، اعداد فازی نشان داده شده در جدول ۱.۲ به عنوان مشاهدات نمونه ثبت شده‌اند. حال فرض کنید پرسشی مطرح شده است که آیا طول عمر مفید

جدول ۱.۲: اعداد فازی مثال ۱.۲

$\tilde{T}(1251, 1287, 1302)$	$\tilde{T}(1257, 1261, 1278)$
$\tilde{T}(1306, 1330, 1348)$	$\tilde{T}(1315, 1346, 1372)$
$\tilde{T}(1288, 1301, 1320)$	$\tilde{T}(1298, 1329, 1349)$
$\tilde{T}(1241, 1269, 1284)$	$\tilde{T}(1298, 1317, 1333)$
$\tilde{T}(1301, 1337, 1355)$	$\tilde{T}(1325, 1353, 1369)$

لامپ‌های تولیدی پس از اعمال تصحیحات بر خط تولید، افزایش یافته است؟ به دیگر سخن قصد داریم فرضیه آماری $H_0: \mu = 1300$ را در مقابل $H_1: \mu > 1300$ آزمون کنیم. آماره این آزمون یعنی $T = \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$ در نقطه مرزی فرضیه H_0 دارای توزیع $N(1300, \frac{30^2}{10})$ بوده و مقدار مشاهده شده آن با استفاده از تعمیمی از قضایای ۳.۱ و ۴.۱، عدد مثلثی $\tilde{t} = \tilde{T}(1288, 1313, 1331)$

به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{1}{1^\circ} \otimes [\tilde{T}(1257, 1261, 1278) \oplus \tilde{T}(1251, 1287, 1302) \oplus \tilde{T}(1315, 1346, 1372) \\ &\quad \oplus \tilde{T}(1306, 1330, 1348) \oplus \tilde{T}(1298, 1329, 1349) \oplus \tilde{T}(1288, 1301, 1320) \\ &\quad \oplus \tilde{T}(1298, 1317, 1333) \oplus \tilde{T}(1241, 1269, 1284) \oplus \tilde{T}(1325, 1353, 1369) \\ &\quad \oplus \tilde{T}(1301, 1337, 1355)] \\ &= \frac{1}{1^\circ} \otimes \tilde{T}(1288^\circ, 1313^\circ, 1331^\circ) \\ &= \tilde{T}(1288, 1313, 1331) \end{aligned}$$

از آنجا که ناحیه بحرانی از نوع (ب) است، با توجه به قضیه ۱.۲، δ -برش‌های p -مقدار فازی به ازای $\delta \in (0, 1]$ ، به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\delta &= [P_{\theta_0}(T \geq t_\gamma(\delta)), P_{\theta_0}(T \geq t_1(\delta))] \\ &= [P_{\theta_0}(\frac{T - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{t_\gamma(\delta) - 1300}{\frac{30}{\sqrt{10}}}), P_{\theta_0}(\frac{T - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{t_1(\delta) - 1300}{\frac{30}{\sqrt{10}}})] \\ &= [1 - \Phi(\frac{t_\gamma(\delta) - 1300}{\frac{30}{\sqrt{10}}}), 1 - \Phi(\frac{t_1(\delta) - 1300}{\frac{30}{\sqrt{10}}})] \\ &= [\int_{\frac{t_\gamma(\delta) - 1300}{\frac{30}{\sqrt{10}}}}^{\infty} (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz, \int_{\frac{t_1(\delta) - 1300}{\frac{30}{\sqrt{10}}}}^{\infty} (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz] \end{aligned}$$

که در آن $Z = \frac{T - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$ و نقاط $t_1(\delta)$ ، $t_\gamma(\delta)$ با برابر قرار دادن رابطه (۴.۱) با δ به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\delta = \tilde{T}(1288, 1313, 1331)(t) = \begin{cases} \frac{t - 1288}{1313 - 1288} & 1288 < t \leq 1313 \\ \frac{t - 1331}{1313 - 1331} & 1313 < t \leq 1331 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (2.2)$$

که از حل دستگاه معادلات فوق دو مقدار برای t به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} t_1(\delta) = 1288 + 25\delta \\ t_\gamma(\delta) = 1331 - 18\delta \end{cases} \quad (3.2)$$

با مشخص شدن کلیه δ -برش‌ها، p -مقدار فازی معلوم می‌شود. نمودار تابع عضویت مربوط به \tilde{P} در شکل ۱.۲ رسم شده است. به طریق مشابه همانند رابطه (۳.۲) می‌توان δ -برش $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0/05, 0/1)$ را به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{cases} S_1(\delta) = 0/05\delta \\ S_\gamma(\delta) = 0/1 - 0/05\delta \end{cases} \quad (4.2)$$

در این حالت اگر بخواهیم فرضیه‌های مطرح شده را در سطح معنی‌داری تقریباً ۰/۰۵ (که در اینجا با $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0/05, 0/1)$ مشخص شده) آزمون کنیم، آن‌گاه با استفاده از رابطه (۵.۱) و (۶.۱) و قاعده بیان شده در تعریف ۲.۲، $\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}}$ به صورت زیر عددی محاسبه می‌شود:

$$\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}} = \int_{\tilde{P}_\delta^U > \tilde{S}_\delta^L} (\tilde{P}_\delta^U - \tilde{S}_\delta^L) d\delta + \int_{\tilde{P}_\delta^L > \tilde{S}_\delta^U} (\tilde{P}_\delta^L - \tilde{S}_\delta^U) d\delta = 0/46 \quad (5.2)$$

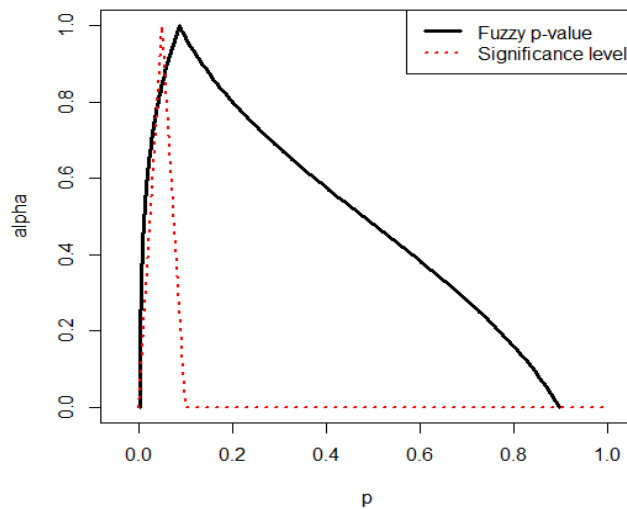
همچنین $\Delta_{\tilde{S}\tilde{P}}$ به صورت زیر عددی محاسبه می‌شود:

$$\Delta_{\tilde{S}\tilde{P}} = \int_{\tilde{S}_\delta^U > \tilde{P}_\delta^L} (\tilde{S}_\delta^U - \tilde{P}_\delta^L) d\delta + \int_{\tilde{S}_\delta^L > \tilde{P}_\delta^U} (\tilde{S}_\delta^L - \tilde{P}_\delta^U) d\delta = 0/06 \quad (6.2)$$

در نتیجه

$$D(\tilde{P} \succ \tilde{S}) = \frac{\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}}}{\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}} + \Delta_{\tilde{S}\tilde{P}}} = \frac{0/46}{0/46 + 0/06} = 0/89 \quad (7.2)$$

در نهایت فرضیه H_0 با درجه ۰/۸۹ پذیرفته خواهد شد.



شکل ۱.۲: تابع عضویت و سطح معنی‌داری p - مقدار فازی در مثال ۱.۲

ملاحظه ۲.۲. با توجه به قضیه ۱.۲، در آزمون‌های دوطرفه با یک مساله تصمیم‌گیری سه حالتی روبرو هستیم. به عبارت دیگر در رابطه (۱.۲ج)، یکی از سه تصمیم زیر را اتخاذ می‌کنیم

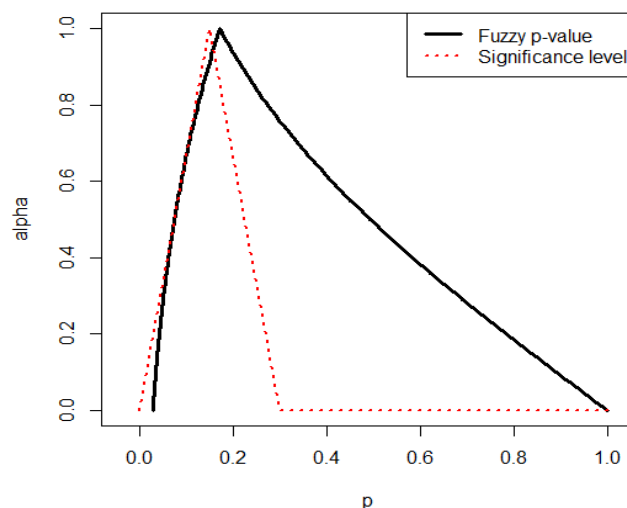
۱. فرضیه صفر پذیرش و فرضیه مقابل رد شود
۲. فرضیه صفر رد و فرضیه مقابل پذیرش شود
۳. هیچ کدام از فرضیه‌های صفر و مقابل پذیرش یا رد نشوند

با توجه به قضیه ۱.۲، تصمیم ۳ وقتی انتخاب می‌شود که ابهام داده‌ها آنقدر زیاد باشد تا به نتیجه $m \in \text{supp}(t)$ منجر شده و این موضوع باعث می‌شود که نتوانیم تصمیم به رد یا پذیرش فرضیه صفر بگیریم.

مثال ۲.۲. مثال ۱.۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم بررسی کنیم که آیا پس از اعمال تصحیحات در خط تولید کارخانه، طول عمر مفید باطری‌های تولیدی تغییر کرده است؟ برای پاسخ به این پرسش، می‌توان فرضیه « $H_0: \mu = 1300$ » را در مقابل فرضیه « $H_1: \mu \neq 1300$ » آزمون کرد. ناحیه بحرانی از نوع (ج) در رابطه (۷.۱) بوده و با توجه به این که $m \in \text{supp}(t)$ نمی‌توان p -مقدار فازی را بر اساس قضیه ۱.۲، معرفی کرد. زیرا با توجه به ملاحظه ۲.۲، تعلق m به ناحیه «عدم تصمیم‌گیری»، به دلیل ابهام بیش از حد داده‌ها و در نتیجه ابهام زیاد t می‌باشد. در همین مثال اگر فرض کنیم که ابهام داده‌ها به گونه‌ای کاهش یابد که منجر به مشاهده مقدار آماره آزمون $\bar{t} = \bar{T}(1300, 1313, 1321)$ شود، آن‌گاه $t_l \geq m$ و در نتیجه δ -برش‌های p -مقدار فازی به صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۲.۲):

$$\tilde{P}_\delta = \left[\int_{\frac{t_l(\delta) - 1300}{\sqrt{10}}}^{\infty} (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \int_{-\frac{t_l(\delta) - 1300}{\sqrt{10}}}^{\infty} (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right], \quad \delta \in (0, 1)$$

به طوری که در آن $t_1(\delta) = 1300 + 13\delta$ و $t_2(\delta) = 1321 - 18\delta$. اگر فرضیه‌های فوق را در سطح معنی‌داری $\tilde{S} = T(0, 0.15, 0.3)$ آزمون کنیم، آن‌گاه $\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}} = 0.45$ و $\Delta_{\tilde{S}\tilde{P}} = 0.14$ و در نتیجه فرضیه H_0 با درجه $D(\tilde{P} \succ \tilde{S}) = 0.76$ پذیرفته خواهد شد.



شکل ۲.۲: تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی تقریباً ۰.۱۵ در مثال ۲.۲

۲.۱.۲ آزمون فرضیه‌های دقیق با داده‌های نادقیق نرمال

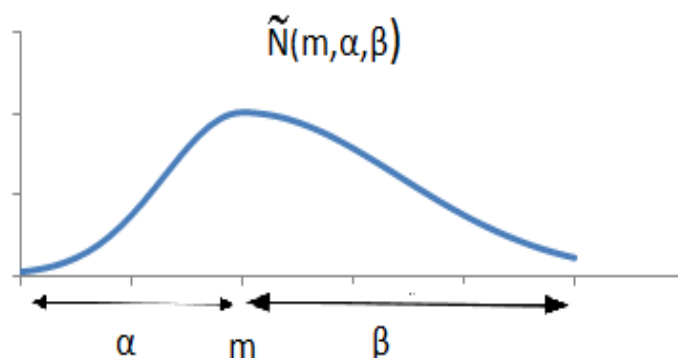
اگر به جای اعداد فازی مثلثی در بخش ۱.۱.۲ از اعداد فازی نرمال به شکل زیر استفاده کنیم

$$F_N(\mathbb{R}) = \{\tilde{N} = (m, \alpha, \beta)_N | m \in \mathbb{R}, \text{ باشد } \alpha \text{ پهناى چپ و } \beta \text{ پهناى راست}\}$$

که در آن تابع $\tilde{N} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۳.۲)

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{m-x}{\alpha}\right)^2} & x \leq m \\ e^{-\left(\frac{x-m}{\beta}\right)^2} & x > m \end{cases}$$

در این صورت با استفاده از قضیه ۱.۲، \tilde{P}_δ ها را محاسبه و با استفاده از تعریف رتبه‌بندی فازی بیان شده در روابط (۵.۱) و (۶.۱) و قاعده مطرح شده در تعریف ۲.۲، p -مقدار فازی را با عدد فازی S مقایسه و تصمیم به رد یا قبول فرضیه صفر می‌گیریم [۷].



شکل ۳.۲: تابع \tilde{N} برای نمایش عدد فازی نرمال

مثال ۳.۲. در مثال ۱.۲ فرض کنید مشاهدات نمونه اعداد فازی نرمال به صورت جدول ۲.۲ باشند. قصد داریم فرضیه آماری $H_0 : \mu = 1300$ را در مقابل $H_1 : \mu > 1300$ آزمون کنیم. آماره

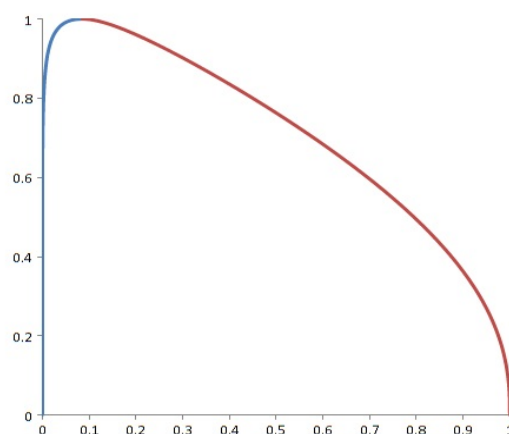
جدول ۲.۲: اعداد فازی نرمال مثال ۳.۲

$(1261, 4, 17)_N$	$(1287, 36, 15)_N$
$(1346, 31, 26)_N$	$(1330, 24, 18)_N$
$(1329, 31, 26)_N$	$(1301, 13, 19)_N$
$(1317, 19, 16)_N$	$(1269, 28, 15)_N$
$(1353, 28, 16)_N$	$(1337, 36, 18)_N$

این آزمون یعنی $T = \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$ در نقطه مرزی فرضیه H_0 دارای توزیع $N(1300, \frac{30^2}{10})$ است و به صورت عدد نرمال $(1313, 25, 18)_N$ به دست می‌آید. از آنجا که ناحیه بحرانی از نوع (ب) می‌باشد، با توجه به قضیه ۱.۲، δ -برش‌های p -مقدار فازی به‌ازای $\delta \in (0, 1]$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\bar{P}_\delta = \left[\int_{\frac{t_1(\delta) - 1300}{\frac{30}{\sqrt{10}}}}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \int_{\frac{t_1(\delta) - 1300}{\frac{30}{\sqrt{10}}}}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right]$$

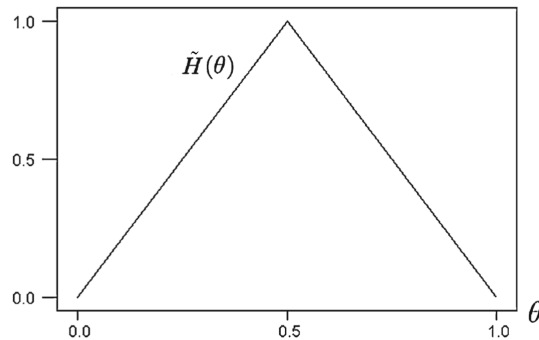
که در آن $\tilde{n} = (1313, 25, 28)_N$ و در نتیجه نقاط ابتدا و انتهای δ -برش \tilde{n} به صورت $t_1(\delta) = 1313 - 25\sqrt{-Ln\delta}$ و $t_2(\delta) = 1313 + 28\sqrt{-Ln\delta}$ مشخص می‌شوند. با مشخص شدن کلیه δ -برش‌ها، p -مقدار فازی مشخص می‌شود. نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی در شکل ۴.۲ رسم شده است. در این حالت اگر بخواهیم فرضیه‌های مطرح‌شده را در سطح معنی‌داری تقریباً $0/05$ (که در اینجا با $\bar{S} = (0/05, 0/05, 0/05)_N$ مشخص شده) آزمون کنیم، آنگاه $\Delta_{\bar{p}\bar{s}} = 0/712$ و $\Delta_{\bar{s}\bar{p}} = 0/090$ و در نتیجه فرضیه H_0 با درجه $0/886$ پذیرفته خواهد شد.



شکل ۴.۲: تابع عضویت p -مقدار فازی برای داده‌های نرمال در مثال ۳.۲

۲.۲ آزمون فرضیه‌های نادقیق با داده‌های دقیق

در آزمون فرضیه‌های آماری ممکن است با مسأله‌ی آزمون فرضیه زمانی که فرضیه‌ها نادقیق و داده‌ها دقیق هستند، مواجه شویم، که در این بخش به بررسی آن می‌پردازیم. ابتدا فرضیه فازی، مرز فرضیه فازی و p -مقدار فازی را یادآوری می‌کنیم و سپس با مقایسه‌ی p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی بر اساس رتبه‌بندی اعداد فازی، تصمیم‌گیری می‌کنیم.



شکل ۵.۲: نمودار تابع عضویت فرضیه فازی در مثال ۴.۲

۱.۲.۲ فرضیه فازی

تعریف ۳.۲. فرضیه آماری کلاسیک $H : \theta \in \Theta$ را در نظر بگیرید. با استفاده از تابع نشانگر

$$I_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta \\ 0 & \theta \notin \Theta \end{cases}$$

فرضیه فوق را می‌توان به صورت $H : I_{\Theta}(\theta)$ نشان داد. حال اگر به جای تابع نشانگر $\{0, 1\}$ از تابع عضویت $\tilde{H}_{\Theta} : \Theta \rightarrow [0, 1]$ استفاده کنیم، در این صورت فرضیه فوق به فرضیه فازی معروف است و به صورت $\tilde{H} : \tilde{H}(\theta)$ نمایش داده می‌شود. برای روشن شدن مساله، فرضیه فازی فوق دلالت بر آن دارد که θ با درجه $\tilde{H}(\theta)$ متعلق به زیرمجموعه فازی H از فضای پارامتر Θ است. به دیگر سخن هر ادعا در خصوص پارامتر مجهول جامعه که به وسیله‌ی یک مجموعه فازی بیان گردد، یک فرضیه فازی است.

مثال ۴.۲. فرض کنید θ پارامتر نسبت در توزیع دوجمله‌ای باشد. فرضیه

$$H : \theta \text{ تقریباً } 0/5 \text{ است}$$

یک فرضیه فازی است که به صورت $\tilde{H} = \tilde{T}(0, 0/5, 0/1) \in F_T(\mathbb{R})$ نشان داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر است (شکل ۵.۲)

$$\tilde{H}(\theta) = \begin{cases} 2\theta & 0 \leq \theta < \frac{1}{2} \\ 2 - 2\theta & \frac{1}{2} \leq \theta < 1 \end{cases}$$

مثال ۵.۲. برای بررسی قطر واشره‌ای تولیدی یک کارخانه، و این که آیا متوسط قطر واشرها در حد استاندارد μ_0 است یا نه، طبق شیوه رایج در آمار استنباطی، برای آزمون استاندارد بودن قطر واشرها از آزمون فرضیه $H_0 : \mu = \mu_0$ در برابر فرضیه $H_1 : \mu \neq \mu_0$ استفاده می‌شود. اما واضح

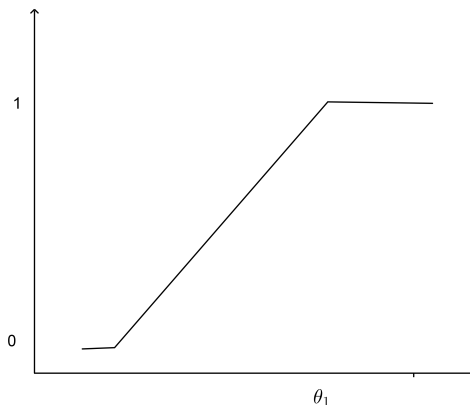
است که در این مساله، اگر متوسط قطر واشرها اندکی با μ_0 تفاوت داشته باشد، واشرها همچنان پذیرفتنی‌اند و خط تولید خارج از استاندارد تلقی نمی‌شود. بنابراین طبیعی است که محصولات کارخانه پذیرفته شوند، اگر μ (میانگین واقعی و مجهول قطر واشرها) تقریباً μ_0 باشد، و در غیر این صورت استاندارد بودن خط تولید و لذا محصولات کارخانه رد شود. در این جا می‌توان فرضیه‌های H_0 و H_1 را به صورت مجموعه‌های فازی زیر مدل‌سازی کرد

$$\begin{cases} H_0 : & \mu \text{ بسیار نزدیک به } \mu_0 \text{ است} \\ H_1 : & \mu \text{ از } \mu_0 \text{ دور است} \end{cases}$$

۲.۲.۲ فرضیه‌های یک‌طرفه و دوطرفه فازی

در این بخش خواهیم دید که در آزمون فرضیه‌های فازی، ابهام از طریق نقطه مرزی فرضیه‌ی صفر، به p -مقدار منتقل می‌شود. لذا به منظور معرفی تابع عضویت نقطه مرزی فرضیه فازی صفر، مفهوم فرضیه‌های یک‌طرفه و فرضیه‌های دوطرفه را به فرضیه‌های فازی گسترش می‌دهیم. ابتدا فرضیه‌های یک‌طرفه و دوطرفه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۲. الف) فرضیه فازی « θ تابع \tilde{H} است»، فرضیه فازی یک‌طرفه راست نامیده می‌شود، اگر $\theta_1 \in \Theta$ وجود داشته باشد که به ازای هر $\theta \geq \theta_1$ ، $\tilde{H}(\theta) = 1$ و برای هر $\theta < \theta_1$ ، \tilde{H} تابعی نانزولی از θ باشد (شکل ۶.۲).



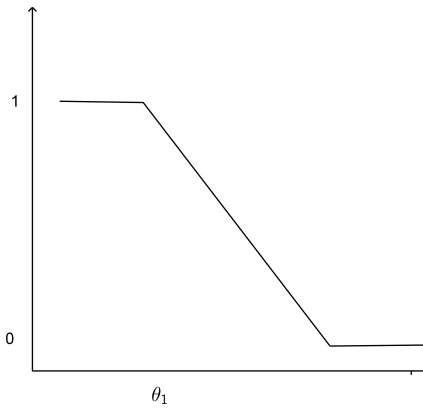
شکل ۶.۲: تابع عضویت فرضیه فازی یک‌طرفه راست

فرضیه معمولی « $H : \theta \geq \theta_0$ » فرضیه فازی یک‌طرفه راست با تابع عضویت

$$\tilde{H}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \geq \theta_0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

است، یعنی تابع مشخصه مجموعه $\{\theta : \theta \geq \theta_0\}$.

ب) فرضیه فازی « θ تابع \tilde{H} است»، فرضیه فازی یک‌طرفه چپ نامیده می‌شود، اگر: $\theta_1 \in \Theta$ وجود داشته باشد که به ازای هر $\theta \leq \theta_1$ ، $\tilde{H}(\theta) = 1$ و برای هر $\theta > \theta_1$ ، H تابعی ناصعودی از θ باشد (شکل ۷.۲).



شکل ۷.۲: تابع عضویت فرضیه فازی یک‌طرفه چپ

فرضیه معمولی « $H : \theta \leq \theta_0$ » فرضیه فازی یک‌طرفه چپ با تابع عضویت

$$\tilde{H}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \leq \theta_0 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

است، یعنی تابع مشخصه مجموعه $\{\theta : \theta \leq \theta_0\}$.

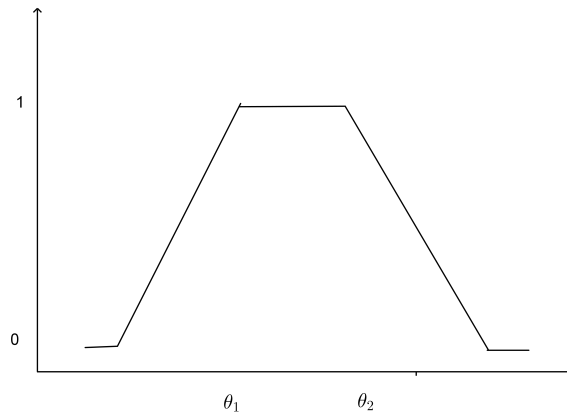
ج) فرضیه فازی « θ تابع \tilde{H} است» فرضیه دوطرفه نامیده می‌شود، اگر بازه $[\theta_1, \theta_2] \subseteq \Theta$ به گونه‌ای موجود باشد که برای هر $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ داشته باشیم $\tilde{H}(\theta) = 1$ و به ازای $\theta \leq \theta_1$ تابع \tilde{H} صعودی و به ازای $\theta \geq \theta_2$ نزولی باشد (شکل ۸.۲).

فرضیه معمولی « $H : \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ » فرضیه فازی دوطرفه با تابع عضویت

$$\tilde{H}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

است، یعنی تابع مشخصه مجموعه $\{\theta : \theta \in [\theta_1, \theta_2]\}$.

توجه داشته باشید که هر فرضیه فازی « θ تابع \tilde{H} است» مانند $\tilde{H} \in F_S(\mathbb{R})$ یا $\tilde{H} \in F_B(\mathbb{R})$ یک فرضیه فازی یک‌طرفه است. به طور مشابه اگر $\tilde{H} \in F_T(\mathbb{R})$ ، آن‌گاه \tilde{H} یک فرضیه فازی دوطرفه است.



شکل ۸.۲: تابع عضویت فرضیه فازی دوطرفه

۳.۲.۲ مرز فرضیه فازی

در این بخش مفهوم مرز فرضیه فازی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۵.۲. مرز فرضیه فازی \tilde{H} یک زیرمجموعه فازی از Θ با تابع عضویت \tilde{H}_b است، به طوری که داریم

۱. اگر فرضیه \tilde{H} یک طرفه راست باشد، آن‌گاه

$$\tilde{H}_b(\theta) = \begin{cases} \tilde{H}(\theta) & \theta \leq \theta_1 \\ 0 & \theta \geq \theta_1 \end{cases}$$

که در آن \tilde{H} یک تابع صعودی در بازه $\theta \leq \theta_1$ است.

۲. اگر فرضیه \tilde{H} یک طرفه چپ باشد، آن‌گاه

$$\tilde{H}_b(\theta) = \begin{cases} \tilde{H}(\theta) & \theta \geq \theta_1 \\ 0 & \theta < \theta_1 \end{cases}$$

که در آن \tilde{H} یک تابع نزولی در بازه $\theta \geq \theta_1$ است.

۳. اگر فرضیه \tilde{H} دوطرفه باشد، آن‌گاه

$$\tilde{H}_b(\theta) = \tilde{H}(\theta)$$

که در آن \tilde{H} تابع مشخص شده در بند (ج) تعریف ۴.۲ است.

