بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ارتباطاتی بین بهترین تقریب با آنالیز محدب و مخروط‌ها

نگارنده: محمدرضا غریب نژاد

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

اردیبهشت ۱۳۹۷

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای **محمدرضا غریب نژاد** با شماره دانشجویی **۹۳۱۲۵۴۴** رشته **ریاضی** گرایش **آنالیز** تحت عنوان **ارتباطات بین بهترین تقریب با آنالیز محدب و مخروط ها** که در تاریخ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با امتیاز ۱۸/۵۰ درجه ....) ☑ **مردود ☐**

نوع تحقیق: نظری ☑ **عملی ☐**

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر مهدی ایرانمنش	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سید رضا حجازی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر احمد معتمد نژاد	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر الهام دسترنج	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

با احترام تقدیم به:

پدرم،

اول استادم، که همواره چتر محبتش بر سرم است بزرگواری که الفبای زندگی را از او آموختم.

مادرم،

بلند تکیه گاهم، که دامان پر مهرش یگانه پناهم است مهربانی که عشق ورزیدن را از او آموختم.

خواهرم،

که وجودش شادی بخش و صفایش مایه آرامش من است.

سپاس‌گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب «من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّوجلّ» از پدر و مادر عزیزم...این دو معلم بزرگوارم...که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده‌اند؛ از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند؛ تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

محمدرضا غریب نژاد
اردیبهشت ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **محمدرضا غریب نژاد** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **ارتباطاتی بین بهترین تقریب با آنالیز محدب و مخروط‌ها** ، تحت راهنمایی **مهدی ایرانمنش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محمدرضا غریب نژاد

اردیبهشت ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

نظریه‌ی بهترین تقریب همزمان در شاخه‌های مختلفی از ریاضیات از جمله بهینه سازی، آنالیز عددی و ... به کار برده می‌شود. مثال ساده این بحث یافتن نقاطی از یک مجموعه است که نسبت به نقطه‌ای در فضا دارای کمترین فاصله باشد.

در این پایان‌نامه به معرفی مفهوم بهترین تقریب در چند فضای مختلف و ارتباطات آن با آنالیز محدب، و مخروط‌ها پرداخته شده است.

کلمات کلیدی: بهترین تقریب، مخروط، مخروط نرمال، مخروط محدب، مجموعه‌ی محدب، فضای متریک مخروطی، فضای نرمال مخروطی.

پیشگفتار

این پایان‌نامه حاصل تحقیق و بررسی ارتباطات بین بهترین تقریب با آنالیز محدب و مخروط‌ها می‌باشد. که در فصل اول تعاریف و مفاهیم مورد نیاز از آنالیز تابعی و آنالیز محدب بیان شده است. هم چنین پایان این فصل ما را با تعاریف درون خطی، پیچش اینفیمال و کراندار منظم خطی رهنمون می‌سازد.

در فصل دوم شرط بستار ساده برای فرمول فصل مشترک مخروط نرمال و شرایط برقراری فرمول فصل مشترک مخروط نرمال را بررسی می‌کنیم. و نشان می‌دهیم شرط منظم در فرمول فصل مشترک مخروط نرمال، مانند شرط نقطه‌ی درونی اهمیتی ندارد. و از آن صرف نظر می‌کنیم. و فرمول، برای مجموعه‌ی محدب بسته بدون شرط منظم همیشه درست است. در این فصل نشان می‌دهیم فرمول فصل مشترک مخروط نرمال برای مجموعه‌ی محدب دارای شرط بستار ساده، ضعیف‌تر از نقطه‌ی دورنی و شرط کراندار منظم خطی است. مشکل اساسی در آنالیز محدب تعیین شرایطی است، که دارای فرمول فصل مشترک در هر نقطه از فصل مشترک مجموعه باشد چنین فرمول فصل مشترک نقش کلیدی در توصیف راه حل مسایل بهینه سازی و مسایل بهترین تقریب بازی می‌کند.

در فصل سوم فضای‌های متریک مخروطی و بهترین تقریب در این فضاها را معرفی می‌کنیم. هم چنین در ادامه قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های انقباضی در فضای متریک مخروطی که در مطالعه‌ی فضاهای متریک، جایگاه برجسته‌ای دارد را بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم به معرفی فضاهای نرمال مخروطی و بهترین تقریب روی این فضاها را می‌پردازیم. در ادامه‌ی این فصل به بررسی قضیه‌ی بهترین تقریب برای یک مزدوج در فضای باناخ مخروطی، قضیه مزدوج ثابت روی فضای متریک مخروطی و نکاتی در مورد نقاط انطباقی مزدوج روی این فضا پرداختیم.

فهرست مطالب

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۱

۱.۱ مقدمه . . . ۱

۲.۱ مروری بر چند مفهوم اساسی . . . ۱

۳.۱ توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف ستاره . . . ۵

۴.۱ تعاریفی از آنالیز محدب . . . ۶

۵.۱ مخروط‌های قطبی، دوگان و نرمال . . . ۹

۶.۱ توابع نیم‌پیوسته‌ی پایین، شاخص و عملکرد . . . ۱۴

۷.۱ درون و درون جبری یک مجموعه . . . ۱۸

۸.۱ پیچش اینفیمال و منظم خطی کراندار . . . ۲۱

۲ شرط بستار ساده برای فرمول فصل مشترک مخروط نرمال ۲۳

۱.۲ مقدمه . . . ۲۳

۲.۲ مزدوج پیچش اینفیمال و پیچش اینفیمال دو تابع مزدوج . . . ۲۳

۳.۲ فرمول فصل مشترک مخروط نرمال . . . ۲۹

۴.۲ زیردیفرانسیل و مخروط نرمال . . . ۳۹

۵.۲ منظم بودن و مخروط محدب بسته . . . ۴۵

۳ فضای‌های متریک مخروطی و بهترین تقریب در این فضاها ۴۷

۱.۳ فضاهای متریک مخروطی . . . ۴۷

۲.۳ توپولوژیک فضای متریک مخروطی . . . ۶۰

۳.۳ بهترین تقریب در فضای‌های متریک مخروطی . . . ۶۳

۴.۳ قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های انقباضی در فضای متریک مخروطی . . . ۶۸

۴ فضاهای نرمال مخروطی و بهترین تقریب روی این فضاها ۷۹

۱.۴ فضاهای نرمال مخروطی . . . ۸۰

۲.۴ بهترین تقریب در نرمال و فضاهای نرمال مخروطی . . . ۸۴

۳.۴ مجموعه‌ای از بهترین تقریب‌ها ۸۷
۴.۴ قضیه‌ی بهترین تقریب برای یک مزدوج در فضای باناخ مخروطی ۹۱
۱.۴.۴ قضیه‌ی مزدوج ثابت روی فضای متریک مخروطی ۹۲
۵.۴ نکاتی در مورد نقاط انطباقی مزدوج روی فضای نرمال مخروطی ۱۰۱

مراجع **۱۰۷**

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز از آنالیز تابعی و آنالیز محدب که در فصل‌های بعدی از آن استفاده می‌کنیم می‌پردازیم. در ابتدا مروری بر چند مفهوم اساسی داریم. سپس توپولوژی (ضعیف، ضعیف ستاره) و قضیه‌ی کریمن_اسمولین را معرفی می‌کنیم. در ادامه چند تعریف اساسی از آنالیز محدب (مجموعه‌ی محدب، اپی‌گراف، تابع محدب و ...) و قضایای مربوط به آنها را آورده و اثبات می‌کنیم. هم چنین مخروط (دوگان، قطبی، نرمال) و زیردیفرانسیل یک تابع را بیان و نشان می‌دهیم که ضعیف ستاره‌ی بسته هستند. سپس توابع (مزدوج، مشخصه، عملکرد، نیم پیوسته‌ی پایین) را تعریف و برخی ویژگی‌های آنها را بررسی می‌کنیم. در پایان به معرفی درون جبری، پیچش اینفیمال و کراندار منظم خطی می‌پردازیم.

۲.۱ مروری بر چند مفهوم اساسی

تعریف ۱.۲.۱. فضای برداری: فرض کنید $(X,+)$ گروه آبلی باشد. X را فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم هرگاه نگاشت $\mathbb{F}\times X\to X \quad (\alpha,x)\to \alpha x$ دارای خواص زیر باشد.

(۱) به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

(۲) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و $x_۱, x_۲ \in X$ داشته باشیم:

$$\alpha(x_۱ + x_۲) = \alpha x_۱ + \alpha x_۲.$$

(۳) به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$$

(۴) به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$۱x = x.$$

تعریف ۲.۲.۱. زیرفضای برداری: فرض کنید X یک فضای برداری بر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک زیرفضای X عبارت است از یک زیرمجموعه‌ی W از X که خود با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری روی X، یک فضای برداری باشد.

قضیه ۱.۲.۱. یک زیرمجموعه‌ی ناتهی W از X زیرفضایی از X است اگر و تنها اگر به ازای هر دو بردار α و β و هر اسکالر c از $\mathbb{F}$ بردار $c\alpha + \beta$ در W باشد.

برهان. به [۱۸] رجوع شود. □

تعریف ۳.۲.۱. توپولوژی: فرض کنید X یک مجموعه و $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$، τ را یک توپولوژی روی X می‌نامیم هرگاه خواص زیر برقرار باشد.

(۱) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$ باشد.

(۲) اجتماع هر زیرگردایه از عناصر τ، عضوی از τ باشد.

(۳) اشتراک هر گردایه‌ی متناهی از عناصر τ، عضوی از τ باشد.

مجموعه‌ی X با توپولوژی τ را یک فضای توپولوژیک نامیده و آن را با (X, τ) نمایش می دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. فضای هاسدورف: فضای توپولوژیک X یک فضای هاسدورف است هرگاه به ازای هر $x \in X$ و $y \in X$ که $x \neq y$ باشد یک همسایگی مانند U و یک همسایگی مانند V وجود داشته باشد به طوری که

$$U \cap V = \emptyset.$$

تعریف ۵.۲.۱. فضای برداری توپولوژیک: فرض کنید X یک فضای برداری، F یک میدان و τ یک توپولوژی در X باشد. در این صورت X یک فضای برداری توپولوژیک نامیده می‌شود هرگاه:

(۱) هر زیرمجموعه‌ی تک نقطه‌ای از X یک مجموعه‌ی بسته باشد.

(۲) نگاشت‌های $X \times X \to X$ و $F \times X \to X$ به ترتیب با ضابطه‌های $x+y$ و αx نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

تعریف ۶.۲.۱. فضای فرشه: فضای توپولوژیک (X,τ) را یک فضای فرشه گویند، هرگاه به ازای هر $A \subseteq X$ و هر $x \in \overline{A}$ دنباله‌ای از نقاط A وجود داشته باشد که همگرا به x باشد.

تعریف ۷.۲.۱. پوشش برای یک فضا: گردایه‌ی $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از زیرمجموعه‌های X را یک پوشش برای فضای X نامیم اگر

$$X = \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha.$$

اگر برای هر α، V_α در X باز باشد گردایه‌ی $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز برای X گوییم.

تعریف ۸.۲.۱. فضای فشرده: فضای X را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز از X زیرپوشش متناهی داشته باشد.

تعریف ۹.۲.۱. فضای نرمدار: فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان حقیقی یا مختلط و $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. تابع $\|\cdot\|$ را نرم روی X می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in X$ و هر اسکالر α دارای خواص زیر باشد.

(۱) $\|x\| \geq ۰$؛

(۲) $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$؛

(۳) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛

(۴) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این صورت $(X, \|\cdot\|)$ را فضای نرمدار می‌نامیم.
متر d روی فضای X به صورت زیر تعریف می‌شود. به ازای هر $x,y \in X$

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

که آن را متر تولید شده توسط نرم X می‌نامیم. بنابراین هر فضای نرمدار، یک فضای متری است.

تعریف ۱۰.۲.۱. دنباله‌ی کشی: دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای متری (X,d) را کشی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$ عدد طبیعی $N = N(\epsilon)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $m,n \in \mathbb{N}$ و $n,m > N$ داشته باشیم:

$$d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

تعریف ۱.۲.۱۱. فضای باناخ: فرض کنید X یک فضای برداری و $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد. اگر X با متر تولید شده توسط نرم یک فضای کامل (هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا) باشد. آنگاه $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای باناخ می‌نامیم.

مثال ۱.۲.۱. فرض کنید X یک فضای هاسدورف و فشرده باشد. و $C(X)$ مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط روی X باشد. اگر جمع و ضرب اسکالر روی $C(X)$ به طور نقطه‌دار تعریف شود و به ازای هر $f \in C(X)$ تعریف کنیم:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \colon x \in X\}$$

آنگاه $C(X)$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۱.۲.۱۲. عملگر خطی: فرض کنید X و Y دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشند. تابع $T\colon X \to Y$ را یک عملگر خطی از X به Y می‌گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad (۱)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad (۲)$$

یک عملگر خطی از X به $\mathbb{R}$ را یک تابعک خطی می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۳. دوگان یک فضای نرمدار: فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی X را با X^* نمایش داده و آن را فضای دوگان X می‌نامیم. اگر روی X^* جمع و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف کنیم. آنگاه X^* یک فضای برداری خواهد شد.

$$(f_۱ + f_۲)(x) = f_۱(x) + f_۲(x) \quad x \in X$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R},\, x \in X)$$

به علاوه اگر برای $f \in X^*$ قرار دهیم:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq ۱\}.$$

ملاحظه ۱.۲.۱. عناصر فضای دوگان X^* تابعک‌های خطی پیوسته بر Xاند. که با x^* نشان داده می‌شوند. گاه به جای $x^*(x)$ می‌نویسیم $\langle x^*, x\rangle$.

تعریف ۱.۲.۱۴. دامنه مؤثر تابع: دامنه مؤثر تابع $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ را به صورت مجموعه‌ی

$$\operatorname{dom} f = \big\{x \in X \mid f(x) < +\infty\big\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱۵. تابع حقیقی: تابع $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ روی دامنه‌ی موثرش حقیقی است اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$f(x) > -\infty \qquad \text{و} \qquad \operatorname{dom} f \neq \emptyset.$$

تعریف ۱.۲.۱۶. تابع زیرخطی: تابع $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ زیرخطی است اگر

(۱) همگن مثبت باشد. یعنی به ازای هر $x \in X$ و $\lambda > 0$ داشته باشیم:

$$f(0) = 0 \qquad \text{و} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

(۲) زیرجمعپذیر باشد. یعنی به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

تعریف ۱.۲.۱۷. مخروط: فرض کنید X فضای باناخ حقیقی و P زیرمجموعه‌ای از آن باشد. P را یک مخروط نامند هرگاه

(C۱) مجموعه‌ی P بسته، ناتهی و $P \neq \{\theta\}$؛

(C۲) به ازای هر عدد حقیقی $a, b \geq 0$ و هر $x, y \in P$ داشته باشیم:

$$ax + by \in P$$

یعنی P مجموعه‌ای محدب بوده و تحت عمل ضرب اسکالر در نامنفی بسته باشد.

(C۳) $P \cap (-P) = \{\theta\}$ (یعنی اگر $x \in P$ و $-x \in P$ آنگاه $x = \theta$).

مثال ۱.۲.۲. $P = [0, +\infty)$ یک مخروط در $\mathbb{R}$ است.

۱.۳ توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف ستاره

تعریف ۱.۳.۱. توپولوژی ضعیف: فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. توپولوژی تولید شده به وسیله‌ی X^* روی X، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی روی X به قسمی که هر $f \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X می‌نامند.

تعریف ۱.۳.۲. توپولوژی ضعیف ستاره: فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. X^* یک فضای نرمدار با نرم

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \colon \|x\| \leq 1\}$$

است. هم چنین دوگان X^* را با X^{**} نمایش می‌دهیم.
نگاشت ϕ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi\colon X \to X^{**}$$
$$\phi(x)(f) = f(x) \qquad f \in X^*$$

آنگاه کوچکترین توپولوژی روی X^* که نسبت به آن برای هر $x \in X$، $\phi(x)$ پیوسته می‌گردد را توپولوژی ضعیف ستاره روی X می‌نامیم.

نکته ۱.۳.۱. زیرمجموعه‌ی A از فضای باناخ X ضعیف ستاره‌ی بسته است اگر در توپولوژی ضعیف ستاره، بسته باشد.

تعریف ۳.۳.۱. همگرایی ضعیف: فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. دنباله‌ی $\{x_n\}$ از X همگرای ضعیف به $x \in X$ است هرگاه به ازای هر $f \in X^*$ داشته باشیم:

$$f(x_n) \to f(x).$$

و می‌نویسیم:

$$x_n \overset{w}{\to} x.$$

تعریف ۴.۳.۱. همگرایی ضعیف ستاره: دنباله‌ی (f_n) در X^* به f در توپولوژی ضعیف ستاره همگرا است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$

$$f_n(x) \to f(x)$$

در این صورت (f_n) را به f همگرای ضعیف ستاره می‌گوییم و می‌نویسیم:

$$f_n \overset{w^*}{\to} f.$$

نکته ۲.۳.۱. همگرایی ضعیف، همگرایی ضعیف ستاره را نتیجه می‌دهد. اما عکس آن لزوماً برقرار نیست.

برهان. به [۱۲] رجوع شود. □

۴.۱ تعاریفی از آنالیز محدب

تعریف ۱.۴.۱. مجموعه‌ی محدب: فرض کنید C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای برداری X باشد. C محدب است هرگاه به ازای هر $x, y \in C$ و هر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

به بیان دیگر مجموعه‌ای را محدب می‌نامیم که هر پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی دلخواه آن به طور کامل درونش قرار گیرد.

قضیه ۱.۴.۱. قضیه‌ی کرین_اسمولین: [۱] فرض کنید X یک فضای نرمدار، $K \subset X^*$ یک مجموعه‌ی محدب و $f_\circ \in X^*$ به طوری که به ضعیف ستاره‌ی بسته K تعلق نداشته باشد. آنگاه $x_\circ \in X$ و یک $c \in \mathrm{R}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $g \in K$ داریم:

$$\operatorname{Re} g(x_\circ) \leq c < \operatorname{Re} f_\circ(x_\circ)$$

که در آن $\operatorname{Re} f$ قسمت حقیقی f است.

گزاره ۱.۴.۱. در یک فضای برداری

(۱) جمع دو مجموعه‌ی محدب، محدب است.

(۲) بستار یک مجموعه‌ی محدب، محدب است.

(۳) درون یک مجموعه‌ی محدب، محدب است.

(۴) اشتراک مجموعه‌های محدب، محدب است.

برهان. به [۱۳] رجوع شود. □

تعریف ۲.۴.۱. تابع محدب: تابع $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع محدب است هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [\circ, ۱]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda)f(y).$$

گزاره ۲.۴.۱. یک تابع زیرخطی است اگر و تنها اگر همگن مثبت و محدب باشد.

برهان. با توجه به تعریف تابع زیرخطی و تابع محدب حکم برقرار است. □

تعریف ۳.۴.۱. تابع cs - محدب: یک تابع حقیقی مقدار توسیع یافته‌ی صحیح f روی X cs–محدب است. هرگاه به ازای هر $x \in X$، و هر دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X و هر دنباله‌ی $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد در $[\circ, ۱]$ طوری که $\sum_{n=\circ}^{\infty} t_n = ۱$ داشته باشیم:

$$x = \sum_{n=\circ}^{\infty} t_n x_n \Rightarrow f(x) \leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=\circ}^{N} t_n f(x_n).$$

هر تابع cs–محدب، محدب است.

---
[۱] Krein-Smulian

تعریف ۴.۴.۱. اپی‌گراف: فرض کنید $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. اپی‌گراف تابع f به صورت مجموعه‌ی

$$\operatorname{epi} f := \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \le r\}$$

تعریف می‌شود.
اپی‌گراف، تابعی را با مجموعه‌ی محدب مرتبط می‌سازد.

گزاره ۳.۴.۱. f یک تابع محدب است اگر و تنها اگر $\operatorname{epi} f$ مجموعه‌ی محدب باشد.

برهان. با استفاده از تعریف تابع محدب و مجموعه‌ی محدب اثبات می‌شود. فرض کنید $(x_۱,\alpha_۱),(x_۲,\alpha_۲) \in \operatorname{epi} f$ و $\lambda \in [۰,۱]$. آنگاه $x_۱,x_۲ \in \operatorname{dom} f$ و

$$f(x_۱) \le \alpha_۱ \quad \text{و} \quad f(x_۲) \le \alpha_۲$$

حال با توجه به محدب بودن تابع f داریم:

$$f(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \le \lambda f(x_۱) + (۱-\lambda) f(x_۲) \le \lambda \alpha_۱ + (۱-\lambda)\alpha_۲$$

این نتیجه می‌دهد:

$$\lambda \cdot (x_۱,\alpha_۱) + (۱-\lambda)\cdot(x_۲,\alpha_۲) \in \operatorname{epi} f.$$

بنابراین $\operatorname{epi} f$ محدب است.
برای اثبات عکس فرض کنید $x_۱,x_۲ \in \operatorname{dom} f$ از آنجایی که

$$(x_۱, f(x_۱)), (x_۲, f(x_۲)) \in \operatorname{epi} f$$

در این صورت با توجه به محدب بودن مجموعه‌ی اپی‌گراف برای هر $\lambda \in [۰,۱]$ داریم:

$$(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲, \lambda f(x_۱) + (۱-\lambda) f(x_۲)) \in \operatorname{epi} f$$

با استفاده از تعریف اپی‌گراف داریم:

$$f(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \le \lambda f(x_۱) + (۱-\lambda) f(x_۲).$$

در نتیجه f محدب است. □

قضیه ۲.۴.۱. اگر $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ محدب باشد. آنگاه $\operatorname{dom} f$ محدب است. و به ازای هر $x,y \in \operatorname{dom} f$ و $\lambda \in (۰,۱)$ داریم:

$$f(\lambda x + (۱-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (۱-\lambda) f(y).$$

برهان. از آنجایی که f یک تابع محدب است. بنابراین طبق گزاره‌ی ۳.۴.۱ $\operatorname{epi} f$ مجموعه‌ی محدب است از این رو $\operatorname{dom} f$ محدب می‌باشد. □

با توجه به تعریف ۱.۲.۱۷، تعریف مخروط محدب را به صورت زیر خواهیم داشت.

تعریف ۱.۴.۵. مخروط محدب: مجموعه‌ی C یک مخروط محدب است هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in C$ و $\alpha_۱, \alpha_۲ \geq ۰$ داشته باشیم:

$$\alpha_۱ x_۱ + \alpha_۲ x_۲ \in C.$$

ملاحظه ۱.۴.۱. اگر C یک مخروط محدب و x عضوی از این مجموعه‌ی محدب باشد آنگاه به ازای هر اسکالر غیر منفی a و با توجه به تعریف مخروط محدب داریم:

$$ax = \frac{a}{۲}x + \frac{a}{۲}.$$

در این صورت ax نیز عضوی از مجموعه‌ی C است. و این بدین معناست که مخروط محدب حالت خاصی از مخروط است.

ملاحظه ۱.۴.۲. C مخروط محدب است اگر هم مخروط و هم محدب باشد.

مثال ۱.۴.۱. زیرفضاهای برداری، خطوط عبور کننده از مبدأ مختصات و مجموعه‌ی تهی مخروط محدب هستند.

۱.۵ مخروط‌های قطبی، دوگان و نرمال

تعریف ۱.۵.۱. مخروط قطبی: مخروط قطبی A به صورت

$$A^\circ = \{x^* \in X^* \colon \langle x^*, x\rangle \leq ۰,\ \forall x \in A\}$$

تعریف می‌شود.

لم ۱.۵.۱. مخروط قطبی، مخروط محدب ضعیف ستاره‌ی بسته است.

برهان. فرض کنید $x_۱{}^*, x_۲{}^* \in A^\circ$ آنگاه طبق تعریف مخروط قطبی به ازای هر $x \in A$ داریم:

$$\langle x_۱{}^*, x\rangle \leq ۰ \quad \text{و} \quad \langle x_۲{}^*, x\rangle \leq ۰$$

برای هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle \lambda x_۱^* + (۱-\lambda)x_۲^*, x\rangle &= \langle \lambda x_۱^*, x\rangle + \langle (۱-\lambda)x_۲^*, x\rangle \\ &= \lambda\langle x_۱^*, x\rangle + (۱-\lambda)\langle x_۲^*, x\rangle \\ &\leq ۰.\end{aligned}$$

بدین ترتیب

$$\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* \leq 0$$

بنابراین

$$\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* \in A^\circ.$$

این یعنی مخروط قطبی، محدب است.
حال برای اثبات مخروط بودن مخروط قطبی (کافیست ثابت کنیم به ازای هر $x^* \in A^\circ$ و هر $\lambda \geq 0$ داریم $\lambda x^* \in A^\circ$) فرض کنید $x^* \in A^\circ$، آنگاه به ازای هر $x \in A$ داریم:

$$\langle x^*, x\rangle \leq 0.$$

و برای هر $\lambda \geq 0$ داریم:

$$\lambda\langle x^*, x\rangle \leq 0 \quad \text{و} \quad \langle \lambda x^*, x\rangle \leq 0.$$

در نتیجه

$$\lambda x^* \in A^\circ.$$

بنابراین A° مخروط است.
حال نشان می‌دهیم A° ضعیف ستاره‌ی بسته است. برای این منظور کافی است ثابت کنیم اگر $f_n \to f \quad n \to \infty$ آنگاه $f \in A^\circ$.
به ازای هر $x \in A$ داریم:

$$\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle = \langle f_n - f, x\rangle$$

از آنجایی که $f_n \to f \quad n \to \infty$ نتیجه می‌گیریم:

$$(f_n \to f) \to 0$$

بنابراین

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$$

چون به ازای هر $x \in A$ داریم:

$$\langle f_n, x\rangle \leq 0$$

در نتیجه

$$\langle f, x\rangle \leq 0$$

بنابراین $f \in A^\circ$. $\square$

تعریف ۲.۵.۱. مخروط دوگان: مخروط دوگان A به صورت

$$A^* = \{x^* \in X^* \colon \langle x^*, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in A\}.$$

تعریف می‌شود.

لم ۲.۵.۱. مخروط دوگان، مخروط محدب ضعیف ستاره‌ی بسته است.

برهان. مشابه اثبات لم ۱.۵.۱. □

قضیه ۱.۵.۱. اگر C و D مخروط محدب باشند. آنگاه

$$(D+C)^* = D^* \cap C^*.$$

برهان. فرض کنید $x^* \in (D+C)^*$ باشد. آنگاه به ازای هر $x_1 \in C$ و $x_2 \in D$ داریم:

$$\langle x^*, x_1 + x_2 \rangle \geq 0.$$

از آنجایی که $0 \in D$ آنگاه به ازای هر $x_1 \in C$ داریم:

$$\langle x^*, x_1 \rangle \geq 0$$

این یعنی $x^* \in C^*$.
به صورت مشابه داریم:

$$x^* \in D^*$$

بنابراین

$$x^* \in D^* \cap C^*.$$

حال فرض کنید $x^* \in D^* \cap C^*$ باشد. هم چنین اگر $x_1 \in C$ و $x_2 \in D$ در این صورت داریم:

$$\langle x^*, x_1 + x_2 \rangle = \langle x^*, x_1 \rangle + \langle x^*, x_2 \rangle \geq 0$$

بنابراین

$$x^* \in (D+C)^*.$$

در نتیجه

$$(D+C)^* = D^* \cap C^*.$$

□

نکته ۱.۵.۱. قرینه‌ی مخروط دوگان، مخروط قطبی می‌شود. یعنی داریم:

$$-A^* = A^\circ$$

با توجه به تعریف ۱.۳.۱، تعریف مخروط نرمال را به صورت زیر خواهیم داشت.

تعریف ۳.۵.۱. مخروط نرمال: مخروط نرمال A وقتی که $x \in A$ به صورت

$$N_A(x) := \{x^* \in X^* \colon \langle x^*, y - x \rangle \leq 0, \ \forall\, y \in A\}$$

تعریف می‌شود. هم چنین اگر $x \notin A$ قرار می‌دهیم:

$$N_A(x) = \emptyset.$$

گزاره ۱.۵.۱. مخروط نرمال، یک مخروط محدب ضعیف ستاره‌ی بسته است.

برهان. مشابه اثبات لم ۱.۵.۱. □

تعریف ۴.۵.۱. مزدوج و مزدوج دوتایی یک تابع: مزدوج تابع $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ به صورت

$$f^*\colon X^* \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, x\rangle - f(x) \mid x \in X\}$$

تعریف می‌شود. که در آن اگر $f(x) = -\infty$ آنگاه $f^*(x^*) = +\infty$ و اگر $f(x) = +\infty$ آنگاه $f^*(x^*) = -\infty$.

در حالتی که f تابع حقیقی باشد، مزدوج یک تابع به صورت

$$f^*\colon X^* \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, x\rangle - f(x) \mid x \in \operatorname{dom} f\}$$

تعریف می‌شود. هم چنین مزدوج دوتایی یک تابع به صورت

$$f^{**}\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$f^{**}(x) := (f^*)^*(x) = \sup_{x^* \in X^*}\{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*) \mid x \in X\}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۵.۱. زیردیفرانسیل: فرض کنید $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. و $x \in X$ به طوری که $f(x) \in \mathbb{R}$، آنگاه به مجموعه‌ی

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \le f(y) - f(x)\ \forall y \in X\}$$

زیردیفرانسیل f در x گفته می‌شود. در حالتی که f حقیقی باشد، برای $x \in \operatorname{dom} f$ زیردیفرانسیل به صورت

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \le f(y) - f(x)\ \forall y \in \operatorname{dom} f\ \}$$

تعریف می‌شود. حال اگر $f(x) \notin \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$\partial f(x) = \emptyset.$$

عناصر زیردیفرانسیل، زیرگرادیان f در x نامیده می‌شود.

مثال ۱.۵.۱. برای تابع $f(x) = |x|$ و $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-۱\} & x < ۰ \\ [-۱, +۱] & x = ۰ \\ \{+۱\} & x > ۱ \end{cases}$$

در این مثال می‌بینیم که f در نقاطی تنها دارای یک زیردیفرانسیل است.

