

حاشا  
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

## بهینه سازی معکوس

محدثه جامعی

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور

دکتر مریم قرآنی

شهریور ۱۳۹۷

تقدیم به:

آنان که در تعریف نمی‌کنند  
رقیعی اند و اثر ماندگار  
امروز، دیروزی اند  
و همیشه فردایی اند

## سپاس‌گزاری...<sup>پ</sup>

اکنون که به لطف و عنایت پروردگار یکتا و مساعدت اساتید ارجمند موفق به گردآوری، تدوین و تنظیم این رساله گشته‌ام، وظیفه خود می‌دانم که نهایت سپاس‌گزاری را از آنان به عمل آورم. هر چند که برای رسالت پیامبرگونه آنان نمی‌توان در قالب واژگانی در خور شأن و مقام آنان، مراتب احترام و سپاس‌گزاری را بیان نمود. این کلمات تنها گوشه‌ای از سپاس قلبی اینجانب از آنان می‌باشد.

در اینجا لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگواریم جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی که همواره و در تمامی مراحل مرا یاری و راهنمایی نمودند و خانم دکتر مریم قرآنی برای مشاوره های ارزشمندشان تشکر و قدردانی نمایم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر غزنوی و جناب آقای دکتر ناظمی که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم. از خدای متعال برای همه عزیزان سلامتی و موفقیت روز افزون آرزومندم.

و در پایان بی‌نهایت‌ترین سپاس را به پربهاترین گنج گیتی پدر و مادرم ابراز می‌نمایم هرچند این سپاس‌گزاری در مقایسه با انبوه مهربانی و فداکاری‌هایشان بسیار ناچیز است.

محدثه جامعی  
شهریور ۱۳۹۷

## تعمدنامه

اینجانب محدثه جامعی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بهینه‌سازی معکوس، تحت راهنمایی دکتر جعفر فتحعلی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محدثه جامعی  
شهریور ۱۳۹۷

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

در ابتدای پایان نامه به معرفی برنامه ریزی خطی معکوس پرداخته می شود. منظور از مسئله بهینه سازی معکوس، مسئله ای است که در آن  $S$  مجموعه جواب های شدنی مسئله بهینه سازی  $P$  باشد و  $c$  بردار هزینه و هم چنین  $x^\circ$  جواب شدنی مسئله  $P$  باشد. جواب  $x^\circ$  با توجه به بردار هزینه  $c$ ، ممکن است جواب بهینه مسئله  $P$  باشد و یا ممکن است نباشد. در واقع هدف در مسئله بهینه سازی معکوس، تغییر بردار هزینه  $c$  به  $d$  است، به طوری که  $x^\circ$  حتما جواب بهینه مسئله  $P$  باشد و هم چنین  $\|d - c\|_p$  کمینه شود. نخست مسئله برنامه ریزی خطی معکوس مورد مطالعه قرار می گیرد و سپس معکوس مسئله برنامه ریزی خطی تحت نرم های  $L_1$  و  $L_\infty$  ارائه می شود. در پایان نمونه هایی از مسائل برنامه ریزی عدد صحیح صفر و یک و معکوس آن ها مانند: مسئله کوتاه ترین مسیر، مسئله تخصیص، مسئله حداقل برش و مسئله حداقل هزینه جریان و ارائه می شود.

**کلمات کلیدی:** شبکه، الگوریتم جریان، کوتاه ترین مسیر معکوس، حداقل برش، حداقل هزینه جریان، بهینگی.

# لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

# فهرست مطالب

ذ	فهرست تصاویر
۱	۱ فرمول‌بندی مسائل برنامه‌ریزی خطی معکوس
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ تاریخچه
۲	۳.۱ کاربرد مسائل بهینه‌سازی معکوس
۲	۱.۳.۱ علوم ژئوفیزیکی
۲	۲.۳.۱ تصویر برداری پزشکی
۳	۴.۱ بهینه‌سازی معکوس
۳	۵.۱ برنامه‌ریزی خطی
۶	۶.۱ مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس
۹	۲ مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس تحت نرم‌های $L_1$ و $L_\infty$
۹	۱.۲ مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس تحت نرم $L_1$
۱۲	۲.۲ مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس با نرم $L_\infty$
۲۱	۳ نمونه‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح صفرویک و معکوس آن‌ها
۲۱	۱.۳ مسئله برنامه‌ریزی خطی $0-1$ معکوس
۲۴	۲.۳ مسئله کوتاه‌ترین مسیر
۲۴	۳.۳ مسئله کوتاه‌ترین مسیر معکوس تحت نرم $L_1$
۳۲	۴.۳ مسئله تخصیص
۳۲	۵.۳ مسئله تخصیص معکوس با نرم $L_1$
۳۶	۶.۳ مسئله حداقل برش معکوس تحت نرم $L_1$
۳۷	۱.۶.۳ مسئله حداکثر جریان
۳۸	۲.۶.۳ مسئله حداقل برش
۳۹	۷.۳ مسئله حداقل برش معکوس
۴۲	۸.۳ مسئله کم‌ترین هزینه با محدودیت جریان



۴۴	..... مسئله حداقل هزینه جریان معکوس با نرم $L_1$	۹.۳
۴۸	..... مسئله حداقل هزینه جریان معکوس با نرم $L_\infty$	۱۰.۳
۵۰	..... نتیجه گیری	۱۱.۳

۵۳

مراجع

۵۷

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۵۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

## فهرست تصاویر

۲۷	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۳.۳: هزینه هر کمان	۱.۳
۳۰	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۳.۳ می باشد که $c_{ij}^{\pi}$ را نشان می دهد.	۲.۳
۳۱	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۳.۳ می باشد که $d_{ij}^*$ را نشان می دهد.	۳.۳
۳۴	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۵.۳: هزینه هر کمان	۴.۳
۳۵	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۵.۳: $c_{ij}^{\pi}$	۵.۳
۳۶	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۵.۳: $d_{ij}^*$	۶.۳
۴۱	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۷.۳: ظرفیت کمان ها	۷.۳
۴۲	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۷.۳: جواب بهینه	۸.۳
۴۶	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۹.۳: نشان دهنده هزینه کمان ها	۹.۳
۴۷	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۹.۳: نشان دهنده هزینه کمان ها	۱۰.۳
۴۸	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۹.۳: کاهش بهینه هزینه ها	۱۱.۳
۵۰	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۱۰.۳: نشان دهنده کاهش بهینه هزینه ها	۱۲.۳
۵۰	.....	شکل مربوط به مثال ۱.۱۰.۳: نشان دهنده $d^*$ ها	۱۳.۳

# فصل ۱

## فرمول بندی مسائل برنامه ریزی خطی معکوس

### ۱.۱ مقدمه

مطالب این بخش برگرفته از کتاب برنامه ریزی خطی و جریان شبکه‌ای مختار بازارا<sup>۱</sup> [۶] می‌باشد. مسئله بهینه‌سازی معکوس، مسئله‌ای است که در آن  $S$ ، مجموعه جواب‌های شدنی مسئله بهینه‌سازی  $P$  می‌باشد. هم‌چنین  $c$  بردار هزینه و  $x^\circ$  یک جواب شدنی می‌باشد. جواب  $x^\circ$  ممکن است با توجه به بردار هزینه  $c$ ، جواب بهینه مسئله  $P$  باشد و یا ممکن است نباشد. در واقع مسئله بهینه‌سازی معکوس، تغییر بردار هزینه  $c$  به  $d$  است، به طوری که  $x^\circ$  جواب بهینه مسئله  $P$  باشد و  $\|d - c\|_p$  کمینه گردد که  $\|d - c\|_p$  نشان‌دهنده نرم  $L_p$  است.

### ۲.۱ تاریخچه

دانشمندان ژئوفیزیک اولین کسانی بودند که به مطالعه مسائل معکوس پرداختند. این مطلب توسط تارانولا<sup>۲</sup> [۳۸] در سال ۱۹۸۷ با بحث جامعی از نظریه مسائل بهینه‌سازی معکوس در علوم ژئوفیزیک ارائه شد. در جامعه برنامه‌نویسان ریاضی، علاقه به مسائل بهینه‌سازی معکوس با مقالاتی توسط بارتین و توایت<sup>۳</sup> [۸] و [۹] در سال ۱۹۹۲ و ۱۹۹۴ ارائه شد، که به مطالعه مسئله کوتاه‌ترین مسیر معکوس برای پیش‌بینی زمین‌لرزه پرداختند.

ژانگ و کای<sup>۴</sup> [۴۳] و ژانگ و خو<sup>۵</sup> [۴۰] به مسئله کوتاه‌ترین مسیر معکوس تحت نرم وزن‌دار پرداختند. هم‌چنین ژانگ و یانگ<sup>۶</sup> [۴۱] مسائل معکوس حداکثر ظرفیت مسیر را مورد بررسی قرار دادند.

<sup>۱</sup>Bazaraa

<sup>۲</sup>Tarantola

<sup>۳</sup>Burton & Toint

<sup>۴</sup>Zhang & Cai

<sup>۵</sup>Zhang & Xu

<sup>۶</sup>Zhang & Yang

هانگ و لیو<sup>۷</sup> [۲۸] به مطالعه مسئله معکوس جریان کم‌ترین هزینه، تحت نرم وزن‌دار پرداختند. سوکالینگام<sup>۸</sup> [۳۷] در پایان‌نامه دکترا خودش، به مسئله جریان کم‌ترین هزینه تحت نرم‌های  $L_1$  و  $L_\infty$  پرداخت.

آهوچا و اورلین<sup>۹</sup> [۴] در سال ۱۹۹۸ بادر نظر گرفتن مسائل جریان شبکه معکوس برای حالت وزن‌دار پرداختند و درستی برهان‌های ترکیبی را توسعه دادند.

### ۳.۱ کاربرد مسائل بهینه‌سازی معکوس

در این بخش، ما به توصیف خلاصه‌ای از چندین کاربرد مسائل بهینه‌سازی معکوس می‌پردازیم.

#### ۱.۳.۱ علوم ژئوفیزیکی

دانشمندان ژئوفیزیک اغلب همه‌ی پارامترهای مدل‌بندی را ندارند، زیرا آن‌ها ممکن است به صورت خیلی دشوار و یا حتی غیرممکن بتوانند مثلاً شعاع هسته فلزی زمین را تعیین کنند. آن‌ها ممکن است برخی پارامترهای مدل را تخمین بزنند و از مقادیر پارامترهای قابل مشاهده به منظور بهبود برآورد پارامترهای مدل استفاده کنند. در نتیجه، مسائل معکوس به طور گسترده مورد مطالعه دانشمندان ژئوفیزیک قرار گرفته است. یک کاربرد مهم در این زمینه، نگرانی پیش‌بینی حرکات زمین‌لرزه است، که به صورت یک شبکه که تعدادی از سلول‌های مربعی است را در نظر می‌گیرند. گره‌های مربوط به سلول‌های مجاور به وسیله کمان‌ها به هم متصل می‌شوند. هزینه یک کمان نشان‌دهنده‌ی زمان انتقال امواج لرزه‌ای مربوط به سلول‌ها می‌باشد که شناخته نشده‌اند. زمانی که زمین‌لرزه مشاهده شد، زمان‌های ورودی منجر به ایجاد اختلالات در ایستگاه‌های مختلف نیز مشاهده شد. فرض بر این است که زمین لرزه‌ها در طول کوتاه‌ترین مسیر حرکت می‌کنند، مشکلی که زمین‌شناسان با آن مواجه‌اند، بازسازی زمان انتقال بین سلول‌های مشاهده شده از کوتاه‌ترین امواج زمانی و اطلاعات موجود از زمین‌شناسی منطقه مورد مطالعه است. این مسئله نمونه‌ای از مسئله کوتاه‌ترین مسیر معکوس است.

#### ۲.۳.۱ تصویر برداری پزشکی

مسئله‌ی بهینه‌سازی معکوس در توموگرافی اشعه X نیز کاربرد دارد که در زمینه CT اسکن از یک قسمت بدن همراه با اطلاعات پیشین از بدن برای ارزیابی ابعاد آن استفاده می‌شود.

<sup>۷</sup> Huang & Liu

<sup>۸</sup> Sokkalingam

<sup>۹</sup> Ahuja & Orlin

## ۴.۱ بهینه‌سازی معکوس

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$P : \quad \min \quad cx \\ s.t. \quad x \in S$$

فرض کنید  $x^\circ \in S$  یک نقطه شدنی باشد.

در مسئله بهینه‌سازی معکوس، هدف تغییر بردار  $c$  به بردار  $d$  به گونه‌ای است که  $x^\circ$  جواب بهینه مسئله زیر شود،

$$P(d) : \quad \min \quad dx \\ s.t. \quad x \in S$$

و فاصله  $c$  و  $d$  کمترین مقدار باشد، یعنی  $\|d - c\|_p$  مینیمم گردد. بنابراین مدل زیر را داریم:

$$\min \quad \|d - c\|_p \\ s.t. \quad dx^\circ \leq dx \\ x \in S$$

## ۵.۱ برنامه‌ریزی خطی

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j x_j \\ s.t. \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in I \\ & x_j \geq l_j \quad j \in J \\ & -x_j \geq -u_j \quad j \in J \end{aligned} \quad (1.1)$$

که  $I$  اندیس محدودیت‌ها و  $J$  اندیس متغیرها است. هم‌چنین  $l_j$  و  $u_j$  به ترتیب کران پایین و کران بالا برای  $x_j$  است. فرض کنید  $\pi_i$ ،  $\lambda_j$  و  $\varphi_j$  متغیرهای دوگان متناظر با محدودیت‌های مسأله فوق باشند، بنابراین دوگان این مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{i \in I} b_i \pi_i + \sum_{j \in J} l_j \lambda_j - \sum_{j \in J} u_j \varphi_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} a_{ij} \pi_i + \lambda_j - \varphi_j = c_j \quad j \in J \\
 & \pi_i \geq 0 \quad i \in I \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j \in J \\
 & \varphi_j \geq 0 \quad j \in J
 \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

قضیه ۱.۵.۱. کمبود مکمل: مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی اولیه و دوگان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 P : \quad & \min \quad cx \\
 & \text{s.t.} \quad Ax \geq b \\
 & \quad \quad x \geq 0
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 D : \quad & \max \quad wb \\
 & \text{s.t.} \quad wA \leq c \\
 & \quad \quad w \geq 0
 \end{aligned}$$

اگر  $x^*$  و  $w^*$  به ترتیب جواب‌های شدنی مسئله اولیه و مسئله دوگان باشند، در این صورت  $x^*$  و  $w^*$  جواب‌های بهینه مسئله اولیه و مسئله دوگان‌اند اگر و فقط اگر:

$$\begin{cases} w^*(Ax^* - b) = 0 \\ x^*(c - w^*A) = 0 \end{cases}$$

یا به عبارت دیگر:

اگر  $a^i$ ، برای  $i = 1, \dots, m$  سطرهای ماتریس  $A$  باشند، باید:

$$\begin{cases} w_i^*(a^i x^* - b_i) = 0 & \forall i = 1, \dots, m \\ x_j^*(c_j - w^* a_j) = 0 & \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

نتیجه ۲.۵.۱. در صورتی که متغیر مسئله اولیه ( $x_j$ ) در جواب بهینه مثبت باشد، (یعنی  $x_j$  در پایه باشد) آن‌گاه محدودیت متناظر (قید زام) در مسئله دوگان به صورت تساوی (محدودیت فعال) در می‌آید.