در آزمون فرضیه‌های یک‌طرفه معمولی به صورت

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

θ_0 را مرز فرضیه گوییم، که بر اساس آن ناحیه بحرانی مشخص می‌شود. همچنین می‌توان آن را به صورت زیر نیز نشان داد

$$H_b(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta = \theta_0 \\ 0 & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

همچنین در آزمون

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

$\Theta \subset [\theta_1, \theta_2]$ وجود دارد که

$$H_b(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \\ 0 & \theta \notin [\theta_1, \theta_2] \end{cases}$$

مثال ۶.۲. فرض کنید θ پارامتر مجهول توزیع دوجمله‌ای و $\tilde{H} = \tilde{B}(\circ/\mathcal{A}, \circ/\mathcal{N}) \in F_B(\mathbb{R})$ باشد. فرضیه « θ تابع \tilde{H} است» یک فرضیه فازی یک‌طرفه راست به صورت زیر است

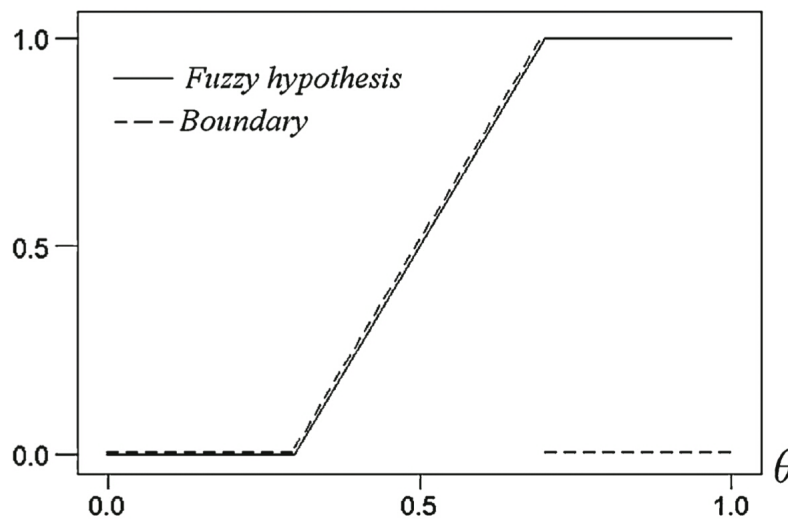
$$\tilde{H}(\theta) = \begin{cases} 2/5(\theta - \circ/\mathcal{A}) & \circ/\mathcal{A} < \theta \leq \circ/\mathcal{N} \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین با توجه به تعریف ۵.۲، مرز فرضیه فازی \tilde{H} به صورت زیر است

$$\tilde{H}_b(\theta) = \begin{cases} 2/5(\theta - \circ/\mathcal{A}) & \circ/\mathcal{A} < \theta \leq \circ/\mathcal{N} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به سخنی دیگر، $\tilde{H}_b = T(\circ/\mathcal{A}, \circ/\mathcal{N}, \circ/\mathcal{N}) \in F_T(R)$ مرز فرضیه فازی \tilde{H} است (شکل ۹.۲).

مثال ۷.۲. فرض کنید X متغیر تصادفی نمایی با میانگین مجهول λ با تابع چگالی احتمال



شکل ۹.۲: تابع عضویت فرضیه فازی و مرز فرضیه فازی در مثال ۶.۲

$$f(x; \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, x > 0, \lambda > 0$$

باشد. فرض می‌کنیم

$$\tilde{H}(\lambda) = \begin{cases} e^{-(\lambda-3)^2} & \lambda \leq 3 \\ 1 & \lambda > 3 \end{cases}$$

فرضیه « λ تابع \tilde{H} است» یک فرضیه فازی یک‌طرفه راست است. بنابراین با تعریف ۵.۲، مرز فرضیه فازی \tilde{H} به صورت زیر است (شکل ۱۰.۲)

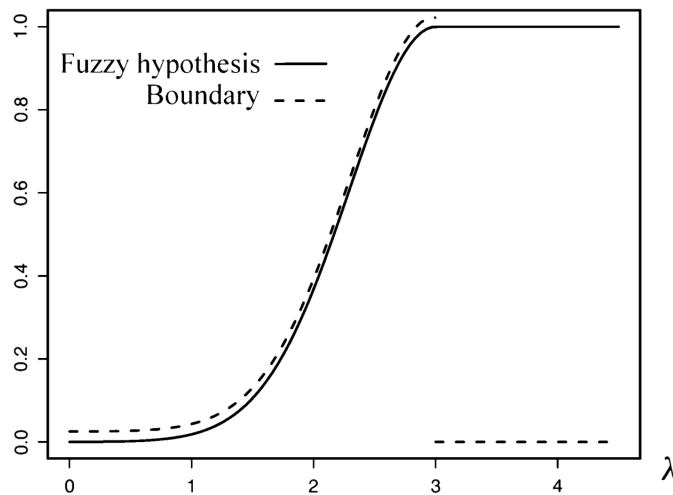
$$H_b(\lambda) = \begin{cases} e^{-(\lambda-3)^2} & \lambda \leq 3 \\ 0 & \lambda > 3 \end{cases}$$

مساله مورد توجه در مباحث بالا آزمون فرضیه فازی

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \theta \text{ تابع } \tilde{H}_0 \text{ است} \\ \tilde{H}_1: \theta \text{ تابع } \tilde{H}_1 \text{ است} \end{cases}$$

بر اساس یک نمونه تصادفی از تابع چگالی (جرم) احتمال $\{f_\theta(x), \theta \in \Theta\}$ است. در این پایان‌نامه، برای این گونه مسائل روش p -مقدار فازی پیشنهاد شده است.

ملاحظه ۳.۲. لازم به ذکر است در آزمون فرضیه‌های فازی، لازم نیست $\tilde{H}_0 \cup \tilde{H}_1 = \Theta$. هرچند، در آزمون فرضیه‌های معمولی (دقیق) فرض می‌شود $\tilde{H}_0 \cup \tilde{H}_1 = \Theta$.



شکل ۷.۲: تابع عضویت فرضیه فازی و مرز فرضیه فازی در مثال ۷.۲

بر اساس ملاحظه ۷.۱، p -مقدار تابعی از مرز فرضیه \tilde{H}_0 است. در آزمون فرضیه‌های فازی ابهام فرضیه \tilde{H}_0 از طریق مرز فرضیه \tilde{H}_0 که یک مجموعه فازی است، به p -مقدار منتقل شده و منجر به به وجود آمدن p -مقدار فازی می‌شود. برای توصیف p -مقدار فازی کفایت δ -برش‌ها را محاسبه کنیم.

۴.۲.۲ p -مقدار فازی

در این بخش از اصل توسعه زاده استفاده می‌کنیم [۳۳]. یک p -مقدار فازی به عنوان مجموعه فازی به وسیله δ -برش‌ها با استفاده از قضیه نمایش ارائه می‌شود.

تعریف ۶.۲. فرض کنید $\{X \sim f_\theta, \theta \in \Theta\}$ و خانواده توابع چگالی (جرم) احتمال f_θ دارای خاصیت نسبت درست‌نمایی یکنوا در (آماره آزمون) $T(x)$ باشد. برای یک مساله آزمون فرض فازی با فرضیه فازی \tilde{H}_{0b} با استفاده از تعریف ۵.۱، $\tilde{P} \in F([0, 1])$ به صورت

$$\tilde{P}(p) = G(H_{0b})(p) \quad p \in [0, 1] \quad (۸.۲)$$

به دست می‌آید. یعنی تابعی مثل G روی \tilde{H}_{0b} که یک مجموعه فازی است تعریف می‌شود، که در واقع همان تعمیم تعریف p -مقدار معمولی است.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $\{X \sim f_\theta, \theta \in \Theta\}$ و $\{f_\theta\}$ دارای MLR در $T(x)$ باشد. در آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس داده‌های دقیق، δ -برش‌های p -مقدار فازی در سه حالت مطرح شده در رابطه (۷.۱) به صورت زیر هستند:

$$\tilde{P}_\delta = [P_{\theta_r(\delta)}(T \leq t), P_{\theta_l(\delta)}(T \leq t)] \quad (۹.۲)$$

$$\tilde{P}_\delta = [P_{\theta_1(\delta)}(T \geq t), P_{\theta_2(\delta)}(T \geq t)] \quad (ب۹.۲)$$

$$\tilde{P}_\delta = \begin{cases} [{}^2P_{\theta_1(\delta)}(T \geq t), {}^2P_{\theta_2(\delta)}(T \geq t)] & t \geq m_r \\ [{}^2P_{\theta_2(\delta)}(T \leq t), {}^2P_{\theta_1(\delta)}(T \leq t)] & t \leq m_l \end{cases} \quad (ج۹.۲)$$

که در آن $\delta \in (0, 1]$ و توابع θ_1 و θ_2 با استفاده از رابطه $(\tilde{H}_{ob})_\delta = [\theta_1(\delta), \theta_2(\delta)]$ تعریف می‌شوند. از آنجا که میانه آماره آزمون تحت مرز \tilde{H}_{ob} یک مجموعه فازی با تابع عضویت $\tilde{m}(m) = \tilde{H}_{ob}(\theta)$ (که در آن میانه توزیع T تحت θ با m نشان داده شده) می‌باشد، لذا در حالت (ج۹.۲) داریم $m_r = \sup\{m | m \in \text{supp}(m)\}$ و $m_l = \inf\{m | m \in \text{supp}(m)\}$.

برهان. با تعاریف ۵.۱ و ۶.۲ وقتی که $t \geq m_r$ یا $t \leq m_l$ داریم

$$\tilde{P}(p) = \sup_{p=g(\theta)} \tilde{H}_{ob}(\theta). \quad (۱۰.۲)$$

بر اساس لم ۱.۱، g تابعی یک به یک از θ است. بنابراین

$$\tilde{P}(p) = \tilde{H}_{ob}(g^{-1}(p)), \quad p \in [0, 1]. \quad (۱۱.۲)$$

در نتیجه می‌توانیم δ -برش \tilde{P} را به صورت زیر به دست آوریم

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\delta &= \{p \in [0, 1] : \tilde{P}(p) \geq \delta\} \\ &= \{p \in [0, 1] : g^{-1}(p) \in [\theta_1(\delta), \theta_2(\delta)]\}. \end{aligned} \quad (۱۲.۲)$$

بر طبق قسمت (الف.۱) و (ب.۱) لم ۱.۱، برای نواحی (الف) و (ب) از رابطه (۷.۱) تابع g به ترتیب اکیدا نزولی و اکیدا صعودی است. بنابراین برای هر $\delta \in (0, 1]$ داریم

$$\tilde{P}_\delta = \{p \in [0, 1] : p \in [g(\theta_2(\delta)), g(\theta_1(\delta))]\} \quad (۱۳.۲)$$

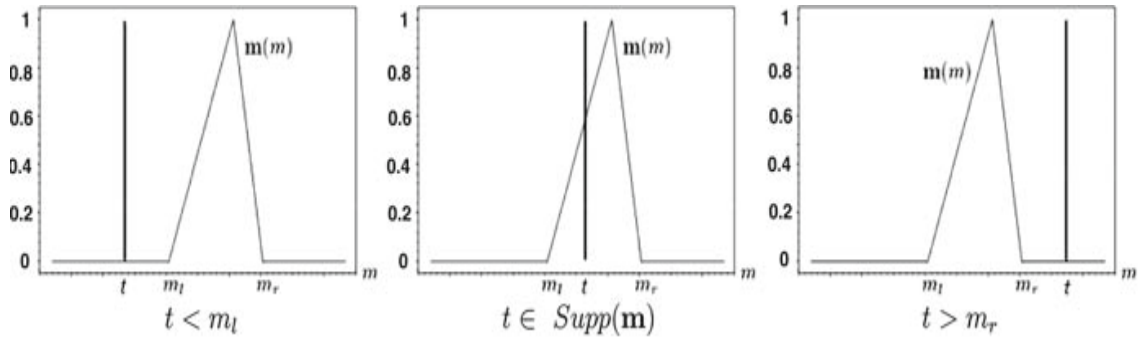
$$\tilde{P}_\delta = \{p \in [0, 1] : p \in [g(\theta_1(\delta)), g(\theta_2(\delta))]\} \quad (ب۱۳.۲)$$

یعنی

$$\tilde{P}_\delta = [P_{\theta_2(\delta)}(T \leq t), P_{\theta_1(\delta)}(T \leq t)] \quad (آ۱۴.۲)$$

$$\tilde{P}_\delta = [P_{\theta_1(\delta)}(T \geq t), P_{\theta_2(\delta)}(T \geq t)] \quad (ب۱۴.۲)$$

برای مورد (ج) ملاحظه (۷.۱)، وقتی $t \geq m_r$ ، واضح است که برای هر $m \in \text{Supp}(\tilde{m})$ ، $t \geq m$ (شکل ۱۱.۲). همچنین از قسمت (ج) ملاحظه ۶.۱ داریم $g(\theta) = {}^2P_\theta(T \geq T)$ و بنابراین از لم ۱.۱، g تابعی اکیدا صعودی از θ است. بنابراین با (۱۲.۲) برای هر $\delta \in (0, 1]$ داریم



شکل ۱۱.۲: تمام حالت‌های ممکن در مورد (ج)، بین مقادیر مشاهده‌شده آماره آزمون و میانه توزیع آماره آزمون تحت مرز فرضیه H_{0b}

$$\tilde{P}_\delta = \{p \in [0, 1] : p \in [g(\theta_1(\delta)), g(\theta_2(\delta))]\} \quad (15.2)$$

به‌طور مشابه وقتی $t \leq m_l$ داریم

$$\tilde{P}_\delta = \{p \in [0, 1] : p \in [g(\theta_2(\delta)), g(\theta_1(\delta))]\} \quad (16.2)$$

در نهایت از (۱۵.۲) و (۱۶.۲) داریم

$$\tilde{P}_\delta = \begin{cases} [2P_{\theta_1(\delta)}(T \geq t), 2P_{\theta_2(\delta)}(T \geq t)] & t \geq m_r \\ [2P_{\theta_2(\delta)}(T \leq t), 2P_{\theta_1(\delta)}(T \leq t)] & t \leq m_l \end{cases} \quad (17.2)$$

□

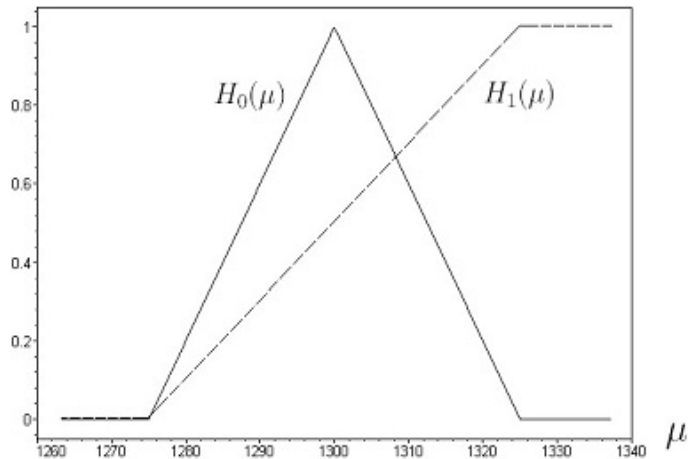
مثال ۸.۲. طول عمر لامپ‌های تولیدی یک کارخانه (بر حسب ساعت) دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و انحراف معیار $\sigma = 120$ می‌باشد. بر پایه مشاهدات نمونه‌ای تصادفی به حجم ۳۶ لامپ مقدار $\bar{x} = 1327$ ثبت شده است. قصد داریم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معنی‌داری $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0/05, 0/1)$ آزمون کنیم

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : \mu \text{ تقریباً } 1300 \text{ است} \\ \tilde{H}_1 : \mu \text{ تقریباً بزرگتر از } 1300 \text{ است} \end{cases}$$

که در آن‌ها \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 به ترتیب با توابع عضویت

$$\tilde{B}(1275, 1325) \in F_B(\mathbb{R}) \text{ و } \tilde{T}(1275, 1300, 1325) \in F_T(\mathbb{R})$$

صورت‌بندی شده‌اند (شکل ۱۲.۲). با توجه به نوع فرضیه \tilde{H}_1 ، ناحیه بحرانی آزمون از نوع (ب)



شکل ۱۲.۲: تابع عضویت فرضیه‌های فازی در مثال ۸.۲ و ۱.۳ و ۲.۳ و ۴.۴.

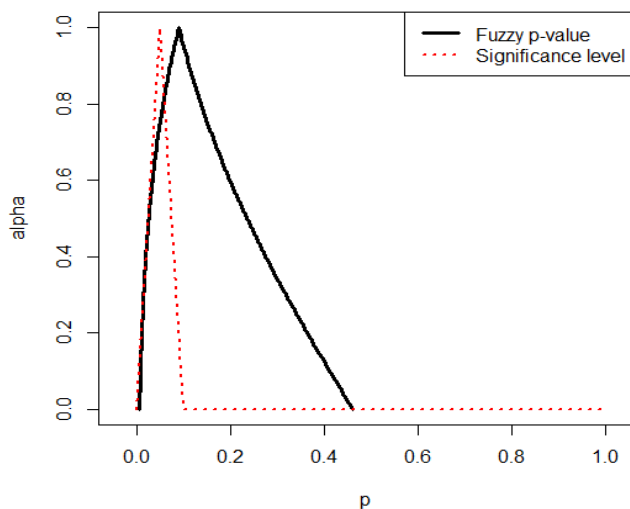
می‌باشد و با توجه به قضیه ۲.۲، δ -برش‌های p -مقدار فازی به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\delta &= [P_{\theta_1(\delta)}(T \geq t), P_{\theta_2(\delta)}(T \geq t)] \\ &= [P_{\theta_1(\delta)}\left(\frac{T - \mu_1(\delta)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{1327 - \mu_1(\delta)}{\frac{120}{\sqrt{36}}}\right), P_{\theta_2(\delta)}\left(\frac{T - \mu_2(\delta)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{1327 - \mu_2(\delta)}{\frac{120}{\sqrt{36}}}\right)] \\ &= [1 - \Phi\left(\frac{1327 - \mu_1(\delta)}{\frac{120}{\sqrt{36}}}\right), 1 - \Phi\left(\frac{1327 - \mu_2(\delta)}{\frac{120}{\sqrt{36}}}\right)] \\ &= \left[\int_{\frac{1327 - \mu_1(\delta)}{\frac{120}{\sqrt{36}}}}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \int_{\frac{1327 - \mu_2(\delta)}{\frac{120}{\sqrt{36}}}}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right]. \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در این مثال $\tilde{H}_{\circ b} = \tilde{T}(1275, 1300, 1325)$ مرز فرضیه \tilde{H}_{\circ} می‌باشد و بنابراین به‌ازای هر $\delta \in (0, 1)$ داریم $\mu_1(\delta) = 1275 + 25\delta$ و $\mu_2(\delta) = 1325 - 25\delta$. با مشخص شدن δ -برش‌ها می‌توان p -مقدار فازی را مانند شکل ۱۳.۲ رسم کرد. پس از محاسبه $\Delta_{\tilde{p}\tilde{s}} = 0/23$ و $\Delta_{\tilde{s}\tilde{p}} = 0/05$ با استفاده از تعریف ۱۲.۱ و ۲.۲، در نهایت فرضیه فازی H_{\circ} ، در سطح معنی‌داری تقریباً ۰/۰۵ (که در اینجا با $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0/05, 0/1)$ مشخص شده)، با درجه $D(\tilde{P} \succ \tilde{S}) = 0/83$ پذیرفته می‌شود.

مثال ۹.۲. جهت ایمنی کارگران، در یک کارخانه دستگاه جدیدی نصب و راه‌اندازی شده است. فرض کنید که تعداد حوادثی که در هر ماه در این کارخانه رخ می‌دهند، دارای توزیع پواسون با میانگین مجهول λ است. بر اساس اطلاعات ثبت‌شده در یک سال گذشته، تعداد ۲۷ حادثه رخ داده است. به منظور بررسی کاهش احتمالی تعداد حوادث، مدیریت کارخانه قصد دارد فرضیه‌های زیر را آزمون کند

$$\begin{cases} \tilde{H}_{\circ} : \lambda \text{ تقریباً بیشتر از } 3 \text{ است} \\ \tilde{H}_{\circ} : \lambda \text{ تقریباً کمتر از } 3 \text{ است} \end{cases}$$

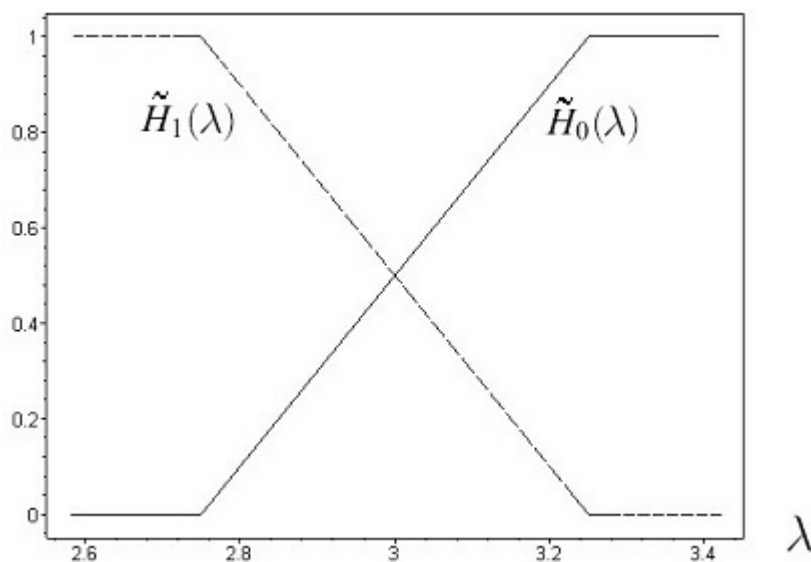


شکل ۱۳.۲: p -مقدار و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۸.۲.

که در آن \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 به ترتیب با

$$\tilde{S}(2/75, 3/25) \text{ و } \tilde{B}(2/75, 3/25)$$

صورت‌بندی شده‌اند (شکل ۱۴.۲ را ببینید). اگر متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_{12} تعداد حوادث رخ



شکل ۱۴.۲: نمودار تابع عضویت فرضیه فازی در مثال ۹.۲

داده در ماه‌های سال باشند، آنگاه آماره $T = \sum_{i=1}^{12} X_i$ دارای توزیع پواسون با پارامتر مجهول 12λ

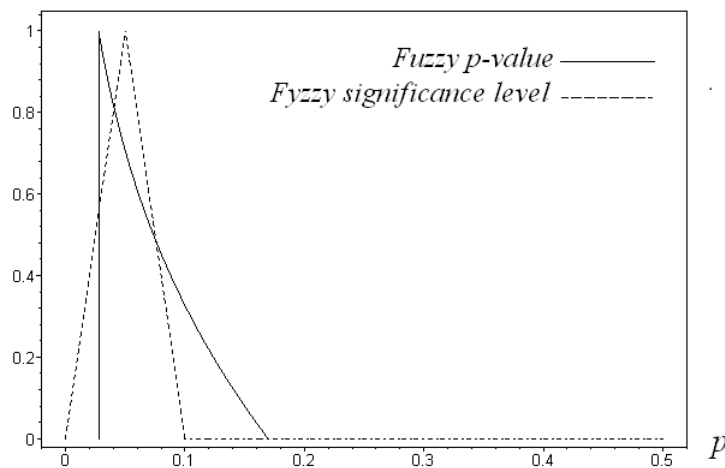
است. طبق قضیه ۲.۲، δ -برش‌های p -مقدار فازی به صورت زیر محاسبه می‌شوند (شکل ۱۵.۲)

$$P_\delta = \left[\sum_{t=0}^{27} \frac{e^{-12l_2(\delta)} (12l_2(\delta))^t}{t!}, \sum_{t=0}^{27} \frac{e^{-12l_1(\delta)} (12l_1(\delta))^t}{t!} \right]$$

که در آن

$$H_{ob}(\lambda) = \begin{cases} 2(\lambda - 2/75) & 2/75 < \lambda \leq 3/25 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و در نتیجه به ازای $\delta \in (0, 1]$ داریم $l_1(\delta) = 2/75 + 0/5\delta$ و $l_2(\delta) = 3/25$. لذا اگر بخواهیم، برای مثال، فرضیه‌های مورد نظر را در سطح معنی‌داری تقریباً $0/05$ که به وسیله تابع عضویت $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0/05, 0/1)$ مشخص می‌شود آزمون کنیم، آنگاه فرضیه \tilde{H}_0 با درجه $D(\tilde{P} \succ \tilde{S}) = 0/54$ در مقابل فرضیه \tilde{H}_1 پذیرفته می‌شود.



شکل ۱۵.۲: نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۹.۲

۳.۲ آزمون فرضیه‌های نادقیق با داده‌های نادقیق

در این بخش قصد داریم تا با الهام گرفتن از ایده‌های مطرح‌شده در بخش‌های قبل، فرضیه‌های فازی

\tilde{H}_0 : تابع H_0 است:

\tilde{H}_1 : تابع H_1 است:

را بر پایه داده‌های نادقیق $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in FC(R)$ و با استفاده از روش p -مقدار، آزمون کنیم. بدیهی است که در این مساله جدید، ابهام هم از طریق داده‌ها و هم از طریق فرضیه \tilde{H}_0 به p -مقدار منتقل می‌شود و منجر به به وجود آمدن p -مقدار فازی می‌شود.

قضیه ۳.۲. در آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس داده‌های فازی، δ - برش‌های p - مقدار فازی در سه حالت مطرح شده در رابطه (۷.۱) به صورت زیر می‌باشند

$$\tilde{P}_\delta = [P_{\theta_r(\delta)}(T \leq t_1(\delta)), P_{\theta_l(\delta)}(T \leq t_2(\delta))] \quad (18.2\text{آ})$$

$$\tilde{P}_\delta = [P_{\theta_l(\delta)}(T \geq t_2(\delta)), P_{\theta_r(\delta)}(T \geq t_1(\delta))] \quad (ب 18.2)$$

$$\tilde{P}_\delta = \begin{cases} [P_{\theta_l(\delta)}(T \geq t_2(\delta)), P_{\theta_r(\delta)}(T \geq t_1(\delta))] & t_l \geq m_r \\ [P_{\theta_r(\delta)}(T \leq t_1(\delta)), P_{\theta_l(\delta)}(T \leq t_2(\delta))] & t_r \leq m_l \end{cases} \quad (ج 18.2)$$

که در آن $\delta \in (0, 1]$ و توابع $\theta_1, \theta_2, \theta_l, \theta_r$ و t_1, t_2 با استفاده از روابط $[\theta_1(\delta), \theta_2(\delta)] = \tilde{t}_\delta$ و $(H_{ob})_\delta$ حاصل می‌شوند. همچنین در حالت (ج)، مقادیر t_l, t_r, m_l و m_r همانند قضیه‌های ۱.۲ و ۲.۲ معرفی می‌شوند.

برهان. فرض کنیم \tilde{t} روی بازه $[t_1(\delta), t_2(\delta)] = \tilde{t}_\delta$ و θ روی بازه $[\theta_1(\delta), \theta_2(\delta)] = (H_{ob})_\delta$ تغییر کند، آن‌گاه $g(\theta_0, t)$ در بازه $[p\text{-value}_1(\delta), p\text{-value}_2(\delta)]$ تغییر می‌کند (در ابتدا g تنها تابعی از θ_0 بود، حال تابعی از t نیز است).

با استفاده از لم ۱.۱ و ملاحظه ۶.۱، برای $T \leq t_l$ در رابطه (۷.۱) می‌توان گفت $g(\theta_0, t) = P_{\theta_0}(T \leq t)$ تابعی نزولی از θ و تابعی صعودی از t است (زیرا احتمال تجمعی است با زیاد شدن t احتمال بزرگتر و مساحت بزرگتر می‌شود، پس نسبت به t صعودی است. مثلاً اگر فرض کنیم θ_0 میانگین توزیع نرمال باشد، با زیاد شدن θ_0 مساحت کاهش پیدا می‌کند و نسبت به θ نزولی است).

بنابراین $p\text{-value}_1(\delta)$ را با استفاده از نقطه راست (چپ) بازه $(H_{ob})_\delta$ و نقطه چپ (راست) \tilde{t}_δ ، به دست می‌آوریم. بنابراین در حالت الف رابطه (۷.۱)، δ - برش p - مقدار فازی برای $\delta \in [0, 1]$ به صورت

$$\tilde{P}_\delta = [P_{\theta_r(\delta)}(T \leq t_1(\delta)), P_{\theta_l(\delta)}(T \leq t_2(\delta))] \quad (19.2)$$

به دست می‌آید.

به‌طور مشابه برای حالت ب از رابطه (۷.۱)، δ - برش p - مقدار فازی برای $\delta \in [0, 1]$ به صورت

$$\tilde{P}_\delta = [P_{\theta_l(\delta)}(T \geq t_2(\delta)), P_{\theta_r(\delta)}(T \geq t_1(\delta))] \quad (20.2)$$

به دست می‌آید.