قضیه ۱.۵.۲. اگر $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ و $x \in X$ آنگاه

$$f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle \quad \iff \quad x^* \in \partial f(x)$$

هم چنین نامساوی یانگ_فنچل [۲] که به صورت

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle$$

تعریف می‌شود برقرار است. به ویژه برای هر $x^* \in \partial f(x)$ داریم:

$$(x^*, \langle x^*, x\rangle - f(x)) \in \operatorname{epi} f^*.$$

برهان. فرض کنید $x^* \in \partial f(x)$. آنگاه $f(x) \in \mathbb{R}$ و

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\colon x \in X\} \leq \langle x^*, x\rangle - f(x)$$

از آنجایی که طرف دیگر نامساوی همیشه درست است. بنابراین

$$f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle.$$

برای اثبات عکس فرض کنید $x \in X$ و $x^* \in X^*$ به طوری که

$$f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle$$

آنگاه $f(x) \in \mathbb{R}$. و به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$\langle x^*, x\rangle - f(x) = f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\} \geq \langle x^*, x\rangle - f(x)$$

بنابراین

$$x^* \in \partial f(x).$$

□

تعریف ۱.۵.۶. ε**_زیردیفرانسیل:** فرض کنید $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ و $x \in X$ به طوری که $f(x) \in \mathbb{R}$، ε_زیردیفرانسیل f در x به صورت مجموعه‌ی

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) + \varepsilon,\ \forall\, y \in X\}$$

تعریف می‌شود. هم چنین اگر f حقیقی باشد. برای $x \in \operatorname{dom} f$، ε_زیردیفرانسیل f در x به صورت مجموعه‌ی

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) + \varepsilon,\ \forall\, y \in \operatorname{dom} f\}$$

تعریف می‌شود. در حالتی که $f(x) \notin \mathbb{R}$، قرار می‌دهیم:

$$\partial_\varepsilon f(x) = \emptyset.$$

[۲] Yang-Fenchel

۶.۱ توابع نیم‌پیوسته‌ی پایین، شاخص و عملکرد

تعریف ۱.۶.۱. تابع نیم پیوسته‌ی پایین: تابع $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ نیم‌پیوسته‌ی پایین در $x \in X$ است هرگاه:

$$\liminf_{y\to x} f(y) := \sup_{\delta>\circ} \inf_{y\in B(x,\delta)} f(y) \geq f(x).$$

f نیم‌پیوسته‌ی پایین است اگر در هر $x \in X$ نیم‌پیوسته‌ی پایین باشد.

قضیه ۱.۶.۱. فرض کنید $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند.

(۱) $\operatorname{epi} f$ مجموعه‌ی بسته در $X \times \mathbb{R}$ است.

(۲) مجموعه‌ی سطح

$$L_\alpha(f) = \{x \in \operatorname{dom} f \mid f(x) \leq \alpha\}$$

بسته است.

(۳) f نیم پیوسته‌ی پایین است.

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنید α یک اسکالر و $L_\alpha(f)$ را در نظر بگیرید. اگر $L_\alpha(f) = \emptyset$ آنگاه $L_\alpha(f)$ بسته است. در غیر این صورت اگر $L_\alpha(f) \neq \emptyset$ آنگاه را به ازای هر n، دنباله‌ی $\{x_n\}$ در $L_\alpha(f)$ را همگرا به x در نظر بگیرید. در نتیجه $f(x_n) \leq \alpha$ و به ازای هر n داریم:

$$(x_n, \alpha) \in \operatorname{epi} f$$

حال از آنجایی که $(x_n, \alpha) \to (x, \alpha)$ و چون $\operatorname{epi} f$ بسته است. بنابراین

$$(x, \alpha) \in \operatorname{epi} f$$

این یعنی $f(x) \leq \alpha$. از این رو داریم:

$$x \in L_\alpha(f).$$

بنابراین $L_\alpha(f)$ بسته است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳) فرض کنید $x_\circ$ عضوی دلخواه و $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به $x_\circ$ باشد. برای رسیدن به یک تناقض فرض کنید f نیم‌پیوسته‌ی پایین در $x_\circ$ نباشد. در این صورت

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < f(x_\circ).$$

اسکار β و دنباله‌ی $\{x_n\}_N \subset \{x_n\}$ وجود دارند به طوری که

$$\forall n \in N \quad f(x_n) \leq \beta < f(x_\circ) \tag{۱.۱}$$

آنگاه

$$\{x_n\}_N \subset L_\beta(f).$$

از آنجایی x_n دنباله‌ای همگرا به $x_\circ$ و مجموعه‌ی $L_\beta(f)$ بسته است داریم:

$$x_\circ \in L_\beta(f)$$

پس باید $f(x_\circ) \leq \beta$ که با توجه به (۱.۱) یک تناقض است. بنابراین

$$f(x_\circ) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

در نتیجه f نیم پیوسته‌ی پایین است.
(۳) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید $\operatorname{epi} f$ بسته نباشد. آنگاه دنباله‌ی $\{(x_n, y_n)\} \subset \operatorname{epi} f$ وجود دارد به طوری که

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad \text{و} \quad (x, y) \notin \operatorname{epi} f$$

از آنجایی $\{(x_n, y_n)\} \in \operatorname{epi} f$ بنابراین به ازای هر n داریم:

$$f(x_n) \leq y_n$$

با در نظر گرفتن حد پایینی وقتی که $n \to \infty$ و با استفاده از $y_n \to y$ داریم:

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

از آنجایی که $(x, y) \notin \operatorname{epi} f$ بنابراین $f(x) > y$ در نتیجه

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq y < f(x)$$

از سوی دیگر چون $x_n \to x$ و f نیم‌پیوسته‌ی پایین در x است داریم:

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

که این یک تناقض است. بنابراین $\operatorname{epi} f$ بسته است. □

تعریف ۲.۶.۱. بستار یک تابع: فرض کنید $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. بستار یک تابع که غلاف نیم‌پیوسته‌ی پایین یک تابع است به صورت

$$\bar{f}\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$\bar{f} := \phi_{\operatorname{cl}(\operatorname{epi} f)}(x) = \inf\{r\colon (x, r) \in \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f)\}.$$

و یا به صورت

$$\forall\, x \in X \quad \liminf_{y\to x} f(y) = \bar{f}(x)$$

تعریف می‌شود.

مثال ۱.۶.۱. اگر $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ و $f = \delta_{(-\infty,0)}$ آنگاه

$$\bar{f} = \delta_{(-\infty,0]}.$$

قضیه ۲.۶.۱. فرض کنید $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. در این صورت رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\operatorname{epi} \bar{f} = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} f).$$

برهان. به [۳۳] رجوع شود. □

قضیه ۳.۶.۱. فرض کنید $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع محدب باشد. در این صورت $\bar{f}$ محدب است.

برهان. فرض کنید f یک تابع محدب باشد در این صورت $\operatorname{epi} f$ محدب است. از آنجایی که بستار یک مجموعه‌ی محدب، محدب است. بنابراین $\operatorname{cl}(\operatorname{epi} f)$ محدب است. حال با توجه به قضیه‌ی ۲.۶.۱، $\operatorname{epi} \bar{f}$ محدب است در نتیجه $\bar{f}$ محدب می‌باشد.

□

تعریف ۳.۶.۱. تابع شاخص: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از X و $\delta_A\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. در این صورت تابع شاخص به صورت

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \text{ اگر } \\ +\infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

ملاحظه ۱.۶.۱. $\operatorname{dom} \delta_A = A$ و $\operatorname{epi} \delta_A = A \times \mathbb{R}_+$.

قضیه ۴.۶.۱. اگر A زیرمجموعه‌ای از X باشد. آنگاه

(۱) δ_A محدب است اگر و تنها اگر A مجموعه‌ی محدب باشد.

(۲) اگر A محدب باشد آنگاه

$$\bar{\delta_A} = \delta_{\bar{A}}$$

(۳) δ_A نیم پیوسته‌ی پایین است اگر و تنها اگر A بسته باشد.

برهان.

(۱) فرض کنید δ_A محدب باشد. آنگاه برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in [0,1]$ داریم:

$$\delta_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \delta_A(x) + (1-\lambda)\delta_A(y) = 0$$

بنابراین

$$\delta_A(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0.$$

حال با توجه به تعریف تابع شاخص داریم:

$$\lambda x + (۱ - \lambda)y \in A$$

از این رو A محدب است.
برای اثبات عکس فرض کنید A محدب باشد. حال اگر $x, y \notin A$ آنگاه

$$\delta_A(\lambda x + (۱ - \lambda)y) = \lambda\delta_A(x) + (۱ - \lambda)\delta_A(y) = \infty.$$

بنابراین δ_A محدب است.
در غیر این صورت اگر $x, y \in A$ آنگاه با توجه به محدب بودن A داریم:

$$\lambda x + (۱ - \lambda)y \in A.$$

هم چنین با توجه به تعریف تابع شاخص داریم:

$$\delta_A(\lambda x + (۱ - \lambda)y) = ۰ = \lambda\delta_A(x) + (۱ - \lambda)\delta_A(y).$$

بنابراین δ_A محدب است.

(۳) فرض کنید $A = \emptyset$ باشد. در این صورت داریم:

$$\bar{\delta_A} = \delta_{\bar{A}}$$

حال اگر $A \neq \emptyset$ آنگاه

$$\begin{aligned} \operatorname{epi}(\bar{\delta_A}) = \overline{\operatorname{epi}(\delta_A)} &= A \times \overline{[۰, +\infty)} \\ &= \bar{A} \times [۰, +\infty) \\ &= \operatorname{epi}(\delta_{\bar{A}}). \end{aligned}$$

(۳) با استفاده از قضیه‌ی ۱.۶.۱ حکم برقرار است. $\square$

تعریف ۴.۶.۱. تابع عملکرد: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از X باشد. در این صورت تابع عملکرد که مزدوج، تابع شاخص یک مجموعه است به صورت

$$\sigma_A \colon X^* \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$\sigma_A(x^*) = \sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - \delta_A(x)\} = \delta_A^*(x^*)$$

تعریف می‌شود.
هم چنین اگر $x \in A$ آنگاه با توجه به تعریف تابع شاخص داریم:

$$\sigma_A(x^*) := \sup\langle x^*, x\rangle.$$

ملاحظه ۲.۶.۱. مخروط نرمال با استفاده از تابع عملکرد به صورت

$$N_A(x) = \{x^* \in X^* \colon \sigma_A(x^*) = \langle x^*, x\rangle\}$$

تعریف می‌شود.

نکته ۱.۶.۱. تابع عملکرد یک تابع زیرخطی است.

قضیه ۵.۶.۱. اگر $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ حقیقی باشد. آنگاه

f محدب و نیم‌پیوسته‌ی پایین است اگر و تنها اگر $f = f^{**}$

هم چنین داریم:

$$\operatorname{cl} f = f^{**}.$$

برهان. به [۳۳] رجوع شود. $\square$

تعریف ۵.۶.۱. نیم‌پیوسته‌ی ضعیف پایین: تابعک T روی فضای باناخ X نیم‌پیوسته‌ی ضعیف پایین است. هرگاه

$$T(x) \leq \liminf T(x_n)$$

وقتی که $x_n \to x$ به طور ضعیف در X.

قضیه ۶.۶.۱. فرض کنید $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. در این صورت f^* محدب و نیم‌پیوسته‌ی پایین ضعیف ستاره است.

برهان. به [۴۴] رجوع شود. $\square$

نتیجه ۱.۶.۱. تابع σ_A محدب و نیم‌پیوسته‌ی پایین ضعیف ستاره است.

۷.۱ درون و درون جبری یک مجموعه

تعریف ۱.۷.۱. درون جبری: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از X باشد. در این صورت درون جبری یک مجموعه به صورت

$$\operatorname{core}(A) := \{a \in A \mid (\forall\, x \in X)(\exists\, \epsilon > ۰)\ s.t\ (\forall\, \lambda \in [-\epsilon, \epsilon])\ a + \lambda x \in A\}$$

تعریف می‌شود.

لم ۱.۷.۱. فرض کنید A محدب باشد. اگر $\operatorname{core}(A) \neq \emptyset$ آنگاه به ازای هر $\lambda \in (۰, ۱]$ داریم:

$$\lambda \operatorname{core}(A) + (۱ - \lambda) A \subseteq \operatorname{core}(A)$$

که نتیجه می‌دهد $\operatorname{core}(A)$ محدب است.

برهان. فرض کنید $\lambda \in (\circ, 1]$، $y \in A$، $x \in \mathrm{core}(A)$ و $z \in X$. آنگاه $\mu > \circ$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $\mu \in [\circ, \epsilon]$، $x + \mu z \in A$. بنابراین

$$\lambda x + (1 - \lambda) y + \lambda \mu z = \lambda (x + \mu z) + (1 - \lambda) y \in A.$$

در نتیجه $\mathrm{core}(A)$ محدب است. □

لم ۲.۷.۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از X باشد. آنگاه

$$\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{core}(A).$$

برهان. فرض کنید $x \in \mathrm{int}(A)$ از آنجایی که عمل فضای برداری بسته است (اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$ آنگاه $x_n + y_n \to x + y$ و $x_n y_n \to xy$). آنگاه $\epsilon > \circ$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $\epsilon \geq \lambda \geq \circ$ داریم:

$$x + \lambda y \in A.$$

در نتیجه $x \in \mathrm{core}\,(A)$. بنابراین

$$\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{core}(A).$$

□

لم ۳.۷.۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ی محدبی از X باشد. در این صورت

(۱) اگر $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ آنگاه به ازای هر $\lambda \in (\circ, 1]$ داریم:

$$\lambda \,\mathrm{int}(A) + (1 - \lambda)\,\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{int}(A).$$

(۲) $\mathrm{int}(A)$ و $\mathrm{cl}(A)$ محدب هستند.

(۳) اگر $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ آنگاه

$$\mathrm{int}(A) = \mathrm{core}(A).$$

برهان. (۱) فرض کنید $y \in \mathrm{cl}(A)$، $x \in \mathrm{int}(A)$ و $\lambda \in (\circ, 1]$. آنگاه یک همسایگی U از $\circ$ در X وجود دارد به طوری که $x + U \subseteq A$. از آنجایی که عمل فضای برداری پیوسته است. همسایگی‌های V و W از $\circ$ در X وجود دارند به طوری که

$$\frac{(1 - \lambda)}{\lambda} V + \frac{1}{\lambda} W \subseteq U.$$

هم چنین $z \in A$ وجود دارد به طوری که $y - z \in V$. در این صورت به ازای هر $w \in W$ داریم:

$$\lambda x + (1 - \lambda) y + w = \lambda \left(x + \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} (y - x) + \frac{1}{\lambda} w \right) + (1 - \lambda) z \in A$$

بنابراین

$$\lambda \operatorname{int}(A) + (۱ - \lambda) \operatorname{cl}(A) \subseteq \operatorname{int}(A).$$

(۲) محدب بودن $\operatorname{int}(A)$ از (۱) نتیجه می‌شود.
برای اثبات محدب بودن $\operatorname{cl}(A)$، فرض کنید $x, y \in \operatorname{cl}(A)$، در این صورت دنباله‌های x_n و y_n همگرا به x و y وجود دارند به طوری که به ازای هر $۰ < \lambda < ۱$ داریم:

$$\lambda x_n + (۱ - \lambda) y_n \to \lambda x + (۱ - \lambda) y$$

بنابراین $\operatorname{cl}(A)$ محدب است.
(۳) با استفاده از لم ۲.۷.۱ داریم:

$$\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{core}(A).$$

فرض کنید $x \in \operatorname{core}(A)$ و $y \in \operatorname{int}(A)$، آنگاه $z \in A$ وجود دارد که برای بعضی $\lambda \in (۰, ۱]$ داریم:

$$x = \lambda y + (۱ - \lambda) z$$

حال با توجه به (۱) داریم:

$$x \in \operatorname{int}(A)$$

بنابراین

$$\operatorname{int}(A) = \operatorname{core}(A).$$

□

قضیه ۱.۷.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ محدب و نیم پیوسته‌ی پایین باشد. آنگاه

$$\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) = \operatorname{core}(\operatorname{dom} f)$$

و f روی $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ پیوسته است.

برهان. به [۶] رجوع شود. □

مثال ۱.۷.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و A زیرمجموعه‌ی محدب و بسته‌ای از X باشد. آنگاه

$$\operatorname{int}(A) = \operatorname{int}(\operatorname{dom} \delta_A) = \operatorname{core}(\operatorname{dom} \delta_A) = \operatorname{core}(A).$$

۸.۱ پیچش اینفیمال و منظم خطی کراندار

تعریف ۱.۸.۱. پیچش اینفیمال: پیچش اینفیمال دو تابع $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ به صورت

$$(f \oplus g)(x) := \inf\{f(y) + g(z)\colon y, z \in X,\, y + z = x\}$$
$$:= \inf\{f(y) + g(z)\colon y, z \in X,\, y + z = x \quad \text{و} \quad g(z), f(y) < +\infty\}$$

تعریف می‌شود. پیچش اینفیمال f به g کامل است هرگاه برای هر $x \in X$ رابطه‌ی بالا برقرار باشد.

گزاره ۱.۸.۱. اگر f و g محدب و نیم‌پیوسته‌ی پایین باشند. آنگاه $f \oplus g$ محدب و نیم‌پیوسته‌ی پایین است.

برهان. به [۲۸] رجوع شود. □

قضیه ۱.۸.۱. قضیه‌ی ساندویچ: فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. و $p, q\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ توابع حقیقی و محدب، به طوری که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$-q(x) \leq p(x).$$

علاوه بر این اگر q در برخی نقاط $\widehat{x} \in (\operatorname{int} \operatorname{dom} q) \cap \operatorname{dom} p \neq \emptyset$ پیوسته باشد. آنگاه $x^* \in X^*$ و $c \in \mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که:

$$\forall\, x \in X \qquad -q(x) \leq \langle x^*, x\rangle + c \leq p(x).$$

برهان. به [۳۴] رجوع شود. □

تعریف ۲.۸.۱. منظم خطی کراندار: فرض کنید C و D دو زیرمجموعه‌ی محدب بسته‌ای از X باشند. آنگاه به جفت $\{C, D\}$ منظم خطی کراندار گفته می‌شود اگر برای هر زیرمجموعه‌ی کراندار S از X عدد $K_S > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in S$ داشته باشیم:

$$d(x, C \cap D) \leq K_S \max\{d(x, C), d(x, D)\}.$$

جایی که برای هر $x \in X$ و هر زیرمجموعه‌ی غیر تهی C از X داریم:

$$d(x, C) := \inf\{\|x - c\| : c \in C\}.$$

تعریف ۳.۸.۱. CHIP : فرض کنید C و D دو زیرمجموعه‌ی محدب بسته‌ای از X باشند. هم چنین اگر $C \cap D \neq \emptyset$ و $x \in C \cap D$. آنگاه جفت $\{C, D\}$، CHIP قوی (CHIP) در x دارد اگر

$$N_{C\cap D}(x) = N_C(x) + N_D(x)$$

هم چنین می‌گوییم جفت $\{C, D\}$، دارای CHIP قوی است اگر $\{C, D\}$ در هر نقطه از $C \cap D$، CHIP قوی (CHIP) داشته باشد.

قضیه ۱.۸.۲. منظم خطی کراندار، CHIP قوی را نتیجه می‌دهد.

برهان. به [۵] رجوع شود. □

فصل ۲

شرط بستار ساده برای فرمول فصل مشترک مخروط نرمال

۱.۲ مقدمه

در این فصل شرایط برقراری فرمول فصل مشترک مخروط نرمال را بررسی خواهیم کرد. با استفاده از پیچش اینفیمال و مخروط $(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g)$ که زیرفضای بسته است نشان می‌دهیم $(\operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} g^*)$ مخروط محدب ضعیف ستاره‌ی بسته است. هم چنین نشان می‌دهیم فرمول فصل مشترک مخروط نرمال، فرمول زیردیفرانسیل، هنگامی‌که $(\operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} g^*)$ مخروط محدب ضعیف ستاره‌ی بسته و بالعکس برقرار است. که f و g، توابع شاخص در نظر گرفته شده‌اند.

۲.۲ مزدوج پیچش اینفیمال و پیچش اینفیمال دو تابع مزدوج

در این بخش به ویژگی‌های مزدوج پیچش اینفیمال و پیچش اینفیمال دو تابع مزدوج می پردازیم. نشان می‌دهیم که اگر دو تابع محدب و نیم پیوسته‌ی پایین باشند آنگاه جمع اپی‌گراف مزدوج دو تابع، ضعیف ستاره‌ی بسته است. هم‌چنین خواهیم گفت پیچش اینفیمال دو تابع کامل است اگر مخروط $(\mathrm{dom}\, f - \mathrm{dom}\, g)$ زیرفضای خطی بسته باشد.

گزاره ۱.۲.۲. فرض کنید f و g توابع حقیقی روی X باشند. آنگاه گزاره‌های زیر برقرار هستند.

(۱) $(f \oplus g)^* = f^* + g^*$ و $(f^* \oplus g^*)^* = f^{**} + g^{**}$.

(۲) $(f+g)^* \leq f^* \oplus g^*$.

(۳) فرض کنید f و g محدب و f در برخی نقاط $x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$ پیوسته باشد. آنگاه

$$(f+g)^* = f^* \oplus g^*$$

هم چنین $f^* \oplus g^*$ روی دامنه‌ی مؤثرش کامل است. این یعنی به ازای هر x^* در دامنه مؤثر داریم:

$$f^* \oplus g^*(x^*) = \min_{y \in X^*} \{f^*(y^*) + g^*(x^* - y^*)\}.$$

(۴) اگر f و g محدب و نیم‌پیوسته‌ی پایین باشند. آنگاه

$$(f+g)^* = \mathrm{cl}\,(f^* \oplus g^*) \qquad \text{و} \qquad \mathrm{epi}\,(f+g)^* = \overline{\mathrm{epi}\, f^* + \mathrm{epi}\, g^*}^{w^*}.$$

برهان. (۱) با توجه به تعریف تابع مزدوج و پیچش اینفیمال داریم:

$$\begin{aligned}
(f \oplus g)^*(x^*) &= \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x\rangle - f \oplus g(x)\} \\
&= \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x\rangle - \inf_{y \in X}\{f(y) + g(x-y)\}\} \\
&= \sup_{x \in X} \sup_{y \in X} \{\langle x^*, x\rangle - f(y) - g(x-y)\} \\
&= \sup_{y \in X} \{\langle x^*, y\rangle - f(y)\} + \sup_{x,y \in X} \{\langle x^*, x-y\rangle - g(x-y)\} \\
&= f^*(x^*) + g^*(x^*).
\end{aligned}$$

قسمت دوم به صورت مشابه اثبات می‌شود.

(۲) فرض کنید $x^*, u^* \in X^*$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}
(f+g)^*(x^*) &= \sup_{z \in X} \{\langle u^*, z\rangle + \langle x^* - u^*, z\rangle - f(z) - g(z)\} \\
&\leq \sup_{x \in X} \{\langle u^*, x\rangle - f(x)\} + \sup_{y \in X} \{\langle x^* - u^*, y\rangle - g(y)\} \\
&= f^*(u^*) + g^*(x^* - u^*).
\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به تعریف پیچش اینفیمال داریم:

$$(f+g)^* \leq f^* \oplus g^*.$$

(۳) فرض کنید $x^* \in X^*$ و $\beta := (f+g)^*(x^*)$. آنگاه هنگامی که $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ داریم:

$$\beta > -\infty.$$

اگر $\beta = +\infty$ آنگاه با استفاده از (۲) داریم:

$$f^* \oplus g^*(x^*) = +\infty$$

در غیر این صورت داریم:

$$x^* \in \operatorname{dom}(f+g)^*$$

در این حالت مجموعه‌های $p(x)$ و $q(x)$ را به ازای هر $x \in X$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$p(x) = g(x) \quad \text{و} \quad q(x) = f(x) - \langle x^*, x\rangle + \beta$$

آنگاه q در $x \in \operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q$ پیوسته است.
برای هر $x \in X$ داریم:

$$\langle x^*, x\rangle - (f+g)(x) \leq (f+g)^*(x^*) = \beta$$

در این صورت به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$-q(x) \leq p(x).$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی ساندویچ (قضیه‌ی ۱.۸.۱) $u^* \in X^*$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$-q(x) = \langle x^*, x\rangle - f(x) - \beta \leq \langle u^*, x\rangle + \alpha \leq p(x) = g(x).$$

حال با توجه به نامساوی اول داریم:

$$f^*(x^* - u^*) \leq \alpha + \beta \tag{۱.۲}$$

از این رو

$$x^* - u^* \in \operatorname{dom} f^*.$$

در حالی که دومین نامساوی نتیجه می‌دهد:

$$g^*(u^*) \leq -\alpha \tag{۲.۲}$$

از این رو

$$u^* \in \operatorname{dom} g^*.$$

با جمع دو نامساوی (۱.۲) و (۲.۲) داریم:

$$f^*(x^* - u^*) + g^*(u^*) \leq \beta.$$

اما با استفاده از (۲) داریم:

$$\beta = (f+g)^*(x^*) \leq (f^* \oplus g^*)(x^*) \leq f^*(x^* - u^*) + g^*(u^*).$$

بنابراین

$$(f+g)^*(x^*) = (f^* \oplus g^*)(x^*) = f^*(x^* - u^*) + g^*(u^*).$$

این یعنی پیچش اینفیمال $f^* \oplus g^*$ در x^* کامل است.

(۴) فرض کنید f و g توابع محدب حقیقی و نیم‌پیوسته‌ی پایین باشند. از آنجایی که $f = f^{**}$، $\mathrm{cl} f = f^{**}$، $g = g^{**}$ هم چنین از آنجایی که $f^* \oplus g^*$ محدب است. بنابراین با توجه به (۱) داریم:

$$(f+g)^* = (f^{**} + g^{**})^* = (f^* \oplus g^*)^{**} = \mathrm{cl}(f^* \oplus g^*)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \operatorname{epi}(f+g)^* &= \operatorname{epi}(\mathrm{cl}(f^* \oplus g^*)) \\ &= \overline{\operatorname{epi}(f^* \oplus g^*)}^{w^*} \\ &= \overline{\operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} g^*}^{w^*}. \end{aligned}$$

جمع ضعیف ستاره‌ی بسته‌ی اپی‌گراف‌های خاص برابر است با، مجموع ضعیف ستاره‌ی بسته‌ی اپی‌گراف‌ها. □

طبق آنچه گفته شد دیدیم که اگر توابع f و g حقیقی، محدب و نیم‌پیوسته‌ی پایین و f در برخی نقاط $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ پیوسته باشد. هرگاه $(u^*, \gamma) \in \operatorname{epi}(f+g)^*$ هم چنین اگر پیچش اینفیمال روی $\operatorname{dom}(f+g)^*$ کامل باشد. آنگاه برای برخی $v^* \in X^*$ داریم:

$$\gamma \geq (f+g)^*(u^*) = f^* \oplus g^*(u^*) = f^*(v^*) + g^*(u^* - v^*). \qquad (۳.۲)$$

هم چنین داریم:

$$(u^*, \gamma) \in \operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} g^*$$

در حالی که طرف دیگر طبق گزاره‌ی ۱.۲.۲ قسمت (۱) برقرار است. بنابراین

$$\operatorname{epi}(f+g)^* = \operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} f^*$$

بدین معنی که در این حالت ضعیف ستاره بسته در (۴) زائد است.

قضیه ۱.۲.۲. هرگاه پیچش اینفیمال کامل باشد. آنگاه

$$\operatorname{epi}(f \oplus g) = \operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g.$$

برهان. فرض کنید پیچش اینفیمال کامل باشد. بنابراین برای هر $x \in X$ داریم:

$$(f \oplus g)(x) := \inf\{f(y) + g(z) \colon y, z \in X,\ y + z = x\}.$$

فرض کنید $(v, \beta) \in \operatorname{epi} f$ و $(w, \delta) \in \operatorname{epi} g$، آنگاه با توجه به تعریف اپی‌گراف داریم:

$$f(v) \leq \beta \quad \text{و} \quad g(w) \leq \delta$$

با جمع طرفین داریم:

$$(f \oplus g)(v + w) \leq f(v) + g(w) \leq \beta + \delta$$

بنابراین

$$(v + w, \beta + \delta) \in \operatorname{epi}(f \oplus g).$$

برای اثبات عکس فرض کنید $(v, \beta) \in \operatorname{epi}(f \oplus g)$ می‌خواهیم نشان دهیم:

$$(v, \beta) \in \operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g$$

حال با توجه به تعریف ۱.۸.۱، $u \in X$ وجود دارد به طوری که

$$(f \oplus g)(v) = f(u) + g(v - u) \leq \beta$$

از این رو

$$g(v - u) \leq \beta - f(u)$$

بنابراین

$$(v - u, \beta - f(u)) \in \operatorname{epi} g \quad \text{و} \quad (u, f(u)) \in \operatorname{epi} f$$

از این رو

$$(u, f(u)) + (v - u, \beta - f(u)) \in \operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g$$

حال نتیجه می‌گیریم:

$$(v, \beta) \in \operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g.$$

بنابراین

$$\operatorname{epi}(f \oplus g) = \operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g.$$

□

لم ۱.۲.۲. فرض کنید X و Y فضای فرشه و تابع $H\colon X\times Y\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$، cs–محدب و حقیقی، هم چنین فرض کنید $h\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ تابع معینی به صورت

$$\forall\, x\in X \quad h(x)=\inf_{y\in Y} H(x,y)$$

و

$$M=\text{مخروط}\,(\operatorname{dom} h)$$

یک زیرفضای خطی بسته از X باشد. هم چنین اگر $h(\circ)>-\infty$ آنگاه $h\mid_M$ در $\circ$ پیوسته است.