نتیجه ۳.۵.۱. در صورتی که محدودیت مسئله اولیه به ازای جواب بهینه به صورت نامساوی اکید برآورده شود، (محدودیت غیر فعال) آنگاه متغیر متناظر در جواب بهینه مسئله دوگان صفر است.

نتیجه ۴.۵.۱. در صورتی که متغیر  $i$ ام مسئله دوگان در جواب بهینه مثبت باشد، آنگاه محدودیت متناظر آن (قید  $i$ ام) در مسئله اولیه به صورت تساوی برآورده می‌شود.

نتیجه ۵.۵.۱. در صورتی که محدودیت  $j$ ام مسئله دوگان به ازای جواب بهینه به صورت نامساوی اکید برآورده شود، آنگاه متغیر متناظر آن قید در مسئله اولیه صفر است.

حال اگر  $x$  در معادلات (۱.۱) و  $(\pi, \lambda, \varphi)$  در معادلات (۲.۱) صدق کنند، آنگاه هر دو در شرایط کمبود مکمل صدق می‌کنند، یعنی:

$$\bullet \text{ اگر } \sum_{j \in J} a_{ij} x_{ij} > b_i \text{ آنگاه } \pi_i = 0$$

$$\bullet \text{ اگر } x_j > l_j \text{ آنگاه } \lambda_j = 0$$

$$\bullet \text{ اگر } x_j < u_j \text{ آنگاه } \varphi_j = 0$$

فرض کنید  $x^\circ$  نقطه شدنی مسئله (۱.۱) باشد. فرض کنید  $B$  مجموعه اندیس محدودیت‌های فعال در  $x^\circ$  در دسته محدودیت‌های اول مسئله (۱.۱) باشد، یعنی:

$$B = \{i \in I \mid \sum_{j \in J} a_{ij} x_j^\circ = b_i\}$$

و به همین ترتیب  $L$  مجموعه اندیس مربوط به محدودیت‌های فعال در  $x^\circ$  در دسته محدودیت‌های دوم مسئله (۱.۱) باشد، یعنی:

$$L = \{j \in J \mid x_j^\circ = l_j\}$$

و  $U$  مجموعه اندیس مربوط به محدودیت‌های فعال در  $x^\circ$  در دسته محدودیت‌های سوم مسئله (۱.۱) باشد، یعنی:

$$U = \{j \in J \mid x_j^\circ = u_j\}$$

و فرض کنید مجموعه  $F$  به صورت زیر باشد:

$$F = \{j \in J \mid l_j < x_j^\circ < u_j\}$$

بنابراین شرایط کمبود مکمل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\bullet \pi_i = 0 \text{ به ازای هر } i \notin B$$

$$\bullet \lambda_j = 0 \text{ به ازای هر } j \notin L$$

$$\bullet \varphi_j = 0 \text{ به ازای هر } j \notin U$$

## ۶.۱ مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس

در مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس می‌خواهیم با تغییر بردار هزینه  $c$  به  $d$ ،  $x^\circ$  را تبدیل به جواب بهینه مسأله (۱.۱) کنیم. مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی (۱.۱) را که  $c_j$  با  $d_j$  جایگزین شده است را با  $LP(d)$  نشان می‌دهیم.

$$LP(d) : \quad \min \quad \sum_{j \in J} d_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in I$$

$$x_j \geq l_j \quad j \in J$$

$$-x_j \geq -u_j \quad j \in J$$

هم‌چنین  $d$  را شدنی معکوس نسبت به  $x^\circ$  نامیم، هرگاه  $x^\circ$  یک جواب بهینه مسئله  $LP(d)$  باشد. توجه کنید که  $x^\circ$  جواب بهینه مسئله  $LP(d)$  است اگر و تنها اگر یک جواب دوگان مانند  $(\pi, \lambda, \varphi)$  موجود باشد که در محدودیت اول مسئله (۲.۱) با جایگذاری  $d_j$  به جای  $c_j$  صدق کند و زوج‌های اولیه و دوگان در شرایط کمبود مکمل صدق کنند. بنابراین با توجه به تعاریف مجموعه‌های  $U, L, B$  و  $F$ ، با قرار دادن شرایط کمبود مکمل در محدودیت‌های دوگان شرایط زیر را داریم:

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i + \lambda_j = d_j \quad j \in L$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i - \varphi_j = d_j \quad j \in U$$

$$\sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i = d_j \quad j \in F \quad (3.1)$$

$$\pi_i \geq 0 \quad i \in B$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j \in L$$

$$\varphi_j \geq 0 \quad j \in U$$

در مدل فوق برای محدودیت اول می‌توان گفت، چون  $j \in L$  است پس  $x_j^\circ = l_j$ ، یعنی  $j \notin U$  پس  $\varphi_j = 0$ . هم‌چنین برای محدودیت دوم داریم، چون  $j \in U$  پس  $j \notin L$  و در نتیجه  $\lambda_j = 0$  و برای محدودیت سوم، چون  $j \in F$  پس  $j \notin L \cup U$  و در نتیجه  $\varphi_j = \lambda_j = 0$ . در مسئله معکوس، هدف کمینه کردن  $\|d - c\|_p$  تحت شرایط فوق است. یعنی مدل مسئله معکوس را با توجه به بحث فوق، می‌توان به صورت زیر نوشت:



$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j \in J} \|d_j - c_j\|_p \\
s.t. \quad & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i + \lambda_j = d_j & j \in L \\
& \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i - \varphi_j = d_j & j \in U \\
& \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i = d_j & j \in F \\
& \pi_i \geq 0 & i \in B \\
& \lambda_j \geq 0 & j \in L \\
& \varphi_j \geq 0 & j \in U
\end{aligned}$$



## فصل ۲

# مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس تحت نرم‌های $L_1$ و $L_\infty$

در این فصل به بررسی مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس، تحت نرم‌های  $L_1$  و  $L_\infty$  می‌پردازیم. مطالب این بخش برگرفته از [۴] می‌باشد.

### ۱.۲ مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس تحت نرم $L_1$

فرض کنید تابع هدف مسئله را تحت نرم  $L_1$  به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\min \sum_{j \in J} w_j |d_j - c_j|$$

که محدودیت‌های آن، همان محدودیت‌های مسئله (۳.۱) می‌باشد، پس مدل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} w_j |d_j - c_j| \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i + \lambda_j = d_j & j \in L \\ & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i - \varphi_j = d_j & j \in U \\ & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i = d_j & j \in F \\ & \pi_i \geq 0 & i \in B \\ & \lambda_j \geq 0 & j \in L \\ & \varphi_j \geq 0 & j \in U \end{aligned}$$

توجه کنید که مسئله فوق، یک مسئله برنامه‌ریزی خطی نیست، ولی مدل فوق را با فرض  $w_j |d_j - c_j| = w_j(\alpha_j + \beta_j)$  و  $d_j - c_j = \alpha_j - \beta_j$  که  $\alpha_j, \beta_j \geq 0$  می‌توان به صورت زیر به مدل خطی تبدیل کرد:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{j \in J} w_j \alpha_j + \sum_{j \in J} w_j \beta_j \quad \equiv \quad \max \quad - \sum_{j \in J} w_j \alpha_j - \sum_{j \in J} w_j \beta_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i - \alpha_j + \beta_j + \lambda_j = c_j \quad j \in L \\
 & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i - \alpha_j + \beta_j - \varphi_j = c_j \quad j \in U \\
 & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i - \alpha_j + \beta_j = c_j \quad j \in F \\
 & \alpha_j \geq 0, \beta_j \geq 0 \quad j \in J \\
 & \pi_i \geq 0 \quad i \in B \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j \in L \\
 & \varphi_j \geq 0 \quad j \in U
 \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

توجه کنید که  $\alpha_j$  و  $\beta_j$  نمی‌توانند هم‌زمان در پایه قرار بگیرند، چون مستقل خطی نیستند. سه محدودیت اول مسئله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 -\alpha_j + \beta_j &= c_j^\pi - \lambda_j \quad j \in L \\
 -\alpha_j + \beta_j &= c_j^\pi + \varphi_j \quad j \in U \\
 -\alpha_j + \beta_j &= c_j^\pi \quad j \in F
 \end{aligned}$$

که در آن

$$c_j^\pi = c_j - \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i$$

سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت ۱: اگر  $c_j^\pi > 0$

از نامنفی بودن  $\alpha_j$  و  $\beta_j$  و از اینکه می‌خواهیم  $\alpha_j + \beta_j$  را کمینه کنیم، نتیجه می‌شود که:

اولاً: اگر  $j \in L$ ، آنگاه  $c_j^\pi = \lambda_j + \beta_j - \alpha_j > 0$ ، بنابراین  $\lambda_j + \beta_j - \alpha_j > 0$ ، حال برای اینکه  $\alpha_j + \beta_j$  مینیمم شود، قرار می‌دهیم:

$$\lambda_j = c_j^\pi = |c_j^\pi|, \quad \alpha_j = \beta_j = 0 \quad \Rightarrow \quad d_j = c_j + \alpha_j - \beta_j \quad \Rightarrow \quad d_j = c_j$$

ثانیاً: اگر  $j \in F \cup U$ ، آن‌گاه

$$\alpha_j = \varphi_j = 0, \quad \beta_j = c_j^\pi = |c_j^\pi| \Rightarrow d_j = c_j - |c_j^\pi|$$

زیرا اگر  $j \in U$  و اگر  $\alpha_j = \beta_j = 0$  آن‌گاه از محدودیت  $c_j^\pi = \beta_j - \alpha_j - \varphi_j$  خواهیم داشت:  $c_j^\pi = -\varphi_j \leq 0$  که با نامنفی بودن  $c_j^\pi$  تناقض دارد. حال اگر  $\alpha_j > 0$  پس نمی‌توان داشت:  $c_j^\pi = -\alpha_j - \varphi_j \leq 0$  و از طرفی چون هدف کمینه‌سازی  $\alpha_j + \beta_j$  است، لذا اگر  $\alpha_j = 0$ ، به دست می‌آوریم:  $c_j^\pi = \beta_j - \varphi_j$  پس داریم:  $\varphi_j = 0$ ، زیرا هدف کمینه کردن  $\beta_j$  است و  $\beta_j = c_j^\pi + \varphi_j$  باید  $c_j^\pi > 0$  باشد و اگر  $j \in F$  از محدودیت  $c_j^\pi = \beta_j - \alpha_j$  به دست می‌آید:  $\alpha_j = 0$ ، زیرا  $c_j^\pi = \beta_j - \alpha_j > 0$  پس  $\beta_j > \alpha_j$  و برای کمینه کردن مجموع  $\alpha_j$  و  $\beta_j$ ، قرار می‌دهیم:  $\alpha_j = 0$

حالت ۲: اگر  $c_j^\pi < 0$

در این حالت:

اولاً: اگر  $j \in U$ ، آن‌گاه از رابطه زیر

$$c_j^\pi = \beta_j - \alpha_j - \varphi_j < 0$$

و از مثبت بودن  $\alpha_j$  و  $\beta_j$  و کمینه کردن  $\alpha_j + \beta_j$  نتیجه می‌شود:  $\alpha_j = \beta_j = 0$  بنابراین داریم:

$$\varphi_j = -c_j^\pi = |c_j^\pi|, \quad \alpha_j = \beta_j = 0 \Rightarrow d_j = c_j$$

ثانیاً: اگر  $j \in F \cup L$ ، آن‌گاه با توجه به این‌که:

$$\begin{cases} c_j^\pi = -\alpha_j + \beta_j + \lambda_j < 0 & j \in L \\ c_j^\pi = -\alpha_j + \beta_j & j \in F \end{cases}$$

بنابراین:

$$\beta_j = \lambda_j = 0, \quad \alpha_j = -c_j^\pi = |c_j^\pi| \Rightarrow d_j = c_j + |c_j^\pi|$$

حالت ۳: اگر  $c_j^\pi = 0$  در این حالت:

$$\alpha_j = \beta_j = \lambda_j = \varphi_j = 0 \Rightarrow d_j = c_j$$

بنابراین به طور خلاصه اگر  $\pi$  جواب بهینه مسئله (۱.۲) باشد، آن‌گاه  $d^*$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$d_j^* = \begin{cases} c_j - |c_j^\pi| & c_j^\pi > 0, x_j^\circ > L_j \\ c_j + |c_j^\pi| & c_j^\pi < 0, x_j^\circ < U_j \\ c_j & o.w \end{cases} \quad (2.2)$$

توجه کنید که به جای حل مسئله (۱.۲)، می‌توان دوگان آن را حل کرد. فرض کنید  $y_j$  ها متغیرهای دوگان باشند، پس دوگان مسئله (۱.۲) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j y_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} y_j \geq b_i \quad i \in B \\ & 0 \leq y_j \leq w_j \quad j \in L \\ & -w_j \leq y_j \leq 0 \quad j \in U \\ & -w_j \leq y_j \leq w_j \quad j \in F \end{aligned} \quad (3.2)$$

با قرار دادن  $y_j = x_j - x_j^\circ$  به‌ازای هر  $j \in J$  مدل زیر را داریم، که شبیه مدل (۱.۱) است.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in B \\ & 0 \leq x_j \leq w_j \quad j \in L \\ & u_j - w_j \leq x_j \leq u_j \quad j \in U \\ & x_j^\circ - w_j \leq x_j \leq x_j^\circ + w_j \quad j \in F \end{aligned} \quad (4.2)$$

مدل‌های (۳.۲) و (۴.۲) دوگان مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس هستند، که با یکدیگر معادلند. هر دو مدل جواب‌های بهینه اولیه متفاوتی دارند و با استفاده از فرمول  $x = x^\circ - y$  به یکدیگر مرتبط می‌شوند. اما هر دو مسئله دارای جواب بهینه دوگان  $\pi$  می‌باشند که تعیین کننده بردار بهینه هزینه  $d^*$  می‌باشد.