برای قسمت ج وقتی $t_l \geq m_r$ ، برای هر $t \in \text{supp}(\tilde{t})$ و $m \in \text{supp}(m)$ ، $t \geq m$ است. بنابراین با استفاده از قسمت ج ملاحظه ۶.۱، $g(\theta_0, t) = P_{\theta_0}(T \geq t)$ که تابعی نزولی نسبت به t و صعودی نسبت به θ_0 است. بنابراین $p\text{-value}_1(\delta)$ را با استفاده از نقطه چپ (راست) بازه $(H_{ob})_\delta$ و نقطه راست (چپ) \tilde{t}_δ ، به دست می‌آوریم. بنابراین به‌طور مشابه رابطه (ج ۱۸.۲) به دست می‌آید. \square

ملاحظه ۴.۲. اگر در قضیه ۳.۲ فرضیه‌ها دقیق و غیرفازی در نظر گرفته شوند، آن‌گاه δ - برش‌های معرفی شده برای p - مقدار فازی، تبدیل به δ - برش‌های معرفی شده در قضیه ۱.۲ می‌شوند. همچنین اگر در قضیه ۳.۲ داده‌ها غیرفازی و به صورت دقیق ثبت شده باشند، آن‌گاه δ - برش‌های معرفی شده برای p - مقدار فازی، تبدیل به δ - برش‌های معرفی شده در قضیه ۲.۲ می‌شوند.

ملاحظه ۵.۲. در صورتی که فرضیه‌ها و مشاهدات به صورت دقیق و غیرفازی در نظر گرفته شوند، ابهام موجود در p - مقدار در قضیه‌های ۱.۲، ۲.۲ و ۳.۲ از بین رفته و ناحیه «عدم تصمیم‌گیری» در کلیه قضیه‌ها تهی می‌شود. در این حالت تمامی تعاریف p - مقدار فازی منطبق بر تعاریف معمولی و دقیق می‌شوند و تابع عضویت p - مقدار فازی تبدیل به $I_{\{p\}}$ می‌شود. تحت این شرایط، اگر سطح معنی‌داری نیز عدد دقیق $I_{\{a\}}$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه درجه پذیرش یا رد فرضیه صفر تبدیل به یک عدد می‌شود. به عبارت دیگر اگر تمامی ورودی‌های مساله آزمون فرضیه‌ها (داده‌ها، فرضیه‌ها و سطح معنی‌داری) دقیق و غیرفازی در نظر گرفته شوند، آن‌گاه همان‌گونه که انتظار می‌رود مطابق روش‌های مطرح شده، تصمیم‌گیری نیز با یقین و به طور دقیق صورت خواهد گرفت. البته لازم به ذکر است که در این حالت نیز تصمیم‌گیری با نوعی عدم اطمینان (احتمال ارتکاب خطاهای نوع اول و دوم) همراه می‌باشد، اما این عدم اطمینان صرفاً از نوع احتمالی بوده و در واقع باید گفت که میزان عدم اطمینان امکانی ما در این تصمیم‌گیری صفر است.

مثال ۱۰.۲. در مثال ۱.۲ فرض کنید آماره آزمون به کمک اصل گسترش به صورت

$$\tilde{T}(1315, 1327, 1342)$$

محاسبه شده است و قصد داریم فرضیه‌های فازی زیر را آزمون کنیم

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \mu \text{ تقریباً } 1300 \text{ است} \\ \tilde{H}_1: \mu \text{ تقریباً بزرگتر از } 1300 \text{ است} \end{cases}$$

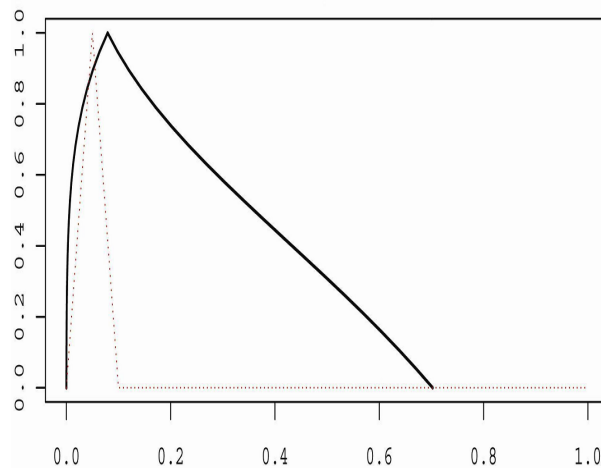
که در آن‌ها \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 به ترتیب با توابع عضویت

$$B(1275, 1325) \in F_B(\mathbb{R}) \text{ و } T(1275, 1300, 1325) \in F_T(\mathbb{R})$$

صورت‌بندی شده‌اند. با توجه به فرضیه \tilde{H}_1 ، ناحیه بحرانی آزمون از نوع (ب) می‌باشد و با توجه به قضیه ۳.۲، δ - برش‌های p - مقدار فازی به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\tilde{P}_\delta = \left[\int_{\frac{1275}{\sqrt{36}} - \frac{\mu_1(\delta)}{\sqrt{36}}}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \int_{\frac{1275}{\sqrt{36}} - \frac{\mu_2(\delta)}{\sqrt{36}}}^{\infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right]$$

که در آن $\tilde{H}_{0b} = \tilde{T}(1275, 1300, 1325)$ مرز فرضیه \tilde{H}_0 است. بنابراین به ازای هر $\delta \in (0, 1]$ داریم $\mu_1(\delta) = 1275 + 25\delta$ و $\mu_2(\delta) = 1325 - 25\delta$. با مشخص شدن δ - برش‌ها می‌توان p - مقدار فازی را مانند شکل ۱۶.۲ رسم کرد. پس از محاسبه $\Delta_{\tilde{p}\tilde{s}} = 0/03$ و $\Delta_{\tilde{p}\tilde{s}} = 0/33$ در نهایت فرضیه فازی \tilde{H}_0 ، در سطح معنی‌داری تقریباً $0/05$ (که در اینجا با $S = \tilde{T}(0, 0/05, 0/1)$ مشخص شده)، با درجه $D(\tilde{P} \succ \tilde{S}) = 0/92$ پذیرفته می‌شود.



شکل ۱۶.۲: تابع عضویت و سطح معنی‌داری فازی در مثال ۱۰.۲.

در این فصل مساله آزمون فرضیه‌های آماری را با

۱. داده‌های فازی،

۲. فرضیه‌های فازی،

۳. داده‌ها و فرضیه‌های فازی

با رهیافت p -مقدار مورد بررسی قرار دادیم. ابهام موجود در ورودی‌های مدل به p -مقدار منتقل شد و منجر به به‌وجود آمدن p -مقدار فازی و در نتیجه تصمیم‌گیری فازی شد. گرچه رویکرد p -مقدار معمولاً رایج‌ترین روش برای آزمون فرضیه‌های آماری است، اما محاسبات آن سخت و پیچیده است. برای انجام این‌گونه محاسبات پیچیده در فصل بعدی روش محاسبه p -مقدار در نرم افزار R مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

فصل ۳

p - مقدار فازی در نرم افزار R

آزمون فرضیه در محیط فازی با رویکرد p - مقدار از اهمیت خاصی برخوردار است. اما محاسبات آن سخت و پیچیده است. برای رفاه کاربران بسته‌هایی برای انجام محاسبات، رسم نمودارها و تصمیم‌گیری صحیح آزمون فرضیه تولید شده‌اند، که در این فصل به بررسی دو بسته *Fuzzy.p.value* و *FPV* که از اولین نرم‌افزارهای آماری با امکان نصب بر روی نرم‌افزار آماری R است، می‌پردازیم. برخی مطالب این فصل برگرفته از [۵]، [۲۴] و [۲۳] است.

۱.۳ مقدمه

تلاش‌های بسیاری برای تحلیل مسأله‌ی آزمون فرضیه‌ها در محیط‌های فازی با استفاده از نظریه‌ی مجموعه فازی انجام شده‌اند. با توجه به روش‌های مختلف برای آزمون فرضیه‌ها، روش p - مقدار به عنوان ساده‌ترین و معمول‌ترین روش آزمون در علوم مختلف شناخته شده است. اما محاسبه‌ی تابع عضویت p - مقدار فازی پیچیده است. لذا تولید نرم‌افزار آماری برای تحقیق در یک محیط فازی می‌تواند تحلیل داده‌های فازی و اطلاعات مبهم را برای کاربران آسان کند. دو بسته‌ی *Fuzzy.p.value* و *FPV* از اولین نرم‌افزارهای آماری هستند که امکان انجام آزمون فرضیه‌ها را در محیط فازی برای کاربران فراهم ساخته‌اند. ما در این‌جا نحوه‌ی استفاده از بسته‌های *Fuzzy.p.value* و *FPV* را همراه با مثال بررسی می‌کنیم و سپس به مقایسه دو بسته می‌پردازیم.

فرض کنید \mathbb{R} مجموعه تمام اعداد حقیقی و $F(\mathbb{R}) = \{\tilde{A}|\tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]\}$ مجموعه تمام

مجموعه‌های فازی روی \mathbb{R} باشد. همچنین فرض کنید $F_C(\mathbb{R})$ مجموعه تمامی مجموعه‌های فازی نرمال، محدب و پیوسته روی \mathbb{R} باشد. تکیه‌گاه $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ مجموعه غیرفازی $\text{supp}(\tilde{A}) = \{x | \tilde{A}(x) > 0\}$ ، و همچنین δ -برش $\tilde{A} \in F(\mathbb{R})$ مجموعه غیرفازی $\tilde{A}_\delta = \{x | \tilde{A}(x) \geq \delta\}$ به‌ازای $\delta \in (0, 1]$ است.

۱.۱.۳ مساله اصلی

فرض کنید یک نمونه تصادفی به اندازه n از $f_\theta(x)$ داشته باشیم، به‌طوری‌که به‌جای داده‌های دقیق، مشاهدات فازی $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in F_C(\mathbb{R})$ را در نظر بگیریم. تابع عضویت آماره آزمون $\tilde{t} = h(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ را با نماد $\tilde{t}(t)$ نشان می‌دهیم. مساله اصلی مورد بحث آزمون فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \theta \text{ تابع } H_0 \text{ است} \\ \tilde{H}_1: \theta \text{ تابع } H_1 \text{ است} \end{cases}$$

بر اساس مشاهدات فازی $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ است. این مساله آزمون فرضیه در محیط فازی نام دارد. هدف اصلی حل مساله آزمون فرضیه بر اساس روش p -مقدار فازی به‌کمک بسته‌ی *Fuzzy.p.value* و *FPV* است، که به‌طور جداگانه در دو بخش به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.

۲.۳ بسته نرم‌افزاری Fuzzy.p.value

عنوان اصلی بسته *Fuzzy.p.value* به صورت *Computing Fuzzy p-Value* است که نسخه ۱.۰ بر روی *CRAN* بارگزاری شده است [۲۳]. در این بسته دستوراتی برای معرفی اعداد فازی معرفی شده‌اند که در زیر به آن‌ها اشاره می‌شود.

۱.۲.۳ چند مجموعه (عدد) فازی در بسته نرم‌افزاری Fuzzy.p.value

مجموعه فازی $\tilde{T} \in F(\mathbb{R})$ با تابع عضویت بیان شده در (۴.۱)، عدد فازی مثلثی گفته می‌شود و به صورت $\tilde{T}(a, b, c)$ نمایش داده می‌شود، که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \leq b \leq c$. این عدد فازی به آسانی در بسته *Fuzzy.p.value* با دستور $T(a, b, c)$ قابل معرفی است. علاوه بر این ممکن است تصمیم بگیریم که تابع عضویت خطی برای مفاهیم «تقریباً کوچکتر از» و «تقریباً بزرگتر از» برای فرضیه‌های فازی در نظر بگیریم. برای این کار از تابع S و B استفاده می‌کنیم که به ترتیب تعمیمی از توابع عضویت بیان شده در (۲.۱ و ۳.۱) هستند و در بسته‌ی نرم‌افزاری *Fuzzy.p.value* به ترتیب با دستورات $S(a, b)$ و $B(a, b)$ به سهولت قابل فراخوانی و کاربرد هستند.

به‌طور مشابه کد $Tr(a, b, c, d)$ برای معرفی عدد فازی دوزنقه‌ای $\tilde{Tr}(a, b, c, d)$ با تابع عضویت زیر استفاده می‌شود:

$$\tilde{Tr}(a, b, c, d)(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)}{(b-a)} & a < x \leq b \\ 1 & b < x \leq c \\ \frac{(x-d)}{(c-d)} & c < x \leq d \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ملاحظه ۱.۳. اعداد فازی دیگر و پیچیده‌تر مانند اعداد فازی LR ، اعداد فازی قطعه قطعه شده‌ی خطی و اعداد فازی توانی نیز با بسته‌ی نرم‌افزاری $FuzzyNumbers$ در دسترس هستند که برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۱۷] مراجعه کرد.

۲.۲.۳ محاسبه p - مقدار فازی

در بسته‌ی نرم‌افزاری $Fuzzy.p.value$ ، محاسبه آزمون فرضیه‌ها در محیط فازی و رسم تابع عضویت p - مقدار فازی را می‌توان به کمک دو تابع اصلی $p - value.pois$ و $p - value.norm$ انجام داد. تابع اول زمانی اعمال می‌شود که آماره آزمون دارای توزیع نرمال باشد و تابع دوم زمانی اعمال می‌شود که آماره آزمون از توزیع پواسون تبعیت کند. اگرچه این بسته اکنون تنها محدود به توزیع نرمال و پواسون، به‌عنوان دو نامزد برای رده همه‌ی توزیع‌های پیوسته و گسسته است، اما ایده‌ی آن می‌تواند برای سایر توزیع‌های گسسته و پیوسته نیز تعمیم یابد. برای مثال قالب استفاده از تابع $p - value.norm$ به شکل زیر است

$$p_value.norm(kind, H_0, H_1, t, s, d, n, sig)$$

که در آن H_0 و H_1 به ترتیب فرضیه‌های صفر و جایگزین، t مقادیر مشاهده‌شده آماره آزمون (میانگین)، $s.d$ انحراف معیار توزیع نرمال، n حجم نمونه و sig سطح معنی‌داری در آزمون مورد نظر است. در ضمن $kind$ نوع آزمون فرضیه‌هاست و یکی از اعداد ۰، ۱ و ۲ را با توجه به نوع فرضیه‌ی جایگزین به‌صورت زیر می‌تواند اختیار کند

- اگر فرضیه‌ی H_1 از نوع نامساوی باشد، $kind = 0$
- اگر فرضیه‌ی H_1 از نوع کوچکتری باشد، $kind = 1$
- در صورتی که H_1 از نوع بزرگتری باشد، $kind = 2$

۳.۲.۳ مثال‌ها

مثال ۱.۳. در مثال ۸.۲، قصد داریم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معنی‌داری

$$\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0.15, 0.3)$$

آزمون کنیم

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \mu \text{ تقریباً } 1300 \text{ است} \\ \tilde{H}_1: \mu \text{ تقریباً بزرگتر از } 1300 \text{ است} \end{cases}$$

که در آن‌ها \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 به ترتیب با توابع عضویت

$$\tilde{B}(1275, 1325) \in F_B(R) \text{ و } \tilde{T}(1275, 1300, 1325) \in F_T(R)$$

صورت بندی شده اند (شکل ۱۲.۲).

با توجه به نوع فرضیه \tilde{H}_1 ، ناحیه بحرانی آزمون از نوع بزرگتری بوده و لذا $kind = 2$ و آماره آزمون $T(X_1, \dots, X_n) = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ پس از نصب و فراخوانی بسته نرم افزاری *Fuzzy.p.value*، برای رسم تابع عضویت p -مقدار فازی و نیز انجام آزمون فرضیه های فازی در سطح معنی داری \tilde{S} از کدهای زیر در نرم افزار R استفاده می کنیم

$$H_0 = T(1275, 1300, 1325)$$

$$H_1 = B(1275, 1325)$$

$$t = T(1327, 1327, 1327) \quad \# \quad t = 1327$$

$$sig = T(0, 0.15, 0.3)$$

$$p\text{-value.norm}(kind = 2, H_0, H_1, t, s.d = 120, n = 36, sig)$$

در نهایت، پس از محاسبه $\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}} = 0.17$ و $\Delta_{\tilde{S}\tilde{P}} = 0.19$ ، با استفاده از تعریف ۲.۲ فرضیه فازی \tilde{H}_1 ، در سطح معنی داری \tilde{S} با درجه $D(\tilde{S} > \tilde{P}) = 0.53$ توسط بسته نرم افزاری *Fuzzy.p.value*، پذیرفته و شکل ۱.۳ رسم می شود.

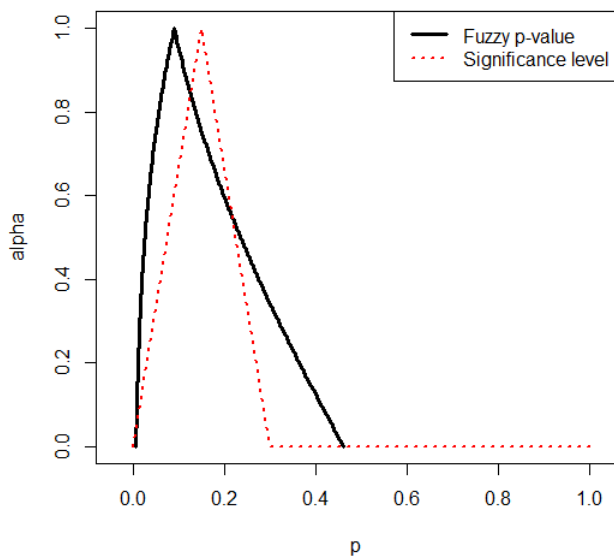
مثال ۲.۳. در مثال ۱.۳ فرض کنید مقادیر مشاهده شده آماره آزمون $\tilde{t} = \tilde{T}(1315, 1327, 1342)$ است، که با استفاده از اصل گسترش با داده های فازی صورت بندی شده است. قصد داریم فرضیه های فازی زیر را در سطح معنی داری $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0.15, 0.3)$ آزمون کنیم

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \mu \text{ تقریباً } 1300 \text{ است} \\ \tilde{H}_1: \mu \text{ تقریباً بزرگتر از } 1300 \text{ است} \end{cases}$$

که در آن‌ها \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 به ترتیب با توابع عضویت

$$\tilde{B}(1275, 1325) \in F_B(\mathbb{R}) \text{ و } \tilde{T}(1275, 1300, 1325) \in F_T(\mathbb{R})$$

صورت بندی شده اند (شکل ۱۲.۲). با توجه به نوع فرضیه \tilde{H}_1 ، ناحیه بحرانی آزمون از نوع بزرگتری بوده و لذا $kind = 2$ و آماره آزمون $T(X_1, \dots, X_n) = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ برای رسم تابع عضویت p -مقدار فازی و نیز انجام آزمون فرضیه های فازی در سطح معنی داری $\tilde{S} = (0, 0.15, 0.3)$ از کدهای زیر در نرم افزار R استفاده می کنیم



شکل ۱.۳: نمودار تابع عضویت p - مقدار فازی و سطح معنی داری فازی در مثال ۱.۳

$$H_0 = T(1275, 1300, 1325)$$

$$H_1 = B(1275, 1325)$$

$$t = T(1315, 1327, 1342)$$

$$sig = T(0, 0.05, 0.1)$$

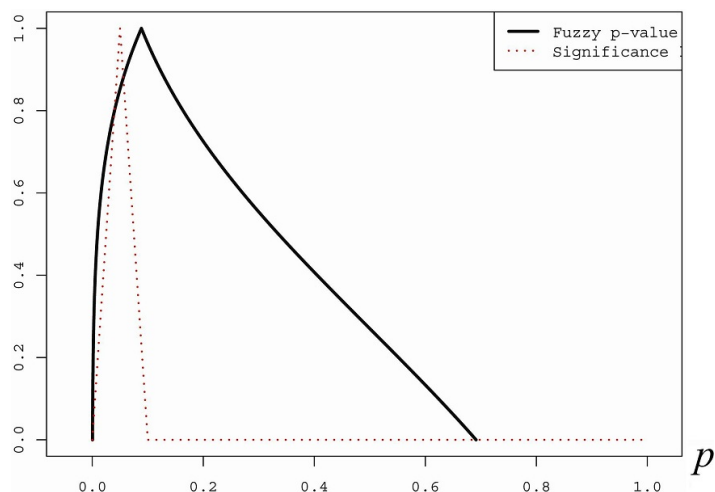
$$p\text{-value.norm}(kind = 2, H_0, H_1, t, s.d = 120, n = 36, sig)$$

در نهایت، پس از محاسبه $\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}} = 0.329$ و $\Delta_{\tilde{S}\tilde{P}} = 0.57$ و به وسیله‌ی بسته Fuzzy.p.value، فرضیه فازی \tilde{H}_0 ، در سطح معنی داری \tilde{S} با درجه $D(\tilde{P} > \tilde{S}) = 0.85$ پذیرفته و شکل ۲.۳ رسم می‌شود.

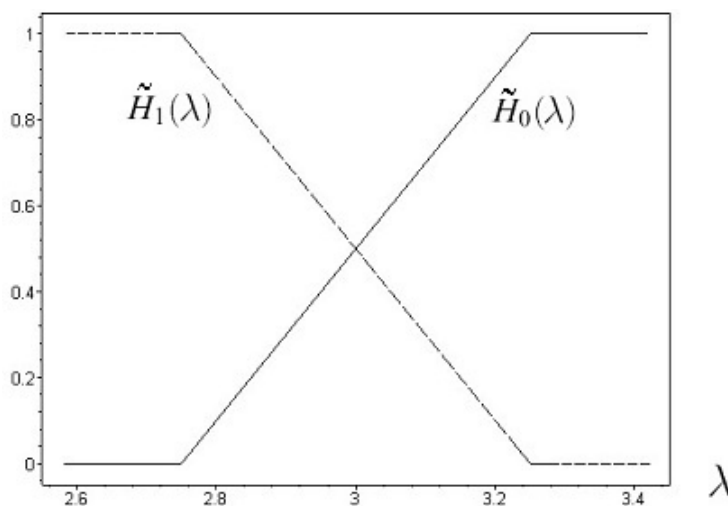
مثال ۳.۳. در مثال ۹.۲ فرض کنید بر اساس اطلاعات ثبت شده در یک سال گذشته، تعداد تقریباً ۲۷ حادثه که با تابع عضویت $\tilde{T}(24, 27, 30)$ مشخص می‌شود، رخ داده است. لازم به ذکر است که گرچه تعداد حوادث یک متغیر تصادفی گسسته می‌باشد اما به دلیل کثرت و سهولت در استفاده از اعداد فازی مثلثی در این مثال «تقریباً ۲۷ حادثه» به وسیله یک عدد فازی مثلثی که بستری پیوسته دارد مدل سازی شده است. به منظور بررسی کاهش احتمالی تعداد حوادث، مدیریت کارخانه قصد دارد فرضیه‌های زیر را آزمون کند

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \lambda \text{ تقریباً بیشتر از } 3 \text{ است} \\ \tilde{H}_1: \lambda \text{ تقریباً کمتر از } 3 \text{ است} \end{cases}$$

که در آن \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 به ترتیب با $\tilde{B}(2/75, 3/25)$ و $\tilde{S}(2/75, 3/25)$ صورت بندی شده است (شکل ۳.۳ را ببینید). با توجه به قالب فرضیه جایگزین $kind = 1$ در نظر می‌گیریم و برای آزمون فرضیه‌های



شکل ۲.۳: نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی داری فازی در مثال ۲.۳



شکل ۳.۳: نمودار تابع عضویت فرضیه فازی در مثال ۳.۳

فازی بالا در سطح معنی داری $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0.05, 0.1)$ تنها کفایت از کدهای زیر در R استفاده کنیم

$$H_0 = B(12*2.75, 12*3.25)$$

$$H_1 = T(12*2.75, 12*3.25)$$

$$t = T(24, 27, 30)$$

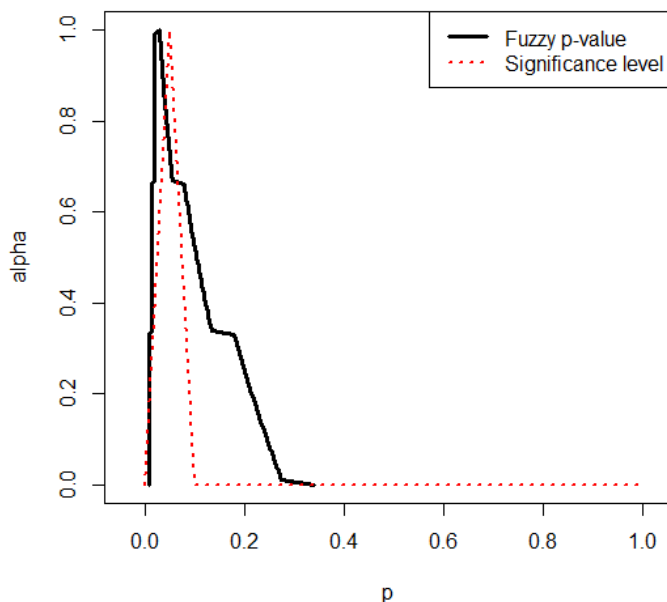
$$n = 12$$

$$sig = T(0, 0.05, 0.1)$$

$$p\text{-value.norm}(kind = 1, H_0, H_1, t, s.d = 120, n = 12, sig)$$

در نهایت، پس از محاسبه $\Delta_{\tilde{p}\tilde{S}} = 0.059$ و $\Delta_{\tilde{S}\tilde{p}} = 0.22$ و به وسیله‌ی بسته `Fuzzy.p.value`،

فرضیه فازی H_0 ، در سطح معنی داری \tilde{S} با درجه $D(\tilde{S} \succ \tilde{P}) = 0.72$ ، پذیرفته و شکل ۴.۳ رسم می‌شود.



شکل ۴.۳: نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی داری فازی در مثال ۳.۳

علاوه بر بسته *Fuzzy.p.value*، می‌توان از بسته *FPV* نیز استفاده کرد که در بخش بعدی به بررسی آن می‌پردازیم.

۳.۳ بسته نرم‌افزاری FPV

در این بخش مجموعه‌های فازی در بسته ^۱*FPV* که نسخه ۰/۵ آن بر روی *CRAN* بارگزاری شده است، را معرفی می‌کنیم و سپس تمام مثال‌های بخش قبل را یک بار دیگر با بسته نرم‌افزاری *FPV* انجام می‌دهیم و علاوه بر آن چند مثال دیگر نیز ارائه می‌دهیم.

۱.۳.۳ معرفی مجموعه فازی

معرفی مجموعه فازی در بسته *FPV* از طریق بسته *Fuzzy Number* انجام می‌شود. انواع اعداد فازی پیش فرض در بسته *Fuzzy Number* به همراه توابع مربوطه آن‌ها در جدول ۱.۳ آمده‌اند. همچنین برای جزئیات و مثال‌های بیشتر به [۱۷] مراجعه کنید.

^۱Testing Hypotheses via Fuzzy P-value in Fuzzy Environment

جدول ۱.۳: اعداد فازی در بسته Fuzzy Numbers

توابع پیش فرض	اعداد فازی
TriangularFuzzyNumber	عدد فازی مثلثی
TrapezoidalFuzzyNumber	عدد فازی ذوزنقه‌ای
FuzzyNumber	عدد فازی LR
PiecewiseLinearFuzzyNumber	عدد فازی قطعه شده خطی
PowerFuzzyNumber	عدد فازی توانی

۲.۳.۳ محاسبه p -مقدار فازی

تابع $fuzzy.p.value$ تنها تابع اساسی در بسته FPV است که به کمک آن می‌توان آزمون فرضیه‌ها را در محیط فازی مبتنی بر هر متغیر تصادفی پیوسته/گسسته به صورت زیر انجام داد [۲۴]

$fuzzy.p.value(t, H_{0b}, sig=0.05, p.value, knot.n=10, fig, \dots)$

که در آن t مقادیر مشاهده شده آماره آزمون، H_{0b} مرز فرضیه صفر، sig سطح معنی داری آزمون با پیش فرض 0.05 و $knot.n$ تعداد گره‌ها با پیش فرض 10 است. جزئیات بیشتر برای $knot.n$ در [۱۷] منتشر شده است. همچنین آرگومان $p.value$ در تابع $fuzzy.p.value$ همان تابع p -مقدار در آزمون فرضیه‌ها (در حالت غیر فازی و معمولی) است که در حقیقت تابعی از مقادیر دقیق t و H_{0b} است. همچنین انتخاب گرافیکی fig در تابع $fuzzy.p.value$ می‌تواند مقادیر عددی ۱، ۲ و ۳ را با مفاهیم زیر اختیار کند.

