بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار ، گرایش آمار ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

پیدا کردن طرح‌های امکان‌پذیر با استفاده از ماتریس تصویر

نگارنده: مهران فتحی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

اسفند ۱۳۹۶

تقدیم به پدر و مادر عزیز و بزرگوارم

که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده‌اند.

تقدیم به همسر مهربانم

که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می‌باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

سپاس‌گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، والاتر از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه‌ی ایشان، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ برحسب وظیفه و از باب ''من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق'':

از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم‌داشت برای من بوده‌اند؛

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر احمد نزاکتی رضازاده که در کمال سعه‌صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را برعهده گرفتند؛

همچنین از اساتید فرزانه و دلسوز دکتر محمد رضا ربیعی و دکتر محمد آرشی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

مهران فتحی
اسفند ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **مهران فتحی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمار علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **پیدا کردن طرح‌های امکان‌پذیر با استفاده از ماتریس تصویر** ، تحت راهنمایی **احمد نزاکتی رضازاده** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ’’ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مهران فتحی
اسفند ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در مبحث طرح آزمایش‌ها یک طرح را زمانی امکان‌پذیر گویند که تمامی پارامترهای مورد نظر آن برآوردپذیر باشند، ازاین‌رو در مباحث طرح‌های عاملی تشخیص امکان‌پذیر بودن یک طرح از جهاتی بسیار حائز اهمیت است. تاکنون معیارهای امکان سنجی طرح‌ها، مبتنی بر مدل خطی بوده‌اند. در مواردی که طرح دارای سطوح زیادی باشد دسترسی به معیار امکان‌سنجی مبتنی بر مدل خطی کاری دشوار و پیچیده است، ماتریس تصویر ابزار قدرتمندی برای مطالعه این‌گونه از طرح‌ها است که می‌تواند به عنوان یک معیار جایگزین و بدون نیاز به تبدیل خطی از مدل آنالیز واریانس برای تعیین امکان‌سنجی هرگونه طرحی مورد استفاده قرار گیرد. ماتریس تصویر یک مجموعه به دست آمده از ستون‌های یک طرح را تعریف می‌کند. در این پایان‌نامه امکان‌پذیری طرح‌ها با سه روش مدل خطی، آرایه‌های متعامد و ماتریس تصویر بررسی می‌شود و نشان داده می‌شود روش مبتنی بر ماتریس تصویر این کار را به سرعت و به سادگی انجام می‌دهد.

کلمات کلیدی:
آرایه‌های متعامد، طرح آزمایش‌ها، طرح امکان‌پذیر، طرح‌های عاملی، ماتریس تصویر، مدل خطی.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. فتحی م.، نزاکتی رضازاده ا. (۱۳۹۶) امکان‌پذیری یک طرح بر اساس روشی مبتنی بر ماتریس تصویر، چهل و هشتمین کنفرانس ریاضی ایران ـ دانشگاه بوعلی سینا همدان.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعدی به‌طور مختصر آورده شده است.
مطالب این فصل عمدتاً برگرفته از کتاب طرح و تحلیل آزمایش‌ها [۱] است.

۱.۱ اصطلاحات و تعاریف

آزمایش[۱]:
آزمایش به کلیه عملیاتی اطلاق می‌شود که برای رد یا قبول یا تکمیل فرضیه‌ای به‌کار می‌روند. وجه تمایز یک آزمایش مقایسه‌ای و یک آزمایش مطلق در این است که بررسی فقط روی یک ماده (مثلاً یک واکنش شیمیایی) انجام می‌گیرد. در طرح‌های آزمایشی اغلب از آزمایشات مقایسه‌ای صحبت می‌شود.

طرح‌های آزمایشی[۲]:
طرح‌های آزمایشی الگوی ابداع شده‌ای هستند که برای انجام آزمایشات مقایسه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. آشنایی درست با این طرح‌ها و آشنایی به قوانین آماری دو شرط اساسی موفقیت در اجرای یک آزمایش است.

---

[۱] Experiment
[۲] Experimental Designs

تیمار[۳]**:**
هر یک از مواردی را که برای مطالعه آنها بر روی صفت مختلف در آزمایش مورد مقایسه قرار می‌گیرند تیمار می‌گویند.
مواد آزمایشی[۴]**:**
به‌کار بردن تیمارها و مقایسه آن‌ها در یک آزمایش نیاز به وسیله‌ای دارد. وسیله‌ای را که تیمارها بر روي آن آزمایش میی‌شوند مواد آزمایشی گویند.
واحد آزمایشی[۵]**:**
واحد آزمایشی کوچکترین قسمت از مواد آزمایشی است که در آن یک تیمار در يك تکرار تحت آزمایش قرار دارد.
بلوک[۶]**:**
به گروهی از واحدهای آزمایشی با تیمارهای مختلف که تحت شرایط مشابه‌ای تشکیل شده باشند بلوک گویند. اگر در گروه مربوط به بلوک کلیه تیمارهای مورد آزمایش وجود داشته باشند آن را بلوک کامل و اگر درتشکیل بلوک فقط عده‌ای از تیمارها شرکت داشته باشند آن را بلوک ناقص می‌نامند.
داده و مشاهدات[۷]**:**
به اعداد و ارقامی که در آزمایش به‌دست می‌آوریم و از آنها برای انجام محاسبات و آزمون فرض‌ها استفاده می‌کنیم، داده گفته می‌شود. مشاهدات، اغلب روش‌های اندازه‌گیری و صفت مورد مطالعه را نیز دربر می‌گیرد.
طرح H:
به‌طور کلی وقتی مدل آنالیز واریانس m طرفه استفاده می‌شود m عامل وجود دارد که هرکدام سطوح متفاوتی دارند، طرح آزمایشی H شامل تعدادی از ترکیب‌های سطح ممکن از عوامل m است.

۲.۱ طرح آزمایش چیست؟

در تمامی زمینه‌های واقعی تحقیق، معمولاً آزمایش‌هایی توسط پژوهشگران برای کشف موضوعی درباره فرایند یا سیستمی خاص انجام می‌شود. به معنای واقعی کلمه، آزمایش یک آزمون است. آزمایش طرح شده، یک آزمون یا دنباله‌ای از آزمون‌ها است که در آنها تغییرات مورد نظر، در متغییرهای ورودی فرایند یا سیستم اعمال می‌شوند به صورتی که می‌توانیم در پاسخ

[۳] Treatment
[۴] Experimental Material
[۵] Experimental Unit
[۶] Block
[۷] Data

خروجی را مشاهده و مشخص کنیم. معمولاً می‌توان فرایند را به صورت ترکیبی از ماشین‌ها، روش‌ها، اشخاص، و منابع دیگری تصور کرد که بعضی از ورودی‌ها (اغلب موارد) را تبدیل به خروجی‌هایی می‌کنند که یک یا چند پاسخ قابل مشاهده دارند. بعضی از متغییرهای $x_1, x_2, \ldots, x_p$ در فرایند کنترل پذیرند، در صورتی که متغییرهای دیگر $z_1, z_2, \ldots, z_q$ کنترل ناپذیرند (هر چند برای هدف‌های یک آزمون ممکن است کنترل پذیر باشند).

اهداف آزمون می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

۱. تعیین متغییرهایی که بیشترین تأثیر را در پاسخ y دارند.

۲. تعیین موقعیت متغییرهای مؤثر x به‌طوری که تقریباً y همیشه نزدیک مقدار اسمی مطلوب باشد.

۳. تعیین موقعیت متغییرهای مؤثر x به‌طوری که تغییرپذیری y کوچک باشد.

۴. تعیین موقعیت متغییرهای مؤثر x به‌طوری که اثرهای متغییرهای کنترل‌ناپذیر $z_1, z_2, \ldots, z_q$ مینیمم شوند.

به عنوان مثال، فرض کنید یک مهندس مواد به مطالعه اثر دو فرایند مختلف سخت‌سازی یک آلیاژ آلومینیم علاقه‌مند باشد: فرونشانی با روغن و فرونشانی با آب نمک. در اینجا هدف آزمایشگر تعیین محلول فرونشانی است که برای این آلیاژ خاص، ماکزیمم سختی را ایجاد می‌کند. مهندس تصمیم می‌گیرد تعدادی نمونه‌های این آلیاژ را با هر محلول فرونشانی کرده و بعد از فرونشانی میزان سختی آنها را اندازه بگیرد. سختی متوسط نمونه‌ها در اثر هر یک از محلول‌های فرونشانی، برای تعیین بهترین محلول به کار خواهد رفت.

وقتی این آزمایش ساده را در نظر می‌گیریم، سؤال‌های مهمی پیش می‌آید:

۱. آیا این دو محلول تنها محلول‌های فرونشانی هستند که بالقوه مورد نظرند؟

۲. آیا عوامل دیگری وجود دارند که ممکن است در میزان سختی مؤثر بوده و لازم باشد که در این آزمایش بررسی یا کنترل شوند؟

۳. برای هر محلول فرونشانی امتحان چند نمونه از آلیاژ لازم است؟

۴. چگونه باید نمونه‌ها را به محلول‌های فرونشانی تخصیص داد و به چه ترتیب باید داده‌ها را جمع‌آوری کرد؟

۵. از چه روش تحلیل داده‌ها باید استفاده کرد؟

۶. چه اختلافی در متوسط مشاهده شده حاصل از دو محلول فرونشانی را می‌توان مهم در نظر گرفت؟

قبل از انجام آزمایش، باید جواب رضایت‌بخش به تمامی این پرسش‌ها و احتمالاً بسیاری از پرسش‌های دیگر داد.

در هر آزمایش، نتایجی که می‌توان استخراج کرد در سطح وسیع وابسته به روش جمع‌آوری داده‌ها است. برای روشن شدن موضوع فرض کنیم که مهندس مواد در آزمایش بالا از نمونه‌هایی با یک حرارت در فرونشانی با روغن و از نمونه‌هایی با حرارت دیگر در فرونشانی با آب نمک استفاده کند. حال وقتی میانگین سختی این‌ها مقایسه می‌شود، مهندس مزبور قادر به بیان این نیست که چقدر اختلاف مشاهده شده، معلول محلول فرونشانی و چقدر معلول اختلاف ذاتی میان حرارت‌هاست. (متخصص در طرح آزمایش‌ها می‌گوید که اثرهای محلول‌های فرونشانی و حرارت مخلوط شده‌اند؛ یعنی، این دو عامل را نمی‌شود از هم جدا کرد). پس، روش جمع‌آوری داده‌ها می‌تواند بر نتایجی که از آزمایش استخراج می‌شوند اثر مخالف داشته باشد.

۳.۱ کاربردهای طرح آزمایش

روش‌های طرح آزمایش در بسیاری از نظام‌ها کاربرد وسیع دارند. در واقع، عمل آزمایش را می‌توان به‌صورت بخشی از فرایند علمی و به‌صورت یکی از راه‌های فراگیری چگونگی کار سیستم‌ها یا فرایندها در نظر گرفت. معمولاً از یک سری فعالیت‌ها می‌آموزیم که راجع به فرایند حدس‌هایی بزنیم، آزمایش‌هایی برای تولید داده‌های فرایند به عمل آوریم و سپس با استفاده از اطلاعات حاصل از آزمایش، حدس‌های جدیدی ارائه دهیم که به آزمایش‌های جدید می‌انجامند.

در دنیای مهندسی، طرح آزمایش ابزاری فوق‌العاده مهم برای اصلاح عملکرد فرایندهای تولید است. همچنین کاربردی وسیع در بسط فرایندهای جدید دارد. کاربرد تکنیک‌های اولیه طرح آزمایش در توسعه فرایند می‌تواند نتایج زیر را فراهم کند.

۱. نتایج فرایند را اصلاح کند.

۲. تغییرپذیری را کاهش داده و مطابقت آن را با نیازهای هدف یا اسمی نزدیک‌تر کند.

۳. زمان گسترش را تقلیل دهد.

۴. کل هزینه را تقلیل دهد.

روش‌های طرح آزمایش در طرح فعالیت‌های مهندسی نیز نقش عمده دارند، که در آن فرآورده‌های جدید تکامل یافته و فرآورده‌های فعلی اصلاح می‌شوند. برخی کاربردهای طرح آزمایش در طرح مهندسی عبارت‌اند از:

۱. ارزیابی و مقایسه پیکربندی‌های طرح پایه‌ای.

۲. ارزیابی دگرگونی‌های مواد.

۳. انتخاب پارامترهای طرح به‌طوری که فرآورده به‌خوبی تحت شرایط محیطی بسیار متنوع کار کند، یعنی به‌طوری که فرآورده نیرومند باشد.

۴. تعیین پارامترهای طرح کلیدی فرآورده که بر عملکرد فرآورده اثر می‌گذارند.

استفاده از طرح آزمایش در این زمینه‌ها می‌تواند فرآورده‌هایی به‌وجود آورد که تولید آنها ساده‌تر است، فرآورده‌هایی که زمینه عملکرد بیشتری داشته و قابل اعتمادند، هزینه تولید پایین‌تر و طرح و زمان تولید کوتاه‌تر دارند. برای روشن کردن این مفاهیم چند مثال ارائه می‌دهیم.

مثال ۱.۳.۱. تعیین مشخصه‌های فرایند
در فرایند تولید صفحات مدارهای چاپی از یک ماشین لحیم‌کاری استفاده می‌شود. ماشین به دفعات صفحات را با گدازه‌ای تمیز کرده، حرارت اولیه‌ای به صفحات داده، وسپس آنها را توسط نقاله‌ای از میان جریان قلع مذاب عبور می‌دهد. این فرایند، لحیم‌کاری اتصالات مکانیکی و الکتریکی را درباره قطعات روی صفحه کامل می‌کند.

فرایند در وضع حاضر حدوداً در سطح یک درصد ناقص عمل می‌کند. یعنی، نزدیک به یک درصد نقاط لحیم‌کاری روی مدار معیوب و احتیاج به اصلاح دستی دارند. امّا، چون به‌طور متوسط هر صفحه مدار چاپی بیش از ۲۰۰۰ اتصال لحیم‌کاری دارد، لذا حتی سطح یک درصد نقص موجب می‌شود که اتصالات زیادی نیاز به‌کار مجدد داشته باشند. مهندس مسئول این فرایند علاقه‌مند به استفاده از آزمایش طرح شده‌ای است که مشخص کند کدام پارامترهای ماشین بر وقوع معایب لحیم‌کاری مؤثرند و چه تنظیم‌هایی را باید در مورد آن متغیرها برای تقلیل معایب لحیم‌کاری اعمال کند. ماشین لحیم‌کاری متغیرهای مختلفی دارد که می‌توان آنها را کنترل کرد. این متغیرها عبارت‌اند از:

۱. دمای لحیم‌کاری.

۲. دمای پیش‌گرمکن.

۳. سرعت نقاله.

۴. نوع گدازه.

۵. وزن مخصوص گدازه.

۶. عمق لحیم‌کاری.

۷. زاویه نقاله.

علاوه بر عوامل کنترل‌پذیر عوامل مختلف دیگری وجود دارند که به‌سادگی در جریان عادی تولید، کنترل‌پذیر نیستند، امّا، به‌منظور آزمون می‌توان آنها را کنترل کرد. آنها عبارت‌اند از:

۱. ضخامت صفحه مدار چاپی.

۲. انواع قطعات مورد استفاده در روی صفحه.

۳. طرح قطعات روی صفحه.

۴. عملگر.

۵. نرخ تولید.

در چنین وضعیتی، مهندس مسئول علاقه‌مند به اطلاع از مشخصه‌های ماشین لحیم‌کاری است؛ یعنی می‌خواهد تعیین کند که کدام عامل‌ها (اعم از کنترل‌پذیر و کنترل‌ناپذیر) در به‌وجود آمدن معایب صفحات مدار چاپی مؤثرند. برای این منظور می‌تواند آزمایشی را طرح‌ریزی کند که او را به برآورد بزرگی و جهت اثرهای عوامل قادر سازد؛ یعنی بفهمد که با تغییر هر عامل چقدر متغییر پاسخ (معایب حاصل در یک واحد) تغییر می‌کند، و بفهمد که آیا تغییر عوامل با هم موجب حصول نتایج متفاوتی نسبت به تنظیم‌های تک‌تک آنها می‌شود یا نه. گاهی چنین آزمایشی را آزمایش غربال‌گر می‌گوییم.

از اطلاعات حاصل از این آزمایش غربال‌گر یا تشخیص، برای تعیین عوامل بحرانی فرایند و برای معلوم کردن جهت تنظیم این عوامل به‌منظور تقلیل هر چه بیشتر تعداد معایب حاصل در هر واحد استفاده می‌کنیم. همچنین می‌توانیم از این آزمایش به‌منظور جلوگیری از سطوح زیاد معایب حاصل و عملکرد غلط فرایند، اطلاعاتی در مورد عواملی که باید با دقت بیشتری طی جریان عادی تولید کنترل شوند به‌دست آوریم. پس، یک نتیجه آزمایش می‌تواند به‌کارگیری تکنیک‌هایی مثل نمودارهای کنترل برای یک یا چند متغیر فرایند (مثل دمای لحیم‌کاری) به علاوه نمودارهای کنترل درباره فرایند خروجی باشد. اگر فرایند به مرور زمان به اندازه‌ی کافی اصلاح شده باشد، شاید امکان آن باشد که به جای تهیه نمودار کنترل فرایند خروجی، عمده طرح کنترل فرایند را براساس کنترل متغیرهای ورودی قرار دهیم.

مثال ۲.۳.۱. بهینه سازی فرایند

در آزمایش تعیین مشخصه‌ها، معمولاً به تعیین اینکه کدام متغیرهای فرایند در پاسخ اثر می‌گذارند علاقه‌مندیم. قاعدتاً مرحلهٔ بعدی بهینه‌سازی است، یعنی، تعیین حدود عوامل مهمی است که به بهترین پاسخ منجر می‌شوند. مثلاً، اگر پاسخ، میزان محصول باشد، حدود ماکسیمم آن‌را بررسی می‌کنیم، در صورتی‌که اگر متغیر پاسخ، تغییرپذیری در ابعاد بحرانی یک فرآورده باشد، حدود مینیمم تغییرپذیری را جستجو می‌کنیم.

فرض کنید علاقه‌مند به اصلاح محصول یک فرایند شیمیایی باشیم. بنابر نتایج حاصل از یک آزمایش تشخیص، می‌دانیم که دو تا از مهم‌ترین متغیرهای فرایند که بر محصول مؤثرند یکی دما و دیگری زمان واکنش است.
برای تعیین بهینه، انجام آزمایشی لازم است که زمان و دما هر دو بتوانند تغییر کنند. این نوع آزمایش را آزمایش عاملی می‌گویند.

مثال ۳.۳.۱. مثالی از طرح یک فراورده

روش‌های طرح و آزمایش اغلب می‌توانند در فرایند طرح یک فرآورده مورد استفاده قرار گیرند. برای توضیح، فرض کنید یک گروه از مهندسین لولایی را برای در اتومبیل طراحی کرده‌اند. مشخصه کیفیت مورد نظر، توان کنترل، و یا قدرت نگه‌داشتن سنگینی در است که از بسته شدن آن وقتی‌که اتومبیل روی تپه‌ای پارک شده جلوگیری کند. مکانیسم کنترل شامل یک فنر ورقی و یک غلطک است. وقتی‌که در باز می‌شود، غلطک از روی کمانی عبور کرده و سبب فشرده شدن فنر ورقی می‌شود. برای بستن در، فنر باید به یک طرف فشار آورد، و این توان کنترل را تولید می‌کند. گروه مهندسین تصور می‌کنند که توان کنترل تابعی از عوامل زیر است:

۱. فاصله عبور غلطک.

۲. ارتفاع فنر از لولا تا پایه.

۳. فاصله افقی لولا از فنر.

۴. ارتفاع آزاد فنر وقتی‌که بار روی آن نیست.

۵. ارتفاع آزاد فنر اصلی.

مهندسین می‌توانند یک نمونه لولا بسازند که تمام این عوامل بتوانند در بردهایی خاص تغییر کنند. همین که سطوح مربوط به‌این پنج عامل معلوم شدند می‌توان آزمایش را با ترکیب‌های مختلف سطوح این عوامل طرح‌ریزی، و نمونه ساخته شده را با این ترکیب‌ها آزمون کرد. به‌این ترتیب اطلاعاتی از اینکه کدام عوامل در قدرت کنترل ، مؤثرترین هستند حاصل می‌شود و از طریق تحلیل این اطلاعات طرح لولا را می‌توان اصلاح کرد.

۴.۱ اصول پایه

منظور از طرح آماری آزمایش‌ها، طرح‌ریزی فرایندی است که داده‌هایی مناسب را بتوان به روش‌های آماری تحلیل و جمع‌آوری کرد و استنتاج‌های معتبر و عینی به‌دست آورد. اگر بخواهیم نتایجی بامعنا از داده‌ها استخراج کنیم، روش‌های آماری در طرح آزمایش ضروری

است. وقتی مسأله متضمن داده‌هایی است که شامل خطاهای آزمایشی هستند در این صورت روش‌شناسی آماری تنها رهیافت عینی تحلیل است. پس، هر مسأله آزمایشی دارای دو وجه است، یکی طرح آزمایش و دیگری تحلیل آماری داده‌ها. این دو موضوع در ارتباط نزدیک با یکدیگرند، زیرا روش تحلیل مستقیماً به طرح مورد استفاده بستگی دارد.

سه اصل پایه‌ای طرح آزمایش تکرار، تصادفی کردن [۸] و بلوک‌بندی [۹] است.

اصولی که در زیر می‌بینیم امکان می‌دهند که نتایج قابل قبول و معتبری از یك آزمایش گرفته شود.

۱. تکرار تیمارها

منظور از تکرار، تکرار آزمایش اصلی است. هر قدر در انتخاب مواد آزمایشي و در اجراي آزمایش دقت کنیم، بدون تکرار تیمارها هیچ نتیجه معتبری بدست نخواهد آمد. چه بسا، در صورت وجود فقط یک تکرار تاثیر منابع غیر قابل کنترل یاد شده، تیماری با اثر «منفی» را مثبت و تیماری با اثر «مثبت» را منفی کند. ولی اگر هر تیمار را مثلاً در ۵ واحد آزمایشی سازمان یافته، تکرار کنیم خواهیم توانست با استفاده از روش‌های آماری، تغییرات مربوط به منابع غیر قابل کنترل یعنی خطای تصادفی را برآورد و از آن برای مقایسه میانگین تیمارها استفاده کنیم.

اصولاً دقت یک آزمایش بستگی به تعداد تکرار دارد؛ هر قدر تعداد تکرار را زیاد بگیریم دقت آزمایش بیشتر می‌شود ولی باید به‌خاطر داشت که در هر آزمایش حد متوسطی برای تعداد تکرار وجود دارد. که اگر تعداد تکرار از این حد تجاوز نماید دقت آزمایش به همان اندازه افزایش نمی‌یابد و اضافه نمودن تکرار سبب افزایش هزینه و غیر یکنواختی مواد آزمایشی می‌شود.