## ۲.۲ مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس با نرم $L_\infty$

مسئله معکوس با نرم  $L_\infty$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \max_{j \in J} w_j |d_j - c_j| \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i + \lambda_j = d_j \quad j \in L \\
 & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i - \varphi_j = d_j \quad j \in U \\
 & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i = d_j \quad j \in F \\
 & \pi_i \geq 0 \quad i \in B \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j \in L \\
 & \varphi_j \geq 0 \quad j \in U
 \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

به علت وجود قدرمطلق در تابع هدف، مسئله‌ی فوق یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی نیست، اما می‌توان آن را به مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد. فرض کنید:

$$\begin{cases} w_j |d_j - c_j| = w_j \alpha_j + w_j \beta_j \\ d_j - c_j = \alpha_j - \beta_j \\ \alpha_j, \beta_j \geq 0 \end{cases}$$

و اگر فرض کنیم که:

$$\theta = \max(w_j \alpha_j + w_j \beta_j)$$

باشد. حال محدودیت  $w_j \alpha_j + w_j \beta_j \leq \theta$  برای هر  $j \in J$  را به مسئله فوق اضافه می‌کنیم و با تبدیل حالت مینیمم سازی تابع هدف به حالت ماکزیمم سازی مسئله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -\theta \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i - \alpha_j + \beta_j + \lambda_j = c_j \quad j \in L \\
 & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i - \alpha_j + \beta_j - \varphi_j = c_j \quad j \in U \\
 & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i - \alpha_j + \beta_j = c_j \quad j \in F \\
 & w_j \alpha_j + w_j \beta_j - \theta \leq 0 \quad j \in J \\
 & \pi_i \geq 0 \quad i \in B \\
 & \alpha_j \geq 0, \quad \beta_j \geq 0 \quad j \in J \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j \in L \\
 & \varphi_j \geq 0 \quad j \in U
 \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

حال اگر فرض کنید  $c_j^\pi = c_j - \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i$ . بنابراین سه محدودیت اول مسئله (۶.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 -\alpha_j + \beta_j &= c_j^\pi - \lambda_j \quad j \in L \\
 -\alpha_j + \beta_j &= c_j^\pi + \varphi_j \quad j \in U \\
 -\alpha_j + \beta_j &= c_j^\pi \quad j \in F
 \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱:  $c_j^\pi > 0$

در این حالت از نامنفی بودن  $\alpha_j$  و  $\beta_j$  و همچنین این که می‌خواهیم  $\max w_j \alpha_j + w_j \beta_j$  را کمینه کنیم، نتیجه می‌شود که همواره جواب بهینه موجود است به قسمی که:

اولاً: اگر  $j \in L$ ، آن‌گاه؛

$$\lambda_j = c_j^\pi = |c_j^\pi|, \quad \alpha_j = \beta_j = 0 \Rightarrow d_j = c_j + \alpha_j - \beta_j \Rightarrow d_j = c_j$$

ثانیاً: اگر  $j \in F \cup U$ ، آن‌گاه؛

$$\alpha_j = \varphi_j = 0, \quad \beta_j = c_j^\pi = |c_j^\pi| \Rightarrow d_j = c_j - |c_j^\pi|$$

پس با توجه به حالت فوق که  $c_j^\pi > 0$  می‌توان، در این حالت محدودیت‌های اول تا چهارم مسئله (۶.۲) را به صورت محدودیت زیر نوشت:

$$w_j c_j^\pi \leq \theta \quad j \in F \cup U$$



زیرا:

$$-\alpha_j + \beta_j = c_j^\pi + \varphi_j \quad j \in U$$

$$-\alpha_j + \beta_j = c_j^\pi \quad j \in F$$

و چون:

$$\alpha_j = \varphi_j = 0 \quad \rightarrow \quad \beta_j = c_j^\pi$$

و

$$w_j \alpha_j + w_j \beta_j \leq \theta \quad \rightarrow \quad w_j c_j^\pi \leq \theta \quad j \in F \cup U$$

حالت ۲:  $c_j^\pi < 0$

در این حالت:

اولاً: اگر  $j \in U$ ، آن‌گاه؛

$$\varphi_j = -c_j^\pi = |c_j^\pi|, \quad \alpha_j = \beta_j = 0 \quad \Rightarrow \quad d_j = c_j$$

ثانیاً: اگر  $j \in F \cup L$ ، آن‌گاه؛

$$\beta_j = \lambda_j = 0, \quad \alpha_j = -c_j^\pi = |c_j^\pi| \quad \Rightarrow \quad d_j = c_j + |c_j^\pi|$$

پس با توجه به حالت فوق که اگر  $c_j^\pi < 0$  باشد، می‌توان در این حالت محدودیت‌های اول تا چهارم مسئله (۶.۲) را به صورت زیر نوشت:

$$-w_j c_j^\pi \leq \theta \quad j \in F \cup L$$

زیرا:

$$-\alpha_j + \beta_j = c_j^\pi - \lambda_j \quad j \in L$$

$$-\alpha_j + \beta_j = c_j^\pi \quad j \in F$$

و چون:

$$\beta_j = \lambda_j = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_j = -c_j^\pi$$

و

$$w_j \alpha_j + w_j \beta_j \leq \theta \quad \rightarrow \quad -w_j c_j^\pi \leq \theta \quad j \in F \cup L$$

حالت ۳:  $c_j^\pi = 0$

در این حالت:

$$\alpha_j = \beta_j = \lambda_j = \varphi_j = 0 \quad \Rightarrow \quad d_j = c_j$$

بنابراین بردار هزینه بهینه  $d_j^* = c_j + \alpha_j - \beta_j$  به صورت زیر می‌باشد:

$$d_j^* = \begin{cases} c_j - |c_j^\pi| & c_j^\pi > 0, x_j^\circ > L_j \\ c_j + |c_j^\pi| & c_j^\pi < 0, x_j^\circ < U_j \\ c_j & o.w \end{cases} \quad (8.2)$$

با توجه به بحث فوق و محدودیت‌های (۷.۲)، مدل زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \max \quad & -\theta \\ \text{s.t.} \quad & -w_j(c_j - \sum_{i \in B} a_{ij}\pi_i) \leq \theta \quad j \in F \cup L \\ & w_j(c_j - \sum_{i \in B} a_{ij}\pi_i) \leq \theta \quad j \in F \cup U \\ & \pi_i \geq 0 \quad i \in B \end{aligned} \quad (9.2)$$

اگر محدودیت‌های مدل فوق را با فرض  $w_j \neq 0$ ، به ازای  $j \in J$  بر  $w_j$  تقسیم کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & -\theta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in B} a_{ij}\pi_i - \frac{1}{w_j}\theta \leq c_j \quad j \in F \cup L \\ & -\sum_{i \in B} a_{ij}\pi_i - \frac{1}{w_j}\theta \leq -c_j \quad j \in F \cup U \\ & \pi_i \geq 0 \quad i \in B \end{aligned} \quad (10.2)$$

اگر متغیر دوگان  $y_j^+$  را برای محدودیت اول و متغیر دوگان  $y_j^-$  را برای محدودیت دوم در نظر بگیریم، آنگاه دوگان مسئله‌ی فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in L} c_j y_j^+ + \sum_{j \in F} c_j (y_j^+ - y_j^-) - \sum_{j \in U} c_j y_j^- \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in L} a_{ij} y_j^+ + \sum_{j \in F} a_{ij} (y_j^+ - y_j^-) - \sum_{j \in U} a_{ij} y_j^- \geq 0 \quad i \in B \\ & \sum_{j \in L} \frac{1}{w_j} y_j^+ + \sum_{j \in F} \frac{1}{w_j} (y_j^+ - y_j^-) + \sum_{j \in U} \frac{1}{w_j} y_j^- = 1 \\ & y_j^+ \geq 0, y_j^- \geq 0 \quad i \in B \end{aligned} \quad (11.2)$$

فرض کنید به ازای  $j \in L$  قرار دهید:  $y_j = y_j^+$  و  $y_j = (y_j^+ - y_j^-)$  برای هر  $j \in F$  و  $y_j = -y_j^-$  برای هر  $j \in U$ ، آنگاه مدل (۱۱.۲) به مدل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{j \in J} c_j y_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} y_j \geq 0 \quad i \in B \\
 & \sum_{j \in J} \frac{1}{w_j} |y_j| = 1 \quad (12.2) \\
 & y_j \geq 0, \quad j \in L \\
 & y_j \leq 0 \quad j \in U
 \end{aligned}$$

مدل (۱۲.۲) را، مدل  $0$ -مینیماکس دوگان معکوس می‌نامیم و با قرار دادن  $y_j = x_j - x_j^0$ ، مدل زیر را خواهیم داشت که به آن  $x^0$ -مینیماکس دوگان معکوس می‌گوییم.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{j \in J} c_j x_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in B \\
 & \sum_{j \in J} \frac{1}{w_j} |x_j - x_j^0| = 1 \quad (13.2) \\
 & x_j \geq x_j^0, \quad j \in L \\
 & x_j \leq x_j^0 \quad j \in U
 \end{aligned}$$

در حالی که  $x^0$  یک نقطه درونی است. اگر فرض کنیم:

$$B = \{i \in I \mid \sum_{j \in J} a_{ij} x_j^0 = b_i\}$$

آن‌گاه در این حالت  $B = \emptyset$ ، بنابراین  $\pi_i = 0$  و در نتیجه:

$$c_j^\pi = c_j - \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i = c_j$$

بنابراین:

$$d_j^* = \begin{cases} c_j - |c_j^\pi| & c_j^\pi > 0, x_j^0 > L_j \\ c_j + |c_j^\pi| & c_j^\pi < 0, x_j^0 < U_j \\ c_j & o.w \end{cases} = 0$$

بنابراین مسئله به مسئله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \circ \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq \circ \end{aligned} \quad (14.2)$$

بنابراین جواب بدیهی صفر بدست می‌آید.

**تعریف ۱.۲.۲.** مجموعه  $X$  در  $\mathbb{R}^n$  را محدب گویند، هرگاه به‌ازای هر  $x_1, x_2 \in X$  و  $\lambda \in [0, 1]$  داشته باشیم:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$$

در واقع برای آن‌که  $X$  محدب باشد، باید هر نقطه داخل  $X$  و پاره‌خط واصل بین آن‌ها نیز در  $X$  واقع باشد.

هر نقطه به شکل  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  که در آن  $\lambda \in [0, 1]$  باشد را ترکیب محدب دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$  گویند و اگر  $\lambda \in (0, 1)$ ، آن را ترکیب محدب اکید گویند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{خطی} \quad \sum \lambda_i x_i \\ \text{آفین} \quad \sum \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0 \end{array} \right.$$

**تعریف ۲.۲.۲.** نقطه  $x$  را یک نقطه رأسی گویند، هرگاه نتوان آن را به صورت ترکیب محدب اکید دو نقطه دیگر نوشت.

در واقع  $x$  نقطه رأسی است اگر  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ ،  $\lambda \in (0, 1)$  آن‌گاه:

$$x = x_1 = x_2$$

بنابراین اگر  $x^\circ$  یک نقطه درونی باشد، نمی‌توان  $d$  را به‌گونه‌ای یافت که  $x^\circ$  تبدیل به جواب بهینه شود و این منطبق با قضیه‌ای در برنامه‌ریزی خطی است که جواب بهینه در نقاط رأسی و یا ترکیب محدب آن‌ها قرار دارند و درونی نیستند.

**مثال ۳.۲.۲.** مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (15.2)$$

می‌دانیم  $x^* = (0, 1)$  نقطه بهینه مسئله فوق است که دارای جواب بهینه  $z^* = -3$  می‌باشد. حال فرض کنید  $x^0 = (1, 0)$  یک نقطه شدنی باشد. می‌خواهیم این نقطه شدنی، نقطه‌ی بهینه مسئله (۱۵.۲) نیز باشد. هم‌چنین داریم:

$$l_j = 0, \quad u_j = \infty$$

و

$$B = \{1, 2\}$$

که  $B$  مجموعه اندیس محدودیت‌های فعال در  $x^0$  می‌باشد. هم‌چنین:

$$c_j^\pi = c_j - \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i$$

حال دوگان مسئله (۱۵.۲) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = w_1 + 2w_2 \\ \text{s.t.} \quad & w_1 + 2w_2 \leq 2 \\ & w_1 - w_2 \leq -3 \\ & w_1, w_2 \leq 0 \end{aligned} \quad (16.2)$$

که نقطه بهینه  $w^* = (-3, 0)$  می‌باشد و همواره دارای جواب بهینه  $z^* = -3$  می‌باشد. و در نتیجه

$$c_1^\pi = 2 - \sum_{i \in B} a_{1i} \pi_i = 2 - \pi_1 = 2 - (-3) = 5$$

$$c_2^\pi = -3 - \sum_{i \in B} a_{2i} \pi_i = -3 - 2\pi_2 = -3 - 2(0) = -3$$

بنابراین:

$$d^* = (-3, -6)$$

و در نتیجه با تغییر بردار  $c = (2, -3)$  به  $c = (-3, -6)$ ، نقطه  $x^0 = (1, 0)$  نقطه بهینه مسئله می‌شود.



# فصل ۳

## نمونه‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح صفرویک و معکوس آنها

در این فصل از پایان‌نامه نمونه‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح صفرویک، با استفاده از مراجع [۱۹] و [۲۱] بیان شده است. در ادامه‌ی فصل به بررسی معکوس این مسائل مانند: معکوس مسئله کوتاه‌ترین مسیر، معکوس مسئله تخصیص، معکوس مسئله حداقل برش و معکوس مسئله حداقل هزینه جریان با استفاده از مراجع [۷]، [۸]، [۱۰] و [۴۳] بیان می‌کنیم.

### ۱.۳ مسئله برنامه‌ریزی خطی ۱-۰ معکوس

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید کران بالا متغیرها ۱ و هم‌چنین کران پایین متغیرها ۰ باشد و یک جواب بهینه صحیح موجود باشد، این مسئله را، مسئله برنامه‌ریزی صفرویک نامند.

هم‌چنین فرض کنید  $w_j = 1$  برای هر  $j \in J$  و  $x^0$  یک جواب شدنی صفرویک باشد. چون  $x^0$  یک متغیر صفرویک است، پس در مسئله (۴.۲) داریم:  $u_j = w_j = 1$  و  $l_j = 0$ . بنابراین مدل زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in B \\ & 0 \leq x_j \leq 1 \quad j \in J \end{aligned} \quad (1.3)$$

فرض کنید  $x^*$  جواب بهینه مسئله (۱.۳) باشد.

فرض کنید  $\lambda_j$  و  $\pi_i$  متغیرهای دوگان متناظر با محدودیت‌های مسئله فوق باشند، بنابراین دوگان مسئله فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{i \in B} b_i \pi_i + \sum_{j \in J} \lambda_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in B} a_{ij} \pi_i + \lambda_j \leq c_j \quad j \in J \\
 & \pi_i \geq 0 \quad i \in B \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j \in J
 \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

فرض کنید  $\pi$  جواب بهینه دوگان متناظر با محدودیت اول مسئله باشد. از برنامه‌ریزی خطی داریم:

$$\text{اولاً: } c_j^\pi < 0 \quad \text{اگروتنهاگر} \quad x_j^* = u_j = 1$$

$$\text{ثانیاً: } c_j^\pi > 0 \quad \text{اگروتنهاگر} \quad l_j = x_j^* = 0$$

با استفاده از مطالب فوق و مباحث فصل ۲ داریم:

$$d_j^* = \begin{cases} c_j - |c_j^\pi| & \begin{cases} x_j^\circ = 1 \\ x_j^* = 0 \end{cases} \\ c_j + |c_j^\pi| & \begin{cases} x_j^\circ = 0 \\ x_j^* = 1 \end{cases} \\ c_j & x_j^\circ = x_j^* \end{cases} \tag{۳.۳}$$

در این حالت مقدار بهینه تابع هدف برای مسئله معکوس به صورت زیر است:

$$\sum_{j \in J} |d_j - c_j| = \sum_{\{j \in J | x_j^\circ \neq x_j^*\}} |c_j^\pi|$$

**تعریف ۲.۱.۳.** **گراف جهت‌دار:** مجموعه‌ای از گره‌ها که با یال‌ها به هم متصل شده‌اند که در آن به هر یال جهتی نسبت داده شده است، یا گراف جهت‌دار زوج مرتبی به صورت  $G = (V, E)$  است.

**تعریف ۳.۱.۳.** **ماتریس وقوع:** در ماتریس وقوع برای نمایش گراف، ستون‌ها برابر تعداد یال‌ها و سطرها برابر تعداد رأس‌های گراف هستند. در ماتریس‌های بدون جهت مؤلفه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر یال } e_j \text{ مجاور رأس } i \text{ باشد.} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$



و برای گراف‌های جهت‌دار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } e_j \text{ یال خروجی از رأس } i \text{ باشد.} \\ -1 & \text{اگر } e_j \text{ یال ورودی به رأس } i \text{ باشد.} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

**تعریف ۴.۱.۳.** ماتریس  $A$  با مؤلفه‌های صحیح را تماماً تک پیمانه‌ای ( $Tu$ ) نامند، هرگاه دترمینان هر زیر ماتریس مربعی آن  $1$ ،  $-1$  و  $0$  باشد. پس اگر  $A$  یک ماتریس  $Tu$  (تماماً تک پیمانه‌ای) باشد، آن‌گاه مؤلفه‌های آن فقط می‌تواند  $1$ ،  $-1$  و  $0$  باشد.