برهان. تابع S و T را به صورت

$$S\colon \mathbb{R}\rightrightarrows X\times Y$$
$$S(t)=\{(x,y)\in X\times Y\colon H(x,y)\le t \quad \forall\, t\in\mathbb{R}\}$$

و

$$T\colon X\times Y\to X$$
$$T(x,y)=x$$

تعریف کنید. گراف S محدب است زیرا گراف S^{-1} مساوی با $\operatorname{epi} H$ یک زیرمجموعه‌ی محدب $X\times Y\times\mathbb{R}$ ، گراف T محدب است و S ناکاهشیست؛ $S(t)\subseteq S(u)$ زمانی که $t\le u$ تحت این ویژگی و خواص S ایجاد شده توسط H اعمال این ویژگی این مفهوم را می‌رساند که اگر $\mathbb{R}\ni t>h(\circ)$ آنگاه $TOS(t)$ یک M همسایگی $\circ$ است که قضیه اثبات می‌شود. زیرا $h\mid_M$ از بالا کراندار روی $TOS(t)$ است.

$$\{x\in X\colon h(x)\le t\}\supseteq\{x\in X\colon \exists\, y\in Y \quad H(x,y)\le t\}=TOS(t).$$

□

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید X یک فضای فرشه باشد. و هم چنین $f,g:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ توابع cs–محدب و حقیقی به طوری که $\operatorname{dom} f^*\cap\operatorname{dom} g^*\neq\emptyset$ هم چنین اگر

$$M=\text{مخروط}\,(\operatorname{dom} f+\operatorname{dom} g-\{x_\circ\})$$

یک زیرفضای بسته از X باشد. آنگاه $(f\oplus g)\mid_M$ در $x_\circ$ پیوسته است. و

$$(f\oplus g)(x_\circ)=\max_{x^*\in X^*}\left(\langle x^*,x_\circ\rangle-f^*(x^*)-g^*(x^*)\right).$$

برهان. حالتی را در نظر بگیرید که $x_\circ=\circ$ و با اعمال لم ۱.۲.۲ طوری که H به صورت

$$H\colon X\times X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$
$$H(x,y)=f(x)+g(x-y)$$

تعریف شود حکم برقرار است. □

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید X یک فضای فرشه و $f,g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ توابع cs–محدب و حقیقی به طوری که مخروط $(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g)$ زیرفضای خطی بسته از X باشد. آنگاه پیچش اینفیمال f^* به g^* کامل است. و

$$(f+g)^* = f^* \oplus g^*$$

برهان. تعریف کنید $\breve{g} : x \to g(-x)$. فرض کنید $x^* \in X^*$ و توجه داشته باشید که

$$\operatorname{dom}(f - x^*) + \operatorname{dom} \breve{g} = \operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g$$

به طوری که به موجب قضیه‌ی ۲.۲.۲ داریم:

$$((f - x^*) \oplus \breve{g})(\circ) = \max_{x^* \in X^*} (\langle x^*, \circ\rangle - (f - x^*)^*(x^*) - \breve{g}^*(x^*))$$

بنابراین

$$(f+g)^*(x^*) = \min_{y^* \in X^*} (f^*(y^*) + g^*(x^* - y^*))$$

که طبق گزاره‌ی ۱.۲.۲ کامل است. □

با توجه به آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم اگر مخروط $(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g)$ یک زیرفضای بسته باشد آنگاه پیچش اینفیمال f^* و g^* کامل است. هم چنین داریم:

$$f^* \oplus g^* = (f+g)^*$$

۳.۲ فرمول فصل مشترک مخروط نرمال

در ابتدای این بخش لمی (لم ۱.۳.۲) را بیان می‌کنیم. که از قضیه‌ی جداسازی (قضیه‌ی ۱.۴.۱) پیروی، و نتیجه‌ی آن نقش مهمی در گسترش شرط بستار جدید ایفا می‌کند. در ادامه فرمول فصل مشترک مخروط نرمال را برای مجموعه‌ی محدب بسته، و هم چنین یک بسط کلیدی از فرمول فصل مشترک مخروط دوگان، برای مخروط محدب بسته‌ی C و D به طوری که

$$(C \cap D)^* = \operatorname{cl}(C^* + D^*)$$

و لزوماً مخروط نیستند بدست می‌آوریم. این تعمیم از نظر اپی‌گراف، تابع عملکرد C و D بیان شده است. آنگاه شرط بستار منجر به به دست آمدن فرمول فصل مشترک مخروط نرمال می‌شود.

گزاره ۱.۳.۲. اگر $f : X \to \mathbb{R}$ یک تابع زیرخطی باشد آنگاه f محدب است. علاوه بر این f زیرخطی است اگر و تنها اگر $\operatorname{epi} f$ یک مخروط محدب، به طوری که $(\circ, -1) \notin \operatorname{epi} f$.

برهان. فرض کنید f تابع زیرخطی باشد. پس با توجه تعریف تابع زیرخطی و تابع محدب، محدب بودن f بدیهی است. بنابراین $\operatorname{epi} f$ یک مجموعه‌ی محدب حاوی $(0,0)$ است.
حال نشان می‌دهیم $\operatorname{epi} f$ مخروط است. فرض کنید $(x,t) \in \operatorname{epi} f$ و $\lambda > 0$ آنگاه

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \leq \lambda t$$

بنابراین

$$\lambda(x,t) \in \operatorname{epi} f$$

از این رو $\operatorname{epi} f$ مخروط، و با توجه به محدب بودن تابع f، $\operatorname{epi} f$ مخروط محدب است.
حال از آنجایی که $f(0) = 0 > -1$ در نتیجه داریم:

$$(0,-1) \notin \operatorname{epi} f$$

فرض کنید $\operatorname{epi} f$ یک مخروط محدب به طوری که $(0,-1) \notin \operatorname{epi} f$. در نتیجه f محدب است ($\operatorname{epi} f$ محدب). برای $\lambda > 0$ و $x \in X$ داریم:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

بنابراین برای $x, y \in X$ داریم:

$$f(x+y) = 2f(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y) \leq f(x) + f(y)$$

اگر $f(0) < 0$ آنگاه برای بعضی $t > 0$ داریم:

$$(0,-t) \in \operatorname{epi} f.$$

از این رو $(0,-1) \in \operatorname{epi} f$ یک تناقض است. بنابراین

$$f(0) = 0$$

در این صورت نتیجه می‌گیریم f زیرخطی است. □

گزاره ۲.۳.۲. $\operatorname{epi} \sigma_A$ مخروط محدب است.

برهان. از آنجایی که σ_A تابع زیرخطی است با استفاده از گزاره‌ی ۱.۳.۲ گزاره برقرار است. □

لم ۱.۳.۲. اگر C و D زیرمجموعه‌های محدب بسته‌ای از X باشند. آنگاه

$$C \cap D \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad (0,-1) \notin \operatorname{cl}(\operatorname{epi} \sigma_C + \operatorname{epi} \sigma_D).$$

برهان. فرض کنید $(u,\alpha) \in (\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D) = \operatorname{epi}\delta_C^* + \operatorname{epi}\delta_D^*$ آنگاه $v,w \in X^*$ و $\beta,\delta \in \mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که

$$(v,\beta) \in \operatorname{epi}\delta_D^* \quad \text{و} \quad (w,\delta) \in \operatorname{epi}\delta_C^*$$

قرار دهید:

$$u = v + w \quad \text{و} \quad \alpha = \beta + \delta$$

حال با توجه به تعریف اپی‌گراف برای هر $x \in D$ و $x \in C$ داریم:

$$v(x) \leq \beta \quad \text{و} \quad w(x) \leq \delta$$

فرض کنید $x \in A := C \cap D$ آنگاه

$$u(x) = (v+w)(x) \leq \beta + \delta = \alpha$$

بنابراین

$$(u,\alpha) \in \operatorname{epi}\sigma_A.$$

از آنجایی که $\operatorname{epi}\sigma_A = \operatorname{epi}\delta_A^*$ ضعیف ستاره‌ی بسته است بنابراین

$$\operatorname{cl}(\operatorname{epi}\delta_D^* + \operatorname{epi}\delta_C^*) = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}\sigma_D + \operatorname{epi}\sigma_C) \subset \operatorname{epi}\sigma_A = \operatorname{epi}\delta_A^* \qquad (۴.۲)$$

حال چون $C \cap D \neq \emptyset$ و $(u,\alpha) \in \operatorname{epi}\sigma_A$ بنابراین

$$u(x) \leq \alpha.$$

برای رسیدن به یک تناقض فرض کنید $(۰,-۱) \in \operatorname{epi}\sigma_A$ در این صورت باید داشته باشیم:

$$۰(x) \leq -۱$$

که یک تناقض است. بنابراین

$$(۰,-۱) \notin \operatorname{epi}\sigma_A$$

در نتیجه با توجه به (۴.۲) داریم:

$$(۰,-۱) \notin \operatorname{cl}(\operatorname{epi}\delta_D^* + \operatorname{epi}\delta_C^*).$$

برای اثبات عکس فرض کنید $(۰,-۱) \notin \operatorname{cl}(\operatorname{epi}\delta_D^* + \operatorname{epi}\delta_C^*)$ آنگاه طبق قضیه‌ی ۱.۴.۱ (قضیه‌ی جداسازی)، $(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R}$، $(x,\alpha) \neq (۰,۰)$ وجود دارد به طوری که $-\alpha < ۰$ و

$$\forall\ (u,\gamma) \in \operatorname{cl}(\operatorname{epi}\delta_D^* + \operatorname{epi}\delta_C^*) \quad u(x) + \gamma\alpha \geq ۰$$

با تقسیم رابطه‌ی بالا در $-\frac{۱}{\alpha}$ و قرار دادن $\bar{x}$ به جای $\frac{x}{\alpha}$ داریم:

$$\forall\ (u,\gamma) \in \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\delta_D^* + \mathrm{epi}\,\delta_C^*) \quad u(-\bar{x}) - \gamma \leq ۰$$

بنابراین برای هر $v \in \mathrm{dom}\,\delta_D^*$ و $w \in\ \mathrm{dom}\,\delta_C^*$ داریم:

$$(v+w, \delta_D^*(v) + \delta_C^*(w)) \in \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\delta_D^* + \mathrm{epi}\,\delta_C^*)$$

از این رو

$$(v+w)(-\bar{x}) - \delta_D^*(v) - \delta_C^*(w) \leq ۰$$

حال اگر $w = ۰$ آنگاه برای هر $v \in\ \mathrm{dom}\,\delta_D^*$ داریم:

$$v(-\bar{x}) - \delta_D^*(v) \leq ۰$$

از آنجایی که

$$\delta_D^{**}(-\bar{x}) = \sup_v \{v(-\bar{x}) - \delta_D^*(v)\} = \sup_v \{v(-\bar{x}) - [v(x) - \delta_D(x)]\} = \delta_D(-\bar{x})$$

و δ_D نیم‌پیوسته‌ی پایین است. با توجه به رابطه‌ی بالا داریم:

$$\delta_D(-\bar{x}) = \delta_D^{**}(-\bar{x}) = \sup_v [v(-\bar{x}) - \delta_D^*(v)] \leq ۰$$

در نتیجه $\delta_D(-\bar{x}) = ۰$. حال با توجه به تعریف تابع عملکرد داریم:

$$-\bar{x} \in D.$$

هم چنین به طور مشابه داریم:

$$-\bar{x} \in C.$$

بنابراین

$$-\bar{x} \in C \cap D$$

در نتیجه

$$C \cap D \neq \emptyset.$$

□

لم ۲.۳.۲. فرض کنید C و D زیرمجموعه‌های محدب بسته‌ای از X باشند. اگر $C \cap D \neq \emptyset$ آنگاه

$$\mathrm{epi}\,\sigma_{C\cap D} = \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_C + \mathrm{epi}\,\sigma_D).$$

برهان. فرض کنید $A := C \cap D \neq \emptyset$ در اثبات لم ۱.۳.۲ دیدیم که از رابطه‌ی شمول داریم:

$$\mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C) \subset \mathrm{epi}\,\sigma_A.$$

برای نشان دادن عکس شمول فرض کنید $(u, \alpha) \notin \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C)$ نشان می‌دهیم:

$$(u, \alpha) \notin \mathrm{epi}\,\sigma_A$$

از آنجایی که $A = C \cap D \neq \emptyset$ با توجه به لم ۱.۳.۲ داریم:

$$(۰, -۱) \notin \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C)$$

بنابراین

$$B \cap \left(\mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C)\right) = \emptyset$$

جایی که $B := \{\delta(u, \alpha) + (۱ - \delta)(۰, -۱) \in X^* \times \mathbb{R} \mid \delta \in [۰, ۱]\}$ قسمت اتصال نقاط (u, α) و $(۰, -۱)$ است.

در غیر این صورت $\delta_۰ \in (۰, ۱)$ وجود دارد به طوری که

$$\delta_۰(u, \alpha) + (۱ - \delta_۰)(۰, -۱) \in \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C)$$

بنابراین

$$(\delta_۰ u, \delta_۰ \alpha - (۱ - \delta_۰)) \in \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C).$$

هم چنین

$$\{۰\} \times \mathbb{R}_+ \subset \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C)$$

آنگاه

$$(\delta_۰ u, \delta_۰ \alpha) = (\delta_۰ u, \delta_۰ \alpha - (۱ - \delta_۰)) + (۰, ۱ - \delta_۰) \in \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C)$$

در نتیجه

$$(u, \alpha) = \frac{۱}{\delta_۰}(\delta_۰ u, \delta_۰ \alpha) \in \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C) \qquad (۵.۲)$$

حال با توجه به اینکه

$$(u, \alpha) \notin \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C)$$

آنگاه رابطه‌ی (۵.۲) یک تناقض است. بنابراین

$$B \cap \left(\mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C)\right) = \emptyset$$

اکنون با توجه به قضیه‌ی جداسازی $(x, \beta) \in X \times \mathbb{R}$ طوری که $(x, \beta) \neq (۰, ۰)$ وجود دارد. در این صورت

$$\forall\, \delta \in [۰, ۱] \quad [\delta(u, \alpha) + (۱ - \delta)(۰, -۱)](x, \beta) < ۰$$

و

$$\forall\ (v,\gamma) \in \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_D + \mathrm{epi}\,\sigma_C) \quad v(x) + \gamma\beta \geq 0$$

اگر فرض کنید $\delta = 0$ آنگاه

$$\beta > 0$$

و اگر $\delta = 1$ آنگاه

$$u(x) + \alpha\beta < 0$$

بنابراین

$$u(\frac{-x}{\beta}) > \alpha.$$

با توجه به لم ۲.۳.۲ چون $C \cap D \neq 0$ داریم:

$$\tfrac{-x}{\beta} \in C \cap D = A$$

از آنجایی که $u(\frac{-x}{\beta}) > \alpha$ طبق تعریف اپی‌گراف داریم:

$$(u,\alpha) \notin \mathrm{epi}\,\sigma_A.$$

در نتیجه

$$\mathrm{epi}\,\sigma_{C\cap D} = \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_C + \mathrm{epi}\,\sigma_D).$$

□

نکته ۱.۳.۲. اگر C و D بسته و مخروط محدبی از X باشند. آنگاه

$$\mathrm{epi}\,\sigma_D(v) = \mathrm{epi}\,\delta_D^*(v) = \{(v, v(x)) \in X^* \times \mathbb{R} \mid \delta_D^*(v) \leq v(x)\} \tag{۶.۲}$$

و

$$D^* = \{x^* \in X^* \colon \langle x^*, x\rangle \geq 0\} \tag{۷.۲}$$

از تعاریف (۶.۲) و (۷.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\mathrm{epi}\,\sigma_D(v) = -D^* \times \mathbb{R}_+ \quad \text{و} \quad \mathrm{epi}\,\sigma_C(v) = -C^* \times \mathbb{R}_+$$

بنابراین

$$-\,(C\cap D)^* \times \mathbb{R}_+ = \mathrm{epi}\,\sigma_{C\cap D} = \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\,\sigma_C + \mathrm{epi}\,\sigma_D) = \mathrm{cl}[(-C^* - D^*) \times \mathbb{R}_+] \tag{۸.۲}$$

از این رو

$$(C \cap D)^* = \mathrm{cl}(C^* + D^*)$$

نتیجه می‌گیریم دوگان اشتراک دو مخروط محدب بسته، برابر با بستار مجموع دو مخروط دوگان است.

با توجه به معادله‌ی (۸.۲)، $(\mathrm{epi}\,\sigma_C + \mathrm{epi}\,\sigma_D)$ یک مخروط محدب است.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید که X یک فضای باناخ، C و D زیرمجموعه‌های محدب بسته‌ای از X باشند. اگر مجموعه‌ی $(\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D)$ ضعیف ستاره‌ی بسته باشد. آنگاه

$$\forall\, x \in C \cap D, \qquad N_{C\cap D}(x) = N_C(x) + N_D(x).$$

برهان. فرض کنید $x \in D$ و $v \in N_D(x)$ در این صورت داریم:

$$N_D(x) := \{v \in X^*\colon \sigma_D(v) = v(x)\} = \{v \in X^*\colon \langle y - x, v\rangle \leq 0,\ \forall\, y \in D\}$$

بنابراین

$$\sigma_D(v) = v(x).$$

و به صورت مشابه، برای $x \in C$ و $x \in C \cap D$ داریم:

$$\sigma_C(v) = v(x) \quad \text{و} \quad \sigma_{C\cap D}(v) = v(x).$$

از آنجایی که

$$\sigma_{C\cap D}(v) \supset \sigma_C(v) + \sigma_D(v)$$

بنابراین

$$N_{C\cap D}(x) \supset N_C(x) + N_D(x).$$

برای نشان دادن عکس شمول فرض کنید $v \in N_{C\cap D}(x)$ در این صورت طبق تعریف مخروط نرمال داریم:

$$\sigma_{C\cap D}(v) = v(x)$$

که با توجه به تعریف اپی‌گراف داریم:

$$(v, v(x)) \in \operatorname{epi}\sigma_{C\cap D}.$$

حال از آنجایی که

$$\operatorname{epi}\sigma_{C\cap D} = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D)$$

و چون $(\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D)$ ضعیف ستاره بسته است. بنابراین

$$(v, v(x)) \in \operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D.$$

دو عضو $(v_1, \alpha_1) \in \operatorname{epi}\sigma_C$ و $(v_2, \alpha_2) \in \operatorname{epi}\sigma_D$ وجود دارند به طوری که

$$\sigma_C(v_1) \leq \alpha_1 \quad \text{و} \quad \sigma_D(v_2) \leq \alpha_2 \tag{۹.۲}$$

قرار دهید:

$$v_1 + v_2 = v \quad \text{و} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = v(x)$$

با جمع طرفین (۹.۲) داریم:

$$v(x) = \alpha_۱ + \alpha_۲ \geq \sigma_C(v_۱) + \sigma_D(v_۲) \geq v_۱(x) + v_۲(x) = v(x)$$

در نتیجه

$$\sigma_C(v_۱) + \sigma_D(v_۲) = v(x).$$

اکنون برای هر $z \in D$ داریم:

$$\begin{aligned} \circ \geq v_۱(x) - \sigma_C(v_۱) &= (v - v_۲)(x) + \sigma_D(v_۲) - v(x) = \sigma_D(v_۲) - v_۲(x) \\ &\geq v_۲(z) - v_۲(x) = v_۲(z - x) \end{aligned}$$

که تعریفی از مخروط نرمال D بدست می‌آید. بنابراین

$$v_۲ \in N_D(x).$$

به طور مشابه داریم:

$$v_۱ \in N_C(x)$$

بنابراین

$$v \in N_C(x) + N_D(x)$$

در نتیجه

$$N_{C\cap D}(x) \subset N_C(x) + N_D(x).$$

نتیجه می‌گیریم:

$$N_{C\cap D}(x) = N_C(x) + N_D(x).$$

$\square$

نتیجه ۱.۳.۲. فرض کنید که C و D زیرمجموعه‌های محدب بسته‌ای از X باشند. هم چنین $\circ \in C \cap D$ و مجموعه‌ی $(\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D)$ ضعیف ستاره‌ی بسته باشد. آنگاه

$$(C \cap D)^* = C^* + D^*$$

برهان. با توجه به تعریف مخروط نرمال و مخروط دوگان داریم:

$$\begin{aligned} N_D(\circ) &= \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - \circ\rangle \leq \circ \quad \forall\, y \in D\} \\ &= -\{x^* \in X^* : \langle x^*, y - \circ\rangle \geq \circ \quad \forall\, y \in D\} \\ &= -(D)^* \end{aligned}$$

به صورت مشابه داریم:

$$N_C(\circ) = -C^* \quad \text{و} \quad N_{C\cap D}(\circ) = -(C \cap D)^*$$

از آنجایی که $(\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D)$ ضعیف ستاره بسته است. بنابراین

$$N_{C\cap D}(\circ) = N_C(\circ) + N_D(\circ)$$

از این رو

$$-(C\cap D)^* = N_{C\cap D}(\circ) = N_C(\circ) + N_D(\circ) = -(C^*) - (D^*) = -(C^* + D^*)$$

در نتیجه

$$(C\cap D)^* = C^* + D^*.$$

□

ملاحظه ۱.۳.۲. فرض کنید $f,g\colon X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ توابع محدب و نیم‌پیوسته‌ی پایین باشند آنگاه شرط داخلی کلاسیک $\operatorname{dom} g\cap\operatorname{dom} f\neq\emptyset$ نتیجه می‌دهد:

$$\circ\in\operatorname{core}(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g) \tag{۱۰.۲}$$

که به نوبه‌ی خود (۱۰.۲) نشان می‌دهد مخروط $(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g)$ زیرفضای بسته است.

با یک مثال نشان می‌دهیم، شرط بستار دوگان ضعیف‌تر از شرط داخلی است.

مثال ۱.۳.۲. فرض کنید $f=\delta_{[\circ,+\infty)}$ و $g=\delta_{(-\infty,\circ]}$. آنگاه $f^*=\sigma_{[\circ,+\infty)}$ و $g^*=\sigma_{(-\infty,\circ]}$ در نتیجه $\operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} g^* = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ یک مخروط محدب بسته است.
از آنجایی که $(\operatorname{int}\operatorname{dom} g)\cap\operatorname{dom} f=\emptyset$ بنابراین مخروط $(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g) = [\circ,\infty)$ زیرفضا نیست.

گزاره ۳.۳.۲. فرض کنید $f,g\colon X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ توابع محدب و نیم‌پیوسته‌ی پایین باشند به طوری که $\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} f\neq\emptyset$. اگر مخروط $(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g)$ زیرفضای بسته باشد آنگاه $(\operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} g^*)$ ضعیف ستاره‌ی بسته است.

برهان. از آنجایی که مخروط $(\operatorname{dom} f - \operatorname{dom} g)$ زیرفضای بسته است و با توجه به قضیه‌ی ۳.۲.۲ پیچش اینفیمال کامل است و داریم:

$$(f+g)^* = f^*\oplus g^*$$

به عنوان یک نتیجه دقیق داریم:

$$\operatorname{cl}(\operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} g^*) = \operatorname{epi}(f+g)^* = \operatorname{epi}(f^*\oplus g^*) = \operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} g^*$$

بنابراین $(\operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} g^*)$ ضعیف ستاره‌ی بسته است.

□

قضیه ۲.۳.۲. اگر C و D دو زیرمجموعه از X و $x \in C \cap D$ باشد. هم چنین اگر $0 \in \text{core}(C-D)$ (یا به طور خاص $(\text{int}D) \cap C \neq \emptyset$) داریم:

$$N_{C\cap D}(x) = N_C(x) + N_D(x).$$

برهان. چون $0 \in \text{core}(C-D)$ پس مخروط $(C-D)$ زیرفضای بسته است. در این صورت با توجه به گزاره‌ی ۳.۳.۲ $(\text{epi}\,\sigma_C + \text{epi}\,\sigma_D)$ ضعیف ستاره‌ی بسته است. بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۱.۳.۲ داریم:

$$N_{C\cap D}(x) = N_C(x) + N_D(x).$$

□

گزاره ۴.۳.۲. فرض کنید C و D زیرمجموعه‌های محدب و بسته‌ای از X باشند. مجموعه‌ی $(\text{epi}\,\sigma_C + \text{epi}\,\sigma_D)$ ضعیف ستاره‌ی بسته است اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) $(\text{int}D) \cap C \neq \emptyset$.

(۲) $0 \in \text{core}(C-D)$.

(۳) مخروط $(C-D)$ یک زیرفضای بسته باشد.

برهان. (۱) نتیجه می‌دهد (۲) و چرخشی نتیجه می‌دهد (۳) را.
حال با توجه به تعریف درون یک مجموعه

$$\text{int}D = \{x \mid \exists\ \epsilon > 0, x + \epsilon B \subseteq D\}$$

و درون جبری (تعریف ۱.۷.۱) اگر $0 \in \text{core}\,(C-D)$ آنگاه از (۱)، (۲) و با توجه به قضیه‌ی ۲.۳.۲ نتیجه می‌گیریم:

$$N_{C\cap D}(x) = N_C(x) + N_D(x) \tag{۱۱.۲}$$

حال با توجه به قضیه‌ی ۱.۳.۲، معادله‌ی (۱۱.۲) برقرار است هرگاه $\text{epi}\,\sigma_C + \text{epi}\,\sigma_D$ ضعیف ستاره‌ی بسته باشد. بنابراین $\text{epi}\,\sigma_C + \text{epi}\,\sigma_D$ ضعیف ستاره‌ی بسته است.
فرض کنید $f = \delta_C$ ، $g = \delta_D$ و مخروط $(C-D)$ یک زیرفضای بسته باشد. آنگاه با استفاده از قضیه‌ی ۳.۲.۲ زیرفضای بسته بودن مخروط، کامل بودن پیچش اینفیمال را نتیجه می‌دهد.
در این صورت و با توجه به $\delta_C^* = \sigma_C$ و $\delta_D^* = \sigma_D$ داریم:

$$\text{cl}(\text{epi}\,\sigma_C + \text{epi}\,\sigma_D) = \text{epi}\,(\delta_C + \delta_D)^* = \text{epi}\,(\sigma_C \oplus \sigma_D) = \text{epi}\,\sigma_C + \text{epi}\,\sigma_D$$

بنابراین مجموعه‌ی $(\text{epi}\,\sigma_C + \text{epi}\,\sigma_D)$ ضعیف ستاره‌ی بسته است. □

مثال زیر وضعیتی را نشان می‌دهد که شرایط (۳) − (۱) رد شده، در حالی که شرایط بسته بودن وجود دارد.

مثال ۲.۳.۲. فرض کنید $C := [\circ, \text{۱}]$ و $D := (-\infty, \circ]$ آنگاه

$$N_{C\cap D}(\circ) = \mathbb{R} = (-\infty, \circ] + [\circ, \infty) = N_C(\circ) + N_D(\circ)$$

و فرمول فصل مشترک مخروط نرمال برای هر $x \in C \cap D = \{\circ\}$ برقرار است در حالی که $(\mathrm{int} D) \cap C = \emptyset$ و مخروط $(C - D) = [\circ, \infty)$ زیرفضا نیست.
هر چند

$$\operatorname{epi} \sigma_C + \operatorname{epi} \sigma_D = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \max\{x, \circ\} \le t\} + \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$$

مخروط محدب بسته است.

۴.۲ زیردیفرانسیل و مخروط نرمال

قضیه ۱.۴.۲. فرض کنید $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ و $x \in X$ به طوری که $f(x) \in \mathbb{R}$، آنگاه $\partial f(x) \subset X^*$ مجموعه‌ی محدب و ضعیف ستاره‌ی بسته است.

برهان. فرض کنید $x_\text{۱}^*, x_\text{۲}^* \in \partial f(x)$ و $\lambda \in (\circ, \text{۱})$ آنگاه به ازای هر $y \in X$ داریم:

$$\langle x_\text{۱}^*, y - x\rangle \le f(y) - f(x) \quad \text{و} \quad \langle x_\text{۲}^*, y - x\rangle \le f(y) - f(x)$$

با ضرب رابطه‌ی اول در $\lambda > \circ$ و رابطه دوم در $\text{۱} - \lambda > \circ$ به ازای هر $y \in X$ داریم:

$$\langle \lambda x_\text{۱}^* + (\text{۱} - \lambda) x_\text{۲}^*, y - x\rangle \le f(y) - f(x),$$

بنابراین

$$\lambda x_\text{۱}^* + (\text{۱} - \lambda) x_\text{۲}^* \in \partial f(x).$$

در نتیجه $\partial f(x)$ محدب است.
فرض کنید $x^* \in X^* \backslash \partial f(x)$. آنگاه $x_\circ \in X$ وجود دارد به طوری که

$$\langle x^*, x_\circ - x\rangle > f(x_\circ) - f(x).$$

فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\langle x^*, x_\circ - x\rangle > \alpha > f(x_\circ) - f(x).$$

در این صورت $V := \{y^* \mid \langle y^*, x_\circ - x\rangle > \alpha\}$ یک همسایگی از x^* برای توپولوژی ضعیف ستاره است. از آنجایی که $V \cap \partial f(x) \neq \emptyset$ در نتیجه $\partial f(x)$ ضعیف ستاره بسته است.
روش دیگر برای اثبات ضعیف ستاره‌ی بسته بودن زیردیفرانسیل می‌توان فرض کرد اگر $\{x_n^*\}_N$ دنباله‌ای از اعضای $\partial f(x)$ به طوری که

$$x_n^* \stackrel{w^*}{\to} x^* \quad n \to \infty$$

آنگاه

$$\langle x_n^*, x\rangle \to \langle x^*, x\rangle \quad \text{و} \quad f^*(x_n^*) \to f^*(x^*) \quad n \to \infty$$

از آنجایی که f^* عضوی از فضای دوگان است نتیجه می‌گیریم:

$$x^* \in \partial f(x).$$

بنابراین $\partial f(x)$ ضعیف ستاره بسته است.

□

قضیه ۲.۴.۲. $\partial_\varepsilon f(x)$ مجموعه‌ی محدب ضعیف ستاره‌ی بسته است.