به تجربه ثابت کرده‌اند که در اکثر طرح‌ها تعداد تکرار را بسته به حساسیت آزمایش بین ۳ تا ۸ انتخاب می‌کنند یعنی در صورت حساس بودن آزمایش تعداد تکرار را تا ۸ افزایش می‌دهند و هر قدر حساسیت آزمایش کم باشد تکرار را تا ۳ تقلیل می‌دهند. البته تعداد تکرار در بعضی طرح‌ها (مانند طرح عاملی) به خاطر ساخت ویژه‌ای که دارند بیش از ۸ در نظر گرفته می‌شود که با طرح‌های دیگری (کرت‌های خرد شده) جلوی این کار هم تا حدودی گرفته می‌شود.

به‌عنوان مثال، در آزمایش مربوط به ذوب فلزات که در بخش (۲.۱) از آن صحبت شد، تکرار عبارت است از فرونشانی مواردی با روغن و فرونشانی مواردی با آب نمک. پس، اگر با هریک از این فرونشانی‌ها پنج مورد در نظر گرفته باشیم، در این صورت می‌گوییم که پنج تکرار داریم. تکرار دو خاصیت مهم دارد. اول اینکه آزمایشگر را قادر می‌سازد که برآوردی برای خطای آزمایشی به‌دست آورد. این برآورد خطا مبنای واحد اندازه‌گیری در تعیین این است که آیا اختلاف‌های مشاهده شده در داده‌ها واقعاً به‌طور آماری تفاوت دارند یا نه. دوم اینکه اگر از میانگین نمونه ($\bar{y}$) برای برآورد اثر عاملی در آزمایش استفاده شده باشد، آن‌گاه تکرار،

---

[۸] Randomization

[۹] Dispositif an blocks

آزمایشکر را قادر می‌سازد که برآوردی دقیق‌تر از این اثر را به‌دست آورد. مثلاً، اگر σ^2 واریانس داده‌ها باشد و n تکرار داشته باشیم، آنگاه واریانس میانگین نمونه برابر است با

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

استنباط عملی موضوع این خواهد بود که اگر $n = 1$ تکرار داشته باشیم و مشاهدات ما $y_1 = 145$ (فرونشانی با روغن) و $y_2 = 147$ (فرونشانی با آب نمک) باشند در این صورت محتمل است که ارائه استنباط‌هایی رضایت‌بخش در مورد اثر محلول فرونشانی مقدور نباشد. یعنی اختلاف مشاهده شده می‌تواند نتیجهٔ خطای آزمایشی باشد. از طرف دیگر، اگر n به‌گونه‌ای معقول بزرگ و خطای آزمایشی به‌قدر کافی کوچک باشد، آنگاه با مشاهدهٔ $\bar{y}_1 < \bar{y}_2$ با اطمینان نتیجه می‌گیریم که فرونشانی با آب نمک سختی بیشتری را در این آلیاژ خاص ایجاد می‌کند تا فرونشانی با روغن.

۲. پخش تصادفی تیمارها در واحدها

در استفاده از روش‌های آماری در طرح آزمایش‌ها تصادفی کردن مسأله‌ای بنیادی است. منظور از تصادفی کردن آن است که تخصیص ابزار آزمایش و ترتیبی که با آن اجراهای فردی یا امتحان‌های آزمایش انجام می‌شوند، به تصادف تعیین شده باشند.
در يك آزمون آماری باید شرایطی موجود باشد تا آزمون (و نتیجه آزمایش) معتبر باشد یکی از این شرایط مستقل بودن مشاهدات و خطای تصادفی از هم است براي تحقّق این شرایط لازم است که تیمارها در واحدهای آزمایشی به طور تصادفی قرار بگیرند.
در صورت عدم پخش تصادفي، عملکرد واحدهای آزمایشی مجاور همبستگی خواهند داشت. به‌طور کلی انتساب تصادفی موجب می‌شود که تیمارها و تکرار آن‌ها شانس مساوی برای قرار گرفتن در واحدهای آزمایشی داشته باشند و لذا اثر عوامل غیر قابل کنترل در آزمایش روی تیمارهای موجود تعدیل می‌گردد. برای انجام یک پخش تصادفی صحیح بهترین نحوه عمل، استفاده از قرعه‌کشی یا استفاده از جدول اعداد تصادفی است.
در روش‌های آماری لازم است که مشاهدات (یا خطاها) متغییرهای تصادفی باشند که به‌صورت مستقل توزیع شده‌اند، تصادفی کردن معمولاً به این پذیره اعتبار می‌دهد. با درست تصادفی‌کردن آزمایش، به خارج کردن متوسط اثرهای عوامل خارجی دخیل نیز کمک می‌شود. مثلاً، فرض کنیم در آزمایش بالا نمونه‌ها از نظر ضخامت با یکدیگر اختلافی جزئی داشته باشند و اثر محلول فرونشانی بتواند تحت تأثیر ضخامت نمونه‌ها باشد. اگر تمامی نمونه‌هایی که با روغن فرونشانی شده‌اند ضخیم تر از آنهایی باشند که با آب نمک فرونشانی شده‌اند آن‌گاه ممکن است به غلط مرتباً اثر یک محلول فرونشانی را بر دیگری برتر بدانیم. تخصیص تصادفی نمونه‌ها در فرونشانی، این مسأله را منتفی می‌کند.

۳. استفاده از طرح مناسب با هدف

یک طرح باید طوری انتخاب شود که با مشکلات اجرائی اغراق آمیز مواجه نشویم که این خود می‌تواند خطای تصادفی را افزایش دهد و مهم‌تر اینکه طرح امکان می‌دهد تا برآورد محیطی از خطای تصادفی به‌دست آید و تا حد امکان با کنترل منابع شناخته شده مانند بلوک‌ها و مطالعه‌ی چند نوع تیمار در یک‌جا این خطا کاهش یابد. در هر آزمایش قضاوت معنی دار بودن اختلاف میانگین تیمارها و محاسبه ضریب تغییرات بر پایه خطای تصادفی آن آزمایش استوار است.

بلوک‌بندی تکنیکی است که برای افزایش دقت آزمایش از آن استفاده می‌شود. بلوک قسمتی از ابزار آزمایش است که باید متجانس تر از کل مجموعه ابزار باشد. بلوک‌بندی متضمن انجام مقایسه میان شرایط مورد نظر آزمایش درون هر بلوک است.

این اصول پایه‌ای طرح آزمایش بخش مهم هر آزمایش‌اند.

۴. **کنترل منابع تغییرات شناخته شده**

معتبر بودن نتایج شرط لازم برای موفقیت در آزمایش نیست بلکه باید سعی نمود که با کنترل منابع مهم شناخته شده، خطای تصادفی را به حداقل رسانید به نحوی که انحرافات کوچک بین تیمارها حداکثر شانس را برای معنی‌دار شدن داشته باشند. برای این منظور چند راه وجود دارد که در زیر به دو مورد اشاره می‌کنیم:

- کاهش یا حذف منابع تغییرات

از نظر تئوری می‌توان اثر کلیه منابع تغییرات شناخته شده را از آزمایش حذف کرد و فقط تیمارها را به عنوان عامل تغییرات نگه داشت ولی نتایج حاصل از این نوع آزمایشات قابل تعمیم به شرایط طبیعی نیستند، به‌علاوه چون بررسی تمام عوامل و صفات مورد آنالیز در آزمایش‌های جداگانه ممکن نیست، پس حذف عوامل پراکندگی نباید به هر قیمت عملی شود و بستگی به امکانات مادی و هدف از نتایج مورد نظر دارد.

- انتخاب طرح‌هایی که بتوان منابع تغییرات را در آن‌ها مطالعه کرد.

۵.۱ راهنماها در طرح آزمایش‌ها

در استفاده از روش آماری در طرح و تحلیل یک آزمایش، لازم است هر فردی که با آزمایش سروکار دارد قبلاً از آنچه دقیقاً باید مطالعه کند و از چگونگی جمع‌آوری داده‌ها ایده‌ای روشن داشته باشد و حداقل درکی کیفی از چگونگی تحلیل داده‌ها کسب کند. شمایی از شیوه‌ای که توصیه شده است به شرح زیر است:

۱. **شناسایی و بیان مساله.** این موضوع ممکن است نسبتاً بدیهی به‌نظر برسد امّا در عمل غالباً پی بردن به‌وجود مسأله‌ای که نیاز به آزمایش دارد ساده نیست، بیان عموماً قابل قبول و روشن مسأله نیز آسان نیست. لازم است کلیه مفاهیم راجع به اهداف آزمایش را معرفی کنیم. معمولاً مهم است که تمام جوانب مربوط به ورودی مانند: مهندسی،

استاندارد کیفیت، ساخت، بازاریابی، مدیریت، مشتری و گرداننده‌ها (آنهایی که معمولاً بصیرت کافی دارند و اغلب نادیده گرفته می شوند) را در نظر بگیریم. اغلب بیان روشن مسأله در فهم بهتر پدیده‌ها و حل نهایی مسأله کمک می کند.

۲. **انتخاب عوامل وسطوح.** آزمایشگر باید عواملی که در آزمایش متغیرند، دامنه‌های تغییر هر یک از این عوامل و سطوح خاصی را که در هر اجرا باید اعمال شوند را انتخاب کند و باید دربارهٔ چگونگی کنترل این عوامل با ارزش‌های مطلوب و چگونگی اندازه گیری آنها نیز بیندیشد. مثلاً، در جریان آزمایش لحیم‌کاری، ۱۲ متغیر که می‌توانند در وقوع معایب لحیم‌کاری مؤثر باشند تعریف شده‌اند. در اینجا مهندس مربوط باید درباره حدود مورد نظر هر متغیر (دامنهٔ تغییرات هرعامل) و اینکه برای هر متغیر از چند سطح باید استفاده شود، تصمیم‌گیری کند. در انجام این موضوع شناخت فرایند لازم است که معمولاً شناخت فرایند شامل تجربهٔ عملی و درک مفاهیم نظری است. بررسی تمام عواملی که می توانند مهم باشند و کلاً تحت نفوذ تجربه‌ی گذشته نیستند، خصوصاً وقتی در مراحل اولیهٔ آزمایش هستیم یا وقتی فرایند هنوز تکامل نیافته است واجد اهمیت است. وقتی هدف جدا کردن عامل یا تعیین مشخصه‌های فرایند است، بهتر است که تعداد سطوح عامل را پایین نگه داریم (اکثراً از دو عامل استفاده می‌شود).

۳. **انتخاب متغیر پاسخ.** در انتخاب متغیر پاسخ، باید آزمایشگر مطمئن باشد که این متغیر واقعاً دربارهٔ فرایند تحت مطالعه اطلاعاتی مفید می‌دهد. بیشتر مواقع متوسط یا انحراف معیار (یا هردو) مشخصهٔ اندازه‌گیری شده، متغیر پاسخ‌اند. پاسخ‌های چندگانه، غیر معمول نیستند و خطای اندازه‌گیری نیز عامل مهمی است. اگر خطای اندازه‌گیری کم باشد، آن‌گاه تنها اثرهای نسبتاً بزرگ عاملی توسط آزمایش آشکار می‌شوند یا تکرارهای اضافی لازم می‌شوند.

۴. **انتخاب طرح آزمایش.** اگر سه مرحلهٔ اول به‌درستی انجام شوند، این مرحله نسبتاً ساده است. انتخاب طرح شامل در نظر گرفتن حجم نمونه (تعداد تکرارها)، انتخاب ترتیب مناسب اجرا برای امتحان‌های آزمایش و مشخص کردن این مسأله است که آیا بلوک‌بندی یا محدودیت‌های دیگر تصادفی‌کردن اعمال شود یا خیر.

در انتخاب طرح، در نظر داشتن هدف‌های آزمایش مهم است. در بسیاری از آزمایش‌های مهندسی، پیشاپیش می‌دانیم که بعضی سطوح عاملی مقادیر متفاوتی را برای پاسخ ارائه می‌دهند، در نتیجه به معلوم کردن اینکه کدام عوامل موجب چنین اختلافی می‌شوند و به برآورد کردن بزرگی تغییر پاسخ علاقه‌مندیم. در وضعیت‌های دیگر، ممکن است در معلوم کردن یکنواختی، بیشتر راغب باشیم. مثلاً، ممکن است دو حالت تولید A و B مقایسه شوند که A استاندارد و B حالتی مؤثر با هزینهٔ بیشتر باشد، بنابراین آزمایشگر علاقه‌مند به معلوم کردن مثلاً این موضوع است که آیا اختلافی بین محصول این دوحالت وجود دارد یا خیر.

۵. **انجام آزمایش.** وقتی آزمایش اجرا می‌شود، نظارت دقیق فرایند برای اطمینان از انجام همه چیز طبق طرح، حیاتی است. در این مرحله خطا در شیوهٔ آزمایش معمولاً اعتبار آن را از بین می‌برد. پیش‌برد طرح در موفقیت آن، امری قطعی است.

۶. **تحلیل داده ها.** درتحلیل داده‌ها باید از روش‌های آماری استفاده کرد تا آنکه نتایج و استنباط‌ها به‌جای آنکه به‌صورت فتوی صادر شوند، در ماهیت عینی باشند. اگر آزمایش درست طرح‌ریزی شود و اگر مطابق طرح انجام شود، آن‌گاه نیازی به روش‌های آماری پیچیده نیست. بسته‌های نرم‌افزاری عالی زیادی وجود دارند که به تحلیل داده ها کمک می‌کنند و روش‌های نموداری ساده نقشی عمده در تعبیر داده‌ها ایفا می‌نمایند. تحلیل مانده‌ای و بررسی کفایت مدل نیز از تکنیک‌های مهم تحلیل‌اند.

به‌خاطر داشته باشید که روش‌های آماری نمی‌توانند معلوم کنند که عامل (یا عواملی) اثری خاص دارند. آن‌ها تنها خط‌مشی اعتمادپذیری و معتبر بودن نتایج را ارائه می‌کنند. عملاً، روش‌های آماری اثبات چیزی را موجب نمی‌شوند، امّا اجازه می‌دهند که خطای محتمل در نتایج را اندازه‌گیری یا اطمینانی را با حکمی همراه کنیم. مزیت عمده روش‌های آماری آن است که آن‌ها با فرایند تصمیم‌گیری عینیت را اضافه می‌کنند. تکنیک‌های آماری توأماً با مهندسی خوب یا با آگاهی از فرایند و عقل سلیم معمولاً به نتیجه‌گیری‌های منطقی منتهی می‌شوند.

۷. **نتیجه‌گیری‌ها و توصیه‌ها.** به محض انجام تحلیل داده‌ها، آزمایش‌گر باید نتیجه‌گیری‌های عملی درباره پیامدها را ارائه داده و نحوه عمل را توصیه کند. در این مرحله غالباً روش‌های نموداری به خصوص در ارائه نتایج به دیگران مفید است. اجراهایی که به دنبال می‌آیند و آزمون‌های تأیید کننده آن‌ها نیز باید برای معتبر ساختن نتایج آزمایش انجام شوند.

در سرتاسر کل این فرایند، به‌خاطر داشتن این موضوع مهم است که بخش مهم فرایند آگاهی، آزمایش است، که در آن فرض‌هایی درباره سیستم به‌طور شهودی فرمول‌بندی می‌شوند، برای بررسی این فرض‌ها آزمایش انجام می‌گیرد و برمبنای نتایج حاصل، فرض‌های جدیدی فرمول‌بندی شده و به‌همین ترتیب کار ادامه می‌یابد. این موضوع القا می‌کند که آزمایش، تکراری است. معمولاً در شروع مطالعه طرح، یک تک آزمایش وسیع و جامع اشتباهی بزرگ است. یک آزمایش موفق احتیاج به آگاهی از عوامل مهم، دامنه‌های تغییر این عوامل، تعداد مناسب سطوحی که باید به‌کار روند و واحدهای درست اندازه‌گیری این متغیرها دارد. معمولاً، جواب درست این سؤال‌ها را کاملاً نمی‌دانیم، امّا با پیشرفت آزمایش، چگونگی آن‌ها را می‌آموزیم. به‌تدریج که برنامه آزمایش به جلو می‌رود، اغلب بعضی متغیرهای ورودی را حذف کرده، متغیرهای دیگری را وارد می‌کنیم، حدود کاوش بعضی عوامل را تغییر داده یا متغیرهای پاسخ جدیدی را اضافه می‌نماییم. درنتیجه، معمولاً آزمایش را به‌صورت دنباله‌ای انجام می‌دهیم و

به‌صورت یک قاعده کلی، در نخستین ازمایش بیشتر ازحدود ۲۵ درصد منابع موجود را به‌کار نمی‌گیریم . این موضوع، وجود منابع کافی برای انجام اجراهای تأییدی و سرانجام به نتیجه رساندن هدف نهایی آزمایش را تضمین خواهد کرد.

۶.۱ چشم‌انداز تاریخی

فیشر[۱۰] بدعت گذار استفاده از روش‌های آماری در طرح آزمایش است. طی چندین سال وی مسئول آمار و تحلیل داده‌های یک ایستگاه آزمایش کشاورزی لندن بود. فیشر تحلیل واریانس را توسعه و نخست آن‌را به‌صورت روش عمده تحلیل آماری در طرح آزمایش به‌کار گرفت. درسال ۱۹۳۳میلادی فیشر به‌سمت استادی دانشگاه لندن برگزیده شد. بعدها به دانشگاه کمبریج رفت و استاد مدعو چندین دانشگاه در سراسر دنیا بود.

بسیاری ازکاربردهای اولیه روش‌های طرح آزمایش، در علوم کشاورزی وزیست‌شناسی بوده‌اند و در نتیجه بسیاری از اصطلاحات آن از این علوم به ارث رسیده‌اند، امّا به‌نظر می‌رسد که اولین کاربردهای صنعتی طرح آزمایش در اوائل سال ۱۹۳۰ در صنعت پشم‌بافی انگلستان بوده است. بعد از جنگ جهانی دوّم، روش‌های طرح آزمایش در صنایع شیمیایی ایالات متحده و اروپای غربی وارد شد. این دسته صنایع هنوز هم زمینه‌های بسیار پر بار برای استفاده از طرح آزمایش در تولید و تکامل فرایندند. صنعت الکترونیک نیز سال‌های زیادی است که با موفقیت قابل ملاحظه از روش‌های طرح آزمایش استفاده می کند.

درسال‌های اخیر در ایالات متحده توجه زیادی به طرح آزمایش شده است، زیرا دیده شده است که در بسیاری از کشفیات صنعتی عامل مهمی در موفقیت رقابتی همکاران، استفاده از طرح آزمایش است. روزی فراخواهد رسید (انشاءالله به‌زودی) که تمام مهندسین طی دوره آموزشی خود طرح آزمایش را به‌عنوان درسی از آموزش خود ببینند. ورود موفقیت آمیز طرح آزمایش در حرفه مهندسی عاملی کلیدی در رقابت آینده است.

۷.۱ استفاده از تکنیک‌های آماری در انجام آزمایش

بسیاری از تحقیقات در مهندسی، علوم و صنعت تجربی است و در سطح وسیع از آزمایش استفاده می‌کنند. روش‌های آماری می‌توانند کارایی آزمایش‌ها را بسیار افزایش دهند و غالباً به نتایج حاصل نیرو می‌بخشند. استفاده خردمندانه از تکنیک‌های آماری در انجام آزمایش مستلزم آن‌است که آزمایش‌گر نکات زیر را مد نظر داشته باشد:

۱. **استفاده از اطلاعات غیر آماری مسأله.** آزمایش‌گران معمولاً در زمینه‌های کاری خود بصیرت زیادی دارند. مثلاً یک مهندس شهرساز که در زمینه آب کار می‌کند تجربیات

[۱۰] Fisher

عملی قابل ملاحظه دارد و در این زمینه رسماً آموزش دانشگاهی دیده است. در بعضی زمینه‌ها، تعداد بسیار زیادی نظریه فیزیکی وجود دارند که رابطه میان عوامل و پاسخ‌ها را استخراج می‌کنند. این نوع اطلاعات غیر آماری در انتخاب عوامل، تعیین سطوح عوامل، اخذ تصمیم درباره تعداد تکرارها، تعبیر نتایج تحلیل و غیره با ارزش‌اند. استفاده از آمار جانشین تفکر درباره مسأله نیست.

۲. **در نظر گرفتن نهایت سادگی طرح و تحلیل.** در پیچیده کردن و استفاده از تکنیک‌های آماری پیشرفته نباید مصّر باشیم. تقریباً همیشه طرح و روش‌های تحلیل به‌نسبت ساده بهترین‌اند. موقعیت خوبی است که بر شیوه توصیه شده در مرحله ۴ از بخش (۵.۱) مجدداً تأکید کنیم. اگر طرح را دقیق و درست ارائه کرده باشیم، تقریباً همیشه تحلیل نسبتاً سرراست است. امّا، اگر به شکل بدی طرح را سرهم‌بندی کرده باشیم، بعید است که حتی با آمار پیچیده و خردمندانه بتوانیم از این وضعیت رهایی یابیم.

۳. **شناخت تفاوت‌های معنی‌دار آماری و واقعی.** درست به‌دلیل اینکه دو شرط آزمایش، میانگین‌هایی برای پاسخ به‌وجود می‌آورند که از نظر آماری متفاوت‌اند، اطمینانی وجود ندارد که آیا تفاوت برای داشتن ارزش عملی، به‌قدر کافی بزرگ است یا نه. مثلاً ممکن است مهندسی مشخص کرده باشد که اصلاحی در سیستم سوخت‌رسانی اتومبیل می‌تواند موجب افت مصرف سوخت به میزان ۰.۱ لیتر در هر کیلومتر شود. این یک نتیجهٔ آماری معنی‌دار است. امّا، اگر هزینهٔ اصلاح سیستم ۱۰۰۰۰۰ تومان باشد، آن‌گاه احتمالاً تفاوت ۰.۱ لیتر در هر کیلومتر آن‌قدرها زیاد نیست که بتواند ارزش عملی داشته باشد.

۴. **آزمایش‌ها معمولاً تکراری‌اند.** به‌خاطر داشته باشید که در اکثر وضعیت‌ها ارائه طرح آزمایش بسیار جامع در شروع مطالعه عاقلانه نیست. یک طرح موفق به شناخت عوامل مهم، دامنه‌هایی که هر یک از عوامل در آن‌ها تغییر می‌کنند، تعداد مناسب سطوح برای هر عامل و واحدهای اندازه‌گیری درست هر عامل و پاسخ نیاز دارد. عموماً در شروع آزمایش کاملاً برای پاسخ به‌این پرسش ها آماده نیستیم، امّا با پیش‌برد آزمایش از جواب‌ها با اطلاع خواهیم شد. این موضوع تأییدی بر شیوه دنباله‌ای یا تکراری است که قبلاً بحث شد. البته وضعیت‌هایی وجود دارند که در آن‌ها آزمایش‌های جامع کلاً مناسب‌اند، امّا به عنوان یک قاعده کلی، اکثر آزمایش‌ها باید تکراری باشند. در نتیجه، ما معمولاً بیشتر از حدود ۲۵ درصد منابع آزمایش (اجراها، بودجه، زمان و غیره) را در طرح اولیه به‌کار نمی‌گیریم. اغلب این مساعی اولیه تنها به‌منظور کسب تجربه است و باید منابع دیگری در انجام هدف‌های نهایی آزمایش در اختیار باشند.