**قضیه ۵.۱.۳.** مسئله  $LP$  با محدودیت  $Ax = b$  برای  $x \geq 0$  را در نظر بگیرید که در آن مؤلفه‌های  $A$  و  $b$  صحیح هستند. اگر  $A, Tu$  باشد، آن‌گاه هر جواب پایه‌ای قابل قبول مسئله فوق، صحیح است. برهان. فرض کنید  $B$ ، یک پایه برای مسئله فوق باشد و  $A = (B, N)$ ،  $X_B$  و  $X_N$  متناظر با  $B$  و  $N$  باشند، بنابراین دستگاه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$BX_B + NX_N = b \quad X \geq 0$$

و یا:

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

که با فرض  $X_N = 0$  داریم که:

$$X_B = B^{-1}b \quad (\text{یک جواب پایه‌ای})$$

حال برای این‌که  $X_B$  صحیح باشد، چون  $b$  صحیح است، کافی است نشان دهیم که مؤلفه‌های  $B^{-1}$  صحیح هستند. پس:

$$B^{-1} = \frac{adj(B)}{det(B)}$$

حال چون  $A$  صحیح است، پس  $B$  نیز صحیح می‌باشد و در نتیجه  $adj(B)$  نیز صحیح است و چون  $B$  زیر ماتریس  $A$  است و نامنفرد، پس:

$$det(B) = 1 \quad \text{یا} \quad -1$$

بنابراین  $B^{-1}$  نیز صحیح است.

□

### ۲.۳ مسئله کوتاه‌ترین مسیر

فرض کنید  $G = (N, A)$  یک گراف جهت‌دار باشد که  $N$  مجموعه رأس‌ها و  $A$  مجموعه یال‌های آن است.

فرض کنید گره  $s$ ، گره مبدأ و گره  $t$ ، گره مقصد باشد. هم‌چنین  $c_{ij}$  هزینه روی کمان  $(i, j) \in A$  باشد. هدف پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر (مسیری با کم‌ترین وزن) بین رأس ابتدایی و رأس انتهایی گراف است. مدل مسئله کوتاه‌ترین مسیر از  $s$  به  $t$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\{j|(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in A\}} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s \\ 0 & i \notin \{s, t\} \\ -1 & i = t \end{cases} \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A \end{aligned}$$

مدل فوق، جواب بهینه صفر و یک دارد، زیرا ماتریس ضرایب آن تماماً تک پیمانه‌ای است. پس می‌توان محدودیت  $\{0, 1\} \in x_{ij}$  را به صورت محدودیت  $0 \leq x_{ij} \leq 1$  نوشت. پس مدل مسئله کوتاه‌ترین مسیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\{j|(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in A\}} x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = s \\ 0 & i \notin \{s, t\} \\ -1 & i = t \end{cases} \quad (4.3) \\ & 0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad (i, j) \in A \end{aligned}$$

تعریف ۱.۲.۳. دور منفی: دوری است که در یک سیکل مجموع وزن‌های یال‌ها عدد منفی می‌شود.

در ادامه‌ی این پایان‌نامه فرض می‌کنیم گراف  $G$  شامل دور منفی نیست.

### ۳.۳ مسئله کوتاه‌ترین مسیر معکوس تحت نرم $L_1$

در مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر معکوس، یک مسیر مانند  $P^\circ$  در گراف  $G$  از گره  $s$  به گره  $t$  داده شده است. هدف تغییر وزن یال‌ها با کم‌ترین هزینه به گونه‌ای است که  $P^\circ$  کوتاه‌ترین مسیر از  $s$  به  $t$  باشد. فرض کنید  $x^\circ$  جریان متناظر با  $P^\circ$  باشد، یعنی:

$$(i, j) \in P^\circ \Rightarrow x_{ij}^\circ = 1$$

$$(i, j) \notin P^\circ \Rightarrow x_{ij}^\circ = 0$$

مدل مسئله کوتاه‌ترین مسیر، حالت خاصی از مسئله صفر و یک است که معکوس آن را بررسی کرده‌ایم. فرض کنید  $P^*$  مسیر بهینه فعلی از  $s$  به  $t$  باشد و  $x^*$  جریان متناظر با  $P^*$ . برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر، کاهش هزینه از یک کمان  $(i, j) \in A$  را با استفاده از دوگانگی به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$c_{ij}^\pi = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

در این حالت داریم:

$$(i, j) \in P^* \Rightarrow c_{ij}^\pi = 0$$

$$(i, j) \notin P^* \Rightarrow c_{ij}^\pi \geq 0 \quad (\text{شرط بهینگی})$$

فرض کنید:

$$P^* \setminus P^\circ = \{(i, j) \in A \mid (i, j) \in P^*, (i, j) \notin P^\circ\}$$

و

$$P^\circ \setminus P^* = \{(i, j) \in A \mid (i, j) \in P^\circ, (i, j) \notin P^*\}$$

در بخش برنامه‌ریزی صفر و یک معکوس داشتیم:

$$d_{ij}^* = \begin{cases} c_{ij} - |c_{ij}^\pi| & x_{ij}^\circ = 1, \quad x_{ij}^* = 0 \\ c_{ij} + |c_{ij}^\pi| & x_{ij}^\circ = 0, \quad x_{ij}^* = 1 \\ c_{ij} & x_{ij}^\circ = x_{ij}^* \end{cases}$$

بنابراین:

$$(i, j) \in P^* \setminus P^\circ \Rightarrow x_{ij}^* = 1, \quad x_{ij}^\circ = 0$$

$$(i, j) \in P^\circ \setminus P^* \Rightarrow x_{ij}^\circ = 1, \quad x_{ij}^* = 0$$

پس:

$$d_{ij}^* = \begin{cases} c_{ij} - |c_{ij}^\pi| & (i, j) \in P^\circ \setminus P^* \\ c_{ij} + |c_{ij}^\pi| & (i, j) \in P^* \setminus P^\circ \\ c_{ij} & o.w \end{cases}$$

و چون به ازای  $(i, j) \in P^*$  داریم،  $c_{ij}^\pi = 0$  و همچنین به ازای  $(i, j) \notin P^*$  داریم:  $c_{ij}^\pi \geq 0$  پس:

$$d_{ij}^* = \begin{cases} c_{ij} - c_{ij}^\pi & (i, j) \in P^\circ \setminus P^* \\ c_{ij} & (i, j) \notin P^\circ \setminus P^* \end{cases}$$

به عبارتی، برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر معکوس، ابتدا باید خود مسئله کوتاه‌ترین مسیر از  $s$  به  $t$  را حل کنیم، سپس  $P^*$  را محاسبه می‌کنیم. وزن تمام یال‌هایی که روی کمان  $P^\circ$  هستند ولی روی  $P^*$  نیستند، به اندازه  $c_{ij}^\pi$  کم می‌شود و وزن سایر کمان‌ها تغییر نمی‌کند. مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر را می‌توان با استفاده از الگوریتم‌های مختلفی مانند الگوریتم دایکسترا، الگوریتم بلمن-فورد و الگوریتم فلویید-مارشال حل کرد، که در اینجا به معرفی الگوریتم دایکسترا می‌پردازیم و برای حل مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:

**الگوریتم دایکسترا:**

**گام ۱:** قرار دهید

$$u = \{s\}, \quad g(s) = 0$$

$$h(j) = \begin{cases} c_{sj} & (s, j) \in G \\ \infty & o.w \end{cases}$$

**گام ۲:** قرار دهید

$$i = \arg \min_{j \in v} h(j), \quad (v = \text{تعداد رئوس})$$

حال قرار دهید

$$g(i) = h(i), \quad u = u \cup \{i\}$$

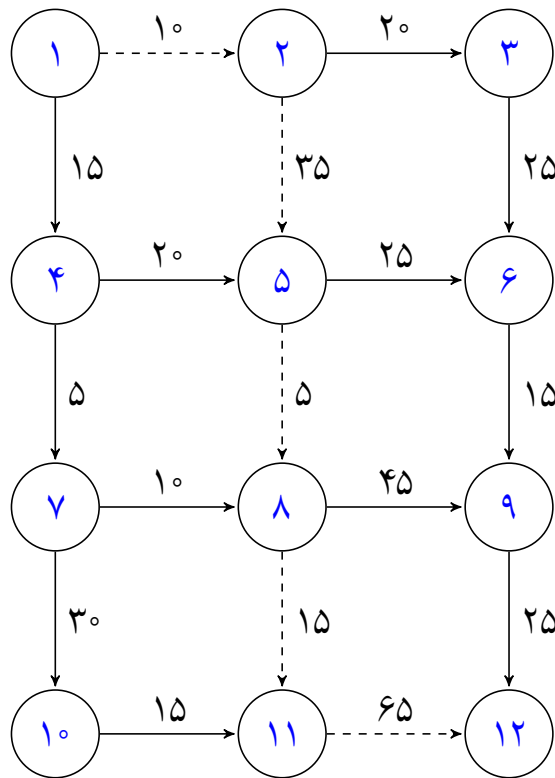
اگر  $u = v$  توقف کنید.

**گام ۳:** به ازای تمام رئوس  $u \neq j$  که  $(i, j) \in E$  قرار دهید

$$h(j) = \min\{h(j), g(i) + c_{ij}\}$$

و به گام ۲ بروید.

مثال ۱.۳.۳. شکل ۱.۳ هزینه هر کمان  $(c_{ij})$  را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۳.۳: هزینه هر کمان

فرض کنید

$$s = 1, \quad t = 12$$

$$P^\circ = 1 - 2 - 5 - 8 - 11 - 12$$

که اندازه مسیر  $P^\circ$  برابر  $130$  است.

با استفاده از الگوریتم دایکسترا می‌توان کوتاه‌ترین مسیر را به صورت زیر به دست آورد:  
ابتدا قرار می‌دهیم:

$$u = \{s\} = \{1\}, \quad g(s) = 0, \quad g(1) = 0$$

$$h(j) = \begin{cases} c_{sj} & (s, j) \in A \\ \infty & o.w \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(2) = 10 \quad h(4) = 15 \quad h(3) = h(5) = \dots = h(12) = \infty$$

در تکرار اول داریم

$$i = \min_{j \in v} h(j) = \min h(۲) = ۱۰ \quad , \quad h(۲) = g(۲) = ۱۰ \quad i = ۲$$

و

$$u = u \cup \{i\} \quad \Rightarrow \quad u = \{۱, ۲\}$$

بنابراین

$$h(j) = \min\{h(j), g(i) + c_{ij}\}$$

$$h(۳) = \min\{h(۳), g(۲) + c_{۲۳}\} = ۳۰$$

$$h(۵) = \min\{h(۵), g(۲) + c_{۲۵}\} = ۴۵$$

در تکرار دوم داریم

$$\min h(j) = h(۳) = g(۳) = ۳۰ \quad , \quad i = ۳$$

$$u = \{۱, ۲, ۳\} \quad , \quad h(۴) = h(۵) = \dots = h(۱۲) = \infty$$

پس

$$h(۶) = \min\{h(۶), g(۳) + c_{۳۶}\} = ۵۵ \quad , \quad h(۶) = g(۶) = ۵۵ \quad i = ۶$$

$$u = \{۱, ۲, ۳, ۶\} \quad , \quad h(۷) = h(۸) = \dots = h(۱۲) = \infty$$

و در تکرار سوم داریم

$$h(۹) = \min\{h(۹), g(۶) + c_{۶۹}\} = ۷۰ \quad , \quad h(۹) = g(۹) = ۷۰ \quad i = ۹$$

بنابراین

$$u = \{۱, ۲, ۳, ۶, ۹\} \quad , \quad h(۱۰) = h(۱۱) = h(۱۲) = \infty$$

در تکرار چهارم

$$h(۱۲) = \min\{h(۱۲), g(۹) + c_{۹۱۲}\} = ۹۵ \quad , \quad h(۹) = g(۹) = ۹۵ \quad i = ۱۲$$

$$u = \{1, 2, 3, 6, 9, 12\}$$

حال چون  $u = v$ ، توقف می‌کنیم. برای بدست آوردن کوتاه‌ترین مسیر، کافی است از رأس انتهایی به عقب برگردیم، یعنی:

$$g(j) = g(i) + c_{ij}$$

حال اگر از رأس ۱۲ شروع کنیم، داریم

$$g(12) \neq g(11) + c_{1112} \neq \infty + 65$$

$$g(12) = g(9) + c_{912} = 70 + 25$$

و برای رأس‌های دیگر به صورت

$$g(9) = g(6) + c_{69} = 55 + 15$$

$$g(6) = g(3) + c_{36} = 30 + 25$$

$$g(3) = g(2) + c_{23} = 10 + 20$$

$$g(2) = g(1) + c_{12} = 0 + 10$$

بنابراین، کوتاه‌ترین مسیر به صورت زیر با اندازه ۹۵ به دست می‌آید:

$$P^* = 1 - 2 - 3 - 6 - 9 - 12$$

متغیرهای دوگان نیز به صورت زیر هستند: (به ازای رأس‌ها)

$$\pi = \{0, -10, -30, -15, -35, -55, -20, -30, -70, -50, -45, -95\}$$

توجه کنید که مقدار متغیرهای دوگان، برابر قرینه اندازه کوتاه‌ترین مسیر از رأس  $s$  به رأس مورد نظر است. داریم

$$P^\circ - P^* = \{(2, 5), (5, 8), (8, 11), (11, 12)\}$$

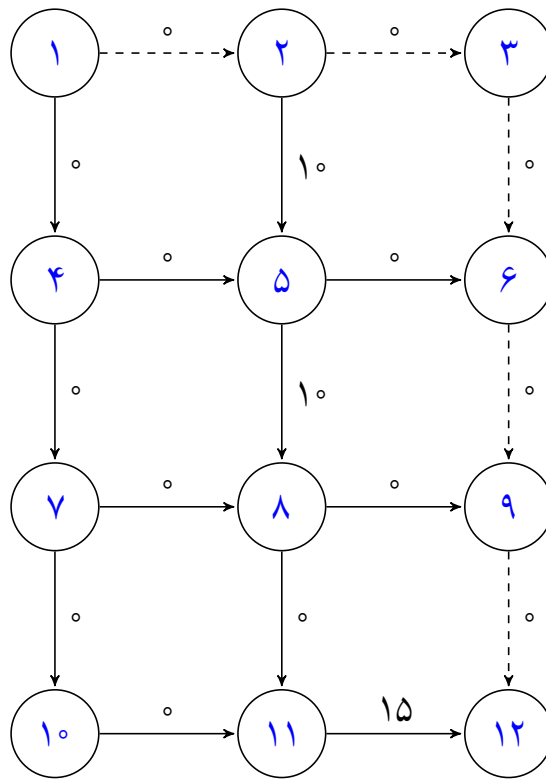
با توجه به این که

$$c_{ij}^\pi = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

داریم:

$$c_{25}^\pi = 10, c_{58}^\pi = 10, c_{811}^\pi = 0, c_{1112}^\pi = 15$$

شکل ۲.۳ میزان کاهش بهینه هزینه را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۳.۳ می‌باشد که  $c_{ij}^*$  را نشان می‌دهد.