برهان. اثبات مشابه اثبات قضیه‌ی ۱.۴.۲. □

قضیه ۳.۴.۲. فرض کنید f و g توابع نیم‌پیوسته‌ی پایین، محدب و حقیقی باشند. هم چنین $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$، اگر $(\operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} g^*)$ ضعیف ستاره‌ی بسته باشد. آنگاه

$$\forall\, x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \qquad \partial(f+g)(x) = \partial(f)(x) + \partial(g)(x).$$

برهان. فرض کنید $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$. در غیر این صورت اگر $x \notin \operatorname{dom} f$، آنگاه $f(x)$ نامتناهی است.که با توجه به تعریف زیردیفرانسیل داریم:

$$\partial(f)(x) = \emptyset$$

فرض کنید $u^* \in \partial(f)(x), v^* \in \partial(g)(x)$ بنابراین به ازای هر $y \in X$ داریم:

$$\langle u^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) \quad \text{و} \quad \langle v^*, y - x\rangle \leq g(y) - g(x)$$

حال با جمع طرفین داریم:

$$\langle u^* + v^*, y - x\rangle \leq \big(f(y) - f(x)\big) + \big(g(y) - g(x)\big) = (f+g)(y - x)$$

بنابراین $(u^* + v^*) \in \partial(f+g)(x)$ در نتیجه

$$\partial(f+g)(x) \supseteq \partial(f)(x) + \partial(g)(x). \tag{۱۲.۲}$$

برای اثبات عکس شمول فرض کنید $x^* \in \partial(f+g)(x)$. حال با توجه به قضیه‌ی ۲.۵.۱ داریم:

$$(f+g)^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle - (f+g)(x)$$

با استفاده از تعریف اپی‌گراف و از آنجایی که $(\mathrm{epi}\, f^* + \mathrm{epi}\, g^*)$ ضعیف ستاره بسته است داریم:

$$\left(x^*, \langle x^*, x\rangle - (f+g)(x)\right) \in \mathrm{epi}\,(f+g)^* = \overline{\mathrm{epi}\, f^* + \mathrm{epi}\, g^*}^{w^*} = \mathrm{epi}\, f^* + \mathrm{epi}\, g^*$$

در این صورت $(u^*, \alpha) \in \mathrm{epi}\, f^*$ و $(v^*, \beta) \in \mathrm{epi}\, g^*$ وجود دارند به طوری که

$$x^* = u^* + v^* \quad \text{و} \quad \langle x^*, x\rangle - (f+g)(x) = \alpha + \beta$$

آنگاه

$$f^*(u^*) + g^*(v^*) \le \alpha + \beta = \langle u^*, x\rangle + \langle v^*, x\rangle - (f+g)(x) \tag{۱۳.۲}$$

و با توجه به قضیه‌ی ۲.۵.۱ (نامساوی یانگ_فنچل) داریم:

$$f^*(u^*) \ge \langle x, u^*\rangle - f(x) \quad \text{و} \quad g^*(v^*) \ge \langle v^*, x\rangle - g(x) \tag{۱۴.۲}$$

و با جمع طرفین (۱۴.۲) داریم:

$$f^*(u^*) + g^*(v^*) \ge \langle u^*, x\rangle - f(x) + \langle v^*, x\rangle - (g)(x) \tag{۱۵.۲}$$

از (۱۳.۲) و (۱۵.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$f^*(u) + g^*(v^*) = \langle u^*, x\rangle + \langle v^*, x\rangle - (f+g)(x)$$

آنگاه

$$f^*(u) = \langle u^*, x\rangle - f(x), \quad \text{و} \quad g^*(v) = \langle v^*, x\rangle - g(x)$$

حال با توجه به گزاره‌ی ۲.۵.۱ داریم:

$$u^* \in \partial f(x) \quad \text{و} \quad v^* \in \partial g(x)$$

بنابراین

$$x^* = u^* + v^* \in \partial f(x) + \partial g(x).$$

در نتیجه

$$\partial(f+g)(x) \subseteq \partial f(x) + \partial g(x) \tag{۱۶.۲}$$

بنابراین با توجه به (۱۲.۲) و (۱۶.۲) داریم:

$$\forall\, x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g \qquad \partial(f+g)(x) = \partial(f)(x) + \partial(g)(x).$$

□

نتیجه ۱.۴.۲. فرض کنید f و g تابع نیم‌پیوسته‌ی پایین، محدب و حقیقی باشد به طوری که $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g \neq \emptyset$. حال اگر f و g در برخی نقاط $x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$ پیوسته باشد. آنگاه تفکیک زیردیفرانسیل برقرار و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\forall\ x \in \mathrm{dom} f \cap \mathrm{dom} g \qquad \partial(f+g)(x) = \partial(f)(x) + \partial(g)(x)$$

با استفاده از نتیجه‌ی زیر نشان می‌دهیم. شرط دوگان، به وسیله‌ی جمع فرمول زیردیفرانسیل، درحالتی که توابع مربوط به فرمول، نیم‌پیوسته‌ی پایین و زیرخطی است کاملاً مشخص می‌شود.

نتیجه ۲.۴.۲. فرض کنید $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ توابع نیم‌پیوسته‌ی حقیقی و زیرخطی باشند. آنگاه شرایط زیر هم ارزند.

(۱) $(\mathrm{epi}\, f^* + \mathrm{epi}\, g^*)$ ضعیف ستاره‌ی بسته است.

(۲) به ازای هر $x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$ داریم:

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲) با توجه به قضیه‌ی ۳.۴.۲ برقرار است.
(۲) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنید $\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$. حال از آنجایی که f و g زیرخطی هستند داریم:

$$f(\circ) = g(\circ) = \circ$$

بنابراین

$$\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g \neq \emptyset.$$

چون

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

آنگاه

$$\partial(f+g)(\circ) = \partial f(\circ) + \partial g(\circ).$$

از آنجایی که f و g توابع نیم پیوسته‌ی پایینی، زیرخطی و حقیقی هستند و چون زیردیفرانسیل، محدب و بسته است داریم:

$$\partial(f+g)(\circ) = \mathrm{cl}\big(\partial f(\circ) + \partial g(\circ)\big)$$

پس بستارش با خودش برابر است. هم چنین داریم:

$$\partial(f)(\circ) + \partial(g)(\circ) = \mathrm{cl}\big(\partial f(\circ) + \partial g(\circ)\big)$$

بنابراین $\partial(f)(\circ)+\partial(g)(\circ)$ ضعیف ستاره بسته است.
حال با توجه به تعریف زیردیفرانسیل در نقطه‌ی صفر

$$\partial(f)(\circ)=\{x^*\in X^*\colon \langle x^*,y\rangle\leq f(y),\forall\ y\in X\}$$

و تعریف اپی‌گراف داریم:

$$\operatorname{epi} f^*=\partial(f)(\circ)\times\mathbb{R}_+ \quad \text{و} \quad \operatorname{epi} g^*=\partial(g)(\circ)\times\mathbb{R}_+$$

بنابراین

$$\operatorname{epi} f^*+\operatorname{epi} g^*=\partial(f)(\circ)\times\mathbb{R}_++\partial(g)(\circ)\times\mathbb{R}_+=(\partial(f)(\circ)+\partial(g)(\circ))\times\mathbb{R}_+$$

از این رو نتیجه می‌گیریم $\operatorname{epi} f^*+\operatorname{epi} g^*$ ضعیف ستاره بسته است. □

گزاره ۱.۴.۲. فرض کنید A زیرمجموعه‌ی محدب ناتهی از X و $x\in A$ باشد. آنگاه

$$N_A(x)=N_{\bar{A}}(x)=\partial\delta_A(x).$$

برهان. اولین تساوی از پیوستگی عناصر در $N_A(x)$ برقرار می‌باشد.
در حالی که برای دومین تساوی با توجه به تعریف به ازای هر $y\in A$ داریم:

$$\delta_A(y)=\circ$$

بنابراین

$$\begin{aligned}N_A(x)&=\{x^*\in X^*\colon \langle x^*,y-x\rangle\leq\circ\,,\ \forall\ y\in A\}\\&=\{x^*\in X^*\colon \langle x^*,y-x\rangle\leq\delta_A(y)-\delta_A(x)\,,\ \forall\ y\in A\}\\&=\partial\delta_A(x).\end{aligned}$$

□

لم ۱.۴.۲. فرض کنید C و D زیرمجموعه‌های محدب بسته‌ای از X به طوری که $\circ\in D\cap C$.
هم چنین اگر مخروط $(D-C)$ زیرفضای بسته باشد آنگاه

$$(D\cap C)^*=D^*+C^*.$$

برهان. فرض کنید δ_D و δ_C دو تابع شاخص مجموعه‌های C و D باشند که تابع محدب و نیم‌پیوسته‌ی پایین به همراه دامنه‌های C و D هستند. در این صورت با توجه به تعریف زیر دیفرانسیل داریم:

$$\begin{aligned}\partial\delta_D(\circ)&=\{x^*\in X^*\colon \langle x^*,y\rangle\leq-\delta_D(\circ)+\delta_C(y)\quad\forall\ y\in X\}\\&=\{x^*\in X^*\colon \langle x^*,y\rangle\leq\delta_C(y)\quad\forall\ y\in X\}\\&=\{x^*\in X^*\colon \langle x^*,y\rangle\leq\circ\quad\forall\ y\in D\}\\&=-D^*\end{aligned}$$

هم چنین به صورت مشابه داریم:

$$\partial\delta_C(\circ) = -C^* \quad \text{و} \quad \partial(\delta_C+\delta_D)(\circ) = -(D\cap C)^*$$

از آنجای که به ازای هر $x \in \operatorname{dom}\delta_C \cap \operatorname{dom}\delta_D$ داریم:

$$\partial(\delta_C+\delta_D)(x) = \partial(\delta_C)(x) + \partial(\delta_D)(x)$$

بنابراین

$$(D\cap C)^* = D^* + C^*.$$

□

لم ۲.۴.۲. اگر C و D دو مجموعه‌ی محدب و $\circ \in D\cap C$ آنگاه $(\mathrm{int}D)\cap C \neq \emptyset$ در این صورت نتیجه می‌گیریم:

$$(D\cap C)^* = D^* + C^*.$$

برهان. از آنجایی که مخروط $(C-D)$ زیرفضای بسته است بنابراین با توجه قضیه‌ی ۱.۴.۲ داریم:

$$(D\cap C)^* = D^* + C^*.$$

□

نتیجه ۳.۴.۲. فرض کنید C و D دو زیرمجموعه‌ی محدب بسته از X باشند به طوری که $C\cap D \neq \emptyset$. حال اگر $(\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D)$ ضعیف ستاره‌ی بسته باشد آنگاه برای هر $x \in C\cap D$ داریم:

$$N_{C\cap D}(x) = N_C(x) + N_D(x)$$

برهان. فرض کنید $f=\delta_C$ و $g=\delta_D$ آنگاه چون $x \in C\cap D$ بنابراین

$$(f+g) = \delta_{C\cap D}$$

حال با توجه به گزاره‌ی ۱.۴.۲ و از آنجایی که $(\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D)$ ضعیف ستاره‌ی بسته است. داریم:

$$N_{C\cap D}(x) = \partial\delta_{C\cap D}(x) = \partial\delta_C(x) + \partial\delta_D(x) = N_C(x) + N_D(x)$$

بنابراین

$$N_{C\cap D}(x) = N_C(x) + N_D(x).$$

□

۵.۲ منظم بودن و مخروط محدب بسته

می‌خواهیم به تجزیه و تحیل ارتباط بین شرط بستار و شرط منظم خطی کراندار در حالتی که C و D بسته و مخروط محدب هستند بپردازیم. هم چنین در حالتی که X یک فضای اقلیدسی باشد نشان می‌دهیم که شرط بستار، هم ارز فرمول فصل مشترک مخروط نرمال برای مخروط محدب بسته است.

گزاره ۱.۵.۲. فرض کنید C و D مخروط محدب بسته‌ای از X باشند. در این صورت مجموعه‌ی $(\operatorname{epi}\sigma_C+\operatorname{epi}\sigma_D)$ ضعیف ستاره‌ی بسته است اگر و تنها اگر (C^*+D^*) ضعیف ستاره‌ی بسته باشد.

برهان. فرض کنید مجموعه‌ی $(\operatorname{epi}\sigma_C+\operatorname{epi}\sigma_D)$ ضعیف ستاره‌ی بسته باشد آنگاه با توجه به نتیجه‌ی ۱.۳.۲ $(C^*+D^*)=(C\cap D)^*$ ضعیف ستاره‌ی بسته است.
حال فرض کنید (C^*+D^*) ضعیف ستاره‌ی بسته باشد. ازآنجایی که C و D مخروط محدب بسته هستند داریم:

$$-(C^*+D^*)\times\mathbb{R}_+=(-C^*\times\mathbb{R}_+)+(-D^*\times\mathbb{R}_+)=\operatorname{epi}\sigma_C+\operatorname{epi}\sigma_D$$

بنابراین اگر (C^*+D^*) ضعیف ستاره‌ی بسته باشد آنگاه مجموعه‌ی $(\operatorname{epi}\sigma_C+\operatorname{epi}\sigma_D)$ ضعیف ستاره‌ی بسته است. □

گزاره ۲.۵.۲. فرض کنید X یک فضای اقلیدسی باشد. هم چنین C و D مخروط محدب بسته‌ای از X باشند. آنگاه حکم‌های زیر معادلند.

(۱) مجموعه‌ی $(\operatorname{epi}\sigma_C+\operatorname{epi}\sigma_D)$ بسته است.

(۲) (C^*+D^*) بسته است.

(۳) برای هر $x\in C\cap D$ داریم:

$$N_{C\cap D}(x)=N_C(x)+N_D(x).$$

برهان. (۱) $\Longleftrightarrow$ (۲) با استفاده از گزاره‌ی ۱.۵.۲ برقرار است.
(۲) $\Longleftrightarrow$ (۳) با توجه به قضیه‌ی ۱.۳.۲ و نتیجه‌ی ۱.۳.۲ برقرار است.
(۳) $\Longleftrightarrow$ (۱) حال از آنجایی که مجموعه‌ی C^*+D^* بسته است اگر و تنها اگر $C^\circ+D^\circ$ بسته باشد از نتیجه‌ی ۳.۴.۲ برقراری حکم ثابت می‌شود.

□

گزاره ۲.۵.۳. فرض کنید X یک فضای اقلیدسی ، C و D مخروط محدب بسته‌ای از X باشند. اگر $\{C, D\}$ منظم خطی کراندار باشد. آنگاه مجموعه‌ی $(\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D)$ بسته است.

برهان. با توجه به قضیه‌ی ۲.۸.۱ منظم خطی کراندار نتیجه می‌دهد، فرمول فصل مشترک مخروط نرمال، CHIP قوی برای مجموعه‌های محدب بسته دارد. از آنجایی که $\{C, D\}$ منظم خطی کراندار است بنابراین

$$N_{C\cap D}(x) = N_C(x) + N_D(x).$$

حال با توجه به گزاره‌ی ۲.۵.۲ مجموعه‌ی $(\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D)$ بسته است. □

ملاحظه ۲.۵.۱. در حالتی که C و D مخروط محدب بسته در فضای اقلیدسی باشند. نمی‌توان نتیجه گرفت هرگاه مجموعه‌ی $(\operatorname{epi}\sigma_C + \operatorname{epi}\sigma_D)$ بسته باشد آنگاه جفت $\{C, D\}$ منظم خطی کراندار است. به علاوه اخیراً نشان داده شده است که فرمول فصل مشترک مخروط نرمال برای مخروط محدب بسته C و D برقرار است در حالی که جفت $\{C, D\}$ منظم خطی کراندار نیست.

فصل ۳

فضای‌های متریک مخروطی و بهترین تقریب در این فضاها

در سال ۲۰۰۷ هانگ و ژانگ [۱۹] با جایگزین کردن فضای باناخ حقیقی به جای اعداد حقیقی، مفهوم متر مخروطی را معرفی کردند. در این فصل به بررسی یافته‌های این دو ریاضیدان و ریاضیدان‌های دیگری که فضای متریک مخروطی را از نظر توپولوژیکی و خواص مخروطی مورد مطالعه قرار دادند می‌پردازیم. در ادامه، بهترین تقریب در فضاهای متریک مخروطی از یافته‌های شهرام رضا پور [۳۰] مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۳ فضاهای متریک مخروطی

در این بخش به معرفی، مخروط در فضای باناخ حقیقی، فضاهای متریک مخروطی و برخی ویژگی‌های آنها پرداخته می‌شود.

تعریف ۱.۱.۳. مجموعه‌ی مرتب جزئی: رابطه‌ی $\preceq$ روی مجموعه‌ی X را یک رابطه‌ی ترتیب جزئی گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) به ازای هر $x \in X$ $\quad x \preceq x$؛

(۲) به ازای هر $x, y \in X$ اگر $y \preceq x$ و $x \preceq y$ آنگاه $x = y$؛

(۳) به ازای هر $x, y, z \in X$ اگر $x \preceq y$ و $y \preceq z$ آنگاه $x \preceq z$.

اگر $\preceq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی X باشد زوج مرتب $(X, \preceq)$ را یک مجموعه‌ی مرتب جزئی نامیم.

مثال ۱.۱.۳. $(\mathbb{N}, \preceq)$ و $(\mathbb{R}, \preceq)$ مجموعه‌ی مرتب جزئی می‌باشند.

برای مخروط P (تعریف ۱۷.۲.۱) در فضای نرمدار حقیقی و نابدیهی X، رابطه‌ی $\preceq$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\forall\, x, y \in E:\ x \preceq y \Longleftrightarrow y - x \in P.$$

چون $\preceq$ خواص بازتابی، پادتقارنی و تعدی را دارا می‌باشد. پس یک ترتیب جزیی روی X تعریف و آن را به یک مجموعه‌ی مرتب جزئی تبدیل می‌کند. $\preceq$ را رابطه‌ی جزیی القاء شده توسط P روی X می‌نامیم.

نماد $x \prec y$ نمایشگر آن است که $x \preceq y$ و $x \neq y$ و نماد $x \ll y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall\, x, y \in E:\ x \ll y \Longleftrightarrow y - x \in \operatorname{int} P.$$

که در آن منظور از $\operatorname{int} P$ درون مخروط P می‌باشد.

از آنجایی که عبارت $x \succeq \theta$ و $x \in P$ معادل هستند. اعضای مخروط P، را اعضای مثبت فضای X نامند.

مثال ۲.۱.۳. در مجموعه‌ی اعداد حقیقی، شعاع‌های $[0, \infty)$ و $(-\infty, 0]$ دو مخروط را مشخص می‌کنند.

مثال ۳.۱.۳. فرض کنید $\{P_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای ناتهی از مخروط‌های X باشد. در این صورت واضح است که $\bigcap_{i\in I} P_i$ یک مخروط در X است اگر و فقط اگر $\bigcap_{i\in I} P_i \neq \{\theta\}$.

مثال ۴.۱.۳. فرض کنید x عضوی ناصفر در X باشد. مجموعه‌ی $P = \{ax \mid a \geq 0\}$ یک مخروط در X است.

نکته ۱.۱.۳. مثال ۴.۱.۳ نشان می‌دهد که هر فضای نرمدار حقیقی و نابدیهی X را می‌توان به وسیله‌ی یک مخروط مرتب کرد.

مثال ۵.۱.۳. اگر $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ و $X = \mathbb{R}^2$ آنگاه

$$(1, 2) \ll (3, 4) \Longleftrightarrow (3, 4) - (1, 2) = (2, 2) \in \operatorname{int} P$$

یعنی $(2, 2)$ یک همسایگی دارد که کاملاً در داخل مخروط قرار می‌گیرد.

لم ۱.۱.۳. برای هر مخروط P گزاره‌های زیر برقرار است.

(۱) $P+\mathrm{int}P \subseteq \mathrm{int}P$.

(۲) $\mathrm{int}P+\mathrm{int}P \subseteq \mathrm{int}P$.

(۳) به ازای هر $a>\theta$ $\quad a\,\mathrm{int}P \subseteq \mathrm{int}P$.

برهان. (۱) فرض کنید $x\in P$ و $c\in \mathrm{int}P$ باشد. در این صورت $r\succ\theta$ وجود دارد به طوری که $N_r(c)\subseteq P$. اگر $y\in N_r(c+x)$ باشد. آنگاه از این‌که $\|y-(c+x)\|\prec r$ داریم:

$$y-x\in P.$$

بنابراین طبق (C۲) $y\in P$ خواهد بود از این رو $(c+x)\in \mathrm{int}P$ است.
(۲) بنا بر (۱) بدیهی است.
(۳) فرض کنید $c\in \mathrm{int}P$ در این صورت $r\succ\theta$ وجود دارد به طوری که $N_r(c)\subseteq P$. اگر $y\in N_{ar}(ac)$، آنگاه $\|y-ac\|\prec ar$ و لذا $a^{-۱}y\in P$. چون $a\succeq\theta$ است پس طبق (C۲) داریم:

$$y=aa^{-۱}y\in P.$$

از این رو $ac\in \mathrm{int}P$. $\square$

تعریف ۲.۱.۳. مخروط نرمال: مخروط P را در فضای نرمدار X نرمال است هرگاه عدد حقیقی و مثبت K وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم:

$$\theta\preceq x\preceq y \Longrightarrow \|x\|\preceq K\|y\|. \qquad (۱.۳)$$

به کوچکترین (اینفیمم) عدد صحیح مثبت K، که در رابطه‌ی (۱.۳) صدق کند ثابت نرمال P گفته می‌شود.
یا به طور معادل، مخروط P را نرمال گویند هرگاه:

$$\inf\{\|x+y\|: x,y\in P; \|x\|=\|y\|=۱\}\succ\theta.$$

تعریف ۳.۱.۳. فضای متریک مخروطی: فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی، E یک فضای باناخ و P یک مخروط در E باشد. هرگاه به ازای هر $x,y,z\in X$ نگاشت $d:X\times X\to E$ در شرایط زیر صدق کند

($d_۱$ $d(x,y)\in P$ این یعنی $d(x,y)\succeq\theta$؛

($d_۲$ $d(x,y)=\theta$ اگر و تنها اگر $x=y$؛

($d_۳$ $d(x,y)=d(y,x)$؛

(d۴ $d(x,z)+d(z,y)\succeq d(x,y)$.

آنگاه d متریک مخروطی روی X نامیده می‌شود و (X,d) یک فضای متریک مخروطی (CMS) نامیده می‌شود.

واضح است که فضای متریک مخروطی تعمیمی از فضای متریک است. در واقع فضای متریک، یک فضای متریک مخروطی است که در آن $E=R$ و $P=[\circ.\infty]$ است.

مثال ۶.۱.۳. فرض کنید $E=\mathbb{R}^{۲}$، $P=\{(x,y)\in E\colon x,y\geq \circ\}$، $X=\mathbb{R}$ و نگاشت d به صورت

$$d\colon X\times X\to E$$
$$d(x,y)=(|x-y|,\alpha|x-y|)$$

جایی که $\alpha\geq\circ$ یک ثابت است تعریف شود. آنگاه (X,d) یک فضای متریک مخروطی است.

تعریف ۴.۱.۳. فضای ℓ^P: برای $P>\circ$، فضای ℓ^P مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های مجموعه‌پذیر تعریف می‌شود.

فضای ℓ^P یک زیرفضای باناخ با نرم

$$\|x\|_P=\left(\sum_{n=۱}^{\infty}|x_n|^P\right)^{\frac{۱}{P}}$$

است.

مثال ۷.۱.۳. برای $\circ<P<۱$، $\|x\|_P$ یک نرم نیست.

فرض کنید $x=(۱,\circ,\circ,\circ,\cdots)$ و $y=(\circ,۱,\circ,\circ,\cdots)$. آنگاه

$$\|x+y\|_P=(۱^P+۱^P)^{\frac{۱}{P}}>۲$$

در حالی که

$$\|x\|_P+\|y\|_P=۱+۱=۲.$$

بنابراین نامساوی مثلث برای این نرم نمی‌تواند برقرار باشد.

تعریف ۵.۱.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی، $x\in X$ و $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای در X باشد. آنگاه

(۱) **دنباله‌ی همگرا:** دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in N}$ همگرا به x است هرگاه به ازای هر $c\gg\theta$، $c\in E$ عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n\geq N$ داشته باشیم:

$$d(x_n,x)\ll c$$

و به صورت $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ یا $x_n\to x$ نمایش داده می‌شود.

(۲) **دنباله‌ی کشی:** دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in N}$ کشی است هرگاه به ازای هر $c \gg \theta$، $c \in E$ عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n, m \geq N$ داشته باشیم:

$$d(x_n, x_m) \ll c.$$

(۳) **فضای متریک مخروطی کامل:** (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل است هرگاه هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۶.۱.۳. مجموعه‌ی کراندار: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی باشد. آنگاه $A \subset X$ از بالا کراندار است اگر $c \gg \theta$، $c \in E$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

$$d(x, y) \preceq c$$

مجموعه‌ی A کراندار است اگر

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) \colon x, y \in A\}$$

در E وجود داشته باشد. هم چنین اگر سوپریمم وجود نداشته باشد می‌گوییم، A کراندار نیست.

تعریف ۷.۱.۳. فاصله‌ی بین دو مجموعه: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی، $x \in X$ و A زیرمجموعه‌ی ناتهی از X باشد. آنگاه فاصله‌ی بین مجموعه‌ی A و مجموعه‌ی تک عضوی $\{x\}$ به صورت

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \colon a \in A\},$$

و فاصله‌ی بین دو مجموعه‌ی A و B به صورت

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \colon a \in A, b \in B\}.$$

تعریف می‌شود.

مثال ۸.۱.۳. فرض کنید $E = \mathrm{R}^۲$ و $P = \{(u, v) \colon u \geq ۰, v \geq ۰\}$. تابع d به صورت

$$d \colon \mathrm{R}^۲ \times \mathrm{R}^۲ \to E$$
$$d((u_۱, u_۲), (v_۱, v_۲)) = (|u_۱ - v_۱|, |u_۲ - v_۲|)$$

تعریف شود. هم چنین فرض کنید

$$A = \{(u, v) \in \mathrm{R}^۲ \colon ۱ \leq u \leq ۲, ۳ \leq v \leq ۴\}$$

و

$$B = \{(u, v) \in \mathrm{R}^۲ \colon ۴ \leq u \leq ۵, ۱ \leq v \leq ۴\}$$

آنگاه

$$d(A, B) = (۲, ۰).$$

لم ۲.۱.۳. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کشی در فضای متریک مخروطی (X,d) به طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

برهان. فرض کنید $c \gg \theta$، $c \in E$. آنگاه با توجه به فرض (دنباله‌ی کشی) می‌توان $n_\circ$ به ازای هر $m, n \geq n_\circ$ پیدا کرد به طوری که

$$d(x_n, x_m) \ll \frac{c}{۲}$$

و به ازای هر $n \geq n_\circ$

$$d(x_{k_n}, x_m) \ll \frac{c}{۲}$$

آنگاه برای هر $n \geq n_\circ$ داریم:

$$d(x_n, x) \preceq d(x_n, x_{k_{n_\circ}}) + d(x_{k_{n_\circ}}, x) \ll \frac{c}{۲} + \frac{c}{۲} = c$$

بنابراین

$$d(x_n, x) \preceq c$$

در این صورت نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

□

تعریف ۸.۱.۳. نرم یکنوا: نرم $\|\cdot\|$ یکنوا است اگر به ازای هر $x, y \in E$ نتیجه بگیریم:

$$\theta \preceq x \preceq y \Longrightarrow \|x\| \preceq \|y\|.$$

لم ۳.۱.۳. فرض کنید P یک مخروط و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در E باشند. اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$ $\quad n \to \infty$ در $(E, \|\cdot\|)$ و به ازای هر n اگر $x_n \preceq y_n$ آنگاه

$$x \preceq y.$$

برهان. فرض کنید $y_n \succeq x_n$ در این صورت داریم:

$$y_n - x_n \in P.$$

حال از آنجایی که P بسته است و $(y_n - x_n) \to (y - x)$ نتیجه می‌گیریم:

$$(y - x) \in P$$

بنابراین

$$x \preceq y.$$

□

لم ۴.۱.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی باشد. آنگاه به ازای هر $c \gg \theta$، $c \in E$؛ $\delta \succ \theta$ وجود دارد به طوری که $(c-x) \in \mathrm{int}P$ (یعنی $c \gg x$) هرگاه

$$x \in E \quad \|x\| \prec \delta.$$

برهان. از آنجایی که $c \gg \theta$، آنگاه $c \in \mathrm{int}P$. از این رو می‌توان $\delta \succ \theta$ را پیدا کرد به طوری که

$$\{x \in E \colon \|x-c\| \prec \delta\} \subset \mathrm{int}P.$$

اکنون اگر $\|x\| \prec \delta$ آنگاه داریم:

$$\|(c-x)-c\| = \|-x\| = \|x\| \prec \delta$$

بنابراین

$$(c-x) \in \mathrm{int}P.$$

□

لم ۵.۱.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی، P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K، و $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای در X باشد. آنگاه $\{x_n\}$ به x همگراست اگر و تنها اگر $d(x_n,x) \to \theta$ $n \to \infty$.

برهان. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به x باشد. به ازای هر $\epsilon \succ \theta$ حقیقی، $c \gg \theta$ و $K\|c\| \prec \epsilon$ را در نظر بگیرید. آنگاه Nای وجود دارد که به ازای هر $n > N$ با استفاده از تعریف همگرایی داریم:

$$d(x_n,x) \ll c \tag{۲.۳}$$

از آنجایی که $\|c\| \preceq K\|c\| \prec \epsilon$ بنابراین هنگامی که $n > N$ با توجه به (۲.۳) داریم:

$$\|d(x_n,x)\| \preceq K\|c\| \prec \epsilon$$

این یعنی $d(x_n,x) \to \theta$ $n \to \infty$.

برای نشان دادن عکس لم فرض کنید $d(x_n,x) \to \theta$ $(n \to \infty)$. برای $c \gg \theta$، $c \in E$؛ $\delta \succ \theta$ وجود دارد به طوری که $\|x\| \prec \delta$، نتیجه می‌دهد $c - x \in \mathrm{int}P$. برای این δ، Nای وجود دارد به طوری که به ازای هر $n > N$ داریم:

$$\|d(x_n,x)\| \prec \delta$$

بنابراین با توجه به لم ۴.۱.۳ داریم:

$$c - d(x_n,x) \in \mathrm{int}P.$$

این بدین معنی است که $d(x_n,x) \ll c$. بنابراین $\{x_n\}$ همگرا به x است. □

لم ۶.۱.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی، P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. اگر $\{x_n\}$ همگرا به x و $\{x_n\}$ همگرا به y باشد آنگاه $x=y$.
این یعنی حد دنباله‌ی $\{x_n\}$ منحصر به فرد است.

