بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده  علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش  جبر

رساله دکتری

# خواص گرافهای توانی برخی گروههای متناهی

نگارنده:  کبری پورقبادی

استاد راهنما

دکتر سید حیدر جعفری

اسفند ۱۳۹۶

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

**باسمه تعالی**

**مدیریت تحصیلات تکمیلی**

**فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)**

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود خانم کبری پورقبادی دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض گرایش جبر به شماره دانشجویی ۹۱۲۷۰۵۵ ورودی بهمن ماه سال ۱۳۹۱ در تاریخ ۱۳۹۶/۱۲/۱۹ از رساله **نظری** ■ / **عملی** ☐ خود با عنوان : **خواص گرافهای توانی برخی گروههای متناهی** دفاع و با اخذ نمره ۱۹٫۷۳ به درجه : عالی نائل گردید.

| | |
|---|---|
| الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑ | ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷ ☐ |
| ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹ – ۱۵ ☐ | د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐ |
| ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐ | |

| ردیف | هیئت داوران | نام و نام خانوادگی | مرتبه علمی | امضاء |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | استاد راهنما | دکترسید حیدر جعفری | استادیار | |
| ۲ | استاد مدعو خارجی | دکتر محمد رضا درفشه | استاد | |
| ۳ | استاد مدعو داخلی | دکتر ابراهیم هاشمی | استاد | |
| ۴ | استاد مدعو داخلی | دکتر مهدی رضا خورسندی | استادیار | |
| ۵ | نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده | دکتر احمد معتمد نژاد | دانشیار | |

**مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:**

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم **کبری پورقبادی** بعمل آید.

**نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده : دکتر ابراهیم هاشمی**

**تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:**

آموزش

دانشگاه صنعتی شاهرود

تقدیم به خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را ...

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید

بزرگترین امید و تکیه گاه زندگی ام، مادرم که با عشق و تلاش فراوان در تمامی مراحل زندگی همراه من بود و دعای خیرش همیشه بدرقه راهم

روح بزرگ پدرم و برادرم که همواره یادشان در دلم گرامی و گرمی بخش وجودم است

خواهران و برادران عزیزم که در سختی ها همراه و همگام من بودند.

# تشکر و قدردانی

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده ی کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه‌سار بنده‌نوازی هایش رساله حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این رساله به انجام نمی‌رسید.

درابتدا بسی شایسته است از زحمات و راهنمایی های استاد محترم و گرانقدرم جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری که تقبل زحمت فرموده و راهنمایی رساله اینجانب را پذیرفته اند و با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند تشکر و سپاسگزاری نمایم.

با تقدیر و درود فراوان از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر محمدرضا درفشه، جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی و جناب آقای دکتر مهدی خورسندی که با لطف بی دریغشان زحمت داوری این رساله را متقبل شدند. همچنین، از جناب آقای دکتر احمد معتمدنژاد که زحمت هدایت این جلسه را بر عهده گرفتند، سپاسگزارم.

و درآخر تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند؛ باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

**کبری پورقبادی**
**اسفند ۱۳۹۶**

# تعهد نامه

اینجانب **کبری پورقبادی** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض** ، **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده رساله با عنوان **خواص گرافهای توانی برخی گروههای متناهی** ، تحت راهنمایی **سید حیدر جعفری** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود ” یا “ Shahrood University of Technology ” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

**کبری پورقبادی**
**اسفند ۱۳۹۶**

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

# چکیده

گراف توانی غیر جهت دار گروه $G$، $\mathcal{P}(G)$، گرافی ساده با مجموعه راس های $G$ است که در آن دو راس متمایز $x$ و $y$ مجاورند اگر و تنها اگر به ازای برخی از اعداد صحیح مثبت $m$، $y = x^m$ یا $x = y^m$. گراف توانی محض، گرافی است که از حذف راس همانی گراف توانی حاصل می شود و آن را با $\mathcal{P}^*(G)$ نمایش می دهیم. در این رساله برای گراف های توانی محض گروه های متقارن و متناوب زمانی که این نوع گراف ها همبند هستند، مسیرهای کوتاه بین راس های گراف تعیین می شوند و کران هایی برای قطر این نوع گراف ها مشخص می شوند. نشان می دهیم که $diam(\mathcal{P}^*(S_۹)) = diam(\mathcal{P}^*(S_{۱۰})) = ۱۴$، $diam(\mathcal{P}^*(S_{۱۵})) = ۱۲$، و برای $n \geq ۱۶$، اگر گراف $\mathcal{P}^*(S_n)$ همبند باشد، آنگاه $۶ \leq diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq ۱۰$. همچنین، برای $n \geq ۵۱$، اگر گراف $\mathcal{P}^*(A_n)$ همبند باشد، آنگاه $۶ \leq diam(\mathcal{P}^*(A_n)) \leq ۱۱$. در انتها، قطرهای گراف های توانی محض $\mathcal{P}^*(Q_n)$ به ازای $n \geq ۲$ و گراف های توانی محض $\mathcal{P}^*(D_n)$ به ازای $n \geq ۳$ مشخص می شوند.

کلمات کلیدی: گراف توانی محض، قطر، گروه متقارن، گروه متناوب، گروه کواترنیون، گروه دووجهی

# لیست مقالات مستخرج از رساله

۱. پورقبادی ک. و جعفری س.ح. (۱۳۹۵)، چهل وهفتمین کنفرانس ریاضی ایران، ''قطر گرافهای توانی گروههای جایگشتی‘‘، دانشگاه خوارزمی، تهران

۲. پورقبادی ک. و جعفری س.ح. (۱۳۹۵)، نهمین کنفرانس نظریه گروه های ایران، ''قطر گرافهای توانی محض برخی از گروههای متناهی‘‘، دانشگاه کاشان

3. Pourghobadi K. and Jafari S.H. “The diameter of power graphs of symmetric groups”, (**2017**), **Journal of Algebra and Its Applications**, https://doi.org/10.1142/S0219498818502341.

4. Pourghobadi K. and Jafari S.H. “The diameter of power graphs of alternating groups” **Utilitas Mathematica**, (accepted)

# فهرست مطالب

# فهرست تصاویر

# فهرست جداول

# فصل ۱

# پیش نیازها و مقدمات

## پیشگفتار

مرتبط کردن مفاهیم موجود بین شاخه‌های مختلف ریاضیات یکی از روش‌های کارآمد برای بررسی کردن آن مفاهیم می‌باشد. نسبت دادن شئ ترکیبیاتی به شئ جبری دارای پیشینه‌ی نسبتاً طولانی می‌باشد. یکی از قدیمی‌ترین این تناظرها نسبت دادن گراف کیلی به یک گروه می‌باشد که توسط کیلی[۱] انجام گرفت و نتایج خیره کننده‌ای از این تناظر بدست آمد. با استفاده از ساختارهای گروه های متناهی می توان گراف های متنوعی از جمله گراف توانی را روی مجموعه عناصر یک گروه تعریف کرده و سپس نتایج جالبی هم در نظریه گراف و هم در نظریه گروه های متناهی به دست آورد. فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی باشد. در این صورت گراف توانی غیر جهت دار وابسته به گروه $G$ که با نماد $\mathcal{P}(G)$ نشان داده می شود، گرافی ساده است که راس های آن عناصر گروه هستند و دو راس مجاورند، هرگاه یکی از آن ها توانی از دیگری باشد. یک گراف توانی محض روی گروه متناهی یک گراف توانی روی گروه متناهی است که از حذف راس همانی به دست آمده است و با $\mathcal{P}^*(G)$، نشان داده می شود. اولین بار کلارو[۲] و همکارانش [۱۶]، [۱۷]، [۱۸]، این نوع گراف ها را برای نیم گروه ها تعریف کردند

---

[1] Cayley

[2] Kelarev

و به مطالعه برخی از خواص آن ها پرداختند. چاکرابارتی [3] و همکارانش [۹]، خواص اصلی گراف های توانی غیر جهت دار گروه های متناهی را بررسی نموده تعداد یال های $\mathcal{P}(G)$ را برای یک گروه متناهی $G$ محاسبه نمودند. چاکرابارتی و پنیگرهی [4] [۱۰]، در مورد همبندی راسی و مسطح بودن گراف های گروه های دوری متناهی، گروه دووجهی و گروه کواترنیون بحث کردند. کامرون [5] و قوش [6] [۸]، [۷]، نشان دادند که گروه های آبلی متناهی با گراف های توانی یکریخت باید یکریخت باشند. همچنین، نشان داند که دو گروه متناهی که دارای گراف های غیر جهت دار یکریخت هستند تعداد عناصر یکسانی از هر مرتبه دارند. تمیژ [7] و ساتانیتن [8] [۲۵]، برخی از کلاس های گراف توانی روی نیم گروه های متناهی را مشخص کردند. مقدم فر و همکارانش [۲۰]، برخی از خواص گراف های توانی و گراف توانی محض را مطالعه کردند. پورقلی و همکارانش [۲۳]، ثابت کردند تعداد یال ها در یک گراف توانی روی گروه ساده متناهی از تعداد یال ها در یک گراف توانی روی گروه دوری متناهی با مرتبه یکسان کمتر یا مساوی است. بابولونی [9] و همکارانش [۶]، نشان دادند که $\mathcal{P}^*(S_n)$، ۲ــ همبند است اگر وتنها اگر $n = ۲$ یا $n$ و $n - ۱$ غیر اول باشند. حمزه و اشرفی [۱۴]، چندجمله ای مشخصه گراف توانی برخی از گروه های متناهی را به دست آوردند. دوست آبادی و فرخی [۱۲]، همبندی گراف های توانی محض برخی از گروه ها از جمله گروه متقارن و گروه متناوب را مشخص کردند و کران بالایی برای آنها ارائه دادند.

این رساله شامل چهار فصل است. در فصل اول برخی از تعاریف مقدماتی و مثال ها و قضیه های مقدماتی از نظریه گروه ها و نظریه گراف که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند را بیان می کنیم. کلیه قضایا این فصل بدون اثبات ارائه می شود و برهان آنها در منابع [۱]، [۳]، [۲]، [۲۶] موجود است.

در فصل دوم فرض می کنیم به ازای هر عدد صحیح $n \geq ۹$، $n$ و $n-۱$ هیچکدام اول نباشند و به بررسی قطر گراف توانی محض گروه متقارن می پردازیم. همچنین، برخی از مسیرهای کوتاه در گراف توانی محض گروه متقارن را مشخص می کنیم و نشان می دهیم که

$$diam(\mathcal{P}^*(S_۹)) = diam(\mathcal{P}^*(S_{۱۰})) = ۱۴,\ diam(\mathcal{P}^*(S_{۱۵})) = ۱۲$$

و به ازای $n \geq ۱۶$، $۶ \leq diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq ۱۰$.

در فصل سوم فرض می کنیم $n \geq ۹$، به طوری که هیچ یک از اعداد $n$، $n-۱$، $n-۲$، $n/۲$، $(n-۱)/۲$، و $(n-۲)/۲$ اول نباشند و به بررسی قطر گراف توانی محض گروه متناوب $\mathcal{P}^*(A_n)$

[3]Chakrabarty
[4] Panigrahi
[5]Cameron
[6]Ghosh
[7]Tamizh
[8] Sattanatha
[9] Bubboloni

می پردازیم. همچنین، برخی از مسیرهای کوتاه در این نوع گراف را مشخص می کنیم و نشان می دهیم که به ازای $n \geq ۵۲$، $۱۱ \leq diam(\mathcal{P}^*(A_n)) \leq ۶$.
در فصل چهارم قطر گراف توانی محض گروه های دووجهی و کواترنیون را مشخص می کنیم.

## ۱.۱ تعاریف وقضایای اولیه در نظریه گروه ها

**تعریف ۱.۱.۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه با عضو همانی ۱ و $X$ یک مجموعه ای غیرخالی باشد. فرض کنیم به ازای هر $g$ از $G$ و هر $x$ از $X$ عضو یکتایی از $X$ که آن را با علامت $x \bullet g$ نشان می دهیم وجود داشته باشد به طوری که:

$(i)$ به ازای هر $x$ از $X$، $x \bullet 1 = x$.

$(ii)$ به ازای هر $g_1, g_2$ از $G$ و هر $x$ از $X$، $x \bullet (g_1 g_2) = (x \bullet g_1) \bullet g_2$.

در این صورت گوییم $G$ بر $X$ عمل می کند و $\bullet$ را عمل $G$ بر $X$ می نامیم. برای سهولت در نوشتن، به جای $x \bullet g$ معمولا خواهیم نوشت $xg$.

**تعریف ۲.۱.۱.** فرض کنیم $G$ گروهی دلخواه باشد. در این صورت عمل تزویج به صورت $x \bullet g = x^g = g^{-1}xg$ تعریف می شود. در این صورت برای هر $x \in G$،

$$C_x = \{x^g | g \in G\}$$

را رده تزویج $x$ در $G$ گوییم.

**تعریف ۳.۱.۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه و $H$ زیرگروهی از آن باشد. در این صورت مرکزساز $H$ در $G$ را با نماد $C_G(H)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$C_G(H) = \{g \in G | gx = xg, \forall x \in H\}.$$

**قضیه ۱.۱.۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه دوری از مرتبه $n$ باشد و $G = \langle a \rangle$ آنگاه به ازای عدد طبیعی $k$، $a^k$ مولد $G$ است اگر و تنها اگر $gcd(n,k) = 1$.

**گزاره ۱.۱.۱.** تعداد مولدهای گروه متناهی $G$ از مرتبه $n$ برابر است با $\varphi(n)$ که $\varphi$ تابع اویلر است.

**تعریف ۴.۱.۱.** فرض کنیم $H$ و $K$ دو گروه دلخواه و $\varphi : H \to K$ یک همریختی باشد. (به ازای هر $h$ از $H$، تصویر $h$ با $\varphi$ را با $\varphi_h$ نشان می دهیم.) در حاصل ضرب دکارتی $H \times K$ عمل دوتایی زیر را تعریف می کنیم:

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2, (k_1 \varphi_{h_2} k_2)).$$

مجموعه $H \times K$ با عمل فوق $\varphi$ یک گروه می دهد. این گروه را حاصلضرب نیم مستقیم $H$ و $K$ با عمل می نامیم و ان را با علامت $H \times_\varphi K$ نشان می دهند و در حالتی که مشخص کردن $\varphi$ مورد نیاز نباشد، حاصلضرب نیم مستقیم $H$ و $K$ را با $H \ltimes K$ نشان می دهیم.

**تعریف ۵.۱.۱.** فرض کنیم $X$ یک مجموعه غیر تهی است. هر نگاشت یک به یک و پوشا از $X$ به $X$ را یک جایگشت روی $X$ می نامیم.
فرض کنیم $f$ و $g$ جایگشت هایی روی $X$ باشند، در این صورت ترکیب آنها یعنی $g \circ f$ نیز جایگشتی روی $X$ است. در مبحث جایگشت ها ضابطه $g \circ f$ چنین تعریف می شود:

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

**گزاره ۲.۱.۱.** مجموعه تمام جایگشت های روی $X$ با عمل ترکیب نگاشت ها یک گروه است. این گروه را گروه تقارن مجموعه $X$ می نامیم و آن را با $S_X$ نمایش می دهیم.

**تعریف ۶.۱.۱.** برای مجموعه متناهی $X = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ گروه $S_X$ را گروه متقارن از درجه $n$ می نامیم و آن را با $S_n$ نمایش می دهیم.

**تعریف ۷.۱.۱.** فرض کنیم $\alpha \in S_n$ و $X = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ در این صورت:

(الف) اگر برای $x \in X$ داشته باشیم $\alpha(x) = x$ آن گاه گوییم $x$ توسط $\alpha$ ثابت نگه داشته می شود و مجموعه تمام نقاطی را که $\alpha$ ثابت نگه می دارد را با $F(\alpha)$ نشان می دهیم و $f_\alpha = |F(\alpha)|$.

(ب) اگر برای $x \in X$ داشته باشیم $\alpha(x) \neq x$ آن گاه گوییم $x$ توسط $\alpha$ حرکت داده می شود و مجموعه تمام نقاطی را که $\alpha$ حرکت می دهد را محمل $\alpha$ می نامیم و با $S(\alpha)$ نشان می دهیم. در واقع:

$$S(\alpha) = X - F(\alpha).$$

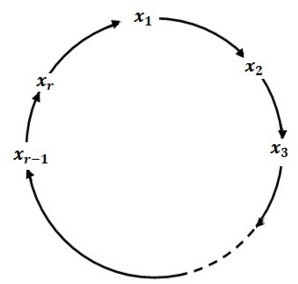
(پ) جایگشت های $\alpha$ و $\beta$ از $S_n$ جدا از هم می نامیم هرگاه هیچ عضو $X$ توسط هر دوی آنها حرکت داده نشود. به عبارت دیگر $S(\alpha) \cap S(\beta) = \emptyset$.

**گزاره ۳.۱.۱.** هر دو جایگشت جدا از هم در $S_n$ با هم جا به جا می شوند.

**تعریف ۸.۱.۱.** فرض کنید $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ (با $r \geq ۱$) عنصرهای متمایزی از $X = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ باشند در این صورت جایگشت $\pi$ از $S_n$ با ضابطه زیر را یک دور به طول $r$ یا $r$ـ دور می نامیم:

$$\pi(x_i) = x_{i+۱}, \quad ۱ \leq i \leq r - ۱,$$
$$\pi(x_r) = x_۱,$$
$$\pi(x_j) = x_j, \quad \forall j > r,$$

برای نشان دادن این که اثر $\pi$ روی عناصر $X$ چگونه است، عناصر $x_۱, \cdots, x_r$ را می توان به ترتیب روی محیط دایره قرار دهیم.




شکل ۱.۱: دور با طول $r$

به این علت به $\pi$ یک دور به طول $r$ می گوییم. واضح است که $\pi$ از مرتبه $r$ است. خلاصه نویسی دور بالا می تواند چنین باشد:

$$\pi = (x_۱, x_۲, \cdots, x_r)$$

اگر عناصری از $X$ در دور بالا ظاهر نشده اند، بدان معناست که این عناصر توسط دور $\pi$ ثابت نگه داشته می شوند. هر دور به طول ۱ را یک جایگشت همانی در نظر می گیریم.

**تعریف ۹.۱.۱.** مجموعه ی همه جایگشت های زوج در$S_n$ را گروه متناوب از درجه ی $n$ می نامیم و با نماد $A_n$ نمایش می دهیم. به سادگی دیده می شود که $| A_n |= \frac{n!}{۲}$.

**گزاره ۴.۱.۱.** گروه متناوب $A_n$ توسط دورهای به طول ۳ پدید می آید.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** فرض کنیم $\alpha \in S_n$ و $\alpha = \alpha_۱\alpha_۲\cdots\alpha_k$ تجزیه $\alpha$ به دورهای جدا از هم باشد. به علاوه فرض می کنیم دور های $\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_k$ به ترتیب از طول $m_۱, m_۲, \cdots, m_k$ باشند. اگر در حاصل ضرب بیان شده دورهای به طول ۱ را نیز در نظر بگیریم، در تجزیه $\alpha$ به $\alpha_i$ها همه ی اعداد $۱, ۲, \cdots, n$ ظاهر خواهند شد. فرض کنیم که $\alpha$ را چنین نوشته ایم که $m_۱ \leq m_۲ \leq \cdots \leq m_k$ در این صورت $k$تایی مرتب $(m_۱, m_۲, \cdots, m_k)$ را که در آن $m_۱ + m_۲ + \cdots + m_k = n$ ساختار دوری $\alpha$ می نامیم.

فرض کنیم $\alpha = (i_۱, i_۲, \cdots, i_r)$ یک دور دلخواه در $S_n$ باشد و $\pi \in S_n$ در این صورت

$$\alpha^\pi = (\pi i_۱, \pi i_۲, \cdots, \pi i_r)$$

مزدوج $\alpha$ است.

**قضیه ۲.۱.۱.** دو جایگشت در $S_n$ مزدوج اند اگر وتنها اگر دارای ساختار دوری یکسان باشند.

**نتیجه ۱.۱.۱.** هر گروه متناهی $G$ از مرتبه $n$ با زیرگروهی از گروه متقارن $S_n$ یکریخت است.

**نتیجه ۲.۱.۱.** هر گروه متناهی $G$ از مرتبه $n$ با زیرگروهی از گروه متناوب $A_{n+۲}$ یکریخت است.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** گروه تقارن های یک $n$ ضلعی منتظم گروهی از مرتبه $2n$ است و می توان آن را با عناصر $a$ و $b$ مشروط به روابط $a^n = b^2 = 1$ و $b^{-1}ab = a^{-1}$ تولید کرد. این گروه را گروه دووجهی مرتبه $2n$ می نامیم و با $D_n$ نمایش می دهیم.

**تعریف ۱۲.۱.۱.** گروه کواترنیون را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Q_n = \langle a, b : a^{2n} = b^4 = 1, a^n = b^2, ba = ba^{-1} = ba^{2n-1} \rangle$$

گروه $Q_n$ را گروه کواتر نیون از مرتبه $4n$ گوییم.

## ۲.۱ گرافها

**تعریف ۱.۲.۱.** گراف ساده $\Gamma$ با $n$ راس و $m$ یال متشکل از مجموعه راس های $V(\Gamma) = \{v_1, \cdots, v_n\}$ و مجموعه یال های $E(\Gamma) = \{e_1, \cdots, e_m\}$ است که در آن هر یال یک جفت نامرتب از راس هاست. به جای یال $\{u, v\}$ می نویسیم $uv$. اگر $uv \in E(G)$، آنگاه $u$ و $v$ مجاور هستند.

**تعریف ۲.۲.۱.** یک گراف جهت دار $\Gamma$ متشکل از یک مجموعه راس های $V(G)$ و یک مجموعه یال های $E(G)$ است که در آن هر یال یک جفت مرتب از راس هاست. به جای یال $(u, v)$ می نویسیم $uv$، که $u$ دم و $v$ سر آن است. وقتی که $uv \in E(G)$ می نویسیم $u \to v$، یعنی «یالی از $u$ به $v$ وجود دارد».

**تعریف ۳.۲.۱.** در گراف ساده $\Gamma$ درجه یک راس $v$ به تعداد یال‌های متصل به آن راس گفته می‌شود و با $deg(v)$ نمایش داده می شود.

**تعریف ۴.۲.۱.** یک یکریختی از $\Gamma_1$ به $\Gamma_2$ یک نگاشت دوسویی $f : V(\Gamma_1) \to V(\Gamma_2)$ است، به طوری که $uv \in E(\Gamma_1)$ اگر و تنها اگر $f(u)f(v) \in E(\Gamma_2)$. در این صورت می گوییم $\Gamma_1$ با $\Gamma_2$ یکریخت است و می نویسیم $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$.