۸.۱ مفاهیم کلی در سازماندهی و قضاوت روی نتایج طرح‌های آزمایشی

۱. انواع تغییرات

بدیهی است که پیش از اجرای يك آزمایش باید «طرحی» تهیه کرد. در این طرح نباید فقط تیمارها یا روش‌های مشاهده و اندازه‌گیری را مورد توجه قرار داد بلکه اگر نکاتی رعایت نشوند نتایج نامفهومی به‌دست خواهد آمد و یا بدتر از آن این نتایج که شاید مربوط به عوامل نامعلوم باشند به تیمارها نسبت داده شوند. به طور كلي يك «طرح آزمایشی» را یک طرح خوب گویند که در آن بتوان دو نوع منبع تغییرات یا پراكندگي زیر را از هم تفکیک کرد:

۱ـ تغییرات قابل کنترل یا سیستماتیک

۲ـ تغییرات غیر قابل کنترل یا تصادفي

عوامل قابل کنترل که موجب تغییرات قابل کنترل می‌شوند عبارتند از:
ـ عواملی که مطالعه آنها هدف ما در آزمایش است (مانند تیمارها).
ـ عوامل شناخته شده دیگر که قادرند روی نتایج تاثیر داشته باشند و ما آنها را طوری در آزمایش قرار داده‌ایم که بتوان اثر آنها را زمان قضاوت روی نتایج محاسبه کرد (مانند بلوك).
ـ عوامل غیر قابل کنترل که تغییرات تصادفی از آنها ناشی می‌شوند، عوامل تصادفی نامیده می‌شوند.

۲. خطای تصادفی

هر آزمایش باید با کمال دقت، طرح و اجرا شود تا نتایج حاصل از آن معتبر باشد و هرچه آزمایش با دقت و مراقبت صحیح انجام گیرد، باز هم پراکندگي‌هایی وجود خواهند داشت که به علت عدم تساوی اثر عوامل غیر قابل کنترل (تصادفی) در واحدهای آزمایشی پیدا شده‌اند. این پراکندگی‌ها به اشتباه آزمایشی یا خطای تصادفی مشهورند.
بایستی سعی کرد تا حد امکان از مقدار خطاها کم کرد تا دقت و حساسیت آزمایش بیشتر باشد. برای کاستن خطای تصادفی می‌توانیم از راه‌های زیر استفاده کنیم:
ـ مواد آزمایشی را زیاد کنیم.
ـ تکرارهای آزمایش را زیاد کنیم.
ـ طرح مناسب به‌کار ببریم.

۹.۱ انواع طرح آزمایشی

به‌طور کلی طرح‌ها را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

۱ـ طرح‌هایی که در آنها فقط اثر یک منبع پراکندگی مورد بررسی و مقایسه است. در این دسته تنها یک طرح وجود دارد و آن طرح «کاملاً تصادفی» می‌باشد.

۲ـ طرح‌هایی که در آنها اثر بیش از یک منبع پراکندگی مورد بررسی است. طرح‌های زیادی در این دسته قرار می‌گیرند که از جمله این طرح‌ها می‌توان «طرح بلوک‌های کامل تصادفی [۱۱]» و »طرح مربع لاتین [۱۲]» را نام برد که به‌همراه «طرح کاملاً تصادفی [۱۳]» سه طرح پایه و اصلی را در آمار تشکیل می‌دهند و بقیه طرح‌ها به طور مستقیم یا غیر مستقیم از این سه طرح ناشی می‌شوند.

۱. طرح کاملاً تصادفی

همان‌طور که از اسم طرح پیداست، در آن تیمارها به‌طور کاملاً تصادفی در واحدهای آزمایشی قرار می‌گیرند به‌طوری که هر یک از واحدهای آزمایش شانس مساوی برای دریافت هر یک از تیمارها داشته باشند. این طرح زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که واحدهای آزمایشی یکنواخت باشند. مزیت این طرح قابل انعطاف بودن آن است، یعنی محقق می‌تواند هر تعداد تیمار و برای هر تیمار هر تعداد تکرار را انتخاب نماید در صورتی که دو طرح اصلی دیگر، تکرارهای مساوی برای تیمارهای مختلف لازم دارند. در این طرح اگر تعداد تکرار برای تمام تیمارها یکسان باشد طرح را «متعادل» و در غیر این صورت طرح را نامتعادل می‌نامند. بنابراین می‌توان این طرح را بیشتر در آزمایشات مقدماتی به‌کار گرفت.

مزایای طرح کاملاً تصادفی:

ـ می‌توان هر تعداد تیمار و تکرار را بدون وجود اشکالی به‌کار برد (متعادل و نامتعادل).

ـ تجزیه آماری طرح ساده است.

ـ از بین رفتن یک یا چند واحد آزمایشی، حتی یک تیمار، تجزیه آماری را مشکل نمی‌سازد.

معایب طرح:

ـ بدترین عیب این طرح آن است که دقت آن به‌خصوص در آزمایش‌های بزرگ زیاد نیست.

ـ خطای تصادفی در این طرح شامل همه منابع تغییرات بین واحدها به‌جز پراکندگی مربوط به اثرات تیمارها می‌شود؛ بنابراین خطای تصادفی بزرگ است.

مدل آماری طرح کاملاً تصادفی به شرح زیر است:

$$y_{ij} = \mu + T_i + \epsilon_{ij} \qquad ; i = ۱, \dots, a; j = ۱, \dots, n \tag{۱.۱}$$

y_{ij}: اثر هریک از مشاهدات

μ: میانگین کل جامعه

T_i: اثر تیمار

ϵ_{ij}: خطای تصادفی

[۱۱] DiSpoSitif an blocs rowdomises block designs randomized

[۱۲] Latin square design

[۱۳] Completely randomized design

طرح کاملاً تصادفی نامتعادل:

در طرح‌های نامتعادل تعداد تکرار براي تیمارهای موجود در آزمایش یکسان نیست. هنگامی که واحدهایی در طرح متعادل نیز در اثر عوامل گوناگون از بین رفته باشند تعداد تکرار برای تیمارها نابرابر خواهد بود و طرح به شکل نامتعادل درخواهد آمد. در واقع طرح کاملاً تصادفی متعادل را می‌توان حالت ویژه‌ای از طرح نامتعادل دانست. در این حالت نیز محاسبات آماری طرح قابل بررسی است.

۲. طرح بلوک کامل تصادفی شده

در آزمایش‌ها مشاهده می‌شود که واحدهای نزدیک به هم برای صفات اندازه‌گیری شده تشابه بیشتری نسبت به واحدهای دور از هم نشان می‌دهند. بدین سبب پیش از انجام آزمایش باید یک گروه‌بندی برای واحدهای آزمایش انجام گیرد تا بتوان پراکندگی‌هایی که در اثر تفاوت‌های بین گروه‌ها ایجاد می‌شود محاسبه و از خطای تصادفی جدا کرد و بدین ترتیب خطای تصادفی را تقلیل و دقت آزمایش را بالا برد.

در این گونه موارد نباید از طرح کاملاً تصادفی استفاده کرد بلکه باید از طرح بلوک کامل تصادفی شده استفاده نمود.

در طرح بلوک کامل تصادفی شده سعی می‌شود که واحدهای آزمایشی طوری گروه‌بندی شوند که تعداد واحدها در هر دسته برابربا تعداد تیمارها باشد در این صورت هر گروه را یک بلوک گویند. این کار بدین منظور است که واحدهای هر بلوک حتی الامکان مشابه باشند.

مزایای طرح بلوک کامل تصادفی شده:

ـ در این طرح به علت بلوک بندی (گروه‌بندی) نتایج دقیق‌تر از طرح کاملاً تصادفی است.

ـ می‌توان از هر تعداد تیمار و هر تعداد تکرار (بصورت متعادل) استفاده کرد.

ـ تجزیه آماری ساده است.

ـ اگر به دلایلی مجبور شویم که یک بلوک یا یک تیمار را از آزمایش حذف کنیم اشکال زیادی در تجزیه آماری روی نخواهد داد.

ـ اگر اعداد يك یا چند واحد آزمایشی از بین بروند می‌توان با روش مخصوص آنها را برآورد کرد.

مدل آماری طرح بلوک کامل تصادفی شده:

این طرح را می‌توان آزمایشی دانست که در آن دو عامل قابل کنترل وجود دارد یکی از این دو عامل تیمار و دیگری بلوک است که در طرح کاملاً تصادفی وجود نداشت.

منظور از وارد کردن عامل بلوک در یک طرح این است که آزمایش را دقیق‌تر انجام دهیم (خطای تصادفی را کاهش دهیم) یعنی با حذف تغییرات مربوط به بلوک‌ها و مقایسه تیمارها که هدف اصلی در هر آزمایش است، به نحو بهتری انجام شود.

$$y_{ij} = \mu + T_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \qquad ; i = 1, \ldots, a; j = 1, \ldots, b \tag{2.1}$$

y_{ij}: اثر هریک از مشاهدات

μ: میانگین کل جامعه

βj: اثر jامین بلوک

T_i: اثر iامین تیمار

ϵ_{ij}: خطای تصادفی

تیمارها و بلوک‌ها را به صورت عوامل تثبیت شده در نظر می‌گیریم. بعلاوه اثرهای تیماری و بلوکی را به‌صورت انحراف از میانگین کل تعریف می‌کنیم، به‌طوری که $\sum_{i=1}^{a} T_i = 0$ و $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$.

۳. طرح مربع لاتین

طرحی را مربع لاتین گویند که در آن تعداد تکرار معادل تعداد تیمارهای آزمایشی است؛ یعنی برای مربع لاتینی که در آن مثلاً ۴ تیمار و ۴ تکرار به‌کار رفته باشد ۴ ستون عمودی تشکیل می‌دهیم که معمولاً با اعداد لاتین نشان داده می‌شود و ۴ ردیف افقی یعنی بلوک‌های مورد نظر که با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ مشخص می‌گردند.

مزایای طرح مربع لاتین:

- چون هر تیمار در هر ردیف و هر ستون وجود دارد لذا تغییرات مربوط به بلوک ردیفی و بلوک ستونی از تغییرات بین تیمارها تفکیک می‌شود و بنابراین تیمارها را می‌توان بهتر مقایسه کرد.
- در این طرح خطای تصادفی کوچک‌تر و دقت آزمایش بیشتر می‌شود.
- تجزیه آماری این طرح ساده است.

معایب:

- چون تعداد تکرار برای هر تیمار مساوی تعداد تیمار است محدودیتی برای اجرای این طرح به‌وجود می‌آید چرا که در صورت زیاد بودن تیمار بررسی طرح مشکل‌تر می‌شود و زیادی تکرار باعث خطای تصادفی آزمایش می‌گردد. بدین جهت اصولاً اگر تعداد تیمار بیشتر از ۸ باشد از این طرح استفاده نمی‌شود. (مگر به صورت تکرار مربعات کوچک)
- برآورد واحد گمشده، مشکل‌تر از حالت بلوک کاملاً تصادفی است.

مدل آماری طرح مربع لاتین:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \nu_j + \beta_k + \epsilon_{ijk}; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, p \\ k = 1, 2, \ldots, p \end{array}$$

y_{ijk}: مشاهدهjامین تیمار در سطر i ام و ستون k ام

α_i: اثر سطر i ام

νj: اثر تیمار j ام

β_k: اثر ستون k ام
ϵ_{ij}: اثر باقیماندها

۱۰.۱ طرح‌های عاملی

امروزه با پیشرفت امکانات فنی و علمی و لزوم بررسی اثر عوامل مختلف روی یک صنعت یا روی عملکرد یک گیاه یا حیوان سعی می‌شود که اثرات دو یا چند عامل[۱۴] به‌طور همزمان مورد مطالعه قرار گیرند و رفتار یک عامل در مقابل مجموعه‌ای از عوامل مشاهده گردد.
در طرح پایه که در صفحات پیشین دیدیم فقط یک عامل در یک آزمایش مورد بررسی قرار می‌گرفت در حالی که در طرح‌های عاملی دو یا چند عامل جداگانه در یک‌جا مورد مقایسه قرار می‌گیرند. اینگونه طرح‌ها هم از نظر اقتصادی باصرفه‌ترند و هم مقدار اطلاعاتی که از آن‌ها به‌دست می‌آید اغلب بیشتر از طرح‌های جداگانه است.
همان‌طور که از عنوان آن‌ها برمی‌آید طرح پایه این آزمایش‌ها همان ۳ طرح پایه یعنی، طرح کاملاً تصادفی، طرح بلوک کامل تصادفی، وطرح مربع لاتین است و فقط ترکیب عامل‌های مختلف است که به عنوان تیمار به آن‌ها جنبه عاملی می‌دهد.
پیش از آشنایی با طرح‌های عاملی [۱۵] بهتر است به تعریف چند اصطلاح مخصوص به آن‌ها بپردازیم:
عامل[۱۶]: نوع تیمار، فاکتور یا عامل نامیده می‌شود و به وسیله حروف بزرگ نشان داده می‌شود.
سطح[۱۷]: تیمارهای مربوط به هر عامل را سطوح آن عامل می‌گویند و آن‌ها را با حروف کوچک الفبا نمایش می‌دهند. ترکیب سطوح عامل‌های مختلف تیمار خواهند بود.
اثر متقابل[۱۸]: وقتی عکس‌العمل صفت مورد مطالعه نسبت به دو عامل (یا چند عامل) روال مشابهی نداشته باشد گفته می‌شود که این عامل‌ها از نظر تأثیر روی صفت مزبور اثر متقابل دارند و به عبارت دیگر مستقل از هم عمل نمی‌کنند.
در آزمایش‌ها a^n، توان نشان‌دهنده تعداد عوامل و پایه نشانگر تعداد سطوح است. یک آزمایش $۲^۳$ یعنی آزمایشی که در آن سه عامل هر کدام با دو سطح به‌کار رفته است.
طرز تصادفی کردن:
عامل را با حروف بزرگ و سطوح آنها را با حروف کوچک یونانی نشان می‌دهیم(البته این نوع نامگذاری منحصربه‌فرد نیست).
مزایای طرح‌های عاملی:

[۱۴] Factor
[۱۵] Factorial Designs
[۱۶] Factor
[۱۷] Level
[۱۸] Interaction

ـ دو یا چند آزمایش جداگانه در یک آزمایش گنجانده می‌شوند و از نظر اقتصادی به‌صرفه‌ترند.
ـ نسبت به طرح‌های پایه اطلاعات بیشتری به‌دست می‌آید (اثرمتقابل‌بین‌عوامل‌مختلف).
ـ با توجه به ساختار طرح، تعداد تکرار برای هر سطح (تیمار) زیاد است و لذا دقت آزمایش بیشتر می‌باشد.

معایب:

ـ محاسبات آماری پیچیده تر از طرح‌های پایه‌اند.
ـ عملیات اجرایی مشکل‌تر از طرح‌های پایه‌اند.

مدل آماری طرح‌های عاملی:

مدل آماری طرح از سطوح پایه به‌کار رفته و تعداد عوامل تبعیت می‌کند. برای مثال مدل آماری یک طرح دو عاملی به شرح زیر خواهد بود:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk};$$

μ: میانگین جامعه
α_i: اثر عامل A
β_j:اثر عامل B
$(\alpha\beta)_{ij}$: اثر متقابل دو عامل
ϵ_{ijk}: اثر باقیماندها

۱۱.۱ مفاهیم و مقدمات جبر ماتریس‌ها

تعریف ۱.۱۱.۱. ترانهاده ماتریس: ترانهاده ماتریس A که با A' نشان داده می‌شود ماتریسی است که از جابه‌جا کردن سطر و ستون A به‌دست می‌آید.

تعریف ۲.۱۱.۱. اثر ماتریس: اگر A ماتریس مربع باشد، آنگاه اثر A، مجموع درایه‌های قطر اصلی A است. اثر ماتریس A را با نماد $\mathrm{tr}(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱۱.۱. رتبه یک ماتریس: فرض کنید A یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ باشد. آن‌گاه زیرفضای به‌وجود آمده توسط بردارهای سطری A فضای سطری A نامیده می‌شود. زیرفضای به‌وجود آمده توسط ستون‌های A فضای ستونی A نامیده می‌شود. برد A همان فضای ستونی A می‌باشد.

رتبه یک ماتریس A بعد فضای ستونی A می‌باشد و به $\mathrm{rank}(A)$ نمایش داده می‌شود. یک ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفرد نامیده می‌شود اگر $\mathrm{rank}(A) = n$ باشد. در غیر این‌صورت منفرد می‌باشد.

گفته می‌شود که یک ماتریس A از مرتبه $m \times n$، $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ دارای رتبه ستونی کامل است اگر ستون‌های آن مستقل خطی باشند. رتبه سطری کامل به طور مشابه تعریف می‌شود. گفته

می‌شود یک ماتریس A دارای رتبه کامل است اگر یا دارای رتبه سطری کامل یا رتبه ستونی کامل باشد. اگر دارای رتبه کامل نباشد، ناقص رتبه است.

برخی از خواص رتبه

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. آن‌گاه

۱. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A')$،

۲. $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{null}(A) = n$،

۳. $\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - n$ که در آن B از مرتبه $n \times p$ است،

۴. $\mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AC)$ که در آن B و C نامنفرد و از مرتبه‌های مناسب هستند،

۵. $\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$،

۶. $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

تعریف ۴.۱۱.۱. بردارهای متعامد و فضاها: اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_m$، $m < n$، بردار nتایی غیرصفر دوبه‌دو متعامد باشند و اگر

$$c_۱X_۱ + c_۲X_۲ + \cdots + c_mX_m = ۰,$$

آن‌گاه برای $i = ۱,۲,۳,\ldots,m$

$$(c_۱X_۱ + c_۲X_۲ + \cdots + c_mX_m) \cdot X_i = ۰.$$

دو فضای برداری را متعامد گوییم اگر هر بردار از یک فضا، عمود بر هر یک از بردارهای فضای دیگر باشد. برای مثال فضای پدید آمده به‌وسیله بردارهای

$$X_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}' \quad \text{و} \quad X_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}'$$

بر فضای پدید آمده توسط

$$X_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}' \quad \text{و} \quad X_۴ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}'$$

عمود است، چون برای تمام مقادیر a، b، c ، d ،

$$(ax_۱ + bx_۲)(cx_۳ + dx_۴) = ۰$$

تعریف ۵.۱۱.۱. ماتریس متعامد: ماتریس مربعی که هر جفت از ستون‌ها شامل دو بردار متعامد است.

تعریف ۶.۱۱.۱. گروه: گروه یک ساختار جبری برروی یک مجموعه ناتهی است که نسبت به یک عمل دوتایی بسته و دارای خاصیت شرکت‌پذیری باشد. همچنین وجود عنصر همانی و عنصر عکس در این ساختار الزامی است.
اگر $\mathcal{G}$ مجموعه ناتهی و Δ عمل دوتایی روی $\mathcal{G}$ باشد، آن‌گاه $(\mathcal{G}, \Delta)$ را یک گروه می‌نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱. برای هر $a, b \in \mathcal{G}$، $a\Delta b \in \mathcal{G}$ (بسته بودن $\mathcal{G}$ نسبت به عمل Δ).

۲. برای هر $a, b, c \in \mathcal{G}$، $a\Delta(b\Delta c) = (a\Delta b)\Delta c$ (ویژگی شرکت‌پذیری).

۳. برای هر $a \in \mathcal{G}$، یک $e \in \mathcal{G}$ وجود دارد که $a\Delta e = e\Delta a = a$ (وجود عنصر همانی).

۴. برای هر $a \in \mathcal{G}$، یک $b \in \mathcal{G}$ وجود دارد که $a\Delta b = b\Delta a = e$ (وجود عنصر عکس).

تعریف ۷.۱۱.۱. حاصلضرب کرونکر دو ماتریس: فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$، حاصلضرب کرونکر دو ماتریس A و B به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}.$$

تعریف ۸.۱۱.۱. حاصل‌جمع کرونکر دو ماتریس: فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$، حاصل‌جمع کرونکر دو ماتریس A و B یک ماتریس از مرتبه $nm \times nm$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$A \oplus B = (I_n \otimes A) + (B \otimes I_m).$$

تعریف ۹.۱۱.۱. ماتریس جایگشت: ماتریسی که از تغییر مکان سطرهای یک ماتریس همانی حاصل شود یک ماتریس جایگشت نام دارد.

تعریف ۱۰.۱۱.۱. آرایه متعامد: آرایه متعامد $(d \leq k)$ $A\ d-(p, k, \lambda)$ یک ماتریس $\lambda p^d \times k$ است که درایه‌های آن از یک مجموعه ثابت متنهاهی X با p نقطه (عموماً $\{1, 2, \dots, n\}$) انتخاب شده است، به‌طوری‌که در هر زیرمجموعه‌ای از ستون‌های d، هر dتایی از نقاط X دقیقا در سطرهای λ ظاهر می‌شوند.

p: تعداد سطح

k: تعداد عوامل

λp^d: تعداد اجراها

d: قدرت آرایه

λ: شاخص

تعریف ۱.۱۱.۱۱. حاصل‌ضرب هادامارد: حاصل‌ضرب هادامارد یا حاصل‌ضرب جمله به جمله یا حاصل‌ضرب عنصر به عنصر دو ماتریس $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ وقتی تعریف شده است که ماتریس‌های A و B دارای یک مرتبه باشند. هر عنصر ماتریس حاصل‌ضرب از ضرب جملات متناظر هم در ماتریس‌های A و B به‌دست می‌آید یعنی

$$A \circ B = [a_{ij} \cdot b_{ij}]$$

تعریف ۱.۱۱.۱۲. یک پایه را که یک مجموعه متعامد باشد یک پایه متعامد می‌نامیم. پایه‌ای را که یک مجموعه یکّه متعامد باشد یک پایه یکّه متعامد می‌نامیم.

متذکر می‌شویم که پایه‌هایی استاندارد پایه‌هایی یکّه متعامد هستند.