برهان. به ازای هر $c \gg \theta$، $c \in E$؛ Nای وجود دارد به طوری که به ازای هر $n > N$ داریم:

$$d(x_n,x) \ll c \quad \text{و} \quad d(x_n,y) \ll c$$

بنابراین

$$d(x,y) \preceq d(x_n,x) + d(x_n,y) \preceq ۲c.$$

از این رو با توجه به تعریف ثابت نرمال با ثابت K داریم:

$$\|d(x,y)\| \preceq ۲K\|c\|$$

از آنجایی که c دلخواه است در نتیجه

$$d(x,y) = \theta$$

بنابراین

$$x = y.$$

□

لم ۷.۱.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X، هم چنین اگر $\{x_n\}$ همگرا به x باشد آنگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی است. (هر دنباله‌ی همگرا، کشی است).

برهان. به ازای هر $c \gg \theta$، $c \in E$؛ Nای وجود دارد به طوری که به ازای هر $n,m > N$ داریم:

$$d(x_n,x) \ll \tfrac{c}{۲} \qquad \text{و} \qquad d(x_m,x) \ll \tfrac{c}{۲}$$

از این رو

$$d(x_n,x_m) \ll d(x_n,x) + d(x_m,x) \ll \frac{c}{۲} + \frac{c}{۲} = c$$

بنابراین $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی است. □

لم ۸.۱.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی، P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K، و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. آنگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی است اگر و تنها اگر $d(x_n,x_m) \to \theta$ $.n,m \to \infty$

برهان. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی باشد. به ازای هر $\theta \prec \epsilon$، $c \gg \theta$؛ $c \in E$ و $K\|c\| \prec \epsilon$ را در نظر بگیرید. آنگاه با توجه به کشی بودن دنباله، Nای وجود دارد که به ازای هر $n, m > N$ داریم:

$$d(x_n, x_m) \ll c.$$

بنابراین وقتی که $n, m > N$، آنگاه با توجه به ثابت نرمال و

$$\|d(x_n, x_m)\| \ll \|c\|$$

داریم:

$$\|d(x_n, x_m)\| \preceq K\|c\| \prec \epsilon.$$

این بدین معنی است که $d(x_n, x_m) \to \theta \quad n, m \to \infty$.

برای اثبات عکس فرض کنید $d(x_n, x_m) \to \theta \quad n, m \to \infty$. برای $c \gg \theta$، $c \in E$؛ $\delta \succ \theta$ وجود دارد به طوری که $\|x\| \prec \delta$ در نتیجه

$$c - x \in \text{int}P$$

برای این δ، Nای وجود دارد به طوری که به ازای هر $n, m > N$ داریم:

$$\|d(x_n, x_m)\| \preceq K\|c\| \prec \epsilon.$$

بنابراین با توجه به لم ۴.۱.۳ داریم:

$$c - d(x_n, x_m) \in \text{int}P.$$

این بدین معنی است که

$$d(x_n, x_m) \ll c.$$

بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کشی است. $\square$

لم ۹.۱.۳. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی، و P یک مخروط نرمال، با ثابت نرمال K، هم چنین $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله در X باشند. به طوری که $x_n \to x$ و $y_n \to y$ $n \to \infty$ آنگاه

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y) \quad n \to \infty.$$

برهان. به ازای هر $\theta \prec \epsilon$، $c \gg \theta$؛ $c \in E$ و $y_n \to y$ $\|c\| \prec \frac{\epsilon}{۴K+۲}$ را در نظر بگیرید. آنگاه با توجه به همگرایی $y_n \to y$ و $x_n \to x$، Nای وجود دارد به طوری که به ازای هر $n > N$ داریم:

$$d(x_n, x) \ll c \quad \text{و} \quad d(y_n, y) \ll c$$

در این صورت داریم:

$$d(x_n, y_n) \preceq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) \preceq d(x, y) + ۲c,$$
$$d(x, y) \preceq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \preceq d(x_n, y_n) + ۲c.$$

بنابراین

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \preceq d(x_n, x) + d(y_n, y) \preceq c + c = ۲c \preceq ۴c,$$
$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \preceq d(x_n, x) + d(y_n, y) \preceq c + c = ۲c \preceq ۴c.$$

از این رو

$$\theta \preceq d(x_n, x) + d(y_n, y) + d(x, y) - d(x_n, y_n) \preceq d(x, y) - d(x_n, y_n) + ۲c \preceq ۴c.$$

حال با توجه به ثابت نرمال داریم:

$$\|d(x_n, y_n) - d(x, y)\| \preceq \|d(x, y) + ۲c - d(x_n, y_n)\| + \|۲c\| \preceq (۴K + ۲)\|c\| \prec \epsilon$$

بنابراین $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ $\quad n \to \infty$. $\square$

تعریف ۹.۱.۳. مخروط منظم: مخروط P، مخروط منظم نامیده می‌شود اگر هر دنباله‌ی افزایشی از بالا کراندار آن همگرا باشد. بدین معنا که اگر $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای باشد به طوری که برای برخی از $y \in E$ داشته باشیم:

$$x_۱ \preceq x_۲ \preceq \cdots \preceq y$$

آنگاه $x \in X$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \theta.$$

و یا به طور معادل هر دنباله‌ی کاهشی از پایین کراندار آن همگرا باشد.

لم ۱۰.۱.۳. هر مخروط منظم، نرمال است.

برهان. فرض کنید(فرض خلف) P یک مخروط منظم، که نرمال نیست. برای هر $n \geq ۱$ عناصر $t_n, s_n \in P$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$t_n - s_n \in P \quad \text{و} \quad \|s_n\| \succ \|t_n\| n^۲$$

و به ازای هر $n \geq ۱$ قرار دهید:

$$y_n = \frac{t_n}{\| t_n\|} \qquad \text{و} \qquad x_n = \frac{s_n}{\| t_n\|}.$$

در این صورت به ازای هر $n \geq ۱$ داریم:

$$y_n, x_n, y_n - x_n \in P \quad \text{و} \quad \|y_n\| = ۱$$

و چون $\|x_n\| = \frac{\|s_n\|}{\|t_n\|} \succ \frac{n^۲\|t_n\|}{\|t_n\|} = n^۲$ آنگاه:

$$\|x_n\| \succ n^۲.$$

از آنجایی که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}\|y_n\|$ همگرا است و P بسته است. عضو $y \in P$ وجود دارد به طوری که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} y_n = y$$

هم چنین

$$\theta \preceq x_۱ \preceq x_۱ + \frac{۱}{۲^۲}x_۲ \preceq x_۱ + \frac{۱}{۲^۲}x_۲ + \frac{۱}{۳^۲}x_۳ \preceq \cdots \preceq y$$

یک دنباله‌ی کاهشی از پایین کراندار و مخروط منظم است. بنابراین $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}x_n$ همگرا است. زیرا P منظم است. از این رو

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n\|}{n^۲} = \theta \tag{۳.۳}$$

در این صورت (۳.۳) با $\|x_n\| \succ n^۲$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و هر مخروط منظم، نرمال است. □

در مثال ۹.۱.۳ نشان داده شده است. که هر مخروط نرمال، منظم نمی‌باشد. یعنی عکس لم ۱۰.۱.۳ برقرار نیست.

مثال ۹.۱.۳. فرض کنید $E = C_{\mathbb{R}}([۰,۱])$، $\|f\| = \sup\{|f(x)| \colon x \in [۰,۱]\}$ و مخروط P را به صورت $P = \{f \in E \colon f \leq ۰\}$ در نظر بگیرید. در این صورت P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال یک می‌باشد. دنباله‌ی

$$x \geq x^۲ \geq x^۳ \geq \cdots \geq ۰$$

در E وجود دارد به طوری که در بازه‌ی $[۰,۱]$ همگرا نیست. زیرا

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ ۰ & x = ۰ \\ ۰ & ۰ < x < ۱ \end{cases}$$

از آنجایی که حد فوق یکتا نیست بنابراین دنباله‌ی فوق همگرا نیست.

لم ۱۱.۱.۳. مخروط نرمال، با ثابت نرمال $K < ۱$ وجود ندارد.

برهان. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال $K < ۱$ باشد. عضو غیر صفر $x \in P$ و $۰ < \epsilon < ۱$ را طوری در نظر بگیرید که

$$۱ - \epsilon > K$$

آنگاه

$$x \succeq (۱-\epsilon)x$$

اما

$$(۱-\epsilon)\|x\| \succ K\|x\|$$

که این یک تناقض است. بنابراین مخروط نرمال با ثابت نرمال $K < ۱$ وجود ندارد. □

گزاره ۳.۱.۱. برای هر $k > ۱$، یک مخروط نرمال با ثابت نرمال $K > k$ وجود دارد.

برهان. فرض کنید $k > ۱$. فضای برداری حقیقی E با نرم سوپریمم را به صورت

$$E = \left\{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R},\ x \in \left[۱ - \frac{۱}{k}, ۱\right]\right\}$$

و مخروط P در E را به صورت

$$P = \{ax + b \in E \mid a \leq ۰, b \geq ۰\}$$

تعریف کنید. ابتدا نشان می‌دهیم P منظم (نرمال) است. فرض کنید $\{a_n x + b_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای افزایشی از بالا کراندار، بدین معنی که عضو $cx + d \in E$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in [۱ - \frac{۱}{k}, ۱]$ داریم:

$$a_۱ x + b_۱ \preceq a_۲ x + b_۲ \preceq \cdots \preceq a_n x + b_n \preceq \cdots \preceq cx + d,$$

آنگاه $\{a_n\}_{n\geq ۱}$ و $\{b_n\}_{n\geq ۱}$ دو دنباله در $\mathbb{R}$ هستند. به طوری که

$$b_۱ \leq b_۲ \leq \cdots \leq d, \quad a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq c.$$

بنابراین $\{a_n\}_{n\geq ۱}$ و $\{b_n\}_{n\geq ۱}$ همگرا هستند.
فرض کنید $a_n \to a$ و $b_n \to b$. آنگاه

$$ax + b \in P \quad \text{و} \quad a_n x + b_n \to ax + b$$

بنابراین P منظم است. از این رو با توجه به لم ۱۱.۱.۳ $K \geq ۱$ وجود دارد به طوری که $f \preceq g \preceq ۰$ آنگاه به ازای هر $g, f \in E$ نتیجه می‌گیریم:

$$\|g\| \preceq K\|f\|.$$

حال نشان می‌دهیم $K > k$. از آنجایی که

$$f(x) = -kx + k \in P \quad \text{و} \quad g(x) = k \in P \quad \text{و} \quad f - g \in P$$

بنابراین

$$\circ \preceq g \preceq f.$$

از این رو با قرار دادن $x = ۱ - \frac{۱}{k}$ داریم:

$$\|f\| = ۱$$

بنابراین

$$k = \|g\| \preceq K\|f\| = K.$$

به عبارت دیگر اگر

$$f(x) = -(k + \frac{۱}{k})x + k \quad \text{و} \quad g(x) = k$$

آنگاه

$$f, g \in P \quad \text{و} \quad f - g \in P.$$

همچنین

$$\|g\| = k \quad \text{و} \quad \|f\| = ۱ - \frac{۱}{k} + \frac{۱}{k^{۲}}.$$

بنابراین

$$k = \|g\| > k\|f\| = k + \frac{۱}{k} - ۱.$$

این نشان می‌دهد $K > k$. □

مثال ۱۰.۱.۳. فرض کنید $k \geq ۱$ و E یک فضای برداری حقیقی همه‌ی چند جمله‌ای‌ها به فرم $ax + b$ روی بازه‌ی $[۱ - \frac{۱}{k}, ۱]$ باشد. اگر $P = \{ax + b \in E \colon a \leq \circ, b \geq \circ\}$ یک مخروط در E و $\|\cdot\|_\infty$ نرم سوپریمم در E باشد. در این صورت P مخروطی منظم و در نتیجه نرمال است و ثابت نرمال آن بزرگتر از یک می‌باشد.
برای درک بیشتر این مثال، فرض کنید $f(x) = -۲x + ۱۰$ و $g(x) = -۶x + ۱۱$ باشند. در این صورت

$$g(x) - f(x) = -۴x + ۱ \in P$$

و

$$\circ \leq f(x) \leq g(x)$$

اما

$$\|g\|_\infty = g(\frac{۱}{۲}) = ۸ \quad \text{و} \quad \|f\|_\infty = f(\frac{۱}{۲}) = ۹$$

پس داریم:

$$\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

و بنابر نرمال بودن P از $0 \leq f(x) \leq g(x)$ داریم:

$$\|f\|_\infty \leq K\|g\|_\infty.$$

که K یک ثابت نرمال است.

تعریف ۱۰.۱.۳. مخروط مینی‌هدرال: P یک مخروط مینی‌هدرال است اگر به ازای هر $x, y \in E$، $\sup\{x, y\}$ وجود داشته باشد. هم چنین P مخروط مینی‌هدرال قوی است اگر هر زیرمجموعه‌ی از بالا کراندار E یک سوپریمم داشته باشد.

مثال ۱۱.۱.۳. فرض کنید $E = C[0, 1]$ با نرم سوپریمم و $P = \{f \in E \colon f \geq 0\}$. از آنجایی که x^n دنباله‌ی یکنوای کاهشی است و به طور یکنوا همگرا به صفر نیست. بنابراین P مینی‌هدرال قوی نیست.

مثال ۱۲.۱.۳. فرض کنید $E = \mathbb{R}^2$، $P := \{(x, 0) \colon x \geq 0\}$ در این صورت مخروط P مینی هدرال قوی است. اما مینی‌هدرال نمی‌باشد.

لم ۱۲.۱.۳. هر دنباله‌ی کشی از یک فضای متریک مخروطی (X, d) روی یک مخروط مینی هدرال قوی، کراندار است.

برهان. برای برخی $c \gg \theta$ می‌توان n_0 پیدا کرد به طوری که به ازای هر $m, n \geq n_0$ داشته باشیم:

$$d(x_n, x_m) \preceq c.$$

فرض کنید $c' = \sup\{c, d(x_n, x_m) \colon m, n < n_0\}$ وجود دارد. از آنجایی که P مینی‌هدرال قوی است. یعنی به ازای هر m, n داریم:

$$d(x_n, x_m) \preceq c'$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\sup\{d(x_n, x_m) \colon m, n \in \mathbb{N}\}$$

وجود دارد. از این رو $\{x_n\}$ کراندار است. $\square$

۲.۳ توپولوژیک فضای متریک مخروطی

لم ۱.۲.۳. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی باشد. آنگاه به ازای هر $c_1 \gg \theta$ و $c_2 \gg \theta$، $c_1, c_2 \in E$؛ وجود دارد $c \gg \theta$، $c \in E$ به طوری که:

$$c \ll c_1 \quad \text{و} \quad c \ll c_2.$$

برهان. از آنجایی که $c_۲ \gg \theta$ آنگاه با توجه به لم ۴.۱.۳ می توان $\theta \succ \delta$ پیدا کرد به طوری که

$$\|x\| \prec \delta$$

آنگاه $x \ll c_۲$.

$n_\circ$ را طوری در نظر بگیرید که $\frac{\delta}{\|c_۱\|} \prec \frac{۱}{n_\circ}$. فرض کنید $c = \frac{c_۱}{n_\circ}$. آنگاه

$$\|c\| = \|\frac{c_۱}{n_\circ}\| = \frac{\|c_۱\|}{n_\circ} \prec \delta$$

حال با توجه به لم ۴.۱.۳ داریم:

$$c_۲ - c \in \operatorname{int}P$$

از این رو

$$c \ll c_۲.$$

همچنین اگر $c \gg \circ$ آنگاه داریم:

$$c \ll c_۱.$$

□

گزاره ۱.۲.۳. هر فضای متریک مخروطی (X, d) یک فضای توپولوژیکی است.

برهان. به ازای هر $c \gg \circ$، $c \in E$ فرض کنید:

$$B(x, c) = \{y \in X : d(x, y) \ll c\}$$

و

$$\beta = \{B(x, c) : x \in X, c \gg \circ\}.$$

آنگاه

$$\tau_c = \{U \subset X : \forall\, x \in U,\, \exists B \in \beta,\, x \in B \subset U\}$$

یک توپولوژی روی X است. واضح است که:

$\tau_۱$) $\emptyset \in \tau_c$ و X.

$\tau_۲$) فرض کنید $U, V \in \tau_c$ و $x \in U \cap V$. آنگاه $x \in U$ و $x \in V$، می‌توان $c_۱ \gg \theta$ و $c_۲ \gg \theta$ را طوری که پیدا کرد که:

$$x \in B(x, c_۱) \subset U, \quad x \in B(x, c_۲) \subset V$$

با استفاده از لم ۱.۲.۳ می‌توان $c \gg \theta$ را طوری پیدا کرد که $c_۱ \gg c$ و $c_۲ \gg c$ آنگاه واضح است که:

$$x \in B(x, c) \subset B(x, c_۱) \cap B(x, c_۲) \subset U \cap V$$

از این رو

$$U \cap V \in \tau_c.$$

τ_3) فرض کنید به ازای هر $\alpha \in \Delta$، $U_\alpha \in \tau_c$ هم چنین $x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$. آنگاه $\alpha_0 \in \Delta$ وجود دارد به طوری که $x \in U_{\alpha_0}$. بنابراین می‌توان $c \gg 0$ پیدا کرد به طوری که:

$$x \in B(x,c) \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$$

این بدین معنی است که:

$$\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha \in \tau_c.$$

□

قضیه ۳.۲.۱. هر فضای متریک مخروطی (X,d) یک فضای هاسدورف است.

برهان. فرض کنید x,y دو نقطه در X به طوری که $(x \neq y)$ باشند. آنگاه $d(x,y) = c \succ \theta$ به طوری

$$\left[B(x,\frac{c}{3}) \cap B(y,\frac{c}{3})\right] \in \tau_c$$

و

$$B(x,\frac{c}{3}) \cap B(y,\frac{c}{3}) = \emptyset.$$

که تضمین می‌کند حدها منحصر به فرد هستند. □

قضیه ۳.۲.۲. هر فضای متریک مخروطی (X,d) شمارای اول است.

برهان. فرض کنید $q \in X$ و ثابت $c \gg 0$ جایی که $c \in E$. β_q که به صورت

$$\beta_q = \{B(q,\frac{c}{n}) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

تعریف می‌شود. یک پایه‌ی موضعی (فضای X در نقطه‌ی $x \in X$ شمارای اول است اگر یک دسته‌ی شمارا از همسایگی‌های x مانند $\{V_n\}$ موجود باشد که برای هر همسایگی V از x، nای موجود باشد در این صورت $\{V_n\} \subseteq V$. $\{V_n\}$ را یک پایه‌ی موضعی در x گوییم. فضای X شمارای اول است اگر در هر نقطه $x \in X$ شمارای اول باشد.) در q است. فرض کنید U باز باشد و $q \in U$. حال می‌توان $c_1 \gg \theta$ را طوری پیدا کرد که $q \in B(q,c_1) \subset U$ هم چنین با استفاده از لم ۳.۱.۴ می توان n_0 را طوری پیدا کرد که $\frac{c}{n_0} \ll c_1$. بنابراین

$$B(q,\frac{c}{n_0}) \subset B(q,c_1) \subset U.$$

□

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه‌ی بسته در فضای متریک مخروطی: مجموعه‌ی A در فضای متریک مخروطی X بسته است اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در A همگرا به برخی نقاط x در X نتیجه بگیریم که $x \in X$.

برای هر $A \subset X$، تعریف می‌کنیم:

$$\bar{A} := \{x \in X \colon \exists \{x_n\} \subset A \quad x_n \to x\}.$$

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و $A \neq \emptyset$ زیرمجموعه‌ای از X باشد. آنگاه

$$x \in \bar{A} \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad d(x,A) = \theta.$$

برهان. فرض کنید $x \in \bar{A}$. آنگاه برای $c \gg \theta$ و هر $n \in N$ داریم:

$$B(x, \frac{c}{n}) \cap A \neq \emptyset.$$

بنابراین به ازای هر $n \in N$ دنباله‌ی $x_n \in A$ وجود دارد به طوری که

$$\theta \preceq d(x,A) \preceq d(x,x_n) \prec \frac{c}{n}.$$

از این رو به ازای هر $n \in N$ داریم:

$$\|d(x,A)\| \preceq K\frac{\|c\|}{n}.$$

بنابراین

$$d(x,A) = \theta.$$

برای اثبات عکس فرض کنید $U \subset \tau_c$ در (X,d) به طوری که $x \in U$ باز باشد. آنگاه می‌توان $c \gg \theta$ یافت به طوری که

$$B(x,c) \subset U.$$

اما از آنجایی که $\theta = d(x,A) \prec c$ می‌توان $a \in A$ را یافت به طوری که $d(x,a) \prec c$. این یعنی

$$a \in A \cap B(x,c) \subset A \cap U$$

بنابراین

$$x \in \bar{A}.$$

□

نتیجه ۱.۲.۳. اگر A زیرمجموعه‌ای از فضای متریک مخروطی (X,d) بسته و $x \notin A$ آنگاه

$$d(x,A) \succ \theta.$$

۳.۳ بهترین تقریب در فضاهای متریک مخروطی

نظریه‌ی تقریب توسط بسیاری از نویسندگان مورد بررسی قرار گرفته است. و می‌توان تاریخ مختصر برای نظریه‌ی تقریب را در کتاب شناخته شده‌ی سینگر [۱] [۳۶] دید. به تازگی آنالیز غیر محدب در نظریه‌ی تقریب و قضیه‌ی بهینه سازی کاربردهایی پیدا کرده است. که جایگاه خاصی در ریاضیات و آنالیز غیر محدب دارد. از این رو هوانگ و ژانگ [۲] [۱۹] در سال ۲۰۰۷

[۱] Singer

[۲] Huang and Zhang

فضای متریک مخروطی را تعریف کردند. در حال حاضر کار بر روی نظریه‌ی تقریب ادامه دارد. برای مثال برخی از آثار در مورد بهترین تقریب، ϵـ بهترین تقریب، بهترین تقریب به طور هم زمان [۳] در فضاهای نرمال و فضاهای نرمال مرتب وجود دارد.

در این بخش نتایجی را در مورد ویژگی‌های بهترین تقریب در فضاهای متریک مخروطی ارائه خواهیم داد.

تعریف ۱.۳.۳. زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی دنباله‌ای: فرض کنید (X,d) فضای متریک مخروطی و $A \subseteq X$ باشد. A زیرمجموعه‌ی فشرده دنباله‌ای X است هرگاه هر دنباله در A، زیردنباله‌ای همگرا به عضوی از A داشته باشد.

تعریف ۲.۳.۳. بهترین تقریب: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی، G یک زیر مجموعه‌ی ناتهی X و $x \in X$ باشد. در این صورت $g_\circ \in G$ بهترین تقریب x است هرگاه به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم:

$$d(x,g_\circ) \preceq d(x,g)$$

آنگاه مجموعه‌ی همه‌ی بهترین تقریب x در G را به صورت $P_G(x)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۳.۳. زیرمجموعه‌ی چبیشف: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی، و G یک زیرمجموعه‌ی ناتهی X باشد. در این صورت G یک زیرمجموعه‌ی چبیشف X است اگر به ازای هر $x \in X$، $P_G(x)$ یک زیرمجموعه‌ی تک عضوی از G باشد.
هم چنین G یک زیرمجموعه‌ی شبه چبیشف X است. اگر به ازای هر $x \in X$، $P_G(x)$ زیر مجموعه‌ی فشرده دنباله‌ای X باشد.

تعریف ۴.۳.۳. زیرمجموعه‌ی چبیشف کاذب: فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی، (X,d) یک فضای متریک مخروطی و G زیرمجموعه‌ی ناتهی X باشد. در این صورت G یک زیرمجموعه‌ی چبیشف کاذب X است اگر $x \in X$ وجود نداشته باشد به طوری که $P_G(x)$ شامل تعداد نامتناهی عناصر مستقل خطی باشد.

مثال ۱.۳.۳. فرض کنید $E = \ell^1$، $P = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E\colon x_n \geq \circ \ \forall n\}$، $(X,\|\cdot\|)$ یک فضای نرمال، G یک زیرمجموعه‌ی شبه چبیشف X و تابع d به صورت

$$d\colon X \times X \to E$$
$$d(x,y) = \{\frac{\|x-y\|}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

تعریف شود. آنگاه G یک زیرمجموعه‌ی شبه چبیشف (X,d) است.

[۳] best simultaneous approximation

لم ۱.۳.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی، G یک زیرمجموعه‌ی ناتهی X، $g_\circ \in G$ و $x \in X$ باشد. آنگاه $g_\circ \in P_G(x)$ اگر و تنها اگر تابعی مانند $f\colon X \to E$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم:

$$f(g_\circ) = d(x, g_\circ) \quad \text{و} \quad f_{g_\circ}(g) := f(g) - f(g_\circ) \in P \quad \text{و} \quad f_d(g) := d(x,g) - f(g) \in P.$$

برهان. فرض کنید یک تابع مانند $f\colon X \to E$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم:

$$f(g_\circ) = d(x, g_\circ) \quad \text{و} \quad f_{g_\circ}(g) := f(g) - f(g_\circ) \in P \quad \text{و} \quad f_d(g) := d(x,g) - f(g) \in P$$

از آنجایی که به ازای هر $g \in G$ داریم:

$$f_{g_\circ}(G) = f(G) - f(g_\circ) \subseteq P \quad \text{و} \quad f_d(G) = d(x,G) - f(G) \subseteq P$$

و

$$f(g_\circ) \preceq f(g), \quad f(g) \preceq d(x,g)$$

از این رو به ازای هر $g \in G$ داریم:

$$d(x, g_\circ) = f(g_\circ) \preceq f(g) \preceq d(x,g)$$

بنابراین

$$d(x, g_\circ) \preceq d(x,g)$$

در نتیجه

$$g_\circ \in P_G(x).$$

برای اثبات عکس فرض کنید $g_\circ \in P_G(x)$. آنگاه به ازای هر $g \in G$ داریم:

$$d(x, g_\circ) \preceq d(x,g)$$

تابع f را به صورت

$$f\colon X \to E$$
$$f(t) = d(x,t)$$

تعریف کنید. آنگاه

$$f(g_\circ) = d(x, g_\circ), \quad f(g) = d(x,g)$$

بنابراین

$$f(g_\circ) \preceq f(g)$$

در این صورت

$$f(g) - f(g_\circ) \in P$$

پس

$$f_{g_\circ}(G) \subseteq P$$

حال از آنجایی که

$$f_d(g) := d(x, g) - f(g) = \{\theta\}$$

داریم:

$$f_d(G) = \{\theta\} \subseteq P$$

بنابراین

$$f_{g_\circ}(g) := f(g) - f(g_\circ) \in P \quad \text{و} \quad f_d(g) := d(x, g) - f(g) \in P.$$

□

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی، G یک زیرمجموعه‌ی ناتهی X و $x \in X$ باشد. آنگاه $M \subseteq P_G(x)$ اگر و تنها اگر یک تابع مانند $f \colon X \to E$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $m \in M$ داشته باشیم:

$$f(m) = d(x, m) \quad \text{و} \quad f_m(G) \subseteq P \quad \text{و} \quad f_d(G) \subseteq P.$$

برهان. فرض کنید تابع $f \colon X \to E$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $m \in M$ داشته باشیم:

$$f(m) = d(x, m) \quad \text{و} \quad f_m(G) \subseteq P \quad \text{و} \quad f_d(G) \subseteq P.$$

حال با توجه به لم ۱.۳.۳ به ازای هر $m \in M$ داریم:

$$m \in P_G(x)$$

بنابراین

$$M \subseteq P_G(x).$$

برای اثبات عکس قضیه فرض کنید $M \subseteq P_G(x)$. عضو اختیاری $m_\text{۱} \in M$ را در نظر بگیرید. با توجه به لم ۱.۳.۳ یک تابع مانند $f \colon X \to E$ وجود دارد به طوری که

$$f(m_\text{۱}) = d(x, m_\text{۱}), \quad f_{m_\text{۱}}(G) \subseteq P, \quad f_d(G) \subseteq P.$$

فرض کنید $m \in M$. آنگاه

$$f_{m_\text{۱}}(m) = f(m) - f(m_\text{۱}) \in P \quad \text{و} \quad f_d(m) = d(x, m) - f(m) \in P$$

در این صورت

$$f(m_1) \preceq f(m) \quad \text{و} \quad f(m) \preceq d(x,m)$$

از آنجایی که $m \in P_G(x)$ در نتیجه

$$d(x,m) \preceq d(x,m_1)$$

بنابراین

$$d(x,m) \preceq d(x,m_1) \preceq f(m_1) \leq f(m) \preceq d(x,m)$$

از این رو

$$f(m) = d(x,m)$$

هم چنین به ازای هر $g \in G$ داریم:

$$f_m(g) = f(g) - f(m) = f(g) - d(x,m) = f(g) - d(x,m_1) = f_{m_1}(g) \in P$$

بنابراین

$$f_m(g) = f_{m_1}(g) \in P.$$

از این رو f عمل مورد نظر است. □

نتیجه ۱.۳.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و $G \subseteq X$ باشد. آنگاه G یک زیرمجموعه‌ی چبیشف X است اگر و تنها اگر $x \in X$، دو عضو متمایز $g_1, g_2 \in G$، و یک تابع $f\colon X \to E$ وجود نداشته باشد به طوری که برای $i = 1,2$

$$f(g_i) = d(x,g_i) \quad \text{و} \quad f_{g_i}(G) \subseteq P \quad \text{و} \quad f_d(G) \subseteq P$$

برقرار باشد.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و $G \subseteq X$ باشد. آنگاه G یک زیر مجموعه‌ی شبه چبیشف X است اگر و تنها اگر $x \in X$، یک دنباله‌ی $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در G بدون یک زیردنباله‌ی همگرا و تابع $f\colon X \to E$ وجود نداشته باشند به طوری که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$

$$f(g_n) = d(x,g_n) \quad \text{و} \quad f_{g_n}(G) \subseteq P \quad \text{و} \quad f_d(G) \subseteq P$$

برقرار باشد.

برهان. فرض کنید $x \in X$، دنباله‌ی $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در G بدون یک زیردنباله‌ی همگرا باشد و تابع $f\colon X \to E$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$

$$f(g_n) = d(x,g_n) \quad \text{و} \quad f_{g_n(G)} \subseteq P \quad \text{و} \quad f_d(G) \subseteq P.$$

برقرار باشد. آنگاه با توجه به قضیه‌ی ۱.۳.۳ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$g_n \in P_G(x)$$

این نتیجه می‌دهد که $P_G(x)$ فشرده‌ی دنباله‌ای نیست. (چون زیردنباله‌ی همگرا ندارد) از این رو G شبه چبیشف نیست.