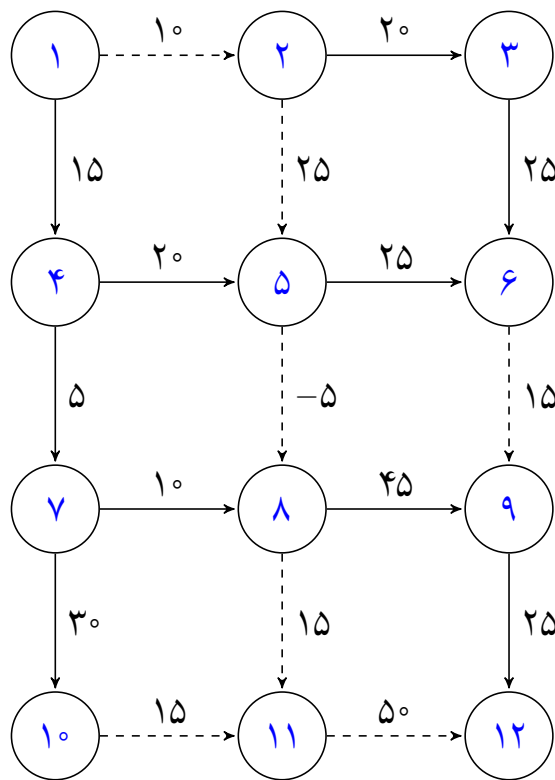
بنابراین:

$$d_{۲۵}^* = ۳۵ - ۱۰ = ۲۵ \quad , \quad d_{۵۸}^* = ۵ - ۱۰ = -۵$$

$$d_{۸۱۱}^* = ۱۵ - ۰ = ۱۵ \quad , \quad d_{۱۱۱۲}^* = ۶۵ - ۱۵ = ۵۰$$

و سایر  $d_{ij}^*$  برابر با  $c_{ij}$  هستند، که در شکل ۲.۳ نشان داده شده است.





شکل ۳۰۳: شکل مربوط به مثال ۱۰۳۰۳ می‌باشد که  $d_{ij}^*$  را نشان می‌دهد.

می‌توان نتیجه گرفت با انتخاب هر مسیر  $P^\circ$  دیگری در این گراف، می‌توان با کاهش هزینه، آن مسیر را مسیر بهینه کرد.  
به عنوان مثال، اگر  $P^\circ$  به صورت زیر باشد

$$P^\circ = 1 - 4 - 7 - 10 - 11 - 12$$

با کاهش هزینه روی مسیر فوق داریم

$$c_{14}^\pi = 0, c_{47}^\pi = 0, c_{710}^\pi = 0, c_{1011}^\pi = 20, c_{1112}^\pi = 15$$

و همچنین

$$d_{14}^* = 15, d_{47}^* = 5, d_{710}^* = 30$$

$$d_{1011}^* = -5, d_{1112}^* = 50$$

و کوتاه‌ترین مسیر، باز هم با همان اندازه ۹۵ به دست می‌آید.

تعریف ۲.۳.۳. گراف دوبخشی گرافی است که رأس‌هایش را می‌توان به دو مجموعه‌ی مجزا مثل  $U$  و  $V$  تقسیم کرد، به طوری که هر یال از آن گراف، یک رأس از  $U$  را به یک رأس از  $V$  متصل کند. گراف دو بخشی را معمولاً به صورت  $G = (U, V, E)$  نشان می‌دهیم که  $U$  و  $V$  دو بخش گراف و  $E$  مجموعه یال‌های گراف است.

### ۴.۳ مسئله تخصیص

فرض کنید  $n$  شغل باید به  $n$  فرد اختصاص یابد. هر شغل دقیقاً به یک فرد اختصاص می‌یابد، اگر شغل  $j$  به فرد  $i$  اختصاص یابد، به اندازه  $c_{ij}$  هزینه دارد. هدف تخصیص شغل‌ها به افراد با کم‌ترین هزینه است.

برای مدل کردن مسئله فوق فرض کنید:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شغل } j \text{ به فرد } i \text{ تخصیص یابد.} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

مدل به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

### ۵.۳ مسئله تخصیص معکوس با نرم $L_1$

فرض کنید  $G = (N_1 \cup N_2, A)$  یک گراف دو وجهی جهت‌دار باشد که  $|N_1| = |N_2|$  و  $A \subset N_1 \times N_2$ . هم‌چنین وزن کمان  $(i, j)$  برابر  $c_{ij}$  است. مدل مسئله تخصیص به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\
 s.t. \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} = 1 \quad i \in N_1 \\
 & - \sum_{\{i:(i,j) \in A\}} x_{ij} = -1 \quad j \in N_2 \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \in A
 \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

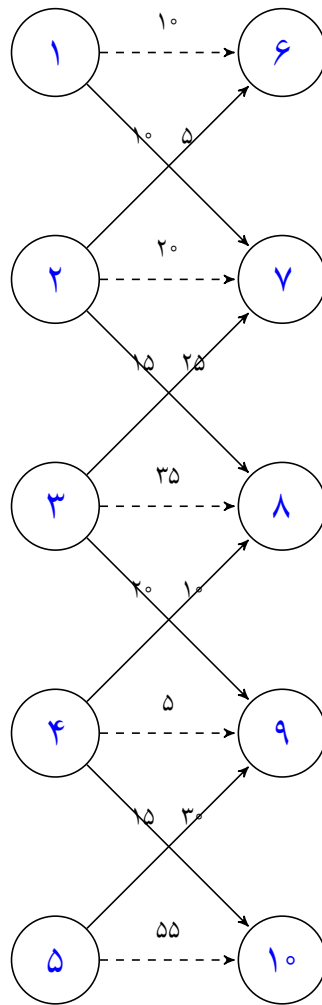
مدل فوق مانند مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر، مدل صفر و یک است. هر جواب مانند  $x$  در مدل فوق یک تخصیص به صورت  $M = \{(i,j) \in A | x_{ij} = 1\}$  تعریف می‌کند و بالعکس هر تخصیص  $M$  یک جواب برای مدل (۵.۳) تعریف می‌شود. در مسئله‌ی تخصیص معکوس، یک تخصیص مانند  $M^\circ$  داده شده است. می‌خواهیم با تغییر وزن یال‌ها،  $M^\circ$  تخصیص بهینه شود. فرض کنید  $M^*$  تخصیص بهینه فعلی باشد، قرار دهید:

$$c_{ij}^\pi = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

که نشان دهنده‌ی کاهش بهینه هزینه‌های کمان‌ها است. در جواب بهینه به ازای  $(i,j) \in M^*$  داریم:  $c_{ij}^\pi = 0$ ، که از حل مسئله دوگان به دست می‌آید و به ازای  $(i,j) \notin M^*$  داریم:  $c_{ij}^\pi \geq 0$ . با بکار بردن این روابط در  $d^*$  مربوط به مسئله‌ی صفرو یک معکوس، بردار هزینه بهینه  $d^*$  برای مسئله‌ی تخصیص معکوس به صورت زیر صورت است:

$$d_{ij}^* = \begin{cases} c_{ij} - c_{ij}^\pi & (i,j) \in M^\circ \setminus M^* \\ c_{ij} & (i,j) \notin M^\circ \setminus M^* \end{cases}$$

مثال ۱.۵.۳. شکل ۴.۳ را در نظر بگیرید:



شکل ۴.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۵.۳: هزینه هر کمان

فرض کنید:

$$M^{\circ} = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)\}$$

داده شده باشد. تخصیص بهینه فعلی به صورت زیر است:

$$M^* = \{(1, 7), (2, 6), (3, 8), (4, 10), (5, 9)\}$$

مقادیر بهینه دوگان به صورت زیر است:

$$\pi = \{0, -5, 15, -10, 25, -10, -10, -20, -5, -25\}$$

داریم:

$$M^{\circ} - M^* = \{(1, 6), (2, 7), (4, 9), (5, 10)\}$$

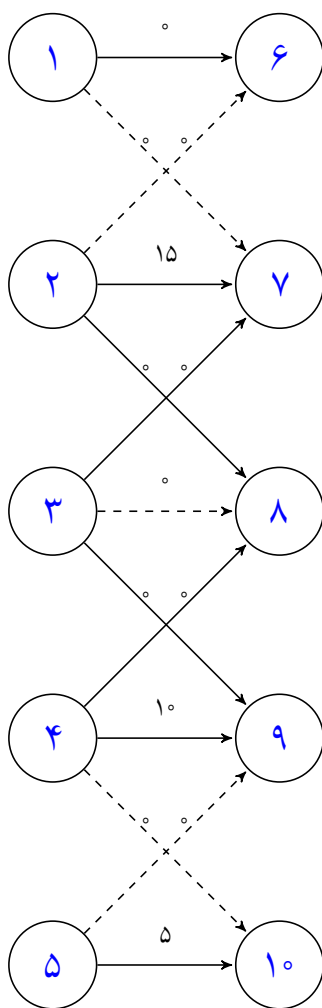
در نتیجه چون:

$$c_{ij}^{\pi} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

پس:

$$c_{۱۶}^{\pi} = ۰ , \quad c_{۲۷}^{\pi} = ۱۵ , \quad c_{۴۹}^{\pi} = ۱۰ , \quad c_{۵۱۰}^{\pi} = ۵$$

و بقیه‌ی  $c_{ij}^{\pi} = ۰$  است. پس تغییرات در شکل ۵.۳، با اعمال کاهش هزینه‌ها به صورت زیر می‌باشد:



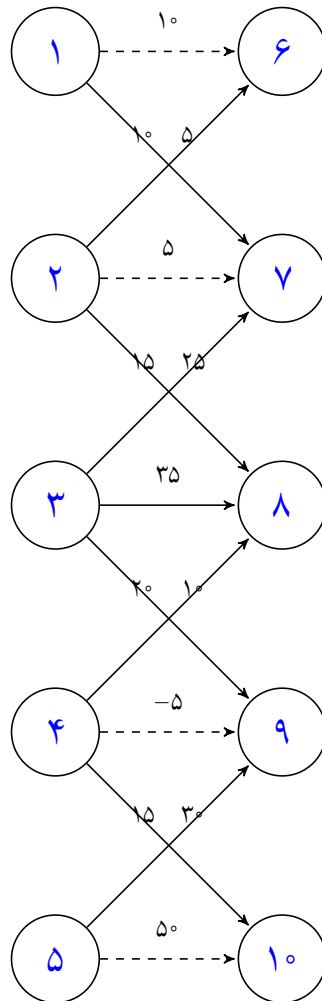
شکل ۵.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۵.۳:  $c_{ij}^{\pi}$

بنابراین:

$$d_{۱۶}^* = ۱۰ - ۰ = ۱۰ , \quad d_{۲۷}^* = ۲۰ - ۱۵ = ۵$$

$$d_{۴۹}^* = ۵ - ۱۰ = -۵ , \quad d_{۵۱۰}^* = ۵۵ - ۵ = ۵۰$$

و بقیه‌ی  $d_{ij}^*$ ، برابر با  $c_{ij}$  هستند. شکل ۶.۳ را ببینید.



شکل ۶.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۵.۳:  $d_{ij}^*$

توجه کنید که برای حل مسئله‌ی تخصیص معکوس، ابتدا باید مسئله تخصیص را حل کنیم که بهترین الگوریتم ارائه شده برای مسئله‌ی تخصیص دارای پیچیدگی  $O(nm + n^2 \log n)$  است.

### ۶.۳ مسئله حداقل برش معکوس تحت نرم $L_1$

تعریف ۱.۶.۳. در یک شبکه، یک برش ( $cut$ ) به مجموعه‌ای از کمان‌های شبکه گفته می‌شود که حذف آن‌ها موجب ناهمبند شدن شبکه می‌شود. همچنین به مجموع وزن یال‌های هر برش، ظرفیت آن برش گفته می‌شود.

فرض کنید گراف  $G = (N, A)$  داده شده باشد که هر کمان  $(i, j)$  دارای ظرفیت  $u_{ij}$  است. هم‌چنین  $s$  و  $t$  دو گره به ترتیب، به نام‌های مبدأ و مقصد در گراف  $G$  هستند که به ازای هر  $(i, j)$  فرض می‌کنیم،  $u_{ij} > 0$ .

**تعریف ۲.۶.۳.** یک مجموعه از کمان‌های  $G$  را  $s$ - $t$  ناهمبند کننده نامیم، هرگاه از حذف یال‌های درون آن، گراف  $G$  به مؤلفه‌هایی تبدیل شود که  $s$  و  $t$  در دو مؤلفه مجزا قرار بگیرند.

**تعریف ۳.۶.۳.** یک  $s$ - $t$  برش، یک مجموعه  $s$ - $t$  ناهمبند است که هیچ زیر مجموعه محض آن یک  $s$ - $t$  ناهمبند کننده نباشد.

تعریف فوق ایجاب می‌کند که از حذف یال‌های درون  $s$ - $t$  برش دقیقاً دو مؤلفه تولید شود که  $s$  و  $t$  در هر کدام از آن مؤلفه‌ها قرار بگیرد.

فرض کنید  $S$  و  $\bar{S} = N - S$  مجموعه درون مؤلفه‌های تعریف شده به وسیله  $s$ - $t$  برش باشند که  $s \in S$  و  $t \in \bar{S}$ ، که این  $s$ - $t$  برش را با  $[S, \bar{S}]$  نشان می‌دهیم. فرض کنید  $(S, \bar{S})$  نشان دهنده‌ی مجموعه کمان‌های پیشرو در برش باشند، یعنی:

$$(S, \bar{S}) = \{(i, j) \in A \mid i \in S, j \in \bar{S}\}$$

و نیز  $(\bar{S}, S)$  نشان دهنده‌ی مجموعه کمان‌های پسرو در این برش باشند، یعنی:

$$(\bar{S}, S) = \{(i, j) \in A \mid i \in \bar{S}, j \in S\}$$

ظرفیت برش  $[S, \bar{S}]$  عبارت است از مجموعه کمان‌های پیشرو درون این برش که با  $u[S, \bar{S}]$  نمایش می‌دهیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$u[S, \bar{S}] = \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} u_{ij}$$

مسئله کم‌ترین برش عبارت است از تعیین یک  $s$ - $t$  برش با کم‌ترین ظرفیت. در مسئله کم‌ترین برش معکوس، یک  $s$ - $t$  برش مانند  $[S^\circ, \bar{S}^\circ]$  داده شده است که می‌خواهیم با تغییر ظرفیت کمان‌ها این برش کمینه شود. می‌دانیم مسئله کم‌ترین برش معادل است با مسئله حداکثر جریان.

### ۱.۶.۳ مسئله حداکثر جریان

فرض کنید شبکه  $N = (V, E)$  داده شده است، هر کمان  $(i, j)$  از شبکه فوق دارای ظرفیت  $c_{ij}$  است. هدف ارسال حداکثر کالا از رأس ابتدایی  $s$  به رأس انتهایی  $t$  می‌باشد. مدل مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & f \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E} x_{ji} = \begin{cases} f & i = s \\ 0 & i \neq s, t \\ -f & i = t \end{cases} \\ & 0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \\ & (i, j) \in E \end{aligned}$$

که در آن  $x_{i,j}$  میزان ارسال کالا روی یال  $(i, j)$  از رأس  $i$  به رأس  $j$  است.