**تعریف ۵.۲.۱.** گراف $\Gamma_1$ را زیر گراف $\Gamma$ گوییم هرگاه $V(\Gamma_1) \subseteq V(\Gamma)$ و $E(\Gamma_1) \subseteq E(\Gamma)$، در این حالت می نویسیم $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$.

**تعریف ۶.۲.۱.** زیرگراف $\Gamma_1$ از $\Gamma$ را یک زیرگراف فراگیر می نامیم هرگاه $V(\Gamma_1) = V(\Gamma)$.

**تعریف ۷.۲.۱.** یک زیر گراف القایی از $\Gamma$ زیرگرافی مانند $\Gamma_1$ است به طوری که هر یال $\Gamma$ مشمول در $V(\Gamma_1)$ متعلق به $E(\Gamma_1)$ باشد.

**تعریف ۸.۲.۱.** اگر $\Gamma$ یک گراف و $v$ راس $\Gamma$ باشد، منظور از $\Gamma - \{v\}$، زیرگرافی است از $\Gamma$ که با حذف راس $v$ و یال هایی که انتهای آن $v$ است، به دست می آید.
هرگاه $e$ یال $\Gamma$ باشد، منظور از $\Gamma - e$، زیرگراف $\Gamma$ است که از حذف یال $e$ به دست می آید. اگر $u$ و $v$ دو راس غیرمجاور $\Gamma$ باشند و $e = uv$ باشد، منظور از $\Gamma + e$ افزودن یال $uv$ به $\Gamma$ است.

**تعریف ۹.۲.۱.** فرض کنید $\Gamma$ یک گراف باشد، دنباله ی $v_۰v_۱v_۲\cdots v_k$ از راس های $\Gamma$ را یک گشت با طول $k$ گوییم هرگاه به ازای $۰ \leq i \leq k-۱$، $v_iv_{i+۱}$ یک یال در گراف باشد.

**تعریف ۱۰.۲.۱.** یک مسیر به طول $k$، یک گشت به طول $k$ است که هیچ راسی تکرار نشود.

**تعریف ۱۱.۲.۱.** یک دور یک گشت است که فقط راس ابتدا و انتها آن یکسان است و سایر راس ها متمایزند.

**تعریف ۱۲.۲.۱.** به ازای دو راس $u$ و $v$ از $\Gamma$ یک $u,v-$مسیر یک مسیر با نقاط پایانی $u$ و $v$ است.

**تعریف ۱۳.۲.۱.** گراف $\Gamma$ را همبند می نامیم هرگاه بین هر دو راس آن یک مسیر وجود داشته باشد.

**تعریف ۱۴.۲.۱.** گراف ساده $\Gamma$ را کامل می نامیم در صورتی که درآن هر دو رأس مجاور باشند. یک گراف کامل با $n$ راس را با $K_n$ نمایش می دهیم.

**تعریف ۱۵.۲.۱.** فاصله بین دو راس $u$ و $v$ در گراف $\Gamma$ که با $d(u,v)$ نمایش داده می شود، عبارت است از طول کوتاهترین $u,v-$ مسیر در $\Gamma$. اگر گراف همبند نباشد و هیچ مسیری بین $u$ و $v$ وجود نداشته باشد، $d(u,v)$ مطابق تعریف نامتناهی است.

**تعریف ۱۶.۲.۱.** قطر گراف $\Gamma$ عبارت است از بیشترین فاصله بین دو راس از $\Gamma$، که با $diam(\Gamma)$ نمایش داده می شود.

## ۳.۱ آشنایی مختصری با برنامه گپ

عبارت گپ [۱۰] که از ابتدای کلمات " Group Algorithm Programming " گرفته شده است یک سیستم محاسباتی نظریه گروه هاست. گپ یک بسته [۱۱] از نرم افزارها به صورت باز، آزاد [۱۲] و قابل توسعه [۱۳] برای انجام محاسبات در جبرمجرد است. عبارت آزاد به این مفهوم است که این برنامه رایگان است و کاربر اجازه دارد به آزادی آن را بر روی سیستم عامل خود نصب کند و تمام برنامه ها برای امتحان و تغییر کاربر باز می باشند. مفهوم توسعه پذیر به این معنا است که کاربر قادر است با استفاده از گپ برنامه های مشخص خود را نوشته و از آن ها به عنوان یک بسته جدیدی از برنامه گپ بر روی سیستم عامل خود استفاده کند. نوشتن برنامه گپ در سال ۱۹۸۵ تحت سرپرستی نیوبیوزر [۱۴] آغاز شد. نسخه ۴.۲ از این برنامه در سال ۱۹۸۸ و نسخه ۱.۳ از این برنامه در سال ۱۹۹۲ منتشر شد. در سال های بعد یک بازنویسی کامل و تکمیل برنامه ها از گپ صورت گرفت و نسخه ۱.۴ از این برنامه در سال ۱۹۹۹ منتشر شد. نسخه های دیگری از این برنامه در سال های اخیر منتشر شده است. جدیدترین تغییرات در این نرم افزار را می توان از سایت www.gap.system.org به دست آورد. برنامه گپ دارای دو بخش اصلی، هسته مرکزی [۱۵] و بسته ها می باشد.

- هسته مرکزی خود به چهار قسمت تقسیم می شود.
  (۱) هسته [۱۶] که در برنامه C نوشته شده است.
  (۲) یک مجموعه بزرگ از توابع گپ که ابزار جبری و محاسبات دیگر می باشد.
  (۳) یک مجموعه از اطلاعات نظریه گروه ها که شامل نسخه هایی از گروه ها، مجموعه گروه های متناهی از مرتبه کمتر از ۲۰۰۰ ( به استثنای گروه از مرتبه ۱۰۲۴) و غیره است. مجموعه بزرگ تر از گروه ها را می توان از طریق بسته ها به دست آورد.
  (۴) متن های مربوط به استفاده از نرم افزار گپ. این مستندات به صورت pdf و فایل متنی در دسترس می باشند.
- بسته های گپ برنامه هایی هستند که توانایی الحاق به هسته گپ را دارند. این بسته ها توسط دستور LoadPackage فراخوانی می شوند و در صورت فراخوانی می توان از آن ها استفاده کرد. بسته ها به دو شکل متداول هستند. یک نوع از این بسته ها با

[10] GAP
[11] Package
[12] Open-Source
[13] Extensible
[14] Joachim Neubuser
[15] Core
[16] Kernel

شروع به کار برنامه گپ فعال می شود. نوع دیگر از این بسته ها چون به برنامه های خروجی وابسته هستند، در سیستم عامل خاصی (معمولا یونیکس [۱۷] ) فعال می شوند. باید توجه داشت که بسته GRAPE در سیستم عامل ویندوز [۱۸] فعال می شود اما تمام امکانات آن فقط در سیستم عامل لینوکس [۱۹] قابل دسترسی هستند.

هر دستور در برنامه گپ با حروف بزرگ شروع می شود.

جدول ۱.۱: جدول برخی از دستور های مقدماتی گپ

| دستور | کاربرد |
|---|---|
| FactorsInt(i) | لیست عامل های اول عدد i را ارائه می دهد. |
| Maximum(i) | بیشترین مقدار در مجموعه i را ارائه می دهد |
| Int(i) | جزء صحیح عدد i را ارائه می دهد |
| SmallGroup(<m>،n) | $n$ــمین گروه از مرتبه $m$ را ارائه می دهد. |
| NumberSmallGroups(<m>) | همه ی گروه های از مرتبه $m$ را ارائه می دهد |
| AllSmallGroups(<m>) | تعداد گروه های از مرتبه $m$ را ارائه می دهد |
| Print(i) | بعد از اجرای برنامه مقدار $i$ را نمایش می دهد. |

[17] Unix
[18] Windows
[19] Linux

# فصل ۲

# قطر گراف توانی محض گروه متقارن

گراف توانی غیر جهت دار گروه $G$، $\mathcal{P}(G)$، گرافی ساده با مجموعه راس های $G$ است که در آن دو راس متمایز $x$ و $y$ مجاورند اگر و تنها اگر به ازای برخی از اعداد صحیح مثبت $m$، $y = x^m$ یا $x = y^m$. گراف توانی محض، گرافی است که از حذف راس همانی گراف توانی حاصل می شود و آن را با $\mathcal{P}^*(G)$ نمایش می دهیم. در [۱۲]، دوست آبادی و فرخی همبندی گراف های توانی محض گروه متقارن را مشخص کردند و کران بالایی برای قطر گراف توانی محض گروه متقارن ارائه دادند:

**قضیه ۲.۰.۱.** ([۱۲]، قضیه ۲.۴) فرض کنیم $n \geq ۹$، $\mathcal{P}^*(S_n)$ همبند است اگر وتنها اگر $n$ و $n - ۱$ هیچکدام اول نباشند. بعلاوه، اگر $\mathcal{P}^*(S_n)$ همبند باشد، آنگاه $diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq ۲۶$.

در این فصل فرض می کنیم $n \geq ۹$ به طوری که $n$ و $n - ۱$ هیچکدام اول نباشند و به بررسی قطر گراف توانی محض گروه متقارن $\mathcal{P}^*(S_n)$ می پردازیم. در بخش اول به بیان مقدماتی که در بخش های بعدی مورد نیاز هستند، می پردازیم. در بخش دوم برخی از مسیرهای کوتاه در گراف توانی محض گروه متقارن را مشخص می کنیم و در بخش سوم با استفاده از این مسیرها کران های قطر گراف توانی محض گروه متقارن را تعیین می کنیم و نشان می دهیم که

$$diam(\mathcal{P}^*(S_۹)) = diam(\mathcal{P}^*(S_{۱۰})) = ۱۴, \ diam(\mathcal{P}^*(S_{۱۵})) = ۱۲$$

و به ازای $n \geq ۱۶$، $۶ \leq diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq ۱۰$.

## ۱.۲ مقدمات

**لم ۱.۱.۲.** ([۱۲]، لم ۲.۱) فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی باشد و $x, y \in G\backslash\{1\}$ به طوری که $xy = yx$ و $gcd(o(x), o(y)) = 1$. در این صورت $x \sim xy \sim y$. به عبارت دیگر، $d(x, y) = 2$.

*برهان.* چون $x \in \langle xy \rangle$ و $y \in \langle xy \rangle$ بنابراین حکم برقرار است. □

**لم ۲.۱.۲.** فرض کنیم $\alpha \in S_n$ و $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ تجزیه $\alpha$ به $p$ــدورهای جدا از هم باشد. اگر وجود داشته باشد عدد اول $q$ به طوری که $q \leq r$ و $gcd(q, p) = 1$ آنگاه به ازای دورهای دلخواه $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_{q-1}}$ و $\alpha_{j_q}$، $pq$ــدور $\tau$ وجود دارد که $S(\tau) = S(\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{j_q})$، $\tau^q = \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{j_q}$ و فاصله $\tau^p$ تا جایگشت $\alpha$ برابر دو است.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha_{j_1} = (i_{11}, i_{12}, \cdots, i_{1p})$، $\cdots$، $\alpha_{j_q} = (i_{q1}, i_{q2}, \cdots, i_{qp})$ و قرار می دهیم $\tau = (i_{11}, i_{21}, \cdots, i_{q1}, i_{12}, i_{22}, \cdots, i_{q2}, \cdots, i_{1p}, i_{2p}, \cdots, i_{qp})$. چون $gcd(q, p) = 1$ پس وجود دارد عدد طبیعی $l$ به طوری که ${\alpha_j}^{lq} = \alpha_j$ در این صورت $\tau^p \sim \tau{\alpha_{j_{q+1}}}^l \cdots {\alpha_r}^l \sim \alpha$.

□

**نتیجه ۱.۱.۲.** فرض کنیم $\alpha \in S_n$ و $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ تجزیه $\alpha$ به $p$ــدورهای جدا از هم باشد. اگر وجود داشته باشد عدد اول $q$ به طوری که $q \leq r$ و $gcd(q, p) = 1$، آنگاه $q$ــدور $\sigma$ وجود دارد که فاصله آن تا جایگشت $\alpha$ برابر دو است.

**لم ۳.۱.۲.** فرض کنیم $\alpha \in S_n$ یک $m$ــدور باشد. اگر وجود داشته باشد عدد اول $p$ به طوری که $p \leq f_\alpha$ و $gcd(p, m) = 1$، آنگاه یک $p$ــدور با فاصله دو از $\alpha$ وجود دارد.

*برهان.* به ازای عنصرهای متمایز $i_1, \cdots, i_p \in F(\alpha)$، $p$ــدور $\gamma = (i_1, \cdots, i_p)$ را در نظر می گیریم. چون $S(\alpha) \cap S(\gamma) = \emptyset$، پس $\alpha$ و $\gamma$ با هم جابه جا می شوند. درنتیجه بنا به لم ۱.۱.۲، $\alpha \sim \alpha\gamma \sim \gamma$.

□

**لم ۴.۱.۲.** ([۱۲]) در $\mathcal{P}^*(S_n)$ به ازای $n \geq 7$، یک مسیر به طول حداکثر ۴ بین هر دو ترانهش وجود دارد.

*برهان.* فرض می کنیم $(u, v)$ و $(u', v')$ دو ترانهش در $S_n$ باشند. در این صورت به ازای عنصرهای متمایز $v_1, v_2, v_3 \in F((u, v)) \cap F((u', v'))$، ۳ــدور $\gamma = (v_1, v_2, v_3)$ وجود دارد. بنابراین

$$(u, v) \sim (u, v)\gamma \sim \gamma \sim (u', v')\gamma \sim (u', v').$$

□

**قضیه ۱.۱.۲.** ( [۱۲]) فرض کنیم $n \geq ۹$ به طوری که $n$ و $n-۱$ هیچکدام اول نباشند، آنگاه $\mathcal{P}^*(S_n)$ همبند است.

*برهان.* فرض می کنیم $\pi$ یک عضو از مرتبه اول $p$ باشد و $\pi = \pi_۱ \cdots \pi_k$ تجزیه $\pi$ به $p$ــ دورهای جدا از هم باشد. نشان می دهیم که بین هر $p$ــ دور با یک ترانهش یک مسیر وجود دارد، آنگاه بنا به لم ۴.۱.۲، حکم نتیجه می شود. دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

(۱) فرض می کنیم $p = ۲$. اگر $k = ۱$ آنگاه نتیجه واضح است. اگر $k = ۲,۳$ آنگاه $f_\pi \geq ۳$ پس بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ــ دور $\gamma$ وجود دارد. در این صورت $\pi \sim \pi\gamma \sim \gamma \sim \gamma\pi_۱ \sim \pi_۱$. اگر $k \geq ۴$ آنگاه بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۶ وجود دارد که $\pi \sim \tau\pi_{i_۴} \cdots \pi_k \sim \tau^۲$. چون $f_{\tau^۲} \geq ۲$، پس بنا به لم ۳.۱.۲، ۲ــ دور $(u,v)$ وجود دارد که فاصله آن از $\tau^۲$ برابر دو است. درنتیجه، یک مسیر همبندی بین $\pi$ و $(u,v)$ وجود دارد.

(۲) حال فرض می کنیم $p$ یک عدد فرد باشد. اگر $k = ۱$ آنگاه چون $n \geq p + ۲$ بنا به لم ۳.۱.۲، ترانهش $(u,v)$ وجود دارد که $\pi \sim \pi(u,v) \sim (u,v)$. اگر $k \geq ۲$ آنگاه بنا به لم ۲.۱.۲، جایگشت $\tau$ از مرتبه ۲ وجود دارد که فاصله آن از $\pi$ دو می باشد.

□

## ۲.۲ مسیرهای کوتاه در گراف توانی محض گروه متقارن

بدیهی است که با یک توان مناسب، هر جایگشت در $\mathcal{P}^*(S_n)$ با یک جایگشت از مرتبه اول مجاور است. بنابراین ما با یافتن مسیرهای کوتاه بین عنصرهای از مرتبه اول در گروه متقارن کار خود را شروع می کنیم. با توجه به لم ۱.۱.۲، فاصله دو جایگشت جدا از هم که مرتبه ی آنها نسبت به هم اول است برابر دو است. بخصوص فاصله یک جایگشت از مرتبه فرد با هر ترانهش از هم جدا با آن دو می باشد. ابتدا کار خود را با محاسبه فاصله بین جایگشت های از مرتبه دو شروع می کنیم. سپس، برای ایجاد همبندی بین عنصرهای گراف توانی گروه متقارن، کار خود را با جایگشت های از مرتبه فرد و با جایگشت های از مرتبه فرد که حداقل دو عنصر را ثابت نگه می دارند ادامه می دهیم.

**لم ۱.۲.۲.** اگر $\alpha, \beta \in S_n$ هر دو از مرتبه ۲ باشند، آنگاه $d(\alpha,\beta) \leq ۸$. علاوه براین، فرض کنیم $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_t$:

(۱) اگر $\alpha$ و $\beta$ حداقل سه عنصر را ثابت نگه دارند، آنگاه $d(\alpha,\beta) \leq ۴$.

(۲) اگر $\beta$ عناصر سه جفت $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$ و $\alpha_{i_۳}$ را ثابت نگه دارد، آنگاه $d(\alpha,\beta) \leq ۴$.

(۳) اگر $n \geq ۲۵$ ، آنگاه $d(\alpha,\beta) \leq ۶$.

*برهان.* فرض می کنیم $\beta = \beta_۱\dots\beta_{t'}$. اگر $f_\alpha \geq ۳$، آنگاه بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma'$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ دو است. اگر $f_\beta \geq ۳$، آنگاه بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ دو است. فرض می کنیم $u,v \in F(\gamma)\cap F(\gamma')$، در این صورت بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $(u,v)$ و $\gamma$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $(u,v)$ از $\gamma'$، ۲ است. پس $d(\alpha,\beta)\leq ۸$.
اگر $f_\alpha \leq ۲$ و $f_\beta \geq ۳$ ، آنگاه $t \geq [(n-۲)/۲]$ و بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است.

زمانی که $n \geq ۱۰$، دورهای $\alpha_{i_۱},\alpha_{i_۲}$ و $\alpha_{i_۳}$ وجود دارند که $|S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})\cap S(\gamma)| \geq ۱$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\tau)=S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})$، $\alpha\sim\tau\alpha_{i_۴}\cdots\alpha_{i_t}\sim\tau^۲$ و $|S(\tau)\cup S(\gamma)|\leq ۸$. در این صورت به ازای عنصرهای متمایز $u,v\in F(\tau)\cap F(\gamma)$ ترانهش $(u,v)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $(u,v)$ و $\gamma$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $(u,v)$ و $\tau^۲$ برابر دو است. پس $d(\alpha,\beta)\leq ۸$.

زمانی که $n = ۹$، دورهای $\alpha_{i_۱}$ و $\alpha_{i_۲}$ وجود دارند که $|S(\gamma)\cap S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲})| \geq ۲$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\tau)=S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})$ و $\alpha\sim\tau\alpha_{i_۴}\sim\tau^۲$. چون $|S(\tau)\cup S(\gamma)|\leq ۷$، به ازای عنصرهای متمایز $u,v\in F(\tau)\cap F(\gamma)$ ترانهش $(u,v)$ وجود دارد که بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $(u,v)$ و $\tau^۲$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $(u,v)$ و $\gamma$ برابر دو است. پس $d(\alpha,\beta)\leq ۸$. اگر $f_\alpha\leq ۲$ و $f_\beta\leq ۲$، آنگاه $t\geq[(n-۲)/۲]$ و $t'\geq[(n-۲)/۲]$.

زمانی که $n\geq ۱۵$، دورهای $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$، $\alpha_{i_۳}$، $\beta_{j_۱}$، و $\beta_{j_۲}$ وجود دارند که $S(\beta_{j_۱})\subset S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲})$ و $S(\beta_{j_۲})\subset S(\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\tau)=S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})$ و $\alpha\sim\tau\alpha_{i_۴}\cdots\alpha_{i_t}\sim\tau^۲$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\sigma)=S(\beta_{j_۱}\beta_{j_۲}\beta_{j_۳})$ و $\beta\sim\sigma\beta_{j_۴}\cdots\beta_{j_{t'}}\sim\sigma^۲$. بنابراین $|S(\tau)\cap S(\sigma)|>۳$. چون $n\geq ۱۵$، پس $|F(\tau)\cap F(\sigma)|\geq ۲$. به ازای عنصرهای متمایز $u,v\in F(\tau)\cap F(\gamma)$ ترانهش $(u,v)$ وجود دارد که بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $(u,v)$ و $\tau^۲$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $(u,v)$ و $\sigma^۲$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۸$. حال فرض می کنیم $n<۱۵$ و $t,t'\geq ۴$. زمانی که $n=۹$، دورهای $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$، $\alpha_{i_۳}$، $\beta_{j_۱}$، $\beta_{j_۲}$ و $\beta_{j_۳}$ وجود دارند که $|S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})\cap S(\beta_{j_۱}\beta_{j_۲}\beta_{j_۳})|\geq ۵$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\tau)=S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})$ و $d(\alpha,\tau^۲)=۲$. به همین ترتیب، دور $\sigma$ با طول ۶ وجود دارد که $S(\sigma)=S(\beta_{j_۱}\beta_{j_۲}\beta_{j_۳})$ و $d(\beta,\sigma^۲)=۲$.

چون $|F(\tau)\cap F(\sigma)|\geq ۲$، لذا به ازای عنصرهای متمایز $u,v\in F(\tau)\cap F(\sigma)$ ترانهش $(u,v)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $(u,v)$ و $\tau^۲$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $(u,v)$ و $\sigma^۲$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۸$. زمانی که $n=۱۰$، دورهای $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$، $\alpha_{i_۳}$، $\beta_{j_۱}$، $\beta_{j_۲}$ و $\beta_{j_۳}$ وجود دارند که $S(\beta_{j_۱})\subset S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲})$، $S(\beta_{j_۱})\subset S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲})$ و $S(\beta_{j_۳})\cap S(\alpha_{i_۳})\neq\emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\tau)=S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})$ و $d(\alpha,\tau^۲)=۲$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\sigma)=S(\beta_{j_۱}\beta_{j_۲}\beta_{j_۳})$ و $d(\beta,\sigma^۲)=۲$. بنابراین $|S(\tau)\cap S(\sigma)|\geq ۴$. چون $|F(\tau)\cap F(\sigma)|\geq ۲$، به ازای عنصرهای متمایز $u,v\in F(\tau)\cap F(\sigma)$ ترانهش $(u,v)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $(u,v)$ و $\sigma^۲$ برابر دو است. به همین ترتیب،

فاصله $(u,v)$ و $\tau^{۲}$ برابر دو است. پس $d(\alpha,\beta)\leq ۸$.