برای اثبات عکس فرض کنید G یک زیرمجموعه‌ی شبه چبیشف X نباشد. آنگاه $x \in X$ و دنباله‌ی $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در $P_G(x)$ بدون یک زیردنباله‌ی همگرا وجود دارد. حال با توجه به قضیه‌ی ۱.۳.۳ تابع $f\colon X \to E$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$f(g_n) = d(x, g_n) \quad \text{و} \quad f_{g_n(G)} \subseteq P \quad \text{و} \quad f_d(G) \subseteq P.$$

□

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید که X یک فضای برداری حقیقی، (X, d) یک فضای متریک مخروطی و $G \subseteq X$ باشد. آنگاه G یک زیرمجموعه‌ی چبیشف کاذب X است. اگر و تنها اگر $x \in X$، تعداد نامتناهی عناصر مستقل خطی $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در G، و تابع $f\colon X \to E$ وجود نداشته باشند، به طوری که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$f(g_n) = d(x, g_n) \quad \text{و} \quad f_{g_n}(G) \subseteq P \quad \text{و} \quad f_d(G) \subseteq P$$

برقرار باشد.

برهان. مشابه اثبات قضیه‌ی ۲.۳.۳. □

۴.۳ قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های انقباضی در فضای متریک مخروطی

قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت، در مطالعه‌ی فضاهای متریک، جایگاه برجسته‌ای دارد. یکی از سوالات مهمی که ممکن است در این ارتباط به وجود آید، این است که ''آیا فضاهای متریک واقعاً فضای کافی برای این قضیه را فراهم می‌کنند یا نه؟'' به تازگی هانگ و ژانگ [۱۹] به این سوال پاسخ منفی دادند. در واقع آنها کسانی بودند که، مفهوم فضای متریک را معرفی کردند. در سال ۱۹۸۰ ژپکی [۴] [۲۹] قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت از نوع مایا [۵] را به طور کلی ثابت کرد. هفت سال بعد لین [۲۵] برخی از نتایج خان [۶] و امداد [۷] [۲۱] را با در نظر گرفتن این فضای متریک

[۴] Rzepecki
[۵] Maia
[۶] Khan
[۷] Imdad

جدید گسترش داد. در سال ۲۰۰۷، هوانگ و ژانگ [۱۹] برخی از خصوصیات همگرایی را مورد بحث قرار دادند. و قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت نگاشت انقباضی را برای فضای متریک مخروطی ثابت کردند. که هر نگاشت T از یک فضای متریک مخروطی کامل X به خودش اگر برای برخی $0 \leq k < 1$ و به ازای هر $x, y \in X$ در نامعادله‌ی

$$d(Tx, Ty) \preceq kd(x, y)$$

صدق کند. دارای یک نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد است. به تازگی بسیاری از نتایج در قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت به فضای متریک مخروطی گسترش پیدا کرده است. رضاپور [8] و هملبرانی [9] [۳۱] نقطه‌ی عطفی در توسعه‌ی قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت در فضای متریک مخروطی را با حذف نرمال بودن مخروط P در برخی از نتایج هانگ و ژانگ زمانی که (X, d) کامل است ایجاد کردند. که در این بخش به بررسی آنها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴.۳. نگاشت انقباضی: نگاشت انقباضی روی فضای متریک مخروطی (X, d) به صورت یک تابع T از X به خودش با این خاصیت که تعدادی عدد نامنفی $k \in [0, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) \preceq kd(x, y).$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل باشد. هم چنین نگاشت $T\colon X \to X$ به ازای هر $x, y \in X$ در شرط انقباضی

$$d(Tx, Ty) \preceq kd(x, y)$$

جایی که $k \in [0, 1)$ ثابت است صدق کند. آنگاه T یک نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد در X دارد که به ازای هر $x \in X$ دنباله‌ی تکراری $\{T^n x\}_{n \geq 1}$ همگرا به نقطه‌ی ثابت است.

برهان. به ازای هر $x_0 \in X$ و $n \geq 1$ قرار دهید:

$$x_1 = Tx_0 \quad \text{و} \quad x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0 \quad \text{و} \quad x_n = Tx_{n-1}.$$

آنگاه از آنجایی که $d(Tx, Ty) \preceq kd(x, y)$ داریم:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \preceq kd(x_n, x_{n-1}) \preceq$$
$$k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \preceq \cdots \preceq k^n d(x_1, x_0).$$

[8]Rezapour

[9]Hamlbarani

بنابراین برای $n > m$ داریم:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\preceq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\preceq \left(k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^m\right) d(x_1, x_0) \preceq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

فرض کنید $c \gg \theta$ ($c \in \text{int}P$). $\delta \succ \theta$ را طوری در نظر بگیرید که:

$$c + N_\delta(\theta) \subseteq P$$

جایی که:

$$N_\delta(\theta) = \{y \in E\colon \|y\| \prec \delta\}.$$

هم چنین عدد طبیعی N_1 را طوری در نظر بگیرید که به ازای هر $m \geq N_1$ داشته باشیم:

$$\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \in N_\delta(\theta).$$

آنگاه با توجه به لم ۴.۱.۳ و به ازای هر $m \geq N_1$ داریم:

$$\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \ll c.$$

از این رو به ازای هر $n > m$ داریم:

$$d(x_n, x_m) \preceq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \ll c.$$

بنابراین $\{x_n\}_{n\geq 1}$ یک دنباله‌ی کشی در (X, d) است. از آنجایی که (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل است، $x^* \in X$ وجود دارد به طوری که $x_n \to x^*$. عدد طبیعی N_2 را به ازای هر $n \geq N_2$ طوری که $d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{2}$ در نظر بگیرید. از این رو به ازای هر $n \geq N_2$ داریم:

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\preceq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \preceq k d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\preceq d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $m \geq 1$ داریم:

$$d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{m}.$$

از این رو به ازای هر $m \geq 1$ داریم:

$$\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \in P.$$

از آنجایی که $\frac{c}{m} \to \theta$ $m \to \infty$ و P بسته است داریم:

$$-d(Tx^*, x^*) \in P$$

اما

$$d(Tx^*, x^*) \in P$$

بنابراین

$$d(Tx^*, x^*) = \theta$$

در این صورت نتیجه می‌گیریم:

$$Tx^* = x^*.$$

□

نتیجه ۱.۴.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل باشد. برای $\theta \ll c$ و $x_\circ \in X$، مجموعه‌ی

$$B(x_\circ, c) = \{x \in X : d(x_\circ, x) \ll c\}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید نگاشت $T\colon X \to X$ به ازای هر $x, y \in B(x_\circ, c)$ در شرط انقباضی

$$d(Tx, Ty) \preceq kd(x, y)$$

جایی که $k \in [\circ, ۱)$ ثابت است صدق کند و

$$d(Tx_\circ, x_\circ) \preceq (۱ - k)c.$$

آنگاه T یک نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد در $B(x_\circ, c)$ دارد.

نتیجه ۲.۴.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل و نگاشت $T\colon X \to X$ به ازای هر $x, y \in X$ و تعدادی عدد صحیح مثبت n در شرط انقباضی

$$d(T^n x, T^n y) \preceq kd(x, y)$$

جایی که $k \in [\circ, ۱)$ ثابت است صدق کند. آنگاه T یک نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد در X دارد.

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل باشد. هم چنین نگاشت $T\colon X \to X$ به ازای هر $x, y \in X$ در شرط انقباضی

$$d(Tx, Ty) \preceq k\big(d(Tx, x) + d(Ty, y)\big)$$

جایی که $k \in [\circ, \frac{۱}{۲})$ ثابت است صدق کند. آنگاه T یک نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد در X دارد. و به ازای هر $x \in X$ دنباله‌ی تکراری $\{T^n x\}_{n \geq ۱}$ همگرا به نقطه‌ی ثابت است.

برهان. به ازای هر $x_\circ \in X$ و $n \geq ۱$ قرار دهید:

$$x_۱ = Tx_\circ \quad \text{و} \quad x_{n+۱} = Tx_n = T^{n+۱}x_\circ \quad \text{و} \quad x_n = Tx_{n-۱}.$$

آنگاه با توجه به $d(Tx,Ty) \preceq k\big(d(Tx,x)+d(Ty,y)\big)$ داریم:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_n) = d(Tx_n,Tx_{n-1}) &\preceq k\big(d(Tx_n,x_n)+d(Tx_{n-1},x_{n-1})\big) \\ &= k\big(d(x_{n+1},x_n)+d(x_n,x_{n-1})\big). \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(x_{n+1},x_n) \preceq \frac{k}{1-k} d(x_n,x_{n-1}) = hd(x_n,x_{n-1})$$

جایی که $h=\frac{k}{1-k}$. برای $n>m$ داریم:

$$\begin{aligned} &d(x_n,x_m) \preceq d(x_n,x_{n-1})+d(x_{n-1},x_{n-2})+\cdots+d(x_{m+1},x_m) \preceq \\ &\big(h^{n-1}+h^{n-2}+\cdots+h^m\big)d(x_1,x_0) \preceq \frac{h^m}{1-h}d(x_1,x_0). \end{aligned}$$

فرض کنید $\theta \ll c$. عدد طبیعی N_1 را طوری در نظر بگیرید که به ازای هر $m \geq N_1$ داشته باشیم:

$$\frac{h^m}{1-h}d(x_1,x_0) \ll c.$$

از این رو برای $n>m$ داریم:

$$d(x_n,x_m) \ll c$$

بنابراین $\{x_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ی کشی در (X,d) است. از آنجایی که (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل است، $x^* \in X$ وجود دارد به طوری که $x_n \to x^*$. عدد طبیعی N_2 را طوری در نظر بگیرید که به ازای هر $n \geq N_2$ داشته باشیم:

$$d(x_{n+1},x_n) \ll \frac{c(1-k)}{2k} \quad \text{و} \quad d(x_{n+1},x^*) \ll \frac{c(1-k)}{2}$$

از این رو برای $n \geq N_2$ داریم:

$$\begin{aligned} &d(Tx^*,x^*) \preceq d(Tx_n,Tx^*)+d(Tx_n,x^*) \preceq \\ &\qquad\qquad k\big(d(Tx_n,x_n)+d(Tx^*,x^*)\big)+d(x_{n+1},x^*). \end{aligned}$$

از این رو

$$d(Tx^*,x^*) \preceq \frac{1}{1-k}\big(kd(x_{n+1},x_n)+d(x_{n+1},x^*)\big) \ll \frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c.$$

بنابراین به ازای هر $m \geq 1$ داریم:

$$d(Tx^*,x^*) \ll \frac{c}{m}.$$

از این رو به ازای هر $m \geq 1$ داریم:

$$\frac{c}{m} - d(Tx^*,x^*) \in P.$$

از آنجایی که $\frac{c}{m} \to \theta$ $\quad m \to \infty$ و P بسته است. داریم:

$$-d(Tx^*, x^*) \in P$$

اما

$$d(Tx^*, x^*) \in P$$

بنابراین

$$d(Tx^*, x^*) = \theta$$

و از این رو

$$Tx^* = x^*.$$

حال اگر y^* نقطه‌ی ثابت دیگری در T باشد. آنگاه

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \preceq k\big(d(Tx^*, x^*) + d(Ty^*, y^*)\big) = \theta.$$

از این رو

$$x^* = y^*$$

بنابراین نقطه‌ی ثابت T منحصر به فرد است. $\square$

قضیه ۳.۴.۳. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل و نگاشت $T\colon X \to X$ به ازای هر $x, y \in X$ در شرط انقباضی

$$d(Tx, Ty) \preceq k\big(d(Tx, y) + d(x, Ty)\big)$$

جایی که $k \in [۰, \frac{۱}{۲})$ ثابت است صدق کند. آنگاه T یک نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد در X دارد. و به ازای هر $x \in X$ دنباله‌ی تکراری $\{T^n x\}_{n \geq ۱}$ همگرا به نقطه‌ی ثابت است.

برهان. به ازای هر $x_۰ \in X$ و $n \geq ۱$ قرار دهید:

$$x_۱ = Tx_۰ \quad \text{و} \quad x_{n+۱} = Tx_n = T^{n+۱}x_۰ \quad \text{و} \quad x_n = Tx_{n-۱}.$$

آنگاه با توجه به $d(Tx, Ty) \preceq k\big(d(Tx, y) + d(x, Ty)\big)$ داریم:

$$\begin{aligned} d(x_{n+۱}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-۱}) &\preceq k\big(d(Tx_n, x_{n-۱}) + d(Tx_{n-۱}, x_n)\big) \\ &\preceq k\big(d(x_{n+۱}, x_n) + d(x_n, x_{n-۱})\big). \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(x_{n+۱}, x_n) \preceq \frac{k}{۱ - k} d(x_n, x_{n-۱}) = hd(x_n, x_{n-۱})$$

جایی که $h = \frac{k}{1-k}$. برای $n > m$ داریم:

$$d(x_n, x_m) \preceq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \preceq$$
$$\big(h^{n-1} + h^{n-2} + \cdots + h^m\big) d(x_1, x_0) \preceq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0).$$

فرض کنید $c \gg \theta$. عدد طبیعی N_1 را طوری در نظر بگیرید که به ازای هر $m \geq N_1$ داشته باشیم:

$$\frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \ll c$$

از این رو برای $n > m$ داریم:

$$d(x_n, x_m) \ll c$$

بنابراین $\{x_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ی کشی در (X,d) است. از آنجایی که (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل است. $x^* \in X$ وجود دارد به طوری که $x_n \to x^*$. عدد طبیعی N_2 را طوری در نظر بگیرید که به ازای هر $n \geq N_2$ داشته باشیم:

$$d(x_n, x^*) \ll \frac{c(1-k)}{3}.$$

از این رو برای $n \geq N_2$ داریم:

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\preceq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\ &\preceq k\big(d(Tx^*, x_n) + d(Tx_n, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\preceq k\big(d(Tx^*, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*). \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(Tx^*, x^*) \preceq \frac{1}{1-k}\big(kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*) \ll \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = c.$$

بنابراین به ازای هر $m \geq 1$ داریم:

$$d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{m}$$

از این رو به ازای هر $m \geq 1$ داریم:

$$\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \in P.$$

از آنجایی که $\frac{c}{m} \longrightarrow \theta$ $\quad m \to \infty$ و P بسته است داریم:

$$-d(Tx^*, x^*) \in P$$

اما

$$d(Tx^*, x^*) \in P$$

بنابراین

$$d(Tx^*, x^*) = \theta$$

و از این رو

$$Tx^* = x^*.$$

حال اگر y^* نقطه‌ی ثابت دیگری در T باشد. آنگاه

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \preceq k\big(d(Tx^*, y^*) + d(Ty^*, x^*)\big) = ۲kd(x^*, y^*).$$

از این رو

$$d(x^*, y^*) = \theta$$

در نتیجه

$$x^* = y^*.$$

بنابراین نقطه‌ی ثابت T منحصر به فرد است. $\square$

قضیه ۴.۴.۳. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل، و نگاشت $T\colon X \to X$ به ازای هر $x, y \in X$ در شرط انقباضی

$$d(Tx, Ty) \preceq kd(x, y) + ld(y, Tx)$$

جایی که $k, l \in [۰, ۱)$ ثابت است صدق کند. آنگاه T یک نقطه‌ی ثابت در X دارد. هم چنین هرگاه $k + l < ۱$، آنگاه نقطه‌ی ثابت T منحصر به فرد است.

برهان. به ازای هر $x_۰ \in X$ و $n \geq ۱$ قرار دهید:

$$x_۱ = Tx_۰ \quad \text{و} \quad x_{n+۱} = Tx_n = T^{n+۱}x_۰ \quad \text{و} \quad x_n = Tx_{n-۱}.$$

آنگاه

$$\begin{aligned} d(x_{n+۱}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-۱}) &\preceq k\big(d(x_n, x_{n-۱}) + d(Tx_{n-۱}, x_n)\big) \\ &= kd(x_n, x_{n-۱}) \preceq k^n d(x_۱, x_۰). \end{aligned}$$

بنابراین برای $n > m$، داریم:

$$d(x_n, x_m) \preceq d(x_n, x_{n-۱}) + d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) + \cdots + d(x_{m+۱}, x_m) \preceq$$
$$(k^{n-۱} + k^{n-۲} + \cdots + k^m)d(x_۱, x_۰) \preceq \frac{k^m}{۱ - h}d(x_۱, x_۰).$$

فرض کنید $\theta \ll c$. عدد طبیعی $N_۱$ را طوری در نظر بگیرید که به ازای هر $m \geq N_۱$ داشته باشیم:

$$\frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x_۰) \ll c$$

از این رو برای $n > m$ داریم:

$$d(x_n, x_m) \ll c.$$

بنابراین $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ی کشی در (X,d) است. از آنجایی که (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل است، $x^* \in X$ وجود دارد به طوری که $x_n \to x^*$. عدد طبیعی $N_۲$ را طوری در نظر بگیرید که به ازای هر $n \geq N_۲$ داشته باشیم:

$$d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{۳}$$

از این رو برای $n > N_۲$ داریم:

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\preceq d(x_n, Tx^*) + d(x_n, x^*) = d(Tx_{n-۱}, Tx^*) + d(x_n, x^*) \\ &\preceq kd(x_{n-۱}, x^*) + ld(Tx_{n-۱}, x^*) + d(x_n, x^*) \\ &\preceq d(x_{n-۱}, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_n, x^*). \end{aligned}$$

از این رو

$$d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{۳} + \frac{c}{۳} + \frac{c}{۳} = c.$$

بنابراین به ازای هر $m \geq ۱$ داریم:

$$d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{m}$$

از این رو به ازای هر $m \geq ۱$ داریم:

$$\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \in P.$$

از آنجایی که $\frac{c}{m} \to \theta \quad m \to \infty$ و P بسته است. داریم:

$$-d(Tx^*, x^*) \in P$$

اما

$$d(Tx^*, x^*) \in P$$

بنابراین

$$d(Tx^*, x^*) = \theta.$$

و از این رو

$$Tx^* = x^*.$$

حال اگر y^* نقطه‌ی ثابت دیگری در T و $k+l<1$، آنگاه

$$d(x^*,y^*)=d(Tx^*,y^*)\preceq kd(x^*,y^*)+ld(Tx^*,y^*)=(k+l)d(x^*,y^*).$$

از این رو

$$d(x^*,y^*)=\theta$$

و

$$x^*=y^*$$

بنابراین هرگاه $k+l<1$، آنگاه نقطه‌ی ثابت T منحصر به فرد است. $\square$

فصل ۴

فضاهای نرمال مخروطی و بهترین تقریب روی این فضاها

عبدالجواد [۱] و ترک اُگلو [۲] [۱] با کمک چند نفر دیگر در سال‌های ۲۰۱۰ و ۲۰۱۲ مفهوم فضاهای نرمال مخروطی را معرفی کردند. هم چنین نشان دادند، فضاهای متریک مخروطی و از این رو فضاهای نرمال مخروطی فضاهای توپولوژیکی شمارشی اول هستند.

در سال ۲۰۱۱ اسدی [۳] [۴] و همکارانش نشان دادند که فضاهای مخروطی، واقعاً، تعمیم فضاهای متریک نیستند. و این انگیزه را برای تحقیقات بیشتر فراهم کرد.
هم چنین آنها در سال ۲۰۱۲ نشان دادند هر دو توپولوژی شمارشی اول هستند، به این معنی که توپولوژی آنها یکسان می‌باشد. در این فصل به معرفی فضاهای نرمال مخروطی و بهترین تقریب در این فضاها می‌پردازیم.

---
[۱] Abdeljawad
[۲] Turkoglo
[۳] Asadi

۱.۴ فضاهای نرمال مخروطی

در این بخش به معرفی فضاهای نرمال مخروطی و همگرایی در این فضاها می‌پردازیم. همچنین نشان خواهیم داد که فضای نرمال مخروطی یک فضای باناخ مخروطی است.

تعریف ۱.۱.۴. فضای نرمال مخروطی: فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد. هرگاه تابع $\|\cdot\|_P : X \to E$ در شرایط زیر صدق کند.

d_1) به ازای هر $x \in X$ $\quad \|x\|_P \succ \theta$؛

d_2) $\|x\|_P = \theta$ اگر و تنها اگر $x = \theta$؛

d_3) به ازای هر $x, y \in X$ $\quad \|x\|_P + \|y\|_P \succeq \|x + y\|_P$؛

d_4) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \|\alpha x\|_P = |\alpha| \|x\|_P$.

آنگاه $\|\cdot\|_P$ نرم مخروط روی X است. و به جفت $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی (CNS) گفته می‌شود.

ملاحظه ۱.۱.۴. اگر $E = \mathbb{R}$ و $P = [0, \infty)$ آنگاه هر فضای نرمال یک فضای نرمال مخروطی است.

قضیه ۱.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی باشد. هم چنین اگر

$$d(x, y) = \|x - y\|_P$$

آنگاه (X, d) یک فضای متریک مخروطی است. که در آن d متریک مخروطی تولید شده به وسیله‌ی نرم $\|\cdot\|_P$ است.

برهان. به ازای هر $x, y, z \in X$ داریم:

(۱) $d(x, y) = \theta$ اگر و تنها اگر $\|x - y\|_P = \theta$ اگر و تنها اگر $x - y = \theta$ اگر و تنها اگر $x = y$.

(۲) $d(x, y) = \|x - y\|_P = \| - (y - x)\|_P$ با توجه به (d_4) داریم:

$$\|y - x\|_P = d(y, x).$$

(۳) $d(x, y) = \|x - y\|_P = \|x - z + z - y\|_P$ با توجه به (d_3) از تعریف مخروط نرمال داریم:

$$d(x, y) = \|x - z + z - y\|_P \preceq \|x - z\|_P + \|z - y\|_P = d(x, z) + d(z, y).$$

□

در مثال زیر نشان می‌دهیم که متریک‌های مخروطی لزوماً، نرم‌های مخروطی را تولید نمی‌کنند.

مثال ۱.۱.۴. فرض کنید $X = \ell^1$، $P = [0, \infty)$ و $E = \mathbb{R}$. به ازای هر $x, y \in X$ فرض کنید

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|,$$

و

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}.$$

بنابراین d یک متریک مخروطی نسبت به P است. که نرم مخروطی نیست.

تعریف ۲.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی، $x \in X$ و $\{x_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای در X باشد. آنگاه

(۱) **همگرایی:** دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\geq 1}$ همگرا به x است هرگاه به ازای هر $\theta \ll c$، $c \in E$ عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n \geq N$ داشته باشیم:

$$\|x_n - x\|_P \ll c$$

که به صورت $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ یا $x_n \to x$ نمایش داده می‌شود.

(۲) **دنباله‌ی کشی:** دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\geq 1}$ کشی است هرگاه به ازای هر $\theta \ll c$، $c \in E$ عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر $n, m \geq N$ داشته باشیم:

$$\|x_n - x_m\|_P \ll c$$

و یا به طور معادل داشته باشیم:

$$\lim_{m,n\to\infty} \|d(x_n, x_m)\| = \lim_{m,n\to\infty} \|\|x_n - x_m\|_P\| = \theta$$

ملاحظه ۲.۱.۴. اگر X فضای نرمال مخروطی، آنگاه تعریف یک نرم مخروط از مجموعه‌ی ناتهی $A \subset X$ به صورت

$$\|A\|_P = \inf\{\|a\|_P \colon a \in A\}$$

است. بدون فرض کردن مخروط مینی‌هدرال قوی برای یک مخروط، $\|A\|_P$ بی معنی است . پس همیشه فرض می‌کنیم که مخروط P توپور و مینی‌هدرال قوی است.

لم ۱.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی و P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K، $x \in X$ و $\{x_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای در X باشد. آنگاه $\{x_n\}$ به x همگرا است اگر و تنها اگر $\|x_n - x\|_P \to \theta$ ، $n \to \infty$.

برهان. از آنجایی که هر فضای نرمال مخروطی، فضای متریک مخروطی است. بنابراین مشابه لم ۵.۱.۳ اثبات می‌شود. □

لم ۲.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی و P یک مخروط نرمال، با ثابت نرمال K، $x \in X$ و $\{x_n\}_{n\geq 1}$ یک دنباله‌ای در X باشد. آنگاه $\{x_n\}$ آنگاه دنباله‌ی کشی است اگر و تنها اگر $\|x_n - x_m\| \to \theta$ $n, m \to \infty$.

برهان. از آنجایی که هر فضای نرمال مخروطی، فضای متریک مخروطی است. بنابراین مشابه لم ۸.۱.۳ اثبات می‌شود. □

لم ۳.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی و P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K، $x \in X$ و $\{x_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای در X باشد. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به x و $\{y_n\}$ دنباله‌ای همگرا به y باشد. آنگاه:

$$\|x_n - y_n\|_P \to \|x - y\|_P.$$

برهان. از آنجایی که هر فضای نرمال مخروطی، فضای متریک مخروطی است. بنابراین مشابه لم ۹.۱.۳ اثبات می‌شود. □

تعریف ۳.۱.۴. فضای باناخ مخروطی: فضای نرمال مخروطی $(X, \|\cdot\|_P)$ فضای باناخ مخروطی است اگر هر دنباله‌ی کشی در X، همگرا در X باشد. و یا متریک مخروط القاء شده از $\|\cdot\|_P$ کامل باشد.

مثال ۲.۱.۴. فرض کنید $(E, \|\cdot\|_P)$، $E = \mathbb{R}^2$ و $P = \{(x, y) \colon x \geq 0, y \geq 0\}$. تابع $\|\cdot\|$ برای $\alpha, \beta > 0$ تعریف شده به صورت

$$\|(x, y)\|_P = (\alpha|x|, \beta|y|)$$

یک فضای نرمال مخروطی و یک فضای باناخ مخروطی است . واضح است که

d_1) $\|(x, y)\|_P \succ \theta$.

d_2)

$$\|(x, y)\|_P = \theta \Longleftrightarrow (\alpha|x|, \beta|y|) = (\theta, \theta) \Longleftrightarrow \alpha|x| = \theta \quad \text{و} \quad \beta|y| = \theta$$
$$\Longleftrightarrow x = \theta \quad \text{و} \quad y = \theta \Longleftrightarrow (x, y) = (\theta, \theta).$$

d_3)

$$\|a(x, y)\|_P = \|(ax, ay)\|_P = (|ax|, |ay|) = |a|(x, y) = |a|\|(x, y)\|_P.$$

$(d_4$

$$\|(x,y)+(z,w)\|_P = \|x+z, y+w\| = (|x+z|, |y+w|)$$
$$\preceq (|x|+|z|, |y|+|w|) = (|x|,|y|) + (|z|,|w|)$$
$$= \|(x,y)\|_P + \|(z,w)\|_P.$$

نشان دادیم $(E, \|\cdot\|_P)$، یک مخروط نرمال است.
فرض کنید $z_n = (x_n, y_n) \in \mathrm{R}^2$ یک دنباله‌ی کشی باشد از این رو با استفاده از لم ۸.۱.۳ داریم:

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\|z_n - z_m\|_P\| = \lim_{m,n\to\infty} \|\|x_n - x_m, y_n - y_m\|_P\|$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} \|(\alpha|x_n - x_m|, \beta|y_n - y_m|)\|$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} \sqrt{\alpha^2|x_n - x_m|^2 + \beta^2|y_n - y_m|^2} = \theta$$

بنابراین

$$|x_n - x_m| \to \theta \quad \text{و} \quad |y_n - y_m| \to \theta \quad n \to \infty.$$

از این رو $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌ای کشی در میدان R هستند.
می‌توان $x, y \in \mathrm{R}$ را طوری پیدا کرد که

$$|x_n - x| \to \theta \quad \text{و} \quad |y_n - y| \to \theta \quad n \to \infty.$$

حال در فضای نرمال مخروطی نشان می‌دهیم:

$$z_n = (x_n, y_n) \to z = (x, y)$$

در نتیجه $(\mathrm{R}^2, \|\cdot\|_P)$ کامل است.

$$\lim_{n\to\infty} \|\|z_n - z\|_P\| = \lim_{n\to\infty} \|\|x_n - x, y_n - y\|_P\|$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} \|(\alpha|x_n - x|, \beta|y_n - y|)\|$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} \sqrt{\alpha^2|x_n - x|^2 + \beta^2|y_n - y|^2} = \theta.$$

گزاره ۱.۱.۴. هر فضای نرمال مخروطی، فضای توپولوژیکی است.

برهان. از آنجایی که هر فضای نرمال مخروطی، فضای متریک مخروطی است. در نتیجه با توجه به توپولوژی

$$\tau_c = \{U \subset X : \forall x \in X, \exists c \gg \circ \ s.t \ B(x,c) \subset U\}$$

جایی که

$$B(x,c) = \{y \in X : \|x,y\|_P \ll c\}$$

در نتیجه هر فضای نرمال مخروطی، فضای توپولوژیکی است. □

گزاره ۲.۱.۴. متریک مخروطی d القاء شده به وسیله‌ی یک نرم مخروطی روی یک فضای نرمال مخروطی به ازای هر $x, y, a \in X$ و هر اسکالر α در روابط زیر صدق می‌کند.

$$d(x+a, y+a) = d(x, y)$$
$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y).$$

برهان. داریم:

$$d(x+a, y+a) = \|x+a-(y+a)\|_P = \|x-y\|_P = d(x, y)$$

و

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\|_P = |\alpha| \|x-y\|_P = |\alpha| d(x, y).$$

بنابراین حکم برقرار است. □

۲.۴ بهترین تقریب در نرمال و فضاهای نرمال مخروطی

مشکل بهترین تقریب، مشکل یافتن یک زیر مجموعه‌ی G از یک فضای نرمال $(X, \|\cdot\|)$، یا یک فضای متریک نرمال مخروطی $(X, \|\cdot\|_P)$ برای یک نقطه معین $x \in X$، یک عضو که نزدیکترین به x از میان تمام عضوهای G است.
این مشکل برای فضای نرمال در سال ۱۸۵۳ توسط چبیشف برای X، فضاهایی از همه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی روی فاصله‌ی بسته‌ی $[a, b]$ مورد بررسی قرار گرفت. برای فهم بهتر این مبحث خوانندگان همیشه مباحث مطرح شده توسط سینگر را در نظر گرفته‌اند.
در سال ۲۰۰۰، دب [۴] و دویک [۵] از دانشگاه النّجاح [۶] بعضی از مشکلات عمده در قضیه‌ی بهترین تقریب در فضاهای نرمال را حل کردند. نویسندگان همانند فضاهای نرمال مخروطی چند نتیجه را انتخاب، با انجام این کار، فضاهای نرمال مخروطی، واقعاً، تعمیمی از فضاهای نرمال، هم چنین فضاهای متریک مخروطی، واقعاً، تعمیمی از فضاهای متریک نیستند. نتیجه می‌شود.