- اگر $fig = 1$ ، آن‌گاه تنها تابع عضویت p -مقدار فازی به وسیله تابع $fuzzy.p.value$ ترسیم می‌شود.
- اگر $fig = 2$ ، آن‌گاه توابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی داری فازی ترسیم می‌شوند.
- اگر $fig = 3$ ، آن‌گاه سه تابع عضویت t ، H_{0b} (اعداد فازی ورودی) و p -مقدار فازی (عدد فازی خروجی) در قالب یک شکل ترسیم خواهند شد.

۳.۳.۳ مثال‌ها

در این جا تمام مثال‌های بخش قبل را با بسته FPV دوباره انجام می‌دهیم و پس از آن چند مثال برای نشان دادن کارایی انعطاف‌پذیر بسته FPV نسبت به بسته $Fuzzy.p.value$ مطرح می‌کنیم. لازم به

ذکر است که قسمتی از محاسبات بسته FPV بر اساس بسته *FuzzyNumbers* و *FuzzyNumbers.Ext.2* است. بنابراین ابتدا دو بسته بالا را نصب و راه‌اندازی کرده و سپس محاسبات را انجام می‌دهیم.

مثال ۴.۳. در ادامه مثال ۱.۳ ابتدا فرضیه‌های فازی نشان داده شده در شکل ۱۲.۲ را با بسته FPV در سطح معنی‌داری $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0.15, 0.3)$ آزمون می‌کنیم. با در نظر گرفتن یک آزمون مشابه در محیط غیرفازی، p - مقدار دقیق تابعی از t (مقدار مشاهده‌شده دقیق آماره آزمون) $\tilde{T}(X_1, \dots, X_n) = H_{0b}$ و $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{36} x_i}{36}$ (مرز دقیق فرضیه صفر) به شکل زیر می‌باشد.

$$p - مقدار = P_{\mu=H_{0b}}(\bar{X} \geq \bar{x}) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - H_{0b}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

بنابراین برای آزمون فرضیه‌ها در محیط فازی دستورهای زیر در بسته FPV استفاده می‌شود.

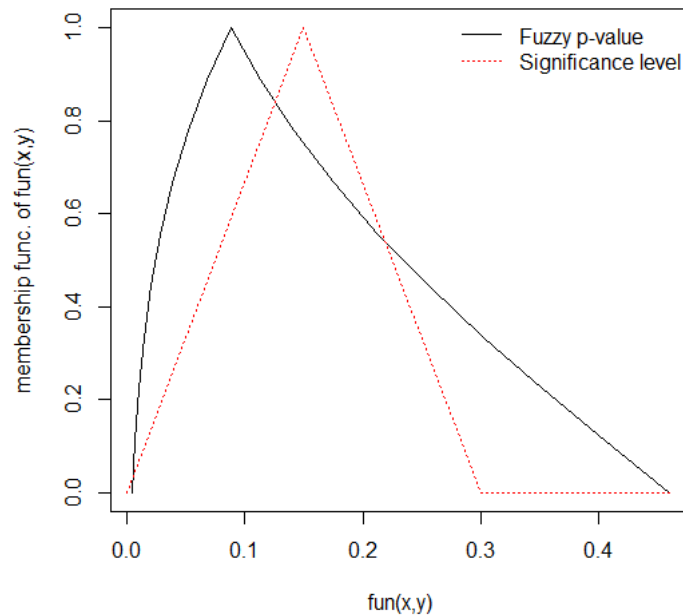
```
t = 1327
H0b = TriangularFuzzyNumber(1275, 1300, 1325)
sig = TriangularFuzzyNumber(0.0, 0.15, 0.3)
n = 36
sigma = 120
p.value = function(t, H0b) 1-pnorm((t-H0b)/(sigma/sqrt(n)))
fuzzy.p.value(t, H0b, sig, p.value, fig = 2)
```

در نهایت پس از محاسبه $\Delta_{\tilde{S}\tilde{P}} = 0.17$ و $\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}} = 0.19$ با استفاده از بسته نرم‌افزاری FPV، \tilde{H} در سطح معنی‌داری $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0.15, 0.3)$ با درجه پذیرش $D(\tilde{S} > \tilde{P}) = 0.53$ پذیرفته می‌شود (شکل ۵.۳).

مثال ۵.۳. در ادامه مثال ۲.۳ آزمون فرضیه فازی را بر اساس $\tilde{t} = \tilde{T}(1315, 1327, 1342)$ با بسته FPV آزمون می‌کنیم.

```
t=TriangularFuzzyNumber(1315, 1327, 1342)
H0b=TriangularFuzzyNumber(1275, 1300, 1325)
sig=TriangularFuzzyNumber(0, 0.05, 0.1)
p.value=function(t, H0b) 1-pnorm((t-H0b)/(120/sqrt(36)))
fuzzy.p.value(t, H0b, sig, p.value, fig=3)
```

در نهایت پس از محاسبه $\Delta_{\tilde{S}\tilde{P}} = 0.57$ و $\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}} = 0.329$ با استفاده از بسته نرم‌افزاری FPV، \tilde{H}_0 در سطح معنی‌داری $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0.15, 0.3)$ با درجه پذیرش $D(\tilde{P} > \tilde{S}) = 0.85$ پذیرفته می‌شود. از آنجایی که $fig = 3$ هر سه تابع عضویت \tilde{t} ، \tilde{H}_0 و \tilde{P} رسم می‌شود (شکل ۶.۳).



شکل ۵.۳: نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی داری فازی در مثال ۴.۳

مثال ۶.۳. در ادامه مثال ۳.۳ فرضیه های فازی نشان داده شده در شکل ۳.۳ را آزمون می کنیم. با در نظر گرفتن یک آزمون مشابه در محیط غیر فازی، p -مقدار دقیق تابعی از t (مقدار مشاهده شده دقیق آماره آزمون) و H_{0b} (مرز دقیق فرضیه صفر) به شکل زیر می باشد

$$p\text{-مقدار} = P_{\lambda=12 \times H_{0b}}(T \leq t) = F_T(t)$$

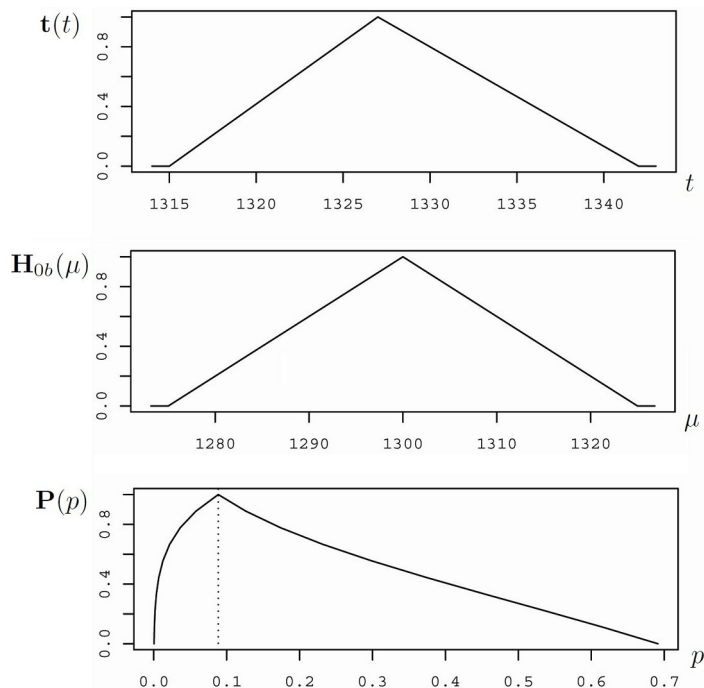
وقتی که $t = \sum_{i=1}^{12} X_i$ و F_T تابع توزیع پواسون با میانگین

$$\lambda = 12 \times H_{0b} (T = \sum_{i=1}^{12} X_i \sim Pois(\lambda = 12 \times H_{0b}))$$

است. بنابراین آزمون فرضیه در محیط فازی را در بسته FPV با کد زیر انجام می دهیم.

```
fuzzy.p.value(t = TriangularFuzzyNumber(24,27,30) ,
H0b = TriangularFuzzyNumber(2.75,3.25,3.25) ,
sig = TriangularFuzzyNumber(0.0,0.05,0.1) ,
p.value = function(t,H0b) \ ppois(t, lambda = 12*H0b) ,
fig = 2 ,
knot = 100)
```

در نهایت پس از محاسبه $\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}} = 0.065$ و $\Delta_{\tilde{P}\tilde{S}} = 0.1$ با استفاده از بسته نرم افزار FPV در \tilde{H}_0 در سطح معنی داری $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0.05, 0.1)$ با درجه پذیرش $D(\tilde{P} > \tilde{S}) = 0.61$ پذیرفته می شود (شکل ۷.۳).



شکل ۶.۳: نمودار سه تابع عضویت مقادیر مشاهده شده آماره آزمون t ، مرز فرضیه صفر فازی (\tilde{H}_{0b}) و p -مقدار فازی در مثال ۵.۳

مثال ۷.۳. فرض کنید X دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 باشد. با توجه به محدودیت برای ثبت داده، نمونه تصادفی به حجم $n = 12$ را نظر می‌گیریم که در شکل ۸.۳ با خط کم رنگ (خاکستری) ترسیم شده است.

$$T(3/16, 3/41, 3/57), T(3/55, 3/79, 4/13), T(2/10, 2/30, 2/45), T(2/68, 3/06, 3/43), \\ T(2/67, 2/74, 2/97), T(1/70, 1/71, 1/74), T(2/31, 2/56, 2/73), T(3/75, 3/86, 4/37), \\ T(0/99, 1/08, 1/11), T(1/60, 1/63, 1/68), T(2/61, 2/78, 2/87), T(2/00, 2/33, 2/36).$$

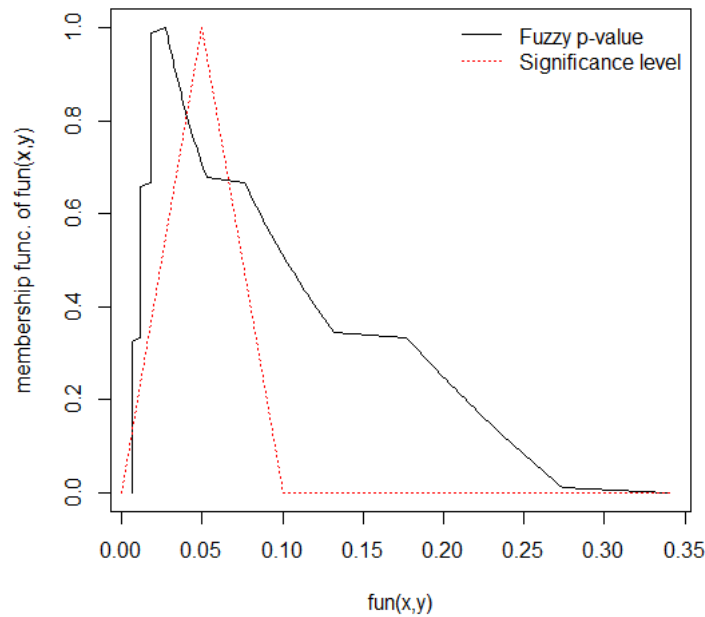
همچنین در شکل ۸.۳ با استفاده از بسته *FuzzyNumbers*، میانگین، واریانس و انحراف معیار استاندارد برای داده‌های فازی محاسبه و رسم شده‌اند. در این مثال قصد داریم تا براساس داده‌های فازی مشاهده‌شده، به این سوال پاسخ دهیم که آیا واریانس جامعه کوچک است یا خیر. به این منظور فرضیه‌های دقیق زیر را به‌زای $\alpha = 0.5$ طراحی می‌کنیم.

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

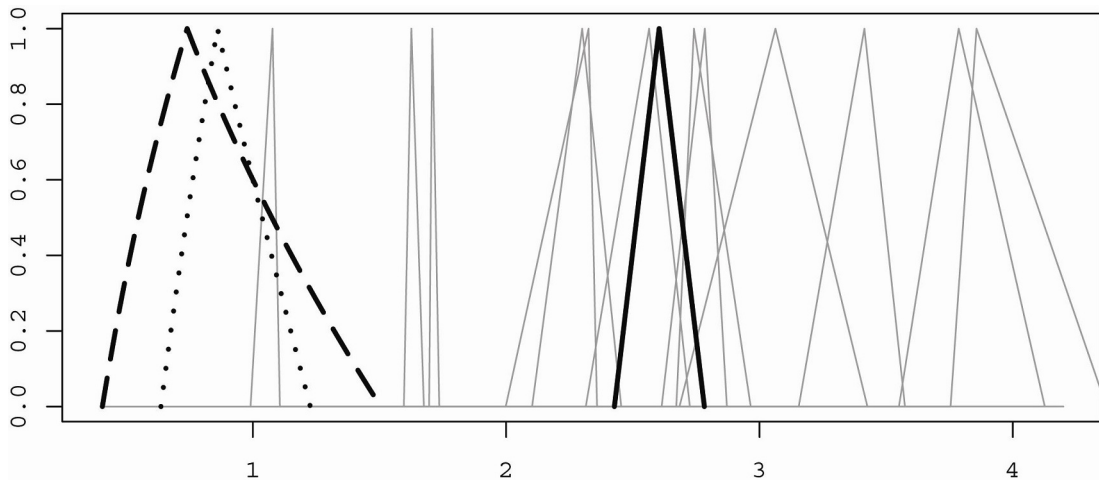
$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

یک آزمون مشابه، اما در محیطی غیر فازی، تابع p -مقدار معمولی برابر است با

$$p - value = P(T > t) = 1 - F_T(t)$$



شکل ۷.۳: نمودار تابع عضویت p -مقدار فازی و سطح معنی داری فازی در مثال ۶.۳



شکل ۸.۳: نمودار تابع عضویت میانگین فازی (خط مشکی)، واریانس فازی (خط بریده) و انحراف استاندارد فازی (خط نقطه چین) برای داده های فازی (خط کم رنگ) در مثال ۷.۳

که در آن $T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$ آماره آزمون تحت نقطه مرزی فرضیه H_0 (تحت فرض $\sigma_0^2 = 0.5$)، و مقدار مشاهده شده t و F_t تابع توزیع تجمعی کی دو با $n-1$ درجه آزادی است. بنابراین می توان فرضیه دقیق را در سطح معنی داری فازی $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0.05, 0.10)$ در بسته FPV با کدهای زیر آزمون کرد.

`fuzzy.p.value(t = (n-1)*s2,`

```

H0b = 0.5,
sig = TriangularFuzzyNumber(0.0,0.05,0.1),
p.value = function(t,H0b),
pchisq(t/H0b, df = n-1, lower.tail = FALSE),
fig = 2,
knot = knot,
xlim = c(0,1),
lwd = 2)
    
```

پس از رسم تابع عضویت p - مقدار فازی به همراه تابع عضویت سطح معنی داری فازی (شکل ۹.۳) و محاسبه $\Delta_{\tilde{p}s} = 0/349$ و $\Delta_{\tilde{s}p} = 0/52$ ، با استفاده از بسته FPV، \tilde{H}_0 با درجه پذیرش $0/870$ در سطح معنی داری تقریباً $0/05$ پذیرفته می شود (سطر اول جدول ۷.۳). در ادامه پذیرش فازی «کوچک» را با یک مجموعه فازی در نظر می گیریم. به جای فرضیه دقیق،

جدول ۲.۳: نتیجه چندین آزمون فرضیه های نادقیق متفاوت در مثال ۷.۳

درجه پذیرش	فرضیه پذیرفته شده	Δ_{SP}	Δ_{PS}	\tilde{H}_1	\tilde{H}_0
0/870	\tilde{H}_0	0/052	0/349	$\tilde{B}(0/5, 0/5)$	$\tilde{S}(0/5, 0/5)$
0/852	\tilde{H}_0	0/060	0/346	$\tilde{B}(0/45, 0/55)$	$\tilde{S}(0/45, 0/55)$
0/837	\tilde{H}_0	0/068	0/349	$\tilde{B}(0/4, 0/6)$	$\tilde{S}(0/4, 0/6)$
0/826	\tilde{H}_0	0/074	0/354	$\tilde{B}(0/35, 0/65)$	$\tilde{S}(0/35, 0/65)$

فرضیه فازی را به شکل زیر در نظر می گیریم:

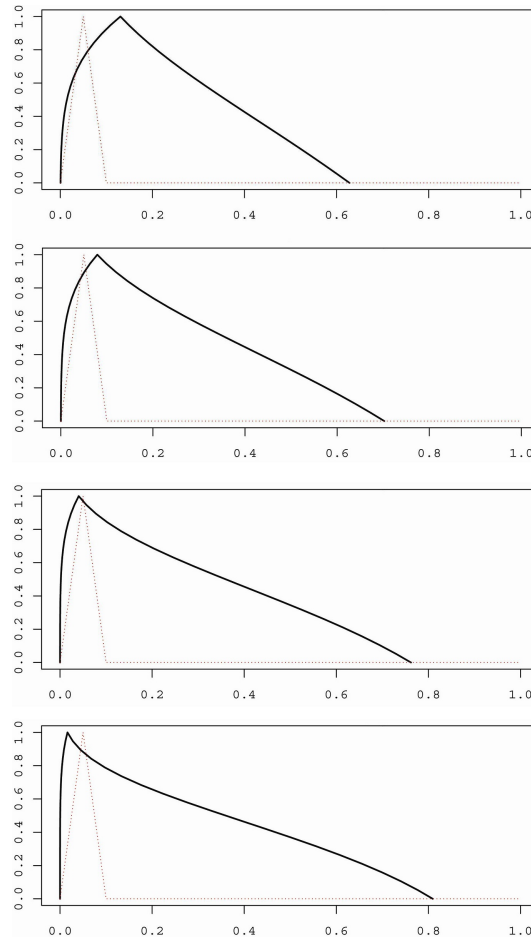
$$\sigma^2 \text{ تقریباً کوچکتر از } 0/05 \text{ است: } \tilde{H}_0$$

$$\sigma^2 \text{ تقریباً بزرگتر از } 0/05 \text{ است: } \tilde{H}_1$$

که در آن \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 به ترتیب با $\tilde{S}(0/45, 0/55)$ و $\tilde{B}(0/45, 0/55)$ نشان می دهیم. نتیجه آزمون در سطح معنی داری $\tilde{S} = \tilde{T}(0, 0/05, 0/10)$ در سطر ۳ جدول ۷.۳ آمده است. علاوه بر جدول ۷.۳، شکل ۹.۳ حاوی نتایج چندین آزمون با فرضیه های نادقیق است.

۴.۳ مقایسه دو بسته FPV و Fuzzy.p.value

برخی برتری ها و نقاط ضعف دو بسته Fuzzy.p.value و FPV را در این بخش بیان می کنیم.



شکل ۹.۳: نمودار تابع عضویت چندین p -مقدار فازی و سطح معنی داری فازی برای آزمون در نظر گرفته در جدول ۷.۳ در مثال ۶.۳

۱. معرفی مقادیر دقیق و واقعی در بسته FPV آسان تر از بسته $Fuzzy.p.value$ است. برای نمونه آماره آزمون دقیق $t = 7/4$ ، در بسته $Fuzzy.p.value$ باید کد $\tilde{T}(7/4, 7/4, 7/4)$ را بنویسیم، در حالی که در بسته FPV تنها کافیست کد $t = 7/4$ را بنویسیم.

۲. توابع عضویت خطی \tilde{T} ، \tilde{Tr} ، \tilde{S} و \tilde{B} که در بخش ۱.۲.۳ معرفی شدند، تنها برای بسته $Fuzzy.p.value$ قابل استفاده هستند و راحت تر از بسته FPV هستند.

۳. برای استفاده از بسته FPV به فراخوانی بسته $FuzzyNumbers$ نیاز داریم. بنابراین بسته $Fuzzy.p.value$ مستقل تر است و برای کاربران نسبت به بسته FPV بیشتر مورد استفاده قرار می گیرد.

۴. خروجی بسته FPV دارای تنوع بیشتری است. به عبارتی کاربر می تواند سه تابع عضویت \tilde{t} ، \tilde{H}_b و p -مقدار فازی را همزمان در یک خروجی بسته FPV داشته باشد و این کار در بسته $Fuzzy.p.value$ امکان پذیر نیست.

۵. بسته FPV برای محاسبه p - مقدار فازی برای هر توزیعی مناسب است، اما بسته $Fuzzy.p.value$ تنها برای توزیع نرمال و پواسون مناسب است و این مهم‌ترین نقطه ضعف بسته $Fuzzy.p.value$ است.

۶. استدلال‌های اضافی در تابع $Fuzzy.p.value$ با تابع $plot$ انجام می‌شود. بنابراین کاربر می‌تواند تغییرات گرافیکی را با $lty, lwd, col, xlim, \dots$ در بسته FPV کنترل کند، این درحالی است که در بسته $Fuzzy.p.value$ این امکان پذیر نیست.

۷. دقت محاسبات و شکل p - مقدار فازی را با $knot.n$ در بسته FPV می‌توان تعیین کرد. این مورد نیز برتری بسته FPV را نسبت به بسته $Fuzzy.p.value$ نشان می‌دهد.

۵.۳ نتیجه

اغلب اوقات برای انجام یک تحلیل و تصمیم‌گیری‌های خاص، با عدم اطمینان داده‌ها، مفروضات نادقیق و فرضیه‌های مبهم همچون تقریباً برابر بودن میانگین برخورد می‌کنیم. چنین فرضیه‌های فازی را نمی‌توان با آزمون فرضیه‌های معمولی آزمود. علاوه بر این زمانی که داده‌ها مبهم باشند نیز باید از آزمون فرضیه‌ها در محیط فازی استفاده کرد و مجموعه‌های فازی ساخت. در چنین مواردی ثبت داده‌ها در قالب یک عدد فازی می‌تواند باعث حفظ بیشتر اطلاعات نهفته در مشاهدات شود. هدف اصلی در این فصل معرفی دو بسته نرم‌افزاری $Fuzzy.p.value$ و FPV با قابلیت نصب بر روی نرم‌افزار R ، برای آزمون این‌گونه مسائل که فرضیه‌ها یا داده‌ها فازی هستند، براساس ایده p - مقدار بود. در این مسائل فازی بودن داده‌ها یا مرز فرضیه صفر به p - مقدار منتقل شده و باعث ایجاد p - مقدار فازی می‌شود که بهتر است سطح معنی‌داری را نیز فازی در نظر بگیریم. بنابراین مقایسه p - مقدار فازی و سطح معنی‌داری فازی در بسته‌های FPV و $Fuzzy.p.value$ فراهم شده است.

فصل ۴

تصمیم‌گیری متعادل آزمون فرضیه در محیط فازی

در آزمون فرضیه مبتنی بر روش p -مقدار معمولی، فرضیه‌های H_0 در برابر H_1 مورد بررسی قرار می‌گیرد و H_1 نقش به‌سزایی در محاسبه آن ندارد. برای از بین بردن این نقطه ضعف، روش آزمون فرضیه متعادل در محیط فازی که علاوه بر فرضیه‌های H_0 در برابر H_1 ، فرضیه‌های H_1 در برابر H_0 نیز مورد نظر قرار می‌گیرد را مطرح می‌کنیم. هدف ما در این فصل این است که ایده p -مقدار فازی، از دو دیدگاه H_0 در برابر H_1 و H_1 در برابر H_0 را بررسی کنیم و شاخصی برای تصمیم‌گیری نهایی در محیط فازی مطرح کنیم. از ویژگی‌های بارز آزمون فرضیه متعادل در محیط فازی نسبت به روش آزمون فرضیه معمولی در محیط فازی، تعادل در میزان بستگی تصمیم به هر دو فرضیه فازی H_0 و H_1 است. این ایده توسط مدنی و همکاران در مقاله‌ای با عنوان «تصمیم‌گیری متعادل آزمون فرضیه فازی» در هشتمین سمینار آمار و احتمال فازی مشهد [۶] ارائه شده است.

۱.۴ مقدمه

در آمار کلاسیک، تصمیم در مورد فرضیه H_0 در مقابل H_1 ، بر اساس مقایسه p -مقدار مشاهده‌شده با α یعنی سطح معنی‌داری آزمون اتخاذ می‌شود. اگر p -مقدار کمتر از α باشد، آن‌گاه فرضیه H_0 در سطح معنی‌داری α رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود. اشکال عمده این روش آن است که

در محاسبه p - مقدار نقش فرضیه H_1 کم‌رنگ و محاسبات در مورد آن بیشتر بر اساس H_0 صورت می‌گیرد. همچنین برای انجام آزمون‌های کلاسیک نیاز به تعیین سطح معنی‌داری α داریم و با توجه به عدم دست بودن فرمولی برای تعیین α ، می‌توان ادعا کرد که تصمیم نهایی تابعی از α است که خود موجبات سوء استفاده از آزمون کلاسیک (برای موجه جلوه کردن نتایج) توسط آزمایشگر را نیز فراهم می‌سازد. به منظور رفع این نقایص، عمادی و ارقامی [۱۵] مقایسه $P^{\circ 1}$ با $P^{\circ 0}$ ، را به جای مقایسه p - مقدار با α ، پیشنهاد کردند. هدف ما در این فصل ایجاد تعادل در شیوه p - مقدار فازی پرچمی و همکاران [۳] با استفاده از ایده p - مقدار عمادی و ارقامی [۱۵] و دستیابی به شاخصی برای پذیرش (یا رد) فرضیات است. بر این اساس با بیان قاعده تصمیم‌گیری، p - مقدار متعادل را برای سه حالت (۱) فرضیه فازی، (۲) داده فازی و (۳) فرضیه و داده فازی بحث و بررسی می‌کنیم.

برای تاثیر متعادل هر دو فرضیه H_0 و H_1 رویکرد مقایسه « p - مقدار آزمون H_0 در مقابل H_1 » و « p - مقدار آزمون H_1 در مقابل H_0 » را در محیط فازی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌دهیم [۶]. از آنجا که در این فصل p - مقدارها به صورت مجموعه‌های فازی هستند، باید این مقایسه به شکل فازی صورت گیرد. بنابراین نیاز به ملاکی برای مقایسه دو مجموعه فازی داریم، که از روش مطرح‌شده در تعریف ۱۲.۱ استفاده کرده و قاعده تصمیم‌گیری را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

۱.۱.۴ قاعده تصمیم‌گیری متعادل

در این فصل با تعمیم دیدگاه عمادی و ارقامی [۱۵]، قاعده تصمیم را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. در مساله آزمون فرضیه‌های فازی، $(\tilde{P}^{\circ 1} \succ \tilde{P}^{\circ 0})$ را درجه پذیرش فرضیه فازی صفر نسبت به فرضیه فازی مقابل و $(\tilde{P}^{\circ 1} \succ \tilde{P}^{\circ 0})$ را درجه پذیرش فرضیه فازی مقابل نسبت به فرضیه فازی صفر می‌نامیم، که در آن \tilde{p} ، $\tilde{P}^{\circ 1}$ ، \tilde{H}_0 در مقابل \tilde{H}_1 و \tilde{p} ، $\tilde{P}^{\circ 0}$ ، \tilde{H}_1 در مقابل \tilde{H}_0 مقدار آزمون \tilde{H}_1 در مقابل \tilde{H}_0 است.

قاعده تصمیم‌گیری متعادل: در آزمون فرضیه‌های فازی، \tilde{H}_0 را در مقابل \tilde{H}_1 ، با درجه $(\tilde{P}^{\circ 1} \succ \tilde{P}^{\circ 0})$ می‌پذیریم اگر $(\tilde{P}^{\circ 1} \succ \tilde{P}^{\circ 0}) \geq D(\tilde{P}^{\circ 1} \succ \tilde{P}^{\circ 0})$ و در غیر این صورت \tilde{H}_1 را با درجه $(\tilde{P}^{\circ 1} \succ \tilde{P}^{\circ 0})$ در مقابل \tilde{H}_0 می‌پذیریم.

۲.۴ آزمون متعادل فرضیه‌های فازی با داده‌های دقیق

بر اساس p - مقدار فازی

۱.۲.۴ انگیزه و تعریف فرضیه‌های فازی

انگیزه معرفی فرضیه‌های فازی را به طور خلاصه با مثال زیر یادآوری می‌کنیم.