پایه‌های استاندارد

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 : \{(1,0),(0,1)\} \\ \mathbb{R}^3 : \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ \mathbb{R}^n : \{(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\} \end{array}\right\} \text{پایه‌های یکّه متعامد}$$

تعریف ۱.۱۱.۱۳. ماتریس طرح‌ریزی: فرض کنیم W زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ (و یا فصای کلی V) باشد. همچنین فرض کنیم $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ یک پایه یکّه متعامد W باشد. هرگاه v برداری در $\mathbb{R}^n$ (V) باشد، ماتریس طرح‌ریزی v روی W، که با proj_W^v نشان داده می‌شود، چنین تعریف می‌گردد

$$\mathrm{proj}_W^v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \cdots + (v \cdot u_n)u_n.$$

فصل ۲

طرح‌های امکان‌پذیر با استفاده از مدل خطی

۱.۲ بررسی کلی مدل خطی

در این بخش مدل مورد بررسی به صورت $\mathbf{Y} = f(x_۱, \dots, x_m)$ است و مدل تحلیل واریانس [۱] با بعد بالا به صورت زیر ارائه می‌شود([۱۶]).

$$f(x_۱, \dots, x_m) = f_\circ + \sum_i f_i(x_i) + \sum_{i<j} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{۱۲\dots m}(x_۱, x_۲, \dots, x_m). \qquad (۱.۲)$$

در اینجا $x_۱, \dots, x_m$ عامل‌های ورودی و $f(x_۱, \dots, x_m)$ مقدار خروجی عددی است که ویژگی‌های مفید زیر را تحت شرایط تعامد دارد

$$\int f_{i_۱\dots i_s}(x_{i_۱}, \dots, x_{i_s}) \mathrm{d}x_k = \circ, \qquad k = i_۱ \dots i_s$$

۱. معادله سمت راست رابطه (۱.۲) به صورت زیر است

$$f_M(mathbf{x}_M) = \sum_{N:N\subseteq M} (-۱)^{|M|-|N|} E(f|X_N)$$

[۱] Analysis of variance (ANOVA) model

۲. به ازای هر $(i_1, \ldots, i_s) \neq (j_1, \ldots, j_l)$،

$$E(f_{i_1 \ldots i_s} \cdot f_{j_1 \ldots j_l}) = \mathrm{Cov}(f_{i_1 \ldots i_s} \cdot f_{j_1 \ldots j_l}) = 0$$

۳. $D = \sum_i D_i + \sum_{j<k} D_{j_k} + \cdots + D_{12\ldots m}$

که در اینجا $D = \mathrm{Var}(f)$ و

$$D_M = \mathrm{Var}(f_M(x_M)), \quad M \subseteq \{1, 2, \ldots, m\} = \Omega$$

و x'_iها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع (i.i.d.) از توزیع $U(0,1)$ هستند.

تجزیه آنالیز واریانس برای توابع توسط هافدینگ [2] [۵] در سال ۱۹۴۸ آغاز شد و توسط تاکی‌مورا [3] [۱۴] در سال ۱۹۸۳ و استاین [۱۲][4] در سال ۱۹۸۷ بیشتر مطرح شد.

f_0 نشان‌دهنده‌ی اثر مرتبه صفرام است که یک ثابت است. $f_i(x_i)$ اثر متغیر x_i را مستقل از سایر متغیرهای ورودی می‌دهد. $f_{ij}(x_i, x_j)$ اثرات متقابل متغیرهای x_i و x_j را شرح می‌دهد.

بر اساس مدل آنالیز واریانس، سوبول [5] [۱۱] در سال ۱۹۹۳ شاخص $S_{i_1 \ldots i_s} = D_{i_1 \ldots i_s}/D$ را پیشنهاد کرد تا اهمیت متغیرهای ورودی و اثرات متقابل آنها را نشان دهد و مهم‌ترین متغیرها و اثرات متقابل را برای f شناسایی کند.

متغیرهای ورودی $x_1, \ldots, x_m$ را به عنوان عامل‌های کنترلی در نظر بگیرید و براساس طرح $H = (a_{ij})_{n \times m} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ که jامین ستون آن p_j سطح دارد و $a_{ij} \in \{1, 2, \ldots, p_j\}$ یک آزمایش طراحی کنید.

فرض کنید $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ یک بردار با خطای $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ باشد، بنابراین

$$y_i = f_0 + f_1(x_{i1}) + f_2(x_{i2}) + \cdots + f_{12\ldots m}(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}) + \varepsilon_i$$

که در آن

$$x_{ij} = x_j(a_{ij}) = \left(\frac{1}{p_j - 1}\right) \times (a_{ij} - 1)$$

$$\mathbf{\Theta}_{i_1 \ldots i_s} = (f_{i_1 \ldots i_s}(x_{1i_1}, \ldots, x_{1i_s}), \ldots, f_{i_1 \ldots i_s}(x_{ni_1}, \ldots, x_{ni_s}))'$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

آن‌گاه مدل بالا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Theta}_0 + \sum_j \mathbf{\Theta}_j + \sum_{j<k} \mathbf{\Theta}_{jk} + \cdots + \mathbf{\Theta}_{12\ldots m} + \varepsilon \qquad (۲.۲)$$

[2] Hoeffding
[3] Takemura
[4] Stein
[5] Sobol

۲.۲ مفاهیم اصلی و لم‌های پایه

تعریف ۱.۲.۲. ([۱۶]). یک گروه از $M \subseteq \Omega$ و $\boldsymbol{\Theta}_M(\mathbf{H})$ متناظر با طرح ثابت $\mathbf{H}$ وجود دارد.
اگر $\mathbf{H}$ برای هر $M \subseteq \Omega$ و $\boldsymbol{\Theta}_M(\mathbf{H})$ برقرار باشد، ماتریس $\mathbf{B}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$E(\mathbf{BY}) = \boldsymbol{\Theta}_M(\mathbf{H})$$

آن‌گاه $\mathbf{H}$ یک طرح امکان‌پذیر [۶] نامیده می‌شود.
همچنین اگر $\mathbf{H}$ یک طرح امکان‌پذیر باشد آن‌گاه برآوردهای ناریب خطی [۷] $\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H})$ برای $\boldsymbol{\Theta}_M(\mathbf{H})$ وجود دارد.
در این بخش، اختلاف برآورد با $\operatorname{tr}\left(\operatorname{Var}(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H}))\right)$ اندازه‌گیری می‌شود (که معمولا این معیار، معیار Aـ بهینگی [۸] نامیده می‌شود). برآورد ناریب خطی $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H})$ بهترین برآورد ناریب خطی [۹] $\boldsymbol{\Theta}_M(\mathbf{H})$ نامیده می‌شود اگر

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{Var}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H}))\right) = \min_{\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H})} (\operatorname{tr}\left(\operatorname{Var}(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H}))\right))$$

هدف ما این است که $\mathbf{H}^*$ و $\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}^*_M(\mathbf{H})$ را از میان طرح‌های امکان‌پذیر و برآوردهای ناریب خطی انتخاب کنیم چنان‌که

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{Var}(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}^*_M(\mathbf{H}^*))\right) = \min_{\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_M,\mathbf{H}} (\operatorname{tr}\left(\operatorname{Var}(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H}))\right))$$

از تعریف، بهترین برآورد ناریب خطی $\boldsymbol{\Theta}_M(\mathbf{H})$ واضح است، بنابراین فقط نیاز به انتخاب $\mathbf{H}^*$ داریم به‌طوری‌که

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{Var}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H}^*))\right) = \min_{\mathbf{H}}(\operatorname{tr}\left(\operatorname{Var}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H}))\right))$$

لم ۱.۲.۲. ([۱۶]). برای هر مدل خطی

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon, \tag{۳.۲}$$

که $\mathbf{Y}$ یک بردار $n \times 1$، $\mathbf{C}$ یک ماتریس طرح [۱۰] $n \times p$، $\boldsymbol{\beta}$ یک بردار پارامتری [۱۱] $p \times 1$، ε یک بردار خطای تصادفی $n \times 1$ و $E(\varepsilon) = 0$ باشد؛ $\boldsymbol{\beta}$ برآوردپذیر است اگروفقط‌اگر $\mathbf{C}$ پررتبه [۱۲] باشد.

[۶] Feasible Designs
[۷] Linear unbiased estimates
[۸] A-optimality criterion
[۹] BLUE
[۱۰] Design matrix
[۱۱] Parameter vector
[۱۲] full column rank

برهان. "$\Longrightarrow$"
از آنجا که $\boldsymbol{\beta}$ برآوردپذیر است ماتریس $\mathbf{A}_{p\times n}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\boldsymbol{\beta}$

$$E(\mathbf{AY}) = \mathbf{AC}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

که این نتیجه می‌دهد $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_p$.
اگر $\text{rank}(C) < p$ آن‌گاه

$$\text{rank}(\mathbf{AC}) \leq \text{rank}(\mathbf{C}) < p = \text{rank}(\mathbf{I}_p)$$

بنابراین $\text{rank}(\mathbf{C}) = p$.
"$\Longleftarrow$"
از آنجا که $\mathbf{C}$ پررتبه است، $\mathbf{C}'\mathbf{C}$ معکوس‌پذیر است. هر دو طرف رابطه (۳.۲) را در $(\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-۱}\mathbf{C}'$ ضرب می‌کنیم، داریم

$$E((\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-۱}\mathbf{C}'\mathbf{Y}) = (\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-۱}\mathbf{C}'\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-۱}\mathbf{C}'E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta}$$

بنابراین $\boldsymbol{\beta}$ برآوردپذیر است. □

لم ۲.۲.۲. ([۱۶]). فرض کنید $\mathbf{H}$ یک طرح امکان‌پذیر است، $\text{rank}(\mathbf{C}_M) = l_M$ و $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H})$ بهترین برآورد ناریب خطی $\boldsymbol{\Theta}_M(H)$ باشد، در این‌صورت

$$\text{tr}\left(\text{Var}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_M(\mathbf{H}))\right) \geq \sigma^۲ \prod_{j\in M}(p_j - ۱)$$

برهان. از آنجا که $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$، از تعریف طرح امکان‌پذیر، $\boldsymbol{\Theta}_M = \mathbf{C}_M\boldsymbol{\beta}_M$ برآوردپذیر است. بنابراین $\boldsymbol{\beta}_M = (\mathbf{C}'_M\mathbf{C}_M)^{-۱}\mathbf{C}'_M\boldsymbol{\Theta}_M$ و $\boldsymbol{\beta}$ برآوردپذیر هستند. طبق لم ۱.۲.۲، $\mathbf{C}$ پررتبه است. بنابراین برآورد کمترین توان‌های دوم خطای $\boldsymbol{\beta}$ برابر است با $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-۱}\mathbf{C}'\mathbf{Y}$. فرض کنید

$$\mathbf{E}_M = (\circ \ldots \circ I_{l_M} \circ \ldots \circ)'$$

که I_{l_M} ماتریس همانی از مرتبه $\prod_{j\in M}(p_j - ۱)$ $l_M =$ است. بنابراین $C_M = CE_M$، $\boldsymbol{\beta}_M = E'_M\boldsymbol{\beta}$، $\boldsymbol{\Theta}_M = C_M\boldsymbol{\beta}_M = CE_ME'_M\boldsymbol{\beta}$ و $CE_ME'_M\boldsymbol{\beta}$ برآوردپذیرند. طبق قضیه گوس–مارکوف[۱۳]، $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_M = CE_ME'_M\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ بهترین برآورد ناریب خطی $\boldsymbol{\Theta}_M$ است و

$$\begin{aligned}\text{Var}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_M) &= CE_ME'_M(C'C)^{-۱}C'C(C'C)^{-۱}E_ME'_MC'\sigma^۲\\ &= CE_ME'_M(C'C)^{-۱}E_ME'_MC'\sigma^۲\end{aligned}$$

[۱۳] Gauss-Markov

حال ثابت می‌کنیم

$$E'_M(C'C)^{-1}E_M \geq (E'_MC'CE_M)^{-1}$$

توجه کنید که

$$C'C = \begin{pmatrix} C'_0C_0 & C'_0C_1 & \dots & C'_0C_{12\dots m} \\ C'_1C_0 & C'_1C_1 & \dots & C'_1C_{12\dots m} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ C'_{12\dots m}C_0 & C'_{12\dots m}C_1 & \dots & C'_{12\dots m}C_{12\dots m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$$

که $\mathbf{A} = C'_0C_0$.

ما فقط به اثبات حالت $M = \{0\}$ نیاز داریم. با تعویض سطرها و ستون‌های $C'C$، اثبات حالت‌های دیگر مشابه همین حالت هستند. طبق فرمول معکوس ماتریس‌های بلوکی داریم

$$(C'C)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - B'A^{-1}B)B'A^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

زیرا

$$E'_0(C'C)^{-1}E_0 = A^{-1} + A^{-1}B(D - B'A^{-1}B)B'A^{-1}$$

و

$$(E'_0C'CE_0)^{-1} = (C'_0C_0)^{-1} = A^{-1}$$

بنابراین

$$E'_0(C'C)^{-1}E_0 - (E'_0C'CE_0)^{-1} = A^{-1}B(D - B'A^{-1}B)B'A^{-1} \tag{۴.۲}$$

فرض کنید

$$D_1 = (C_1, C_2, \dots, C_{12\dots m})$$

آن‌گاه

$$D = D'_1D_1, \quad B = C'_0D_1 \tag{۵.۲}$$

از رابطه (۵.۲) داریم

$$\begin{aligned} D - B'A^{-1}B &= D'_1D_1 - (C'_0D_1)'(C'_0C_0)^{-1}C'_0D_1 \\ &= D'_1(I - P_{C_0})D_1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

که وقتی در رابطه (۴.۲) به‌کار می‌رود مستقیماً نتیجه می‌دهد

$$E'_0(C'C)^{-1}E_0 \geq (E'_0C'CE_0)^{-1} \tag{۶.۲}$$

به‌طور مشابه

$$E'_M(C'C)^{-1}E_M \geq (E'_M C'CE_M)^{-1} \qquad (۷.۲)$$

با جایگذاری (۷.۲) در عبارت $\mathrm{Var}(\widehat{\Theta}_M)$ داریم

$$\mathrm{Var}(\widehat{\Theta}_M) \geq CE_M(E'_M(C'C)E_M)^{-1}E_M^{-1}C^{-1}\sigma^2 = C_M(C'_M C_M)^{-1}C'_M\sigma^2$$

بنابراین

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Var}(\widehat{\Theta}_M)) \geq \sigma^2\,\mathrm{tr}(P_{C_M}) = \sigma^2\,\mathrm{rank}(P_{C_M}) = \sigma^2\,\mathrm{rank}(C_M) = \sigma^2 \prod_{j\in M}(p_j - 1)$$

□

تذکر ۱.۲.۲. ([۱۶]). در لم ۲.۲.۲ اگر H یک طرح دو سطحی باشد یا f یک مدل اثر اصلی باشد آنگاه شرط $\mathrm{rank}(C_M) = l_M$ به‌طور بدیهی برقرار است. لم ۲.۲.۲ نشان می‌دهد که برای همه طرح‌های امکان‌پذیر، مخاطره (ریسک) بهترین برآورد نااریب خطی برای Θ_M دارای کران پایین $\sigma^2 \prod_{j\in M}(p_j - 1)$ است.

۳.۲ برآورد Θ_M

در این بخش بهینه بودن آرایه‌های متعامد در برآورد Θ_M را بررسی می‌کنیم. برای سادگی، مدل (۲.۲) را به یک مدل خطی تبدیل می‌کنیم و μ_M را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mu_M = \mu_{i_1,\ldots,i_s} = \begin{pmatrix} f_{i_1\ldots i_s}(x_{i_1}(1), x_{i_2}(1), \ldots, x_{i_s}(1)) \\ f_{i_1\ldots i_s}(x_{i_1}(2), x_{i_2}(1), \ldots, x_{i_s}(1)) \\ \vdots \\ f_{i_1\ldots i_s}(x_{i_1}(p_{i_1}), x_{i_2}(1), \ldots, x_{i_s}(1)) \\ f_{i_1\ldots i_s}(x_{i_1}(1), x_{i_2}(2), \ldots, x_{i_s}(1)) \\ \vdots \\ f_{i_1\ldots i_s}(x_{i_1}(p_{i_1}), x_{i_2}(2), \ldots, x_{i_s}(1)) \\ \vdots \\ f_{i_1\ldots i_s}(x_{i_1}(p_{i_1}), x_{i_2}(p_{i_2}), \ldots, x_{i_s}(p_{i_s})) \end{pmatrix}_{N\times 1} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i_1} & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i_1} & 2 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i_1} & p_{i_2} & \ldots & p_{i_s} \end{pmatrix}_{N\times|M|}$$

که در آن $N = \prod_{j\in M} p_j$

فرض کنید X_M دارای n سطر و $\prod_{j\in M} p_j$ ستون باشد که ماتریس H را با ستون‌های $i_1, \ldots, i_s$ شامل شود به‌طوری‌که

$$X_M(ij) = \begin{cases} 1 & ; (a_{ii_1}, a_{ii_2}, \ldots, a_{ii_s}) = b_j \\ 0 & ; (a_{ii_1}, a_{ii_2}, \ldots, a_{ii_s}) \neq b_j \end{cases}$$

آن‌گاه

$$\boldsymbol{\Theta}_M = X_M \mu_M \tag{۸.۲}$$

از ویژگی‌های مدل آنالیز واریانس نمایش و ارائه $\int f_{i_1\ldots i_s}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})\mathrm{d}x_k = 0$ برای $k = i_1,\ldots,i_s$ است. شرایط محدودیت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\frac{1}{p_{i_k}} \sum_{x_{i_k}\in M_k} f_{i_1\ldots i_s}(x_{j_1},\ldots,x_{j_{s-1}},x_{i_k}) = 0$$

برای هر ثابت

$$(x_{j_1},\ldots,x_{j_{s-1}}) \in M_{s-1}$$

که

$$\{j_1,\ldots,j_{s-1}\} = \{i_1,\ldots,i_s\} \setminus \{i_k\}, \quad k = 1,\ldots,s$$
$$M_k = \{x_{i_k}(1),\ldots,x_{i_k}(p_{i_k})\}$$
$$M_{s-1} = \{x_{j_1}(1),\ldots,x_{j_1}(p_{j_1})\} \times \cdots \times \{x_{j_{s-1}}(1),\ldots,x_{j_{s-1}}(p_{j_{s-1}})\}$$

بنابراین تعداد پارامترهای مستقل μ_M برابر $l_M = \prod_{j\in M}(p_j - 1)$ است و آن‌ها را به صورت $\boldsymbol{\beta}_M = (\eta_1,\ldots,\eta_{l_M})$ نمایش می‌دهیم. در این صورت ماتریس B_M وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mu_M = B_M \boldsymbol{\beta}_M \tag{۹.۲}$$

و $\mathrm{rank}(B_M) = \prod_{j\in M}(p_j - 1)$. از روابط (۸.۲) و (۹.۲) داریم،

$$\boldsymbol{\Theta}_M = \mathbf{X}_M \mathbf{B}_M \boldsymbol{\beta}_M$$

فرض کنید $\mathbf{C}_M = \mathbf{X}_M \mathbf{B}_M$، بنابراین

$$\boldsymbol{\Theta}_M = \mathbf{C}_M \boldsymbol{\beta}_M$$

از این‌رو

$$\mathbf{Y} = \sum_{M:M\subseteq\{1,2,\ldots,m\}} \mathbf{C}_M \boldsymbol{\beta}_M + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

که

$$\mathbf{C} = (C_0, C_1, \ldots, C_m, C_{12}, \ldots, C_{12\ldots m})$$

و

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}'_0, \boldsymbol{\beta}'_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}'_m, \boldsymbol{\beta}'_{12}, \ldots, \boldsymbol{\beta}'_{12\ldots m})'$$

می‌باشد.

۴.۲ پیدا کردن طرح‌های امکان‌پذیر به وسیله مدل خطی

طرح‌های مختلف برآوردهای متفاوتی از $\mathbf{\Theta}_M$ ایجاد می‌کنند. طرح‌های نامناسب ممکن است برآوردناپذیری پارامترها را نتیجه دهد. در اینجا، اصطلاح برآوردپذیری به وجود برآوردگرهای نااریب خطی پارامترها اشاره دارد (به عنوان مثال، ماتریس $\mathbf{B}$ وجود دارد به‌طوری‌که $E(\mathbf{BY}) = \mathbf{\Theta}_M$). یک طرح زمانی امکان‌پذیر است که در آن تمام $\mathbf{\Theta}_M$ها برآوردپذیر باشند.

یک روش امکان‌پذیری طرح‌ها، مبتنی بر معیار مدل خطی است که سیرل [۱۴] در سال‌های ۱۹۷۱ [۸] و ۱۹۸۷ [۹] و وانگ و همکاران [۱۵] [۱۶] در سال ۲۰۱۲ ارائه کردند، که با تبدیل مدل خطی

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Theta}_0 + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{\Theta}_j + \mathbf{\Theta}_{i_1 \ldots i_s} + \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{M \in \Omega} \mathbf{\Theta}_M + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۱۰.۲)$$

به صورت زیر ارائه شده است،

$$\mathbf{Y} = \sum_{M \in \Omega} \mathbf{C}_M \boldsymbol{\beta}_M + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۱۱.۲)$$

که $\boldsymbol{\beta}_M = (\mathbf{\Theta}_1, \ldots, \mathbf{\Theta}_{l_M})'$ یک بردار $l_M(< n)$ تایی از پارامترهای مستقل $\mathbf{\Theta}_M$ هستند و $\mathbf{C}_M$ یک ماتریس $n \times l_M$ است به‌طوری‌که $\mathbf{C}_M \boldsymbol{\beta}_M = \mathbf{\Theta}_M$. که با بیان هر عنصر $\mathbf{\Theta}_M$ در روابط $\boldsymbol{\beta}_M$ با محدودیت‌های $\mathbf{C} = (C_0, C_1, \ldots, C_m, C_{i_1 \ldots i_s})$ و $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}'_0, \boldsymbol{\beta}'_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}'_m, \boldsymbol{\beta}'_{i_1 \ldots i_s})'$ بدست می‌آید.

از آنجا که برآوردپذیری $\mathbf{\Theta}_M$ معادل با برآوردپذیری $\boldsymbol{\beta}_M$ است، $\mathbf{H}$ امکان‌پذیر است اگر و فقط اگر $\boldsymbol{\beta}$ برآوردپذیر باشد. از نظریه مدل خطی، $\boldsymbol{\beta}$ برآوردپذیر است اگر و فقط اگر $\mathbf{C}$ پر رتبه باشد. از این‌رو معیار امکان‌پذیری برای $\mathbf{H}$ این است که بررسی کند آیا ستون‌های $\mathbf{C}$ پر رتبه هستند یا خیر.

[۱۴] Searle
[۱۵] Wang et al

فصل ۳

طرح‌های امکان‌پذیر با استفاده از آرایه‌های متعامد

۱.۳ آرایه‌های متعامد

آرایه‌های متعامد[۱] کاربردهای زیادی در مباحث آماری و علوم کامپیوتری به‌خصوص در مبحث کد نویسی دارند و به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. آرایه‌های متعامد در آمار عموماً در طراحی آزمایشات مورد استفاده‌اند، در هر آرایه سطرها نشان‌دهنده آزمایش یا آزمایشاتی است که باید انجام شود و ستون‌های آرایه متعامد با متغیرهای مختلفی که اثرات آن‌ها تجزیه و تحلیل می‌شوند، مطابقت دارد.

تعریف ۱.۱.۳ (آرایه متعامد)**.** ماتریس $A_{n\times m}$ که k_i ستون و p_i سطح دارد،

$$p_i \neq p_j \quad i \neq j, \qquad\qquad m=\sum_{i=1}^{r} k_i, \quad i=1,2,\ldots,r$$

یک آرایه متعامد از قدرت d [۲] و اندازه n [۳] نامیده می‌شود اگر هر زیرماتریس $n\times d$ از A، شامل تمام بردارهای سطری $1\times d$ با همان تناوب باشد. در غیر این صورت، از نماد $L_n(p_1^{k_1}\ldots p_r^{k_r})$

[۱] Orthogonal arrays

[۲] Strength

[۳] Size

برای آرایه‌ای با قدرت ۲ استفاده می‌کنیم. یک آرایه متعامد را سطح آمیخته [۴] گوییم هرگاه $r \geq ۲$ باشد. آرایه‌های متعامد سطح آمیخته به‌طور گسترده‌ای در آزمایش‌های صنعتی برای بهبود کیفیت استفاده شده‌اند و استفاده از آنها در سایر شرایط آزمایشگاهی نیز گسترده بوده است (سوین [۵] [۱۳]). ساختارهای آرایه‌های متعامد سطح آمیخته توسط بسیاری از نویسندگان مورد بررسی قرار گرفته است(هدایت و همکاران [۶][۴]) . اما چگونگی ساخت آرایه های متعامد خاص برای کاربردهای علمی، در بسیاری از موارد اغلب یک سؤال باز است، زیرا ساخت آرایه‌های متعامد کاملاً چالش برانگیز است.