(۱) چون $|F(\alpha)\cap F(\beta)|\geq ۳$، پس به ازای عنصرهای متمایز $u_۱,u_۲,u_۳\in F(\alpha)\cap F(\beta)$، ۳ـ دور $\gamma=(u_۱,u_۲,u_۳)$ را در نظر می گیریم. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\gamma$ و $\beta$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\gamma$ و $\alpha$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۴$.

(۲) فرض می کنیم دورهای $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$ و $\alpha_{i_۳}$ وجود دارند که $S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})\cap S(\beta)=\emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\tau)=S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})$ و $d(\alpha,\tau^{۲})=۲$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\beta$ و $\tau^{۲}$ برابر دو است. پس $d(\alpha,\beta)\leq ۴$.

(۳) اگر $|F(\alpha)\cap F(\beta)|\geq ۳$، آنگاه بنا به (۱)، $d(\alpha,\beta)\leq ۴$. لذا فرض می کنیم $|F(\alpha)\cap F(\beta)|<۳$. اگر $f_\beta\geq ۳$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـ دور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. برای $t<۸$، $f_\alpha\geq ۲۵-۱۴=۱۱$. در نتیجه به ازای $y_۱,\cdots,y_۵\in F(\alpha)\cap F(\gamma)$، ۵ـ دور $\delta=(y_۱,\cdots,y_۵)$ وجود دارد بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\gamma$ و $\delta$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\delta$ و $\alpha$ برابر دو است. پس $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

برای $t\geq ۸$، دورهای $\alpha_{i_۱},\cdots,\alpha_{i_۴}$ و $\alpha_{i_۵}$ وجود دارند که $(\cup_{k=i_۱}^{i_۵}S(\alpha_k))\cap S(\gamma)=\emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۱۰ وجود دارد که $S(\tau)=S(\alpha_{i_۱}\cdots\alpha_{i_۵})$ و $d(\alpha,\tau^{۲})=۲$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\tau^{۲}$ و $\gamma$ برابر دو است. پس $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

$\square$

**لم ۲.۲.۲.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ دو عنصر دلخواه از $S_n$ به ترتیب از مرتبه اول $p$ و ۲ باشند که $p$ فرد است. در این صورت می توان کران $d(\alpha,\beta)$ را به صورت جدول زیر مشخص کرد.

جدول ۱.۲: جدول تعیین فاصله بین جایگشت با مرتبه فرد با جایگشت با مرتبه زوج

| حالت | $f_\alpha$ | $f_\beta$ | $p$ | $n$ | $d(\alpha,\beta)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱.۱ | $\geq$ ۲ | | | $\geq$ ۹ | $\leq$ ۱۰ |
| ۲.۱ | $\geq$ ۲ | $\geq$ ۳ | | $>$ ۹ | $\leq$ ۸ |
| ۳.۱ | $\geq$ ۲ | $<$ ۳ | | $\geq$ ۱۵ | $\leq$ ۶ |
| ۱.۲ | $<$ ۲ | $\geq$ ۳ | | $\geq$ ۹ | $\leq$ ۱۰ |
| ۲.۲ | $<$ ۲ | $\geq$ ۳ | ۳ | $\geq$ ۱۵ | $\leq$ ۸ |
| ۳.۲ | $<$ ۲ | $\geq$ ۳ | $\neq$ ۳ | $\geq$ ۱۶ | $\leq$ ۸ |
| ۴.۲ | $<$ ۲ | $<$ ۳ | | $\geq$ ۹ | $\leq$ ۱۰ |
| ۵.۲ | $<$ ۲ | $<$ ۳ | $\neq$ ۳ | $\geq$ ۱۶ | $\leq$ ۸ |
| ۳ | $<$ ۲ | $<$ ۳ | ۳ | $\geq$ ۱۵ | $\leq$ ۸ |

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_m$ و $\beta = \beta_1 \cdots \beta_{m'}$.

(۱) فرض می کنیم $f_\alpha \geq 2$، بنا به لم ۳.۱.۲، ترانهش $(u,v)$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است.

(۱.۱) بنا به لم ۱.۲.۲، $d((u,v),\beta) \leq 8$، پس $d(\alpha,\beta) \leq 10$.

(۲.۱) چون $f_\beta \geq 3$، ۳ــدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. زمانی که $n > 9$، ۵ــدور $\delta$ وجود دارد که $S(\delta) \subseteq F(\gamma) \cap F((u,v))$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta$ و $\gamma$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\delta$ از و $(u,v)$ برابر دو است. بدین ترتیب $d(\alpha,\beta) \leq 8$.

(۳.۱) چون $f_\beta < 3$ و $n \geq 15$، پس $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}$ و $\beta_{j_3}$ وجود دارند که $S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3}) \cap \{u,v\} = \emptyset$. بنا به لم ۱.۲.۲(۲)، $d((u,v),\beta) \leq 4$. بنابراین $d(\alpha,\beta) \leq 6$.

(۲) بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\delta$ به طول $2p$ وجود دارد که $d(\alpha,\delta^p) = 2$.

(۲.۱) بنا به لم ۱.۲.۲، $d(\delta^p,\beta) \leq 8$، بنابراین $d(\alpha,\beta) \leq 10$.

(۲.۲) چون $f_\beta \geq 3$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ــدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. چون $|S(\delta) \cup S(\gamma)| \leq 9$، پس $|F(\delta) \cap F(\gamma)| \geq 5$. بنابراین ۵ــدور $\lambda$ وجود دارد که $S(\lambda) \subseteq F(\delta) \cap F(\gamma)$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\lambda$ و $\gamma$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\lambda$ از و $\delta^3$ برابر دو است. پس $d(\alpha,\beta) \leq 8$.

(۳.۲) ابتدا فرض می کنیم $n \geq ۲۵$ یا $m = ۲$. چنانچه $n \geq ۲۵$، بنا به لم ۱.۲.۲(۳)، $d(\delta^p, \beta) \leq ۶$. پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

فرض می کنیم $n = ۲۲$ و $p = ۱۱$. چون $f_\beta \geq ۳$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. چون $p > ۷$، پس $\delta_{i_1}$، $\cdots$، $\delta_{i_4}$ و $\delta_{i_5}$ وجود دارند که $S(\gamma) \cap S(\delta_{i_1}, \cdots, \delta_{i_5}) = \emptyset$. لذا ۵ـدور $\tau$ وجود دارد که $S(\delta_{i_1}, \cdots, \delta_{i_5}) = S(\tau)$ و $d(\delta^p, \tau) = ۲$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\tau$ و $\gamma$ برابر دو است. پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

حال فرض می کنیم $n < ۲۵$ و $m \geq ۳$. چون $f_\beta \geq ۳$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. چون $f_\alpha < ۲$، پس $\alpha_{i_1}$ و $\alpha_{i_2}$ وجود دارند که $|S(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}) \cap S(\gamma)| \geq ۲$. همچنین، بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\delta$ از طول $۲p$ وجود دارد که $d(\alpha, \delta^p) = ۲$ و $S(\delta) = S(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2})$. چون $|S(\delta) \cup S(\gamma)| \leq ۲p + ۱$، پس $|F(\delta) \cap F(\gamma)| \geq ۵$. بنابراین ۵ـدور $\lambda$ وجود دارد که $S(\lambda) \subseteq F(\delta) \cap F(\gamma)$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\lambda$ از $\gamma$ و $\delta^p$ برابر دو است. پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

(۴.۲) بنا به لم ۱.۲.۲، $d(\delta^p, \beta) \leq ۸$، پس $d(\alpha, \beta) \leq ۱۰$.

(۵.۲) ابتدا فرض می کنیم $n \geq ۲۵$ یا $m = ۲$. برای $n \geq ۲۵$، بنا به لم ۱.۲.۲، $d(\delta^p, \beta) \leq ۶$. پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$. فرض می کنیم $n = ۲۲$ و $p = ۱۱$. چون $f_\beta < ۳$ پس $m' \geq ۱۰$. در نتیجه $\beta_{j_1}$، $\beta_{j_2}$، $\beta_{j_3}$، $\delta_{j_1}$، $\cdots$، $\delta_{j_4}$ و $\delta_{j_5}$ وجود دارند که $(\cup_{k=i_1}^{i_3} S(\beta_k)) \cap (\cup_{k'=j_1}^{j_5} S(\delta_{k'})) = \emptyset$.

حال بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ با طول ۶ وجود دارد که $d(\beta, \tau^2) = ۲$ و $S(\tau) = S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3})$. به همین ترتیب، دور $\sigma$ با طول ۱۰ وجود دارد که $d(\delta^p, \sigma^2) = ۲$ و $\sigma^5 = \delta_{j_1} \cdots \delta_{j_5}$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\sigma^2$ و $\tau^2$ برابر دو است. پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

حال فرض می کنیم $n < ۲۵$ و $m \geq ۳$. در این صورت $\beta_{j_1}$، $\beta_{j_2}$، $\beta_{j_3}$، $\alpha_{i_1}$ و $\alpha_{i'}$ وجود دارند که $|F(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3}) \cap F(\alpha_i\alpha_{i'})| \geq ۵$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\delta$ به طول $۲p$ وجود دارد که $d(\alpha, \delta^p) = ۲$ و $S(\delta) = S(\alpha_i\alpha_{i'})$ به همین ترتیب، دور $\lambda$ با طول ۶ وجود دارد که $d(\beta, \lambda^2) = ۲$ و $S(\lambda) = S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3})$. چون $|F(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3}) \cap F(\alpha_i\alpha_{i'})| \geq ۵$، ۵ـدور $\gamma$ وجود دارد که $S(\gamma) \subseteq F(\delta) \cap F(\lambda)$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\gamma$ و $\lambda^2$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\gamma$ و $\delta^p$ برابر دو است. پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

(۳) چون $f_\alpha < ۲$ و $f_\beta < ۳$ پس $\beta_{j_1}$، $\beta_{j_2}$، $\beta_{j_3}$، $\alpha_{i_1}$ و $\alpha_{i_2}$ وجود دارند به طوری که $S(\alpha_{i_1}) \cap S(\beta_{j_1}) \neq \emptyset$، $S(\beta_{j_2}) \subset S(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2})$ و $S(\alpha_{i_2}) \cap S(\beta_{j_3}) \neq \emptyset$. بنابراین $|S(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}) \cap S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3})| \geq ۴$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\delta$ به طول ۶ وجود دارد که $d(\alpha, \delta^3) = ۲$ و $S(\delta) = S(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2})$. به همین ترتیب، دور $\lambda$ از طول ۶ وجود دارد که $d(\beta, \lambda^2) = ۲$ و $S(\lambda) = S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3})$. چون $|S(\delta) \cup S(\lambda)| \leq ۸$ پس $|F(\delta) \cap F(\lambda)| \geq ۵$.

بنابراین ۵ـ دور $\gamma$ وجود دارد که $S(\gamma) \subseteq F(\delta) \cap F(\lambda)$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\gamma$ و $\lambda^{۲}$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\gamma$ و $\delta^{۳}$ برابر دو است. پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

□

**لم ۳.۲.۲.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ دو جایگشت دلخواه از $S_n$ به ترتیب از مرتبه اول فرد $p$ و $q$ باشند. در این صورت می توان کران $d(\alpha, \beta)$ را به صورت جدول زیر مشخص کرد.

جدول ۲.۲: جدول تعیین فاصله بین دو جایگشت با مرتبه فرد

| حالت | $f_\alpha$ | $f_\beta$ | $p$ | $q$ | $n$ | $d(\alpha, \beta)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | $\geq ۲$ | $\geq ۲$ | | | $\geq ۹$ | $\leq ۸$ |
| ۱.۱ | $\geq ۲$ | $< ۲$ | | | $\geq ۹$ | $\leq ۱۲$ |
| ۲.۱ | $\geq ۲$ | $< ۲$ | | ۳ | $\geq ۱۵$ | $\leq ۸$ |
| ۳.۲ | $\geq ۲$ | $< ۲$ | | $\geq ۵$ | $\geq ۹$ | $\leq ۸$ |
| ۱.۲ | $< ۲$ | $< ۲$ | | | $\geq ۹$ | $\leq ۱۲$ |
| ۲.۲ | $< ۲$ | $< ۲$ | ۳ | ۳ | $\geq ۱۵$ | $\leq ۸$ |
| ۳.۲ | $< ۲$ | $< ۲$ | $\geq \frac{n-۱}{۲}$ | $\geq \frac{n-۱}{۴}$ | $\geq ۲۵$ | $\leq ۱۰$ |
| ۴.۲ | $< ۲$ | $< ۲$ | | | $\geq ۱۶$ | $\leq ۸$ |

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_m$ و $\beta = \beta_۱ \cdots \beta_{m'}$.

(۱) چون $f_\alpha \geq ۲$ بنا به لم ۳.۱.۲، ترانهش $(u, v)$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است.

(۱.۱) چون $f_\beta \geq ۲$، بنا به لم ۳.۱.۲، ترانهش $(u', v')$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. بنا به لم ۱.۲.۲، $d((u', v'), (u, v)) \leq ۴$. پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

(۲.۱) چون $f_\beta < ۲$ پس $m' > ۴$، بنابراین $\beta_{i_۱}$ و $\beta_{i_۲}$ وجود دارند به طوری که $\{u, v\} \cap S(\beta_{i_۱}\beta_{i_۲}) = \emptyset$ و بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۶ وجود دارد که $d(\beta, \tau^{۳}) = ۲$ و $S(\tau) = S(\beta_{i_۱}\beta_{i_۲})$. بنا به لم ۱.۲.۲(۱)، $d((u, v), \tau^{۳}) \leq ۴$. پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

(۳.۱) بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول $۲q$ وجود دارد که $d(\beta, \tau^q) = ۲$ و $\tau^q = \tau_۱ \cdots \tau_q$. چون $q \geq ۵$ پس $\tau_{j_۱}$، $\tau_{j_۲}$ و $\tau_{j_۳}$ وجود دارند که $(\cup_{t=j_۱}^{j_۳} S(\tau_t)) \cap \{u, v\} = \emptyset$. بنا به لم ۱.۲.۲(۲)، $d((u, v), \tau^q) \leq ۴$. پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

(۲) بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\delta$ به طول $۲p$ وجود دارد که $d(\alpha, \delta^p) = ۲$.

(۱.۲) بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\gamma$ به طول $2q$ وجود دارد که $d(\beta,\gamma^q)=2$. بنا به لم ۱.۲.۲، $d(\delta^p,\gamma^q)\leq 8$. پس $d(\alpha,\beta)\leq 12$.

(۲.۲) بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\lambda$ به طول ۶ وجود دارد که $d(\beta,\lambda^3)=2$. چون $|S(\delta)\cup S(\lambda)|\leq 12$، ۳ــدور $\gamma$ وجود دارد که $S(\gamma)\subseteq F(\delta)\cap F(\lambda)$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\gamma$ و $\lambda^3$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\gamma$ و $\delta^3$ برابر دو است. پس $d(\alpha,\beta)\leq 8$.

(۳.۲) چون $m'\geq 2$، بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\lambda$ به طول $2q$ وجود دارد که $d(\beta,\lambda^q)=2$. بنا به لم ۱.۲.۲(۳)، $d(\lambda^q,\delta^p)\leq 6$. پس $d(\alpha,\beta)\leq 10$.

(۴.۲) ابتدا فرض می کنیم $n\geq 21$. چون $f_\alpha<2$ و $f_\beta<2$ پس $m\geq 2$ و $m'\geq 2$. زمانی که $m\geq 3$ و $m'\geq 3$، فرض می کنیم $\alpha'=\alpha_3\cdots\alpha_m$، $\gamma_1=\beta_3\beta_4\cdots\beta_{m'}$، $\gamma_2=\beta_2\beta_4\cdots\beta_{m'}$ و $\gamma_3=\beta_1\beta_4\cdots\beta_{m'}$. چون $|(S(\alpha')\cap S(\gamma_1))\cup(S(\alpha')\cap S(\gamma_2))\cup(S(\alpha')\cap S(\gamma_3))|\geq 7$ پس $\gamma_j$ای وجود دارد که $|S(\alpha')\cap S(\gamma_j)|\geq 3$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول $2p$ وجود دارد که $d(\alpha,\tau^p)=2$ و $S(\tau)=S(\alpha_1\alpha_2)$. به همین ترتیب، دور $\sigma$ به طول $2q$ وجود دارد که $d(\beta,\sigma^q)=2$ و $S(\sigma)=S(\beta)-S(\gamma_j)$. چون $|F(\tau)\cap F(\sigma)|\geq 3$ بنا به لم ۱.۲.۲(۱)، $d(\tau^p,\sigma^q)\leq 4$. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq 8$.

حال فرض می کنیم $m=2$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\delta$ به طول $2p$ وجود دارد که $d(\alpha,\delta^p)=2$، $\delta^p=\delta_1\cdots\delta_p$ و $S(\delta)=S(\alpha)$. اگر $m'\geq 6$ آنگاه $\delta_{i_1}$، $\delta_{i_2}$، $\delta_{i_3}$، $\beta_{j_1}$ و $\beta_{j_2}$ وجود دارند که $S(\delta_{i_1}\delta_{i_2}\delta_{i_3})\cap S(\beta_{j_1}\beta_{j_2})=\emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول $2q$ وجود دارد که $d(\beta,\sigma^q)=2$ و $S(\sigma)=S(\beta_{j_1}\beta_{j_2})$. چون $S(\delta_{i_1}\delta_{i_2}\delta_{i_3})\cap S(\sigma)=\emptyset$ بنا به لم ۱.۲.۲(۲)، $d(\delta^p,\sigma^q)\leq 4$. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq 8$.

اگر $m'=5$ چون $|\{\beta_i\beta_j|\ i\neq j\}|=10$ و $p>10$ پس $\delta_{i_1}$، $\delta_{i_2}$، $\beta_{j_1}$ و $\beta_{j_2}$ وجود دارند که $S(\delta_{i_1}\delta_{i_2})\subset S(\beta_{j_1}\beta_{j_2})$. همچنین، $\delta_{i_3}$ و $\beta_{j_3}$ وجود دارند که $S(\delta_{i_3})\subset S(\beta_{j_2}\beta_{j_3})$ پس $S(\delta_{i_1}\delta_{i_2}\delta_{i_3})\subset S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3})$. در نتیجه، بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول $2q$ وجود دارد که $d(\beta,\sigma^q)=2$ و $S(\sigma)=S(\beta_{j_5}\beta_{j_6})$. چون $S(\delta_{i_1}\delta_{i_2}\delta_{i_3})\cap S(\sigma)=\emptyset$ بنا به لم ۱.۲.۲(۲)، $d(\delta^p,\sigma^q)\leq 4$. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq 8$.

فرض می کنیم $n=16$ و $p=5$. اگر $q=3$ آنگاه $\beta_{j_1}$، $\beta_{j_2}$، $\alpha_{i_1}$ و $\alpha_{i_2}$ وجود دارند که $S(\alpha_{i_1})\cap S(\beta_{j_1})\neq\emptyset$ و $|S(\alpha_{i_2})\cap S(\beta_{j_1}\beta_{j_2})|\geq 2$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\delta$ به طول ۱۰ وجود دارد که $S(\delta)=S(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2})$ و $d(\alpha,\delta^5)=2$. به همین ترتیب، دور $\lambda$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\lambda)=S(\beta_{j_1}\beta_{j_2})$ و $d(\beta,\lambda^3)=2$. چون $|S(\delta)\cup S(\lambda)|\geq 13$، $|F(\delta)\cap F(\lambda)|\geq 3$. حال بنا به لم ۱.۲.۲(۱)، $d(\delta^5,\lambda^3)\leq 4$. پس $d(\alpha,\beta)\leq 8$.

اگر $q=5$ آنگاه $\alpha_i$ و $\beta_j$ وجود دارند که $|(F(\alpha)\cup S(\alpha_i))\cap(F(\beta)\cup S(\beta_j))|\geq 3$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\delta$ به طول ۱۰ وجود دارد که $d(\alpha,\delta^5)=2$ و $S(\delta)=S(\alpha)-S(\alpha_i)$. به

همین ترتیب، دور $\lambda$ به طول ۱۰ وجود دارد که $d(\beta,\lambda^{5}) = 2$ و $S(\lambda) = S(\beta) - S(\beta_j)$.
چون $|F(\delta) \cap F(\lambda)| \geq 3$ بنا به لم ۱.۲.۲(۱) ، $d(\delta^{5},\lambda^{5}) \leq 4$. پس $d(\alpha,\beta) \leq 8$.

□

**نتیجه ۱.۲.۲.** فرض کنیم $\alpha,\beta \in S_n$ حاصل ضرب حداقل دو دور جدا از هم با طول های متفاوت باشند. در این صورت به ازای $n \geq 15$، $d(\alpha,\beta) \leq 10$ و به ازای $9 \leq n < 15$، $d(\alpha,\beta) \leq 12$.

*برهان.* به ازای یک عدد صحیح مثبت مانند $z$، $\alpha^z$ حاصلضرب $p$ـدورهاست و $f_{\alpha^z} \geq 2$، جایی که $p$ یک عدد اول است. به همین ترتیب، به ازای یک عدد صحیح مثبت مانند $z'$، $\beta^{z'}$ حاصلضرب $q$ـدورهاست و $f_{\beta^{z'}} \geq 2$، جایی که $q$ یک عدد اول است. در صورتی که $o(\beta^{z'})$ و $o(\alpha^z)$ هر دو زوج باشند، بنا به لم ۱.۲.۲، $d(\alpha^z,\beta^{z'}) \leq 8$. درصورتی که $o(\beta^{z'})$ و $o(\alpha^z)$ هر دو فرد باشند، بنا به حالت (۱) از جدول ۲.۲، $d(\alpha^z,\beta^{z'}) \leq 8$. فرض کنیم $o(\alpha^z)$ فرد و $o(\beta^{z'})$ زوج باشد. در این صورت به ازای $n \geq 15$ بنا به حالت های (۲.۱) و (۳.۱) از جدول ۱.۲، $d(\alpha^z,\beta^{z'}) \leq 8$. همچنین به ازای $9 \leq n < 15$، بنا به حالت (۱.۱) از جدول ۱.۲، $d(\alpha^z,\beta^{z'}) \leq 10$. در نتیجه به ازای $n \geq 15$، $d(\alpha,\beta) \leq 10$ و به ازای $9 \leq n < 15$، $d(\alpha,\beta) \leq 12$. □

## ۳.۲ کران های قطر گراف توانی محض گروه های متقارن

در این بخش کران های قطر گراف توانی محض گروه های متقارن را مشخص می کنیم.

**نتیجه ۱.۳.۲.** (۱) به ازای $n = 9,10$، $diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq 14$.

(۲) $diam(\mathcal{P}^*(S_{15})) \leq 12$.