### ۲.۶.۳ مسئله حداقل برش

برای مدل کردن مسئله حداقل برش فرض کنید:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } (i, j) \in A \text{ یک کمان پیشرو در برش باشد.} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

فرض کنید  $C(G)$  مجموعه تمام مسیرهای جهت‌دار از  $s$  به  $t$  در گراف  $G$  باشد، بنابراین مدل زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} y_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{(i,j) \in P} y_{ij} \geq 1 \quad P \in C(G) \\ & 0 \leq y_{ij} \leq 1 \quad (i, j) \in A \end{aligned} \quad (6.3)$$

مسئله فوق دارای یک جواب بهینه صفویک است. یک تناظر یک به یک بین جواب‌های مدل فوق و s-t برش‌ها وجود دارد.

به ازای هر s-t برش،  $[S, \bar{S}]$  قرار دهید:  
برای هر کمان:

$$\begin{aligned} (i, j) \in (S, \bar{S}) & \longrightarrow y_{ij} = 1 \\ (i, j) \notin (S, \bar{S}) & \longrightarrow y_{ij} = 0 \end{aligned}$$

که در این صورت یک جواب با مقدار  $u[S, \bar{S}]$  برای مدل فوق به دست می‌آید. اگر یک مسیر جهت‌دار از  $s$  به  $t$  شامل  $P > 1$  کمان پیشرو در  $(S, \bar{S})$  باشد، آن‌گاه باید شامل  $P - 1$  کمان پسرو در  $(S, \bar{S})$



باشد.

همچنین هر جواب شدنی صفر و یک از مسئله (۶.۳) یک s-t ناهمبند کننده ارائه می‌دهد، ولی جواب بهینه حتماً یک s-t برش است. (زیرا وزن کمان‌ها اکیداً مثبت است)

## ۷.۳ مسئله حداقل برش معکوس

حال مسئله‌ی معکوس را در نظر می‌گیریم:

می‌خواهیم  $[S^\circ, \bar{S}^\circ]$  یک s-t برش کمینه شود. مدل (۶.۳) یک مدل صفر و یک است، پس معکوس دوگانی آن نیز مدلی صفر و یک خواهد بود، که شبیه مدل (۶.۳) است به جز این‌که محدودیت‌های غیرفعال با توجه به s-t برش  $[S^\circ, \bar{S}^\circ]$  از آن حذف شده‌اند.

اگر مسیر  $P \in C(G)$  شامل کمان پسر در برش  $[S^\circ, \bar{S}^\circ]$  نباشد، آن‌گاه دقیقاً یک کمان پیشرو در برش  $[S^\circ, \bar{S}^\circ]$  دارد و محدودیت اول مدل (۶.۳) برای مسیر  $P$  فعال است.

همچنین اگر مسیر  $P \in C(G)$  دارای  $P \geq 1$  کمان پسر در  $[S^\circ, \bar{S}^\circ]$  باشد، آن‌گاه شامل  $P + 1$  کمان پیشرو در این برش است و محدودیت اول مدل (۶.۳) غیرفعال است.

فرض کنید  $G' = (N, A')$  نشان دهنده گراف جهت‌دار به‌دست آمده حاصل از حذف کمان‌های پسر در  $[S^\circ, \bar{S}^\circ]$  باشد، یعنی:

$$A' = A \setminus ([S^\circ, \bar{S}^\circ])$$

و  $C(G')$  نشان دهنده تمام مسیرهای جهت‌دار از  $s$  به  $t$  در  $G'$  باشد. بنابراین مدل مسئله معکوس به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A'} u_{ij} y_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{(i,j) \in P} y_{ij} \geq 1 \quad P \in C(G') \\ & 0 \leq y_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \in A' \end{aligned} \quad (7.3)$$

که در حقیقت مدل مسئله کم‌ترین برش روی گراف  $G'$  است و مسئله‌ی کم‌ترین برش را می‌توان با استفاده از مسئله حداکثر جریان حل کرد.

فرض کنید  $X^*$  نشان دهنده جریان ماکزیم در  $G'$  باشد و  $[S^*, \bar{S}^*]$  نشان دهنده کوچک‌ترین برش در  $G'$  باشد. بردار بهینه  $d^*$  می‌تواند مانند حالت معکوس صفر و یک به‌دست آید. فرض کنید  $f_P$  نشان دهنده متغیرهای دوگان متناظر با مسیر  $P$  در مدل (۷.۳) در حالتی که جریان روی  $G'$  ماکزیم باشد، بنابراین اگر میزان کاهش ظرفیت برای  $y_{ij}$  را با  $u_{ij}^f$  (همان  $c_{ij}^\pi$ ) نمایش می‌دهیم، داریم:

$$u_{ij}^f = u_{ij} - \sum_{\{P \in C(i,j)\}} f_P$$

که در آن  $C(i, j)$  نشان دهنده‌ی همه مسیرهای در  $C(G')$  است که شامل کمان  $(i, j)$  است. توجه کنید که

$$\sum_{\{P \in C(i, j)\}} f_P = x_{ij}^*$$

بنابراین

$$u_{ij}^f = u_{ij} - x_{ij}^*$$

که در حقیقت ظرفیت، بدون استفاده مانده (استفاده نشده) از کمان  $(i, j)$  در جریان  $x^*$  است. با جایگذاری این مقادیر در  $d^*$  داریم

$$d_{ij}^* = \begin{cases} u_{ij} + (u_{ij} - x_{ij}^*) & (i, j) \in (S^*, \bar{S}^*) \setminus (S^\circ, \bar{S}^\circ) \\ u_{ij} - (u_{ij} - x_{ij}^*) & (i, j) \in (S^\circ, \bar{S}^\circ) \setminus (S^*, \bar{S}^*) \\ u_{ij} & o.w \end{cases}$$

توجه کنید که برای هر کمان  $(i, j) \in (S^*, \bar{S}^*)$  داریم

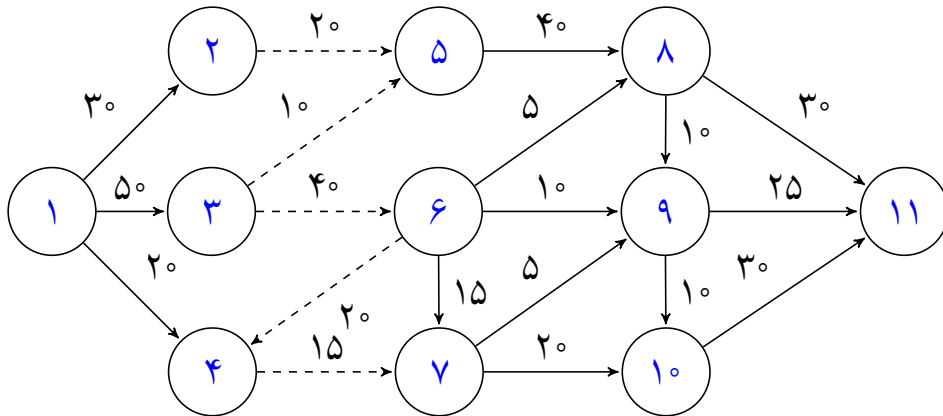
$$u_{ij} = x_{ij}^*$$

زیرا در برش کمینه هر کمان پیشرو باید جریانی معادل ظرفیت کمان داشته باشد. بنابراین

$$d_{ij}^* = \begin{cases} x_{ij}^* & (i, j) \in (S^\circ, \bar{S}^\circ) \setminus (S^*, \bar{S}^*) \\ u_{ij} & (i, j) \notin (S^\circ, \bar{S}^\circ) \setminus (S^*, \bar{S}^*) \end{cases}$$

بنابراین برای این که  $[S^\circ, \bar{S}^\circ]$  برش کمینه شود، باید ظرفیت کمان‌های پیشرو که در  $[S^\circ, \bar{S}^\circ]$  قرار دارند را برابر مقدار  $x_{ij}^*$  قرار داد، یعنی از تمام ظرفیت آن‌ها استفاده کرد. با توجه به مطالب فوق برای حل مسئله کم‌ترین برش معکوس باید یک مسئله کم‌ترین برش حل شود که آن هم می‌تواند با استفاده از مسئله حداکثر جریان حل شود. بهترین الگوریتم ارائه شده برای حل این مسئله دارای پیچیدگی  $O(nm \log(n^2/m))$  است.

مثال ۱.۷.۳. شکل ۷.۳ را در نظر بگیرید



شکل ۷.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۷.۳: ظرفیت کمان‌ها

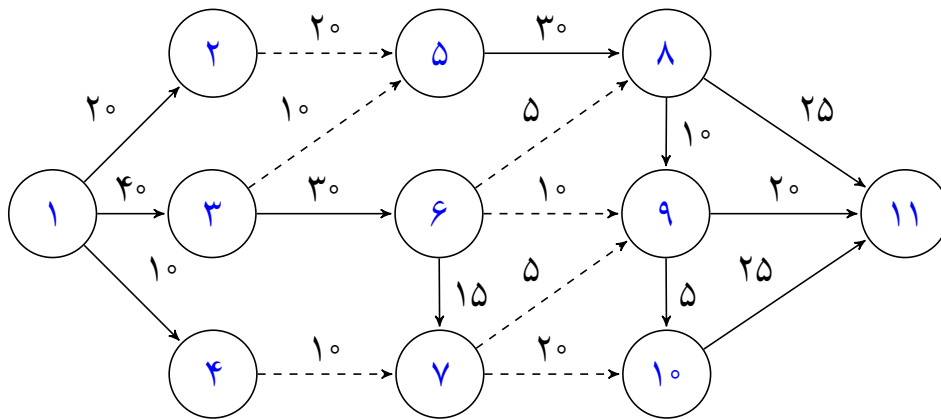
فرض کنید برش داده شده به صورت زیر باشد

$$S^{\circ} = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \bar{S}^{\circ} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

در برش  $[S^{\circ}, \bar{S}^{\circ}]$  تنها کمان پسرو، کمان  $(6, 4)$  است. این کمان را از گراف حذف می‌کنیم، سپس مسئله حداکثر جریان را در گراف حاصل حل می‌کنیم. جواب بهینه روی گراف جدید در شکل ۸.۳ به صورت زیر است

$$S^* = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$

توجه کنید که تنها ظرفیت کمان  $(3, 6)$  از  $40$  به  $30$  و ظرفیت کمان  $(4, 7)$  از  $15$  به  $10$  کاهش یافته است. همچنین مقدار تابع هدف به ازای  $S^{\circ}$  در گراف اولیه برابر  $85$  و مقدار تابع هدف به ازای  $S^*$  در گراف دومی برابر  $70$  است.



شکل ۸.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۷.۳ : جواب بهینه

حال مسئله با حالت وزن‌دار را در نظر بگیرید، که مدل آن به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} y_{ij} \\
 s.t. \quad & \sum_{(i,j) \in P} y_{ij} \geq 1 \quad P \in C(G') \\
 & 0 \leq y_{ij} \leq w_{ij} \quad (i,j) \rightarrow y_{ij}^0 = 0 \\
 & 1 - w_{ij} \leq y_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \rightarrow y_{ij}^0 = 1
 \end{aligned} \tag{۸.۳}$$

دوگان مسئله فوق، همان مسئله‌ی حداقل هزینه جریان است.

### ۸.۳ مسئله کم‌ترین هزینه با محدودیت جریان

شبکه جهت‌دار  $N = (V, E)$  را در نظر بگیرید، فرض کنید رئوس داخل  $V$  به سه دسته زیر تقسیم شود:

$V_1$ : مجموعه رأس‌های ابتدایی (مبداء)

$V_2$ : مجموعه رأس‌های میانی

$V_3$ : مجموعه رأس‌های انتهایی (مقصد)

فرض کنید هر کمان  $(i, j)$  در شبکه دارای حداکثر ظرفیت  $d_{ij}$  باشد و ارسال کالا روی این کمان (از رأس  $i$  به رأس  $j$ ) هزینه‌ای برابر  $c_{ij}$  داشته باشد.

هر رأس  $i \in V_1$  (مبدأ) حداکثر مقدار عرضه کالا به اندازه  $a_i$  دارد و هر رأس  $i \in V_3$  (مقصد) نیاز به حداقل  $b_i$  کالا دارد.

هدف ارسال کالا، از رئوس مبدأ به رئوس مقصد به گونه‌ای است که با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت کمان‌ها، هزینه کل کالا کمینه شود.  
برای نوشتن مدل مسئله فرض کنید، به ازای هر رأس  $i$  تعریف کنیم:

$$V(i) = \{j | (i, j) \in E\} \quad (\text{مجموعه رئوسی که از } i \text{ به آن‌ها کمان داریم.})$$

$$V'(i) = \{j | (j, i) \in E\} \quad (\text{مجموعه رئوسی که از آن‌ها به } i \text{ کمان داریم.})$$

میزان ارسال کالا از رأس  $i$  به  $j$  روی کمان  $(i, j)$

مدل مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in V} \sum_{j \in V(i)} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in V(i)} x_{ij} - \sum_{j \in V'(i)} x_{ji} = \begin{cases} \leq a_i & i \in V_1 \\ = 0 & i \in V_2 \\ \leq -b_i & i \in V_3 \end{cases} \\ & 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \end{aligned}$$

قضیه ۱.۸.۳. ماتریس ضرائب مربوط به مسئله کمترین هزینه با محدودیت جریان،  $Tu$  است.

برهان. فرض کنید  $A$  ماتریس ضرائب محدودیت‌های اصلی مسئله باشد، پس  $A' = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$

ماتریس ضرائب مسئله همراه با شرط  $x_{ij} \leq d_{ij}$  است. می‌دانیم اگر  $A$ ،  $Tu$  باشد، آنگاه  $(A, I)$  و

نیز  $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$  نیز  $Tu$  است.

بنابراین کافی است نشان دهیم  $A$ ،  $Tu$  است. اما هر متغیر  $x_{ij}$  دقیقاً در دو محدودیت مسئله ظاهر می‌شود. (یکی برای  $i$  و یکی برای  $j$ ) و ضریب  $x_{ij}$  یا ۱ است یا -۱، بنابراین  $A$  مانند ماتریس وقوع گراف‌های جهت‌دار است. پس  $A$ ،  $Tu$  است.