ژانگ [۷] [۲۰] در سال ۱۹۹۹ یک روش کلی برای ساخت آرایه‌های متعامد سطح آمیخته با استفاده از یک رابطه بین آرایه‌های متعامد و تجزیه ماتریس طرح‌ریزی ارائه داد و سپس ژانگ و همکاران [۸] [۲۱] در سال ۲۰۰۱ این روش را با معرفی حاصلضرب هادامارد تعمیم یافته گسترش دادند. در این فصل پس از بیان مفاهیم و لم‌های اصلی یک روش کلی برای ساخت آرایه‌های متعامد با استفاده از حاصل‌ضرب هادامارد تعمیم‌یافته براساس تجزیه متعامد ماتریس طرح‌ریزی τ_n بیان خواهیم کرد و سپس امکان‌پذیری طرح را با روش آرایه متعامد بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۱.۳. در زیر یک مثال از آرایه‌های متعامد با قدرت ۲ ارائه می‌شود که درایه‌های آن از مجموعه $\{۱,۲\}$ هستند.

۱	۱	۱
۱	۲	۲
۲	۲	۱
۲	۱	۲

ماتریس بالا $k = ۳$ ستون و $p = ۲$ سطح دارد.

توجه کنید که ۴ جفت مرتب (دو تایی) که توسط سطرها به ستون اول و دوم محدود می‌شود، یعنی $(۱,۱)$، $(۲,۱)$، $(۱,۲)$ و $(۲,۲)$ همه جفت‌های احتمالی مرتب دو عنصر مجموعه هستند و هر کدام عیناً اعمال می‌شود. ستون دوم و سوم به‌صورت $(۱,۱)$، $(۲,۱)$، $(۲,۲)$ و $(۱,۲)$ است و دوباره همه جفت‌های قابل اعمال هر کدام یک بار ظاهر می‌شود. طبق همین حالت، ستون اول و دوم هم مورد استفاده است. بنابراین این یک آرایه متعامد از قدرت ۲ است.

[۴] Mixed-level orthogonal array
[۵] Suen
[۶] Hedayat et al
[۷] Zhang
[۸] Zhang et al

۲.۳ مفاهیم پایه و لم‌های اصلی

تعریف ۱.۲.۳. ([۷]). فرض کنید $A=(a_{ij})_{n\times m}=(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)$ یک آرایه و $\mathbf{Y}=(y_1,\ldots,y_n)'$ یک بردار باشد. در آنالیز واریانس S_j^2 (مجموع مربعات jامین عامل) به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$S_j^2=\sum_{i=0}^{p_j-1}\frac{1}{|I_{ij}|}\left(\sum_{s\in I_{ij}}Y_s\right)^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{s=1}^{n}Y_s\right)^2 \tag{1.3}$$

که در آن $I_{ij}=\{s:a_{sj}=i\}$ و $|I_{ij}|$ تعداد عناصر در I_{ij} است. از رابطه (۱.۳)، S_j^2 یک فرم درجه دوم در Y است و یک ماتریس متقارن منحصربفرد A_j وجود دارد به‌طوری‌که $S_j^2=Y'A_jY$. ماتریس A_j، ماتریس تصویر[۹] jامین ستون a_j از A نامیده می‌شود که توسط $m(a_j)=A_j$ نشان می‌دهیم.

مجموع ماتریس تصویرهای ستون‌های ماتریس A، ماتریس تصویر A نامیده می‌شود. به‌طور خاص، ماتریس تصویر A را با $m(A)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید 1_r یک بردار $r\times 1$ از ۱ها باشد، $m(1_r)$ را به صورت $m(1_r)=P_r$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$P_r=(\frac{1}{r})1_r1_r'$$

فرض کنید $(r)=(0,1,\ldots,r-1)'$ و I_r یک ماتریس همانی از مرتبه r باشد، از تعریف ۱.۲.۳ بدیهی است که $m((r))=\tau_r$ که در آن $\tau_r=I_r-P_r$.

تعریف ۲.۲.۳. ([۷]). فرض کنید $A=(a_{ij})_{n\times m}$ و $B=(b_{ij})_{s\times t}$ دو ماتریس باشند که درایه‌های آن از گروه $(\mathcal{G},+)=\{0,1,\ldots,p-1\}$ هستند. حاصل‌جمع کرونکر[۱۰] دو ماتریس A و B را با $A\oplus B$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A\oplus B=(a_{ij}+B)_{sn\times tm}\qquad \bmod(p)$$

که در آن p یک عدد اول است. برای مثال

$$(2)\oplus(2)=(0,1,1,0)'$$
$$(3)\oplus(3)=(0,1,2,1,2,0,2,0,1)'$$

حاصلضرب کرونکر[۱۱] دو ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times m}$ و $B=(b_{ij})_{s\times t}$ به صورت $A\otimes B=(a_{ij}B)_{sn\times tm}$ تعریف می‌شود.

[۹] Matrix image
[۱۰] Kronecker sum
[۱۱] Kronecker product

فرض کنید $\circ_r$ یک بردار $r \times ۱$ از صفرهاست. بدیهی است که

$$\circ_r \oplus A = ۱_r \otimes A$$

تعریف ۳.۲.۳. ([۷]). فرض کنید L_n یک آرایه متعامد با درایه‌هایی از گروه متناهی $\mathcal{G}$ باشد و a و b دو ستون از L_n باشند به‌طوری‌که $a = L_n(p) = (a_۱, \ldots, a_n)'$ و $b = L_n(q) = (b_۱, \ldots, b_n)'$. حاصلضرب هادامارد تعمیم‌یافته [۱۲] را با $a \square b$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a \square b = (h(a_۱, b_۱), \ldots, h(a_n, b_n))' = (a_۱q + b_۱, \ldots, a_nq + b_n)' = L_n(t)$$

که در آن $t = pq$ و

$$h(a_i, b_i) = a_iq + b_i \quad i = ۱, \ldots, n$$

برای مثال اگر $a = L_۸(۲) = (\circ, \circ, \circ, \circ, ۱, ۱, ۱, ۱)'$ و $b = L_۸(۲) = (\circ, \circ, ۱, ۱, \circ, \circ, ۱, ۱)'$ آن‌گاه داریم

$$a \square b = L_۸(۴) = (\circ, \circ, ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳)'$$

لم ۱.۲.۳. ([۷]). برای هر ماتریس جایگشت [۱۳] S و هر آرایه L داریم

$$m(S(L \otimes ۱_r)) = S(m(L) \otimes P_r)S'$$

و

$$m(S(۱_r \otimes L)) = S(P_r \otimes m(L))S'$$

لم ۲.۲.۳. ([۷]). فرض کنید A یک آرایه متعامد از قدرت ۱ باشد به‌طوری‌که

$$A = (a_۱, \ldots, a_m) = (S_۱(۱_{r_۱} \otimes (p_۱)), \ldots, S_m(۱_{r_m} \otimes (p_m)))$$

که در اینجا $r_jp_j = n$ و S_i $(i = ۱, \ldots, m)$ یک ماتریس جایگشتی است. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) A یک آرایه متعامد از قدرت ۲ است.

(۲) $m(A)$ یک ماتریس طرح‌ریزی [۱۴] است.

(۳) $m(a_i)m(a_j) = \circ, \quad (i \neq j)$.

(۴) ماتریس طرح‌ریزی τ_n را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد

$$\tau_n = m(a_۱) + \cdots + m(a_m) + \Delta$$

[۱۲] Generalized Hadamard product
[۱۳] Permutation matrix
[۱۴] Projection matrix

که در آن

$$\text{rank}(\Delta) = n - 1 - \sum_{j=1}^{m}(p_j - 1)$$

رتبه [۱۵] ماتریس Δ می‌باشد.

لم ۳.۲.۳. ([۲۱]). فرض کنید (L,H) و K آرایه‌های متعامد از اندازه n باشند. اگر $m(K) \le m(L)$ آن‌گاه (K,H) آرایه متعامد است که در آن $m(K) \le m(L)$ به این معنی است که تفاضل $m(K) - m(L)$ نامنفی باشد.

لم ۴.۲.۳. ([۲۱]). فرض کنید L و H آرایه‌های متعامد هستند. اگر $m(L)$ و $m(H)$ متعامد باشند به‌طوری‌که $m(L)m(H) = 0$ آن‌گاه $K = (L,H)$ نیز آرایه متعامد است. به عبارت دیگر

$$m(K) = m(L) + m(H)$$

لم ۵.۲.۳. ([۲۱]). فرض کنید a و b آرایه‌های متعامدی باشند که هر کدام یک ستون از اندازه n دارند به‌طوری‌که $a = L_n(p) = (a_1, \ldots, a_n)'$ و $b = L_n(q) = (b_1, \ldots, b_n)'$ در این صورت ماتریس تصویر $a \square b$ به صورت زیر است

$$m(a \square b) = m(a) + m(b) + nm(a) \circ m(b) = m(b \square a)$$

در اینجا $\circ$ حاصلضرب هادامارد معمولی [۱۶] در نظریه ماتریس‌ها است.

لم ۶.۲.۳. ([۲۱]). فرض کنید

$$K^1 = L_n(p_1 \ldots p_m) = (L_n(p_1), \ldots, L_n(p_m))$$

و

$$K^2 = L_n(q_1 \ldots q_m) = (L_n(q_1), \ldots, L_n(q_m))$$

آرایه‌های متعامد از اندازه اجرا n باشند، آنگاه

$$m(K^1 \square K^2) \le m(K^1) + m(K^2) + nm(K^1) \circ m(K^2)$$

برقرار است اگر $m(K^1) \cdot m(K^2) = 0$، که در آن

$$K^1 \square K^2 \triangleq (L_n(p_1) \square L_n(q_1), \ldots, L_n(p_m) \square L_n(q_m))$$

لم ۷.۲.۳. ([۲۱]). فرض کنید

$$L_{n_1} = L_{n_1}(p_1 \ldots p_m) = (L_{n_1}(p_1), \ldots, L_{n_1}(p_m))$$

---

[۱۵] Rank

[۱۶] Usual Hadamard product

و

$$L_{n_2} = L_{n_2}(q_1 \dots q_m) = (L_{n_2}(q_1), \dots, L_{n_2}(q_m))$$

آرایه‌های متعامد باشند. در این صورت

$$(L_{n_1} \otimes 1_{n_2}) \,\square\, (1_{n_1} \otimes L_{n_2})$$

نیز آرایه متعامد می‌باشد. به عبارت دیگر

$$m((L_{n_1} \otimes 1_{n_2}) \,\square\, (1_{n_1} \otimes L_{n_2})) \leq m(L_{n_1}) \otimes P_{n_2} + P_{n_1} \otimes m(L_{n_2}) + m(L_{n_1}) \otimes m(L_{n_2})$$

لم ۸.۲.۳. ([۷]). فرض کنید

$$\tau_n = A_1 + B_1 + nA_1 \circ B_1 + \dots + A_{K_1} + B_{K_1} + nA_{K_1} \circ B_{k_1} + C_1 + \dots + C_K$$

تجزیه متعامد τ_n باشد و آرایه‌های متعامد K_i^1، K_i^2 و H_j موجود باشند به‌طوری‌که $m(K_i^1) \leq A_i$، $m(K_i^2) \leq B_i$ و $m(H_j) \leq C_j$ در این صورت

$$L = \left[K_1^1 \,\square\, K_1^2, \dots, K_{K_1}^1 \,\square\, K_{K_1}^2, H_1 \dots, H_K\right]$$

یک آرایه متعامد است.

برای اثبات لم‌های بالا به ژانگ [۲۱] و پانگ[۱۷] [۷] مراجعه شود.

۳.۳ ارائه یک روش برای ساخت آرایه‌های متعامد

یک روش کلی برای ساخت آرایه‌های متعامد با استفاده از حاصل‌ضرب هادامارد تعمیم‌یافته براساس تجزیه متعامد ماتریس طرح‌ریزی τ_n را در ادامه بیان خواهیم کرد.([۲۱]).
این روش، از ساخت آرایه‌های متعامد سطح‌آمیخته[۱۸] با استفاده از حاصل‌ضرب هادامارد تعمیم‌یافته براساس تجزیه متعامد ماتریس طرح‌ریزی τ_n شامل سه مرحله‌ی زیر است:

۱. ماتریس طرح‌ریزی τ_n به صورت متعامد تجزیه می‌شود

$$\tau_n = (A_1 + B_1 + nA_1 \circ B_1) + \dots + (A_{k_1} + B_{k_1} + nA_{k_1} \circ B_{k_1}) + C_1 + \dots + C_k$$

که A_i، B_i، $nA_i \circ B_i$ و C_j ماتریس‌های طرح‌ریزی هستند.

۲. آرایه‌های متعامد K_i^1، K_i^2 و H_j را به‌گونه‌ای پیدا می‌کنیم که

$$m(K_i^1) \leq A_i, \quad m(K_i^2) \leq B_i, \quad m(H_j) \leq C_j$$

[۱۷] Pang

[۱۸] Mixed-level orthogonal arrays

۳. آرایه متعامد جدید L را با استفاده از لم‌های ۳.۲.۳ تا ۶.۲.۳ می‌سازیم

$$L=\left(K_1^1\square K_1^2,\dots,K_{k_1}^1\square K_{k_1}^2,H_1,\dots,H_{k_2}\right),\qquad (k_2\le k)$$

در اعمال مرحله‌ی ۱، تجزیه‌های متعامد زیر از τ_n بسیار مفید هستند

$$\begin{aligned}\tau_{n\cdot k}&=I_n\otimes P_k+\tau_n\otimes P_k\\&=\tau_n\otimes P_k+P_n\otimes\tau_k+\tau_n\otimes\tau_k\\&=\tau_n\otimes I_k+P_n\otimes\tau_k\\\tau_{p\cdot r\cdot q}&=\tau_p\otimes I_r\otimes P_q+P_p\otimes\tau_{rq}+\tau_p\otimes I_r\otimes\tau_q\end{aligned}\tag{۲.۳}$$

درستی روابط فوق به سادگی از

$$\tau_n=I_n-P_n,\quad P_{nk}=P_n\otimes P_k,\quad I_{nk}=I_n\otimes I_k$$

نتیجه می‌شود.

قضیه ۱.۳.۳. ([۲۱]). فرض کنید

$$\tau_p\otimes I_r=\sum_{j=1}^{k}S_j(A\otimes P_{r_2})S_j'+\Delta$$

و

$$\tau_q=\sum_{j=1}^{k}T_jBT_j'+\Delta$$

تجزیه‌های متعامد از $\tau_p\otimes I_r$ و τ_q باشند که در آن $n=prq$، $r=r_1r_2$ و S_jها و T_jها ماتریس‌های جایگشتی هستند و

$$S_j(\tau_p\otimes I_r)S_j'=\tau_p\otimes I_r,\qquad j=1,\dots k$$

اگر آرایه متعامد L_{rq} وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$P_p\otimes m(L_{rq})\le P_p\otimes\tau_{rq}-\sum_{j=1}^{k_1}(S_j\otimes T_j)(P_{pr_1}\otimes I_{r_2}\otimes B)(S_j\otimes T_j)',\qquad (k_1\le k)$$

آن‌گاه τ_{prq} می‌تواند به صورت متعامد تجزیه شود

$$\begin{aligned}\tau_{prq}=&P_p\otimes m(L_{rq})+\sum_{j=1}^{k_1}(S_j\otimes T_j)(A\otimes P_{r_2q}+P_{pr_1}\otimes I_{r_2}\otimes B+\tau_p\otimes I_r\otimes B)(S_j\otimes T_j)'\\&+\sum_{j=k_1+1}^{k}(S_j\otimes T_j)(A\otimes P_{r_2q}+\tau_p\otimes I_r\otimes B)(S_j\otimes T_j)'+\Delta\end{aligned}\tag{۳.۳}$$

اگر آرایه‌های متعامد K^{1}، K^{2} و H وجود داشته باشند به‌طوری‌که $m(K^{1}) \leq A$، $m(K^{2}) \leq I_{r_2} \otimes B$ و $m(H) \leq A \otimes P_{r_2 q} + \tau_p \otimes I_r \otimes B$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} L \;=\; & \Big[1_p \otimes L_{rq}, (S_1 \otimes T_1)[(K^{1} \otimes 1_{r_2 q}) \,\square\, (1_{pr_1} \otimes K^{2})], \ldots, (S_{k_1} \otimes T_{k_1}) \\ & \times [(K^{1} \otimes 1_{r_2 q}) \,\square\, (1_{pr_1} \otimes K^{2})], (S_{k_1+1} \otimes T_{k_1+1})H, \ldots, (S_k \otimes T_k)H\Big] \end{aligned}$$

نیز آرایه متعامد است.

برهان. از رابطه‌ی (۲.۳) داریم

$$\tau_{prq} = \tau_p \otimes I_r \otimes P_q + P_p \otimes \tau_{rq} + \tau_p \otimes I_r \otimes \tau_q$$

فرض کنید

$$P_p \otimes \tau_{rq} = P_p \otimes m(L_{rq}) + \sum_{j=1}^{k_1} (S_j \otimes T_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2} \otimes B)(S_j \otimes T_j)' + \Delta$$

یک تجزیه متعامد از $P_p \otimes \tau_{rq}$ باشد. از آنجا که $P_q = T_j P_q T_j'$ و $S_j(\tau_p \otimes I_r)S_j' = \tau_p \otimes I_r$ برای تمام jها برقرار است داریم

$$\begin{aligned} \tau_{prq} =& P_p \otimes m(L_{rq}) + \sum_{j=1}^{k} \left[S_j(A \otimes P_{r_2})S_j'\right] \otimes \left[T_j P_q T_j'\right] \\ & + \sum_{j=1}^{k_1} (S_j \otimes T_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2} \otimes B)(S_j \otimes T_j)' \\ & + \sum_{j=1}^{k} \left[S_j(\tau_p \otimes I_r)S_j'\right] \otimes \left[T_j B T_j'\right] + \Delta \end{aligned}$$

با استفاده از ویژگی ماتریسی

$$(ABC) \otimes (DEF) = (A \otimes D)(B \otimes E)(C \otimes F)$$

رابطه‌ی زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \tau_{prq} =& P_p \otimes m(L_{rq}) \\ & + \sum_{j=1}^{k_1} (S_j \otimes T_j)(A \otimes P_{r_2 q} + P_{pr_1} \otimes I_{r_2} \otimes B + \tau_p \otimes I_r \otimes B)(S_j \otimes T_j)' \\ & + \sum_{j=k_1+1}^{k} (S_j \otimes T_j)(A \otimes P_{r_2 q} + \tau_p \otimes I_r \otimes B)(S_j \otimes T_j)' + \Delta \end{aligned}$$

بنابراین (۳.۳) برقرار است. از آنجا که تجزیه‌های $\tau_p \otimes I_r$، τ_{rq} و τ_p متعامد هستند، تجزیه τ_{prq} در رابطه‌ی (۳.۳) نیز متعامد است. از لم ۱.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} m((S_j \otimes T_j)H) &= (S_j \otimes T_j)m(H)(S_j' \otimes T_j') \\ &\leq (S_j \otimes T_j)(A \otimes P_{r_2q} + \tau_p \otimes I_r \otimes B)(S_j \otimes T_j)' \end{aligned}$$

و

$$m(1_p \otimes L_{rq}) = P_p \otimes m(L_{rq})$$

همچنین از لم ۵.۲.۳ و ۷.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} & m((S_j \otimes T_j)(K^1 \otimes 1_{r_2q}) \square (1_{pr_1} \otimes K^2)) \\ &\leq (S_j \otimes T_j)\left[m(K^1) \otimes P_{r_2q} + P_{pr_1} \otimes m(K^2) + m(K^1) \otimes m(K^2)\right](S_j \otimes T_j)' \\ &\leq (S_j \otimes T_j)\left(A \otimes P_{r_2q} + P_{pr_1} \otimes I_{r_2} \otimes B + \tau_p \otimes I_r \otimes B\right)(S_j \otimes T_j)' \qquad j = 1, \ldots k_1 \end{aligned}$$

بنابراین L یک آرایه متعامد است. حال ثابت می‌کنیم

$$P_p \otimes \tau_{rq} = P_p \otimes m(L_{rq}) + \sum_{j=1}^{k_1} (S_j \otimes T_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2} \otimes B)(S_j \otimes T_j)' + \Delta$$

یک تجزیه متعامد از $P_p \otimes \tau_{rq}$ است. از آنجا که $\sum_{j=1}^{k} T_j B T_j' + \Delta$ یک تجزیه متعامد از τ_q است داریم:

$$((T_i)B(T_i)')((T_j)B(T_j)') = 0 \tag{۴.۳}$$

$$((T_i)B(T_i)')(\tau_q) = ((T_j)B(T_j)') \tag{۵.۳}$$

با استفاده از ویژگی ماتریسی

$$(A \otimes D)(B \otimes E)(C \otimes F) = (ABC) \otimes (DEF)$$

و (۴.۳)، برای هر $i \neq j$،

$$\begin{aligned} & (S_i \otimes T_i)((P_{pr_1} \otimes I_{r_2}) \otimes B)(S_i \otimes T_i)' \cdot (S_j \otimes T_j)((P_{pr_1} \otimes I_{r_2}) \otimes B)(S_j \otimes T_j)' \\ &= \left[(S_i)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2})(S_i)'(S_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2})(S_j)'\right] \otimes \left[((T_i)B(T_i)')((T_j)B(T_j)')\right] = 0 \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. بنابراین

$$\sum_{j=1}^{k_1} (S_j \otimes T_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2} \otimes B)(S_j \otimes T_j)'$$

یک ماتریس طرح‌ریزی است و آن را با D نشان می‌دهیم. به‌طور مشابه از (۲.۳) و (۵.۳) برای هر j داریم:

$$\begin{aligned}
&(S_j \otimes T_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2} \otimes B)(S_j \otimes T_j)' \cdot (P_p \otimes \tau_{rq}) \\
&\quad = (S_j \otimes T_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2} \otimes B)(S_j \otimes T_j)' \cdot (P_p \otimes \tau_r \otimes P_q) \\
&\qquad + (S_j \otimes T_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2} \otimes B)(S_j \otimes T_j)' \cdot (P_p \otimes I_r \otimes \tau_q) \\
&\quad = \big[(S_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2})(S_j)' \cdot (P_p \otimes \tau_r)\big] \otimes \big[((T_j)B(T_j)')(P_q)\big] \\
&\qquad + \big[(S_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2})(S_j)' \cdot (P_p \otimes I_r)\big] \otimes \big[((T_j)B(T_j)')(\tau_q)\big] \\
&\quad = \big[(S_j)((P_{pr_1} \otimes I_{r_2}) \cdot (P_p \otimes I_r))(S_j)'\big] \otimes \big[(T_j)B(T_j)'\big] \\
&\quad = (S_j \otimes T_j)(P_{pr_1} \otimes I_{r_2} \otimes B)(S_j \otimes T_j)'
\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
(S_j)' \cdot (P_p \otimes I_r) \cdot (S_j) &= (S_j)' \cdot I_{pr} \cdot (S_j) - (S_j)' \cdot (\tau_p \otimes I_r) \cdot (S_j) \\
&= I_{pr} - \tau_p \otimes I_r = P_p \otimes I_r
\end{aligned}$$

از طرفی

$$(S_j) \cdot (\tau_p \otimes I_r) \cdot (S_j)' = \tau_p \otimes I_r$$

بنابراین $P_p \otimes \tau_{rq} - D$ نیز یک ماتریس طرح‌ریزی است.