*برهان.* . فرض می کنیم $\alpha$ و $\beta$ دو عنصر دلخواه از $S_n$ باشند. اگر $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ هر دو اول باشند، در این صورت بنا به لم های ۱.۲.۲، ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، $d(\alpha,\beta) \leq 12$. فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ هر دو حاصل ضرب حداقل دو دور جدا از هم با طول های متفاوت باشند. در این صورت بنا به نتیجه ۱.۲.۲ به ازای $9 \leq n < 15$، $d(\alpha,\beta) \leq 12$ و به ازای $n = 15$، $d(\alpha,\beta) \leq 10$.
فرض می کنیم $o(\alpha)$ یک عدد اول باشد و $o(\beta)$ عددی اول نباشد. در این صورت $\beta \sim \beta^{o(\beta)/q}$، جایی که $q$ کوچکترین عامل اول $o(\beta)$ می باشد. بنا به لم های ۱.۲.۲، ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، به ازای $9 \leq n < 15$، $d(\alpha,\beta^{o(\beta)/q}) \leq 12$ و به ازای $n = 15$، $d(\alpha,\beta^{o(\beta)/q}) \leq 10$. پس به ازای $9 \leq n < 15$، $d(\alpha,\beta) \leq 13$ و به ازای $n = 15$، $d(\alpha,\beta) \leq 11$. فرض می کنیم $o(\alpha)$ و $o(\beta)$

اول نباشند. در این صورت $\alpha \sim \alpha^{o(\alpha)/p}$ و $\beta \sim \beta^{o(\beta)/q}$، جایی که $p$ و $q$ به ترتیب کوچکترین عامل های اول $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ می باشند. حال بنا به لم های ۱.۲.۲، ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، به ازای $۹ \leq n < ۱۵$، $d(\alpha^{o(\alpha)/p}, \beta^{o(\beta)/q}) \leq ۱۲$ و به ازای $n = ۱۵$، $d(\alpha^{o(\alpha)/p}, \beta^{o(\beta)/q}) \leq ۱۰$. پس به ازای $۹ \leq n < ۱۵$، $d(\alpha, \beta) \leq ۱۴$ و به ازای $n = ۱۵$، $d(\alpha, \beta) \leq ۱۲$. بنابراین برهان کامل است. □

برای مشخص کردن کران پایین قطر گراف توانی محض، ابتدا چند لم و قضیه را که لازم داریم بیان می کنیم.

**لم ۱.۳.۲.** فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی و $\mathcal{P}^*(G)$ همبند باشد. اگر $x$ و $y$ عنصرهایی از مرتبه اول باشند و $\langle x \rangle \neq \langle y \rangle$ آنگاه $d(x,y) = ۲t$ و وجود دارند عنصرهای $x_۰ = x, x_۱, \cdots, x_{۲t} = y$ که $o(x_{۲i})$ به ازای هر $i$ که $i \in \{۰, ۱, \cdots, t\}$، اول می باشد و به ازای هر $i$ که $i \in \{۰, ۱, \cdots, t-۱\}$، $o(x_{۲i+۱}) = o(x_{۲i})o(x_{۲i+۲})$ و برای هر $i \in \{۰, ۱, \cdots, ۲t-۱\}$، $x_i$ با $x_{i+۱}$ مجاور است، جایی که $t$ یک عدد صحیح مثبت است.

*برهان.* فرض می کنیم حکم درست نباشد و دو عنصر متمایز $x$ و $y$ از مرتبه اول که در شرایط لم صدق نکنند را طوری انتخاب می کنیم که $t = d(x,y) > ۰$ حداقل مقدار ممکن را دارا باشد. فرض می کنیم $x = x_۰ - x_۱ - \cdots - x_t = y$ کوتاهترین مسیر ممکن باشد. در نتیجه $\langle x_۰ \rangle \subseteq \langle x_۱ \rangle$، $\langle x_۲ \rangle \subseteq \langle x_۱ \rangle$ و $\langle x_۲ \rangle \subseteq \langle x_۳ \rangle$. در این صورت $\langle x_۲ \rangle$ یک عنصر مانند $b$ از مرتبه اول دارد به طوری که مرتبه $b$ با $o(x_۰)$ متمایز است. اما $x = x_۰ - bx_۰ - b - x_۳ - \cdots - x_t = y$ یک مسیر می باشد. حال $d(b,y) = t-۲$ در صورتی که $b$ و $y$ در شرایط لم صدق نمی کنند، که تناقض است. □

**قضیه ۱.۳.۲.** (قضیه چبیشف ([۱۱]، ص ~۱۲۴)) به ازای $n \in \mathbb{N} \backslash \{۱\}$ حداقل یک عدد اول $p$ بین $n$ و $۲n$ وجود دارد.

**لم ۲.۳.۲.** ([۱۹]، قضیه ۲.) فرض کنیم $\alpha \in S_n$ و $\alpha = \alpha_۱ \ldots \alpha_m$ تجزیه $\alpha$ به $t$ـ دورهای جدا از هم باشد.

در این صورت به ازای هر $i$ که $۱ \leq i \leq m$، $\langle \alpha_i \rangle \cong \mathbb{Z}_t$ و $C_{S_{mt}}(\alpha) \cong (\mathbb{Z}_t)^m \rtimes S_m$.

**لم ۳.۳.۲.** $diam(\mathcal{P}^*(S_۹)) = diam(\mathcal{P}^*(S_{۱۰})) = ۱۴$ و $diam(\mathcal{P}^*(S_{۱۵})) = ۱۲$.

*برهان.* **(حالت ۱) :** فرض می کنیم $n = ۹$ و $\alpha, \beta \in S_۹$. بنا به لم ۱.۳.۳، $d(\alpha, \beta) \leq ۱۴$.

**ادعا:** فرض می کنیم $\alpha = (۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹)$ و $\beta = (۱,۴,۷,۲,۵,۸,۳,۶,۹)$. در این صورت $d(\alpha, \beta) \geq ۱۴$.

**برهان ادعا:** چون $\langle \alpha \rangle$، $\langle \beta \rangle$ زیرگروههای دوری ماکسیمال هستند پس $\alpha$ و $\beta$ می بایست با عنصرهایی از مرتبه ۳ یا ۹ مجاور باشند. بنابراین $\alpha \sim \alpha^۳$ و $\beta \sim \beta^۳$. فرض می کنیم $\alpha^۳ = \alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳$ و $\beta^۳ = \beta_۱\beta_۲\beta_۳$. بنا به لم ۱.۳.۲، یک مسیر بین $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ وجود دارد به طوری

که عنصرهای داخلی مسیر از مرتبه یک عدد اول یا حاصل ضرب دو عدد اول هستند. بنا به لم ۲.۳.۲، $C_{S_9}(\alpha^3) \cong (\langle\alpha_1\rangle \times \langle\alpha_2\rangle \times \langle\alpha_3\rangle) \rtimes S_3$. در نتیجه تنها عنصرهای از مرتبه $3p$ که با این عنصر مجاور می باشند از مرتبه ۶ هستند که همگی دارای ساختار دوری مشابه هستند. به عنوان مثال $\tau\alpha_3^2$ از مرتبه ۶ است، در صورتی که $\alpha_1 = (i_1, i_2, i_3)$، $\alpha_2 = (j_1, j_2, j_3)$ و $\tau = (i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3)$. پس $d(\alpha, \tau^3) = 3$. به طور مشابه دور $\sigma$ با طول ۶ در $S_9$ وجود دارد که $d(\beta, \sigma^3) = 3$. چون به ازای هر $i, j$، $|S(\alpha_i) \cap S(\beta_j)| = 1$، پس $\tau^3 \neq \sigma^3$ و $|S(\tau) \cap S(\sigma)| = 4$. در نتیجه، $d(\tau^3, \sigma^3) \geq 4$.

فرض می کنیم $d(\tau^3, \sigma^3) = 4$. در این صورت بنا به لم ۱.۳.۲، یک مسیر بین $\tau^3$ و $\sigma^3$ وجود دارد به طوری که عنصرهای داخلی مسیر از مرتبه یک عدد اول یا حاصل ضرب دو عدد اول هستند. چون $o(\tau^3) = o(\sigma^3) = 2$ عنصرهای $\gamma, \lambda, \delta \in S_9$ وجود دارند که $\tau^3 \sim \gamma \sim \delta \sim \lambda \sim \sigma^3$، $o(\gamma) = o(\lambda) = 2q$ و $o(\delta) = q$، جایی که $q$ یک عدد اول است. چون $|S(\gamma)| < 9$ پس $q = 3$. $\gamma$ یک دور از مرتبه ۶ است زیرا $\gamma^3 = \tau^3$. پس $\gamma^2 = \gamma_1\gamma_2 = \delta = \lambda^2 = \lambda_1\lambda_2$. اما به ازای هر $i, j$، $|S(\alpha_i) \cap S(\beta_j)| = 1$ و $|S(\gamma) \cap S(\lambda)| = 4$، که تناقض است. در نتیجه $d(\tau^3, \sigma^3) \neq 4$. اکنون فرض می کنیم $d(\tau^3, \sigma^3) = 6$ و $\tau^3 \sim \gamma \sim \delta_1 \sim \delta \sim \delta_2 \sim \lambda \sim \sigma^3$ یک مسیر به طول ۶ باشد. در این صورت $S(\gamma) = S(\lambda)$ که یک تناقض است. بنابراین $d(\tau^3, \sigma^3) \geq 8$ و $d(\alpha, \beta) \geq 14$. در نتیجه $d(\alpha, \beta) = 14$.

**(حالت ۲) :** فرض می کنیم $n = 10$ در این صورت برهان دقیقا شبیه حالت ۱ است.

**(حالت ۳) :** فرض می کنیم $n = 15$ و $\alpha, \beta \in S_{15}$. بنا به لم ۱.۳.۳، $d(\alpha, \beta) \leq 12$.

**ادعا:** فرض می کنیم $\alpha = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)(8, 9, 11, 10, 12, 13, 14)$ و $\beta = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13)(2, 6, 4, 10, 8, 12, 15)$. در این صورت $d(\alpha, \beta) \geq 12$.

**برهان ادعا:** چون $\langle\alpha\rangle$، $\langle\beta\rangle$ با توجه به ساختار دوری $\alpha$ و $\beta$ این عنصرها با عنصرهایی از مرتبه ۷ یا ۱۴ مجاور هستند. در این صورت $\alpha \sim \alpha'$ ، جایی که $\alpha'$ یک دور به طول ۱۴ است. تنها عنصرهای مرتبط با یک دور از ۱۴ در $S_{15}$ عنصرهای از مرتبه ۷ و عنصرهای از مرتبه ۲ هستند، که عنصرهای از مرتبه ۷ همگی به $\langle\alpha\rangle$ تعلق دارند. بنابراین $\alpha^7 \sim \alpha'$. به همین ترتیب، دور $\beta'$ به طول ۱۴ وجود دارد که $\beta \sim \beta'$ و $\beta'^7 \sim \beta'$. فرض می کنیم $\alpha'^7 = \alpha_1 \cdots \alpha_7$ و $\beta'^7 = \beta_1 \cdots \beta_7$. بنا به لم ۱.۳.۲، یک مسیر بین $\alpha'^7$ و $\beta'^7$ وجود دارد به طوری که عنصرهای داخلی مسیر از مرتبه یک عدد اول یا حاصل ضرب دو عدد اول هستند. بنا به لم ۲.۳.۲، $C_{S_{15}}(\alpha'^7) \cong (\langle\alpha_1\rangle \times \cdots \times \langle\alpha_7\rangle) \rtimes S_7$. در نتیجه تنها عنصرهای از مرتبه $2p$ با کمترین عضو که با این عنصر مجاور می باشند از مرتبه ۶ هستند که همگی دارای ساختار مشابه هستند. به عنوان مثال $\tau\alpha_3^2$ از مرتبه ۶ می باشد، در صورتی که $\alpha_1 = (i_1, i_2, i_3)$، $\alpha_2 = (j_1, j_2, j_3)$ و $\tau = (i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3)$. پس $d(\alpha, \tau^3) = 4$. به طور مشابه دور $\sigma$ از طول ۶ در $S_{15}$ وجود دارد که $d(\beta, \sigma^3) = 4$. چون به ازای هر $i, j$، $|S(\alpha_i) \cap S(\beta_j)| = 1$، پس $\tau^3 \neq \sigma^3$ و $|S(\tau) \cap S(\sigma)| \leq 5$. لذا $d(\tau^3, \sigma^3) \geq 4$.

چون $n - |S(\tau) \cup S(\sigma)| \geq 3$، پس ۳ـ دور $\gamma$ وجود دارد که $S(\gamma) \subseteq F(\tau) \cap F(\sigma)$. بنا به لم

۲.۱.۱، فاصله $\gamma$ و $\tau^۳$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\gamma$ و $\sigma^۳$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta) \geq ۱۲$. در نتیجه $d(\alpha,\beta) = ۱۲$. □

**لم ۴.۳.۲.** به ازای $n \geq ۱۶$، $diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \geq ۶$.

*برهان.* بنا به قضیه چبیشف، عدد اولی مانند $p$ وجود دارد که $[n/۲] < p < n$. فرض می کنیم

$$\alpha = (۱,\cdots,p) \quad \text{و} \quad \beta = (n, n-۱, \cdots, n-p+۱).$$

بنا به لم ۲.۳.۱، $d(\alpha,\beta) = ۲t$، که در آن $t$ یک عدد صحیح مثبت است. چون $o(\alpha) = o(\beta) = p$ پس $d(\alpha,\beta) > ۲$. اگر $t = ۲$ آنگاه $\gamma$، $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ در $S_n$ وجود دارند که $\alpha \sim \gamma_۲ \sim \gamma \sim \gamma_۱ \sim \beta$، $o(\gamma_۱) = o(\gamma_۲) = pq$ و $o(\gamma) = q$، جایی که $q$ اول است. بنابراین $\gamma \in C_{S_n}(\alpha) \cap C_{S_n}(\beta)$. چون $C_{S_n}(\alpha) = \langle\alpha\rangle \times S_{\{p+۱,\cdots,n\}}$، $C_{S_n}(\beta) = \langle\beta\rangle \times S_{\{۱,\cdots,n-p\}}$ و $q \nmid p$ پس $\gamma \in S_{\{۱,\cdots,n-p\}} \cap S_{\{p+۱,\cdots,n\}} = ۱$ که تناقض است. بنابراین $d(\alpha,\beta) \geq ۶$. پس برهان کامل است.

□

**قضیه ۲.۳.۲.** به ازای $n \geq ۱۶$، $diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq ۱۰$.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha$ و $\beta$ دو عنصر دلخواه از $S_n$ باشند و $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_t$. اگر $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ اول باشند، آنگاه بنا به لم های ۲.۲.۱، ۲.۲.۲ و ۲.۲.۳، $d(\alpha,\beta) \leq ۱۰$. فرض می کنیم $\alpha$ و $\beta$ هر دو حاصل ضرب حداقل دو دور با طول های متفاوت باشند. در این صورت بنا به نتیجه ۲.۲.۱ به ازای $n \geq ۱۶$، $d(\alpha,\beta) \leq ۱۰$. فرض می کنیم $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ اول نباشند. در این صورت $\alpha \sim \alpha^{o(\alpha)/p}$ و $\beta \sim \beta^{o(\beta)/q}$، جایی که $p$ و $q$ به ترتیب کوچکترین عامل های اول $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ هستند. فرض می کنیم $\alpha^{o(\alpha)/p} = \alpha_۱ \cdots \alpha_m$ و $\beta^{o(\beta)/q} = \beta_۱ \cdots \beta_{m'}$. لذا $m \geq ۳$ یا $f_{\alpha^{o(\alpha)/p}} \geq ۲$ و $m' \geq ۳$ یا $f_{\beta^{o(\beta)/q}} \geq ۲$. بنا به لم های ۲.۲.۱، ۲.۲.۲ و ۲.۲.۳، $d(\alpha^{o(\alpha)/p}, \beta^{o(\beta)/q}) \leq ۸$. بنابراین $d(\alpha,\beta) \leq ۱۰$.

فرض می کنیم $o(\alpha)$ اول باشد اما $o(\beta)$ اول نباشد. در این صورت $\beta \sim \beta^{o(\beta)/q} = \beta_۱ \cdots \beta_{m'}$، جایی که $q$ کوچکترین عامل اول $o(\beta)$ باشد. لذا $f_{\beta^{o(\beta)/q}} \geq ۲$ یا $m' \geq ۳$. چون $o(\alpha)$ یک عدد اول است پس $f_\alpha \geq ۲$ یا $t \geq ۲$. اگر $o(\alpha)$ و $q$ هر دو زوج باشند، آنگاه بنا به لم ۲.۲.۱، $d(\alpha, \beta^{o(\beta)/q}) \leq ۸$. درغیر این صورت کافی است نشان دهیم که حالت (۳.۲) از جدول ۲.۲، رخ نمی دهد. در این صورت بنا به لم های ۲.۲.۲ و ۲.۲.۳، $d(\alpha, \beta^{o(\beta)/q}) \leq ۸$. فرض می کنیم $f_\alpha < ۲$، $t = ۲$، $f_{\beta^{o(\beta)/q}} < ۲$ و $m' \leq ۴$. در این صورت ۲ یا ۳ یک عامل اول $o(\beta)$ است و $q \geq ۵$ که تناقض است. بنابراین $d(\alpha, \beta^{o(\beta)/q}) \leq ۸$ و $d(\alpha,\beta) \leq ۹$. پس به ازای $n \geq ۱۶$، $diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq ۱۰$.

□

در این بخش، به ازای برخی از $n \geq ۱۶$، کران بهتری برای قطر گراف توانی محض گروه متقارن $\mathcal{P}^*(S_n)$ ارائه می دهیم.

**لم ۲.۳.۵.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ از $S_n$ به ترتیب از مرتبه اول $p$ و $q$ باشند به طوری که $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_m$ و $\beta = \beta_1 \dots \beta_{m'}$، جایی که $m > 2$ و $2 < p \leq q$. اگر $q \neq 3$ و $m' > 2p+1$ یا $q = 3$ و $m' > 9$، آنگاه $d(\alpha, \beta) \leq 6$.

*برهان.* اگر $|F(\alpha) \cap F(\beta)| \geq 2$، بنا به لم ۲.۱.۳، ترانهش $(u,v)$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $(u,v)$ و $\beta$ برابر دو است. پس $d(\alpha, \beta) \leq 4$.
اگر $|F(\alpha) \cap F(\beta)| < 2$ و $f_\alpha < 2$، آنگاه $\alpha_l$، $\alpha_{l'}$ و $\beta_{j_1}$ وجود دارند که $|S(\alpha_l \alpha_{l'}) \cap S(\beta_{j_1})| \geq 2$. درنتیجه، عناصر $S(\alpha_l \alpha_{l'})$ حداکثر در $t$ تا از $\beta_j$ها ظاهر می شوند به طوری که $S(\alpha_l \alpha_{l'}) \subseteq S(\beta_{j_1} \cdots \beta_{j_t}) \cup F(\beta)$ و $t \leq 2p-1$. حال فرض می کنیم $q > 3$. چون $m' - t \geq 3$، پس $\beta_{i_1}$، $\beta_{i_2}$ و $\beta_{i_3}$ وجود دارند که $S(\beta_{i_1}\beta_{i_2}\beta_{i_3}) \cap S(\alpha_l \alpha_{l'}) = \emptyset$، درنتیجه $d(\alpha, \beta) \leq 6$.
به ازای $q = 3$، چون $m' - t \geq 5$، پس $\beta_{i_1}$، $\cdots$، $\beta_{i_4}$ و $\beta_{i_5}$ وجود دارند که $(\cup_{t=i_1}^{i_5} S(\beta_t)) \cap S(\alpha_l \alpha_{l'}) = \emptyset$، در نتیجه $d(\alpha, \beta) \leq 6$.
اگر $|F(\alpha) \cap F(\beta)| < 2$ و $f_\alpha \geq 2$، آنگاه بنا به لم ۲.۱.۳، ترانهش $(u,v)$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. چون $m' \geq 5$، پس $\beta_{i_1}$، $\beta_{i_2}$ و $\beta_{i_3}$ وجود دارند که $S(\beta_{i_1}\beta_{i_2}\beta_{i_3}) \cap S((u,v)) = \emptyset$، درنتیجه $d(\alpha, \beta) \leq 6$.
به ازای $q = 3$، چون $m' \geq 7$، پس $\beta_{i_1}$، $\cdots$، $\beta_{i_4}$ و $\beta_{i_5}$ وجود دارند که $(\cup_{t=i_1}^{i_5} S(\beta_t)) \cap S((u,v)) = \emptyset$، در نتیجه $d(\alpha, \beta) \leq 6$.

□

**لم ۲.۳.۶.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ از $S_n$ به ترتیب از مرتبه اول $q$ و ۲ باشند به طوری که $q$ فرد است.
اگر $p'$ بزرگترین عامل اول $n(n-1)$ باشد و $[\frac{n-1}{p'}] > 2p' + 1$، آنگاه $d(\alpha, \beta) \leq 6$.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_m$ و $\beta = \beta_1 \dots \beta_{m'}$. بدیهی است که اگر $\alpha\beta = \beta\alpha$، آنگاه بنا به لم ۲.۱.۱، $d(\alpha, \beta) = 2$. فرض می کنیم $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.
اگر $f_\alpha \geq 2$، آنگاه بنا به لم ۲.۱.۳، ترانهش $(u,v)$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است.

- اگر $m' \geq 5$، آنگاه $\beta_{j_1}$، $\beta_{j_2}$ و $\beta_{j_3}$ وجود دارند که $S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3}) \cap S((u,v)) = \emptyset$ و پس بنا به لم ۲.۲.۱(۲)، $d(\beta, (u,v)) \leq 4$.
- اگر $m' < 5$، آنگاه $|F(\beta) \cap F((u,v))| \geq 3$، پس بنا به لم ۲.۲.۱(۱)، $d(\beta, (u,v)) \leq 4$. درنتیجه $d(\alpha, \beta) \leq 6$.

اگر $f_\alpha < 2$ آنگاه $m \geq 5$، زیرا $m = |S(\alpha)|/q$ و $|S(\alpha)| \geq n-1$.

- اگر $f_\beta \geq 3$، آنگاه بنا به لم ۲.۱.۳، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. چون $m \geq 5$، پس $\alpha_{i_1}$ و $\alpha_{i_2}$ وجود دارند که $S(\gamma) \cap S(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}) = \emptyset$. پس بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول $2q$ در $S_n$ وجود دارد که $d(\alpha, \tau^q) = 2$ و $S(\tau) = S(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2})$. بنا به لم ۲.۱.۱، فاصله $\gamma$ و $\tau^q$ برابر دو است. در نتیجه $d(\alpha, \beta) \leq 6$.