مثال ۱.۴. فرض کنید یک آزمایشگر علاقمند به ارزیابی میانگین رشد گیاه با اندازه‌گیری قطر آن است که دارای توزیع نرمال با میانگین نامعلوم μ و انحراف استاندارد معلوم σ می‌باشد. روش معمول آزمون فرضیه $H_0: \mu = \mu_0$ در مقابل $H_1: \mu \neq \mu_0$ برای مقادیر معین μ_0 بر مبنای نمونه تصادفی \mathbf{X} است که $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, \dots, n$. بدیهی است که اگر میانگین نمونه داده‌شده، کمی متفاوت‌تر از μ_0 باشد، آن‌گاه فرضیه صفر قابل قبول است. در صورتی که اندکی تفاوت μ_0 از μ ، سبب نقض معادله ریاضی مطرح‌شده در قالب فرضیه H_0 می‌شود. بنابراین مناسب‌تر و منطقی‌تر است فرضیه‌های \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 را به ترتیب با اصطلاحات فازی «نزدیک به μ_0 » و «دور از μ_0 » فرمول‌بندی کنیم. به عبارت دیگر فرضیه‌های واقعی‌تر « \tilde{H}_0 : نزدیک به μ_0 است» در مقابل « \tilde{H}_1 : دور از μ_0 است» آزمون شود.

در مواجهه با چنین شرایط واقعی برخی فرضیه‌ها را به صورت « θ تابعی از H_0 است: \tilde{H}_0 » در مقابل « θ تابعی از H_1 است: \tilde{H}_1 »، صورت‌بندی می‌کنیم و آن را مساله آزمون فرضیه‌های فازی می‌نامیم. برای چنین مسائلی، رویکرد p -مقدار فازی جدیدی را در این فصل ارائه می‌دهیم که دارای مزایای مهمی از جمله هم‌زمانی بررسی هر دو فرضیه صفر و جایگزین است. مشابه انواع فرضیه‌های معمولی بیان‌شده در ستون الف از جدول ۱.۴، فرضیه‌های فازی نیز معمولاً به صورت ستون ب از جدول ۱.۴ بیان می‌شوند که در آن θ_0 و θ_1 با استفاده از رابطه $(H_{0b})_\delta = [\theta_0(\delta), \theta_1(\delta)]$ تعریف می‌شوند. بدیهی است نواحی بحرانی فرضیه‌های فازی مشابه ناحیه بحرانی آزمون فرضیه‌های دقیق است. به عبارتی دیگر ناحیه بحرانی آزمون‌های ۱ و ۳ از جدول ۱.۴ همانند بخش (الف) از رابطه (۷.۱) است. همچنین ناحیه بحرانی آزمون‌های ۲ و ۴ از جدول ۱.۴ همانند بخش (ب) از رابطه (۷.۱) و ناحیه بحرانی آزمون ۵ از جدول ۱.۴ همانند بخش (ج) از رابطه (۷.۱) است.

جدول ۱.۴: صورت کلی فرضیه‌های آماری H_0 و H_1 کلاسیک و فازی

آزمون	فرضیه	الف) فرضیه‌های آماری کلاسیک	ب) فرضیه‌های آماری فازی
۱	H_0	$\theta = \theta_0$	θ تقریباً θ_0 است
	H_1	$(\theta_0 > \theta_1) \theta = \theta_1$	θ تقریباً θ_1 است ($\theta_0 > \theta_1$)
۲	H_0	$\theta = \theta_0$	θ تقریباً θ_0 است
	H_1	$(\theta_0 < \theta_1) \theta = \theta_1$	θ تقریباً θ_1 است ($\theta_0 < \theta_1$)
۳	H_0	$\theta \geq \theta_0$	θ تقریباً بزرگتر از θ_0 است
	H_1	$\theta < \theta_0$	θ تقریباً کوچکتر از θ_0 است
۴	H_0	$\theta \leq \theta_0$	θ تقریباً کوچکتر از θ_0 است
	H_1	$\theta > \theta_0$	θ تقریباً بزرگتر از θ_0 است
۵	H_0	$\theta = \theta_0$	θ نزدیک به θ_0 است
	H_1	$\theta \neq \theta_0$	θ دور از θ_0 است

۲.۲.۴ - مقدار فازی آزمون متعادل

در مساله آزمون فرضیه‌های فازی H_0 در مقابل H_1 با داده‌های دقیق، پرچمی و همکاران [۲۶]، δ -برش‌های p -مقدار فازی فرضیه‌های \tilde{H}_0 در مقابل \tilde{H}_1 ، در سه حالت مطرح‌شده در (۷.۱) را محاسبه کرده و به صورت قضیه ۱.۲ در فصل قبل به دست آوردند که با نماد $\tilde{P}^{\circ 1}$ نشان می‌دهیم. به طور مشابه ما p -مقدار فازی فرضیه \tilde{H}_1 در مقابل \tilde{H}_0 را به صورت قضیه زیر بیان می‌کنیم

قضیه ۱.۴. در مساله آزمون فرضیه‌های فازی H_1 در مقابل H_0 با داده‌های دقیق، δ -برش‌های p -مقدار فازی فرضیه‌های \tilde{H}_0 در مقابل \tilde{H}_1 ، در سه حالت مطرح‌شده در (۷.۱) را به صورت زیر به دست می‌آوریم و با نماد $\tilde{P}^{\circ 1}$ نشان می‌دهیم.

$$\tilde{P}_\delta^{\circ 1} = [P_{\theta_1(\delta)}(T \geq t), P_{\theta_r(\delta)}(T \geq t)] \quad (\text{الف})$$

$$\tilde{P}_\delta^{\circ 1} = [P_{\theta_r(\delta)}(T \leq t), P_{\theta_1(\delta)}(T \leq t)] \quad (\text{ب})$$

$$\tilde{P}_\delta^{\circ 1} = \begin{cases} [2P_{\theta_1(\delta)}(T \geq t), 2P_{\theta_r(\delta)}(T \geq t)] & t \geq m_r \\ [2P_{\theta_r(\delta)}(T \leq t), 2P_{\theta_1(\delta)}(T \leq t)] & t \leq m_l \end{cases} \quad (\text{ج})$$

که در آن $\delta \in (0, 1]$ ، و توابع θ_1, θ_r با استفاده از رابطه $[\theta_1(\delta), \theta_r(\delta)] = (H_{ob})_\delta$ حاصل می‌شوند. از آن جا که میانه آماره آزمون تحت مرز H_{ob} یک مجموعه فازی با تابع عضویت $\mathbf{m}(m) = H_{ob}(\theta)$ (که در آن میانه توزیع T تحت θ با m نشان داده شده) می‌باشد، لذا در حالت (ج) داریم $m_l = \inf\{m | m \in \text{supp}(\mathbf{m})\}$ ، $m_r = \sup\{m | m \in \text{supp}(\mathbf{m})\}$. با پیدا شدن δ -برش‌ها می‌توان p -مقدار فازی فرضیه \tilde{H}_1 در مقابل \tilde{H}_0 را به دست آورد که با نماد $\tilde{P}^{\circ 1}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۴. در مثال ۸.۲ قصد داریم فرضیه فازی « μ تقریباً ۱۳۰۰ است: \tilde{H}_0 » در مقابل فرضیه فازی « μ تقریباً ۱۴۰۰ است: \tilde{H}_1 » را با توابع عضویت زیر آزمون کنیم

$$\tilde{H}_0(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu-1200}{100} & 1200 < \mu \leq 1300 \\ \frac{1400-\mu}{100} & 1300 < \mu \leq 1400 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\tilde{H}_1(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu-1300}{100} & 1300 < \mu \leq 1400 \\ \frac{1500-\mu}{100} & 1400 < \mu \leq 1500 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با استفاده از تعریف ۵.۲، برای $j = 0, 1$ ، $H_{jb}(\mu) = H_j(\mu)$ است. این مثال حالت خاصی از آزمون ۲ از جدول ۱.۴ (ستون ب) است و ناحیه بحرانی برای آزمون \tilde{H}_0 در مقابل \tilde{H}_1 به صورت (ب) در رابطه (۷.۱) است. با استفاده از قضیه ۱.۲، δ -برش‌های p -مقدار فازی \tilde{H}_0 در مقابل \tilde{H}_1 به صورت

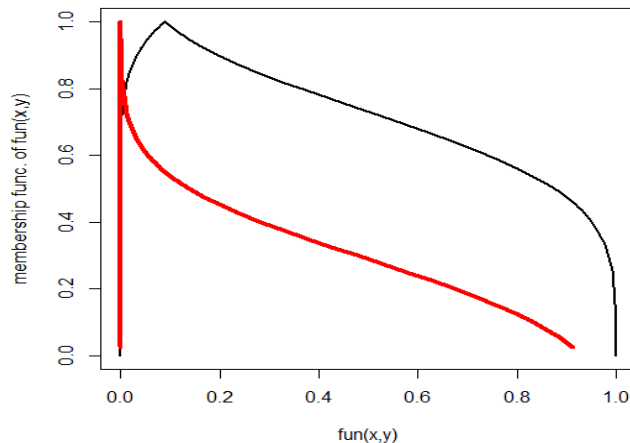
زیر به دست می‌آیند

$$\tilde{P}_\delta^{\circ 1} = \left[\int_{\frac{12^\circ}{\sqrt{46}}}^{\frac{14^\circ - \mu_1(\delta)}{\sqrt{46}}} (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) dz, \int_{\frac{12^\circ}{\sqrt{46}}}^{\frac{14^\circ - \mu_2(\delta)}{\sqrt{46}}} (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) dz \right]$$

که در آن به ازای هر $\delta \in (0, 1]$ و $\mu_1(\delta) = 100\delta + 1200$ ، $\mu_2(\delta) = 1400 - 100\delta$ ، با مشخص شدن کلیه δ -برش‌ها، p -مقدار فازی \tilde{H}_0 در مقابل \tilde{H}_1 مشخص می‌شود و نمودار تابع عضویت آن در شکل ۱.۴ رسم شده است. از آنجا که علاوه بر $\tilde{P}^{\circ 1}$ به $\tilde{P}^{\circ 1}$ نیز نیاز داریم، δ -برش‌های آن با استفاده از قضیه ۱.۴، به صورت زیر محاسبه می‌شوند و نمودار تابع عضویت آن در ۱.۴ رسم شده است.

$$\tilde{P}_\delta^{\circ 1} = \left[\int_{\frac{12^\circ}{\sqrt{46}}}^{\frac{14^\circ - \mu_2(\delta)}{\sqrt{46}}} (1 - (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)) dz, \int_{\frac{12^\circ}{\sqrt{46}}}^{\frac{14^\circ - \mu_1(\delta)}{\sqrt{46}}} (1 - (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)) dz \right]$$

پس از محاسبه $\tilde{P}_\delta^{\circ 1}$ و $\tilde{P}_\delta^{\circ 1}$ با استفاده از بسته نرم‌افزاری FPV [۲۴]، $D(\tilde{P}^{\circ 1} \succ \tilde{P}^{\circ 1}) = 0.72$ و $D(\tilde{P}^{\circ 1} \succ \tilde{P}^{\circ 1}) = 0.72$ در سطح معنی‌داری تقریباً ۰.۱۵، پذیرفته می‌شود.



شکل ۱.۴: توابع عضویت $\tilde{P}^{\circ 1}$ (مشکی) و $\tilde{P}^{\circ 1}$ (قرمز) در مثال ۲.۴.

۳.۴ آزمون متعادل فرضیه‌های دقیق با داده‌های فازی بر اساس p -مقدار فازی

فرض کنید مشاهدات استفاده‌شده در آزمون فرضیه دقیق H_0 در مقابل فرضیه دقیق H_1 ، دارای ابهام بوده و به صورت $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in F_c(R)$ باشند. در این حالت با استفاده از اصل گسترش، می‌توان

گفت مقدار مشاهده‌شده‌ی آماره‌ی آزمون یک مجموعه فازی به صورت $t = h(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ است که تابع عضویت آن نیز قابل محاسبه است. در این حالت p -مقدار به‌عنوان تابعی از t خود نیز به یک مجموعه فازی تبدیل می‌شود که آن را به اختصار با \tilde{P} نشان می‌دهیم. در قضیه ۲.۴، δ -برش‌های p -مقدار فازی برای سه نوع ناحیه بحرانی (۷.۱)، ارائه شده‌اند.

۱.۳.۴ - مقدار فازی آزمون متعادل

در مساله آزمون فرضیه‌ها با داده‌های فازی، δ -برش‌های p -مقدار فازی در سه حالت (۷.۱) برای آزمون H_0 در مقابل H_1 در قضیه ۲.۲ مطرح شد، که p -مقدار فازی را با نماد $\tilde{P}^{\circ 1}$ نشان می‌دهیم. حال به‌طور مشابه p -مقدار فازی فرضیه H_1 در مقابل H_0 را به‌صورت قضیه زیر بیان می‌کنیم

قضیه ۲.۴. فرض کنید $X \sim f_\theta$ و $\theta \in \Theta$. در مساله آزمون فرضیه‌ها با داده‌های فازی، δ -برش‌های p -مقدار فازی در سه حالت (۷.۱) برای آزمون H_1 در مقابل H_0 به‌صورت زیر به دست می‌آوریم، که p -مقدار فازی را با نماد $\tilde{P}^{\circ 1}$ نشان می‌دهیم.

$$\text{الف) } \tilde{P}_\delta^{\circ 1} = [P_{\theta_0}(T \geq t_r(\delta)), P_{\theta_0}(T \geq t_l(\delta))]$$

$$\text{ب) } \tilde{P}_\delta^{\circ 1} = [P_{\theta_0}(T \leq t_l(\delta)), P_{\theta_0}(T \leq t_r(\delta))]$$

$$\tilde{P}_\delta^{\circ 1} = \begin{cases} [2P_{\theta_0}(T \geq t_r(\delta)), 2P_{\theta_0}(T \geq t_l(\delta))] & t_l \geq m \\ [2P_{\theta_0}(T \leq t_l(\delta)), 2P_{\theta_0}(T \leq t_r(\delta))] & t_r \leq m \end{cases} \quad \text{ج)$$

که در آن $\theta_0 \in (\circ, 1]$ ، $\delta \in (\circ, 1]$ نقطه مرزی فرضیه H_0 و توابع t_l و t_r با استفاده از رابطه $t_\delta = [t_l(\delta), t_r(\delta)]$ حاصل می‌شوند. در حالت (ج) داریم $t_l = \inf\{t | t \in \text{supp}(t)\}$ و $t_r = \sup\{t | t \in \text{supp}(t)\}$.

مثال ۳.۴. در مثال ۱.۲ و با در نظر گرفتن اعداد فازی که در جدول ۱.۲ گزارش شده‌اند، قصد داریم فرضیه آماری $H_0: \mu = 1300$ را در مقابل $H_1: \mu > 1300$ آزمون کنیم. آماره این آزمون یعنی $T = \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$ در نقطه مرزی فرضیه H_0 دارای توزیع $N(1300, \frac{30^2}{10})$ بوده و مقدار مشاهده‌شده آن به کمک اصل گسترش به صورت عدد مثلثی $(1288, 1313, 1331)$ به دست می‌آید. از آن‌جا که ناحیه بحرانی از نوع (ب) می‌باشد، با توجه به قضیه ۲.۴، δ -برش‌های p -مقدار فازی به‌ازای $\delta \in (\circ, 1]$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند

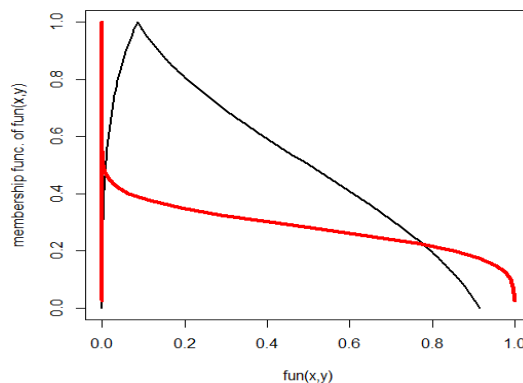
$$\tilde{P}_\delta^{\circ 1} = \left[\int_{\frac{1300}{\sqrt{10}}}^{\frac{1300 + t_r(\delta) - 1300}{\sqrt{10}}} (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \int_{\frac{1300}{\sqrt{10}}}^{\frac{1300 + t_l(\delta) - 1300}{\sqrt{10}}} (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right]$$

که در آن $\tilde{t} = \tilde{T}(1288, 1313, 1331)$ و در نتیجه نقاط ابتدا و انتهای δ -برش n به‌صورت $t_l(\delta) = 1331 - 18\delta$ ، $t_r(\delta) = 1288 + 25\delta$ محاسبه می‌شوند. با مشخص شدن کلیه δ -برش‌ها، p -مقدار فازی مشخص می‌شود. نمودار تابع عضویت مربوط در شکل ۲.۴ رسم شده است. از آن‌جا که

علاوه بر $\tilde{P}^{\circ 1}$ به \tilde{P}° نیز نیاز داریم، δ -برش‌های آن به صورت زیر محاسبه می‌شوند و نمودار تابع عضویت آن در شکل ۲.۴ رسم شده است.

$$\tilde{P}_\delta^{\circ 1} = \left[\int_{\frac{t_{\tilde{P}^{\circ 1}}(\delta) - 1300}{\sqrt{10}}}^{\infty} (1 - (\sqrt{2}\pi)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}) \exp\left(-\frac{z^2}{\sqrt{2}}\right) dz, \int_{\frac{t_{\tilde{P}^{\circ 1}}(\delta) - 1300}{\sqrt{10}}}^{\infty} (1 - (\sqrt{2}\pi)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}) \exp\left(-\frac{z^2}{\sqrt{2}}\right) dz \right].$$

پس از محاسبه $\tilde{P}_\delta^{\circ 1}$ و \tilde{P}_δ° با استفاده از بسته FPV [۲۴]، 0.74 ، $D(\tilde{P}^{\circ 1}) \succ D(\tilde{P}^{\circ}) \succ \tilde{P}^{\circ 1} = 0.74$ پذیرفته می‌شود. $\tilde{P}^{\circ 1}$ به دست می‌آید و در نهایت فرضیه فازی \tilde{H}_0 با درجه پذیرش 0.74 پذیرفته می‌شود.



شکل ۲.۴: توابع عضویت $\tilde{P}^{\circ 1}$ (مشکی) و \tilde{P}° (قرمز) در مثال ۳.۴

۴.۴ آزمون متعادل فرضیه‌های فازی با داده‌های فازی بر اساس p -مقدار فازی

در این بخش قصد داریم تا با الهام گرفتن از ایده‌های مطرح شده در بخش‌های قبل، فرضیه‌های فازی

\tilde{H}_0 : تابع H_0 است:

\tilde{H}_1 : تابع H_1 است:

را بر پایه داده‌های نادقیق $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in FC(\mathbb{R})$ و با استفاده از روش p -مقدار، آزمون کنیم. بدیهی است که در این مساله جدید، ابهام هم از طریق داده‌ها و هم از طریق فرضیه \tilde{H}_0 به p -مقدار منتقل می‌شود و منجر به به وجود آمدن p -مقدار فازی می‌شود.

۱.۴.۴ p -مقدار فازی آزمون متعادل

در مساله آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های فازی، δ -برش‌های p -مقدار فازی در سه حالت مطرح شده در (۷.۱) برای آزمون \tilde{H}_0 در مقابل \tilde{H}_1 در قضیه ۲.۲ مطرح شد، که p -مقدار فازی را با نماد

$\tilde{P}^{\circ 1}$ نشان می‌دهیم. حال به‌طور مشابه p -مقدار فازی فرضیه \tilde{H}_1 در مقابل \tilde{H}_0 را به‌صورت قضیه زیر بیان می‌کنیم

قضیه ۳.۴. فرض کنید $X \sim f_{\theta}$ و $\theta \in \Theta$. در مساله آزمون فرضیه‌های فازی با داده‌های فازی، δ -برش‌های p -مقدار فازی در سه حالت مطرح شده در (۷.۱) برای آزمون \tilde{H}_1 در مقابل \tilde{H}_0 به‌صورت زیر به دست می‌آوریم، که p -مقدار فازی را با نماد $\tilde{P}^{\circ 1}$ نشان می‌دهیم.

$$\tilde{P}_{\delta}^{\circ 1} = [P_{\theta_1(\delta)}(T \geq t_2(\delta)), P_{\theta_2(\delta)}(T \geq t_1(\delta))] \quad (\text{الف})$$

$$\tilde{P}_{\delta}^{\circ 1} = [P_{\theta_2(\delta)}(T \leq t_1(\delta)), P_{\theta_1(\delta)}(T \leq t_2(\delta))] \quad (\text{ب})$$

$$\tilde{P}_{\delta}^{\circ 1} = \begin{cases} [P_{\theta_1(\delta)}(T \geq t_2(\delta)), P_{\theta_2(\delta)}(T \geq t_1(\delta))] & t_l \geq m_r \\ [P_{\theta_2(\delta)}(T \leq t_1(\delta)), P_{\theta_1(\delta)}(T \leq t_2(\delta))] & t_r \leq m_l \end{cases} \quad (\text{ج})$$

که در آن $\delta \in (0, 1]$ و توابع θ_1, θ_2, t_1 و t_2 با استفاده از روابط $t_{\delta} = [\theta_1(\delta), \theta_2(\delta)]$ و $(H_{\circ b})_{\delta}$ حاصل می‌شوند. همچنین در حالت (ج)، مقادیر t_l, t_r, m_l و m_r همانند قضیه‌های ۱.۴ و ۲.۴ معرفی می‌شوند.

مثال ۴.۴. در مثال ۳.۴ فرض کنید آماره آزمون با استفاده از اصل گسترش به صورت

$$\tilde{T}(1315, 1327, 1342)$$

محاسبه شده است و قصد داریم فرضیه‌های فازی زیر را آزمون کنیم

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \mu \text{ تقریباً } 1300 \text{ است} \\ \tilde{H}_1: \mu \text{ تقریباً بزرگتر از } 1300 \text{ است} \end{cases}$$

که در آن‌ها \tilde{H}_1 و \tilde{H}_0 به‌ترتیب با توابع عضویت

$$\tilde{B}(1275, 1325) \in F_B(\mathbb{R}) \text{ و } \tilde{T}(1275, 1300, 1325) \in F_T(\mathbb{R})$$

صورت‌بندی شده‌اند (شکل ۱۲.۲). با توجه به شکل فرضیه \tilde{H}_1 ، ناحیه بحرانی آزمون از نوع (ب) می‌باشد و با توجه به قضیه ۳.۴، δ -برش‌های p -مقدار فازی به‌صورت زیر به دست می‌آیند

$$\tilde{P}_{\delta}^{\circ 1} = \left[\int_{\frac{1275}{\sqrt{36}}}^{\infty} (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) dz, \int_{\frac{1275}{\sqrt{36}}}^{\infty} (\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) dz \right]$$

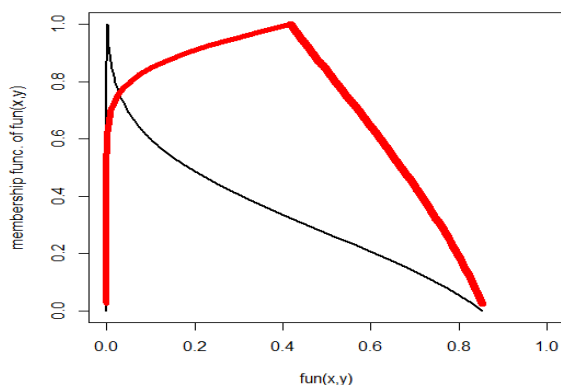
که در آن $\tilde{H}_{\circ b} = \tilde{T}(1275, 1300, 1325)$ مرز فرضیه \tilde{H}_0 می‌باشد و بنابراین به‌ازای هر $\delta \in (0, 1]$ داریم $\mu_1(\delta) = 1275 + 25\delta$ و $\mu_2(\delta) = 1325 - 25\delta$. با مشخص شدن δ -برش‌ها می‌توان p -مقدار فازی را مانند شکل ۳.۴ رسم کرد. از آن‌جا که علاوه بر $\tilde{P}^{\circ 1}$ به $\tilde{P}^{\circ 1}$ نیز نیاز داریم، که

آزمون متعادل فرضیه‌های فازی با داده‌های فازی بر اساس p -مقدار فازی ۸۱

δ -برش‌های آن به صورت زیر محاسبه می‌شوند و نمودار تابع عضویت آن در شکل ۳.۴ رسم شده است.

$$\tilde{P}_\delta^{\circ 1} = \left[\int_{\frac{t_1(\delta) - \mu_1(\delta)}{\sqrt{1^\circ}}_1}^{\infty} (1 - (\sqrt{2}\pi)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \int_{\frac{t_2(\delta) - \mu_2(\delta)}{\sqrt{1^\circ}}_2}^{\infty} (1 - (\sqrt{2}\pi)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right]$$

پس از محاسبه $\tilde{P}_\delta^{\circ 1}$ و $\tilde{P}_\delta^{\circ 0}$ با استفاده از بسته FPV ، $D(\tilde{P}^{\circ 1} \succ \tilde{P}^{\circ 0}) = 0.12$ و $D(\tilde{P}^{\circ 0} \succ \tilde{P}^{\circ 1}) = 0.88$ پذیرفته می‌شود. در نهایت فرضیه فازی \tilde{H}_1 با درجه پذیرش 0.88 پذیرفته می‌شود.



شکل ۳.۴: توابع عضویت $\tilde{P}^{\circ 1}$ (مشکی) و $\tilde{P}^{\circ 0}$ (قرمز) در مثال ۴.۴.

نتیجه

در این فصل یک ایده مبتنی بر p -مقدار جدید فازی برای آزمون فرضیه متعادل در محیط فازی ارائه شد. مزیت اصلی این ایده پیشنهادی مبتنی بر p -مقدار فازی، این است که بر اساس هر دو فرضیه صفر فازی و فرضیه جانشین فازی است.

فصل ۵

رویکرد مبتنی بر p - مقدار برای آزمون کیفیت با فرضیه‌های فازی

در این فصل به عنوان کاربردی از مطالب بیان شده، رویکردی نوین برای آزمون فرضیه فازی «کارایی/عدم کارایی فرآیند» بر اساس شاخص‌های کارایی فرآیند C_p و C_{pm} بررسی شده است. برخی مطالب این فصل برگرفته از [۲۵] است.

۱.۵ مقدمه

در آزمون کیفیت فرآیندهای صنعتی، محقق فرضیه مبهم «شاخص کیفیت پایین است» را در مقابل «شاخص کیفیت بالا است» آزمون و بررسی می‌کند. اما اغلب در آزمون کیفیت معمولی، دو مفهوم فازی کم و زیاد با دو فرضیه دقیق بررسی می‌شوند. در این فصل این دو مفهوم فازی با دو مجموعه فازی مکمل در نظر گرفته می‌شود. پس از آن، یک رویکرد جدید مبتنی بر p - مقدار برای آزمون ذکر شده مورد بحث است که در آن فرضیه‌های فازی مبتنی بر دو شاخص کیفیت C_p و C_{pm} در نظر گرفته شده‌اند. از ویژگی‌های بارز این رویکرد جدید نسبت به روش p - مقدار معمولی در آزمون فرضیه، این است که نتیجه این رویکرد جدید به هر دو فرضیه فازی صفر و جانشین بستگی دارد، در حالی که روش p - مقدار معمولی تنها بر طبق فرضیه فازی صفر است. برای روشن شدن پتانسیل ایده پیشنهادی در فرآیند تحلیل کیفیت، دو مثال کاربردی بر اساس داده‌های واقعی مطرح شده‌اند.

تعریف ۱.۵. فرض کنید X یک مقدار واقعی متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال (جرم) $f(x; \theta)$ باشد. تابع چگالی احتمال وزنی X ، تحت فرضیه فازی «تابع H است: \tilde{H} » به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(x; \tilde{H}) = \int_{\theta} H^*(\theta) f(x; \theta) d\theta. \quad (1.5)$$

که در آن $H^*(\theta) = \frac{H(\theta)}{\int_{\theta} H(\theta) d\theta}$ و $\int_{\theta} H(\theta) d\theta < \infty$ است. لازم به ذکر است زمانی که تکیه‌گاه H گسسته باشد (θ گسسته باشد)، به جای انتگرال از مجموع استفاده می‌شود.

ملاحظه ۱.۵. اگر فرضیه دقیق « $H: \theta = \theta_0$ » را در نظر بگیریم، آن‌گاه $f(x; \tilde{H}) = f(x; \theta_0)$ است.