از طرف دیگر، از لم ۲.۲.۳ و این شرط که

$$P_p \otimes m(L_{rq}) \leq P_p \otimes \tau_{rq} - D$$

داریم:

$$\begin{aligned}
0 &= P_p \otimes m(L_{rq}) - P_p \otimes m(L_{rq}) \cdot (P_p \otimes \tau_{rq}) \cdot P_p \otimes m(L_{rq}) \\
&\leq -P_p \otimes m(L_{rq}) \cdot D \cdot P_p \otimes m(L_{rq}) \\
&= -(P_p \otimes m(L_{rq}) \cdot D)(P_p \otimes m(L_{rq}) \cdot D)'
\end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$P_p \otimes m(L_{rq}) \cdot D = 0$$

بنابراین

$$\Delta = P_p \otimes \tau_{rq} - D - P_p \otimes m(L_{rq})$$

نیز یک ماتریس طرح‌ریزی از $\Delta = (\Delta)(\Delta)'$ است. □

۴.۳ پیدا کردن طرح‌های امکان‌پذیر به وسیله آرایه‌های متعامد

فرض کنید آزمایشی براساس آرایه $\mathbf{H} = (a_{ij})_{n\times m} = (a_۱, \ldots, a_m)$ و بردار داده‌های آزمایشی $\mathbf{Y} = (y_۱, \ldots, y_n)'$ انجام می‌شود. در آنالیز واریانس، مجموع مربعات jامین عامل به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_j^۲ = \sum_{i=۱}^{p_j} \frac{۱}{|I_{ij}|}\left(\sum_{s\in I_{ij}} y_s\right)^۲ - \frac{۱}{n}\left(\sum_{s=۱}^{n} y_s\right)^۲$$

که در آن $I_{ij} = \{s : a_{sj} = i\}$ و $|I_{ij}|$ تعداد عناصر در I_{ij} است.

مجموع مربعات عوامل jام و hام به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$S_{jh}^۲ = \sum_{i=۱}^{p_j}\sum_{k=۱}^{p_h} \frac{۱}{|I_{ijkh}|}\left(\sum_{s\in I_{ijkh}} y_s\right)^۲ - \frac{۱}{n}\left(\sum_{s=۱}^{n} y_s\right)^۲ - S_j^۲ - S_h^۲,$$

که در آن $I_{ijkh} = \{s : a_{sj} = i, a_{sh} = k\}$ و $|I_{ijkh}|$ تعداد عناصر در I_{ijkh} است.

به‌طور کلی، مجموع مربعات عوامل $i_۱, \ldots, i_s$ را به صورت $S_M^۲$ نشان می‌دهیم که $M = \{i_۱, \ldots, i_s\}$. این یک شکل درجه دوم از $\mathbf{Y}$ است و ماتریس متقارن منحصربفرد $\mathbf{A}_M$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathbf{S}_M^۲ = \mathbf{Y}'\mathbf{A}_M\mathbf{Y}$$

ماتریس A_M ماتریس تصویر ستون‌های $i_۱, \ldots, i_s$ از H نامیده می‌شود. اگر H یک آرایه متعامد از قدرت s باشد، آن‌گاه

۱. ماتریس تصویر H، A_M، یک ماتریس طرح‌ریزی است و برای هر $|M| \le s$

$$\mathrm{rank}(A_M) = \prod_{j\in M}(p_j - ۱).$$

۲. ماتریس تصویرهای H متعامد هستند به‌طوری‌که برای هر $M \neq N$، $|M \cup N| \le s$. داریم:

$$A_M A_N = ۰$$

۳. برای هر $|M| \le s$، داریم:

$$\mathbf{A}_M\mathbf{\Theta}_M = \mathbf{\Theta}_M$$

نتایج بالا را می‌توان در ژانگ [۱۹]و ژانگ و همکاران [۲۰] یافت.

قضیه ۱.۴.۳. ([۱۶]). فرض کنید $\widehat{\mathbf{\Theta}}_M(\mathbf{H}) = \mathbf{A}_M\mathbf{Y}$. اگر H یک آرایه متعامد از قدرت m باشد، آن‌گاه

$$E(\widehat{\mathbf{\Theta}}_M) = E(A_M Y) = \mathbf{\Theta}_M \tag{۶.۳}$$

و برای هر $M \subseteq \{1, \ldots, m\}$،

$$tr\left(\mathrm{Var}(\mathbf{A}_M\mathbf{Y})\right) = \sigma^2 \prod_{j\in M}(p_j - 1) \tag{۷.۳}$$

برهان. از آنجا که

$$E(\widehat{\mathbf{\Theta}}_M) = E(\mathbf{A}_M\mathbf{Y}) = \mathbf{A}_M(\mathbf{\Theta}_0 + \mathbf{\Theta}_1 + \cdots + \mathbf{\Theta}_{12\ldots m}) \tag{۸.۳}$$

از ویژگی ۳، سمت راست رابطه (۸.۳) برابر است با

$$\mathbf{A}_M(\mathbf{A}_0\mathbf{\Theta}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{\Theta}_1 + \cdots + \mathbf{A}_{12\ldots m}\mathbf{\Theta}_{12\ldots m}) \tag{۹.۳}$$

با استفاده از ویژگی ۲، رابطه ۹.۳ معادل است با

$$\mathbf{A}_M\mathbf{\Theta}_M = \mathbf{\Theta}_M$$

بنابراین رابطه (۶.۳) برقرار است. از ویژگی ۱ داریم

$$\mathrm{Var}(\mathbf{A}_M\mathbf{Y}) = \mathbf{A}'_M\,\mathrm{Var}(\mathbf{Y})\mathbf{A}_M = \sigma^2\mathbf{A}'_M\mathbf{A}_M = \sigma^2\mathbf{A}_M$$

بنابراین

$$tr(\mathrm{Var}(\mathbf{A}_M\mathbf{Y})) = tr(\sigma^2\mathbf{A}_M) = \sigma^2 tr(\mathbf{A}_M) = \sigma^2\,\mathrm{rank}(\mathbf{A}_M) = \sigma^2\prod_{j\in M}(p_j - 1)$$

پس رابطه (۷.۳) برقرار است.

□

لم ۲.۲.۲ و قضیه ۱.۴.۳، ثابت می‌کند که آرایه‌های متعامد با قدرت m بهترین طرح‌های آزمایشی برای برآورد $\mathbf{\Theta}_M$، $M \subseteq \Omega$، تحت معیار Aــ بهینگی هستند.

این نتیجه بسیار مهم است. اولاً ثابت می‌کند که آرایه‌های متعامد از قدرت m طرح‌های امکان‌پذیر هستند اگر همه‌ی اثرات متقابل مدل در نظر گرفته شود. مقالات قبلی تنها ثابت کردند که آرایه‌های متعامد ۲ سطحی با قدرت ۲ زمانی‌که f یک مدل اثر اصلی باشد طرح‌های امکان‌پذیر هستند، درحالی‌که قضیه ۱.۴.۳ هیچ محدودیتی بر تعداد سطوح و مرتبه اثرات متقابل ندارد.

دوماً، بهینه بودن آرایه‌های متعامد در برآورد اثرات متقابل را ثابت می‌کند در حالی‌که در مقالات

قبلی (به عنوان مثال چنگ [۱۹] [۲] و چنگ [۳]) فقط به ارزیابی آرایه‌های متعامد با قدرت ۲ برای برآورد اثرات اصلی (همچنین تعداد سطوح آرایه‌های متعامد محدود به ۲) پرداخته بود.

یافتن آرایه‌های متعامد طبق قضیه ۱.۳.۳ یک کار زمان‌بر و دارای محاسبات پیچیده است. با استفاده از لم ۲.۲.۲ و قضیه ۱.۴.۳ ثابت شد که آرایه‌های متعامد از قدرت m طرح‌های امکان‌پذیر هستند اگر همه‌ی اثرات متقابل مدل در نظر گرفته شود. بنابراین ابتدا باید آرایه متعامد را با یک محاسبات پیچیده و زمان‌بر پیدا کنیم و سپس بررسی کنیم که آیا همه اثرات متقابل مدل در نظر گرفته شده‌اند یا نه. بنابراین پیدا کردن طرح امکان‌پذیر با استفاده از آرایه‌های متعامد روشی پر هزینه و دارای محاسبات پیچیده است.

[۱۹] Cheng

فصل ۴

طرح‌های امکان‌پذیر با استفاده از ماتریس تصویر

۱.۴ مقدمه

در دهه‌های گذشته به آنالیز واریانس[1] مدل با اثرات ثابت توجه زیادی شده است. به عنوان یک ابزار اکتشافی برای توضیح مشاهدات، مدل آنالیز واریانس به‌طور گسترده‌ای در بررسی اثرات عوامل متعدد برای آزمایش‌های طراحی شده مورد استفاده قرار گرفته است.

به‌طور کلی، وقتی مدل آنالیز واریانس m طرفه[2] استفاده می‌شود، m عامل $A_1, A_2, \ldots, A_m$ وجود دارند که هر کدام سطوح متفاوتی از p_j دارند. طرح آزمایشی $\mathbf{H} = (a_{ij})_{n\times m}$ با $a_{ij} \in \{1, 2, \ldots, p_j\}$ شامل تعدادی از ترکیب‌های سطح ممکن از عوامل m (می‌تواند تکرار شود) است که دارای سطح A_j در اجرای iام است.

هر ترکیب برای هر یک از واحدهای آزمایشی اعمال می‌شود و یک مقدار پاسخ (y) در هر واحد آزمایشی گرفته می‌شود. بنابراین مدل آنالیز واریانس به صورت زیر است

$$y_i = \mu + A_1(a_{i1}) + A_2(a_{i2}) + \cdots + A_m(a_{im}) + I_{A_1A_2}(a_{i1}, a_{i2}) + \cdots + I_{A_1\ldots A_m}(a_{i1}, \ldots, a_{im}) + \varepsilon_i;\ i = 1, \ldots, m \quad (1.4)$$

[1] Analysis of variance (ANOVA) model

[2] m-way ANOVA model

که μ میانگین، $A_j(a_{ij})$ اثر اصلی سطح a_{ij}ام از عامل A_j، $I_{A_1A_2}(a_{i1}, a_{i2})$ اثر متقابل سطح a_{i1}ام از عامل A_1 و سطح a_{i2}ام از عامل A_2 است. همچنین $I_{A_1\dots A_m}(a_{i1}, \dots, a_{im})$ اثر متقابل $A_1, \dots, A_m$ در ترکیب سطح $(a_{i1}, \dots, a_{im})$ می‌باشد و ε_i $(i = 1, \dots, n)$ خطای تصادفی از مشاهده iام با میانگین صفر و واریانس σ^2 است.

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \qquad i = 1, \dots, n$$

به عنوان مثال، مدل آنالیز واریانس دو طرفه با عوامل A و B که هر کدام دو سطح دارند را در نظر بگیرید. اگر طرح آزمایشی با ۴ اجرا به صورت $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}'$ باشد، آن‌گاه مدل می‌تواند به صورت زیر بیان شود

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + A(1) + B(1) + I_{AB}(1,1) \\ \mu + A(1) + B(2) + I_{AB}(1,2) \\ \mu + A(2) + B(1) + I_{AB}(2,1) \\ \mu + A(2) + B(2) + I_{AB}(2,2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{pmatrix}. \tag{۲.۴}$$

در اغلب موارد، مدل مورد بررسی بخشی از (۱.۴) است، زیرا بعضی از اثرات متقابل براساس دانش محققان از شرایط آزمایشی، وجود ندارد. بنابراین در این فصل مدل (۱.۴) با یک اثر متقابل $I_{A_{i_1} \dots, A_{i_s}}$ $(1 \le i_1 \le \dots \le i_s \le m)$ مورد مطالعه قرار گرفته است.

فرض کنید $\Omega = \{0, 1, \dots, m, \{i_1, \dots, i_s\}\}$ جملاتی از اثرات اصلی و اثرات متقابل در نظر گرفته شده را نشان می‌دهد، بنابراین مدل مورد بررسی را می‌توان با نماد برداری به صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Theta}_0 + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{\Theta}_j + \mathbf{\Theta}_{i_1 \dots i_s} + \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{M \in \Omega} \mathbf{\Theta}_M + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{۳.۴}$$

که در آن

$$\mathbf{\Theta}_0 = (\mu, \dots, \mu)', \quad \mathbf{\Theta}_j = (A_j(a_{1j}), \dots, A_j(a_{nj}))', \quad j = 1, \dots, m,$$
$$\mathbf{\Theta}_{i_1 \dots i_s} = (I_{A_{i_1} \dots A_{i_s}}(a_{1i_1}, \dots, a_{1i_s}), \dots, I_{A_{i_1} \dots A_{i_s}}(a_{ni_1}, \dots, a_{ni_s}))',$$
$$\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)', \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$$

پارامترهای مدل (۳.۴) بیشتر از برآورد مشاهدات هستند و مدل بیش پارامتری[۳] است(میلیکن و جانسون [۴] [۶] و شاو [۵] [۱۰]).

---
[۳] Over-parameterized
[۴] Miliken , Johnson
[۵] Shaw

برای حل این مشکل، اعمال محدودیت‌ها بر پارامترها پیشنهاد می‌شود. قرار دادن محدودیت‌ها بر پارامترها می‌تواند به روش‌های مختلفی انجام شود، در این فصل تعمیم یک مجموع به صفر در نظر گرفته شده است

$$\sum_{k=1}^{p_1} A_1(k) \cdot \frac{n_{k1}}{n} = 0, \ldots, \sum_{k=1}^{p_m} A_m(k) \cdot \frac{n_{km}}{n} = 0 \tag{۴.۴}$$

$$\sum_{k=1}^{p_{i_1}} I_{A_{i_1} \ldots A_{i_s}}(k, i'_2, \ldots, i'_s) \cdot \frac{n_{ki'_2 \ldots i'_s}}{n_{i'_2 \ldots i'_s}} = 0 \tag{۵.۴}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^{p_{i_s}} I_{A_{i_1} \ldots A_{i_s}}(i'_1, i'_2, \ldots, k) \cdot \frac{n_{i'_1 i'_2 \ldots k}}{n_{i'_1 i'_2 \ldots i'_{s-1}}} = 0 \tag{۶.۴}$$

که n_{k_j} تعداد رخداد سطح k در ستون jام طرح است، $i'_1 \ldots i'_{t-1} i'_{t+1} \ldots i'_s$ $(t = 1, \ldots, s)$ ترکیب سطح از $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{t-1}}, A_{i_{t+1}}, \ldots, A_{i_s}$ است که در طرح ظاهر می‌شود و $n_{i'_1 \ldots i'_{t-1} i'_{t+1} \ldots i'_s}$ تعداد رخداد مربوطه و $n_{i'_1 \ldots k \ldots i'_s}$ تعداد رخداد ترکیب سطح $i'_1 \ldots k \ldots i'_s$ از $A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}$ در طرح است. توجه داشته باشید که

$$\sum_{k=1}^{p_{i_t}} n_{i'_1 \ldots k \ldots i'_s} = n_{i'_1 \ldots i'_{t-1} i'_{t+1} \ldots i'_s}, \qquad t = 1, 2, \ldots, s$$

به‌طور خاص زمانی که H متعادل است یعنی زمانی که تمام مقایسه‌های تیماری اهمیت دارند و باید هر جفت تیمار با هم به اندازه تعداد دفعات جفت‌های دیگر رخ دهد (به عنوان مثال تعداد زیرمجموعه برابر)، از محدودیت‌های متداول مجموع به صفر استفاده می‌شود (میلیکن و جانسون [۶]) . برای بدست آوردن برآوردهای خوب برای $\mathbf{\Theta}_M$ توسط $\mathbf{Y}$، لازم است به سوالات زیر پاسخ دهیم:

۱. کدام یک بهترین ترکیب سطح از $A_1, \ldots, A_m$ برای تولید y با بالاترین مقدار است؟

۲. آیا سطح عامل A_j در تاثیر آن‌ها بر متغیر پاسخ تفاوت دارد؟

به هر حال، طرح‌های متفاوت برآوردهای مختلفی از $\mathbf{\Theta}_M$ ایجاد می‌کنند. طرح‌های نامناسب ممکن است برآوردناپذیری پارامترها را نتیجه بدهند. در اینجا، اصطلاح برآوردپذیری به وجود برآوردگرهای نااریب خطی پارامترها اشاره دارد (به عنوان مثال، ماتریس $\mathbf{B}$ وجود دارد به‌طوری‌که $E(\mathbf{BY}) = \mathbf{\Theta}_M$). طرحی امکان‌پذیر نامیده می‌شود که در آن تمام $\mathbf{\Theta}_M$ها برآوردپذیر باشند و باید روش آنالیز واریانس برروی طرح‌های امکان‌پذیر قابل اجرا باشد. هدف ما این است، مشکل انتخاب طرح‌های امکان‌پذیر را برای مدل‌های آنالیز واریانس حل کنیم.

یک روش امکان‌پذیری طرح‌ها، مبتنی بر معیار مدل خطی است که با تبدیل مدل خطی (۳.۴) به صورت زیر ارائه شده است

$$\mathbf{Y} = \sum_{M \in \Omega} \mathbf{C}_M \boldsymbol{\beta}_M + \varepsilon = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon. \tag{۷.۴}$$

که $\boldsymbol{\beta}_M = (\theta_1, \ldots, \theta_{l_M})'$ یک بردار، $l_M(< n)$ پارامترهای مستقل $\boldsymbol{\Theta}_M$ هستند و $\mathbf{C}_M$ یک ماتریس $n \times l_M$ است به‌طوری‌که $\mathbf{C}_M\boldsymbol{\beta}_M = \boldsymbol{\Theta}_M$. که با بیان هر عنصر $\boldsymbol{\Theta}_M$ در روابط $\boldsymbol{\beta}_M$ با محدودیت‌های $\mathbf{C} = (C_0, C_1, \ldots, C_m, C_{i_1\ldots i_s})$ و $\boldsymbol{\beta} = (\beta'_0, \beta'_1, \ldots, \beta'_m, \beta'_{i_1\ldots i_s})'$ بدست می‌آید.

از آنجا که برآوردپذیری $\boldsymbol{\Theta}_M$ معادل با برآوردپذیری $\boldsymbol{\beta}_M$ است، $\mathbf{H}$ امکان‌پذیر است اگر و فقط اگر $\boldsymbol{\beta}$ برآوردپذیر باشد. از نظریه مدل خطی، $\boldsymbol{\beta}$ برآوردپذیر است اگر و فقط اگر $\mathbf{C}$ رتبه ستون کامل باشد. از این‌رو معیار امکان‌پذیری برای $\mathbf{H}$ این است که بررسی کند آیا ستون‌های $\mathbf{C}$ رتبه کامل هستند. برخلاف اثر بخشی در تصمیم‌گیری‌های طرح‌های امکان‌پذیر، در مواردی که طرح نامتعادل و دارای سطوح زیادی باشد دسترسی به معیار امکان‌پذیری مبتنی بر مدل خطی، کاری دشوار و پیچیده است. از آنجا که محدودیت‌های پارامتری آنالیز واریانس در این مورد پیچیده هستند، به عنوان مثال، برای اثر متقابل سه عامل که هر عامل ۴ سطح دارد طبق معادلات (۵.۴) و (۶.۴) ممکن است ۴۸ محدودیت وجود داشته باشد. علاوه‌بر این دشوار است که بفهمیم چه نوع ساختارهایی از طرح‌ها این معیار را برقرار می‌کند. این نتیجه را می‌توان فقط برای آرایه‌های متعامد پیدا کرد (به عنوان مثال چنگ [۲] و چنگ [۳]). این وضعیت برای انتخاب یا ساخت یک طرح امکان‌پذیر قبل از تجزیه و تحلیل داده‌ها یک مشکل است، به ویژه زمانی که آرایه‌های متعامد در دسترس نیستند.

ماتریس تصویر یک ابزار قدرتمند برای بررسی امکان‌پذیری طرح‌هاست و به‌طور گسترده‌ای در ساختار آرایه‌های متعامد استفاده شده است (ژانگ [۱۹]، ژانگ و همکاران [۲۰] و پانگ [۷]).

در این فصل ما یک رابطه معادل جالب بین طرح‌های امکان‌پذیر و ماتریس تصویرها ارائه می‌کنیم. به‌عنوان یک نتیجه، یک خانواده گسترده‌ای از طرح‌ها، شامل انواع متعامد و نامتعامد، امکان‌پذیر می‌باشد. در همین حال، این رابطه معادل را می‌توان به عنوان یک معیار جایگزین برای تعیین امکان‌پذیری هر طرح معینی استفاده کرد. در مقایسه با روش مدل خطی، این روش ساده‌تر است و بدون نیاز به تبدیل خطی از مدل آنالیز واریانس استفاده می‌شود.

۲.۴ ماتریس تصویر

در این بخش تعاریف و مفاهیم ماتریس تصویر را ارائه می‌دهیم.

برای طرح $H = (a_{ij})_{n\times m}$ و $D = \{l_1, \ldots, l_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$، $(a_{il_1} \ldots a_{il_n})$ را به صورت a_{iD} نمایش می‌دهیم. فرض کنید $G = (g_1, \ldots, g_n)'$ یک بردار $n \times 1$ باشد که عناصر سطرهای آن متناظر با عناصر سطرهای H هستند، سپس یک I_D را به صورت یک ماتریس $n \times n$ تعریف

می‌کنیم به‌طوری‌که

$$I_D G = I_D \begin{pmatrix} g_۱ \\ g_۲ \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{|J_{۱D}|} \sum_{s \in J_{۱D}} g_s \\ \frac{۱}{|J_{۲D}|} \sum_{s \in J_{۲D}} g_s \\ \vdots \\ \frac{۱}{|J_{nD}|} \sum_{s \in J_{nD}} g_s \end{pmatrix}$$

که $J_{iD} = \{s : a_{sD} = a_{iD}\}$ و $|J_{iD}|$ تعداد عناصر در J_{iD} $(i = ۱, \ldots, n)$ است. توجه داشته باشید که $|J_{iD}| = n_{a_{iD}}$. به خصوص $J_{i\varnothing} = \{s : s = ۱, ۲, \ldots, n\}$.