- اگر $f_\beta < ۳$، آنگاه $|S(\beta)| = ۲m' \geq mq - ۲$. پس $m' > ۲q + ۲$. در نتیجه $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$ و $\beta_{j_۱}$ وجود دارند که $S(\beta_{j_۱}) \subset S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲})$. فرض می کنیم عنصرهای $S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲})$ حداکثر در $t$تا از $\beta_j$ها ظاهر شود به طوری که $S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}) \subseteq S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_t}) \cup F(\beta)$. در این صورت $t \leq ۲q - ۱$ و $m' - t \geq ۳$. درنتیجه $\beta_{s_۱}$، $\beta_{s_۲}$ و $\beta_{s_۳}$ وجود دارند که $S(\beta_{s_۱}\beta_{s_۲}\beta_{s_۳}) \cap S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}) = \emptyset$. همچنین، بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول $۲q$ در $S_n$ وجود دارد که $d(\alpha, \tau) = ۲$ و $S(\tau) = S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲})$. بنا به لم ۱.۲.۲(۲)، $d(\beta, \tau) \leq ۴$. بنابراین $d(\alpha, \beta) \leq ۶$.

□

**نتیجه ۲.۳.۲.** فرض $p'$ بزرگترین عامل اول $n(n-۱)$ باشد. اگر $۲p' + ۱ < [\frac{n-۱}{p'}]$، آنگاه $diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq ۸$.

برهان. فرض می کنیم $\alpha, \beta \in S_n$، $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_m$ و $\beta = \beta_۱ \cdots \beta_{m'}$. سه حالت زیر را در نظر می گیریم:

(۱) اگر $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ اول باشند آنگاه $m > ۲p' + ۱$ یا $f_\alpha \geq ۲$ و $m' > ۲p' + ۱$ یا $f_\beta \geq ۲$.

فرض می کنیم $o(\alpha) > ۲$، $o(\beta) > ۲$، $f_\alpha \geq ۲$ و $f_\beta \geq ۲$. در صورتی که $f_\alpha \geq ۲$ و $f_\beta \geq ۲$، بنا به لم ۳.۱.۲، ترانهش $(u, v)$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. به همین ترتیب، ترانهش $(u', v')$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. بنا به لم ۱.۲.۲(۱)، $d((u, v), (u', v')) \leq ۴$، پس $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

اگر $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ هر دو زوج باشند، بنا به لم ۱.۲.۲، $d(\alpha, \beta) \leq ۸$. اگر $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ هر دو فرد باشند، بنا به لم ۵.۳.۲، $d(\alpha, \beta) \leq ۸$. درغیر این صورت بنا به لم ۶.۳.۲، $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

(۲) فرض می کنیم $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ اول نباشند ، $p$ و $q$ به ترتیب کوچکترین عامل های اول $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ باشند. در این صورت $\alpha \sim \alpha^{\frac{o(\alpha)}{p}}$ و $\beta \sim \beta^{\frac{o(\beta)}{q}}$. فرض می کنیم $\alpha' = \alpha^{\frac{o(\alpha)}{p}} = \alpha_۱ \cdots \alpha_{m_۱}$ و $\beta' = \beta^{\frac{o(\beta)}{q}} = \beta_۱ \cdots \beta_{m_۲}$.

اگر $p = ۲$ یا $q = ۲$، آنگاه بنا به لم های ۱.۲.۲ و ۶.۳.۲، $d(\alpha', \beta') \leq ۶$. در نتیجه $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

فرض می کنیم $۲ < p \leq q$. اگر $f_{\alpha'} \geq ۲$، بنا به لم ۳.۱.۲، ترانهش $(u, v)$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha'$ برابر دو است. اگر $S(\beta') \cap \{u, v\} = \emptyset$، آنگاه بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $(u, v)$ و $\beta'$ برابر دو است. درنتیجه $d(\alpha, \beta) \leq ۶$.

فرض می کنیم $S(\beta') \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ و $q \neq ۳$. اگر $|F(\beta') \cap F((u, v))| \geq ۳$، آنگاه وجود دارند عنصرهای متمایز $x, y, z \in F(\beta') \cap F((u, v))$. در این صورت بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $(x, y, z)$ و $(u, v)$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $(x, y, z)$ و $\beta'$ برابر دو است. درنتیجه $d(\alpha', \beta') \leq ۶$ و $d(\alpha, \beta) \leq ۸$.

اگر $|F(\beta') \cap F((u,v))| < 3$، آنگاه $m_2 \geq 5$، زیرا $m_2 q = |S(\beta')| \geq n - 2$. در نتیجه دورهای $\beta_{i_1}$، $\beta_{i_2}$ و $\beta_{i_3}$ وجود دارند به طوری که $\{u,v\} \cap S(\beta_{i_1}\beta_{i_2}\beta_{i_3}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول $3q$ وجود دارد که $S(\tau) = S(\beta_{i_1}\beta_{i_2}\beta_{i_3})$ و $d(\beta', \tau^q) = 2$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $(u,v)$ و $\tau^q$ برابر دو است. درنتیجه $d(\alpha', \beta') \leq 6$ و $d(\alpha, \beta) \leq 8$.

فرض می کنیم $S(\beta') \cap \{u,v\} \neq \emptyset$ و $q = 3$. اگر $|F(\beta') \cap F((u,v))| \geq 5$، آنگاه به ازای عنصرهای متمایز $x_1, \cdots, x_5 \in F(\beta') \cap F((u,v))$، ۵ـدور $\lambda = (x_1, \cdots, x_5)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\lambda$ و $\beta'$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\lambda$ و $(u,v)$ برابر دو است. درنتیجه $d(\alpha', \beta') \leq 6$ و $d(\alpha, \beta) \leq 8$.

اگر $|F(\beta') \cap F((u,v))| < 5$، آنگاه $m_2 \geq 7$، زیرا $3m_2 = |S(\beta')| \geq n - 2$. در نتیجه دورهای $\beta_{i_1}$، $\cdots$، $\beta_{i_4}$ و $\beta_{i_5}$ وجود دارند که $\{u,v\} \cap S(\beta_{i_1} \cdots \beta_{i_5}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۱۵ وجود دارد که $S(\tau) = S(\beta_{i_1} \cdots \beta_{i_5})$ و $d(\beta', \tau^3) = 2$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\tau^3$ و $\beta'$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\tau^3$ و $(u,v)$ برابر دو است. درنتیجه $d(\alpha', \beta') \leq 6$ و $d(\alpha, \beta) \leq 8$.

اگر $f_{\alpha'} < 2$ و $f_{\beta'} < 2$ آنگاه $m_1 > 2p' + 1$ و $m_2 > 2p' + 1$. بنا به لم ۵.۳.۲، $d(\alpha', \beta') \leq 6$ و $d(\alpha, \beta) \leq 8$.

(۳) اگر $o(\alpha)$ اول نباشد و $o(\beta)$ اول باشد، آنگاه $\alpha \sim \alpha^{\frac{o(\alpha)}{p}}$، جایی که $p$ کوچکترین عامل اول $o(\alpha)$ باشد. مشابه حالت قبل $d(\alpha^{\frac{o(\alpha)}{p}}, \beta) \leq 6$، درنتیجه $d(\alpha, \beta) \leq 7$.

در نتیجه برهان کامل است. . □

**مثال ۱.۳.۲.** به ازای هر یک از عددهای جدول ۳.۲، $diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq 8$.

جدول ۳.۲: عددهای کمتر از ۱۰۰۰ که در شرایط قضیه قبل صدق می کنند

| $[\frac{n-۱}{p}]$ | $۲p+۱$ | عامل های اول $n(n-۱)$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| ۱۵ | ۱۱ | ۲,۲,۲,۲,۳,۳,۳,۳,۵ | ۸۱ |
| ۱۷ | ۱۵ | ۲,۳,۳,۵,۵,۵,۷ | ۱۲۶ |
| ۳۲ | ۱۵ | ۲,۲,۲,۲,۲,۳,۳,۵,۵,۷ | ۲۲۵ |
| ۳۴ | ۲۳ | ۲,۲,۲,۲,۲,۲,۲,۳,۵,۷,۱۱ | ۳۸۵ |
| ۴۰ | ۲۳ | ۲,۲,۲,۳,۳,۵,۷,۷,۱۱ | ۴۴۱ |
| ۴۹ | ۲۳ | ۲,۲,۳,۳,۳,۵,۷,۷,۱۱ | ۵۴۰ |
| ۴۸ | ۲۷ | ۲,۲,۲,۲,۳,۵,۵,۵,۵,۱۳ | ۶۲۵ |
| ۵۱ | ۲۷ | ۲,۲,۳,۳,۳,۵,۵,۱۳,۱۳ | ۶۷۶ |
| ۴۲ | ۳۵ | ۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷ | ۷۱۵ |
| ۵۶ | ۲۷ | ۲,۲,۲,۳,۳,۳,۳,۳,۳,۷,۱۳ | ۷۲۹ |
| ۴۸ | ۳۵ | ۲,۲,۲,۲,۲,۲,۷,۷,۱۳,۱۷ | ۸۳۳ |
| ۵۵ | ۳۵ | ۲,۲,۲,۳,۳,۵,۱۱,۱۳,۱۷ | ۹۳۶ |
| ۵۰ | ۳۹ | ۲,۲,۲,۳,۱۱,۱۱,۱۷,۱۹ | ۹۶۹ |

بنا به قضیه ۲.۳.۲، نتیجه ۲.۳.۲، و لم ۱.۳.۳، قضیه زیر حاصل می شود.

**قضیه ۳.۳.۲.** فرض کنیم $p$ بزرگترین عامل اول $n(n-۱)$ باشد. اگر $[\frac{n-۱}{p}] > ۲p+۱$، آنگاه $۶ \leq diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq ۸$، درغیر این صورت $۶ \leq diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq ۱۰$.

# فصل ۳

# قطر گراف توانی محض گروه متناوب

در [۱۲]، دوست آبادی و فرخی همبندی گراف های توانی محض گروه متناوب را مشخص کردند و کران بالایی برای قطر گراف توانی محض گروه متناوب ارائه دادند:

**قضیه ۳.۰.۱.** ([۱۲]، قضیه ۴.۷.) فرض کنیم $n \geq ۹$، $\mathcal{P}^*(A_n)$ همبند است اگر و تنها اگر هیچ یک از اعداد $n$، $n-۱$، $n-۲$، $n/۲$، $(n-۱)/۲$ و $(n-۲)/۲$ اول نباشند. بعلاوه، اگر $\mathcal{P}^*(A_n)$ همبند باشد و $diam(\mathcal{P}^*(A_n)) \leq ۲۲$.

در این فصل فرض می کنیم $n \geq ۵۱$، به طوری که هیچ یک از اعداد $n$، $n-۱$، $n-۲$، $n/۲$، $(n-۱)/۲$ و $(n-۲)/۲$ اول نباشند به بررسی قطر گراف توانی محض گروه متناوب $\mathcal{P}^*(A_n)$ می پردازیم. این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول به بیان مقدماتی که در بخش های بعدی مورد نیاز هستند می پردازیم. در بخش دوم برخی از مسیرهای کوتاه در این نوع گراف را مشخص می کنیم و در بخش سوم با استفاده از این مسیرها کران های قطر گراف را تعیین می کنیم و نشان می دهیم که $۶ \leq diam(\mathcal{P}^*(A_n)) \leq ۱۱$. همچنین، در انتهای بخش سوم یک اعتبار بهتر برای کران بالای قطر گراف توانی محض گروه متناوب مشخص می کنیم.

## ۳.۱ مقدمات

**لم ۳.۱.۱.** فرض کنیم $\alpha \in A_n$ و $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_m$ تجزیه $\alpha$ به $p$ـ دورهای جدا از هم باشد. در این صورت $f_\alpha \geq ۳$ یا $m \geq ۳$.

*برهان.* فرض می کنیم $f_\alpha \leq ۲$. چون $n$، $n-۱$، $n-۲$، $n/۲$، $(n-۱)/۲$ و $(n-۲)/۲$ هیچکدام اول نیستند پس $m \geq ۳$. □

**لم ۲.۱.۳.** فرض کنیم $\alpha \in A_n$ و $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_m$ تجزیه $\alpha$ به $p$ـ دورهای جدا از هم باشد جایی که $p$ فرد باشد. اگر $m \geq ۴$ آنگاه جایگشت $\tau$ از مرتبه $۲p$ در $A_n$ وجود دارد که $d(\alpha, \tau^p) = ۲$.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha_۱ = (i_{۱۱}, i_{۱۲}, \cdots, i_{۱p})$، $\cdots$، $\alpha_m = (i_{m۱}, i_{m۲}, \cdots, i_{mp})$. قرار می دهیم $\tau_۱ = (i_{۱۱}, i_{۲۱}, i_{۱۲}, i_{۲۲} \cdots, i_{۱p}, i_{۲p})$، $\tau_۲ = (i_{۳۱}, i_{۴۱}, i_{۳۲}, i_{۴۲} \cdots, i_{۳p}, i_{۴p})$. فرض می کنیم $\tau = \tau_۱\tau_۲$. در این صورت $\alpha \sim \tau\alpha_{i_۵}{}^l \cdots \alpha_m{}^l \sim \tau^p$ به طوری که $\alpha_j{}^{۲l} = \alpha_j$. □

**لم ۳.۱.۳.** فرض کنیم $\alpha \in A_n$ و $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_m$ تجزیه $\alpha$ به $p$ـ دورهای جدا از هم باشد جایی که $p$ فرد باشد. در این صورت:

(۱) اگر عدد اول $q$ وجود داشته باشد که $q \leq [\frac{m}{۲}]$ و $q \neq p$، آنگاه به ازای $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$، $\alpha_{i_۳}$ و $\alpha_{i_{۲q}}$ جایگشت $\sigma$ از مرتبه $q$ در $A_n$ وجود دارد که $d(\alpha, \sigma) = ۲$ و $S(\sigma) = S(\alpha_{i_۱} \cdots \alpha_{i_{۲q}})$.

(۲) اگر $m \geq ۴$ آنگاه به ازای $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$، $\alpha_{i_۳}$ و $\alpha_{i_۴}$ جایگشت $\delta$ از مرتبه ۲ در $A_n$ وجود دارد که $d(\alpha, \delta) = ۲$ و $S(\delta) = S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳}\alpha_{i_۴})$.

*برهان.* (۱) بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau_۱$ به طول $۲pq$ وجود دارد که $S(\tau_۱) = S(\alpha_۱ \cdots \alpha_q)$ و $\tau_۱^q = \alpha_۱ \cdots \alpha_q$. به همین ترتیب، دور $\tau_۲$ به طول $۲pq$ وجود دارد که $S(\tau_۲) = S(\alpha_{q+۱} \cdots \alpha_{۲q})$ و $\tau_۲^q = \alpha_{q+۱} \cdots \alpha_{۲q}$. فرض می کنیم $\tau = \tau_۱\tau_۲$. در این صورت $\alpha \sim \tau\alpha_{i_{۲q+۱}}{}^l \cdots \alpha_{i_m}{}^l \sim \tau^{۲p}$ به طوری که $\alpha_j{}^{lq} = \alpha_j$. قرار می دهیم $\sigma = \tau^{۲p}$ در این صورت $d(\alpha, \sigma) = ۲$.

(۲) بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau_۱$ به طول $۴p$ وجود دارد که $S(\tau_۱) = S(\alpha_۱\alpha_۲)$ و $\tau_۱^۲ = \alpha_۱\alpha_۲$. به همین ترتیب، دور $\tau_۲$ به طول $۴p$ وجود دارد که $S(\tau_۲) = S(\alpha_۳\alpha_۴)$ و $\tau_۲^۲ = \alpha_۳\alpha_۴$. فرض می کنیم $\tau = \tau_۱\tau_۲$. در این صورت $\alpha \sim \tau\alpha_{i_۵}{}^l \cdots \alpha_{i_m}{}^l \sim \tau^{۲p}$ به طوری که $\alpha_j{}^{۲l} = \alpha_j$. قرار می دهیم $\delta = \tau^{۲p}$ در این صورت $d(\alpha, \delta) = ۲$.

□

**لم ۴.۱.۳.** فرض کنیم $\alpha \in A_n$ و $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_m$ تجزیه $\alpha$ به $p$ـ دورهای جدا از هم باشد جایی که $p$ فرد باشد. اگر $f_\alpha > ۱$ و $m \geq ۲$، آنگاه جایگشت $\sigma$ از مرتبه ۲ وجود دارد که فاصله آن تا جایگشت $\alpha$ برابر دو است و $|S(\sigma)| = ۲p + ۲$.

*برهان.* بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau_۱$ به طول $۲p$ وجود دارد که $S(\tau_۱) = S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲})$ و $\tau_۱{}^۲ = \alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}$. به ازای عنصرهای متمایز $u, v \in F(\alpha)$ فرض کنیم $\tau = \tau_۱(u, v)$. در این صورت $\alpha \sim \tau\alpha_{i_۳}{}^l \cdots \alpha_m{}^l \sim \tau^p$ به طوری که $\alpha_j{}^{۲l} = \alpha_j$. قرار می دهیم $\sigma = \tau^p$ در این صورت $d(\alpha, \sigma) = ۲$. □

**لم ۵.۱.۳.** فرض کنیم $\alpha$ جایگشتی از مرتبه $r$ در $A_n$ باشد. اگر $f_\alpha \leq ۴$ و $gcd(۲,r)=۱$، آنگاه جایگشتی از مرتبه ۲ با فاصله دو از $\alpha$ وجود دارد.

*برهان.* به ازای عنصرهای متمایز $i_۱,i_۲,i_۳,i_۴ \in F(\alpha)$، جایگشت $\gamma=(i_۱,i_۲)(i_۳,i_۴)$ را در نظر می گیریم. چون $S(\alpha)\cap S(\gamma)=\emptyset$، پس $\alpha$ و $\gamma$ با هم جابه جا می شوند. درنتیجه بنا به لم ۱.۱.۲، $\alpha\sim\alpha\gamma\sim\gamma$. □

**لم ۶.۱.۳.** ([۱۲]) به ازای $n\geq ۱۰$ در $\mathcal{P}^*(A_n)$ یک مسیر با طول حداکثر چهار بین هر دو ۳ـدور وجود دارد.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha$ و $\beta$ دورهایی به طول ۳ در $A_n$ باشند. چون $|S(\alpha)\cup S(\beta)|\leq ۶$ و $n\geq ۱۰$، پس $|F(\alpha)\cap F(\beta)|\geq ۴$. بنابراین به ازای عنصرهای متمایز $i_۱,i_۲,i_۳,i_۴\in F(\alpha)\cap F(\beta)$ جایگشت $\gamma=(i_۱,i_۲)(i_۳,i_۴)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\gamma$ و $\alpha$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\gamma$ و $\beta$ برابر دو است. درنتیجه، $d(\alpha,\beta)\leq ۴$. □

**لم ۷.۱.۳.** ([۱۲]) به ازای $n\geq ۱۰$ در $\mathcal{P}^*(A_n)$ یک مسیر با طول حداکثر شش بین یک جایگشت از مرتبه ۲ با یک ۳ـدور، وجود دارد.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha=\alpha_۱\cdots\alpha_m$ یک جایگشت از مرتبه ۲ در $A_n$ باشد. اگر $f_\alpha\geq ۳$ بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. اگر $f_\alpha\leq ۲$ آنگاه فرض می کنیم $\alpha_۱=(i_{۱۱},i_{۱۲})$، $\alpha_۲=(i_{۲۱},i_{۲۲})$، $\alpha_۳=(i_{۳۱},i_{۳۲})$ و $\alpha_۴=(i_{۴۱},i_{۴۲})$. قرار می دهیم $\pi=(i_{۱۱},i_{۲۱},i_{۳۱},i_{۱۲},i_{۲۲},i_{۳۲})(i_{۴۱},i_{۴۲})$. در این صورت

$$\alpha\sim\pi\alpha_۵\cdots\alpha_m\sim\pi^۲\sim\pi^۲\alpha_۴\alpha_۵\sim\alpha_۴\alpha_۵\sim\alpha_۴\alpha_۵(i_{۱۱},i_{۲۱},i_{۳۱})\sim(i_{۱۱},i_{۲۱},i_{۳۱}).$$

بنابراین $d(\alpha,\gamma)\leq ۶$. □

**لم ۸.۱.۳.** ([۱۲]) به ازای $n\geq ۱۱$ در $\mathcal{P}^*(A_n)$ یک مسیر با طول حداکثر هشت بین یک جایگشت از مرتبه ۳ با یک ۳ـدور، وجود دارد.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha=\alpha_۱\cdots\alpha_m$ یک جایگشت از مرتبه ۳ باشد. اگر $|S(\alpha)|\geq ۱۲$ آنگاه بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau_۱$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\tau)=S(\alpha_۱\alpha_۲)$. به همین ترتیب، دور $\tau_۲$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\tau)=S(\alpha_۳\alpha_۴)$. بنابراین $\alpha\sim\tau_۱\tau_۲\alpha_۵{}^{-۱}\cdots\alpha_m{}^{-۱}\sim\tau_۱{}^۳\tau_۲{}^۳$. بنا به لم ۷.۱.۳، فاصله $\tau_۱{}^۳\tau_۲{}^۳$ از یک ۳ـدور حداکثر شش است. اگر $|S(\alpha)|<۱۲$ آنگاه ۳ یا ۲ $m=$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۶ وجود دارد که $S(\tau)=S(\alpha_۱\alpha_۲)$ و $\tau^۲=\alpha_۱\alpha_۲$. چون $n\geq ۱۱$ پس به ازای عنصرهای متمایز $u,v\in F(\alpha)$ ترانهش $(u,v)$ وجود دارد. پس اگر $m=۳$ آنگاه $\alpha\sim\tau(u,v)\alpha_۳\sim\tau^۳(u,v)$. بنا به لم ۷.۱.۳، فاصله $\tau^۳(u,v)$ از یک ۳ـدور حداکثر شش است. بنابراین فاصله $\alpha$ از یک ۳ـدور حداکثر هشت است. اگر $m=۲$ آنگاه $\alpha\sim\tau(u,v)\sim\tau^۳(u,v)$. بنا به لم ۷.۱.۳، فاصله $\tau^۳(u,v)$ از یک ۳ـدور حداکثر شش است. بنابراین فاصله $\alpha$ از یک ۳ـدور حداکثر هشت است.

□

**لم ۹.۱.۳.** ([۱۲]) به ازای $n \geq ۱۱$ در $\mathcal{P}^*(A_n)$ یک مسیر با طول حداکثر ده بین جایگشت $\alpha$ از مرتبه $p$ ($p > ۳$)، با یک ۳ـ دور، وجود دارد.