برهان. از آن جا که $H(\theta_0) = 1$ ، ابتدا $H^*(\theta)$ را به دست می‌آوریم

$$H^*(\theta) = \frac{H(\theta_0)}{\int H(\theta_0) d\theta} = \frac{1}{\int 1 d\theta} = 1$$

حال با جایگذاری $H^*(\theta)$ در رابطه (۱.۵) داریم:

$$f(x, \tilde{H}) = \int 1 \times f(x, \theta_0) d\theta = f(x, \theta_0) \int 1 d\theta = f(x, \theta_0)$$

□

ملاحظه ۲.۵. در خانواده نمایی تک پارامتری تابع چگالی وزنی $f(x; \tilde{H})$ معرفی شده در تعریف ۱.۵ یک تابع چگالی از $f(x; \tilde{H})$ است که تابعی نامنفی و $\int_x f(x; \tilde{H}) dx = 1$ می‌باشد. یکی از مزایای تعریف ۱.۵ این است که تابع چگالی احتمال تمام توابع چگالی احتمال ممکن با وزن‌های متفاوت را می‌تواند ادغام کند. مقدار $H^*(\theta)$ به عنوان وزن $f(x; \theta)$ می‌تواند باشد. وزن تابع چگالی می‌تواند $f(x; \theta)$ ممکن متفاوتی را در نقش‌های متفاوت در این انتگرال بازی کند.

برهان. برای اثبات این که $\int_x f(x; \tilde{H}) dx = 1$ داریم

$$\begin{aligned} \int_x f(x; \tilde{H}) dx &= \int_x \int_{\theta} H^*(\theta) f(x; \theta) d\theta dx \\ &= \int_x \int_{\theta} \frac{H(\theta)}{\int_{\theta} H(\theta) d\theta} f(x; \theta) d\theta dx \\ &= \int_{\theta} \int_x \frac{H(\theta)}{\int_{\theta} H(\theta) d\theta} f(x; \theta) dx d\theta \\ &= \int_{\theta} \frac{H(\theta)}{\int_{\theta} H(\theta) d\theta} \int_x f(x; \theta) dx d\theta \\ &= \frac{\int_{\theta} H(\theta) d\theta}{\int_{\theta} H(\theta) d\theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

۲.۵ ایده مبتنی بر p - مقدار جدید در آزمون فرضیه

با تعاریف ۳.۲ و ۵.۲ ابتدا می‌توانیم ادعا کنیم که « θ تابعی از H_b است: \tilde{H}_b » یک فرضیه فازی است و بنابراین p - مقدار کلاسیک را برای آزمون فرضیه‌های فازی یک‌طرفه مبتنی بر تابع چگالی وزنی آماره آزمون تحت مرز فرضیه فازی تعمیم می‌دهیم. فرض کنید نمونه تصادفی $X = (X_1, \dots, X_n)$ با مقادیر مشاهده شده $x = (x_1, \dots, x_n)$ از تابع چگالی احتمال (جرم احتمال) $f(x; \theta)$ با پارامتر مورد نظر θ است. علاوه بر این $T = T(X_1, \dots, X_n)$ آماره آزمون مربوطه است.

تعریف ۲.۵ الف) فرض کنید « θ تابعی از H_0 است: \tilde{H}_0 » فرضیه فازی یک‌طرفه چپ، در مقابل « θ تابعی از H_1 است: \tilde{H}_1 » فرضیه فازی یک‌طرفه راست، به ترتیب بیانگر θ کوچک است و θ بزرگ است، باشد.

برای آزمون فرضیه فازی یک‌طرفه چپ \tilde{H}_0 در برابر فرضیه فازی یک‌طرفه راست \tilde{H}_1 ، p - مقدار را در صورتی که t مقدار مشاهده شده آماره آزمون T و $j = 0, 1$ ، $H_{jb}^*(\theta) = \frac{H_{jb}(\theta)}{\int H_{jb}(\theta)d\theta}$ ، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{مقدار } -p = P_{\tilde{H}_0}(T \geq t) = \int_{\theta} H_{0b}^*(\theta) P_{\theta}(T \geq t) d\theta.$$

ب) برای آزمون فرضیه فازی یک‌طرفه راست \tilde{H}_1 ، در برابر فرضیه فازی یک‌طرفه چپ \tilde{H}_0 ، p - مقدار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{مقدار } -p = P_{\tilde{H}_1}(T \leq t) = \int_{\theta} H_{1b}^*(\theta) P_{\theta}(T \leq t) d\theta.$$

لازم به ذکر است اگر تکیه‌گاه H گسسته باشد، از مجموع به جای انتگرال استفاده می‌کنیم.

برهان. برای اثبات قسمت الف داریم

$$\begin{aligned} \text{مقدار } -p &= P_{H_0}(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(t; \tilde{H}_0) dt \\ &= \int_t^{\infty} \int_{\theta} H_{0b}^*(\theta) f(t; \theta) d\theta dt \\ &= \int_{\theta} H_{0b}^*(\theta) \int_t^{\infty} f(t; \theta) dt d\theta \\ &= \int_{\theta} H_{0b}^*(\theta) P_{\theta}(T \geq t) d\theta. \end{aligned}$$

□ قسمت ب نیز به طور مشابه ثابت می‌شود.

ملاحظه ۳.۵. در صورتی که فرضیه‌ها دقیق باشند، تابع عضویت مرز فازی با تابع مشخصه با تنها نقطه مرزی θ مشخص می‌شود و p - مقدار برای مرز فرضیه فازی یک‌طرفه در تعریف ۲.۵ به ترتیب با $P_{\theta_0}(T \geq t)$ و $P_{\theta_0}(T \leq t)$ که θ_0 مرز فرضیه صفر است، معرفی می‌شود. قانون تصمیم زیر یک تعمیم از قانون تصمیم بیان شده در [۱۵] است.

۱.۲.۵ قاعده تصمیم

در آزمون فرضیه‌های فازی \tilde{H}_0 در برابر \tilde{H}_1 ، اگر $P^{01} < P^{10}$ ، با ضریب اطمینان $\frac{P^{10}}{P^{01}+P^{10}}$ پذیرفته و در غیر این صورت \tilde{H}_0 با ضریب اطمینان $\frac{P^{01}}{P^{01}+P^{10}}$ پذیرفته می‌شود، که در آن P^{01} ، p -مقدار آزمون \tilde{H}_0 در برابر \tilde{H}_1 ، و P^{10} ، p -مقدار آزمون \tilde{H}_1 در برابر \tilde{H}_0 است. روش پیشنهادی نسبت به روش p -مقدار معمولی برتری‌های زیادی دارد که از جمله مهم‌ترین آن این است که p -مقدار پیشنهادی بر اساس دو فرضیه فازی صفر و مقابل است در حالی که روش معمولی تنها بر فرضیه صفر فازی دلالت دارد.

۳.۵ انگیزه آزمون فرضیه فازی در کنترل کیفیت

شاخص کارایی فرآیند پیشنهاد شده به‌عنوان اندازه‌گیری‌های عددی روی کارایی فرآیند در صنایع تولیدی استفاده می‌شود. در مطالعه آزمون کارایی فرآیند برای قضاوت در مورد این که آیا فرآیند توانا است یا نه، ابتدا کارایی را با در نظر گرفتن فرضیه صفر « $H_0 : C_p \leq c_0$ » (فرآیند کارا نیست)، در برابر « $H_1 : C_p > c_0$ » (فرآیند کاراست)، اندازه‌گیری می‌کنند که در آن c_0 یک کارایی مورد نیاز از پیش تعیین شده است [۲۱]. جدول ۸.۳ صفحه ۳۵۴ [۲۲] شامل برخی دستورالعمل‌های توصیه شده برای حداقل مقادیر شاخص کارایی که معمولاً به‌عنوان یک معیار استاندارد در شاخص کارایی استفاده می‌شود، است. برای مثال در آزمون فرضیه‌های فوق $c_0 = 1/33$ برای فرآیند موجود و $c_0 = 1/50$ برای یک فرآیند جدید به‌عنوان معیار حداقل استاندارد در نظر گرفته شده است. اما با توجه به بی‌وقفه بودن تغییرات در فرآیند تولید، یک معیار مفید برای اندازه‌گیری میزان بازسازی فرآیند نداریم. بنابراین ممکن است در تعیین مقدار مناسب برای معیار حداقل استاندارد c_0 در آزمون معمولی « $H_0 : C_p \leq c_0$ » در برابر « $H_1 : C_p > c_0$ »، که در نتیجه آزمون دارای اهمیت است، دچار سردرگمی شویم. یک راه برای رفع سردرگمی بالا این است که به‌جای فرضیه‌های معمولی بالا فرضیه فازی زیر را برای آزمون کارایی در نظر بگیریم.

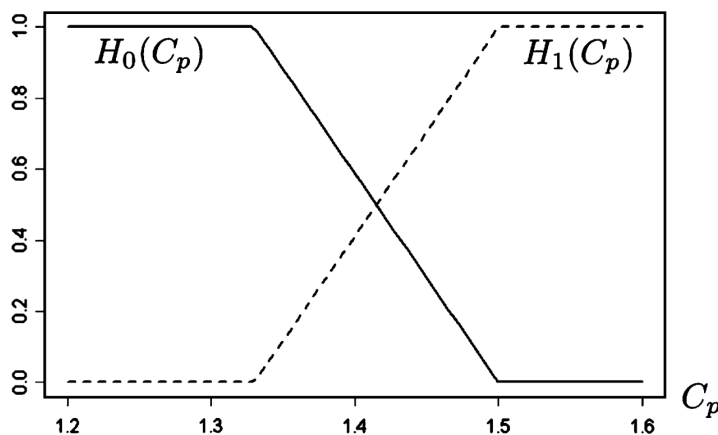
$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : C_p \text{ کوچک است (فرآیند کارا نیست)} \\ \tilde{H}_1 : C_p \text{ بزرگ است (فرآیند کارا است)} \end{cases} \quad (۲.۵)$$

علاوه بر آن مفاهیم نادقیق کم و زیاد به‌ترتیب با توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند (شکل ۱.۵).

$$H_0(C_p) = \begin{cases} 1 & 0 < C_p \leq 1/33 \\ \frac{1/50 - C_p}{1/50 - 1/33} & 1/33 < C_p \leq 1/50 \\ 0 & 1/50 < C_p \end{cases}$$

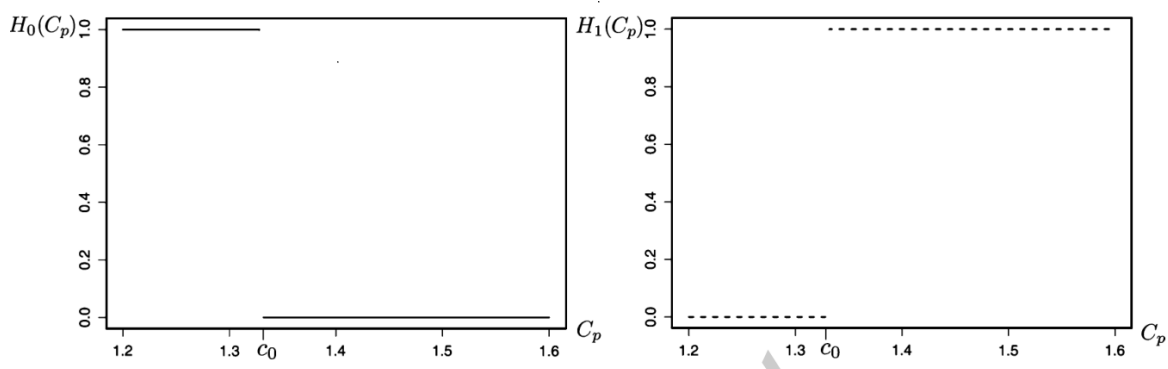
و

$$H_1(C_p) = 1 - H_0(C_p).$$



شکل ۱.۵: تابع عضویت فرضیه فازی \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 برای آزمون کیفیت

یکی دیگر از برتری‌های استفاده از فرضیه فازی به صورت رابطه (۲.۵) به جای فرضیه دقیق معمولی، استفاده از مرز تدریجی (فازی) برای تعریف مجموعه‌های «کارا بودن» و «کارا نبودن» فضاهای پارامتر در یک آزمون کارایی است. به عبارت دیگر شکستی در مرز فرضیه فازی به صورت رابطه (۲.۵) (مانند رفتار فرضیه‌های فازی کلاسیک) وجود ندارد. این باعث می‌شود کاربر قضاوت موجه‌تری در تصمیم‌گیری فرآیندهای تولیدی داشته باشد (شکل ۱.۵ و ۲.۵ را مقایسه کنید). هدف ما در این جا آزمون فرضیه‌های بیان شده در رابطه (۲.۵) با رویکرد p -مقدار بیان شده در تعریف ۲.۵، بر اساس دو شاخص کارایی C_p و C_{pm} است.



شکل ۲.۵: توابع نشانگر برای فرضیه‌های H_0 و H_1 برای آزمون کیفیت، $I_{\{C_p: C_p > c_0\}}$ و $I_{\{C_p: C_p \leq c_0\}}$ برای $c_0 = 1/33$

۴.۵ آزمون کیفیت مبتنی بر شاخص C_p

شاخص‌های کارایی فرآیند که روابط بین عملکرد واقعی فرآیند و مشخصات تولید را ایجاد می‌کنند، روی تحقیق در تضمین کیفیت و تجزیه و تحلیل کارایی برای ۲۰ سال گذشته تمرکز می‌کند. در [۱۹] کانه اولین شاخص کارایی فرآیند را به صورت زیر معرفی می‌کند

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (۳.۵)$$

که در آن USL حدود بالایی و LSL حدود پایینی و σ انحراف استاندارد فرآیند است. برای استنتاج آماری روی C_p بر اساس نمونه تصادفی گرفته شده از خط مونتاژ، فرض می‌کنیم $X = (X_1, \dots, X_n)$ یک نمونه تصادفی با مقادیر مشاهده شده $x = (x_1, \dots, x_n)$ وقتی که X_i دارای توزیع نرمال با میانگین نامعلوم μ و واریانس نامعلوم σ^2 (یعنی $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$) است. قصد داریم فرضیه‌های فازی زیر را آزمون کنیم

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : C_p \text{ کوچک است} & C_p \text{ تابعی از } H_0 \text{ است} \\ \tilde{H}_1 : C_p \text{ بزرگ است} & C_p \text{ تابعی از } H_1 \text{ است} \end{cases}$$

فرض کنید تابع عضویت فرضیه‌های فازی به صورت زیر تعریف شود

$$H_0(C_p) = \begin{cases} 1 & 0 < C_p \leq 1/33 \\ \frac{1/50 - C_p}{1/50 - 1/33} & 1/33 < C_p \leq 1/50 \\ 0 & 1/50 < C_p \end{cases}$$

و $H_1(C_p) = 1 - H_0(C_p)$ (شکل ۱.۵ را ببینید). در [۱۳] چو و اوون برای متغیر تصادفی بیان شده در رابطه (۴.۵)، تحت فرض نرمال بودن، مقدار تابع چگالی احتمال در نقطه x و C_p در پارامتر توزیع را به صورت رابطه (۵.۵) به دست آوردند.

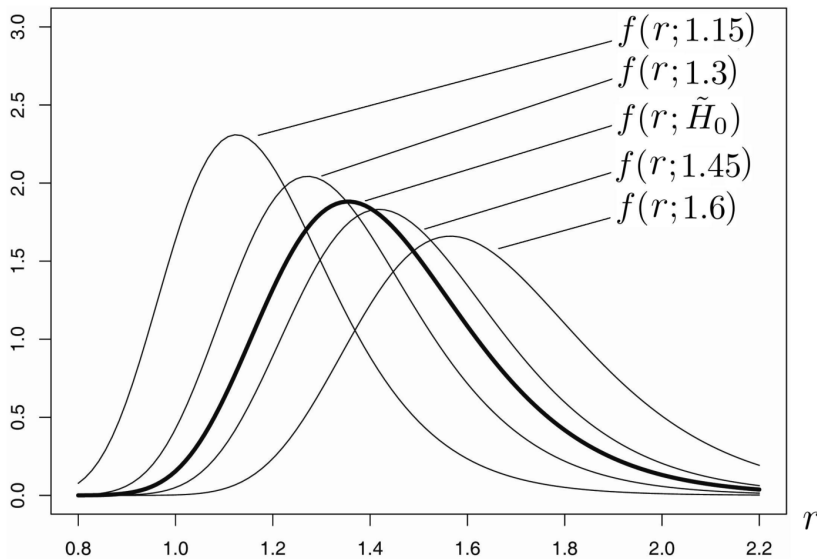
$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (۴.۵)$$

$$f(x; C_p) = \frac{2(\sqrt{\frac{n-1}{3}} C_p)^{n-1}}{\Gamma(\sqrt{\frac{n-1}{3}})} x^{-n} e^{-\frac{(n-1)C_p^2}{2x^2}}, \quad x > 0 \quad (۵.۵)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱.۵)، تابع چگالی احتمال وزنی \widehat{C}_p ، تحت فرضیه فازی \tilde{H}_0 به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
 f(x; \tilde{H}_0) &= \int_{C_p} H_0^*(C_p) f(x; C_p) dC_p \\
 &= \frac{\int_0^{1/33} f(x; C_p) dC_p + \int_{1/33}^{1/50} \frac{1/50 - C_p}{1/50 - 1/33} f(x; C_p) dC_p}{1/33 + \frac{17}{4}} \\
 &= \frac{2 \times 10^2}{283} \int_0^{1/33} \frac{(\sqrt{\frac{n-1}{4}} C_p)^{n-1}}{\Gamma(\sqrt{\frac{n-1}{4}})} x^{-n} e^{-\frac{(n-1)C_p^2}{2x^2}} dC_p \\
 &\quad + \frac{2 \times 10^4}{17 \times 283} \int_{1/33}^{1/50} (1/50 - C_p) \frac{2(\sqrt{\frac{n-1}{4}} C_p)^{n-1}}{\Gamma(\sqrt{\frac{n-1}{4}})} x^{-n} e^{-\frac{(n-1)C_p^2}{2x^2}} dC_p \tag{۶.۵} \\
 &= \frac{22 \times 10^2 (\frac{n-1}{4})^{\frac{n-1}{4}}}{283 x^n \Gamma(\sqrt{\frac{n-1}{4}})} \left\{ \int_0^{1/33} C_p^{n-1} e^{-\frac{(n-1)C_p^2}{2x^2}} dC_p \right. \\
 &\quad \left. + \frac{10^2}{17} \int_{1/33}^{1/50} (1/50 - C_p) C_p^{n-1} e^{-\frac{(n-1)C_p^2}{2x^2}} dC_p \right\}
 \end{aligned}$$

که در شکل ۳.۵ پررنگ نشان داده شده است. p - مقدار آزمون فرضیه \tilde{H}_0 در مقابل \tilde{H}_1 به صورت



شکل ۳.۵: تابع چگالی وزنی \widehat{C}_p تحت فرضیه \tilde{H}_0 و همچنین توابع چگالی \hat{C}_p برای $C_p = 1/15, 1/3, 1/45, 1/6$

زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
 P^{01} &= P_{\hat{H}_b}(\widehat{C}_p \geq c_p) \\
 &= \int_{C_p} H_{ob}^*(C_p) P_{C_p}(\widehat{C}_p \geq c_p) dC_p \\
 &= \frac{\int_{1/33}^{1/50} \frac{1/50 - C_p}{1/50 - 1/33} P_{C_p}(\frac{\sigma}{S} C_p \geq c_p) dC_p}{\int_{1/33}^{1/50} H_{ob}(C_p) dC_p} \quad (7.5) \\
 &= \frac{2 \times 10^4}{172} \int_{1/33}^{1/50} (1/50 - C_p) P_{C_p} \left(\chi_{n-1}^2 \leq (n-1) \left(\frac{C_p}{c_p} \right)^2 \right) dC_p,
 \end{aligned}$$

که در آن $\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع χ^2 با $n-1$ درجه آزادی، $C_p = \frac{USL-LSL}{\sigma_s}$ مقادیر مشاهده شده آماره آزمون \widehat{C}_p و s مقادیر مشاهده شده انحراف معیار S است. به‌طور مشابه p -مقدار آزمون فرضیه \hat{H}_0 در مقابل \hat{H}_1 برابر است با

$$\begin{aligned}
 P^{10} &= P_{\hat{H}_b}(\widehat{C}_p \leq c_p) \\
 &= \int_{C_p} H_{1b}^*(C_p) P_{C_p}(\widehat{C}_p \leq c_p) dC_p \\
 &= \frac{\int_{1/33}^{1/50} \left(1 - \frac{1/50 - C_p}{1/50 - 1/33} \right) P_{C_p}(\frac{\sigma}{S} C_p \leq c_p) dC_p}{\int_{1/33}^{1/50} H_{1b}(C_p) dC_p} \quad (8.5) \\
 &= \frac{2 \times 10^4}{172} \int_{1/33}^{1/50} (C_p - 1/33) P_{C_p} \left(\chi_{n-1}^2 \geq (n-1) \left(\frac{C_p}{c_p} \right)^2 \right) dC_p.
 \end{aligned}$$

۱.۴.۵ قاعده تصمیم‌گیری در آزمون کیفیت بر اساس C_p

اگر $P^{01} < P^{10}$ ، فرآیند با ضریب اطمینان $\frac{P^{10}}{P^{01} + P^{10}}$ کارا است. در غیر این صورت با ضریب اطمینان $\frac{P^{01}}{P^{01} + P^{10}}$ ناکارا است، وقتی که P^{01} و P^{10} به ترتیب در رابطه (۷.۵) و (۸.۵) معرفی شده‌اند. بنابراین در این روش ضریب اطمینان نسبت داده شده به تصمیم را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد

$$CF = \frac{P^{01}}{P^{01} + P^{10}} I(P^{01} \geq P^{10}) + \frac{P^{10}}{P^{01} + P^{10}} I(P^{01} < P^{10})$$

که در آن $I(\cdot)$ تابع نشانگر است.

مثال ۱.۵ (یک کاربرد در فرآیند تولید موتور هواپیمای جت). هر بخش از اجزای یک موتور جت با سرمایه‌گذاری در روند ریخته‌گری تولید می‌شود. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های کیفیت باز کردن ورقه در ریخته‌گری است و ما در این جا کیفیت را بر اساس C_p با روش ارائه شده در بخش ۴.۵ آزمون می‌کنیم. مقادیر داده شده در جدول ۱.۵ با استفاده از سه رقم آخر کدگذاری شده‌اند. مثلاً ۲۷.۳ از عدد ۰.۵۰۲۷۳ که در صفحه ۶۱۱ [۲۲] آمده است، گرفته شده است. قصد داریم فرضیه‌های فازی

زیر را آزمون کنیم.

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : C_p \text{ کوچک است} & C_p \text{ تابعی از } H_0 \text{ است} \\ \tilde{H}_1 : C_p \text{ بزرگ است} & C_p \text{ تابعی از } H_1 \text{ است} \end{cases}$$

که تابع عضویت فرضیه‌های فازی به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$H_0(C_p) = \begin{cases} 1 & 0 < C_p \leq 1/33 \\ \frac{1/50 - C_p}{1/50 - 1/33} & 1/33 < C_p \leq 1/50 \\ 0 & 1/50 < C_p \end{cases}$$

و $H_1(C_p) = 1 - H_0(C_p)$. با استفاده از داده‌های نمونه جمع‌آوری شده به اندازه n که در جدول ۱.۵

جدول ۱.۵: داده‌های مثال ۱.۵

۳۳	۳۲	۳۱	۲۹	۳۳
۳۱	۳۷	۳۵	۳۱	۳۳
۳۶	۳۴	۳۳	۳۷	۳۵
۳۳	۳۴	۳۳	۳۱	۳۰
۳۴	۳۳	۳۵	۳۴	۳۳
۳۸	۴۰	۳۹	۳۷	۳۸
۳۱	۳۴	۳۲	۳۱	۳۰
۳۹	۳۹	۳۸	۳۹	۲۹
۴۳	۳۶	۳۵	۳۳	۲۸
۳۲	۳۵	۳۲	۳۳	۳۸
۳۱	۳۲	۲۸	۳۰	۲۸
۳۴	۳۵	۳۵	۳۵	۳۱
۳۷	۳۵	۳۴	۳۲	۲۷
۳۶	۳۷	۳۵	۳۳	۳۳
۳۹	۳۵	۳۲	۳۷	۳۵
۳۰	۳۱	۲۷	۳۳	۳۳
۳۲	۳۰	۳۴	۳۴	۳۵
۳۳	۳۰	۳۰	۳۳	۳۲
۲۸	۲۷	۳۴	۲۷	۲۵
۳۰	۳۳	۳۶	۳۵	۳۵

آمده است به ترتیب میانگین و انحراف معیار نمونه $\bar{x} = 33/32$ و $s = 3/229$ به دست آمده است.

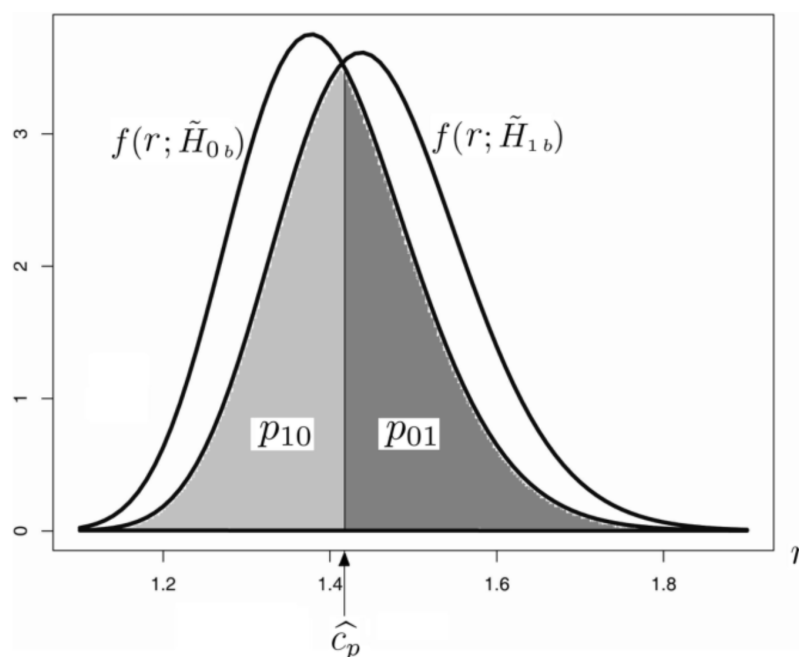
پذیرش فرضیه نرمال داده‌های جمع‌آوری شده خط مونتاژ پیشنهادی منطقی است. با استفاده از آزمون شاپیرو-ویلک فرضیه نرمال بودن با $p = 0.353$ مقدار به شدت تایید می‌شود. با توجه به مشخصات فنی محدوده‌های $LSL = 16$ و $USL = 44$ ، مقدار برآورد شده شاخص C_p برابر است با

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6S} = \frac{40 - 20}{6 \times 3.299} = 1.415$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۷.۵) و با توجه به این که P^1 و P^0 به ترتیب معادل سطوح زیر توابع چگالی احتمال وزنی \hat{C}_p تحت \tilde{H}_0 و \tilde{H}_1 می‌باشد، p -مقدار آزمون \tilde{H}_0 در برابر \tilde{H}_1 مبتنی بر تابع چگالی احتمال وزنی \hat{C}_p تحت فرض H_0 را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد

$$\begin{aligned} P^0 &= P_{\tilde{H}_0}(\hat{C}_p \geq 1.415) \\ &= \frac{2 \times 10^4}{172} \int_{1.33}^{1.50} (1.50 - C_p) P_{C_p} \left(\chi_{99}^2 \leq 99 \left(\frac{C_p}{1.415} \right)^2 \right) dC_p = 0.413 \end{aligned} \quad (9.5)$$

که معادل ناحیه خاکستری تیره در شکل ۴.۵ است. χ_{99}^2 دارای توزیع خی دو با ۹۹ درجه آزادی است. برای تصمیم‌گیری مبتنی بر قاعده پیشنهادی لازم است p -مقدار آزمون \tilde{H}_1 در برابر \tilde{H}_0 را محاسبه کنیم. به طور مشابه P^1 را با استفاده از رابطه (۸.۵) به صورت زیر محاسبه می‌کنیم که به رنگ ناحیه خاکستری تیره در شکل ۴.۵ ترسیم شده است.