□

### ۹.۳ مسئله حداقل هزینه جریان معکوس با نرم $L_1$

فرض کنید  $G = (N, A)$  داده شده باشد که هر کمان  $(i, j) \in A$  دارای هزینه  $c_{ij}$  و ظرفیت  $u_{ij}$  است. هر گره  $i$  دارای تقاضا یا میزان تولید کالا به اندازه  $b(i)$  است. اگر  $b(i) \geq 0$ ، یعنی گره  $i$  تولیدکننده کالا است، در غیر این صورت دریافت‌کننده کالا است. فرض کنید دو زوج  $(j, i)$  و  $(i, j)$  هم‌زمان در  $A$  قرار ندارند، پس مدل مسئله حداقل هزینه جریان به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x_{ji} = b(i) \quad i \in N \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad (i,j) \in A \end{aligned} \quad (9.3)$$

در مسئله معکوس یک جواب شدنی مانند  $x^\circ$  داده شده است و باید با تغییر هزینه کمان‌ها این جواب بهینه شود. حال مجموعه کمان‌های  $A$  را به سه دسته زیر تقسیم می‌کنیم

$$L = \{(i, j) \in A \mid x_{ij}^\circ = 0\}$$

$$U = \{(i, j) \in A \mid x_{ij}^\circ = u_{ij}\}$$

$$F = \{(i, j) \in A \mid 0 < x_{ij}^\circ < u_{ij}\}$$

با توجه به مطالب مربوطه به برنامه‌ریزی خطی معکوس، مدل زیر را داریم

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} y_{ji} = 0 \quad i \in N \\ & y_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in L \\ & y_{ij} \leq 0 \quad (i, j) \in U \\ & -1 \leq y_{ij} \leq 1 \quad (i, j) \in A \end{aligned} \quad (10.3)$$

سه محدودیت آخر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$0 \leq y_{ij} \leq 1 \quad (i, j) \in L$$

$$-1 \leq y_{ij} \leq 1 \quad (i, j) \in F$$

$$-1 \leq y_{ij} \leq 0 \quad (i, j) \in U$$

حال با تغییر متغیر زیر داریم:

$$\forall (i, j) \in L \rightarrow c'_{ij} = c_{ij} \quad , \quad y'_{ij} = y_{ij}$$

$$\forall (i, j) \in U \rightarrow c'_{ji} = -c_{ij} \quad , \quad y'_{ji} = -y_{ij}$$

$$\forall (i, j) \in F \rightarrow c'_{ji} = -c_{ij} \quad , \quad c'_{ij} = c_{ij} \quad , \quad y_{ij} = y'_{ij} - y'_{ji}$$

$$y'_{ij} \geq 0$$

با فرض این که  $A(x^0)$  مجموعه اندیس متناظر با متغیرهای  $y'_{ij}$  باشد، مدل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A(x^0)} c'_{ij} y'_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A(x^0)\}} y'_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A(x^0)\}} y'_{ji} = 0 \quad i \in N \quad (11.3) \\ & 0 \leq y'_{ij} \leq 1 \quad (i, j) \in A(x^0) \end{aligned}$$

مدل فوق مانند مدل مسئله کمترین هزینه جریان است. البته چون ظرفیت تمام کمان‌ها برابر ۱ است، مدل کمی ساده‌تر است. بهترین الگوریتم ارائه شده برای حل این نوع مدل دارای پیچیدگی زمانی  $O(m(m + n \log n))$  است.

مدل (۱۱.۳)، معروف به گردشی کمترین هزینه است که یک مدل کمترین هزینه جریان با بردارهای عرضه و تقاضای صفر است و ظرفیت کمان‌ها برابر ۱ است. پس برای حل مدل، باید کوچک‌ترین دور پیدا شود.

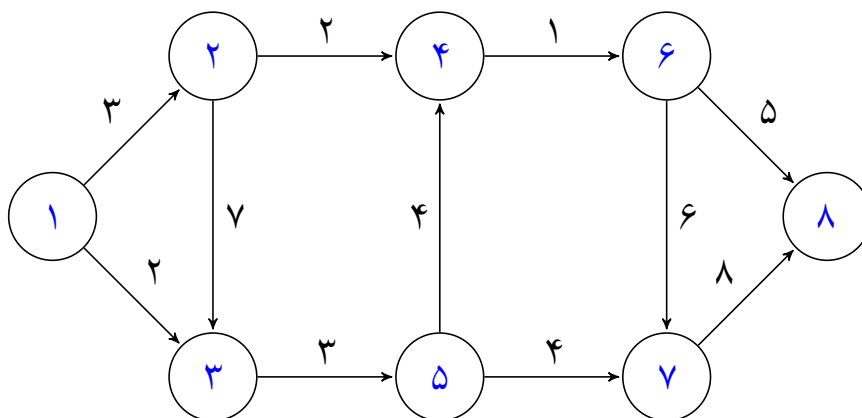
حالت وزن دار مسئله فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A(x^0)} c'_{ij} y'_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A(x^0)\}} y'_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A(x^0)\}} y'_{ji} = 0 \quad i \in N \\ & 0 \leq y'_{ij} \leq w_{ij} \quad (i, j) \in A(x^0) \end{aligned}$$

هم‌چنین برای محاسبه‌ی  $d^*$ ، فرض کنید  $\pi$  متغیرهای دوگان باشد و  $c_{ij}^\pi = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$  داریم:

$$d_{ij}^* = \begin{cases} c_{ij} - |c_{ij}^\pi| & c_{ij}^\pi > 0 \quad , \quad x_{ij}^0 > 0 \\ c_{ij} + |c_{ij}^\pi| & c_{ij}^\pi < 0 \quad , \quad x_{ij}^0 < u_{ij} \\ c_{ij} & o.w \end{cases}$$

مثال ۱.۹.۳. شکل ۹.۳ را در نظر بگیرید



شکل ۹.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۹.۳: نشان‌دهنده هزینه کمان‌ها

فرض کنید ظرفیت تمام کمان‌ها ۲ باشد، یعنی

$$u_{ij} = 2$$

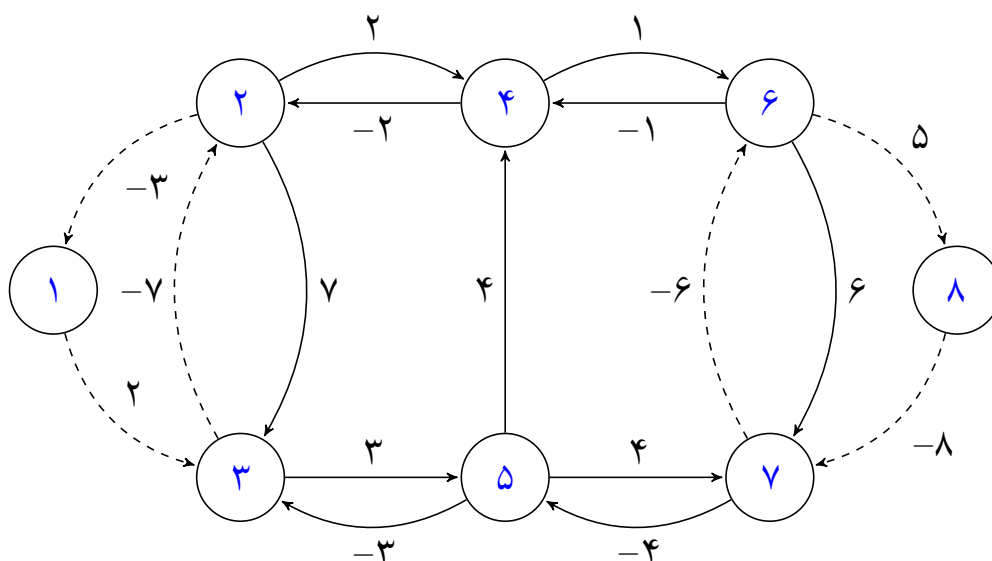
فرض کنید  $x^0$  عبارت است از ارسال یک واحد جریان در دو مسیر زیر

$$P_1 : 1 - 2 - 4 - 6 - 7 - 8$$

$$P_2 : 1 - 2 - 3 - 5 - 7 - 8$$

شکل ۱۰.۳ نشان‌دهنده باقی‌مانده شبکه در شکل ۹.۳ است





شکل ۱۰.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۹.۳: نشان دهنده هزینه کمان‌ها

داریم

$$L = \{(i, j) \in A | x_{ij}^* = 0\} = \{(1, 3), (5, 4), (6, 8)\}$$

$$U = \{(i, j) \in A | x_{ij}^* = u_{ij}\} = \{(1, 2), (7, 8)\}$$

$$F = \{\text{بقیه کمان‌ها}\}$$

برای فقط رفت

$$(i, j) \in L; \quad c'_{ij} = c_{ij}, \quad c_{13} = 2, \quad c_{54} = 4, \quad c_{68} = 5$$

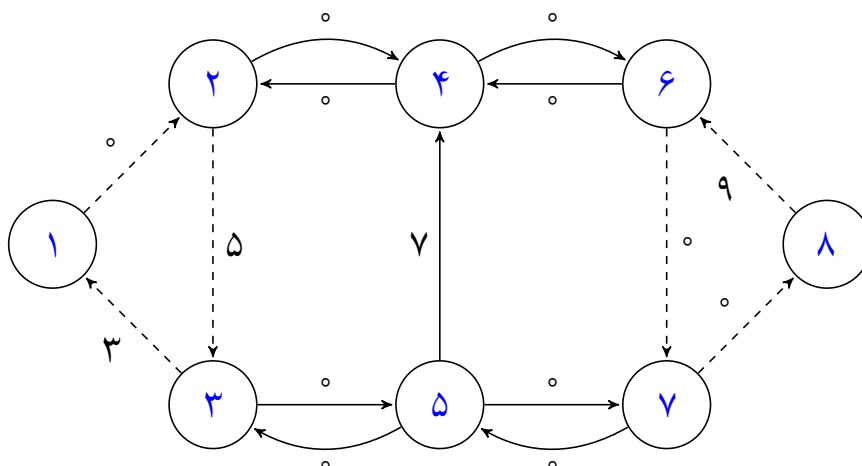
برای فقط برگشت

$$(i, j) \in U; \quad c'_{ij} = -c_{ij}, \quad c_{12} = -3, \quad c_{78} = -8$$

و برای رفت و برگشت

$$(i, j) \in F; \quad c'_{ij} = c_{ij}, \quad c_{ji} = -c_{ij}$$

هر کمان در شکل ۱۱.۳، ظرفیت واحد دارد و ارسال جریان‌های واحد میان یکی از دو دور ۱-۲-۳-۱ و ۶-۷-۸-۶ است. هم‌چنین مقدار تابع هدف در دو مسیر به ترتیب ۸- و ۹- می‌باشد. هم‌چنین شکل ۱۱.۳ کاهش بهینه هزینه‌ها را نشان می‌دهد



شکل ۱۱.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۹.۳: کاهش بهینه هزینه‌ها

بنابراین

$$c_{23}^{\pi} = 5, \quad c_{13}^{\pi} = 3, \quad c_{86}^{\pi} = 9, \quad c_{54}^{\pi} = 7$$

و بقیه‌ی  $c_{ij}^{\pi}$  صفر هستند،  $y_{ij}^*$ ‌ها به صورت زیر هستند

$$y_{12}^* = y_{23}^* = -1, \quad y_{13}^* = y_{68}^* = 1, \quad y_{78}^* = y_{67}^* = -1$$

و پس از محاسبه‌ی  $d^*$  نتیجه می‌شود که هزینه کمان  $(1, 3)$  به اندازه ۳ واحد و هزینه کمان  $(6, 8)$  به اندازه ۹ واحد افزایش می‌یابد و هزینه کمان  $(2, 3)$  به اندازه ۵ واحد کاهش می‌یابد.

### ۱۰.۳ مسئله حداقل هزینه جریان معکوس با نرم $L_{\infty}$

مسئله حداقل هزینه با نرم  $L_1$  را در نظر بگیرید

در این مسئله مانند قبل فرض کنید

$$L = \{(i, j) \in A \mid x_{ij}^{\circ} = 0\}$$

$$U = \{(i, j) \in A \mid x_{ij}^{\circ} = u_{ij}\}$$

$$F = \{(i, j) \in A \mid 0 \leq x_{ij}^{\circ} \leq u_{ij}\}$$

بنابراین مدل زیر را از نرم  $L_1$  داریم

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} y_{ji} = 0 \quad i \in N \\
 & y_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in L \\
 & y_{ij} \leq 0 \quad (i,j) \in U \\
 & \sum_{(i,j) \in A} |y_{ij}| = 1
 \end{aligned} \tag{۱۲.۳}$$

با تغییر متغیرها مانند حالت نرم  $L_1$ ، مدل زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{(i,j) \in A(x^\circ)} c'_{ij} y'_{ij} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A(x^\circ)\}} y'_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A(x^\circ)\}} y'_{ji} = 0 \quad i \in N \\
 & \sum_{(i,j) \in A(x^\circ)} y'_{ij} = 1 \\
 & y'_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in A(x^\circ)
 \end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

که مسئله فوق یک مسئله دور با میانگین کمینه است، که می‌توانیم مسئله یک دور با میانگین کمینه را با استفاده از الگوریتم کارپ  $Karp$  [۲۶] به‌دست آوریم که در  $o(mn)$  زمان اجرا می‌شود و یا با استفاده از الگوریتم  $Orlin$  و  $Ahuja$  که در  $o(\sqrt{nm} \log c)$  زمان اجرا می‌شود، به‌دست آوریم. فرض کنید  $c = \max\{c_{ij} : (i,j) \in A\}$  باشد. هم‌چنین  $\pi$  متغیر دوگان متناظر با محدودیت‌های مسئله فوق باشد و کاهش بهینه هزینه‌ها به صورت زیر باشد

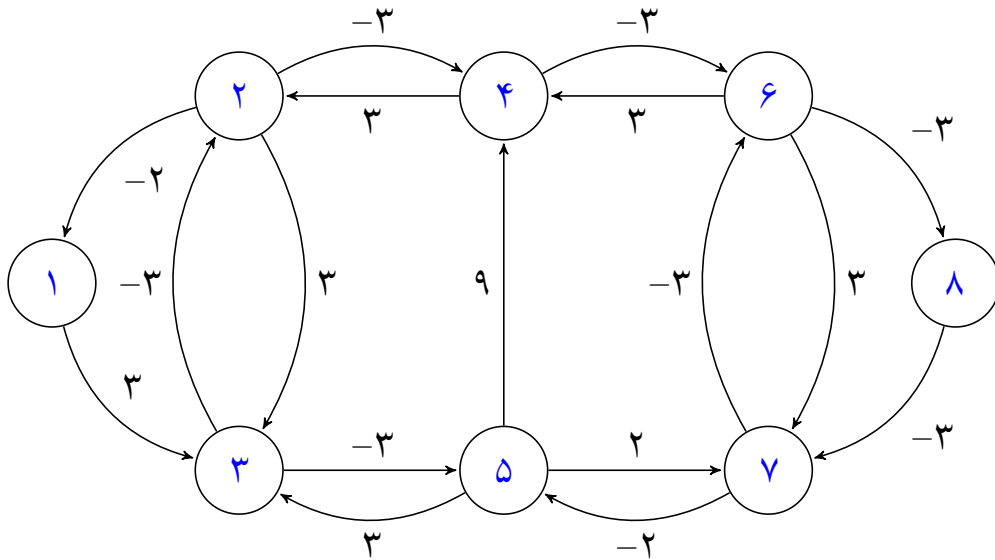
$$c_{ij}^\pi = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

مثال ۱۰.۳. شکل ۹.۳ در مثال ۱.۹.۳ را در نظر بگیرید، که ظرفیت تمام کمان‌ها ۲ می‌باشد. فرض کنید  $x^\circ$  عبارت است از ارسال یک واحد جریان در دو مسیر زیر

$$P_1 : 1 - 2 - 4 - 6 - 7 - 8$$

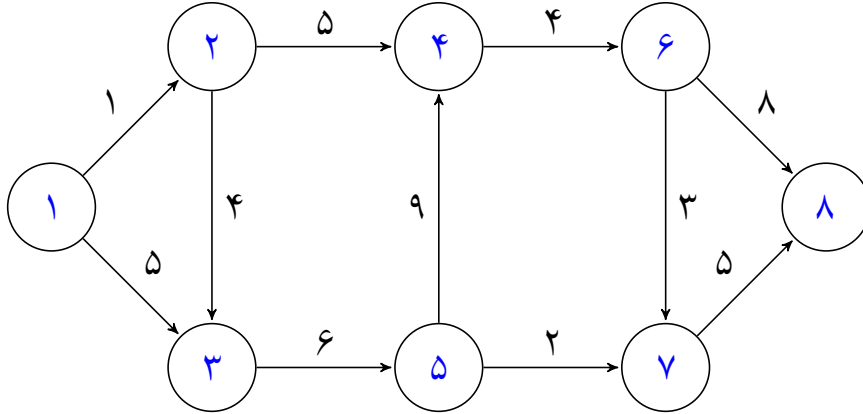
$$P_2 : 1 - 2 - 3 - 5 - 7 - 8$$

شکل ۱۰.۳ نشان‌دهنده‌ی باقی‌مانده شبکه در شکل ۹.۳ می‌باشد، که میانگین هزینه ۳- است و متغیرهای دوگان بهینه به صورت  $\{0, -1, -5, -6, -11, -10, -13, -18\}$  می‌باشد. شکل ۱۲.۳ کاهش بهینه هزینه‌ها را نشان می‌دهد:



شکل ۱۲.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۱۰.۳: نشان دهنده کاهش بهینه هزینه‌ها

و بردار هزینه  $d^*$  در شکل ۱۳.۳ نشان داده شده است:



شکل ۱۳.۳: شکل مربوط به مثال ۱.۱۰.۳: نشان‌دهنده  $d^*$ ها

که با توجه به هزینه اصلاح شده کمان‌ها، هر مسیر از گره ۱ به ۸ هزینه‌ای به اندازه ۱۸ دارد.