*برهان.* اگر $f_\alpha \geq ۳$ آنگاه بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـ دور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. اگر $f_\alpha \leq ۲$ آنگاه بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول $۳p$ وجود دارد که $d(\alpha, \tau^p) = ۳$. بنا به لم ۸.۱.۳، فاصله $\tau^p$ از یک ۳ـ دور حداکثر هشت است. بنابراین فاصله $\alpha$ از یک ۳ـ دور حداکثر ده است.

□

**قضیه ۱.۱.۳.** ([۱۲]) فرض کنیم $n \geq ۹$ به طوری که هیچ یک از اعداد $n$، $n-۱$، $n-۲$، $n/۲$، $(n-۱)/۲$ و $(n-۲)/۲$ اول نباشند در این صورت $\mathcal{P}^*(A_n)$ همبند است.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha \in A_n$. اگر مرتبه $\alpha$ اول باشد آنگاه بنا به لم های ۷.۱.۳، ۸.۱.۳ و ۹.۱.۳، بین $\alpha$ و یک ۳ـ دور یک مسیر همبندی وجود دارد. اگر مرتبه $\alpha$ اول نباشد فرض می کنیم $p$ کوچکترین عامل اول $o(\alpha)$ باشد، در این صورت $\alpha \sim \alpha^{\frac{o(\alpha)}{p}}$. بنا به لم های ۷.۱.۳، ۸.۱.۳ و ۹.۱.۳، بین $\alpha^{\frac{o(\alpha)}{p}}$ و یک ۳ـ دور یک مسیر همبندی وجود دارد پس بین $\alpha$ و یک ۳ـ دور یک مسیر همبندی وجود دارد. بنا به لم ۶.۱.۳، بین هر دو دور به طول ۳ یک مسیر با طول حداکثر چهار وجود دارد. بنابراین $\mathcal{P}^*(A_n)$ در این شرایط همبند است.

□

## ۲.۳ مسیرهای کوتاه در گراف توانی محض گروه متناوب

می دانیم هر جایگشت $\alpha \in A_n$ یک دور یا یک تجزیه از دورهای جدا از هم است. به ازای یک توان مناسب می توان نشان داد که هر جایگشت در $\mathcal{P}^*(A_n)$ با یک جایگشت از مرتبه اول مجاور است. در این بخش، سعی می کنیم برخی از مسیرهای کوتاه بین عنصرهای با مرتبه اول در گراف توانی محض گروه متناوب را مشخص کنیم.

**لم ۱.۲.۳.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ دو جایگشت در $A_n$ از مرتبه ۳ باشند در این صورت $d(\alpha, \beta) \leq ۶$.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_m$ و $\beta = \beta_۱ \cdots \beta_{m'}$. سه حالت زیر را در نظر می گیریم.

(۱) فرض می کنیم $f_\alpha \geq ۴$، بنا به لم ۵.۱.۳، جایگشت $\delta$ از مرتبه ۲ در $A_n$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است.

(۱.۱) فرض می کنیم $f_\beta \geq ۴$. اگر $S(\delta)\cap S(\beta)=\emptyset$، آنگاه بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta$ و $\beta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۴$.

اگر $S(\delta)\cap S(\beta)\neq\emptyset$ و $n-|S(\beta)\cup S(\delta)|\geq ۵$، آنگاه به ازای عنصرهای متمایز $i_۱,i_۲,i_۳,i_۴,i_۵\in F(\beta)\cap F(\delta)$، ۵ــدور $\lambda=(i_۱,i_۲,i_۳,i_۴,i_۵)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\lambda$ و $\delta$ برابر دو است. به همین ترتیب، $d(\lambda,\beta)=۲$. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۶$. در غیر این صورت، $m'>۸$ و دورهای $\beta_{j_۶}$، $\beta_{j_۷}$، $\beta_{j_۸}$ و $\beta_{j_۹}$ وجود دارند که $S(\delta)\subseteq S(\beta_{j_۶}\cdots\beta_{j_۹})\cup F(\beta)$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول ۱۵ وجود دارد که $d(\beta,\sigma^۳)=۲$ و $S(\sigma)=S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_۵})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\sigma^۳$ و $\delta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

(۲.۱) اگر $f_\beta<۴$ آنگاه $m'>۱۶$. چون $m'>۱۶$، دورهای $\beta_{j_۱}$، $\cdots$، $\beta_{j_۴}$ و $\beta_{j_۵}$ وجود دارند که $S(\delta)\cap S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_۵})=\emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول ۱۵ وجود دارد که $d(\beta,\sigma^۳)=۲$ و $S(\sigma)=S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_۵})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\sigma^۳$ و $\delta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

(۲) فرض می کنیم $f_\beta\geq ۴$ و $f_\alpha<۴$، در این صورت $m>۱۶$. چون $f_\beta\geq ۴$، بنا به لم ۵.۱.۳، جایگشت $\gamma$ از مرتبه ۲ در $A_n$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. چون $m>۱۶$، دورهای $\alpha_{j_۱}$، $\cdots,\alpha_{j_۴}$ و $\alpha_{j_۵}$ وجود دارند که $S(\gamma)\cap S(\alpha_{j_۱}\cdots\alpha_{j_۵})=\emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۱۵ وجود دارد که $d(\alpha,\tau^۳)=۲$ و $S(\tau)=S(\alpha_{j_۱}\cdots\alpha_{j_۵})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\tau^۳$ و $\gamma$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

(۳) فرض می کنیم $f_\alpha<۴$ و $f_\beta<۴$، آنگاه $m'>۱۶$ و $m>۱۶$. بنا به لم ۲.۱.۳، جایگشت $\tau$ از مرتبه ۶ وجود دارد که $d(\alpha,\tau^۳)=۲$. چون $m'>۱۶$ و $|S(\tau)|=۱۲$، پس دورهای $\beta_{j_۱}$، $\cdots$، $\beta_{j_{t-1}}$ و $\beta_{j_t}$ وجود دارند که $S(\tau)\subseteq S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_t})\cup F(\beta)$. چون $m'>۱۶$، بنا به لم ۲.۱.۲، به ازای $\beta_{j_{t+1}}$، $\cdots$، $\beta_{j_{t+4}}$ و $\beta_{j_{t+5}}$ دور $\sigma$ به طول ۱۵ وجود دارد که $d(\beta,\sigma^۳)=۲$ و $S(\sigma)=S(\beta_{j_{t+1}}\cdots\beta_{j_{t+5}})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\sigma^۳$ و $\tau^۳$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

$\square$

**لم ۲.۲.۳.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ در $A_n$ از مرتبه ۲ باشند در این صورت $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha=\alpha_۱\cdots\alpha_m$ و $\beta=\beta_۱\cdots\beta_{m'}$. سه حالت زیر را در نظر می گیریم.

(۱) فرض می کنیم $f_\alpha\geq ۳$. بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ــدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است.

(۱.۱) فرض می کنیم $f_\beta\geq ۳$. اگر $S(\gamma)\cap S(\beta)=\emptyset$، بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\gamma$ و $\beta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۴$.

اگر $S(\gamma)\cap S(\beta)\neq\emptyset$ و $|F(\beta)\cap F(\gamma)|\geq ۵$، آنگاه به ازای عنصرهای متمایز $i_۱,i_۲,i_۳,i_۴,i_۵\in F(\beta)\cap F(\gamma)$، ۵ــدور $\lambda=(i_۱,i_۲,i_۳,i_۴,i_۵)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\lambda$ و $\gamma$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\lambda$ و $\beta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۶$. در غیر این صورت، $m'>۲۳$ پس دورهای $\beta_{j_{۱۱}}$، $\beta_{j_{۱۲}}$ و $\beta_{j_{۱۳}}$ وجود دارند که $S(\gamma)\subseteq S(\beta_{j_{۱۱}}\beta_{j_{۱۲}}\beta_{j_{۱۳}})\cup F(\beta)$. بنا به لم ۳.۱.۳(۱)، جایگشت $\sigma$ در $A_n$ از مرتبه ۵ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است و $S(\sigma)=S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_{۱۰}})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\sigma$ و $\gamma$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

(۲.۱) اگر $f_\beta<۳$، آنگاه $m'>۲۳$. چون $m'>۲۳$، پس دورهای $\beta_{j_{۱۱}}$، $\beta_{j_{۱۲}}$ و $\beta_{j_{۱۳}}$ وجود دارند که $S(\gamma)\subseteq S(\beta_{j_{۱۱}}\beta_{j_{۱۲}}\beta_{j_{۱۳}})\cup F(\beta)$. بنا به لم ۳.۱.۳(۱)، جایگشت $\sigma$ در $A_n$ از مرتبه ۵ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است و $S(\sigma)=S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_{۱۰}})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\sigma$ و $\gamma$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

(۲) فرض می کنیم $f_\beta\geq ۳$ و $f_\alpha<۳$. چون $f_\beta\geq ۳$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ــدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. چون $f_\alpha<۳$، پس $m>۲۳$، بنابراین دورهای $\alpha_{j_{۱۱}}$، $\alpha_{j_{۱۲}}$ و $\alpha_{j_{۱۳}}$ وجود دارند که $S(\gamma)\subseteq S(\alpha_{j_{۱۱}}\alpha_{j_{۱۲}}\alpha_{j_{۱۳}})\cup F(\beta)$. بنا به لم ۳.۱.۳(۱)، جایگشت $\sigma$ در $A_n$ از مرتبه ۵ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است و $S(\sigma)=S(\alpha_{j_۱}\cdots\alpha_{j_{۱۰}})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\sigma$ و $\gamma$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

(۳) فرض می کنیم $f_\alpha<۳$ و $f_\beta<۳$، آنگاه $m'>۲۳$ و $m>۲۳$. بنا به لم ۳.۱.۳(۱)، جایگشت $\tau$ در $A_n$ از مرتبه ۳ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. دورهای $\beta_{j_۱}$، $\cdots$، $\beta_{j_{t_۱}}$ و $\beta_{j_t}$ وجود دارند که $S(\tau)\subseteq S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_t})\cup F(\beta)$. چون $|S(\tau)|=۱۲$ پس $t\leq ۱۲$. چون $m'-t>۱۰$، بنا به لم ۳.۱.۳(۱)، جایگشت $\sigma$ در $A_n$ از مرتبه ۵ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است و $S(\sigma)\subseteq S(\beta)-S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_t})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\sigma$ و $\tau$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

□

**لم ۳.۲.۳.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ در $A_n$ به ترتیب از مرتبه ۲ و ۳ باشند در این صورت $d(\alpha,\beta)\leq ۶$.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha=\alpha_۱\cdots\alpha_m$ و $\beta=\beta_۱\cdots\beta_{m'}$. چهار حالت زیر را در نظر می گیریم.

(۱) فرض می کنیم $f_\alpha\geq ۳$ و $f_\beta\geq ۴$. اگر $S(\alpha)\cap S(\beta)=\emptyset$، بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\alpha$ و $\beta$ برابر دو است. فرض می کنیم $S(\alpha)\cap S(\beta)\neq\emptyset$. چنانچه $|F(\alpha)\cap F(\beta)|\geq ۵$، آنگاه به ازای عنصرهای متمایز $i_۱,i_۲,i_۳,i_۴,i_۵\in F(\beta)\cap F(\alpha)$، ۵ــدور $\lambda=(i_۱,i_۲,i_۳,i_۴,i_۵)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\lambda$ و $\alpha$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\lambda$ و $\beta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۴$. اگر $|F(\alpha)\cap F(\beta)|<۵$، چون $f_\alpha\geq ۳$، بنا به لم

۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. اگر $m' \geq 7$، آنگاه $\beta_{j_1}$، $\beta_{j_2}$، $\beta_{j_3}$ و $\beta_{j_4}$ وجود دارند که $S(\gamma) \cap S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3}\beta_{j_4}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۳، جایگشت $\tau$ در $A_n$ از مرتبه ۲ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است و $S(\tau) = S(\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_4})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\gamma$ و $\tau$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta) \leq 6$.

اگر $m' < 7$، آنگاه $|F(\beta) \cap F(\gamma)| \geq 4$ به ازای عنصرهای متمایز $v_1, v_2, v_3, v_4 \notin S(\gamma) \cup S(\beta)$، جایگشت $\delta = (v_1, v_2)(v_3, v_4)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta$ و $\gamma$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\delta$ و $\beta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta) \leq 6$.

(۲) فرض می کنیم $f_\alpha < 3$ و $f_\beta < 4$، آنگاه $m > 23$ و $m' > 16$. در این صورت بنا به لم ۲.۱.۳، جایگشت $\tau$ در $A_n$ از مرتبه ۶ وجود دارد که در این صورت $d(\alpha, \tau^2) = 2$. چون $m' > 16$ پس دورهای $\beta_{j_1}$، $\cdots$، $\beta_{j_4}$ و $\beta_{j_5}$ وجود دارند که $S(\tau) \cap S(\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_5}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول ۱۵ وجود دارد که $d(\beta, \sigma^3) = 2$ و $S(\sigma) = S(\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_5})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\sigma^3$ و $\tau^2$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta) \leq 6$.

(۳) فرض می کنیم $f_\alpha < 3$ و $f_\beta \geq 4$، در این صورت $m > 23$. چون $f_\beta \geq 4$ بنا به لم ۵.۱.۳، جایگشت $\delta$ در $A_n$ از مرتبه ۲ وجود دارد که $d(\delta, \beta) = 2$. چون $m > 23$، پس دورهای $\alpha_{i_1}$، $\cdots$، $\alpha_{i_5}$ و $\alpha_{i_6}$ وجود دارند که $S(\delta) \cap S(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_6}) = \emptyset$. بنا به لم ۳.۱.۳(۱)، جایگشت $\tau$ در $A_n$ از مرتبه ۳ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است و $S(\tau) = S(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_6})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta$ و $\tau$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta) \leq 6$.

(۴) فرض می کنیم $f_\alpha \geq 3$ و $f_\beta < 4$، در این صورت $m' > 16$. بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. چون $m' > 16$، پس دورهای $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \beta_{j_3}$ و $\beta_{j_4}$ وجود دارند که $S(\gamma) \cap S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3}\beta_{j_4}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۳، جایگشت $\sigma$ در $A_n$ از مرتبه ۶ وجود دارد که $d(\beta, \sigma^3) = 2$ و $S(\sigma) = S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3}\beta_{j_4})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\gamma$ و $\sigma^3$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta) \leq 6$.

□

**لم ۴.۲.۳.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ در $A_n$ به ترتیب از مرتبه های اول ۳ و $q$ باشند که $(3 < q)$ . در این صورت $d(\alpha,\beta) \leq 8$.

برهان. فرض می کنیم $\beta = \beta_1 \cdots \beta_{m'}$. سه حالت زیر را در نظر می گیریم.

(۱) فرض می کنیم $f_\alpha \geq 4$، بنا به لم ۵.۱.۳، دور $\delta$ از مرتبه ۲ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است و $|S(\delta)| = 4$.

(۱.۱) فرض می کنیم $f_\beta \geq 3$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma'$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. چون $|S(\gamma') \cup S(\delta)| \leq 7$ و $n \geq 52$ پس $|F(\gamma') \cap F(\delta)| \geq 40$ و به ازای

عنصرهای متمایز $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 \in F(\gamma') \cap F(\delta)$، ۵ـدور $\lambda = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\lambda$ و $\gamma'$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\lambda$ و $\delta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha, \beta) \leq 8$.

(۲.۱) فرض می کنیم $f_\beta < 3$، در این صورت $q < 11$ یا $q \geq 11$. بنا به لم ۳.۱.۲، $3q$ـدور $\sigma$ وجود دارد که فاصله $\sigma^q$ آن از $\beta$ برابر دو است. فرض کنیم $\sigma^q = \sigma_1 \cdots \sigma_q$. اگر $q \geq 11$، دورهای $\sigma_{i_1}$، $\cdots$، $\sigma_{i_4}$ و $\sigma_{i_5}$ وجود دارند که $S(\delta) \cap S(\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_5}) = \emptyset$. بنا به لم ۳.۱.۲، دور $\tau$ از مرتبه ۱۵ وجود دارد که $d(\sigma^q, \tau^3) = 2$ و $S(\tau) = S(\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_5})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\tau^3$ و $\delta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha, \beta) \leq 8$.

اگر $q < 11$ آنگاه $m' \geq 5$. چون $|S(\sigma) \cup S(\delta)| \leq 3q + 4$، پس $|S(\sigma) \cup S(\delta)| \geq 5$ به ازای عنصرهای متمایز $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 \in F(\gamma') \cap F(\delta)$، ۵ـدور $\lambda = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\lambda$ و $\sigma^q$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\lambda$ و $\delta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha, \beta) \leq 8$.

(۲) فرض می کنیم $f_\alpha \leq 3$ و $f_\beta < 3$ در این صورت $m' \geq 3$. بنا به لم ۲.۱.۲، $3q$ـدور $\sigma$ وجود دارد که فاصله $\sigma^q$ آن از $\beta$ برابر دو است. بنا به لم ۳.۱.۲، $d(\alpha, \sigma^q) \leq 6$. بنابراین $d(\alpha, \beta) \leq 8$.

(۳) فرض می کنیم $f_\alpha \leq 3$ و $f_\beta \geq 3$. بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. بنا به لم ۳.۱.۲، $d(\alpha, \gamma) \leq 6$. بنابراین $d(\alpha, \beta) \leq 8$.

$\square$

**لم ۵.۲.۳.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ در $A_n$ به ترتیب از مرتبه های اول $p$ و $q$ باشند که $3 \neq p \leq q$. اگر $f_\alpha \geq 3$ یا $f_\beta \geq 3$ آنگاه $d(\alpha, \beta) \leq 8$.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_m$ و $\beta = \beta_1 \cdots \beta_{m'}$. سه حالت را در نظر می گیریم.

(۱) فرض می کنیم $f_\alpha \geq 3$ و $f_\beta \geq 3$. چون $f_\alpha \geq 3$ بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. چون $f_\beta \geq 3$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma'$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. بنا به لم ۶.۱.۳، فاصله بین $\gamma$ و $\gamma'$ حداکثر چهار است. بنابراین $d(\alpha, \beta) \geq 8$.

(۲) فرض می کنیم $f_\alpha \geq 3$ و $f_\beta < 3$. چون $f_\alpha \geq 3$ بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. چون $f_\beta < 3$، بنا به لم ۱.۱.۳، $m' \geq 3$. همچنین دور $\beta_{j_1}$ وجود دارد که $|S(\gamma) \cap S(\beta_{j_1})| \geq 1$. بنا به لم ۳.۱.۲، $3q$ـدور $\sigma$ وجود دارد که $d(\beta, \sigma^q) = 2$ و $S(\sigma) = S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3})$. پس $|S(\gamma) \cap S(\sigma)| \geq 1$ و $|S(\gamma) \cup S(\sigma)| \leq 3q + 2$. در نتیجه، $|F(\sigma) \cap F(\gamma)| \geq 4$ پس به ازای عنصرهای متمایز $v_1, v_2, v_3, v_4 \in F(\sigma) \cap F(\gamma)$،

جایگشت $\lambda=(v_۱,v_۲)(v_۳,v_۴)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\lambda$ و $\gamma$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\lambda$ و $\sigma^q$ برابر دو است. در نتیجه $d(\alpha,\beta)\leq ۸$.

اگر $m'=۳$، آنگاه $q\geq ۱۳$. بنا به لم ۳.۱.۲، ۳$q$ـدور $\sigma$ وجود دارد که فاصله آن از $\sigma^q$ برابر دو است. فرض می کنیم $\sigma^q=\sigma_۱\cdots\sigma_q$. چون $q\geq ۱۳$، دورهای $\sigma_{i_۱}$، $\sigma_{i_۲}$، $\sigma_{i_۳}$ و $\sigma_{i_۴}$ وجود دارند که $S(\gamma)\cap S(\sigma_{i_۱}\sigma_{i_۲}\sigma_{i_۳}\sigma_{i_۴})=\emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۳، جایگشت $\tau$ در $A_n$ از مرتبه ۲$q$ وجود دارد که $d(\sigma^q,\tau^q)=۲$ و $S(\tau)=S(\sigma_{i_۱}\sigma_{i_۲}\sigma_{i_۳}\sigma_{i_۴})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\tau^q$ و $\gamma$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\leq ۸$.

(۳) فرض می کنیم $f_\alpha<۳$ و $f_\beta\geq ۳$. چون $f_\beta\geq ۳$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. چون $f_\alpha<۳$ بنا به لم ۱.۱.۳، $m>۳$ و دور $\alpha_i$ وجود دارد که $|S(\alpha_{i_۱})\cap S(\gamma)|\geq ۱$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۳$p$ وجود دارد که $d(\alpha,\tau^p)=۲$ و $S(\tau)=S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\alpha_{i_۳})$. پس $S(\gamma)\cap S(\tau)\geq ۱$. درنتیجه، $|F(\tau)\cap F(\gamma)|\geq ۴$ و به ازای عنصرهای متمایز $v_۱,v_۲,v_۳,v_۴\in F(\tau)\cap F(\gamma)$، جایگشت $\delta=(v_۱,v_۲)(v_۳,v_۴)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta$ و $\tau^p$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\delta$ و $\gamma$ برابر دو است. در نتیجه، $d(\alpha,\beta)\leq ۸$.

$\square$

**لم ۶.۲.۳.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ از $A_n$ به ترتیب از مرتبه های اول $p$ و $q$ $q\geq p\neq ۳$، باشند به طوری که $\beta=\beta_۱\cdots\beta_{m'}$، $f_\beta<۳$ و $f_\alpha<۳$. اگر $m'=۳$ آنگاه $d(\alpha,\beta)\leq ۱۰$. اگر $m'>۳$، $d(\alpha,\beta)\leq ۸$.

برهان. **حالت اول:** فرض می کنیم $m'=۳$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول ۳$q$ وجود دارد که $d(\beta,\sigma^q)=۲$. فرض می کنیم $\sigma^q=\sigma_۱\cdots\sigma_q$ در این صورت $\sigma^q$ حاصل ضربی از ۳ـدورها است. فرض کنیم $p>۳$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۳$p$ وجود دارد که $d(\alpha,\tau^p)=۲$. در این صورت $\tau^p$ حاصل ضربی از ۳ـدورها است. بنا به لم ۱.۲.۳، $d(\tau^p,\sigma^q)\leq ۶$، پس $d(\alpha,\beta)\leq ۱۰$. فرض می کنیم $p=۲$. بنا به لم ۳.۱.۳(۱)، جایگشت $\tau$ از مرتبه ۳ وجود دارد که $d(\alpha,\tau)=۲$. بنا به لم ۳.۲.۳، $d(\tau,\sigma^q)\leq ۶$، پس $d(\alpha,\beta)\leq ۱۰$.