شکل ۴.۵: مقایسه P^1 و P^0 بر اساس تابع چگالی احتمال وزنی C_p تحت مرز فرضیه فازی \tilde{H}_1 و \tilde{H}_0 در مثال ۱.۵

$$\begin{aligned} P^1 &= P_{\tilde{H}_1}(\hat{C}_p \leq 1.415) \\ &= \frac{2 \times 10^4}{172} \int_{1.33}^{1.50} (C_p - 1.33) P_{C_p} \left(\chi_{99}^2 \geq 99 \left(\frac{C_p}{1.415} \right)^2 \right) dC_p = 0.378 \end{aligned} \quad (10.5)$$

که در آن $P^1 > P^0$ ، و بنابراین فرضیه \tilde{H}_0 در برابر \tilde{H}_1 با ضریب اطمینان زیر پذیرفته می‌شود

$$CF = \frac{0.413}{0.413 + 0.378} = 0.522.$$

توجه داشته باشیم که بر اساس p - مقدار روش کلاسیک \tilde{H}_0 در برابر \tilde{H}_1 برای هر سطح اطمینان $\alpha < P^1 = 0.413$ (مثلا در سطح معنی‌داری 0.01 یا 0.05) پذیرفته می‌شود. اگر چه این نتیجه منطبق با نتیجه حاصل از رویکرد مطرح‌شده در این فصل می‌باشد، ولی ما رویکرد مطرح‌شده در این فصل را بر روش‌های متداول مبتنی بر p - مقدار ترجیح می‌دهیم، زیرا اولاً این رویکرد قابلیت محاسبه ضریب اطمینان را به کاربر می‌دهد که این امر از اهمیت زیادی در تصمیم‌گیری در شرایط نایقینی و مبهم برخوردار است. ثانیاً، برخلاف روش‌های کلاسیک مبتنی بر p - مقدار، تصمیم اتخاذشده در رویکرد مطرح‌شده مبتنی بر هر دو فرضیه فازی صفر و فرضیه فازی جانشین می‌باشد.

۵.۵ آزمون کیفیت براساس شاخص C_{pm}

در این بخش یک p - مقدار جدید بر اساس تعمیم توسعه روش آزمون کارایی فرآیند C_{pm} وقتی که فرضیه‌ها به‌جای دقیق، فازی در نظر گرفته شوند، معرفی می‌کنیم. یکی از معایب شاخص کیفیت C_p این است که هزینه عدم رسیدگی به الزامات مشتریان را به حساب نمی‌آورد [۱۸]. برای رسیدگی به این وضعیت هسیانگ و تاگوچی یک شاخص کارایی به شکل زیر معرفی کردند

$$\begin{aligned} C_{pm} &= \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \\ &= \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}} \end{aligned} \quad (11.5)$$

که شامل تنوع اقلام تولید با احترام به مقدار مورد نظر T و قادر بودن به فرآیند در اطراف مقدار هدف خوشه‌چینی است. توزیع C_{pm} در زیر نشان داده شده است

$$\widehat{C}_{pm} \sim \frac{USL - LSL}{6\sigma} \sqrt{\frac{n}{\chi_{n,\lambda}^2}} = C_p \sqrt{\frac{n}{\chi_{n,\lambda}^2}}$$

با استفاده از رابطه (۱۱.۵) داریم

$$\widehat{C}_{pm} \sim C_{pm} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{n}} \sqrt{\frac{n}{\chi_{n,\lambda}^2}} = C_{pm} \sqrt{\frac{n + \lambda}{\chi_{n,\lambda}^2}}$$

که در آن $\chi_{n,\lambda}^2$ از توزیع خی دو غیر مرکزی با درجه آزادی n و پارامتر غیر مرکزی $\lambda = \frac{n(\mu - T)^2}{\sigma^2}$ به دست می‌آید. در آزمون فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} C_{pm} \text{ کوچک است} & (C_{pm} \text{ تابعی از } H_0 \text{ است: } \tilde{H}_0) \\ C_{pm} \text{ بزرگ است} & (C_{pm} \text{ تابعی از } H_1 \text{ است: } \tilde{H}_1) \end{cases}$$

تابع عضویت فرضیه‌های فازی به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$H_0(C_{pm}) = \begin{cases} 1 & 0 < C_{pm} \leq 1/33 \\ \frac{1/50 - C_{pm}}{1/50 - 1/33} & 1/33 < C_{pm} \leq 1/50 \\ 0 & 1/50 < C_{pm} \end{cases}$$

و $H_1(C_{pm}) = 1 - H_0(C_{pm})$ مقدار آزمون \tilde{H}_0 در برابر \tilde{H}_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} P^{01} &= P_{\tilde{H}_0}(\widehat{C}_{pm} \geq c_{pm}) \\ &= \int_{C_{pm}} H_{0b}^*(C_{pm}) P_{C_{pm}}(\widehat{C}_{pm} \geq c_{pm}) dC_{pm} \\ &= \frac{\int_{1/33}^{1/50} \frac{1/50 - C_{pm}}{1/50 - 1/33} P_{C_{pm}}\left(C_{pm} \sqrt{\frac{n+\lambda}{\chi_{n,\lambda}^2}} \geq c_{pm}\right) dC_{pm}}{\int_{1/33}^{1/50} H_{0b}(C_{pm}) dC_{pm}} \quad (12.5) \\ &= \frac{2 \times 10^4}{172} \int_{1/33}^{1/50} (1/50 - C_{pm}) P_{C_{pm}}\left(\chi_{n,\lambda}^2 \leq (n+\lambda) \left(\frac{C_{pm}}{c_{pm}}\right)^2\right) dC_{pm}, \end{aligned}$$

که در آن $C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{s^2 + (\bar{x} - T)^2}}$ مقادیر مشاهده شده آماره آزمون \widehat{C}_{pm} است. همچنین p -مقدار آزمون فرض \tilde{H}_0 در مقابل \tilde{H}_1 برابر است با

$$\begin{aligned} P^{10} &= P_{\tilde{H}_1}(\widehat{C}_{pm} \leq c_{pm}) \\ &= \int_{C_{pm}} H_{1b}^*(C_{pm}) P_{C_{pm}}(\widehat{C}_{pm} \leq c_{pm}) dC_{pm} \quad (13.5) \\ &= \frac{2 \times 10^4}{172} \int_{1/33}^{1/50} (C_{pm} - 1/33) P_{C_{pm}}\left(\chi_{n,\lambda}^2 \geq (n+\lambda) \left(\frac{C_{pm}}{c_{pm}}\right)^2\right) dC_{pm}. \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که P^{01} و P^{10} دو تابع با پارامتر مجهول λ در روابط (12.5) و (13.5) هستند. بنابراین می‌توان برآورد ML P^{01} و P^{10} را به راحتی به صورت زیر به دست آورد

$$\widehat{P}_{01} = \frac{2 \times 10^4}{172} \int_{1/33}^{1/50} (1/50 - C_{pm}) P_{C_{pm}}\left(\chi_{n, \frac{n(\bar{x}-T)^2}{s^2}} \leq \left(n + n\left(\frac{\bar{x}-T}{S}\right)^2\right) \left(\frac{C_{pm}}{c_{pm}}\right)^2\right) dC_{pm} \quad (14.5)$$

$$\widehat{P}_{10} = \frac{2 \times 10^4}{172} \int_{1/33}^{1/50} (C_{pm} - 1/33) P_{C_{pm}}\left(\chi_{n, \frac{n(\bar{x}-T)^2}{s^2}} \geq \left(n + \frac{n(\bar{x}-T)^2}{s^2}\right) \left(\frac{C_{pm}}{c_{pm}}\right)^2\right) dC_{pm} \quad (15.5)$$

به طوری که \bar{x} و s به ترتیب برآورد ML پارامترهای μ و σ تحت فرض نرمال باشند.

۱.۵.۵ قاعده تصمیم‌گیری در آزمون کیفیت بر اساس C_{pm}

اگر $\widehat{P}^{\circ 1} < \widehat{P}^{\circ}$ فرآیند با ضریب اطمینان $\frac{\widehat{P}^{\circ 1}}{\widehat{P}^{\circ 1} + \widehat{P}^{\circ}}$ کارا است، در غیر این صورت با ضریب اطمینان برآوردشده $\frac{\widehat{P}^{\circ 1}}{\widehat{P}^{\circ 1} + \widehat{P}^{\circ}}$ ناکارا است به طوری که $\widehat{P}^{\circ 1}$ و \widehat{P}° به ترتیب در (۱۴.۵) و (۱۵.۵) معرفی شده‌اند. بنابراین در این روش ضریب اطمینان برآوردشده تصمیم را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد

$$\widehat{CF} = \frac{\widehat{P}^{\circ 1}}{\widehat{P}^{\circ 1} + \widehat{P}^{\circ}} I(\widehat{P}^{\circ 1} \geq \widehat{P}^{\circ}) + \frac{\widehat{P}^{\circ}}{\widehat{P}^{\circ 1} + \widehat{P}^{\circ}} I(\widehat{P}^{\circ 1} < \widehat{P}^{\circ})$$

که در آن $I(\cdot)$ تابع نشانگر است.

مثال ۲.۵ (یک کاربرد در صنعت الکترونیک). در بسیاری از محصولات الکترونیکی از یک آداپتور دیواری AC/DC ، به منظور تبدیل خط ولتاژ AC به ولتاژ تنظیم‌شده‌ی DC استفاده می‌شود. امواج بلند و هم‌چنین ایراد آداپتور ممکن است موجب آسیب‌رسانی به برخی از اجزای حساس محصول گردد. هم‌چنین تمامی محصولات الکتریکی قابل حمل، مانند دوربین‌های دیجیتالی، کامپیوترهای قابل حمل و موبایل‌ها با خطر مشابهی روبرو هستند زیرا اگر کاربر باطری دستگاه را در هنگام روشن بودن از مدار خارج سازد آن‌گاه ولتاژ زودگذر زیادی به دستگاه وارد شده و ممکن است موجب آسیب و زیان دستگاه گردد. اگر چه تولیدکنندگان محصولات الکترونیکی در ارتقای میزان پایداری و در نتیجه بالا بردن قابلیت اعتماد محصولات در رقابت هستند، اما متأسفانه برخی از اتفاقات احتمالی موجب این قبیل صدمات به قطعات حساس الکترونیکی می‌گردد. به همین منظور، معمولاً یک IC محافظ ولتاژ زیاد برای محافظت از مدارات الکترونیکی حساس در مقابل ولتاژهای بزرگ زودگذر طراحی می‌شود به طوری که به محض ورود ولتاژ زیاد، سریعاً IC از ورود بار سنگین به داخل مدار جلوگیری می‌کند تا آسیبی به مدارات دستگاه وارد نگردد. یک نوع خاص از IC های محافظ ولتاژ زیاد، باید به گونه‌ای طراحی شود که توانایی تحمل ولتاژهای درون بازه‌ی $[5/3, 5/7]$ را داشته باشد و لذا در فرایند تولید این IC حدود مشخصه فنی برابر $LSL = 5/3$ و $USL = 5/7$ (بر حسب ولت) و همچنین مقدار هدف برابر $T = 5/5$ ولت در نظر گرفته می‌شود. برای نمونه‌ای تصادفی به حجم $n = 100$ آداپتور ولتاژهای خروجی از آداپتور، که ولتاژهای ورودی به IC محافظ نیز می‌باشند، در جدول ۲.۵ ثبت شده است [۳۱]. پس از انجام آزمون شاپیرو-ویلک در نرم‌افزار R ، فرضیه نرمال بودن مقادیر ثبت شده در جدول ۲.۵ را با $p > 0/1$ مقدار می‌پذیریم. میانگین و انحراف معیار داده‌های جدول ۲.۵ برابر $\bar{x} = 5/4819$ و $s = 0/0371$ محاسبه شده‌اند، لذا با توجه به محدوده مشخصه فنی، شاخص کارایی فرایند تولید آداپتورهای دیواری به صورت زیر برآورد

می‌شود

$$\begin{aligned} C_{pm} &= \frac{5/70 - 5/30}{6\sqrt{s^2 + (\bar{x} - T)^2}} \\ &= \frac{5/70 - 5/30}{6\sqrt{0/0372 + (5/482 - 5/50)^2}} \\ &= 1/613. \end{aligned}$$

حال قصد داریم فرضیه‌های فازی زیر را بر اساس روش p -مقدار پیشنهادی در بخش ۵.۵ آزمون کنیم

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : C_{pm} \text{ کوچک است} & C_{pm} \text{ تابعی از } H_0 \text{ است} \\ \tilde{H}_1 : C_{pm} \text{ بزرگ است} & C_{pm} \text{ تابعی از } H_1 \text{ است} \end{cases}$$

که تابع عضویت فرضیه‌های فازی به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$H_0(C_{pm}) = \begin{cases} 1 & 0 < C_{pm} \leq 1/33 \\ \frac{1/50 - C_{pm}}{1/50 - 1/33} & 1/33 < C_{pm} \leq 1/50 \\ 0 & 1/50 < C_{pm} \end{cases}$$

و

$$H_1(C_{pm}) = 1 - H_0(C_{pm})$$

با توجه به رابطه (۱۴.۵) می‌توان برآورد p -مقدار برای آزمون \tilde{H}_0 در برابر \tilde{H}_1 را به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} \widehat{P}^{\circ 1} &= \frac{2 \times 10^4}{172} \int_{1/33}^{1/50} (1/50 - C_{pm}) \\ &\times PC_{pm} \left(\chi_{100, \frac{100(5/482 - 5/50)^2}{0/0372}} \leq \left(100 + \left(\frac{100(5/482 - 5/50)^2}{0/0372} \right) \left(\frac{C_{pm}}{1/613} \right)^2 \right) \right) dC_{pm} \\ &= 0/030. \end{aligned} \tag{۱۶.۵}$$

برای تصمیم‌گیری بر اساس قانون تصمیم، برآورد p -مقدار آزمون \tilde{H}_1 در برابر \tilde{H}_0 را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \widehat{P}^{1\circ} &= \frac{2 \times 10^4}{172} \int_{1/33}^{1/50} (C_{pm} - 1/33) \\ &\times PC_{pm} \left(\chi_{100, \frac{100(5/482 - 5/50)^2}{0/0372}} \geq \left(100 + \left(\frac{100(5/482 - 5/50)^2}{0/0372} \right) \left(\frac{C_{pm}}{1/613} \right)^2 \right) \right) dC_{pm} \\ &= 0/920. \end{aligned} \tag{۱۷.۵}$$

جدول ۲.۵: مقادیر ولتاژ خروجی از آداپتور بر حسب ولت در نمونه تصادفی در مثال ۲.۵

۵/۴۸۰	۵/۵۰۰	۵/۴۴۳	۵/۵۲۱	۵/۵۶۶	۵/۴۶۶	۵/۴۸۴	۵/۳۷۷	۵/۵۱۷	۵/۴۴۵
۵/۴۷۸	۵/۴۶۷	۵/۵۰۹	۵/۴۶۹	۵/۴۸۸	۵/۵۱۶	۵/۴۷۰	۵/۴۳۹	۵/۵۲۵	۵/۴۴۰
۵/۴۵۳	۵/۵۲۳	۵/۴۳۹	۵/۴۹۱	۵/۴۸۱	۵/۴۸۵	۵/۴۴۹	۵/۴۳۷	۵/۴۴۲	۵/۴۶۱
۵/۴۶۰	۵/۴۹۰	۵/۵۵۴	۵/۴۲۹	۵/۴۹۲	۵/۵۸۰	۵/۵۷۵	۵/۴۸۵	۵/۵۳۸	۵/۴۷۵
۵/۵۱۰	۵/۴۹۰	۵/۵۰۴	۵/۵۳۹	۵/۴۶۱	۵/۴۲۳	۵/۴۶۵	۵/۴۷۹	۵/۴۳۲	۵/۴۷۵
۵/۴۷۶	۵/۴۸۹	۵/۴۳۵	۵/۴۵۱	۵/۵۱۷	۵/۵۲۲	۵/۴۵۲	۵/۵۰۶	۵/۵۵۶	۵/۴۸۳
۵/۴۹۵	۵/۴۵۵	۵/۵۰۳	۵/۵۱۲	۵/۴۶۴	۵/۴۵۱	۵/۵۰۴	۵/۵۱۸	۵/۴۹۳	۵/۴۷۵
۵/۴۸۰	۵/۴۸۸	۵/۵۰۵	۵/۴۶۴	۵/۵۰۵	۵/۴۸۲	۵/۵۵۵	۵/۴۶۹	۵/۴۱۶	۵/۴۵۲
۵/۴۶۶	۵/۴۶۶	۵/۳۸۷	۵/۴۸۷	۵/۴۴۶	۵/۴۸۱	۵/۴۸۹	۵/۵۱۶	۵/۴۷۲	۵/۴۳۷
۵/۵۰۲	۵/۴۵۱	۵/۵۲۴	۵/۴۷۱	۵/۴۶۳	۵/۵۱۴	۵/۴۹۴	۵/۴۵۱	۵/۵۲۱	۵/۴۵۸

که در آن $\widehat{P}_1 > \widehat{P}_0$ ، و بنابراین فرضیه \bar{H}_1 در برابر \bar{H}_0 با ضریب اطمینان زیر پذیرفته می‌شود

$$\widehat{CF} = \frac{0/920}{0/030 + 0/920} = 0/968.$$

توجه داشته باشیم که بر اساس p - مقدار روش کلاسیک \bar{H}_1 در برابر \bar{H}_0 با هر سطح اطمینان $\alpha > P^0 = 0/030$ پذیرفته می‌شود. اگرچه در این مثال نتیجه بیان شده در روش پیشنهادی با نتیجه آزمون در سطح کلاسیک برای $\alpha > \widehat{P}^0 = 0/030$ (مثلا در سطح $0/05$)، سازگار است، ولی روش پیشنهادی برای نتیجه $\alpha < P_0 = 0/030$ (مثلا در سطح $0/01$) نیز استفاده می‌شود. این موضوع، توسعه یافته نتیجه سطح معنی داری α است. در این جا مزیت اصلی روش پیشنهادی در قالب مثال به دست آمد که عبارت است از اینکه برخلاف روش های متداول مبتنی بر p - مقدار که در آن ها نقش فرضیه صفر بسیار پررنگ تر از نقش فرضیه جانشین می باشد، تصمیم اتخاذ شده در رویکرد پیشنهاد شده در این فصل مبتنی بر هر دو فرضیه فازی صفر و فرضیه فازی جانشین می باشد.

۶.۵ نتیجه گیری

در این فصل یک رویکرد جدید مبتنی بر p - مقدار برای آزمون فرضیه های آماری مورد بررسی قرار گرفت. برخلاف روش کلاسیک آزمون فرضیه ها، قاعده تصمیم در روش پیشنهادی بر اساس دو p - مقدار بود: (۱) مقدار برای آزمون فرضیه صفر فازی در برابر فرضیه جانشین فازی و (۲) p - مقدار برای آزمون فرضیه جانشین فازی در برابر فرضیه صفر فازی. به عبارتی دو آزمون مشترک کیفیت با C_p و C_{pm} با فرضیه های توانایی و عدم توانایی توسعه یافتند. یکی از مزایای دیگر این رویکرد معرفی معیاری به نام «ضریب اطمینان به تصمیم اتخاذ شده»، به عنوان عددی بین صفر

و یک، که از دیدگاه کاربردی برای تصمیم‌گیری در یک محیط مبهم اهمیت دارد است. چگونگی روش پیشنهادی را می‌توان در موارد واقعی در جهان با مطالعه آزمون کیفیت با دو شاخص C_{pk} و C_{pmk} در آینده مورد بررسی قرار داد.

مراجع

- [۱] ارقامی، ناصررضا، دست‌برآورده، علی و زمان‌زاده، احسان. شواهد آماری قسمت دوم: قانون درست‌نمایی و معایب p -مقدار به عنوان پشتیبانی داده‌ها از فرضیه صفر. اندیشه آماری، ۱۳۸۷، ۴-۱۶، (۲)۱۳.
- [۲] پارسیان، احمد. مبانی آمار ریاضی. ویرایش دوم، چاپ ششم، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۸.
- [۳] پرچمی، عباس و ماشین‌چی، ماشا... آزمون فرضیه در محیط فازی بر پایه p -مقدار. مباحثی در آمار و احتمال فازی، سری سیستم‌های فازی و محاسبات نرم، جلد دوم، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۹۰.
- [۴] طاهری، سیدمحمود و ماشین‌چی، ماشا... مقدمه‌ای بر آمار و احتمال فازی. چاپ دوم، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۹۲.
- [۵] مدنی، محبوبه‌سادات، پرچمی، عباس و ربیعی، محمدرضا. p -مقدار فازی در نرم‌افزار R . ششمین کنگره مشترک سیستم‌های فازی و هوشمند ایران، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۴۰۶-۴۱۳، ۱۳۹۶.
- [۶] مدنی، محبوبه‌سادات، ربیعی، محمدرضا و عباس، پرچمی. تصمیم‌گیری متعادل آزمون فرضیه در محیط فازی. هشتمین سمینار آمار و احتمال فازی، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۱۲-۱۱۶، ۱۳۹۷.
- [۷] مدنی، محبوبه‌سادات و ربیعی، محمدرضا. آزمون فرضیه‌های دقیق بر اساس داده‌های فازی نرمال با رویکرد p -مقدار. هفتمین سمینار آمار و احتمال فازی، دانشگاه بیرجند، ۱۸۵-۱۹۱، ۱۳۹۵.

[8] Arnold, Bernhard F. Statistical tests optimally meeting certain fuzzy requirements on the power function and on the sample size. Fuzzy Sets and Systems, 75(3):365–372, 1995.

[9] Arnold, Bernhard F. An approach to fuzzy hypothesis testing. Metrika, 44(1):119–126, 1996.

- [10] Casals, María Rosa, Gil María Angeles and Gil, P. *On the use of zadeh's probabilistic definition for testing statistical hypotheses from fuzzy information.* Fuzzy Sets and Systems, 20(2):175–190, 1986.
- [11] Casals, María Rosa and Gil, María Angeles. *A note on the operativenss of neyman-pearson tests with fuzzy information.* Fuzzy Sets and Systems, 30(2):215–220, 1989.
- [12] Casella, George and Berger, RogerL. *Statistical inference, 2nd Ed. Duxbury Press, the University of Michigan, 2002.*
- [13] Chou, Youn-Min and Owen, D.B. *On the distributions of the estimated process capability indices.* Communications in Statistics - Theory and Methods, 18(12):4549–4560, 1989.
- [14] Dubois, Didier and Prade, Henri. *Fuzzy real algebra: some results.* Fuzzy sets and systems, 2(4):327–348, 1979.
- [15] Emadi, Mahdi and Arghami, Nasser Reza. *some measures of support for statistical hypotheses.* Journal of Statisfical Theory and Application, February 2003.
- [16] Filzmoser, Peter and Viertl, Reinhard. *Testing hypotheses with fuzzy data: the fuzzy p-value.* Metrika, 59(1):21–29, 2004.
- [17] Gagolewski, Marek and Caha, Jan. *A guide to the fuzzynumbers package for R. Technical report, Technical report, 2015.*
- [18] Hsiang, Thomas C and Taguchi, G. *A tutorial on quality control and assurance-the taguchi methods.* In ASA Annual Meeting LA, 1985.
- [19] Kane, Victor E. *Process capability indices.* Journal of quality technology, 18(1):41–52, 1986.
- [20] Knight, Kevin. *Mathematical Statistics. Chapman and Hall/CRC, London, 2000.*
- [21] Kotz, Samuel and Lovelace, Cynthla R. *Introduction to process capability indices: Theory and practice.* Arnold, London, 1998.
- [22] Montgomery, Douglas C. *Introduction to statistical quality control. John Wiley & Sons, New York, 2009.*
- [23] Parchami, Abbas. *Fuzzy.p.value: Computing Fuzzy p-Value. R packege version 1.0, <https://CRAN.R-project.org/package=Fuzzy.p.value>, 2016.*

- [24] Parchami, Abbas. FPV : Testing hypotheses via fuzzy p-value in fuzzy environment. *R package version 0.5*, <https://cran.r-project.org/package=FPV>, 2017.
- [25] Parchami, Abbas, Sadeghpour Gildeh, Bahram, Taheri, S Mahmoud and Mashinchi, Mashaallah. *A general p-value-based approach for testing quality by considering fuzzy hypotheses*. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 32(3):1649–1658, 2017.
- [26] Parchami, Abbas, Taheri S Mahmoud and Mashinchi, Mashaallah. *Fuzzy p-value in testing fuzzy hypotheses with crisp data*. *Statistical Papers*, 51(1):209, 2010.
- [27] Romano, Joseph P and Lehmann, EL. *Testing statistical hypotheses. 2nd Ed*. Springer New York, 2005.
- [28] Taheri, S Mahmoud and Arefi, Mohsen. *Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy test statistic*. *Soft Computing*, 13(6):617–625, 2009.
- [29] Tanaka, Hideo, Okuda, Tetsuji, Asai Kiyoji et al. *Fuzzy information and decision in statistical model*. *Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications*, 303–320, 1979.
- [30] Torabi, Hamzeh and Behboodian, Javad. *Likelihood ratio tests for fuzzy hypotheses testing*. *Statistical Papers*, 48(3):509–522, 2007.
- [31] Wu, Chien-Wei. *Assessing process capability based on bayesian approach with subsamples*. *European Journal of Operational Research*, 184(1):207–228, 2008.
- [32] Yuan, Yufei. *Criteria for evaluating fuzzy ranking methods*. *Fuzzy sets and systems*, 43(2):139–157, 1991.
- [33] Zadeh, Lotfi A. *Information and control*. *Fuzzy sets and systems*, 8(3):338–353, 1965.

پیوست آ

برنامه های R استفاده شده در پایان نامه

۱.آ بسته نرم افزاری Fuzzy Numbers

نام کامل این بسته *Tools to Deal with Fuzzy Numbers* است و نسخه ۱-۰.۴ آن در سال ۲۰۱۵ میلادی توسط گاکلوزکی و کاه^۱ از هلند تهیه و بر روی CRAN بارگذاری شده است [۱۷]. پس از معرفی یک عدد فازی، روش های شناساندن عدد فازی را به بسته *FuzzyNumber* بیان می کنیم.

۱.۱.آ معرفی عدد فازی

اعداد فازی در این بسته به روش های مختلف قابل معرفی هستند که در ادامه به همراه مثال به بیان آنها می پردازیم.

^۱Gagolewski and Caha

عدد فازی LR

تعریف ۱.آ (عدد فازی در بسته FuzzyNumber). عدد فازی A یک زیرمجموعه فازی از \mathbb{R} با تابع عضویت به صورت زیر است

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \text{left}\left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right) & a_1 \leq x < a_2 \\ 1 & a_2 \leq x < a_3 \\ \text{right}\left(\frac{x-a_3}{a_4-a_3}\right) & a_3 \leq x < a_4 \\ 0 & a_4 < x \end{cases}$$

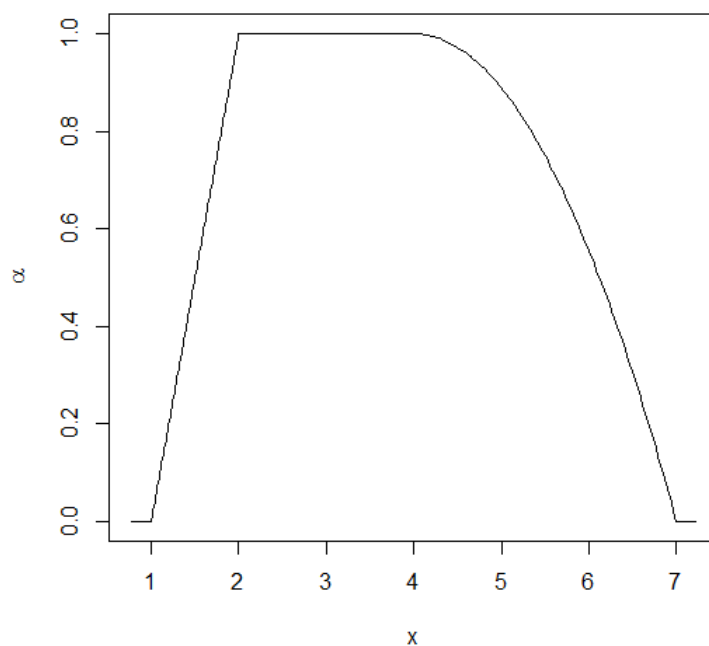
که در آن $left : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابعی غیر نزولی و $right : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابعی غیر صعودی است. $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$

مثال ۱.آ. عدد فازی با هسته $(a_2, a_3) = (2, 4)$ ، دامنه $(a_1, a_4) = (1, 7)$ و توابع شکل چپ و راست $left(x) = x$ و $right(x) = 1 - x^2$ را در بسته FuzzyNumbers به صورت زیر معرفی و تابع عضویت آن را رسم می کنیم (شکل ۱.آ).

```
> A1 <- FuzzyNumber(1, 2, 4, 7,
+ left=function(x) x,
+ right=function(x) 1-x^2
+ )
> A1
Fuzzy number with:
  support=[1,7],
  core=[2,4].
> plot(A1)
> plot(A1)
```

ملاحظه ۱.آ. اگر توابع شکل در تابع FuzzyNumber را حذف کنیم یک مجموعه فازی اصطلاحاً سایه دار به دست می آید که در آن مقدار تابع عضویت (a_1, a_2) و (a_3, a_4) مشخص نیست. در ادامه مثال ۱.آ. اگر توابع left و right را حذف کنیم، دستور و شکل به صورت زیر خواهد بود

```
> plot(A1)
> A2 <- FuzzyNumber(1, 2, 4, 7,
+ )
> A2
```



شکل آ.۱: نمودار تابع عضویت عدد فازی در مثال آ.۱.