### ۱۱.۳ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه ما به بررسی مسائل برنامه‌ریزی خطی معکوس، تحت نرم‌های  $L_1$  و  $L_\infty$  پرداختیم و نمونه‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح صفویک مانند: مسئله کوتاه‌ترین مسیر معکوس، مسئله

تخصیص معکوس، مسئله حداقل برش معکوس، مسئله حداقل هزینه با محدودیت جریان معکوس پرداختیم و به نتایج زیر رسیدیم:

۱ : اگر مسئله  $P$  یک مسئله برنامه ریزی خطی باشد، آنگاه مسئله معکوس متناظر آن تحت نرم‌های  $L_1$  و  $L_\infty$  نیز مسئله برنامه ریزی خطی است.

۲ : اگر مسئله  $P$  یک مسئله کوتاه‌ترین مسیر یا تخصیص باشد، آنگاه جواب مسئله معکوس متناظر با آن تحت نرم  $L_1$  با وزن واحد را می‌توان با حل مسئله مشابه به‌دست آورد و برای حالت وزن غیر واحد، حل مسئله معکوس، منجر به حل یک مسئله حداقل هزینه جریان می‌شود.

۳ : اگر مسئله  $P$  یک مسئله حداقل هزینه جریان باشد، آنگاه جواب مسئله معکوس متناظر با آن تحت نرم  $L_1$  با وزن واحد را می‌توان با حل یک مسئله حداقل هزینه جریان با ظرفیت واحد به‌دست آورد.

۴ : اگر مسئله  $P$  یک مسئله حداقل هزینه جریان باشد، آنگاه جواب مسئله معکوس متناظر با آن تحت نرم  $L_\infty$  با وزن واحد را می‌توان با حل یک مسئله دور با میانگین کمینه به‌دست آورد.



# مراجع

- [1] Ahuja, R. K., T. L. Magnanti, and J. B. Orlin. 1993. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, NJ.
- [2] Ahuja, J.B. Orlin. 2000. A faster algorithm for the inverse spanning tree problem. *J. Algorithms* **34** 177–193.
- [3] Ahuja, R. K., A. V. Goldberg, J. B. Orlin, and R. E. Tarjan. 1992. Finding minimum cost flows by double scaling. *Mathematical Programming* **53**, 243-266.
- [4] Ahuja, R. K., and J. B. Orlin. 1998a. Inverse Optimization, Part 1: Linear programming and general problem. Working Paper, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.
- [5] Ahuja, R. K., and J. B. Orlin. 1998b. Combinatorial algorithms for inverse network flow problems. Working Paper, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.
- [6] Bazaraa M.Jarvis JJ, Shetty C.M, *Linear Programming and Network Flows* .
- [7] Burton, D., B. Pulleyblank, and Ph. L. Toint. 1997. The inverse shortest paths problem with upper bounds on shortest paths costs. In *Network Optimization*, edited by P. Pardalos, D. W. Hearn, and W. H. Hager, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Volume 450, pp. 156-171.
- [8] Burton, D., and Ph. L. Toint. 1992. On an instance of the inverse shortest paths problem. *Mathematical Programming* **53**, 45-61.
- [9] Burton, D., and Ph. L. Toint. 1994. On the use of an inverse shortest paths algorithm for recovering linearly correlated costs. *Mathematical Programming* **63**, 1-22.
- [10] Cai, M. and X. Yang. 1994. Inverse shortest path problems. Technical Report, Institute of Systems Sciences, Academia Sinica, Beijing, China.
- [11] Carr, S. C., W. S. Lovejoy. 1997. The inverse newsvendor problem: Choosing an optimal demand portfolio for capacitated resources. Technical Report, Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI.

- [12] Dantzig, G. B., W. Blattner, and M. R. Rao. 1966. Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem. In *Theory of Graphs: International Symposium*. Dunod, Paris, and Gordon and Breach, New York, pp. 209-213.
- [13] Dembo, R., L. Merkoulovitch, D. Rosen. 1998. Images from a portfolio. Algorithmics Research Working Paper, Algorithmics, Inc., Canada.
- [14] Dial, B. 1996. Minimum-revenue congestion pricing, Part 1: A fast algorithm for the single-origin case. Technical Report, The Volpe National Transportation Systems Center, Kendall Square, Cambridge, MA 02142.
- [15] Ford, L. R. Jr., and D. R. Fulkerson. 1962. *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [16] Fredman, M. L., and R. E. Tarjan. 1984. Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. *Proceedings of the 25 th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 338-346.
- [17] Ford, L. R. Jr., and D. R. Fulkerson. 1962. *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [18] Gabow, H. N., and R. E. Tarjan. 1989. Faster scaling algorithms for network problems. *SIAM Journal on Computing* **18**, 1013-1036.
- [19] Goldberg, A. V. 1995. Scaling algorithms for the shortest path problem. *SIAM Journal on Computing* **24**, 494-504.
- [20] Goldberg, A. V., and S. Rao. 1997. Length function for flow computation. Technical Report # 97-055, NEC Research Institute, 4 Independence Way, Princeton, NJ.
- [21] Goldberg, A. V., and R. E. Tarjan. 1986. A new approach to the maximum flow problem. *Proceedings of the 18th ACM Symposium on the theory of Computing*, pp. 136-146. *Full paper in Journal of ACM* **35**(1990), 873-886.
- [22] Goldberg, A. V., and R. E. Tarjan. 1987. Solving minimum cost flow problem by successive approximation. *Proceedings of the 19th ACM Symposium on the theory of Computing*, pp. 7-18. Full paper in *Mathematics of Operations Research* **15**(1990), 430-466.
- [23] Goldfarb, D. 1985. Efficient dual simplex algorithms for the assignment problem. *Mathematical Programming* **33**, 187-203.
- [24] Greenberg, H. J. 1997. An annotated bibliography for postsolution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization. *Advances in Computational*



- and Stochastic Optimization, Logic Programming, and Heuristic Search*. D. L. Woodruff, ed. Kluwer Academic Publishers, NewYork.
- [25] Grotschel, M., L. Lovasz, A. Schrijver. 1986. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer, Heidelberg.
- [26] Karp, R. M. 1978. A characterization of the minimum cycle mean in a diagraph *Discrete Mathematics* **23**, 309-311.
- [27] Lawler, E. L. 1966. Optimal cycles in doubly weighted linear graphs. *In Theory of Graphs: International Symposium*, Dunod, Paris, and Gordon and Breach, New York, pp. 209-213.
- [28] Huang, S., and Z. Liu. 1995. On the inverse version of the minimum cost flow problem. Working Paper, Dept. of ISMT, School of Business and Management, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong.
- [29] Meggido, N. 1979. Combinatorial optimization with rational objective functions. *Mathematics of Operations Research* **4**, 414-424.
- [30] Neumann-Denzau, G., J. Behrens. 1984. Inversion of seismic data using tomographical reconstruction techniques for investigations of laterally inhomogeneous media. *Geophysical J. Royal Astronomical Soc.* **79** 305–315.
- [31] Nolet, G. 1987. *Seismic Tomography*. Reidel, Dordrecht.
- [32] Orlin, J. B. 1988. A faster strongly polynomial minimum cost flow algorithm. *Proceedings of the 20 th ACM Symposium on the Theory of Computing*, pp. 377- 387.
- [33] Orlin, J. B., and R. K. Ahuja. 1992. New scaling algorithms for the assignment and *minimum cycle mean problems*. *Mathematical Programming* **54**, 41-56.
- [34] Schrijver, A. 1986. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons, NewYork.
- [35] Shan, Y. 1999. Personal communication. CSX Transportation, Jacksonville, FL.
- [36] Sheffi, Y. 1985. *Urban Transportation Networks*. MIT, Cambridge, MA.
- [37] Sokkalingam, P.T., 1996. *The Minimum Cost Flow Problem . Primal Algorithms and Cost Perturbations*. Unpublished Dissertation, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Kanpur, INDIA.
- [38] Tarantola, A. 1987. *Inverse Problem Theory: Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*. Elsevier, Amsterdam.

- 
- [39] Woodhouse, J. H., A. M. Dziewonski. 1984. Mapping the upper mantle: Three dimensional modeling of Earth structure by inversion of seismic waveforms. *J. Geophysical Res.* **89** (B7) 5953–5986.
- [40] Xu, S., and J. Zhang. 1995. An inverse problem of the weighted shortest path problem. *Japanese Journal of Industrial and Applied Mathematics* **12**, 47-59.
- [41] Yang, C., and J. Zhang. 1996. Inverse maximum capacity path with upper bound constraints. To appear in *OR Spektrum*.
- [42] Yang, C., J. Zhang, and Z. Ma. 1997. Inverse maximum flow and minimum cut problem. *Optimization* **40**, 147-170.
- [43] Zhang, J., and M. C. Cai. 1998. Inverse problem of minimum cuts. *Mathematical Methods of Operations Research* **47**, No. 1.
- [44] Zhang, J., Z. Ma, and C. Yang. 1995. A column generation method for inverse shortest path problems, *ZOR-Mathematical Methods for Operations Research* **41**, 347- 358.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Cut	برش
Vector	بردار
Cost Vector	بردار هزینه
Programming	برنامه‌ریزی
Optimal	بهینه
Optimization	بهینه‌سازی
Maximum	بیش‌ترین
Objective Function	تابع هدف
Assignment	تخصیص
Flow	جریان
Feasible Solution	جواب شدنی
Optimal Solution	جواب بهینه
Solution	جواب
Linear	خطی
Dual	دوگان
Network	شبکه
Directed Network	شبکه جهت‌دار
Bipartite Network	شبکه دو طرفه
Feasible	شدنی
Capacity	ظرفیت
Integer	عدد صحیح
Nonlinear	غیر خطی
Upper Bound	کران بالا
Lower Bound	کران پایین
Arc	کمان

Backward Arc	کمان پسرو
Forward Arc	کمان پیشرو
Minimum	کم‌ترین
Shortest Path	کوتاه‌ترین مسیر
Graph	گراف
Node	گره
Source Node	گره مبدا
Destination Node	گره مقصد
Variable	متغیر
Convex	محدب
Constraint	محدودیت
Set	مجموعه
Path	مسیر
Inverse	معکوس
Norm	نرم
Weighted	وزن‌دار
Cost	هزینه

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Arc	کمان
Assignment	تخصیص
Backward Arc	کمان پیشرو
Bipartite Network	شبکه دو طرفه
Capacity	ظرفیت
Constraint	محدودیت
Convex	محدب
Cost	هزینه
Cost Vector	بردار هزینه
Cut	برش
Destination Node	گره مقصد
Directed Network	شبکه جهت‌دار
Dual	دوگان
Feasible	شدنی
Feasible Solution	جواب شدنی
Flow	جریان
Forward Arc	کمان پیشرو
Graph	گراف
Integer	عدد صحیح
Inverse	معکوس
Linear	خطی
Lower Bound	کران پایین
Maximum	بیش‌ترین
Minimum	کم‌ترین
Network	شبکه

Norm.....	نرم
Node.....	گره
Nonlinear.....	غیر خطی
Objective Function.....	تابع هدف
Optimal.....	بهینه
Optimal Solution.....	جواب بهینه
Optimization.....	بهینه‌سازی
Path.....	مسیر
Programming.....	برنامه‌ریزی
Set.....	مجموعه
Shortest Path.....	کوتاه‌ترین مسیر
Solution.....	جواب
Source Node.....	گره مبدأ
Upper Bound.....	کران بالا
Variable.....	متغیر
Vector.....	بردار
Weighted.....	وزن‌دار

## Aabstract

In this paper, we study inverse optimization problems defined as follows. Let  $\mathbf{S}$  denote the set of feasible solutions of an optimization problem  $\mathbf{P}$ , let  $c$  be a specified cost vector, and  $x^0$  be a given feasible solution. The solution  $x^0$  may or may not be an optimal solution of  $\mathbf{P}$  with respect to the cost vector  $c$ . The inverse optimization problem is to perturb the cost vector  $c$  to  $d$  so that  $x^0$  is an optimal solution of  $\mathbf{P}$  with respect to  $d$  and  $\|d - c\|_p$  is minimum, where  $\|d - c\|_p$  is some selected  $L_p$  norm. In this paper, we consider the inverse linear programming problem under  $L_1$  norm (where  $\|d - c\|_p = \sum_{j \in J} \{w_j |d_j - c_j|\}$ , with  $J$  denoting the index set of variables  $x_j$  and  $w_j$  denoting the weight of the variable  $j$ ) and under  $L_\infty$  norm (where  $\|d - c\|_p = \max_{j \in J} \{w_j |d_j - c_j|\}$ ). We prove the following results: (i) If the problem  $\mathbf{P}$  is a linear programming problem, then its inverse problem under the  $L_1$  as well as  $L_\infty$  norm is also a linear programming problem. (ii) If the problem  $\mathbf{P}$  is a shortest path, assignment or minimum cut problem, then its inverse problem under the  $L_1$  norm and unit weights can be solved by solving a problem of the same kind. For the nonunit weight case, the inverse problem reduces to solving a minimum cost flow problem. (iii) If the problem  $\mathbf{P}$  is a minimum cost flow problem, then its inverse problem under the  $L_1$  norm and unit weights reduces to solving a unit-capacity minimum cost flow problem. For the nonunit weight case, the inverse problem reduces to solving a minimum cost flow problem. (iv) If the problem  $\mathbf{P}$  is a minimum cost flow problem, then its inverse problem under the  $L_\infty$  norm and unit weights reduces to solving a minimum mean cycle problem. For the nonunit weight case, the inverse problem reduces to solving a minimum cost-to-time ratio cycle problem. (v) If the problem  $\mathbf{P}$  is polynomially solvable for linear cost functions, then inverse versions of  $\mathbf{P}$  under the  $L_1$  and  $L_\infty$  norms are also polynomially solvable.

**Keywords:** Network, Flow algorithm, Inverse shortest path, Minimum cut, Minimum cost flow, Optimization.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

# **INVERSE OPTIMIZATION**

**Mohadeseh Jamei**

**Supervisor**

**Dr. Jafar Fathali**

**Advisor**

**Dr. Maryam Ghorani**

**September 2018**