**حالت دوم:** فرض می کنیم $\alpha=\alpha_۱\cdots\alpha_m$ و $m'>۳$. اگر $p>۳$، آنگاه فرض می کنیم $\alpha'=\alpha_۴\cdots\alpha_m$، $\gamma_۱=\beta_۴\beta_۵\cdots\beta_{m'}$، $\gamma_۲=\beta_۱\beta_۵\cdots\beta_{m'}$، $\gamma_۳=\beta_۲\beta_۵\cdots\beta_{m'}$ و $\gamma_۴=\beta_۳\beta_۵\cdots\beta_{m'}$. چون

$$|(S(\alpha')\cap S(\gamma_۱))\cup(S(\alpha')\cap S(\gamma_۲))\cup(S(\alpha')\cap S(\gamma_۳))\cup(S(\alpha')\cap S(\gamma_۴))|\geq(m-۳)p\geq ۱۳,$$

دور $\gamma_j$ وجود دارد که $|(S(\alpha')\cap S(\gamma_j))|\geq ۴$.

بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\tau$ به طول ۳$p$ وجود دارد که $d(\alpha,\tau^p)=۲$ و $S(\tau)=S(\alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳)$.

به همین ترتیب، دور $\sigma$ به طول ۳$q$ وجود دارد که $d(\beta,\sigma^q)=۲$ و $S(\sigma)=S(\beta)-S(\gamma_j)$.

چون $|F(\tau)\cap F(\sigma)|\geq ۴$، به ازای عنصرهای متمایز $v_۱,v_۲,v_۳,v_۴\in F(\sigma^q)\cap F(\tau^p)$ جایگشت $\delta=(v_۱,v_۲)(v_۳,v_۴)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta$ و $\tau^p$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\delta$ و $\sigma^q$ برابر دو است. در نتیجه $d(\alpha,\beta)\leq ۸$. اگر $p=۲$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور به طول $۳q$ وجود دارد که $d(\beta,\sigma^q)=۲$ و $\sigma^q$ حاصل ضربی از ۳ـدورهاست. بنا به لم ۳.۲.۳، $d(\alpha,\sigma^q)\leq ۶$. در نتیجه، $d(\alpha,\beta)\leq ۸$.

□

## ۳.۳ کران های قطر گراف توانی محض گروه متناوب

در این بخش ابتدا کران های قطر گراف توانی محض گروه متناوب را مشخص می کنیم.

**نتیجه ۱.۳.۳.** اگر $\mathcal{P}^*(A_n)$ همبند باشد، آنگاه $diam(\mathcal{P}^*(A_n))\leq ۱۱$.

*برهان.* فرض می کنیم $x$ و $y$ دو عنصر دلخواه در $A_n$ باشند. اگر مرتبه های $x$ و $y$ اول باشد، آنگاه بنا به لم های ۱.۲.۳، ۲.۲.۳، ۳.۲.۳، ۴.۲.۳ ، ۵.۲.۳ و ۶.۲.۳، $d(x,y)\leq ۱۰$. فرض می کنیم $o(y)$ اول نباشد و $q$ کوچکترین عامل اول $o(y)$ باشد، پس $y\sim y^{o(y)/q}$. فرض می کنیم $y^{o(y)/q}=y_۱\cdots y_{m'}$ تجزیه $y^{o(y)/q}$ به $q$ـدورها باشد. پس $m'=۳$، $f_{y^{o(y)/q}}\geq ۳$ یا $m'\neq ۳$. اگر $o(x)$ اول نباشد و $p$ حداقل عامل اول $o(x)$ باشد، آنگاه $x\sim x^{o(x)/p}$.

فرض می کنیم $x^{o(x)/p}=x_۱\cdots x_m$ تجزیه $x^{o(x)/p}$ به $p$ـدورها باشد. درنتیجه، $m=۳$، $f_{x^{o(x)/p}}\geq ۳$ یا $m\neq ۳$. بنا به لم های ۱.۲.۳، ۲.۲.۳، ۳.۲.۳، ۴.۲.۳ ، ۵.۲.۳ و ۶.۲.۳، $d(x^{o(x)/p},y^{o(y)/q})\leq ۸$. بنابراین $d(x,y)\leq ۱۰$. اگر $o(x)$ اول باشد، آنگاه بنا به لم های ۱.۲.۳، ۲.۲.۳، ۳.۲.۳، ۴.۲.۳ ، ۵.۲.۳ و ۶.۲.۳، $d(x,y^{o(y)/q})\leq ۱۰$. بنابراین $d(x,y)\leq ۱۱$. درنتیجه، $diam(\mathcal{P}^*(A_n))\leq ۱۱$. □

**لم ۱.۳.۳.** اگر $\mathcal{P}^*(A_n)$ همبند باشد، آنگاه $diam(\mathcal{P}^*(A_n))\geq ۶$.

*برهان.* بنا به قضیه چبیشف، عدد اولی مانند $p$ وجود دارد که $[n/۲]<p<n$. فرض می کنیم

$$\alpha=(۱,\cdots,p) \quad \text{و} \quad \beta=(n,n-۱,\cdots,n-p+۱).$$

بنا به لم ۱.۳.۲، $d(\alpha,\beta)=۲t$، که در آن $t$ یک عدد صحیح مثبت است. چون $o(\alpha)=o(\beta)=p$ پس $d(\alpha,\beta)>۲$. اگر $t=۲$ آنگاه $\gamma,\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ در $S_n$ وجود دارند که $\alpha\sim\gamma_۲\sim\gamma\sim\gamma_۱\sim\beta$، $o(\gamma_۱)=o(\gamma_۲)=pq$ و $o(\gamma)=q$، جایی که $q$ اول است. بنابراین $\gamma\in C_{S_n}(\alpha)\cap C_{S_n}(\beta)$. چون $C_{S_n}(\alpha)=\langle\alpha\rangle\times S_{\{p+۱,\cdots,n\}}$، $C_{S_n}(\beta)=\langle\beta\rangle\times S_{\{۱,\cdots,n-p\}}$ و $p\nmid q$ پس $\gamma\in S_{\{۱,\cdots,n-p\}}\cap S_{\{p+۱,\cdots,n\}}=۱$ که تناقض است. بنابراین $d(\alpha,\beta)\geq ۶$. پس $diam(\mathcal{P}^*(A_n))\geq ۶$.

□

**لم ۲.۳.۳.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ در $A_n$ به ترتیب از مرتبه ۳ و عدد اول $q$ باشند که $q > ۳$. اگر به ازای $p'$ بزرگترین عامل اول $n(n-۱)(n-۲)$، $[\frac{n-۲}{p'}] \geq ۳p' + ۲$، آنگاه $d(\alpha, \beta) \leq ۶$.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_m$ و $\beta = \beta_۱ \cdots \beta_{m'}$. اگر $\alpha\beta = \beta\alpha$ آنگاه بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله آن ها از هم برابر دو است. فرض کنیم $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ و برای ادامه اثبات پنج حالت زیر را در نظر می گیریم.

(۱) اگر $f_\alpha \geq ۴$، $f_\beta \geq ۳$ و $|F(\alpha) \cap F(\beta)| \geq ۴$، آنگاه به ازای عنصرهای متمایز $v_۱, v_۲, v_۳, v_۴ \in F(\alpha) \cap F(\beta)$، جایگشت $\delta = (v_۱, v_۲)(v_۳, v_۴)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta$ و $\alpha$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\delta$ و $\beta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha, \beta) \leq ۴$.

(۲) اگر $f_\alpha \geq ۴$، $f_\beta \geq ۳$ و $|F(\alpha) \cap F(\beta)| < ۴$، آنگاه $m > ۷$. چون $f_\beta \geq ۳$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. چون $m \geq ۷$، وجود دارند $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$، $\alpha_{i_۳}$ و $\alpha_{i_۴}$ به طوری که $S(\gamma) \cap S(\alpha_{i_۱} \cdots \alpha_{i_۴}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۳، جایگست $\tau$ از مرتبه ۶ وجود دارد که $d(\alpha, \tau^۳) = ۲$ و $S(\tau) = S(\alpha_{i_۱} \cdots \alpha_{i_۴})$. پس $S(\gamma) \cap S(\tau^۳) = \emptyset$. بنابراین $\gamma$ و $\tau^۳$ با هم جابه جا می شوند، پس بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله آن ها از هم برابر دو است. درنتیجه، $d(\alpha, \beta) \leq ۶$.

(۳) اگر $f_\alpha \geq ۴$ و $f_\beta < ۳$، آنگاه $m' > ۷$. چون $f_\alpha \geq ۴$، بنا به لم ۵.۱.۳، جایگشت $\delta$ در $A_n$ از مرتبه ۲ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. چون $m' > ۷$، دورهای $\beta_{j_۱}$، $\beta_{j_۲}$ و $\beta_{j_۳}$ وجود دارند که $S(\delta) \cap S(\beta_{j_۱}\beta_{j_۲}\beta_{j_۳}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول $۳q$ وجود دارد که $d(\beta, \sigma^q) = ۲$ و $S(\sigma) = S(\beta_{j_۱}\beta_{j_۲}\beta_{j_۳})$. بنابراین $S(\sigma) \cap S(\delta) = \emptyset$ و بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta$ و $\sigma^q$ برابر دو است. درنتیجه، $d(\alpha, \beta) \leq ۶$.

(۴) اگر $f_\alpha < ۴$ و $f_\beta \geq ۳$، آنگاه $m > ۷$. چون $f_\beta \geq ۳$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ـدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است. چون $m \geq ۷$، دورهای $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$، $\alpha_{i_۳}$ و $\alpha_{i_۴}$ وجود دارند که $S(\gamma) \cap S(\alpha_{i_۱} \cdots \alpha_{i_۴}) = \emptyset$. بنا به لم ۵.۱.۳، جایگشت $\tau$ به طول ۶ وجود دارد که $d(\alpha, \tau^۳) = ۲$ و $S(\alpha_{i_۱} \cdots \alpha_{i_۴}) = S(\tau)$. بنابراین $S(\tau) \cap S(\gamma) = \emptyset$ و بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\gamma$ و $\tau^۳$ برابر دو است. درنتیجه، $d(\alpha, \beta) \leq ۶$.

(۵) اگر $f_\alpha < ۴$ و $f_\beta < ۳$، آنگاه $m > ۱۶$ و $m' > ۷$. در این صورت دورهای $\alpha_{i_۱}$، $\alpha_{i_۲}$، $\beta_{j_۱}$، $\beta_{j_۲}$ و $\beta_{j_۳}$ وجود دارند که $S(\alpha_{i_۱}) \cap S(\beta_{j_۱}) \neq \emptyset$، $|S(\beta_{j_۲}) \cap S(\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲})| \geq ۲$ و $S(\beta_{j_۳}) \cap S(\alpha_{i_۲}) \neq \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول $۳q$ وجود دارد که $d(\beta, \sigma^q) = ۲$ و $S(\sigma) = S(\beta_{j_۱}\beta_{j_۲}\beta_{j_۳})$. بنابراین $S(\gamma) \subset S(\alpha_{i_۱} \cdots \alpha_{i_t}) \cup F(\alpha)$ و $t \leq ۳q - ۲$. چون $m \geq ۳q + ۲$ پس $m - t \geq ۴$. درنتیجه، دورهای $\alpha_{i_{t+۱}}$، $\alpha_{i_{t+۲}}$، $\alpha_{i_{t+۳}}$ و $\alpha_{i_{t+۴}}$ وجود دارند که $S(\sigma) \cap S(\alpha_{i_{t+۱}}\alpha_{i_{t+۲}}\alpha_{i_{t+۳}}\alpha_{i_{t+۴}}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۳، جایگشت $\tau$ در $A_n$ از مرتبه ۶ وجود دارد که $d(\alpha, \tau^۳) = ۲$ و $S(\tau) = S(\alpha_{i_{t+۱}}\alpha_{i_{t+۲}}\alpha_{i_{t+۳}}\alpha_{i_{t+۴}})$. بنابراین $S(\tau) \cap S(\sigma) = \emptyset$ و بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\sigma^q$ و $\tau^۳$ برابر دو است. درنتیجه، $d(\alpha, \beta) \leq ۶$.

□

**لم ۳.۳.۳.** فرض کنیم $\alpha$ و $\beta$ از $A_n$ به ترتیب از مرتبه اول $p$ و $q$ باشند، $q \geq p \neq ۳$ و $q > ۳$.
اگر به ازای $p'$ بزرگترین عامل اول $n(n-۱)(n-۲)$، $[\frac{n-۲}{p'}] \geq ۳p'+۲$، آنگاه $d(\alpha,\beta) \leq ۶$.

*برهان.* فرض می کنیم $\alpha = \alpha_۱ \cdots \alpha_m$ و $\beta = \beta_۱ \cdots \beta_{m'}$. اگر $\alpha\beta = \beta\alpha$ بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله آن ها از هم برابر دو است. فرض می کنیم $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ و برای ادامه اثبات پنج حالت زیر را در نظر می گیریم.

(۱) اگر $f_\alpha \geq ۳$، $f_\beta \geq ۳$ و $|F(\alpha)\cap F(\beta)| \geq ۳$، به ازای عنصرهای $v_۱, v_۲, v_۳ \in F(\alpha)\cap F(\beta)$، ۳ــدور $\gamma = (v_۱, v_۲, v_۳)$ وجود دارد. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\alpha$ و $\gamma$ برابر دو است. به همین ترتیب، فاصله $\gamma$ و $\beta$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha,\beta) \leq ۴$.

(۲) اگر $f_\alpha \geq ۳$، $f_\beta \geq ۳$ و $|F(\alpha)\cap F(\beta)| < ۳$، آنگاه $mp + m'q > p'(۳p'+۲)$، پس $m + m' > ۳p'+۲ \geq ۱۷$، در نتیجه، $m \geq ۷$ یا $m' \geq ۷$. فرض می کنیم $m' \geq ۷$. چون $f_\alpha \geq ۳$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ــدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. چون $m' \geq ۷$، پس دورهای $\beta_{j_۱}$، $\beta_{j_۲}$، $\beta_{j_۳}$ و $\beta_{j_۴}$ وجود دارند که $S(\gamma)\cap S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_۴}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۳، جایگشت $\delta$ از مرتبه $۲q$ وجود دارد که $d(\beta,\delta^q) = ۲$ و $S(\delta) = S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_۴})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta^q$ و $\gamma$ برابر دو است. درنتیجه، $d(\alpha,\beta) \leq ۶$.

(۳) اگر $f_\alpha \geq ۳$ و $f_\beta < ۳$، آنگاه $m' > ۷$. چون $f_\alpha \geq ۳$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ــدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است. چون $m' > ۷$ پس دورهای $\beta_{j_۱}$، $\beta_{j_۲}$، $\beta_{j_۳}$ و $\beta_{j_۴}$ وجود دارند که $S(\gamma)\cap S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_۴}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۳، جایگشت $\delta$ از مرتبه $۲q$ وجود دارد که $d(\beta,\delta^q) = ۲$ و $S(\delta) = S(\beta_{j_۱}\cdots\beta_{j_۴})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta^q$ و $\gamma$ برابر دو است. درنتیجه، $d(\alpha,\beta) \leq ۶$.

(۴) اگر $f_\alpha < ۳$ و $f_\beta \geq ۳$، آنگاه به ازای $p > ۳$، $m > ۷$ و به ازای $p = ۲$، $m > ۱۶$. چون $f_\beta \geq ۳$، بنا به لم ۳.۱.۲، ۳ــدور $\gamma$ وجود دارد که فاصله آن از $\beta$ برابر دو است.

(۴.۱) فرض می کنیم $p > ۳$. چون $m > ۷$ پس دورهای $\alpha_{j_۱}$، $\alpha_{j_۲}$، $\alpha_{j_۳}$ و $\alpha_{j_۴}$ وجود دارند که $S(\gamma)\cap S(\alpha_{j_۱}\cdots\alpha_{j_۴}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۳، جایگشت $\delta$ از مرتبه $۲p$ وجود دارد که $d(\alpha,\delta^p) = ۲$ و $S(\delta) = S(\alpha_{j_۱}\cdots\alpha_{j_۴})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta^p$ و $\gamma$ برابر دو است. درنتیجه، $d(\alpha,\beta) \leq ۶$.

(۴.۲) فرض می کنیم $p = ۲$. چون $m > ۱۶$ پس دورهای $\alpha_{j_۱}$، $\cdots$، $\alpha_{j_۹}$ و $\alpha_{j_{۱۰}}$ وجود دارند که $S(\gamma)\cap S(\alpha_{j_۱}\cdots\alpha_{j_{۱۰}}) = \emptyset$. بنا به لم ۳.۱.۳(۱)، جایگشت $\delta$ از مرتبه ۱۰ وجود دارد که $d(\alpha,\delta^۲) = ۲$ و $S(\delta) = S(\alpha_{j_۱}\cdots\alpha_{j_{۱۰}})$. بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta^۲$ و $\gamma$ برابر دو است. درنتیجه، $d(\alpha,\beta) \leq ۶$.

(۵) فرض می کنیم $f_\alpha < 3$ و $f_\beta < 3$، آنگاه $m' > 7$. برای اثبات این قسمت دو حالت زیر در نظر می گیریم.

(۵.۱) فرض می کنیم $p > 3$. آنگاه دورهای $\alpha_{i_1}$، $\alpha_{i_2}$، $\alpha_{i_3}$، $\beta_{j_1}$ و $\beta_{j_2}$ وجود دارند که $S(\alpha_{i_1}) \cap S(\beta_{j_1}) \neq \emptyset$، $|S(\alpha_{i_2}) \cap S(\beta_{j_1}\beta_{j_2})| \geq 2$ و $S(\alpha_{i_3}) \cap S(\beta_{j_2}) \neq \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\delta$ به طول $3p$ وجود دارد که $d(\alpha, \delta^p) = 2$ و $S(\delta) = S(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\alpha_{i_3})$. درنتیجه، $S(\delta) \subset S(\beta_{j_1} \cdots \beta_{j_t}) \cup F(\beta)$ و $t \leq 3p - 2$. چون $m' \geq 3p + 2$ پس $m' - t \geq 4$ و دورهای $\beta_{j_{t+1}}$، $\beta_{j_{t+2}}$، $\beta_{j_{t+3}}$ و $\beta_{j_{t+4}}$ وجود دارند که $S(\delta) \cap S(\beta_{j_{t+1}}\beta_{j_{t+2}}\beta_{j_{t+3}}\beta_{j_{t+4}}) = \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۳، جایگشت $\tau$ در $A_n$ از مرتبه $2q$ وجود دارد که $d(\beta, \tau^q) = 2$ و $S(\tau) = S(\beta_{j_{t+1}}\beta_{j_{t+2}}\beta_{j_{t+3}}\beta_{j_{t+4}})$. پس $S(\tau) \cap S(\delta) = \emptyset$، بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta^p$ و $\tau^q$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha, \beta) \leq 6$.

(۵.۲) فرض می کنیم $p = 2$، آنگاه $m > 16$ و دورهای $\alpha_{i_1}$، $\alpha_{i_2}$، $\beta_{j_1}$، $\beta_{j_2}$ و $\beta_{j_3}$ وجود دارند که $S(\alpha_{i_1}) \cap S(\beta_{j_1}) \neq \emptyset$، $|S(\beta_{j_2}) \cap S(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2})| \geq 2$ و $S(\beta_{j_3}) \cap S(\alpha_{i_2}) \neq \emptyset$. بنا به لم ۲.۱.۲، دور $\sigma$ به طول $3q$ وجود دارد که $d(\beta, \sigma^q) = 2$ و $S(\sigma) = S(\beta_{j_1}\beta_{j_2}\beta_{j_3})$. درنتیجه، $S(\sigma) \subset S(\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_t}) \cup F(\alpha)$ و $t \leq 3q - 2$. چون $2m \geq n - 2 \geq q(3q + 2)$ و $q \geq 5$ پس $m \geq 6q + 4 \geq 3q + 10$. بنابراین $m - t > 10$، و دورهای $\alpha_{i_{t+1}}$، $\cdots$، $\alpha_{i_{t+9}}$ و $\alpha_{i_{t+10}}$، وجود دارند که $S(\sigma) \cap S(\alpha_{i_{t+1}} \cdots \alpha_{i_{t+10}}) = \emptyset$. بنا به لم ۳.۱.۳(۱)، جایگشت $\delta$ در $A_n$ از مرتبه ۵ وجود دارد که فاصله آن از $\alpha$ برابر دو است و $S(\delta) = S(\alpha_{i_{t+1}} \cdots \alpha_{i_{t+10}})$. پس $S(\sigma) \cap S(\delta) = \emptyset$، بنا به لم ۱.۱.۲، فاصله $\delta$ و $\sigma^q$ برابر دو است. بنابراین $d(\alpha, \beta) \leq 6$.

□

**لم ۴.۳.۳.** فرض کنیم $p'$ بزرگترین عامل اول $n(n-1)(n-2)$ باشد و $[\frac{n-2}{p'}] \geq 3p' + 2$. در این صورت $diam(\mathcal{P}^*(A_n)) \leq 8$.

برهان. فرض می کنیم $x$ و $y$ دو عنصر دلخواه از $A_n$ باشند. فرض می کنیم $o(x)$ و $o(y)$ اول نباشند و $p$ و $q$ به ترتیب کوچکترین عامل های اول $o(x)$ و $o(y)$ باشند. در این صورت $x \sim x^{o(x)/p}$ و $y \sim y^{o(y)/q}$. اگر $pq \leq 9$، آنگاه بنا به لم های ۱.۲.۳، ۲.۲.۳ و ۳.۲.۳، $d(x^{o(x)/p}, y^{o(y)/q}) \leq 6$. بنابراین $d(x, y) \leq 8$.

اگر $pq > 9$، آنگاه بنا به لم های ۲.۳.۳ و ۳.۳.۳، $d(x^{o(x)/p}, y^{o(y)/q}) \leq 6$. بنابراین $d(x, y) \leq 8$.

فرض می کنیم $o(x)$ و $o(y)$ اول باشند. اگر $o(x)o(y) \leq 9$، آنگاه بنا به لم های ۱.۲.۳، ۲.۲.۳ و ۳.۲.۳، $d(x, y) \leq 6$. اگر $o(x)o(y) > 9$، آنگاه بنا به لم های ۲.۳.۳ و ۳.۳.۳، $d(x, y) \leq 6$.