مثال ۱.۲.۴. فرض کنید

$$H = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix} \qquad G = Y = \begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \\ y_۴ \end{pmatrix}$$

برای $D = \varnothing, \{۱\}, \{۲\}, \{۱, ۲\}$ ماتریس‌های متناظر $I_\varnothing, I_{\{۱\}}, I_{\{۲\}}, I_{\{۱,۲\}}$ به صورت زیر هستند

$$I_\varnothing Y = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۴}(y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴) \\ \frac{۱}{۴}(y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴) \\ \frac{۱}{۴}(y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴) \\ \frac{۱}{۴}(y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴) \end{pmatrix} \qquad I_{\{۱\}} Y = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲) \\ \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲) \\ \frac{۱}{۲}(y_۳ + y_۴) \\ \frac{۱}{۲}(y_۳ + y_۴) \end{pmatrix}$$

$$I_{\{۲\}} Y = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۳) \\ \frac{۱}{۲}(y_۲ + y_۴) \\ \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۳) \\ \frac{۱}{۲}(y_۲ + y_۴) \end{pmatrix} \qquad I_{\{۱,۲\}} Y = \begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \\ y_۴ \end{pmatrix}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$I_\varnothing = \frac{۱}{۴} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \qquad I_{\{۱\}} = \frac{۱}{۲} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$I_{\{۲\}} = \frac{۱}{۲} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad I_{\{۱,۲\}} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

واضح است که I_D همانند ماتریس نشانگر است و می‌تواند به‌طور مستقیم توسط طرح H محاسبه شود، زیرا فقط به سطرهای H وابسته است. در واقع، عنصر (i,j)ام از I_D به صورت زیر است

$$I_D(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{|J_{iD}|}, & \text{اگر } a_{jD} = a_{iD}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۸.۴}$$

در ادامه تعریف ماتریس تصویر ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۲.۴. ([۱۵]). برای طرح $H = (a_{ij})_{n\times m}$ و $D = \{l_1, \dots, l_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$،

$$A_D = \sum_{N\subseteq D} (-1)^{|D|-|N|} I_N \tag{۹.۴}$$

را ماتریس تصویر ستون‌های $l_1, \dots, l_n$ از H می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۴. مثال ۱.۲.۴ را در نظر بگیرید، ماتریس تصویر برای $D = \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ به ترتیب $A_\varnothing = I_\varnothing$، $A_{\{1\}} = I_{\{1\}} - I_\varnothing$، $A_{\{2\}} = I_{\{2\}} - I_\varnothing$ و $A_{\{1,2\}} = I_{\{1,2\}} - I_{\{1\}} - I_{\{2\}} + I_\varnothing$ می‌باشد.

۳.۴ معیار امکان‌پذیری برای طرح H

در این بخش نتیجه اصلی روابط ماتریس تصویر را ارائه می دهیم، همچنین معیار امکان‌پذیری برای طرح H را بیان می کنیم.

برای اثبات این معیار، دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا یک رابطه بین ماتریس تصویر و مدل خطی (۷.۴) برقرار می‌کنیم و در مرحله بعد نتیجه اصلی را در روابط ماتریس تصویر فراهم می‌کنیم.

۱.۳.۴ مفاهیم اصلی و لم‌های پایه

لم ۱.۳.۴. ([۱۵]). در مدل (۷.۴) ثابت می‌شود به ازای هر $M \in \Omega$، $A_M C_M = C_M$.

برهان. محدودیت‌های (۴.۴)_(۶.۴) معادل با $M \in \Omega$، $I_{M_{K^-}} \Theta_M = 0$ هستند که $M_{K^-} = M \backslash \{i_k\}$ $(k = 1, \dots, s)$ اگر $M = \{i_1, \dots, i_s\}$، و $M_{K^-} = \varnothing$ اگر $M = \{1\}, \dots, \{m\}$، که نتیجه می‌دهد

$$I_N \Theta_M = \begin{cases} \Theta_M & \text{اگر } N = M \\ 0 & \text{اگر } N \subset M \end{cases}$$

بنابراین

$$A_M\Theta_M = \sum_{N\subseteq M} (-۱)^{|M|-|N|} I_N \Theta_M = \Theta_M$$

از $\Theta_M = C_M\beta_M$ برای هر β_M داریم

$$A_M C_M \beta_M = C_M \beta_M$$

از این‌رو $A_M C_M = C_M$. □

قضیه ۱.۳.۴. ([۱۵]). تحت این شرط که $\mathrm{rank}(A_M) \le l_M$، H امکان‌پذیر است اگر و فقط اگر

$$\mathrm{rank}\left(\sum_{M\in\Omega} A_M\right) = \sum_{M\in\Omega} \mathrm{rank}(A_M) \tag{۱۰.۴}$$

برهان. از لم ۱.۳.۴ داریم

$$R(C_M) \subset R(A_M)$$

و

$$l_M = \mathrm{rank}(C_M) \le \mathrm{rank}(A_M)$$

علاوه‌بر این، طبق شرط قضیه $\mathrm{rank}(A_M) \le l_M$. بنابراین $\mathrm{rank}(C_M) = \mathrm{rank}(A_M)$ و $R(C_M) = R(A_M)$. از آنجا که P_{C_M} و A_M ماتریس‌های طرح‌ریزی از $R(C_M)$ هستند، از منحصربفرد بودن ماتریس‌های طرح‌ریزی رابطه $P_{C_M} = A_M$ حاصل می‌شود.

اکنون نتیجه طرف اول را اثبات می‌کنیم:

" $\Longleftarrow$ " از آنجا که H یک طرح امکان‌پذیر است، بنابراین Θ_Mها برآوردپذیرند، β در مدل (۷.۴) برآوردپذیر است. براساس لم ۱.۲.۲ C رتبه کامل ستونی است و داریم:

$$\mathrm{rank}(C) = \sum_M l_M$$

بنابراین $C'_M C_M$ ماتریس‌های معکوس‌پذیر هستند و

$$\begin{aligned}
\sum_M P_{C_M} &= \sum_M C_M (C'_M C_M)^{-۱} C'_M \\
&= (C_\circ, C_۱, \ldots, C_{i_۱\ldots i_s})\,\mathrm{diag}\left((C'_\circ C_\circ)^{-۱}, \ldots, (C'_{i_۱\ldots i_s} C_{i_۱\ldots i_s})^{-۱}\right)(C'_\circ, C'_۱, \ldots, C'_{i_۱\ldots i_s})' \\
&= CKC'
\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که

$$\mathbf{K} = \mathrm{diag}\left((C'_\circ C_\circ)^{-۱}, \ldots, (C'_{i_۱\ldots i_s} C_{i_۱\ldots i_s})^{-۱}\right)$$

یک ماتریس معین مثبت است و ماتریس معکوس‌پذیر L وجود دارد به‌طوری‌که $K = LL'$.
بنابراین داریم

$$\sum_M P_{C_M} = CLL'C' = (CL)(CL)'$$

پس

$$\text{rank}\left(\sum_M A_M\right) = \text{rank}\left(\sum_M P_{C_M}\right) = \text{rank}\left((CL)(CL)'\right) = \text{rank}(CL) = \text{rank}(C) = \sum_M l_M$$

علاوه بر این، از $\text{rank}(C_M) = \text{rank}(A_M) = l_M$ داریم

$$\text{rank}\left(\sum_M A_M\right) = \sum_M \text{rank}\,(A_M) = \sum_M l_M$$

" $\Longrightarrow$ " از $\text{rank}\left(\sum_M A_M\right) = \sum_M \text{rank}\,(A_M)$ و $\text{rank}(C_M) = \text{rank}(A_M) = l_M$ داریم

$$\text{rank}\left(\sum_M A_M\right) = \sum_M \text{rank}\,(A_M) = \sum_M l_M$$

علاوه‌بر این

$$\begin{aligned}\sum_M A_M &= \sum_M P_{C_M} = \sum_M C_M(C'_M C_M)^{-۱}C'_M \\ &= \sum_M C_M D_M = (C_\circ, C_۱, \ldots, C_{i_۱\ldots i_s})(D'_\circ, D'_۱, \ldots, D'_{i_۱\ldots i_s})' \\ &= CD\end{aligned}$$

که $\mathbf{C} = (C_\circ, C_۱, \ldots, C_{i_۱\ldots i_s})$ و $\mathbf{D} = (D'_\circ, D'_۱, \ldots, D'_{i_۱\ldots i_s})'$ بنابراین

$$\text{rank}(C) \geq \text{rank}\left(\sum_M A_M\right) = \sum_M l_M.$$

از طرف دیگر، تعداد ستون‌های C برابر است با $\sum_M l_M$ و در نتیجه

$$\text{rank}(C) \leq \sum_M l_M$$

از این‌رو

$$\text{rank}(C) = \text{rank}\left(\sum_M A_M\right) \leq \sum_M l_M$$

یعنی C پر رتبه است، پس β و β_M برآوردپذیرند، بنابراین Θ_M برآوردپذیر است، یعنی H یک طرح امکان‌پذیر است. □

طبق قضیه بالا، امکان‌پذیری طرح معین H با ماتریس تصویرها قابل تشخیص هستند که مراحل آن در زیر آمده است.

۱. محاسبه A_M برای $M \in \Omega$ توسط روابط (۸.۴) و (۹.۴).

۲. بررسی درستی $\text{rank}(A_M) \leq l_M$ برای $M \in \Omega$.

۳. مقایسه $\text{rank}\left(\sum_M A_M\right)$ و $\sum_M \text{rank}\left(A_M\right)$. اگر برابر باشند، H امکان‌پذیر است. در غیر این صورت H امکان‌پذیر نیست.

تذکر ۱.۳.۴. ([۱۵]). برای ماتریس تصویرهای اثرات اصلی، شرایط $\text{rank}(A_j) \leq l_j$ به‌طور طبیعی برقرار است (اثبات در نتیجه ۱.۴.۴ در بخش ۴.۴ آمده است). برای ماتریس تصویرهای اثرات متقابل A_M، ژانگ [۱۹] نشان داد زمانی که ستون‌های طرح متعلق به ترکیب M از یک آرایه متعامد با قدرت $|M|$ یا یک آرایه متعامد شبه سطح با ترکیب بعضی از سطوح در یک یا چند ستون آرایه متعامد با قدرت $|M|$ باشد آن‌گاه

$$\text{rank}(A_M) = l_M$$

بنابراین، زمانی که هیچ اثر متقابلی در نظر گرفته نمی‌شود یا ستون‌های مربوط به هر اثر متقابل به عنوان یک آرایه متعامد یا یک آرایه متعامد شبه سطح انتخاب شده است، مرحله ۲ را می‌توان نادیده گرفت (سطوح در ستون‌های دیگر و ترکیب سطوح ستون‌ها از اثرات متقابل مختلف می‌تواند دلخواه باشد).

تذکر ۲.۳.۴. ([۱۵]). هنگامی‌که مرحله ۲ ضروری است، l_M را می‌توان به صورت حذف پیوسته پارامترهای محدود شده Θ_M با توجه به محدودیت‌های (۴.۴)ـ(۶.۴) بدست آورد. به خصوص

$$l_M = \prod_{j \in M} (p_j - ۱)$$

اگر تمام ترکیبات ممکن ستون‌های متعلق به M طاهر شوند.

تذکر ۳.۳.۴. ([۱۵]). اگر شرط $\text{rank}(A_M) \leq l_M$ برقرار نباشد، نتیجه قضیه ۱.۳.۴ صدق نمی‌کند.

از آنجا که طرح‌های مختلفی را انتخاب می‌کنیم که شرط مناسب را ندارند و برخی از آن‌ها حتی ممکن است امکان‌پذیر باشند (۱۰.۴) قابل اعتماد نیست.

۴.۴ پیدا کردن طرح‌های امکان‌پذیر به وسیله ماتریس تصویر

در این بخش یک رده از طرح‌های امکان‌پذیر را طبق قضیه ۱.۳.۴ می‌یابیم.

قضیه ۱.۴.۴. ([۱۵]). تحت شرط $\text{rank}(A_M) \leq l_M$، H امکان‌پذیر است اگر

$$A_M A_N = 0, \qquad M \neq N, \quad M, N \subseteq \Omega \tag{۱۱.۴}$$

برهان. طبق قضیه ۱.۳.۴، زمانی که $\text{rank}(A_M) \leq l_M$، A_M یک ماتریس طرح‌ریزی است. با توجه به $M, N \subseteq \Omega$ و $M \neq N$ برای $A_M A_N = 0$

$$\left(\sum_M A_M\right)' = \sum_M A'_M = \sum_M A_M$$

و

$$\left(\sum_M A_M\right)^2 = \sum_M A_M^2 = \sum_M A_M$$

یعنی $\sum_M A_M$ یک ماتریس طرح‌ریزی است. بنابراین

$$\text{rank}\left(\sum_M A_M\right) = \text{tr}\left(\sum_M A_M\right) = \sum_M \text{tr}(A_M) = \sum_M \text{rank}(A_M)$$

طبق قضیه ۱.۳.۴، H امکان‌پذیر است. □

نتیجه ۱.۴.۴. ([۱۵]). اگر مدل مورد بررسی یک مدل اثر اصلی باشد که در آن $\Omega = \{0, 1, \ldots, m\}$ آن‌گاه طرح‌های با ساختار زیر امکان‌پذیر هستند:

$$\frac{n_{a_{ij}, a_{tk}}}{n_{a_{ij}} n_{a_{tk}}} = \frac{1}{n}, \qquad i, t = 1, \ldots, n, \quad 1 \leq j \neq k \leq m \tag{۱۲.۴}$$

برهان. از تعریف A_j و اثبات قضیه ۱.۳.۴، داریم

$$p_j - 1 \leq \text{rank}(A_j) \leq p_j$$

علاوه‌بر این توجه کنید مجموع تمام سطرهای A_j برابر با صفر است، بنابراین $\text{rank}(A_j) = p_j - 1 = l_j$ در حالی که $A_j A_k = 0$ معادل است با

$$I_j I_k = (A_j + A_\varnothing)(A_k + A_\varnothing) = A_\varnothing A_\varnothing = A_\varnothing = \frac{1}{n} 1'_n 1_n$$

که برابر (۱۲.۴) است. در اینجا 1_n یک بردار $n \times 1$ از ۱هاست. بنابراین طبق قضیه ۱.۴.۴، H امکان‌پذیر است.

□

این نوع طرح را طرح متعامد تعمیم‌یافته با قدرت ۲ می‌نامیم. چنین طرح‌هایی شامل آرایه‌های متعامد، آرایه‌های متعامد شبه سطح، طرح‌های کسری، جداول احتمالی مستقل، طرح‌های بلوکی متعادل متعامد (ژانگ [۲۲]) و غیره هستند. علاوه‌بر این، با استفاده از طرح‌های موجود، بسیاری از طرح‌های دیگر می‌توانند ساخته شوند. به عنوان مثال می‌توان آن‌ها را با ادغام آرایه‌های متعامد با طرح‌های عاملی کسری مناسب ساخت.

نتیجه ۲.۴.۴. ([۱۵]). اگر مدل مورد بررسی شامل اثرات متقابل $I_{M_1},\dots,I_{M_k}$ باشد که در آن $\Omega=\{0,1,\dots,m,M_1,\dots,M_k\}$ آن‌گاه طرح‌های دارای ساختار زیر امکان‌پذیر هستند:

$$\frac{n_{a_{iM},a_{tN}}}{n_{a_{iM}}n_{a_{tN}}}=\frac{1}{n} \tag{۱۳.۴}$$

برای $i,t=1,\dots,n$، $M\cap N=\varnothing$ و $|M+N|\le h$ که $h=\max\limits_{M,N\in\Omega}|M\cup N|$.

برهان. در این حالت زمانی که

$$A_MA_N=0,\qquad \text{برای تمام } M\neq N,\ |M\cup N|\le h$$

رابطه (۱۱.۴) برقرار است، که معادل آن است که

$$I_MI_N=\left(\sum_{K\subseteq M}A_K\right)\left(\sum_{T\subseteq N}A_T\right)=\sum_{K\subseteq M\cap N}A_K=I_{M\cap N}$$

می‌توان بررسی کرد که این شرط برابر رابطه (۱۳.۴) است. علاوه‌بر این، رابطه (۱۳.۴) شامل معادلات برای $M\cap N=\varnothing$، $M,N\subseteq M_i$ $i=1,\dots,k$ می‌باشد.
آنگاه

$$\operatorname{rank}(A_{M_i})=\prod_{j\in M_i}(p_j-1)=l_{M_i}$$

بنابراین طبق قضیه ۱.۴.۴، H امکان‌پذیر است.

□

این نوع طرح را طرح متعامد تعمیم‌یافته با قدرت h می‌نامیم. چنین طرح‌هایی شامل آرایه‌های متعامد با قدرت h، آرایه‌های متعامد شبه سطح که از آرایه‌های متعامد با قدرت h بدست می‌آید. علاوه‌بر این، با استفاده از طرح متعامد تعمیم‌یافته با قدرت ۲، بسیاری از طرح‌های دیگر را می‌توان ساخت. به عنوان مثال، فرض کنید L_n^{s-1} یک طرح متعامد تعمیم‌یافته با قدرت $(s-1)$ با $s-1$ ستون باشد، آن‌گاه بررسی اینکه $H=\left((p)\otimes 1_n,1_p\otimes L_n^{s-1}\right)$ یک طرح متعامد تعمیم‌یافته است آسان است که در آن $(p)=(1,\dots,p)'$ و $\otimes$ حاصل‌ضرب کرونکر است.

۵.۴ مقایسه روش ماتریس تصویر و مدل خطی برای پیدا کردن طرح امکان‌پذیر

حال امکان‌پذیری طرح H را با روش‌های ماتریس تصویر و مدل خطی با بیان چند مثال مورد بررسی قرار می‌دهیم. در مثال زیر امکان‌پذیری طرح را با روش مدل خطی بررسی می‌کنیم:

مثال ۱.۵.۴. ([۱۶]). فرض کنید $m=۲$ باشد، در این صورت

$$f(x_۱,x_۲)=f_۰+f_۱(x_۱)+f_۲(x_۲)+f_{۱۲}(x_۱,x_۲)$$

طرح H را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$H=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}$$

سپس

$$y_i=f_۰+f_۱(x_{i۱})+f_۲(x_{i۲})+f_{۱۲}(x_{i۱},x_{i۲})+\varepsilon, \qquad i=۱,۲,\ldots,n$$

که

$$Y=\Theta_۰+\Theta_۱+\Theta_۲+\Theta_{۱۲}+\varepsilon$$

در اینجا $p_۱=p_۲=۲$ و

$$x_{ij}=x_j(a_{ij})=\frac{۱}{۲-۱}\times(a_{ij}-۱)=\begin{cases} ۰ & \text{اگر } a_{ij}=۱ \\ ۱ & \text{اگر } a_{ij}=۲ \end{cases}$$

$$\mu_۱=\begin{pmatrix} f_۱(۰) \\ f_۱(۱) \end{pmatrix} \quad \mu_۲=\begin{pmatrix} f_۲(۰) \\ f_۲(۱) \end{pmatrix} \quad \mu_{۱۲}=\begin{pmatrix} f_{۱۲}(۰,۰) \\ f_{۱۲}(۱,۰) \\ f_{۱۲}(۰,۱) \\ f_{۱۲}(۱,۱) \end{pmatrix}$$

$$X_۱=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad X_۲=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad X_{۱۲}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\Theta_۱=X_۱\mu_۱ \quad \Theta_۲=X_۲\mu_۲ \quad \Theta_{۱۲}=X_{۱۲}\mu_{۱۲}$$

شرایط محدودیت به شکل زیر است

$$\begin{cases} f_۱(۰)+f_۱(۱)=۰, & f_۲(۰)+f_۲(۱)=۰ \\ f_{۱۲}(۰,۰)+f_{۱۲}(۰,۱)=۰ & f_{۱۲}(۱,۰)+f_{۱۲}(۱,۱)=۰ \\ f_{۱۲}(۰,۰)+f_{۱۲}(۱,۰)=۰ & f_{۱۲}(۰,۱)+f_{۱۲}(۱,۱)=۰ \end{cases}$$

بنابراین

$$\beta_\circ = (f_\circ) \quad \beta_۱ = (f_۱(\circ)) \quad \beta_۲ = (f_۲(\circ)) \quad \beta_{۱۲} = (f_{۱۲}(\circ,\circ))$$

$$\mu_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} \beta_۱ = B_۱\beta_۱ \quad \mu_۲ = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} \beta_۲ = B_۲\beta_۲ \quad \mu_{۱۲} = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \beta_{۱۲} = B_{۱۲}\beta_{۱۲}$$

$$C_\circ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \quad C_۱ = X_۱B_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۱ \\ -۱ \end{pmatrix} \quad C_۲ = X_۲B_۲ = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} \quad c_{۱۲} = X_{۱۲}B_{۱۲} = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

آن‌گاه

$$Y = C_\circ\beta_\circ + C_۱\beta_۱ + C_۲\beta_۲ + C_{۱۲}\beta_{۱۲} + \varepsilon = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\circ \\ f_۱(\circ) \\ f_۲(\circ) \\ f_{۱۲}(\circ,\circ) \end{pmatrix} + \varepsilon = C\beta + \varepsilon$$

از آنجا که $rank(C)$ برابر با ۴ است C رتبه کامل است لذا از نظر مدل خطی β برآوردپذیر است بنابراین H یک طرح امکان‌پذیر می‌باشد.

حال امکان‌پذیری طرح مثال بالا را با روش ماتریس تصویر بررسی می‌کنیم:

مثال ۲.۵.۴. طرح زیر را در نظر بگیرید:

$$H = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}_{۴\times۲}$$

می‌خواهیم امکان‌پذیری طرح H را با روش ماتریس تصویر بررسی کنیم. برای این منظور سه مرحله تعامد پذیری، پیدا کردن ماتریس تصویر و محاسبه رتبه ماتریس را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

مرحله ۱: ستون‌های ۱ و ۲ مربوط به I_{AB}، شامل یک آرایه متعامد می‌باشد، بنابراین شرط قضیه ۱.۳.۴ برقرار است.

مرحله ۲: از رابطه (۹.۴) داریم

$$A_{\emptyset} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\{1\}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\{2\}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\{1,2\}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

مرحله ۳: محاسبه‌ی رتبه ماتریس‌ها: از آنجایی که

$$\sum_M rank(A_M) = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴ = rank\left(\sum_M A_M\right) \qquad rank\left(\sum_M A_M\right) = ۴$$

با توجه به قضیه ۱.۳.۴ H یک طرح امکان‌پذیر می‌باشد.

مثال ۳.۵.۴. مدل آنالیز واریانس سه طرفه با سه عامل A، B و C و یک اثر متقابل I_{AB} را در طرح زیر در نظر بگیرید

$$H = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۳ \end{pmatrix}$$

با توجه به روابط (۴.۴)ـ(۶.۴)، محدودیت‌ها روی پارامترها عبارتند از

$$۲A(۱) + A(۲) = ۰$$
$$B(۱) + B(۲) + B(۳) = ۰$$
$$۴C(۱) + ۴C(۲) + C(۳) = ۰$$
$$I_{AB}(۱,۱) + I_{AB}(۱,۲) + I_{AB}(۱,۳) = ۰$$
$$I_{AB}(۲,۱) + I_{AB}(۲,۲) + I_{AB}(۲,۳) = ۰$$
$$۲I_{AB}(۱,۱) + I_{AB}(۲,۱) = ۰$$
$$۲I_{AB}(۱,۲) + I_{AB}(۲,۲) = ۰$$
$$۲I_{AB}(۱,۳) + I_{AB}(۲,۳) = ۰$$

می‌خواهیم امکان‌پذیری طرح H را با روش ماتریس تصویر بررسی کنیم.