تعریف ۱.۲.۴. مخروط بهترین تقریب: فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی، G زیرمجموعه‌ی X و $x \in X$ باشد. در این صورت $g_0 \in G$ یک مخروط بهترین تقریب x است

[۴] Deeb
[۵] Dwaik
[۶] An-Najah University

اگر به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم:

$$\|x - g_\circ\|_P \preceq \|x - g\|_P.$$

مجموعه‌ی همه‌ی بهترین تقریب x در G، به صورت $P_P(x, G)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۴. P-پروکسیمینال: اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$P_P(x, G) \neq \emptyset.$$

آنگاه G، P-پروکسیمینال در X است.

تعریف ۳.۲.۴. P-چبیشف: اگر به ازای هر $x \in X$، $P_P(x, G)$ یک مجموعه‌ی تک عضوی باشد. آنگاه G، P-چبیشف در X است.

تعریف ۴.۲.۴. فاصله‌ی مخروطی: فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی و G زیرمجموعه‌ای از X باشد. هم چنین $x \in X$، آنگاه فاصله‌ی مخروطی را به صورت

$$d_P(x, G) = \inf\{\|x - g\|_P \colon g \in G\}$$

تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی و G زیرمجموعه‌ای از X باشد. آنگاه

(۱) به ازای هر $x \in X, g \in G$ $\quad d_P(x + g, G) = d_P(x, G)$.

(۲) به ازای هر $x, y \in X$ $\quad d_P(x + y, G) \preceq d_P(x, G) + d_P(y, G)$.

(۳) به ازای هر $a \in \mathrm{R}, x \in X$ $\quad d_P(ax, G) = |a| d_P(x, G)$.

(۴) به ازای هر $x, y \in X$ $\quad \|d_P(x, G) - d_P(y, G)\|_P \preceq \|x - y\|_P$.

برهان. (۱) فرض کنید $x \in X$، $g \in G$ و $a \gg \theta$. آنگاه با استفاده از تعریف اینفیموم، $g_\circ \in G$ وجود دارد به طوری که

$$\|x - g_\circ\|_P \preceq d_P(x, G) + a$$

بنابراین داریم:

$$d_P(x + g, G) \preceq \|x + g - (g + g_\circ)\|_P = \|x - g_\circ\|_P \preceq d_P(x, G) + a.$$

از آنجایی که x، g و a اختیاری هستند. بنابراین با استفاده از مخروط مینی‌هدرال P، به ازای هر $x \in X$ و $g \in G$ نتیجه می‌گیریم:

$$d_P(x + g, G) \preceq d_P(x, G). \tag{۱.۴}$$

اکنون با استفاده از این رابطه و با قرار دادن $x+g$ به جای x و $-g$ به جای g، به ازای هر $x \in X$ و $g \in G$ داریم:

$$d_P(x, G) \preceq d_P(x+g, G) \tag{۲.۴}$$

حال با توجه به (۱.۴) و (۲.۴) داریم:

$$d_P(x+g, G) = d_P(x, G).$$

(۲) فرض کنید $x, y \in X$ و $a \gg \theta$ از این رو $\frac{a}{۲} = \frac{۱}{۲}a \gg \theta$.
$g_۱, g_۲ \in G$ وجود دارد به طوری که

$$\|x - g_۱\|_P \prec d_P(x, G) + \frac{a}{۲} \quad \text{و} \quad \|y - g_۲\|_P \prec d_P(y, G) + \frac{a}{۲}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d_P(x+y, G) &\preceq \|(x + y - (g_۱ + g_۲))\|_P \\ &\preceq \|x - g_۱\|_P + \|y - g_۲\|_P \\ &\preceq d_P(x, G) + \frac{a}{۲} + d_P(y, G) + \frac{a}{۲} \\ &= d_P(x, G) + d_P(y, G) + a. \end{aligned}$$

از آنجایی که a اختیاری است داریم:

$$d_P(x+y, G) \preceq d_P(x, G) + d_P(y, G).$$

(۳) فرض کنید $x \in X$، $\alpha \neq \theta$ یک اسکار و $a \gg \theta$. $g_\circ \in G$ را طوری انتخاب کنید که برای آن داشته باشیم:

$$\|x - g_\circ\|_P \preceq d_P(x, G) + \frac{a}{|\alpha|}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d(\alpha x, G) &\preceq \|\alpha x - \alpha g_\circ\|_P \\ &= |\alpha| \|x - g_\circ\|_P \\ &\preceq |\alpha| d_P(x, G)| + a \end{aligned}$$

از آنجایی که a اختیاری است. بنابراین

$$d_P(\alpha x, G) \preceq |\alpha| d_P(x, G). \tag{۳.۴}$$

اکنون با قرار دادن x به جای αx و α به جای $\frac{۱}{\alpha}$ و با توجه به (۳.۴) داریم:

$$d_P(x, G) = d_P(\frac{۱}{\alpha}.\alpha x, G) \preceq \frac{۱}{|\alpha|} d(\alpha x, G).$$

بنابراین

$$|\alpha| d_P(x, G) \preceq d_P(\alpha x, G). \qquad (۴.۴)$$

حال با توجه به (۳.۴) و (۴.۴) داریم:

$$d_P(ax, G) = |a| d_P(x, G).$$

(۴) فرض کنید که $x, y \in X$ و $a \gg \theta$. هم چنین $g_\circ \in G$ را طوری در نظر بگیرید که

$$\|y - g_\circ\|_P \preceq d_P(y, G) + a.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d_P(x, G) \preceq \|x - g_\circ\|_P &\preceq \|x - y\|_P + \|y - g_\circ\|_P \\ &\preceq \|x - y\|_P + d_P(y, G) + a. \end{aligned}$$

حال از آنجایی که a عضو اختیاری است داریم:

$$d_P(x, G) - d_P(y, G) \preceq \|x - y\|_P.$$

به همین ترتیب

$$d_P(y, G) - d_P(x, G) \preceq \|x - y\|_P.$$

بنابراین

$$\|d_P(x, G) - d_P(y, G)\|_P \preceq \|x - y\|_P.$$

□

۳.۴ مجموعه‌ای از بهترین تقریب‌ها

در این بخش، برخی از خصوصیات اساسی مجموعه‌ی $P_P(x, G)$ را معرفی می‌کنیم.

مثال ۱.۳.۴. فرض کنید $E = \mathbb{R}$، $P = [\circ, \infty)$ باشد. هم چنین اگر $X = \mathbb{R}^۲$ مجهز به نرم مخروط $\|x\|_P = |x_۱| + |x_۲|$ باشد. در این صورت برای $X = (-۱, ۱)$ و $G = \{(x_۱, x_۲) \colon x_۱ = x_۲\}$ داریم:

$$P_P(x, G) = \{(x_۱, x_۲) \in G \colon |x_۱| \leq ۱\}.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم مجموعه‌ی $P_P(x, G)$ زیرمجموعه‌ی X نیست.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط مینی‌هدرال قوی P، و G زیرمجموعه‌ای از X باشد. آنگاه

(۱) اگر $x \in G$ آنگاه

$$P_P(x,G) = \{x\}.$$

(۲) اگر G بسته نباشد. آنگاه

$$P_P(x,G) = \emptyset.$$

(۳) $P_P(x,G)$ یک مجموعه‌ی محدب است.

برهان. (۱) فرض کنید $x \in G$. آنگاه

$$d_P(x,G) = \inf\{\|x-g\|_P \colon g \in G\} = \theta.$$

بنابراین اگر $g \in P_P(x,G)$ آنگاه

$$d_P(x,g) = \theta.$$

از آنجایی که X یک فضای متریک مخروطی است داریم:

$$g = x$$

بنابراین

$$P_P(x,G) = \{x\}.$$

(۲) فرض کنید G بسته نباشد. $x \in \bar{G}/G$ را در نظر بگیرید. بنابراین برای هر $a \gg \theta$، $x_a \in G$ وجود دارد به طوری که

$$\|x - x_a\|_P \preceq a$$

از آنجایی که P مینی‌هدرال قوی است. داریم:

$$\|x - x_a\|_P = \theta$$

بنابراین $x = x_a$، از این رو $x \in G$ که یک تناقض است.

(۳). فرض کنید $\delta = d_P(x,G)$ اگر $P_P(x,G)$ تهی یا مجموعه‌ی تک عضوی باشد آنگاه حکم برقرار است. در غیر این صورت فرض کنید $y,z \in P_P(x,G)$ و $y \neq z$ برای $۰ \leq \alpha \leq ۱$ فرض کنید $w = \alpha y + (۱-\alpha)z$ آنگاه

$$\begin{aligned}
\|x-w\|_P &= \|x - (\alpha y + (۱-\alpha)z + \alpha x - \alpha x)\|_P \\
&= \|x - \alpha y - (۱-\alpha)z - \alpha x + \alpha x\|_P \\
&= \|\alpha(x-y) + (۱-\alpha)(x-z)\|_P \\
&\preceq \alpha\|x-y\|_P + (۱-\alpha)\|x-z\|_P \\
&= \alpha\delta + (۱-\alpha)\delta \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

از آنجایی که G یک زیرمجموعه و $w \in G$ نتیجه می‌گیریم:

$$\delta \preceq \|x-w\|_P.$$

بنابراین

$$\|x-w\|_P = \delta.$$

و از این رو $P_P(x,G)$ محدب است. □

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید G زیرمجموعه‌ای از یک فضای نرمال مخروطی $(X,\|\cdot\|_P)$ باشد. برای $x \in X$

(۱) اگر $z \in P_P(x,G)$ آنگاه به ازای هر اسکالر α داریم:

$$\alpha z \in P_P(\alpha x, G).$$

(۲) اگر $z \in P_P(x,G)$ آنگاه به ازای هر $g \in G$ داریم:

$$z+g \in P_P(x+g, G).$$

برهان. (۱) اگر $g \in G$ و $\alpha \neq \theta$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\|ax-g\|_P = |a|\|x-\frac{۱}{a}g\|_P &\succeq |a|\|x-z\|_P\\ &= \|ax-az\|_P.\end{aligned}$$

بنابراین

$$az \in P_P(ax,G).$$

(۲) اگر $h \in G$ آنگاه داریم:

$$\|x+g-h\|_P \succeq \|x-z\|_P = \|x+g-(z+g)\|_P.$$

بنابراین

$$z+g \in P_P(x+g,G).$$

□

تعریف ۱.۳.۴. مجموعه‌ی کراندار: فرض کنید $(X,\|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی باشد. آنگاه زیرمجموعه‌ی A از X کراندار است هرگاه

$$\sup\{\|x-y\|_P \colon x,y \in A\}$$

در E وجود داشته باشد.

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنید G زیرمجموعه‌ای از فضای متریک نرمال مخروطی X باشد. آنگاه به ازای هر $x \in X$

(۱) $P_P(x, G)$ یک مجموعه‌ی کراندار است.

(۲) اگر G بسته باشد. آنگاه $P_P(x, G)$ نیز مجموعه‌ای بسته است.

برهان. (۱) فرض کنید $g_\circ \in P_P(x, G)$ آنگاه

$$\begin{aligned}
\|g_\circ\|_P &= \|g_\circ - x + x\|_P \\
&\preceq \|g_\circ - x\|_P + \|x\|_P \\
&\preceq \|\circ - x\|_P + \|x\|_P \qquad (\text{از آنجایی که } \theta \in G) \\
&= ۲\|x\|_P \in E
\end{aligned}$$

بنابراین $P_P(x, G)$ مجموعه‌ی کراندار است.

(۲) فرض کنید $\delta = d_P(x, G)$ و g_n دنباله‌ای در $P_P(x, G)$ همگرا به g در $(X, \|\cdot\|_P)$ باشد. از آنجایی که G بسته است و $g \in G$، به ازای هر $n \in N$ داریم:

$$\|x - g_n\|_P = \delta.$$

چون تابع $\|\cdot\|_P : (X, \|\cdot\|_P) \to E$ پیوسته است بنابراین

$$\|x - g\|_P = \delta.$$

از این رو $P_P(x, G)$ بسته است. □

تعریف ۲.۳.۴. متعامد در فضای نرمال مخروطی: فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی، G زیرمجموعه‌ای از X و $x \in X$، گوییم x به G متعامد $(x \perp G)$ است اگر به ازای هر اسکار α و $g \in G$ داشته باشیم:

$$\|x\|_P \preceq \|x + \alpha g\|_P.$$

و یا

$$\|x + \alpha g\|_P - \|x\|_P \in P.$$

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی، G زیرمجموعه‌ای از X، $x \in X/\bar{G}$ و $g_\circ \in G$ باشد. آنگاه

$$g_\circ \in P_P(x, G) \qquad \text{اگر و تنها اگر} \qquad (x - g_\circ \perp G).$$

برهان. از آنجایی که به ازای هر اسکار α و هر $g \in G$ داریم:

$$g_\circ \in P_P(x, G) \qquad \text{اگر و تنها اگر} \qquad \|x - g_\circ\|_P \preceq \|x - g_\circ + \alpha g\|_P$$

هم چنین چون G زیرمجموعه‌ای از X است حکم برقرار است. □

۴.۴ قضیه‌ی بهترین تقریب برای یک مزدوج در فضای باناخ مخروطی

با استفاده از تعمیم قضیه‌ی کی‌فن [۷] نتایجی را روی نقاط انطباقی مزدوج و نقاط ثابت مزدوج، روی فضاهای مخروطی نرمال برای اولین بار (به طور مستقل) توسط باناخ، هان [۸] و وینر [۹] ارائه شد. این نظریه‌ی به سرعت در حال پیشرفت ده سال بعد توسط باناخ منتشر شد. ژپکی نه تنها یک متریک تعمیم یافته، بلکه یک فضای نرم دار را نیز معرفی کرد [۲۹] . تعمیمی از فضاهای نرمال و فضاهای مخروط نرمال نقش بسیار مهمی در نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت بازی می‌کند. به نظر می‌رسد خواص اصلی فضاهای نرمال مخروطی برای اولین بار توسط سُنمز [۱۰] ، کارپینار [۱۱] [۲۲] و عبدالجواد [۱۲] [۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. کاراپینار و ترگلو [۲۴] قضیه‌ی ۳.۴.۴ را برای فضاهای نرمال مخروطی با استفاده از قضیه‌ی کی‌فن، برای فضاهای توپولوژیکی اثبات کردند. به عنوان یک نتیجه از قضیه‌ی ۲.۳، [۳۵] داریم که فضای نرمال مخروطی در قضیه‌ی کی‌فن صدق می‌کند. با استفاده از قضیه‌ی کی‌فن نتایجی در نقاط انطباقی مزدوج و نقاط ثابت مزدوج در فضاهای نرمال مخروطی به دست می‌آوریم.

تعریف ۱.۴.۴. نگاشت $T\colon (X,\|\cdot\|_{P_1}) \to (Y,\|\cdot\|_{P_2})$ در $x_0 \in X$ پیوسته است اگر به ازای هر $c \gg \theta$، $c \in E$ وجود داشته باشد $c_1 \gg \theta$، $c_1 \in E$ به طوری که به ازای هر $x \in X$

$$\|x - x_0\|_{P_1} \prec c$$

نتیجه دهد:

$$\|Tx - Tx_0\|_{P_2} \prec c_1.$$

T پیوسته است اگر در هر $x \in X$ پیوسته باشد.

تعریف ۲.۴.۴. ساختار محدب روی فضای نرمال مخروطی: فرض کنید (X,d) یک فضای نرمال مخروطی و $I = [0,1]$ بازه‌ی یکه‌ی بسته باشد. نگاشت پیوسته‌ی $W\colon X \times X \times I \to X$ یک ساختار محدب روی X است اگر به ازای هر $x,y \in X$، $t \in I$ و $u \in X$ داشته باشیم:

$$\|u - W(x,y,t)\|_P \preceq t\|u - x\|_P + (1-t)\|u - y\|_P.$$

---

[۷] Ky Fan's

[۸] Hahn

[۹] Wiener

[۱۰] Sonmez

[۱۱] Karapinar

[۱۲] Abdeljawad

ملاحظه ۱.۴.۴. یک فضای نرمال مخروطی، همراه با ساختار محدب یک فضای نرمال مخروطی محدب است.

تعریف ۳.۴.۴. مجموعه‌ی محدب: زیرمجموعه‌ی Y از X محدب است اگر به ازای هر $x, y \in X$ و $t \in I$ داشته باشیم:

$$W(x, y, t) \in Y.$$

تعریف ۴.۴.۴. نگاشت تقریباً شبه محدب: فرض کنید X یک فضای نرمال مخروطی، K و C زیرمجموعه‌های محدب ناتهی X باشند. نگاشت $g\colon K \to X$ تقریباً شبه محدب نسبت به C است اگر به ازای هر $x, y \in K$، $z \in C$ و $0 < t < 1$ داشته باشیم:

$$\|g(tx + (1-t)y) - z\|_P \preceq c_g\left([tx + (1-t)y], z\right)$$

جایی که

$$c_g([tx + (1-t)y], z) \in \{\|g(x) - z\|_P, \|g(y) - z\|_P\}$$

باشد.

۱.۴.۴ قضیه‌ی مزدوج ثابت روی فضای متریک مخروطی

ملاحظه ۲.۴.۴. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی باشد. هم چنین $X^2 = X \times X$ آنگاه نگاشت ρ که به صورت

$$\rho := X^2 \times X^2 \to E$$
$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

تعریف می‌شود. صورتی از یک متریک مخروطی روی X^2 است.

تعریف ۵.۴.۴. دنباله‌ی دوگان: به دنباله‌ی $(\{x_n\}, \{y_n\}) \in X^2$ دنباله‌ی دوگان X گفته می‌شود.

تعریف ۶.۴.۴. همگرایی دنباله‌ی دوگان: دنباله‌ی $(\{x_n\}, \{y_n\}) \in X^2$ همگرا به $(x, y) \in X^2$ است اگر به ازای هر $c \gg \theta$ $(c \in \mathrm{int}P)$ عدد طبیعی مانند $N > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم:

$$\rho((x_n, y_n), (x, y)) \ll c.$$

لم ۱.۴.۴. فرض کنید $z_n = (x_n, y_n) \in X^2$ و $z = (x, y) \in X^2$. آنگاه

$$z_n \to z. \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad y_n \to y \ \text{و}\ x_n \to x$$

برهان. فرض کنید $z_n \to z$ بنابراین به ازای هر $c \in \text{int}P$، $N > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $n > N$ داریم:

$$\rho((x_n, y_n), (x, y)) = d(x_n, x) + d(y_n, y) \ll c$$

بنابراین به ازای هر $n > N$ داریم:

$$d(x_n, x) \ll c \quad \text{و} \quad d(y_n, y) \ll c$$

در نتیجه $x_n \to x$ و $y_n \to y$.

برای اثبات عکس لم فرض کنید $x_n \to x$ و $y_n \to y$. بنابراین به ازای هر $c \in \text{int}P$، $N_0, N_1 > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $n > N_0$

$$d(x_n, x) \ll \frac{c}{2}$$

و به ازای هر $n > N_1$

$$d(y_n, y) \ll \frac{c}{2}$$

از این رو به ازای هر $n > N$ داریم:

$$\rho((x_n, y_n), (x, y)) = d(x_n, x) + d(y_n, y) \ll c.$$

در نتیجه $z_n \to z$.

جایی که $N := \max\{N_0, N_1\}$. □

تعریف ۷.۴.۴. پیوسته‌ی دنباله‌ای: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مخروطی باشد. تابع $f\colon X \to X$ پیوسته‌ی دنباله‌ای است اگر

$$d(x_n, x) \to \theta$$

نتیجه دهد:

$$d(f(x_n), f(x)) \to \theta.$$

به طور مشابه تابع $F\colon X \times X \to X$ پیوسته‌ی دنباله‌ای است اگر

$$\rho((x_n, y_n), (x, y)) \to \theta$$

نتیجه دهد:

$$\rho(F(x_n, y_n), F(x, y)) \to \theta.$$

تعریف ۸.۴.۴. نگاشت پیوسته: نگاشت $f\colon (X, d) \to (X, d)$ در $x \in X$ پیوسته است اگر وجود داشته باشد $V \in \tau_c$ شامل fx، و $U \in \tau_c$ شامل x به طوری که

$$f(U) \subset V.$$

f پیوسته است اگر در هر $x \in X$ پیوسته باشد.

گزاره ۱.۴.۴. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مخروطی و $f\colon (X,d)\to(X,d)$ یک تابع باشد. در این صورت

$$f \text{ پیوسته‌ی دنباله‌ای است} \iff f \text{ پیوسته باشد.}$$

برهان. فرض کنید $x_n \to x$ و $c \gg \theta$. از آنجایی که f در $x\in X$ پیوسته است آنگاه می‌توان $c_1 \gg \theta$ را پیدا کرد، به طوری که طبق تعریف تابع پیوسته داشته باشیم:

$$f(B(x,c_1)) \subset B(fx,c).$$

حال با توجه به همگرایی x_n می‌توان n_0ای پیدا کرد، به طوری که به ازای هر $n\geq n_0$ داشته باشیم:

$$d(x_n,x) \ll c_1$$

آنگاه به ازای هر $n\geq n_0$ داریم:

$$d(fx_n,fx) \ll c$$

بنابراین f پیوسته‌ی دنباله‌ای است.
از آنجایی که (X,d) فضای توپولوژیکی شمارش اول است آنگاه عکس معکوس نیز برقرار است.
□

تعریف ۹.۴.۴. خاصیت یکنوای مخلوط: فرض کنید $(X,\preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی، و تابع $F\colon X\times X\to X$ مفروض باشد. گوییم F خاصیت یکنوای مخلوط دارد اگر $F(x,y)$ یکنوای ناکاهشی در x و یکنوای ناافزایشی در y باشد. یعنی به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم:

$$x_1\preceq x_2 \Longrightarrow F(x_1,y)\preceq F(x_2,y) \quad x_1,x_2\in X$$
$$y_1\preceq y_2 \Longrightarrow F(x,y_1)\preceq F(x,y_2) \quad y_1,y_2\in X.$$

تعریف ۱۰.۴.۴. نقطه‌ی ثابت مزدوج: عضو $(x,y)\in X\times X$ نقطه‌ی ثابت مزدوج نگاشت $F\colon X\times X\to X$ است هرگاه

$$F(x,y)=x \quad \text{و} \quad F(y,x)=y.$$

ملاحظه ۳.۴.۴. در قضایای ۱.۴.۴ و ۲.۴.۴ فرض کنید $(X,\preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و d یک متریک مخروطی روی X به طوری که (X,d) یک فضای متریک مخروطی کامل است.
علاوه بر این فضای ضربی $X\times X$ به هر $(x,y),(u,v)\in X\times X$ دارای رابطه‌ی ترتیبی زیر است.

$$(u,v)\preceq(x,y) \Longleftrightarrow u\preceq x \quad \text{و} \quad y\preceq v.$$

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید $F\colon X\times X\longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته که خاصیت یکنوای مختلط روی X دارد. هم چنین فرض کنید $k\in[\circ,۱)$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x\succeq u, y\preceq v$؛

$$d(F(x,y),F(u,v))\preceq\frac{k}{۲}\,[d(x,u)+d(y,v)]$$

هم چنین اگر وجود داشته باشد $x_\circ,y_\circ\in X$ به طوری

$$x_\circ\preceq F(x_\circ,y_\circ)\quad \text{و}\quad y_\circ\succeq F(y_\circ,x_\circ)$$

آنگاه وجود دارد $x,y\in X$ به طوری که

$$x=F(x,y)\quad \text{و}\quad y=F(y,x).$$

برهان. به [۲۳] رجوع شود. □

قضیه ۲.۴.۴. فرض کنید $F\colon X\times X\longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته با خاصیت یکنوا مختلط روی X باشد. هم چنین X دارای خواص زیر باشد.

(۱) اگر دنباله‌ی ناکاهشی $\{x_n\}\longrightarrow x$، آنگاه به ازای هر n $\quad x_n\preceq x$؛

(۲) اگر دنباله‌ی ناافزایشی $\{y_n\}\longrightarrow y$، آنگاه به ازای هر n $\quad y\preceq y_n$.

فرض کنید $k\in[\circ,۱)$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x\succeq u, y\preceq v$؛

$$d(F(x,y),F(u,v))\preceq\frac{k}{۲}[d(x,u)+d(y,v)],$$

هم چنین اگر وجود داشته باشد $x_\circ,y_\circ\in X$ به طوری

$$x_\circ\preceq F(x_\circ,y_\circ)\quad \text{و}\quad y_\circ\succeq F(y_\circ,x_\circ)$$

آنگاه وجود دارد $x,y\in X$ به طوری که

$$x=F(x,y)\quad \text{و}\quad y=F(y,x).$$

برهان. به [۲۳] رجوع شود. □

تعریف ۱۱.۴.۴. پوسته‌ی محدب: فرض کنید C زیرمجموعه‌ای از فضای باناخ X باشد. آنگاه پوسته‌ی محدب C به صورت

$$\mathrm{co}(C)=\left\{\sum\lambda_i x_i\colon \circ\leq\lambda_i\leq ۱,\ \sum\lambda_i=۱,\ x_i\in C\right\}$$

یا مجموعه‌ای از ترکیبات نقاط محدب در C تعریف می‌شود.

تعریف ۱۲.۴.۴. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی، 2^X را خانواده‌ای از تمام زیرمجموعه‌های ناتهی X، هم چنین نگاشت چند مقداری یا نگاشت F از X به توی Y را به صورت

$$F\colon X \to 2^Y$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۳.۴.۴. نگاشت KKM : فرض کنید (X, d) یک فضای نرمال مخروطی، و K زیر مجموعه‌ای از آن باشد. مجموعه‌ی مقادیر نگاشت $H\colon K \to 2^X$ نگاشت KKM است هرگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی متناهی $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ از K داشته باشیم:

$$\mathrm{co}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} H(x_i),$$

که co پوسته‌ی محدب تعریف می‌شود.

قضیه ۳.۴.۴. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی، K زیرمجموعه‌ی ناتهی از X و $H\colon K \to 2^X$ نگاشتی KKM با مقدار بسته باشد. اگر $H(x)$ برای حداقل یک $x \in K$ فشرده باشد. آنگاه

$$\bigcap_{x \in K} H(x) \neq \emptyset.$$

برهان. به [۳۷] رجوع شود. □

قضیه ۴.۴.۴. اگر $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ یک تابع پیوسته بین فضای متریک مخروطی روی E و S یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی X باشد. آنگاه $f(S)$ در (Y, ρ) فشرده است.

برهان. از آنجایی که فضای‌های متریک مخروطی، فضاهای توپولوژیکی هستند. مشابه آنچه در فضاهای توپولوژیکی است، اثبات می‌شود. □

قضیه ۵.۴.۴. فرض کنید A یک زیرمجموعه‌ی فشرده از یک فضای متریک مخروطی (X, d) باشد. آنگاه A بسته و کراندار است.

برهان. به ازای هر $x \in \bar{A}$، دنباله‌ی $\{x_n\}$ در A وجود دارد به طوری که:

$$x_n \xrightarrow{d} x.$$

از آنجایی که A فشرده و $x \in A$، نتیجه می‌شود A بسته است.
برای اثبات کرانداری فرض کنید (فرض خلف) A کراندار نباشد. در این صورت شامل یک دنباله‌ی بی‌کران y_n است. فرض کنید a هر عضو ثابت در A باشد. $d(y_n, a) \succ n$ را در نظر بگیرید. y_n نمی‌تواند یک زیردنباله‌ی همگرا داشته باشد. زیرا دنباله‌ی همگرا باید کراندار باشد. بنابراین فرض خلف باطل و A کراندار است.