Fuzzy number with:

support=[1,7],

core=[2,4].

> plot(A2)

عدد فازی مثلثی و دوزنقه‌ای

مثال آ.۲. چند روش برای معرفی اعداد فازی مثلثی، دوزنقه‌ای و همچنین معرفی توابع نشانگر در این مثال مطرح شده است.

> T1 <- TrapezoidalFuzzyNumber(1, 1.5, 4, 7)

> plot(T1)

> T2 <- TrapezoidalFuzzyNumber(1.4, 3, 3, 7)

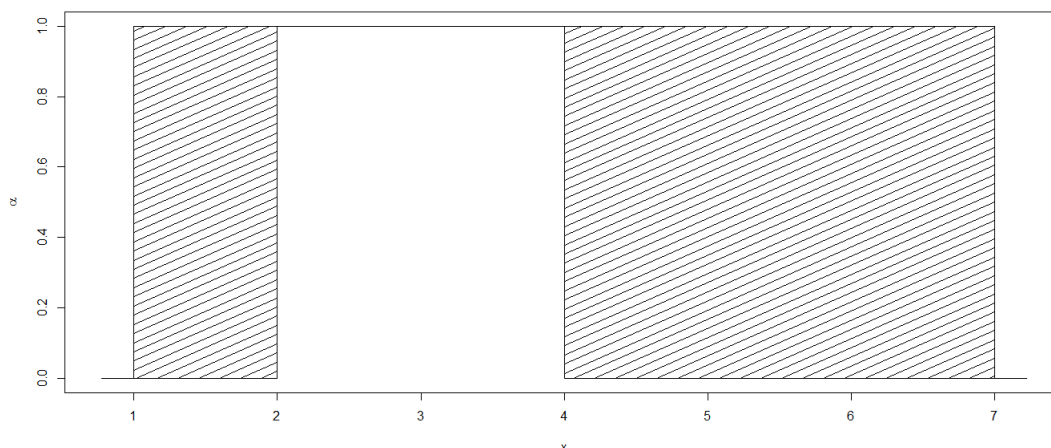
> equivalently: T2 <- TriangularFuzzyNumber(1.4, 3, 7)

> plot(T2, add= TRUE, col=2,lty=3)

> TrapezoidalFuzzyNumber(2, 2, 3, 3) #crisp interval

Trapezoidal fuzzy number with:

support=[2,3],



شکل آ.۲: نمودار تابع عضویت عدد فازی سایه دار مربوط به تذکر آ.۱

```

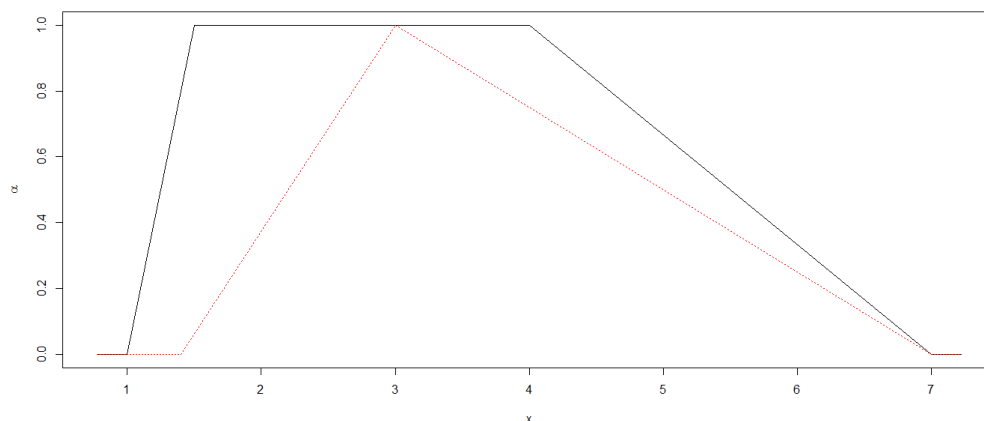
core=[2,3].
> as.TrapezoidalFuzzyNumber(c(2, 3)) #is the same
Trapezoidal fuzzy number with:
  support=[2,3],
  core=[2,3].
> TrapezoidalFuzzyNumber(5, 5, 5, 5) #crisp real
Trapezoidal fuzzy number with:
  support=[5,5],
  core=[5,5].
> as.TrapezoidalFuzzyNumber(5)#is the same
Trapezoidal fuzzy number with:
  support=[5,5],
  core=[5,5].

```

عدد فازی قطعه قطعه ای خطی

در بسته *FuzzyNumber* می توان نوع دیگری از اعداد فازی (معروف به عدد فازی قطعه قطعه ای خطی) را به وسیله تابع *PiecewiseLinearFuzzyNumber* تولید کرد. یکی از مولفه های این تابع *knot.n* است که تعداد برش های قطعه قطعه کننده عدد فازی را تعیین می کند. همچنین مولفه های *knot.alpha*، *knot.left* و *knot.right* به ترتیب برای تعیین ارتفاع، ابتدا و انتهای برش ها (گره ها) استفاده می شوند.

مثال آ.۳. [معرفی عدد فازی قطعه قطعه ای خطی]

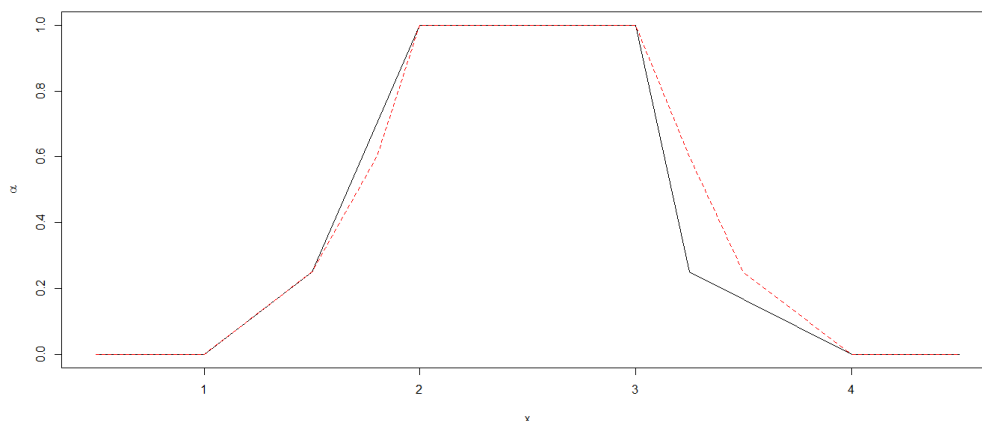


شکل آ.۳: نمودار توابع عضویت مربوط به مثال آ.۲

```
> P1 <- PiecewiseLinearFuzzyNumber(1, 2, 3, 4,
+ knot.n=1, knot.alpha=0.25, knot.left=1.5, knot.right=3.25)
> plot(P1, xlim=c(0.5, 4.5))
> P1
Piecewise linear fuzzy number with 1 knot(s),
  support=[1,4],
  core=[2,3].
> P2 <- PiecewiseLinearFuzzyNumber(1, 2, 3, 4,
+ knot.n=2, knot.alpha=c(0.25,0.6),
+ knot.left=c(1.5, 1.8), knot.right=c(3.25, 3.5))
> plot(P2, col=2, lty=2, pch=2, add=TRUE)
> P2
Piecewise linear fuzzy number with 2 knot(s),
  support=[1,4],
  core=[2,3].
```

عدد فازی توانی

اگر توابع شکل در عدد فازی LR برابر با $left(x) = x^{p.left}$ و $right = (-x)^{p.right}$ در نظر گرفته شوند، آنگاه عدد حاصل را در این بسته «عدد فازی توانی» می‌نامند. عدد فازی توانی به وسیله تابع $PowerFuzzyNumber$ قابل معرفی است و بدیهی است که هر عدد دوزنقه‌ای حالت خاصی از اعداد فازی توانی به ازای $p.left = p.right$ می‌باشد.



شکل آ.۴: نمودار توابع عضویت عدد فازی قطعه قطعه‌ای خطی در مثال آ.۳

آ.۲.۱ محاسبه هسته، دامنه و برش‌های عدد فازی

توابع *core*، *supp* و *alphacut* به ترتیب برای نشان دادن هسته، دامنه و α -برش‌های یک عدد فازی استفاده می‌شوند. همچنین مقدار تابع عضویت در یک نقطه خاص با تابع *evaluate* به دست می‌آید (مثال زیر را ببینید).

مثال آ.۴.

```
> A <- TrapezoidalFuzzyNumber(1, 1.5, 4, 7)
> plot(A)
> cuts
> cuts[, 1] # or equivalently cuts[, "L"]
> supp(A)
[1] 1 7
> core(A)
[1] 1.5 4.0
> evaluate(A, 0)
0
0
> evaluate(A, c(-3, 0, 3))
-3 0 3
0 0 1
> evaluate(A, seq(-1, 2, by=0.5))
-1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0
```

0 0 0 0 0 1 1

۲.آ برخی مثال‌های انجام‌شده با برنامه‌نویسی در نرم‌افزار

R

مثالهایی از فصل دوم:

مثال آزمون فرضیه دقیق بر اساس داده‌های فازی، مثال (۱.۲)

```
> local({pkg <- select.list(sort(.packages(all.available = TRUE)), graphics=TRUE)
+ if(nchar(pkg)) library(pkg, character.only=TRUE)})
> mu=1300;
> n=10;
> Sig_a=0;
> Sig_b=0.05;
> Sig_c=0.1;
> Int_1 <- function(delta) ( (Sig_c+(delta*(Sig_b-Sig_c))) -
+ (1-pnorm( ( (n^0.5)/sigma) *((1331-(18*delta))-mu)))) *
+ ifelse( (Sig_c+(delta*(Sig_b-Sig_c))) -
+ (1-pnorm( ( (n^0.5)/sigma) *((1331-(18*delta))-mu))) >= 0 , 1, 0);
> Int_2 <- function(delta) ( (Sig_a+(delta*(Sig_b-Sig_a))) -
+ (1-pnorm( ( (n^0.5)/sigma) *((1288+(25*delta))-mu)))) *
+ ifelse( (Sig_a+(delta*(Sig_b-Sig_a))) -
+ (1-pnorm( ( (n^0.5)/sigma) *((1288+(25*delta))-mu))) >= 0 , 1, 0);
> Int_2(0.5)
[1] 0
> Delta_SP= area(Int_1, 0, 1) + area(Int_2, 0, 1);
> Delta_SP;
[1] 0.05640873
> Int_3 <- function(delta) ( (1-pnorm( ( (n^0.5)/sigma) *((1288+(25*delta))-mu))) -
+ (Sig_a+(delta*(Sig_b-Sig_a)))) * ifelse( (1-pnorm( ( (n^0.5)/sigma)
+ *((1288+(25*delta))-mu))) - (Sig_a+(delta*(Sig_b-Sig_a))) >= 0 , 1, 0);
> Int_4 <- function(delta) ( (1-pnorm( ( (n^0.5)/sigma) *((1331-(18*delta))-mu))) -
+ (Sig_c+(delta*(Sig_b-Sig_c)))) * ifelse( (1-pnorm( ( (n^0.5)/sigma)
+ *((1331-(18*delta))-mu))) -
```

```

+ (Sig_c+(delta*(Sig_b-Sig_c))) >= 0 , 1, 0);
> Int_4(0.5);
[1] 0
> Delta_PS= area(Int_3, 0, 1) + area(Int_4, 0, 1);
> Delta_PS;
[1] 0.460714
> Degree_P_biger_than_S= Delta_PS / (Delta_PS + Delta_SP);
> Degree_P_biger_than_S;
[1] 0.8909181
> Degree_S_biger_than_P = 1- Degree_P_biger_than_S;
> Degree_S_biger_than_P;
[1] 0.1090819

```

مثال (۱.۲) با استفاده از بسته نرم افزاری *Fuzzy.p.value*

```

H0=T(1300,1300,1300)
H1=B(1300,1300)
t=T(1288,1313,1331)
s.d=30
n=10
sig=T(0,0.05,0.1)
p_value.norm( kind=2,H0,H1,t,s.d,n,sig)
[1] "Delta_SP = "
      0.00
0.05698143
[1] "Delta_PS = "
      1.00
0.4653735
[1] The null hypothesis (H0) is accepted with degree  $D(P>S) = 0.8909$  ,
at the considered significance level.

```

مثال ۲.۲

```

p_value.norm( kind=0, H0=T(1300,1300,1300), H1=B(1300,1300), t=T(1300,1313,1321),
s.d=30,
n=10, sig=T(0,0.15,0.3) )

```

```
[1] "Delta_SP = "  
0.00  
0.145313  
[1] "Delta_PS = "  
1.00  
0.4552266  
[1] The null hypothesis (H0) is accepted with degree D(P>S)= 0.758 ,  
at the considered significance level.
```

مثال ۸.۲

```
H0 = T(1275, 1300, 1325)  
H1 = B(1275, 1325)  
t = T(1327, 1327, 1327) # Crisp observed value for the test statistics  
sig = T(0, .05, .1)  
p_value.norm(kind=2, H0, H1, t, s.d=120, n=36, sig)  
[1] "Delta_SP = "  
0.00  
0.04712044  
[1] "Delta_PS = "  
1.00  
0.2285155  
[1] The null hypothesis (H0) is accepted with degree D(P>S)= 0.829 ,  
at the considered significance level.
```

مثالهایی از فصل سوم:

مثال ۱.۳

```
> H0=T(1275, 1300, 1325)  
> H1=B(1275, 1325)  
> t=T(1327, 1327, 1327)  
> sig = T(0, 0.15, 0.3)  
> p_value.norm(kind=2, H0, H1, t, s.d=120, n=36, sig)  
[1] "Delta_SP = "  
0.00  
0.1954056
```

```
[1] "Delta_PS = "
      1.00
0.1747805
[1] The althernative hypothesis (H1) is accepted with degree  $D(S>P)= 0.5279$  ,
      at the considered significance level.
```

مثال ۳.۳

```
H1=S(12*2.75,12*3.25)
> t=T(24,27,30)
> n=12
> sig=T(0,0.05,0.1)
> p_value.pois(kind=1,H0,H1,t,n=12,sig)
[1] "Delta_SP = "
      0.00
0.02269888
[1] "Delta_PS = "
      1.00
0.05801694
[1] The null hypothesis (H0) is accepted with degree  $D(P>S)= 0.7188$  ,
      at the considered significance level.
```

مثال ۴.۳

```
> t=1327
> H0b=TriangularFuzzyNumber(1275,1300,1325)
> sig=TriangularFuzzyNumber(0,0.15,0.3)
> n=36
> sigma=120
> p_value=function(t,H0b)1-pnorm((t-H0b)/(sigma/sqrt(n)))
> fuzzy.p_value(t,H0b,sig,p_value,fig=2)
$result
[1] The althernative hypothesis (H1) is accepted with degree  $D(S>P)= 0.5264$  ,
      at the considered significance level.
$cuts
```

```

1      0.088507991 0.08850799
0.889 0.068258315 0.11292641
0.778 0.051786007 0.14181012
0.667 0.038642034 0.17532394
0.556 0.028353947 0.21346837
0.444 0.020454830 0.25605506
0.333 0.014505636 0.30269443
0.222 0.010110487 0.35279784
0.111 0.006925373 0.40559587
0      0.004661188 0.46017216

```

\$score

```

          L          U
0.08850799 0.08850799

```

\$support

```

          L          U
0.004661188 0.460172163

```

\$Delta_PS

```
[1] 0.1790184
```

\$Delta_SP

```
[1] 0.198948
```

\$Degree_P_biger_than_S

```
[1] 0.4736357
```

\$Degree_S_biger_than_P

```
[1] 0.5263643
```

\$accepted_hypothesis

```
[1] H1
```

\$acceptance_degree

```
[1] 0.5263643
```

مثال ۵.۳

```

> t=TriangularFuzzyNumber(1315,1327,1342)
> H0b=TriangularFuzzyNumber(1275,1300,1325)
> sig=TriangularFuzzyNumber(0,0.05,0.1)
> p.value=function(t,H0b)1-pnorm((t-H0b)/(120/sqrt(36)))

```



```

> fuzzy.p.value(t,H0b,sig,p.value,fig=3)
$result
[1] The null hypothesis (H0) is accepted with degree  $D(P>S) = 0.8545$  ,
at the considered significance level.
$cuts
      L      U
1 0.0885079914 0.08850799
0.889 0.0579495117 0.12621968
0.778 0.0363711292 0.17389390
0.667 0.0218651554 0.23167757
0.556 0.0125815733 0.29882679
0.444 0.0069253732 0.37364218
0.333 0.0036446149 0.45356210
0.222 0.0018330088 0.53541489
0.111 0.0008806665 0.61579085
0 0.0004040578 0.69146246
$core
      L      U
0.08850799 0.08850799
$support
      L      U
0.0004040578 0.6914624613
$Delta_PS
[1] 0.3328512
$Delta_SP
[1] 0.05668233
$Degree_P_biger_than_S
[1] 0.8544867
$Degree_S_biger_than_P
[1] 0.1455133
$accepted_hypothesis
[1] H0
$acceptance_degree
[1] 0.8544867

```

```

> t=TriangularFuzzyNumber(24,27,30)
> H0b=TriangularFuzzyNumber(2.75,3.25,3.25)
> sig=TriangularFuzzyNumber(0.0,0.05,0.1)
> p.value=function(t,H0b)ppois(t,lambda=12*H0b)
> fuzzy.p.value(t,H0b,sig,p.value,knot.n=100,fig=2)
$result
[1] The null hypothesis (H0) is accepted with degree  $D(P>S) = 0.6068$  ,
at the considered significance level.
$cuts
      L      U
1     0.027618459 0.02761846
0.99 0.017974024 0.02820845
0.98 0.017974024 0.02880950
0.97 0.017974024 0.02942179
0.96 0.017974024 0.03004548
0.949 0.017974024 0.03068075
0.939 0.017974024 0.03132775
0.929 0.017974024 0.03198668
0.919 0.017974024 0.03265770
0.909 0.017974024 0.03334099
0.899 0.017974024 0.03403673
0.889 0.017974024 0.03474509
0.879 0.017974024 0.03546626
0.869 0.017974024 0.03620042
0.859 0.017974024 0.03694775
0.848 0.017974024 0.03770844
0.838 0.017974024 0.03848267
0.828 0.017974024 0.03927063
0.818 0.017974024 0.04007251
0.808 0.017974024 0.04088849
0.798 0.017974024 0.04171878
0.788 0.017974024 0.04256355

```

0.778 0.017974024 0.04342301
 0.768 0.017974024 0.04429735
 0.758 0.017974024 0.04518676
 0.747 0.017974024 0.04609144
 0.737 0.017974024 0.04701159
 0.727 0.017974024 0.04794740
 0.717 0.017974024 0.04889908
 0.707 0.017974024 0.04986682
 0.697 0.017974024 0.05085082
 0.687 0.017974024 0.05185130
 0.677 0.017974024 0.05286844
 0.667 0.017974024 0.07663309
 0.657 0.011297107 0.07802089
 0.646 0.011297107 0.07942920
 0.636 0.011297107 0.08085820
 0.626 0.011297107 0.08230810
 0.616 0.011297107 0.08377909
 0.606 0.011297107 0.08527136
 0.596 0.011297107 0.08678510
 0.586 0.011297107 0.08832050
 0.576 0.011297107 0.08987776
 0.566 0.011297107 0.09145706
 0.556 0.011297107 0.09305859
 0.545 0.011297107 0.09468254
 0.535 0.011297107 0.09632909
 0.525 0.011297107 0.09799842
 0.515 0.011297107 0.09969073
 0.505 0.011297107 0.10140618
 0.495 0.011297107 0.10314497
 0.485 0.011297107 0.10490726
 0.475 0.011297107 0.10669323
 0.465 0.011297107 0.10850306
 0.455 0.011297107 0.11033692
 0.444 0.011297107 0.11219497

0.434 0.011297107 0.11407738
0.424 0.011297107 0.11598433
0.414 0.011297107 0.11791596
0.404 0.011297107 0.11987245
0.394 0.011297107 0.12185395
0.384 0.011297107 0.12386061
0.374 0.011297107 0.12589258
0.364 0.011297107 0.12795003
0.354 0.011297107 0.13003308
0.343 0.011297107 0.13214189
0.333 0.011297107 0.17704545
0.323 0.006845829 0.17965098
0.313 0.006845829 0.18228349
0.303 0.006845829 0.18494302
0.293 0.006845829 0.18762963
0.283 0.006845829 0.19034334
0.273 0.006845829 0.19308420
0.263 0.006845829 0.19585222
0.253 0.006845829 0.19864742
0.242 0.006845829 0.20146982
0.232 0.006845829 0.20431944
0.222 0.006845829 0.20719627
0.212 0.006845829 0.21010031
0.202 0.006845829 0.21303155
0.192 0.006845829 0.21598998
0.182 0.006845829 0.21897558
0.172 0.006845829 0.22198833
0.162 0.006845829 0.22502819
0.152 0.006845829 0.22809512
0.141 0.006845829 0.23118908
0.131 0.006845829 0.23431001
0.121 0.006845829 0.23745786
0.111 0.006845829 0.24063257
0.101 0.006845829 0.24383405

```
0.091 0.006845829 0.24706225
0.081 0.006845829 0.25031706
0.071 0.006845829 0.25359840
0.061 0.006845829 0.25690616
0.051 0.006845829 0.26024026
0.04 0.006845829 0.26360056
0.03 0.006845829 0.26698695
0.02 0.006845829 0.27039931
0.01 0.006845829 0.27383750
0 0.006845829 0.34040295
```

\$score

```
          L          U
```

```
0.02761846 0.02761846
```

\$support

```
          L          U
```

```
0.006845829 0.340402949
```

\$Delta_PS

```
[1] 0.1003497
```

\$Delta_SP

```
[1] 0.06503203
```

\$Degree_P_biger_than_S

```
[1] 0.6067761
```

\$Degree_S_biger_than_P

```
[1] 0.3932239
```

\$accepted_hypothesis

```
[1] H0
```

\$acceptance_degree

```
[1] 0.6067761
```

مثالی از فصل چهارم:

مثال ۲.۴

```
# install.packages("FPV", repos="http://cran.cnr.berkeley.edu")
library(FPV)
library(FuzzyNumbers)
```

```

t = 1327
H0b = TriangularFuzzyNumber(1200,1300,1400)
H1b = TriangularFuzzyNumber(1300,1400,1500)
sig = TriangularFuzzyNumber(0.0,0.15,0.3)
n = 36
sigma = 120
knot.n = 40
p.value = function(t,H0b) 1-pnorm((t-H0b)/(sigma/sqrt(n)))
p01 = fuzzy.p.value(t, H0b, sig, p.value, fig=1, knot.n=knot.n, xlim=c(0,1))
p01$cuts
p10 = fuzzy.p.value(t, H1b, sig, p.value, fig=1, knot.n=knot.n, add=TRUE)
p10$cuts
### Now, you can draw both p-values on one figure:
p01 = fuzzy.p.value(t, H0b, sig, p.value, fig=1, knot.n=knot.n, xlim=c(0,1), lwd=2)
x.L <- x.U <- c()
for(i in 1:knot.n){
x.L = c(x.L, p10$cuts[i,"L"])
x.U = c(x.U, p10$cuts[i,"U"])
}
lines(x.L, (knot.n:1)/knot.n, col=2, lwd=2)
lines(x.U, (1:knot.n)/knot.n, col=2, lwd=2)
### For Decision: =====
t = 1327
H0b = TriangularFuzzyNumber(1200,1300,1400)
H1b = TriangularFuzzyNumber(1300,1400,1500)
sig = TriangularFuzzyNumber(0.0,0.15,0.3)
n = 36
sigma = 120
knot.n = 40
p.value = function(t,H0b) 1-pnorm((t-H0b)/(sigma/sqrt(n)))
p01 = fuzzy.p.value(t, H0b, sig, p.value, fig=1, knot.n=knot.n, xlim=c(0,1))
p01$cuts
p10 = fuzzy.p.value(t, H1b, sig, p.value, fig=1, knot.n=knot.n, add=TRUE)
p10$cuts

```

```

P_01L = p01$cuts[, "L"]
P_01L = P_01L[length(P_01L):1]
P_01U = p01$cuts[, "U"]
P_01U = P_01U[length(P_01U):1]
P_10L = p10$cuts[, "L"]
P_10L = P_10L[length(P_10L):1]
P_10U = p10$cuts[, "U"]
P_10U = P_10U[length(P_10U):1]
Int1 = ( P_01U - P_10L ) * ( P_01U > P_10L )
Int2 = ( P_01L - P_10U ) * ( P_01L > P_10U )
Arz = 1 / (knot.n - 1) #Arze Mostatilha baraye mohasebe-ye Integral
Integral1 <- ( sum( Int1 ) - Int1[1]/2 - Int1[length(Int1)]/2 ) *Arz
Integral2 <- ( sum( Int2 ) - Int2[1]/2 - Int2[length(Int2)]/2 ) *Arz
Delta_P01P10 = Integral1 + Integral2
Int3 = ( P_10U - P_01L ) * ( P_10U > P_01L )
Int4 = ( P_10L - P_01U ) * ( P_10L > P_01U )
Integral3 <- ( sum( Int3 ) - Int3[1]/2 - Int3[length(Int3)]/2 ) *Arz
Integral4 <- ( sum( Int4 ) - Int4[1]/2 - Int4[length(Int4)]/2 ) *Arz
Delta_P10P01 = Integral3 + Integral4
( Degree_P01_biger_than_P10 = Delta_P01P10 / (Delta_P01P10 + Delta_P10P01) )
( Degree_P10_biger_than_P01 = 1- Degree_P01_biger_than_P10 )
# therefore Accept H1 with degree 0.831

```

Abstract

Testing statistical hypotheses are one of the most commonly used statistical issues in decision making. In the usual methods of testing statistical hypotheses, data, hypotheses, parameters, and other precise problem elements are accurate. But in applied sciences, such as economics, agriculture, and the social sciences, we may encounter ambiguous definitions and fuzzy concepts. In such a situation, classical methods require generalization in fuzzy environments. Entry of ambiguity in the hypothesis testing problem can be done through data or hypotheses. Therefore, three major issues can be considered

- 1. Exact hypothesis testing with inaccurate (fuzzy) data,*
- 2. Examination of inaccurate hypotheses with accurate data,*
- 3. Examination of non-accurate hypotheses with inaccurate data.*

One of the most commonly used methods for hypothesis testing is the p-value approach. In this thesis, we implement hypothesis testing in fuzzy environments based on p-value and show how to calculate p-value in R software with two applications packages Fuzzy p-value and FPV. In addition, we make a balanced hypothesis test based on the comparison of the fuzzy p-value test of the hypothesis H_0 versus H_1 and the p-value of the fuzzy test H_1 versus H_0 in a fuzzy environment. We also describe an applied approach with regard to fuzzy assumptions in quality of control.

Key words: *Test of statistical hypothesis, extension principle, fuzzy p-value, fuzzy significance level, balanced decision making.*



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Mathematical Statistic

**Testing Hypothesis in Fuzzy Environment
P-value Approach**

By: Mahboubeh Sadat Madani

Supervisors

Dr. Mohammad Reza Rabiei

Dr. Abbas Parchami

September 2018