مرحله ۱: ستون‌های ۱ و ۲ مربوط به I_{AB}، شامل یک آرایه متعامد می‌باشد، بنابراین شرط قضیه ۱.۳.۴ برقرار است.

مرحله ۲: از رابطه (۹.۴) داریم

$$A_{\varnothing} = \frac{۱}{۹}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$A_{\{۱\}} = \frac{۱}{۱۸}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۲ & -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۲ & -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۲ & -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۲ & -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۲ & -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۲ & -۲ & -۲ \\ -۲ & -۲ & -۲ & -۲ & -۲ & -۲ & ۴ & ۴ & ۴ \\ -۲ & -۲ & -۲ & -۲ & -۲ & -۲ & ۴ & ۴ & ۴ \\ -۲ & -۲ & -۲ & -۲ & -۲ & -۲ & ۴ & ۴ & ۴ \end{pmatrix}$$

$$A_{\{2\}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{\{3\}} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 & 5 & 5 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 5 & 5 & -4 & 5 & 5 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 5 & -4 & -4 & 5 & 5 & 5 & -4 \\ 5 & 5 & -4 & 5 & 5 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 5 & 5 & -4 & 5 & 5 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 5 & -4 & -4 & 5 & 5 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 5 & -4 & -4 & 5 & 5 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & 5 & -4 & -4 & 5 & 5 & 5 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 32 \end{pmatrix}$$

$$A_{\{1,2\}} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & 8 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & -4 & 8 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -4 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

مرحله ۳: محاسبه‌ی رتبه ماتریس‌ها

$$\sum_M rank(A_M) = 1+1+2+2+2 = 8 \neq rank\left(\sum_M A_M\right) \qquad rank\left(\sum_M A_M\right) = 6$$

بنابراین H یک طرح امکان‌پذیر نمی‌باشد.

برای بررسی صحت نتیجه روش ماتریس تصویر، مثال بالا را به یک مدل خطی تبدیل می‌کنیم.

از محدودیت ها، پارامترهای مستقل در $\Theta_\varnothing$، $\Theta_۱$، $\Theta_۲$، $\Theta_۳$، و $\Theta_{۱۲}$ به ترتیب μ، $A(۱)$، $B(۱)$ و $B(۲)$، $C(۲)$ و $C(۱)$ و $I_{AB}(۱,۱)$، و $I_{AB}(۱,۲)$، هستند. با بیان پارامترها در مدل آنالیز واریانس در عبارت‌های μ، $A(۱)$، $B(۱)$، $C(۱)$، $C(۲)$، $I_{AB}(۱,۱)$، و $I_{AB}(۱,۲)$ داریم

$$Y = C\beta + \varepsilon = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ & ۰ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & -۲ \\ ۱ & -۲ & -۱ & -۱ & -۴ & -۴ & ۲ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ A(۱) \\ B(۱) \\ B(۲) \\ C(۱) \\ C(۲) \\ I_{AB}(۱,۱) \\ I_{AB}(۱,۲) \end{pmatrix} + \varepsilon$$

از آنجا که $rank(C)$ برابر با ۶ است C رتبه کامل نیست لذا از نظر مدل خطی β برآوردپذیر نیست بنابراین H یک طرح امکان‌پذیر نمی‌باشد که نتیجه گیری از روش ماتریس تصویر را تأیید می‌کند.

در مثال‌های بالا امکان‌پذیری طرح را با روش ماتریس تصویر و مدل خطی بررسی کردیم. با مقایسه این دو روش پی می‌بریم که روش ماتریس تصویر به دلیل حجم محاسبات کمتر، صرفه‌جویی در وقت و هزینه، سادگی و پیچیده نبودن محاسبات روش بهتری نسبت به روش مدل خطی می‌باشد.

۶.۴ نتیجه‌گیری و آینده تحقیق

در این تحقیق روش‌های مدل خطی، آرایه متعامد و ماتریس تصویر معرفی شدند و با استفاده از روش‌های مدل خطی و ماتریس تصویر، امکان‌پذیری طرح‌ها را با ارائه چند مثال با یکدیگر مقایسه کرده و آن‌ها را مورد بررسی قرار دادیم، نتایج به‌دست آمده به این گونه است که هر دو روش جواب یکسانی دارند ولی روش ماتریس تصویر به دلیل حجم محاسبات کمتر، سادگی و زمان‌بر نبودن محاسبات روش بهتری نسبت به مدل خطی است.

در این تحقیق مدل مورد بررسی با یک اثر متقابل بررسی شد، پیشنهاد می‌شود مدل آنالیز واریانس با چند اثرمتقابل مورد بررسی قرار گیرد و همچنین پیشنهاد می‌شود برای روش ماتریس تصویر با استفاده از نرم‌افزارهای آماری الگوریتمی برای محاسبات این روش ارائه داد.

مراجع

[۱] مونت گمری داگلاس سی، (۱۳۸۰)، **"طرح و تحلیل آزمایشها"** ترجمه غلامحسین شاهکار، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.

[2] Cheng, C. (1978). Optimality of certain asymmetrical experimental designs. *Ann. Statist.* 6, 1239–1261.

[3] Cheng, C. (1980). Orthogonal arrays with variable numbers of symbols. *Ann. Statist,* 8, 447–453.

[4] Hedayat, A. S., Sloane, N. J. A., Stufken, J. (1999). *Orthogonal Arrays: Theory and Applications.* Springer: New York.

[5] Hoeffding, W. (1948). A class of statistics with asymptotically normal distribution. *The Annals of Mathematical Statistics,* 19, 293–325.

[6] Milliken, G. A., Johnson, D. E. (1984). *Analysis of Messy Data:* Volume 1: Designed Experiments: USA: New York: Van Nostrand Reinhold.

[7] Pang, S. Q., Zhang, Y. S., Liu, S. Y. (2004). Further results on the orthogonal arrays obtained by generalized Hadamard product. *Statist. Prob. Lett.* 68, 17–25

[8] Searle, S. R. (1971). *Linear Models:* USA: New York: Wiley.

[9] Searle, S. R. (1987). *Linear Models for Unbalanced Data:* USA: New York: Wiley.

[10] Shaw, R. G. (1993). ANOVA for unbalanced data: an overview. *Ecology,* 74, 1638–1645.

[11] Sobol, I., M. (1993). Sensitivity analysis for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modeling and computational Exp.* 1, 407–414.

[12] Stein, C. (1987). Large sample properties of simulations using Latin hypercube sampling. *Technometrics,* 29, 143–151.

[13] Suen, C. Y., Das, A., Dey, A. (2001). On the construction of asymmetric orthogonal arrays. *Statist. Sinica,* 1, 241–260.

[14] Takemura, A. (1983). Tensor analysis of ANOVA decomposition. *Journal of the American Statistical Association,* 78, 293–325.

[15] Wang, X. D., Tang, Y. C., Zhang,Y. S. (2014). Feasible criterion for designs based on fixed effect ANOVA model. *Statist. Prob Lett.* 87, 134–142.

[16] Wang, X. D., Tang, Y. C., Zhang, Y. S. (2012). Orthogonal arrays for estimating global sensitivity indices of non-parametric models based on ANOVA highdimensional model representation. *J. Statist. Plann. Inf.* 142, 1801–1810.

[17] Zhang, Y. S. (1991). Asymmetrical orthogonal design by multi-matrix methods. *J. Chinese Statist. Assoc,* 29, 197–218.

[18] Zhang, Y. S. (1992). Orthogonal arrayand matrices. *J. Math. Res. Exposition,* 3, 438– 440.

[19] Zhang, Y. (1993). *Theory of Mulitilateral Matrices: Chinese Statistical Press:* Beijing: pp, 30–72.

[20] Zhang, Y. S., Lu, Y. Q., Pang, S. Q. (1999). Orthogonal arrays obtainedby orthogonal decomposition of projection matrices. *Statist. Sinica,* 2, 595–604.

[21] Zhang, Y. S., Pang, S. Q., Wang, Y. P. (2001). Orthogonal arrays obtained by the generalized Hadamard product. *Discrete Math,* 238, 151–170.

[22] Zhang, Y. S., Wang, X. D., Zhang, X. Q., Pan, C. Y., Chen, X. P., Wang, H., Tian, J. T., Mao, S.S. (2009). Essential theory of orthogonal balanced block designs. in: *The 6th Statistics and Probability Seminar across the Taiwan Strait.* Nanjing University.

پیوست آ

مفاهیم و مقدمات جبر ماتریس‌ها

آ.۱ معادلات خطی

تعریف آ.۱.۱ (معادلات غیر همگن)**.** معادله خطی $a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \dots a_nx_n = h$ غیر همگن نامیده می‌شود اگر $h \neq ۰$. دستگاه $AX = H$ یک دستگاه معادلات غیر همگن نامیده می‌شود در صورتی که بردار H یک بردار غیر صفر باشد.

تعریف آ.۲.۱ (معادلات همگن)**.** معادله خطی $a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \dots a_nx_n = ۰$ همگن نامیده می‌شود.

آ.۲ تبدیلات خطی

تعریف آ.۱.۲. فرض کنیم

$$Y = \begin{bmatrix} y_۱ & y_۲ & \dots & y_n \end{bmatrix}' \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ & \dots & x_n \end{bmatrix}'$$

دو بردار از فضای برداری $V_n(F)$ باشند، و مختصات آن‌ها را نسبت به یک پایه از فضا در نظر می‌گیریم.

به فرض بردارهای X و Y به‌وسیله‌ی روابط

$$\begin{cases} y_۱ = a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n \\ y_۲ = a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n۱}x_۱ + a_{n۲}x_۲ + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{آ.۱}$$

یا به‌طور خلاصه

$$Y = AX$$

با هم ارتباط دارند، که $A = [a_{ij}]$ روی F است. آن‌گاه (آ.۱) یک تبدیل T می‌باشد که هر بردار X از فضای $V_n(F)$ را به‌توی (معمولاً) بردار دیگر Y از همان فضا می‌برد، که تصویر آن نامیده می‌شود.

اگر (آ.۱) بردار $X_۱$ را به‌توی بردار $Y_۱$ و بردار $X_۲$ را به‌توی بردار $Y_۲$ ببرد، آن‌گاه

الف) برای هر اسکالر k، $kX_۱$ را به‌توی $kY_۱$ می‌برد،

ب) برای هر زوج از اسکالرهای a و b بردار $aX_۱ + bX_۲$ را به‌توی $aY_۱ + bY_۲$ می‌برد. به این دلیل تبدیل خطی نامیده می‌شود.

قضایای اساسی. اگر در (آ.۱)،

$$X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ \end{bmatrix}' = E_۱$$

آن‌گاه

$$Y = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۲۱} & \ldots & a_{n۱} \end{bmatrix}'$$

و در حالت کلّی، اگر $X = E_j$، آن‌گاه

$$Y = \begin{bmatrix} a_{۱j} & a_{۲j} & \ldots & a_{nj} \end{bmatrix}'$$

بنابراین

I. تبدیل خطی (آ.۱) وقتی که تصاویر (yها) بردارهای پایه معلوم باشند به‌صورت منحصربه‌فردی تعیین می‌شود. ستون‌های ماتریس A به‌ترتیب مختصات تصاویر این بردارها هستند.
تبدیل خطی (آ.۱) غیرمنفرد نامیده می‌شود اگر تصاویر بردارهای متمایز X_i بردارهای متمایز Y_i باشند. در غیر این‌صورت تبدیل منفرد نامیده خواهد شد.

II. تبدیل خطی (آ.۱) غیرمنفرد است اگروفقط‌اگر ماتریس A، ماتریس تبدیل غیرمنفرد باشد.

III. یک تبدیل خطی غیرمنفرد بردارهای به‌طور خطی مستقل (وابسته) را به‌توی بردارهای به‌طور خطی مستقل (وابسته) می‌برد.

آ.۳ تبدیلات متعامد

فرض کنیم

$$Y = AX \tag{آ.۲}$$

یک تبدیل خطی در $V_n(\mathbb{R})$ باشد و همچنین فرض کنیم تصاویر بردارهای nتایی X_1 و X_2 به ترتیب به‌وسیله‌ی Y_1 و Y_2 نشان داده شده باشند.

$$X_1 \cdot X_2 = \frac{1}{2}\left\{\|X_1 + X_2\|^2 - \|X_1\|^2 - \|X_2\|^2\right\}$$
$$Y_1 \cdot Y_2 = \frac{1}{2}\left\{\|Y_1 + Y_2\|^2 - \|Y_1\|^2 - \|Y_2\|^2\right\}$$

با مقایسه دو طرف تساوی‌های فوق می‌بینیم که اگر تبدیل (آ.۲) طول‌ها را ثابت نگه دارد، حاصل‌ضرب‌های داخلی را ثابت نگه خواهد داشت و برعکس، بنابراین

- یک تبدیل خطی طول‌ها را ثابت نگه می‌دارد اگروفقط‌اگر حاصل‌ضرب‌های داخلی را ثابت نگه دارد. تبدیل خطی $Y = AX$ متعامد نامیده می‌شود اگر ماتریس A متعامد باشد.
- یک تبدیل خطی طول‌ها را ثابت نگه می‌دارد اگروفقط‌اگر ماتریس آن متعامد باشد.
- اگر (آ.۲) یک تبدیل مختصات از پایه‌ی E به پایه‌ی Z باشد، آن‌گاه پایه‌ی Z متعامد است اگروفقط‌اگر ماتریس A متعامد نباشد.

قضیه آ.۳.۱ (خواص ترانهاده)**.** فرض کنیم A و B دو ماتریس و c یک اسکالر باشد. همچنین فرض کنیم که اندازه‌ی ماتریس‌ها طوری هستند که عملیات را می‌توان اجرا نمود. در این‌صورت داریم

۱) ترانهاده جمع $(A+B)' = A' + B'$،

۲) ترانهاده ضرب اسکالر $(cA)' = cA'$،

۳) ترانهاده ضرب $(AB)' = B'A'$،

۴) $(A')^r = (A^r)'$،

۵) $(A')' = A$.

تعریف آ.۳.۱. ماتریس A را متقارن گوییم هرگاه $A' = A$.

تعریف آ.۳.۲. فرض کنید $v_1, v_2, \ldots, v_m$ بردارهایی در فضای برداری V باشند. گوییم v، برداری در V، یک ترکیب خطی از $v_1, v_2, \ldots, v_m$ است هرگاه اسکالرهایی چون $c_1, c_2, \ldots, c_m$ موجود باشند به قسمی که v را بتوان چنین نوشت

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m$$

تعریف آ.۳.۳. الف) مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ در یک فضای برداری V را وابسته خطی نامیم هرگاه اسکالرهایی چون $c_1, c_2, \dots, c_m$، که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشد به قسمی که

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m = 0$$

ب) مجموعه بردارهای $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ مستقل خطی گوییم، هرگاه از

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m = 0$$

لازم آید که $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

تعریف آ.۴.۳. مجموعه برداری را در فضای برداری V یک مجموعه متعامد نامیم هرگا هر زوج بردار این مجموعه، متعامد باشند. چنین مجموعه را یکّه متعامد نامیم هرگاه متعامد بوده و هر بردار آن برداری یکّه باشد.

قضیه آ.۲.۳. یک مجموعه یکّه متعامد (از بردارهای غیرصفر) در یک فضای برداری، مستقل خطی است.

تعریف آ.۵.۳. یک ماتریس مربعی را که ستون‌های آن تشکیل یک مجموعه یکّه متعامد می‌دهند یک ماتریس متعامد می‌نامیم.

قضیه آ.۳.۳. فرض کنیم A یک ماتریس متعامد باشد. در این‌صورت

۱) بردارهای سطری A تشکیل یک مجموعه یکّه متعامد می‌دهند.

۲) A وارون‌پذیر است که در آن $A^{-1} = A'$.

۳) A^{-1} نیز یک ماتریس متعامد است.

۴) $|A| = \pm 1$

تعریف آ.۶.۳. تصویر بردار v روی بردار غیر صفر u در v، که با proj_u^v نشان داده می‌شود، چنین تعریف می‌گردد

$$\mathrm{proj}_u^v = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u.$$

قضیه آ.۴.۳. اگر A ماترسی متعامد باشد آنگاه $A' = A^{-1}$.

قضیه آ.۵.۳. ماتریس A متعامد است اگر وتنها اگر $A'A = I$.

تعریف آ.۷.۳. ماتریس وارون: ماتریس A^{-1} را وارون ماتریس A می‌نامیم اگر وتنها اگر $AA^{-1} = I$.

تعریف آ.۸.۳. وارون وارون ماتریس A، برابر خود ماتریس A است. یعنی $A = (A^{-1})^{-1}$.

قضیه آ.۳.۶.

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

قضیه آ.۳.۷.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

قضیه آ.۳.۸.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

قضیه آ.۳.۹. وارون یک ماتریس متقارن، متقارن است.

قضیه آ.۳.۱۰. اگر A و B و C ماتریس‌های مربعی باشند، آنگاه $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ و $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(CAB)$ در صورتی که ضرب بین آن‌ها تعریف شده باشد.

تعریف آ.۳.۹. ماتریس قطری: ماتریس مربع متقارنی است که همه درایه‌های آن، به جز درایه‌های روی قطر اصلی، برابر صفر است.

تعریف آ.۳.۱۰. ماتریس اسکالر: اگر درایه‌های قطر اصلی ماتریس قطری با هم برابر باشند، آنگاه این ماتریس را اسکالر گویند.

تعریف آ.۳.۱۱. ماتریس واحد: ماتریس اسکالر که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر یک باشد که آن را با $\mathbf{I}$ نشان می‌دهیم.

تعریف آ.۳.۱۲. ماتریس معین مثبت و معین نامنفی: ماتریس A را معین مثبت گویند اگر تمام مقادیر ویژه آن مثبت باشد و اگر مقادیر ویژه A نامنفی باشد، گفته می‌شود A نیمه معین مثبت یا معین نامنفی است.

قضیه آ.۳.۱۱. ماتریس A نیمه معین مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس نامنفرد P وجود داشته باشد به‌طوری که $A = P'P$.

تعریف آ.۳.۱۳. دترمینان ماتریس: دترمینان ماتریس مربعی A با بعد $p \times p$، یک مقدار عددی است که شامل مجموع تعداد جملاتی است که هر جمله حاصل‌ضرب p درایه ماتریس A می‌باشد.

قضیه آ.۳.۱۲. اگر A و B دو ماتریس، مربعی باشند، آنگاه

$$|AB| = |BA| = |A| \times |B|$$

قضیه آ.۳.۱۳. اگر A ماتریس $p \times p$ و k یک مقدار دلخواه باشد، آنگاه $|kA| = k^p|A|$.

تعریف آ.۳.۱۴. ماتریس منفرد: اگر $|A| = 0$ آنگاه ماتریس A را ماتریس منفرد (تکین) می‌نامیم. ماتریسی که دترمینان آن غیر صفر باشد، ماتریس نامنفرد (ناتکین) نامیده می‌شود.

قضیه آ.۱۴.۳. فرض کنید A یک ماتریس قطری نامنفرد و به صورت زیر باشد

$$A = \mathrm{Diag}(a_۱, a_۲, \dots, a_p)$$

در این صورت، وارون آن به صورت زیر است:

$$A^{-۱} = \mathrm{Diag}(\frac{۱}{a_۱}, \frac{۱}{a_۲}, \dots, \frac{۱}{a_n})$$

قضیه آ.۱۵.۳. ماتریس منفرد، وارون پذیر نیست.

قضیه آ.۱۶.۳. اگر A ماتریس $p \times p$ و نامنفرد باشد، آنگاه رتبه آن برابر p است.

تعریف آ.۱۵.۳. وارون تعمیم یافته یک ماتریس: اگر B ماتریس باشد به‌طوری که Bh جوابی برای معادلات سازگار $Ax = h$ باشد، گوییم B وارون تعمیم یافته A است و با نماد A^- نشان می‌دهیم.

قضیه آ.۱۷.۳. وارون تعمیم یافته یک ماتریس، یکتا نیست.

قضیه آ.۱۸.۳.

$$AA^-A = A$$

قضیه آ.۱۹.۳. فرض کنید A یک ماتریس مربع باشد، آنگاه مشتق ماتریس معکوس A نسبت به کمیت k از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\frac{dA^{-۱}}{dk} = -A^{-۱}\frac{dA}{dk}A^{-۱}$$

قضیه آ.۲۰.۳. هر ماتریس معین مثبت دارای دترمینان مثبت و وارون‌پذیر است.

تعریف آ.۱۶.۳. ماترس A خودتوان است اگر $A^۲ = A$ باشد.

قضیه آ.۲۱.۳. ماتریس متقارن A معین مثبت است اگر و فقط اگر ماتریس ناویژه P وجود داشته باشد به‌طوری که $A = P'P$

قضیه آ.۲۲.۳. اگر A یک ماتریس متقارن خودتوان با رتبه r باشد آنگاه

$$\mathrm{rank(A)} = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{r}$$

قضیه آ.۲۳.۳. مقادیر ویژه یک ماتریس خودتوان، صفر یا یک است.

قضیه آ.۲۴.۳. فرض کنید A یک ماتریس $n \times p$ است.

(۱) اگر $rank(A) = p$ آنگاه $A'A$ معین مثبت است.

(۲) اگر $rank(A) < p$ آنگاه $A'A$ نیمه معین مثبت است.

قضیه آ.۳.۲۵. اگر $A_{n\times n}$ معین مثبت (نیمه معین مثبت) با مقادیر ویژه $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ باشد، آنگاه:

(۱) عناصر قطر اصلی $a_{ii} > 0$ ($a_{ii} \geq 0$) می‌باشند.

(۲) A ناویژه است.

(۳) A^{-1} معین مثبت است.

(۴) P^TAP معین مثبت (نیمه معین مثبت) است، که در آن P یک ماتریس ناویژه است.

قضیه آ.۳.۲۶. ویژگی ماتریسی حاصلضرب کرونکر:

$$(A \otimes D)(B \otimes E)(C \otimes F) = (ABC) \otimes (DEF)$$

Abstract

In the design of expriments a design called fiseable when all of its parameters are estimable, so the distinction feasibility of design is very important in the factor designs. Before now, feasibility criterions of designs have been based on linear models, when designs have a lot of level, criterions of design is very difficalt and complicated in linear models based method. The matrix image is a powerfull tool to studing this designs without need linear transformation of ANOVA model to judge the feasibility of a designs. The matrix image defines a set that obtained from the columns of a design. In this thesis, feasibility of designs investigating with linear model, orthogonal arrays and matrix image methods, also shown that matrix image based method investigate feasibility of designs easily of other methods.
Keywords:

Design of expriments, Factor designs, Fiseable design, Linear model, Matrix image, Orthogonal arrays.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Mathematical Statistics

Finding feasible designs using the Matrix image

By: Mehran Fathi

Supervisor

Dr. Ahmad Nezakati Rezazadeh

March 2018