□

قضیه ۶.۴.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط مینی‌هدرال قوی P و K زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب فشرده‌ی X باشد. حال اگر $F\colon K\times K\to X$ نگاشت پیوسته و $g\colon K\to X$ نگاشت پیوسته‌ی تقریباً شبه محدب نسبت به $F(K\times K)$ باشد. آنگاه $(x_\circ, y_\circ)\in K\times K$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}&\|g(x_\circ)-F(x,y)\|_P+\|g(y_\circ)-F(y,x)\|_P\\&\quad=\inf_{(x,y)\in K\times K}\{\|g(x)-F(x,y)\|_P+\|g(y)-F(y,x)\|_P\}.\end{aligned}$$

برهان. فرض کنید نگاشت $H\colon K\times K\to ۲^{K\times K}$ به ازای هر $(u,v)\in K\times K$ به وسیله‌ی

$$\begin{aligned}H(u,v)=&\{(x,y)\in K\times K\colon \|g(x)-F(x_\circ,y_\circ)\|_P+\|g(y)-F(y_\circ,x_\circ)\|_P\\&\preceq\|g(u)-F(x_\circ,y_\circ)\|_P+\|g(v)-F(y_\circ,x_\circ)\|_P\}\end{aligned}$$

تعریف شود. از آنجایی که $(u,v)\in H(u,v)$ آنگاه

$$H(u,v)\neq\emptyset$$

با توجه به اینکه نگاشت F و g پیوسته هستند. بنابراین به ازای هر (u,v)، $H(u,v)$ بسته است. هم چنین از آنجایی که K فشرده است، آنگاه به ازای هر (u,v)، $H(u,v)$ فشرده است. حال نشان می‌دهیم H نگاشت KKM است.
فرض کنید(فرض خلف) $(u_i,v_j)\in K\times K$، $i\in I, j\in J$ جایی که I و J زیرمجموعه‌های متناهی از $\mathbb{N}$، آنگاه وجود دارد

$$(u_\circ,v_\circ)\in \operatorname{co}\{(u_i,v_j)\colon (i,j)\in I\times J\} \tag{۵.۴}$$

به طوری که

$$(u_\circ,v_\circ)\notin\cup\{H(u_i,v_j)\colon (i,j)\in I\times J\}.$$

با توجه به معادله‌ی (۵.۴)، $t_{ij}\geq ۰$، $(i,j)\in I\times J$ وجود دارد به طوری که

$$(u_\circ,v_\circ)=\sum_{(i,j)\in I\times J}t_{ij}(u_i,v_j)\quad \text{و}\quad \sum_{(i,j)\in I\times J}t_{ij}=۱.$$

مجموعه‌ی t_i و z_j را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$t_i=\sum_{j\in J}t_{ij}\quad\text{و}\quad z_j=\sum_{i\in I}t_{ij}$$

آنگاه

$$\sum_{j\in J}z_j=۱\quad\text{و}\quad\sum_{i\in I}t_i=۱$$

و

$$\sum_{j\in J} z_j v_j = v_\circ \quad \text{و} \quad \sum_{i\in I} t_i u_i = u_\circ.$$

حال از آنجایی که g تقریباً شبه محدب نسبت به $F\colon K\times K\to X$ داریم:

$$\|g(u_\circ)-F(u_\circ,v_\circ)\|_P \preceq c_g((u_\circ),F(u_\circ,v_\circ))$$

و

$$\|g(v_\circ)-F(v_\circ,u_\circ)\|_P \preceq c_g((v_\circ),F(v_\circ,u_\circ))$$

جایی که

$$c_g(u_\circ,F(u_\circ,v_\circ)) \in \{\|g(u_i)-F(u_\circ,v_\circ)\|_P\colon i\in I\}$$

و

$$c_g(v_\circ,F(v_\circ,u_\circ)) \in \{\|g(v_i)-F(v_\circ,u_\circ)\|_P\colon j\in J\}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&\|g(u_\circ)-F(u_\circ,v_\circ)\|_P+\|g(v_\circ)-F(v_\circ,u_\circ)\ \|_P\\ &\quad\preceq \inf\{\|g(u_i)-F(u_\circ,v_\circ)\|_P\colon i\in I\}+\inf\{\|g(v_j)-F(v_\circ,u_\circ)\|_P\colon j\in J\}.\end{aligned}$$

حال با توجه به (۵.۴) به ازای هر $(i,j)\in I\times J$ داریم:

$$\begin{aligned}&\|g(u_\circ)-F(u_\circ,v_\circ)\|_P+\|g(v_\circ)-F(v_\circ,u_\circ)\ \|_P\\ &\quad\succ \|g(u_i)-F(u_\circ,v_\circ)\|_P+\|g(v_i)-F(v_\circ,u_\circ)\|_P\end{aligned}$$

که تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و H نگاشت KKM است.
در این صورت نتیجه می‌گیریم $(x_\circ,y_\circ)\in K\times K$ وجود دارد، به طوری که به ازای هر $(x,y)\in K\times K$ داریم:

$$(x_\circ,y_\circ)\in H(x,y)$$

بنابراین به ازای هر $(x,y)\in K\times K$ داریم:

$$\begin{aligned}&\|g(x_\circ)-F(x_\circ,y_\circ)\|_P+\|g(y_\circ)-F(y_\circ,x_\circ)\|_P\\ &\quad\preceq \|g(x)-F(x_\circ,y_\circ)\|_P+\|g(y)-F(y_\circ,x_\circ)\|_P.\end{aligned}$$

□

قضیه ۷.۴.۴. فرض کنید $(X,\|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط مینی‌هدرال قوی P و K زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب فشرده‌ی X باشد. اگر $F\colon K\times K\to X$ نگاشتی پیوسته و $g\colon X\to K$ نگاشت پیوسته‌ی تقریباً شبه محدب نسبت به $F(K\times K)$ به طوری که $F(K\times K)\subset g(K)$ آنگاه F و g یک نقطه‌ی انطباقی مزدوج دارند.

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۶.۴.۴، $(x_\circ, y_\circ) \in K \times K$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}&\|g(x_\circ) - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|g(y_\circ) - F(y_\circ, x_\circ)\|_P \\ &\qquad = \inf_{(x,y)\in K\times K}\{\|g(x) - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|g(y) - F(y_\circ, x_\circ)\|_P\}.\end{aligned}$$

از آنجایی که $F(K \times K) \subset g(K)$

$$\inf_{(x,y)\in K\times K}\{\|g(x) - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|g(y) - F(y_\circ, x_\circ)\|_P\} = \theta$$

آنگاه

$$\| g(x_\circ) - F(x_\circ, y_\circ) \|_P + \| g(y_\circ) - F(y_\circ, x_\circ) \|_P = \theta.$$

بنابراین

$$g(x_\circ) = F(x_\circ, y_\circ) \quad \text{و} \quad g(y_\circ) = F(y_\circ, x_\circ).$$

□

قضیه ۸.۴.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط مینی‌هدرال قوی P و K یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب فشرده از X باشد. اگر $F\colon K \times K \to X$ نگاشتی پیوسته باشد. آنگاه F یک نقطه‌ی ثابت مزدوج دارد.

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۷.۴.۴ و تعریف نگاشت g به صورت

$$g\colon K \to X$$
$$g(x) = x$$

حکم برقرار است. □

قضیه ۹.۴.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط مینی‌هدرال قوی P و K زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب فشرده‌ی X باشد. اگر $F\colon K \times K \to X$ نگاشتی پیوسته آنگاه هر F یک نقطه‌ی ثابت مزدوج دارد.
و یا $(x_\circ, y_\circ) \in (\partial K \times K \cup K \times \partial K)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $(x, y) \in K \times K$ داریم:

$$\begin{aligned}\theta \prec \|x_\circ - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|y_\circ - F(y_\circ, x_\circ)\|_P \preceq \\ \|x - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|y - F(y_\circ, x_\circ)\|_P.\end{aligned} \tag{۶.۴}$$

برهان. اگر F دارای یک نقطه‌ی ثابت مزدوج باشد. آنگاه قضیه اثبات شده است. فرض کنید F نقطه‌ی ثابت مزدوج نداشته باشد. با توجه به قضیه‌ی ۶.۴.۴، $(x_\circ, y_\circ) \in K \times K$ وجود دارند

به طوری که

$$\|g(x_\circ) - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|g(y_\circ) - F(y_\circ, x_\circ)\|_P$$
$$= \inf_{(x,y)\in K\times K}\{\|g(x) - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|g(y) - F(y_\circ, x_\circ)\|_P\}.$$

فرض کنید $g(x) = x$ در این صورت داریم:

$$\theta \prec \|x_\circ - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|y_\circ - F(x_\circ, y_\circ)\|_P \preceq \|x - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|y - F(y_\circ, x_\circ)\|_P.$$

حال کافی است نشان دهیم:

$$(x_\circ, y_\circ) \in (\partial K \times K \cup K \times \partial K).$$

فرض کنید (فرض خلف) $(x_\circ, y_\circ) \notin (\partial K \times K \cup K \times \partial K)$ از نامعادله‌ی (۶.۴) نتیجه می‌گیریم:

$$F(x_\circ, y_\circ) \notin K \quad \text{یا} \quad F(y_\circ, x_\circ) \notin K.$$

در حالتی که $F(x_\circ, y_\circ) \notin K$ فرض کنید $x_\circ \in \operatorname{int}(K)$. از آنجایی که K محدب است. آنگاه $t \in (\circ, ۱)$ وجود دارد به طوری که

$$x = tx_\circ + (۱ - t)F(x_\circ, y_\circ) \in K$$

از این رو

$$x = tx_\circ + F(x_\circ, y_\circ) - tF(x_\circ, y_\circ)$$

بنابراین

$$\|x - F(x_\circ, y_\circ)\|_P = t\|x_\circ - F(x_\circ, y_\circ)\|_P$$

و

$$\inf_{x\in K}\|x - F(x_\circ, y_\circ)\|_P \preceq t\|x_\circ - F(x_\circ, y_\circ)\|_P \prec \|x_\circ - F(x_\circ, y_\circ)\|_P.$$

که این یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.
حالت دوم:
مشابه حالت اول با فرض $F(y_\circ, x_\circ) \notin K$ به یک تناقض می‌رسیم.
بنابراین

$$(x_\circ, y_\circ) \in (\partial K \times K \cup K \times \partial K).$$

□

قضیه ۱۰.۴.۴. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_P)$ یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط مینی‌هدرال قوی P و K زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب فشرده‌ی X، و $F\colon K \times K \to X$ نگاشتی پیوسته باشد. آنگاه F نقطه‌ی ثابت مزدوج دارد اگر به ازای هر $(x_\circ, y_\circ) \in (\partial K \times K \cup K \times \partial K)$ به طوری که $(x, y) \neq (F(x, y), F(y, x))$ یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) یک $(u,v)\in K\times K$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\|u-F(x,y)\|_P \prec \|x-F(x,y)\|_P \quad \text{و} \quad \|v-F(y,x)\|_P \prec \|y-F(y,x)\|_P$$

(۲) $t\in(\circ,۱)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$K\cap(B(F(x,y),t\|x-F(x,y)\|_P))\neq\emptyset \quad \text{و} \quad K\cap(B(F(y,x),t\|y-F(y,x)\|_P))\neq\emptyset$$

(۳) $\{F(x,y),F(y,x)\}\subset K$

برهان. فرض کنید $\{F(x,y),F(y,x)\}\subset K$ آنگاه (۲) برقرار است. هم چنین از (۲)، (۱) را نتیجه می‌گیریم.
کافی است نشان دهیم (۱) برقرار است. در این صورت قضیه اثبات می‌شود. فرض کنید (۱) برقرار باشد. و F نقطه‌ی ثابت مزدوج نداشته باشد. قضیه‌ی ۹.۴.۴ را در نظر می‌گیریم آنگاه $(x_\circ,y_\circ)\in(\partial K\times K\cup K\times\partial K)$ وجود دارد به طوری که شرط (۱) یک تناقض است. بنابراین F نقطه‌ی ثابت مزدوج دارد. □

۵.۴ نکاتی در مورد نقاط انطباقی مزدوج روی فضای نرمال مخروطی

در این بخش در ادامه‌ی بخش ۴.۴ به بررسی تعمیم قضیه‌ی کی‌فن روی فضاهای متریک مخروطی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۵.۴. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک هاسدورف و $F\colon X\to ۲^Y$ یک نگاشت با مقدار ناتهی، آنگاه F

(۱) **نیم پیوسته‌ی بالایی:** F نیم پیوسته‌ی بالایی است اگر برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی $B\subseteq Y$

$$F^-(B)=\{x\in X\colon F(x)\cap B\neq\emptyset\}$$

در X بسته باشد.

(۲) **نیم پیوسته‌ی پایینی:** F نیم پیوسته‌ی پایینی است اگر برای هر مجموعه‌ی باز $B\subseteq Y$

$$F^-(B)=\{x\in X\colon F(x)\cap B\neq\emptyset\}$$

در X باز باشد.

(۳) **پیوسته:** F پیوسته است اگر هم نیم پیوسته‌ی بالایی و هم نیم پیوسته‌ی پایینی باشد.

تعریف ۲.۵.۴. فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و $\|\cdot\|_P$ یک نرم مخروط روی X، به طوری که X یک فضای نرمال مخروطی کامل روی مخروط نرمال، با ثابت نرمال K باشد. در این صورت نگاشت $\|\cdot\|_P$ به صورت

$$\begin{aligned} &\|\cdot\|_P\colon X\times X\to E\\ &\qquad\|(x_۱,y_۱)-(x_۲,y_۲)\|_P=\|x_۱-y_۱\|_P+\|x_۲-y_۲\|_P \end{aligned}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۵.۴. نگاشت محدب نسبت به یک مجموعه: فرض کنید X یک فضای نرمال مخروطی، K و U زیرمجموعه‌های ناتهی محدب X باشند. به نگاشت $F\colon K\to ۲^X$ محدب نسبت به U گفته می‌شود. اگر به ازای هر $u\in U$، $x,y\in K$ و $\lambda\in[۰,۱]$ داشته باشیم:

$$\|F(\lambda x+(۱-\lambda)y)-u\|_P\preceq\lambda\|F(x)-u\|_P+(۱-\lambda)\|F(y)-u\|_P.$$

لم ۱.۵.۴. فرض کنید K یک زیرمجموعه‌ی محدب از فضای نرمال مخروطی X باشد. اگر نگاشت $F\colon K\to ۲^X$ محدب نسبت به U باشد. آنگاه به ازای هر $x_i\in K$، $u\in U$ و هم چنین $\lambda_i\in[۰,۱], i=۱,\cdots,n, n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\|F(\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i x_i)-u\|_P\preceq\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i\|F(x_i)-u\|_P$$

به طوری که $\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i=۱$.

برهان. با استفاده از تعریف ۳.۵.۴ برقرار است. □

قضیه ۱.۵.۴. فرض کنید X یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط P و K زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب فشرده‌ی X، و نگاشت‌های $F\colon K\times K\to X$ و $G\colon K\to ۲^X$ پیوسته باشند. اگر نگاشت محدب $H\colon K\to ۲^X$ نسبت به $F(K\times K)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x,y\in K$ داشته باشیم:

$$\|G(x)-F(x,y)\|_P\preceq\|H(x)-F(x,y)\|_P \tag{۷.۴}$$

آنگاه وجود دارد $(x_۰,y_۰)\in K\times K$ به طوری که

$$\begin{aligned} &\|G(x_۰)-F(x_۰,y_۰)\|_P+\|G(y_۰)-F(y_۰,x_۰)\|_P\\ &=\inf_{(x,y)\in K\times K}\{\|H(x)-F(x_۰,y_۰)\|_P+\|H(y)-F(y_۰,x_۰)\|_P\}. \end{aligned}$$

علاوه بر این اگر $G\colon K\to 2^K$ و $H\colon K\to 2^K$ نگاشت پوشا باشند. آنگاه وجود دارد $(x_0,y_0)\in K\times K$ به طوری که

$$\begin{aligned}&\|G(x_0)-F(x_0,y_0)\|_P+\|G(y_0)-F(y_0,x_0)\|_P\\&=\inf_{(x,y)\in K\times K}\{\|x-F(x_0,y_0)\|_P+\|x-F(y_0,x_0)\|_P\}.\end{aligned}$$

برهان. نگاشت $S\colon K\times K\to 2^{K\times K}$ را به ازای هر $(z,t)\in K\times K$ به صورت

$$\begin{aligned}S(z,t)=\{(x,y)\in K\times K\colon &\|G(x)-F(x,y)\|_P+\|G(y)-F(y,x)\|_P\\&\preceq\|H(z)-F(x,y)\|_P+\|H(t)-F(y,x)\|_P\}\end{aligned}$$

تعریف کنید. حال با توجه به (۷.۴) داریم:

$$(z,t)\in S(z,t).$$

از این رو به ازای هر $(z,t)\in K\times K$، $S(z,t)$ ناتهی است.
از آنجایی نگاشت‌های F و G پیوسته هستند. در نتیجه به ازای هر $(z,t)\in K\times K$، $S(z,t)$ بسته است.
هم چنین از آنجایی که $K\times K$ مجموعه‌ی فشرده است آنگاه به ازای هر $(z,t)\in K\times K$، $S(z,t)$ فشرده است. نشان می‌دهیم که S نگاشت KKM است.
فرض کنید (فرض خلف) به ازای هر

$$(z_i,t_i)\in K\times K, i\in\{1,\cdots,n\}$$

وجود دارد

$$(z_0,t_0)\in \mathrm{co}\{(z_1,t_1),\dots,(z_n,t_n)\}$$

به طوری که

$$(z_0,t_0)\notin\bigcup_{i=1}^{n}S(z_i,t_i). \tag{۸.۴}$$

اکنون با توجه به تعریف پوسته‌ی محدب $\{\lambda_i\geq 0\colon i\in\{1,\cdots,n\}\}$ وجود دارد به طوری که

$$(z_0,t_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(z_i,t_i)\quad \text{و}\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$$

از آنجایی که H محدب نسبت به $F(K\times K)$ است، داریم:

$$\begin{aligned}\|H(z_0)-F(z_0,t_0)\|_P&\preceq\sum_{i=n}^{n}\lambda_i\|H(z_i)-F(z_0,t_0)\|_P\\\|H(t_0)-F(t_0,z_0)\|_P&\preceq\sum_{i=n}^{n}\lambda_i\|H(t_i)-F(t_0,z_0)\|_P.\end{aligned}$$

به عبارت دیگر با توجه به (۸.۴) به ازای هر $i \in \{1, \cdots, n\}$، داریم:

$$\begin{aligned}&\|G(z_\circ) - F(z_\circ, t_\circ)\|_P + \|G(t_\circ) - F(t_\circ, z_\circ)\|_P \\ &\succ \|H(z_i) - F(z_\circ, t_\circ)\|_P + \|H(t_i) - F(t_\circ, z_\circ)\|_P.\end{aligned}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}&\|G(z_\circ) - F(z_\circ, t_\circ)\|_P + \|G(t_\circ) - F(t_\circ, z_\circ)\|_P \\ &\succ \sum_{i=n}^{n} \lambda_i \|H(z_i) - F(z_\circ, t_\circ)\|_P + \sum_{i=n}^{n} \lambda_i \|H(t_i) - F(t_\circ, z_\circ)\|_P \\ &\succeq \|H(z_\circ) - F(z_\circ, t_\circ)\|_P + \|H(t_\circ) - F(t_\circ, z_\circ)\|_P.\end{aligned}$$

این تناقض با (۷.۴) است. با استفاده از قضیه‌ی ۳.۴.۴ $(x_\circ, y_\circ) \in K \times K$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $(x, y) \in K \times K$ داریم:

$$(x_\circ, y_\circ) \in S(x, y).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&\|G(x_\circ) - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|G(y_\circ) - F(y_\circ, x_\circ)\|_P \\ &= \inf_{(x,y) \in K \times K} \{\|H(x) - F(x_\circ, y_\circ)\|_P + \|H(y) - F(y_\circ, x_\circ)\|_P\}.\end{aligned}$$

□

نتیجه‌ی زیر به عنوان یک نتیجه، از قضیه‌ی ۱.۵.۴ برای نقاط انطباقی مزدوج به دست می‌آید.

نتیجه ۱.۵.۴. فرض کنید X یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط P و K زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب فشرده‌ی X، هم چنین اگر نگاشت‌های $F\colon K \times K \to X$ و $G\colon K \to 2^X$ پیوسته باشند. و اگر نگاشت محدب پوشا $H\colon K \to 2^X$ نسبت به $F(K \times K)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in K$ داشته باشیم:

$$\|G(x) - F(x, y)\|_P \preceq \|H(x) - F(x, y)\|_P$$

آنگاه $(x_\circ, y_\circ) \in K \times K$ وجود دارد به طوری که

$$F(x_\circ, y_\circ) \in G(x_\circ) \quad \text{و} \quad F(y_\circ, x_\circ) \in G(y_\circ).$$

نتیجه ۲.۵.۴. فرض کنید X یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط P و K زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب فشرده‌ی X، هم چنین اگر نگاشت $F\colon K \times K \to X$ پیوسته باشد. آنگاه F یک نقطه‌ی ثابت مزدوج دارد. یا $(x_\circ, y_\circ) \in K \times K$ وجود دارد به طوری که

$$F(x_\circ, y_\circ) = x_\circ \quad \text{و} \quad F(y_\circ, x_\circ) = y_\circ.$$

برهان. فرض کنید $G(x) = \{x\}$ و با به کار بردن قضیه‌ی ۱.۵.۴ نتیجه برقرار است. □

قضیه ۲.۵.۴. فرض کنید X یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط P و K زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب فشرده‌ی X، و نگاشت‌های $f\colon K \to X$ و $g\colon K \to K$ پیوسته باشند. حال اگر وجود داشته باشد نگاشت تقریباً شبه محدب پوشا $h\colon K \to K$ نسبت به $f(K)$ به طوری که به ازای هر $x \in K$ داشته باشیم:

$$\|g(x) - f(x)\|_P \preceq \|h(x) - f(x)\|_P \qquad (۹.۴)$$

آنگاه وجود دارد $x_\circ \in K$ به طوری که

$$\|g(x_\circ) - f(x_\circ)\|_P = \inf_{x\in K} \|x - f(x_\circ)\|_P.$$

برهان. نگاشت $S\colon K \to ۲^K$ را به ازای هر $z \in K$ به صورت

$$S(y) = \{x \in K\colon \|g(x) - f(x)\|_P \preceq \|h(y) - f(x)\|_P\}$$

تعریف کنید. در این صورت با توجه به (۹.۴) داریم:

$$z \in S(z)$$

از این رو به ازای هر $z \in K$، $S(z)$ ناتهی است.
از آنجایی که نگاشت‌های f و g پیوسته هستند. آنگاه به ازای هر $z \in K$، $S(z)$ بسته است.
هم چنین چون K مجموعه‌ی فشرده است، آنگاه به ازای هر $z \in K$، $S(z)$ فشرده است.
حال نشان می‌دهیم S نگاشت KKM است.
فرض کنید (فرض خلف) به ازای هر

$$z_i \in K, i \in \{۱, \cdots, n\}$$

وجود دارد

$$z_\circ \in \mathrm{co}\{z_۱, \cdots, z_n\}$$

به طوری که

$$z_\circ \notin \bigcup_{i=۱}^{n} S(z_i) \qquad (۱۰.۴)$$

با توجه به تعریف پوسته‌ی محدب، $\{\lambda_i \geq \circ\colon i \in \{۱, \cdots, n\}\}$ وجود دارد به طوری که

$$z_\circ = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i z_i \quad \text{و} \quad \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i = ۱$$

از آنجایی که h تقریباً شبه محدب نسبت به $f(K)$ است داریم:

$$\|h(z_\circ) - f(z_\circ)\|_P \preceq \sup_i \|h(z_i) - f(z_\circ)\|_P.$$

به عبارت دیگر با توجه به (۱۰.۴) به ازای هر $i \in \{1, \cdots, n\}$ داریم:

$$\|g(z_\circ) - f(z_\circ)\|_P \succ \|h(z_i) - f(z_\circ)\|_P$$

آنگاه

$$\|g(z_\circ) - f(z_\circ)\|_P \succ \sup_i \|h(z_i) - f(z_\circ)\|_P \succ \|h(z_\circ) - f(z_\circ)\|_P.$$

این یک تناقض با (۹.۴) است.
حال با استفاده از قضیه‌ی ۳.۴.۴، (با قرار دادن $(H(x) = \{h(x)\}$ $x_\circ \in K$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in K$، $x_\circ \in S(x)$. بنابراین به ازای هر $x \in K$ داریم:

$$\|g(x_\circ) - f(x_\circ)\|_P = \inf \|x - f(x_\circ)\|_P.$$

$\square$

نتیجه ۳.۵.۴. فرض کنید X یک فضای نرمال مخروطی روی مخروط P و K زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب فشرده‌ی X، و نگاشت‌های $f\colon K \to X$ و $g\colon K \to K$ پیوسته باشند. حال اگر نگاشت تقریباً شبه محدب پوشا $h\colon K \to K$ نسبت به $f(K)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in K$ داشته باشیم:

$$\|g(x) - f(x)\|_P \preceq \|h(x) - f(x)\|_P$$

آنگاه $x_\circ \in K$ وجود دارد به طوری که

$$g(x_\circ) = f(x_\circ).$$

مراجع

[1] Abdeljawad T., Turkoglu D. and Abuloha M. (2010), ”Some theorems and examples of cone Banach spaces” **Journal of Computational Analysis and Applications**, 12,4, pp 739-753.

[2] Abu Sarries H.D., (2016), MsC thesis, ” Cone metric space”, Math. An-Najah National University.

[3] AL-Afghani D.A.M., (2016), MsC thesis, ” A comparative study in cone metric spaces and cone normed spaces”, Math. An-Najah National University.

[4] Asadi M., Vaezpour S. M. and Soleimani, H. (2011), ”Metrizability of cone metric spaces” **arXiv preprint arXiv:1102.2353**.

[5] Bauschke H.H., Borwein J.M. and Tseng P. (2000), ” Bounded linear regularity, strong CHIP, and CHIP are distinct properties” **Journal of Convex Analysis**, 7,2, pp 395-412.

[6] Bauschke H.H. and Combettes P.L. (2011), ” **Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces**”, Springer-Verlag, New York.Springer-Verlag, New York.

[7] Borwein J. and Lewis A.S. (2010), ” **Convex analysis and nonlinear optimization: theory and examples** ”, Springer Science & Business Media.

[8] Bot R.I., Grad S.M. and Wanka G. (2009), ”**Duality in vector optimization**”,Springer Science & Business Media.

[9] Bot R.I. and Wanka G. (2006), ” An alternative formulation for a new closed cone constraint qualification” **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, 64,6, pp 1367–1381.

[10] Burachik R.S. and Jeyakumar V.(2005), ” A dual condition for the convex subdifferential sum formula with applications” **Journal of Convex Analysis**, 12,2, pp 279.

[11] Burachik R. and Jeyakumar V. (2005), ”A simple closure condition for the normal cone intersection formula” **Proceedings of the American Mathematical Society**, 133,6, pp 1741-1748.

[12] Cotlar M. and Cignoli R. (1974), ”**An introduction to functional analysis**”, North-Holland Pub. Co..

[13] Deutsch F.R. (2012), ”**Best approximation in inner product spaces**”, Springer Science & Business Media.

[14] Freund R.M. (2004), ”**Analysis of convex sets and functions**” Massachusetts Institute Of Technology.

[15] Gubner J.A. (2015), ”Convexity Notes” Department of Electrical and Computer Engineering University Of Wisconsin–Madison.

[16] Hakawati A.A. (2017), ”On the paper: Examples in cone metric spaces: A survey” **Middle east journal of scientific research**, 11,12, pp 1636-1640.

[17] Hakawati A. and Al-Dwaik S. (2016), ” Best Approximation in Cone-Normed Space” **An-Najah Journal Of Ssientific Research**, 30,1, pp 101-110.

[18] Hoffman K. and Kunze R.(1971), ”**Linear algebra**”, Englewood Cliffs, New Jersey.

[19] Huang L.G. and Zhang X. (2007), ”Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings” **Journal of mathematical Analysis and Applications**, 332,2, pp 1468-1476.

[20] Jeyakumar V. and Wolkowicz H. (1992), ” Generalizations of Slater’s constraint qualification for infinite convex programs” **Mathematical Programming** , 57,1-3, pp 85-101.

[21] Khan M. S. and Imdad M. (1983), ”A common fixed point theorem for a class of mappings” **Indian J. Pure Appl. Math** 14,10, pp .1220-1227.

[22] Karapinar E. (2009), ”Fixed point theorems in cone Banach spaces, Fixed Point Theory Appl” **Article ID** 609281,9.

[23] Karapinar E. (2011), ”Couple fixed point on cone metric spaces” **Gazi University Journal of Science**, 24,1, pp 51–58.

[24] Karapınar E. and Türkoğlu D. (2010), ”Best approximations theorem for a couple in cone Banach space” **Fixed Point Theory and Applications** , 2010,1, pp 784578.

[25] Lin S. D. (1987), ”A common fixed point theorem in abstract spaces” **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, 18,8, pp 685-690.

[26] Maksimovic S. and Mitrovic Z.D. (2014), ” Remark on a Couple Coincidence Point in Cone Normed Spaces” **International Journal of Mathematical Analysis**, 8,50, pp 2461-2468.

[27] Munkres J.R. (1975), ”**Topology: a first course**” Rrentice-Hall inc. New Jersey.

[28] Phelps R. R. (1989), ”**Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability**”, Berlin etc., Springer-Verlag.

[29] Rzepecki B. (1980), ”On fixed point theorems of Maia type” **Publications de lInstitut Mathematique**, 28,42, pp 179-186.

[30] Rezapour S. (2007), ”Best approximations in cone metric spaces” **Math. Morav**, Math. Morav,11, pp 85-88.

[31] Rezapour S. and Hamlbarani R. (2008), ”Some notes on the paper :Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings” **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 345,2, pp 719-724.

[32] Rudin W. (1991), ”**Functional analysis. International series in pure and applied mathematics**” McGraw-Hill, Inc., New York.

[33] Schirotzek W. (2007), ”**Nonsmooth Analysis**”, Springer-Verlag.

[34] Schirotzek W. (2007), ”**Nonsmooth analysis** ”,Springer Science & Business Media.

[35] Simić S. (2011), ”A note on Stone’s, Baire’s, Ky Fan’s and Dugundji’s theorem in tvs-cone metric spaces” **Applied Mathematics Letters** 24,6, 999-1002.

[36] Singer I. (1970), ”Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces”, **New York**.

[37] Singh S.P., Watson B. And Srivastava P. (2013), **Fixed point theory and best approximation: the KKM-map principle** ,424, Springer Science & Business Media.

[38] Strömberg T. (1996), ”**The operation of infimal convolution**”, Diss. Math.,352, PP. 1-61.

[39] Tiel J.V. (1984),”**Convex analysis**”, John Wiley.

[40] Turkoglu D. and Abuloha M. (2010),"Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings " **Acta mathematica sinica, English series** ,26,3, pp 489-496.

[41] Turkoglu D., Abuloha M. And Abdeljawad T. (2012), " Some theorems in cone metric spaces " **Journal of Elsevier Science,(18 February 2009)** , 10.

[42] Vijender C. (2016), "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings" **International Journal Of Engineering And Computer Science**", 5,10,.

[43] Xing L. (2009), MsC thesis, " Lagrangian Duality in Convex Optimization", The Chinese University of Hong Kong.

[44] Zălinescu C. (2002), "**Convex Analysis in General Vector Spaces**", World Scientific, River Edge.

Aabstract

The theory of the best approximation simultaneously in various branches of mathematics, including optimization, numerical analysis and ... Work is done. A simple example of this is to find points from a set that has the least distance from a point in space.

This thesis describes the concept of best approximation in several different spaces and its relations with convex analysis, and cones.
Keywords: Best approximation, Cone, normal cone, Convex cone, Convex set, Cone metric space, Cone normed space.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Mathematical analysis

Some relations between best approximation with convex analysis and cones

By: Mohammad Reza Gharibnezhad

Supervisor

Mahdi Iranmanesh

May 2018