فرض می کنیم $o(x)$ اول باشد و $o(y)$ اول نباشد. در این صورت $y \sim y^{o(y)/q}$، جایی که $q$ کوچکترین عامل اول $o(y)$ است. اگر $o(x)o(y^{o(y)/q}) \leq ۹$، آنگاه بنا به لم های ۱.۲.۳، ۲.۲.۳ و ۳.۲.۳، $d(x, y^{o(y)/q}) \leq ۶$. اگر $o(x)o(y^{o(y)/q}) > ۹$، انگاه بنا به لم های ۲.۳.۳ و ۳.۳.۳، $d(x, y^{o(y)/q}) \leq ۶$. درنتیجه $d(x, y) \leq ۸$. برهان کامل است. □

برای مشاهده ی عددهایی که در شرایط قضیه بالا صدق می کنند، می توانید از نرم افزار گپ و نوشتن یک برنامه، شبیه به آنچه در پیوست درج شده است، استفاده کنید. در جدول زیر برخی از عددهایی که این شرایط را دارند به همراه شرایط قضیه برای هر عدد ذکر شده است.

جدول ۱.۳: عددهای کمتر از ۱۰۰۰۰ که در شرایط قضیه قبل صدق می کنند

| $n$ | عامل های اول $n(n-۱)(n-۲)$ | $[\frac{n-۲}{p}]$ |
|---|---|---|
| ۲۰۲۵ | ۲,۲,۲,۳,۳,۳,۳,۵,۵,۷,۱۱,۱۷,۱۷,۲۳ | ۸۷ |
| ۲۴۳۲ | ,۲,۲,۲,۲,۲,۲,۲,۳,۳,۳,۳,۵,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹ | ۱۲۷ |
| ۳۲۵۰ | ۲,۲,۲,۲,۲,۳,۳,۵,۵,۵,۷,۱۳,۱۹,۱۹,۲۹ | ۱۱۲ |
| ۵۲۹۲ | ۲,۲,۲,۳,۳,۳,۵,۷,۷,۱۱,۱۳,۲۳,۲۳,۳۷ | ۱۴۲ |
| ۷۱۰۶ | ۲,۲,۲,۲,۲,۲,۲,۳,۵,۷,۷,۱۱,۱۷,۱۹,۲۹,۳۷ | ۱۹۲ |
| ۷۵۶۹ | ۲,۲,۲,۲,۳,۳,۷,۱۱,۲۳,۲۹,۲۹,۴۳,۴۷ | ۱۶۱ |
| ۹۸۰۲ | ۲,۲,۲,۲,۳,۳,۳,۳,۵,۵,۷,۷,۱۱,۱۱,۱۳,۱۳,۲۹ | ۳۳۷ |

بنا به نتیجه ۱.۳.۳، و بنا به لم های ۱.۳.۳ و ۴.۳.۳، قضیه زیر حاصل می شود.

**قضیه ۱.۳.۳.** فرض کنیم $p$ بزرگترین عامل اول $n(n-۱)(n-۲)$ باشد. اگر $[\frac{n-۲}{p}] \geq ۳p+۲$، آنگاه $۶ \leq diam(\mathcal{P}^*(A_n)) \leq ۸$، درغیر این صورت، $۶ \leq diam(\mathcal{P}^*(A_n)) \leq ۱۱$.

# فصل ۴

# قطر گراف توانی محض گروه های دووجهی و کواترنیون

هدف این فصل بیان قطر گراف توانی محض گروه های دووجهی و کواترنیون می باشد و شامل دو بخش است. در بخش اول قطر گراف توانی محض گروه دووجهی و در بخش دوم قطر گراف توانی محض گروه کواترنیون را مشخص می کنیم.

## ۱.۴ قطر گراف توانی محض گروه دووجهی

برای هر عدد صحیح $n \geq ۳$، گروه دووجهی $D_n = \langle a, b\rangle$ یک گروه ناآبلی از مرتبه $۲n$ است که توسط دو عنصر $a$ و $b$ با شرایط زیر تولید می شود:

$(i)\ \ o(a) = n, \ \ o(b) = ۲;$

$(ii)\ \ ba = a^{-۱}b = a^{n-۱}b.$

## ساختار گراف توانی گروه دووجهی

چون $o(a)=n$، پس $H=\langle a\rangle$ یک زیرگروه دوری از $D_n$ است که $|H|=n$. دراین صورت $\mathcal{P}(\langle a\rangle)$ زیرگراف همبند از $\mathcal{P}(D_n)$ است. چون $a^n=e=b^۲$ پس

$$(ab)^۲=a(ba)b=a(a^{n-۱}b)b=e$$

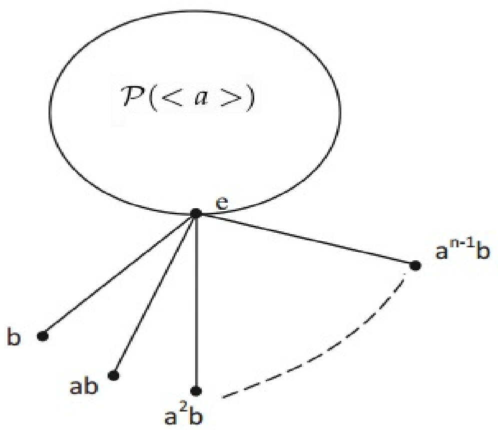
و

$$(a^{n-۱}b)^۲=a^{n-۱}(ba)a^{n-۲}b=a^{n-۱}(a^{n-۱}b)a^{n-۲}b=(a^{n-۲}b)^۲.$$

با ادامه دادن این روند داریم

$$(a^{n-۱}b)^۲=(a^{n-۲}b)^۲=\cdots=(a^۲b)^۲=(a^۲b)=e.$$

بنابراین توان هر یک از عضوهای مجموعه $\{b,ab,a^۲b,\cdots,a^{n-۱}b\}$ برابر با خود عضو یا برابر $e$ است. همچنین، به ازای هر $۱\leq i\leq n-۱$ توان هر $a^i$ برابر با توانی از $a$ است که با هیچ یک از اعضای مجموعه $\{b,ab,a^۲b,\cdots,a^{n-۱}b\}$ برابر نیست. از این رو نمودار گراف $\mathcal{P}(D_n)$ به صورت زیر می باشد.




شکل ۱.۴: $\mathcal{P}(D_n)$ برای $n\geq ۳$.

**قضیه ۱.۱.۴.** اگر $n\geq ۳$، آنگاه $diam(\mathcal{P}^*(D_n))=\infty$.

*برهان.* چون هر عنصر دلخواه از $D_n$ با عنصر همانی مجاور است پس قطر گراف توانی گروه دووجهی برابر دو است. چون با حذف عنصر همانی، گراف ناهمبند است، در این صورت بنا به تعریف قطر گراف، قطر گراف توانی محض گروه دووجهی نامتناهی است.

□

## ۲.۴ قطر گراف توانی گروه کواترنیون

برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$، گروه کواترنیون $Q_n = \langle a, b \rangle$ یک گروه ناآبلی از مرتبه $۴n$ است که توسط دو عنصر $a$ و $b$ با شرایط زیر تولید می شود:

$(i)\;\; o(a) = ۲n, \;\; a^n = b^۲;$
$(ii)\;\; ba = ba^{-۱} = ba^{۲n-۱}.$

### ساختار گراف توانی گروه کواترنیون

به ازای $۱ \leq i \leq ۲n - ۱$،

$$(a^ib)^۲ = a^{i-۱}(ab)a^ib = a^{i-۱}(ba^{۲n-۱})a^ib = (a^{i-۱}b)^۲.$$

بنابراین

$$(a^{۲n-۱}b)^۲ = (a^{۲n-۲}b)^۲ = (a^{۲n-۳}b)^۲ = \cdots = (a^nb)^۲ = (a^{n-۱}b)^۲ = \cdots = (a^۲b)^۲ = (ab)^۲ = b^۲ = a^n.$$

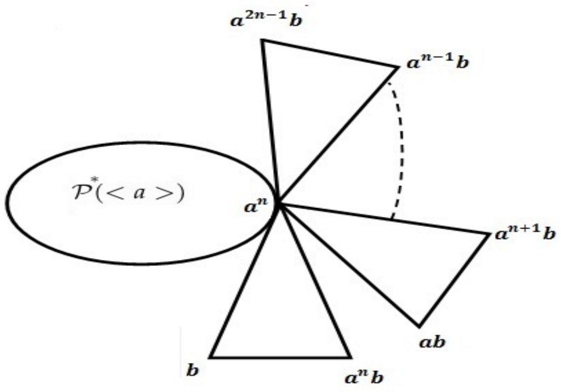
از رابطه فوق و با توجه به این که $a^{۲n} = e$ نتیجه می گیریم به ازای $۱ \leq i \leq ۲n - ۱$،

$$(a^ib)^۳ = (a^ib)^۲(a^ib) = a^{n+i}b$$
$$(a^{n+i}b)^۳ = (a^{n+i}b)^۲(a^{n+i}b) = a^ib$$

بنابراین مجموعه های زیر همگی، تنها زیرگروه های $Q_n$ می باشند:

$$H_۱ = \{e, a^n, b, a^nb\}, H_۲ = \{e, a^n, ab, a^{n+۱}b\}, H_۳ = \{e, a^n, a^۲b, a^{n+۲}b\}, \cdots،$$
$$H_n = \{e, a^n, a^{n-۱}b, a^{۲n-۱}b\}, \;\; H = \langle a \rangle.$$

که به ازای $۱ \leq j \leq n$، $|H_j| = ۴$ و $|H| = ۲n$. بنابراین با حذف راس همانی به ازای هر $۱ \leq j \leq n$، گراف $\mathcal{P}^*(H_i)$ یک گراف کامل به صورت $K_۳$ می باشد و گراف $\mathcal{P}^*(\langle a \rangle)$ یک زیر گراف القایی از $\mathcal{P}^*(Q_n)$ است که با تمام گراف های $\mathcal{P}^*(H_i)$ تنها در راس $a^n$ متصل است. در واقع راس $a^n$ یک نقطه اتصال برای همه ی زیرگراف های فوق است. از طرفی بجز $a^n$ هیچ یک از توان های $a$ با هیچ یک از اعضای مجموعه $\{b, ab, a^۲b, \cdots, a^{۲n-۱}b\}$ مجاور نیست. از این رو نمودار گراف $\mathcal{P}^*(Q_n)$ به صورت زیر است:




**شکل ۲.۴:** $\mathcal{P}^*(Q_n)$ برای $n \geq ۲$.

**قضیه ۱.۲.۴.** فرض کنیم $n \geq ۲$. در این صورت

(۱) اگر $n$ زوج باشد، آنگاه $diam(\mathcal{P}^*(Q_n)) = ۲$.

(۲) اگر $n$ فرد باشد، آنگاه $diam(\mathcal{P}^*(Q_n)) = ۳$.

*برهان.* فرض می کنیم $x$ و $y$ دو عنصر غیرهمانی و متمایز از $Q_n$ باشند. در صورتی که $x, y \in \{b, ab, a^۲b, \cdots, a^{۲n-۱}b\}$ آنگاه $x \sim a^n \sim y$، پس $d(x,y) = ۲$. حال فرض می کنیم $x, y \in \langle a \rangle$ در این صورت $x \sim a \sim y$ پس $d(x,y) \leq ۲$.

فرض می کنیم $n$ زوج باشد. اگر مرتبه هر دو زوج باشد، آنگاه واضح است که با هم مجاورند و اگر مرتبه یکی فرد باشد مولد محسوب می شود، چون مولدها با همه ی عنصرها مجاورند پس با هم مجاور هستند. بنابراین در صورتی که $n$ زوج باشد $d(x,y) = ۱$.

فرض می کنیم $n$ فرد باشد. در این صورت اگر $x = a^n$ و $y = a^۲$ آنگاه $x \nsim y$.

اگر $x \in \{b, ab, a^۲b, \cdots, a^{۲n-۱}b\}$ و $y = a^۲$ آنگاه چون $x$ تنها با عنصر $a^n$ از $\langle a \rangle$ مجاور است، پس $x \sim a^n \sim a \sim y$. بنابراین $d(x,y) = ۳$.

□

# مراجع

[۱] جمالی ع، (۱۳۸۰)، ” **مباحثی در نظریه گروهها**“ چاپ اول، انتشارات مبتکران.

[۲] درفشه م.ر، (۱۳۸۶)، ” **جبر جلد اول: گروه**“ چاپ اول، انتشارات وچاپ دانشگاه تهران.

[۳] ضرابی زاده ح، (۱۳۷۸)، ” **نظریه گراف ها و کاربردهای آن**“ چاپ اول، انتشارات موسسه فرهنگی هنری دیباگران تهران.

[4] Abawajy J., Kelarev A.V. and Chowdhury M. (**2013**), “Power Graphs: A Survey”, **Electronic Journal of Graph Theory and Applications**, **1, 125–147**.

[5] Bubboloni d., Iranmanesh M. A. and Shaker S. M. (**2017**), “Quotient graphs for power graphs”, **Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (to appear)**. Available at arXiv:1502.02966.

[6] Bubboloni d., Iranmanesh M. A. and Shaker S. M. (**2017**), “ 2-Connectivity of the power graph of finite alternating groups”, arXiv:1412.7324v1.

[7] Cameron P.J. and Ghosh S. (**2011**), “ The power graph of a finite group”, **Discrete Math, 311, 1220 − 1222**.

[8] Cameron P.J. (**2010**), “ The power graph of a finite group II ”, **J. Group Theory, 13, 779 − 783**.

[9] Chakrabarty Ivy., Ghosh S. and Sen M.K. (**2009**), “ Undirected power graphs of semigroups ”, **Semigroup Forum, 78, 410–426**.

[10] Chattopadhyay S. and Panigrahi P. (**2014**), “ Connectivity and planarity of power graphs of finite cyclic, dihedral and dicyclic groups”, **Algebra Discrete Mathematics, 18, 42– 49**.

[11] Derbyshire J. (**2004**), “ **Prime Obsession**”, Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics. New York, Penguin.

[12] Doostabadi A. and Farrokhi M.D.G. (**2015**), “ On the connectivity of proper power graphs of finite group”, **Communications in Algebra, 43, 4305–4319**.

[13] The GAP Group, GAP | Groups, Algorithms, and Programming, (**2015**), Version **4.8.7**, (http://www.gap-system.org).

[14] Hamzeh A. and Ashrafi A.R. (**2017**), " Spectrum and $L-$spectrum of the sower graph and its main supergraph for certain finite groups", **Filomat, 31:16, 5323–5334**.

[15] Jafari S. H. " Some results in a new power graphs in finite groups", to apear.

[16] Kelarev A.V. and Quinn S.J. (**2002**), " Directed graph and combinatorial properties of semigroups", **J. Algebra, 251,** no. **1, 16–26**.

[17] Kelarev A.V. and Quinn S.J. (**2004**), " A combinatorial property and power graphs of semigroups", **Comment. Math. Univ. Carolinae, 45, 1 − 7**.

[18] Kelarev A.V., Quinn S.J. and Smolikova R. (**2001**), " Power graphs and semigroups of matrices", **Bull. Austral. Math. Soc., 63, 341 − 344**.

[19] Lipscomb S. L. and Lallement G. (**1988**), " The structure of the centralizer of a permutation", **Semigroup Forum, 37, 301–312**.

[20] Moghaddamfar A.R., Rahbariyan S. and Shi W.J. (**2014**), " Certain properties of the power graph associated with a finite group", **J. Algebra Appl., 13, 7, 1450040, 18** pp.

[21] Pourghobadi K. and Jafari S.H. (**2017**), " The diameter of power graphs of symmetric groups", **J. Algebra Appl.**, https://doi.org/10.1142/S0219498818502341.

[22] Pourghobadi K. and Jafari S.H. " The diameter of power graphs of alternating groups", **Utilitas Mathematica**, (accepted)

[23] Pourgholi G.R., Youse-Azari H. and Ashra A.R. (**2015**), " The undirected power graph of a finite group", **Bull. Malaysian Math. Sci. Soc., 38, 1517 − 1525**.

[24] Rotman J. (**1994**), " **An Introduction to the theory of Group**", 4th ed., University of Illinois Urbana.

[25] Tamizh Chelvam T. and Sattanathan M. (**2013**), " Power graph of finite abelian groups ", **Algebra and Discrete Mathematics, 16. Number 1.** pp **33 – 41**.

[26] West D.B. (**2003**), " **Introduction to Graph Theory**", Prentice-Hall, New Delhi.

# پیوست آ

# برنامه های گپ

در این فصل برنامه های گپ اجرا شده ارائه می شود که اعدادی را نشان می دهند که در شرایط لم های کران بهتر قطر گراف های فصل های قبل صدق می کنند. عددهای اجرای دو برنامه اول برای مقایسه بین تعداد عددهایی که در شرایط نتیجه ۲.۳.۲، و لم ۴.۳.۳، صدق می کنند ارائه شده است.

برنامه گپ اجرا شده برای یافتن برخی از اعداد که شرایط نتیجه ۲.۳.۲، را دارند:

```
gap> for i in[24..5000] do
> t:=FactorsInt( i*( i-1));
> p:= Maximum(t);
> k:= Int((i-1)/p);
> m:=(2*p+1);
> if k> m then Print(”i=”,i,” k=”, k,” m=”, m);
> fi;
> od;
i=81 k=16 m=11
i=126 k=17 m=15
```

i=225 k=32 m=15

i=385 k=34 m=23

i=441 k=40 m=23

i=540 k=49 m=23

i=625 k=48 m=27

i=676 k=51 m=27

i=715 k=42 m=35

i= 729 k=56 m=27

i=833 k=48 m=35

i=936 k=55 m=35

i=969 k=50 m=39

i=1001 k=76 m=27

i=1089 k=64 m=35

i=1105 k=48 m=47

i=1156 k=67 m=35

i=1197 k=52 m=47

i=1216 k=63 m=39

i=1225 k=72 m=35

i=1275 k=74 m=35

i=1288 k=55 m=47

i=1331 k=70 m=39

i=1445 k=76 m=39

i=1496 k=65 m=47

i=1521 k=80 m=39

i= 1540 k=81 m=39

i=1701 k=100 m=35

i=1716 k=131 m=27

i=1729 k=90 m=39

i=1863 k=80 m=47

i=2001 k=68 m=59

i=2002 k=69 m=59

i=2016 k=65 m=63

i= 2024 k=87 m=47

i=2025 k=88 m=47

i=2058 k=121 m=35

i=2080 k=159 m=27

i=2176 k=75 m=59

i=2185 k=94 m=47

i=2205 k=76 m=59

i=2233 k=72 m=63

i= 2262 k=77 m=59

i=2300 k=99 m=47

i=2376 k=125 m=39

i=2401 k=342 m=15

i=2431 k=142 m=35

i=2432 k=127 m=39

i=2465 k=84 m=59

i=2500 k=147 m=35

i= 2601 k=152 m=35

i=2640 k=91 m=59

i=2646 k=115 m=47

i=2737 k=118 m=47

i=2755 k=94 m=59

i=2784 k=95 m=59

i=2850 k=77 m=75

i=2926 k=153 m=39

i= 2945 k=94 m=63

i=2976 k=95 m=63

i=3025 k=274 m=23

i=3060 k=133 m=47

i=3136 k=165 m=39

i=3146 k=85 m=75

i=3220 k=87 m=75

i=3249 k=112 m=59

i= 3250 k=171 m=39

i=3256 k=87 m=75

i=3367 k=90 m=75

i=3381 k=146 m=47

i=3451 k=118 m=59

i=3510 k=121 m=59

i=3520 k=153 m=47

i=3553 k=96 m=75

i= 3565 k=114 m=63

i=3626 k=97 m=75

i=3627 k=98 m=75

i=3690 k=89 m=83

i=3751 k=120 m=63

i=3773 k=92 m=83

i=3774 k=101 m=75

i=3876 k=125 m=63

i= 3888 k=169 m=47

i=3969 k=128 m=63

i=4000 k=93 m=87

i=4060 k=99 m=83

i=4096 k=315 m=27

i=4186 k=135 m=63

i=4200 k=221 m=39

i=4225 k=324 m=27

i= 4256 k=115 m=75

i=4257 k=98 m=87

i=4264 k=103 m=83

i=4301 k=100 m=87

i=4375 k=624 m=15

i=4551 k=110 m=83

i=4625 k=124 m=75

i=4641 k=160 m= 59

i=4675 k=114 m=83

i=4693 k=204 m=47

i=4761 k=206 m=47

i=4774 k=111 m=87

i=4785 k=164 m=59

i=4901 k=168 m=59

i=4902 k=113 m=87

i=4914 k= 289 m=35

i=4921 k=120 m=83

i=4960 k=159 m=63

i=4961 k=120 m=83

i=4992 k=161 m=63.

برنامه گپ اجرا شده برای یافتن برخی از اعداد که شرایط لم ۴.۳.۳ را دارند:

```
gap> for i in[52..10000] do
> t:=FactorsInt(i*(i-1)*(i-2));
> p:= Maximum(t);
> k:=Int((i-2)/p);
> m:=(3*p+2);
> if k> m then Print(”i=”,i,” k=”, k,” m=”, m);
> fi;
> od;
i=2025 k=87 m=71
i=2432 k=127 m=59
i=3250 k=112 m=89
i=5292 k=142 m=113
i=7106 k=192 m=113
i=7569 k=161 m=143
i=9802 k=337 m=89
```

**Aabstract**

The power graph of a group $G$ is the simple graph $\mathcal{P}(G)$, with vertex-set $G$ and vertices $x$ and $y$ are adjacent, if and only if $x \neq y$ and either $y = x^m$ or $x = y^m$ for some positive integer $m$. The proper power graph of $G$, denoted by $\mathcal{P}^*(G)$, is the graph obtained from $\mathcal{P}(G)$ by deleting the vertex $1$. In this thesis, we determine the diameter bound of $\mathcal{P}^*(S_n)$ for which $\mathcal{P}^*(S_n)$ is connected. We show that $diam(\mathcal{P}^*(S_9)) = diam(\mathcal{P}^*(S_{10})) = 14$, $diam(\mathcal{P}^*(S_{15})) = 12$, and $6 \leq diam(\mathcal{P}^*(S_n)) \leq 10$ for $n \geq 16$. We also describe a number of short paths in these power graphs.

We obtain that $6 \leq diam(\mathcal{P}^*(A_n)) \leq 11$ for $n \geq 51$, when $\mathcal{P}^*(A_n)$ is connected. We also describe a number of short paths in these power graphs.

We assign the diameter of $\mathcal{P}^*(Q_n)$ for $n \geq 2$ and diameter of $\mathcal{P}^*(D_n)$ for $n \geq 3$.

**Keywords:** Alternating groups,Symmetric group, Diameter, Proper power graph.

**Shahrood University of Technology**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

**PhD Thesis in: Algebra**

# The property of the power graph of some finite groups

**By: Kobra Pourghobadi**

**Supervisor**

**Dr. Sayyed Heidar Jafari**

**March 2018**