

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار، گرایش آمار ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته در محیط فازی

نگارنده: نگار شیخی قهفرخی

استادان راهنما

دکتر محمدرضا ربیعی
دکتر عباس پرچمی

بهمن ۹۶

تقدیم به

او که آموخت مرا تا بیا موزم

استاد گرامی جناب آقای دکتر محمد رضا ربیعی

آنان که وجودم جز مدیه وجودشان نیست

پدر و مادر عزیزم

او که مسج و اربا صبرش در تمامی لحظات رفیق راهم بود

همسر مهربانم

سپاس گزارمی...

نهال را «باران» باید تا سیرایش کند از آب حیات و «آفتاب» باید تا تابانند نیرو او محکم کند شاخه های تازه روئیده را؛ بسی شایسته است از اساتید فریخته و فرزانه ام آقای دکتر «محمد رضا ربیعی» و آقای دکتر «عباس پرچی» آموزگاران که برایم زندگی؛ بودن و انسان بودن را معنا کردند تقدیر و شکر نمایم.

معلمت ز عرش برتر باد همیشه توست اندیشه ات مظفر باد
به نکته های دلاویز و گفته های بلند صحیفه های سخن از تو علم پرور باد

و سپاس بی کران از همراهی و همگامی پدر بزرگوارم و مهدلی مادر دلسوز و مهربانم که سجده می ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند و دلمان گهربارش بکشد به من آموخت.

مادرم، هستی من ز، هستی توست تا، هستم و، هستی دارم مت دوست

نگلسار جاودانی مادر است
چشم سار مهربانی مادر است

تعهد نامه

اینجانب نگار شیخی قهفرخی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آمار علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بررسی شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته در محیط فازی، تحت راهنمایی محمدرضا ربیعی و عباس پرچمی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نگار شیخی قهفرخی

بهمن ۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

شاخص‌های کارایی فرایند برای تعیین این‌که چه فرایند تولیدی قادر به رعایت تولید اقلام درون حدود ترانس است به کار می‌روند. این شاخص‌ها ابزارهای آماری مفیدی برای خلاصه‌سازی پراکندگی و موقعیت فرایند توسط تحلیل کارایی فرایند هستند. با این حال، برخی از محدودیت‌ها همانند تعریف غیرفازی از کیفیت و تعریف دقیق از داده‌ها وجود دارند که مانع تجزیه و تحلیل عمیق و انعطاف‌پذیر می‌شوند. در این پژوهش، شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته منعطفی که قادر به اندازه‌گیری کارایی فرایند بر اساس کیفیت فازی و داده فازی‌اند ارائه شده است. بنابراین معرفی و فرض حدود مشخصه فازی می‌تواند تعداد زیادی از موارد غیرانطباق را به حداقل رساند. و هزینه‌های تولید را کاهش دهد. انگیزه اصلی برای معرفی دو نوع خاص از حدود مشخصه فازی خطی و نمایی و هم‌چنین در نظر گرفتن دو نوع خاص از اعداد فازی مثلثی و نرمال، به دست آوردن برخی فرمول‌های محاسباتی سریع برای برآوردهایی از شاخص‌های کارایی تعمیم یافته است. در این پژوهش چندین روش برای دستیابی به فواصل اطمینان تقریبی برای شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته با استفاده از بوت استرپ پیشنهاد شده است. این روش‌ها شامل «فاصله اطمینان بوت استرپ نرمال استاندارد»، «فاصله اطمینان بوت استرپ پایه»، «فاصله اطمینان بوت استرپ صدکی»، «فاصله اطمینان بوت استرپ t درصدی» و «فاصله اطمینان بوت استرپ تصحیح اربیبی شتابیده» هستند. یک مثال کاربردی برای نشان دادن عملکرد این شاخص‌ها و فواصل اطمینان بوت استرپی آن‌ها بیان شده است.

کلمات کلیدی: شاخص کارایی فرایند، کیفیت فازی، اعداد فازی مثلثی و نرمال، عملگرهای حسابی، فاصله اطمینان بوت استرپی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. شیخی ن، ربیعی م.ر و پرچمی ع، (۱۳۹۶)، «شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با کیفیت فازی و اعداد فازی»، هفتمین سمینار آمار و احتمال فازی، دانشگاه بیرجند، بیرجند
۲. شیخی ن، ربیعی م.ر و پرچمی ع، (۱۳۹۶)، «شاخص‌های کارایی فرایند C_{pmk} و C_{pk} در محیط فازی»، دومین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین المللی محاسبات نرم، دانشگاه گیلان (دانشکده فنی مهندسی شرق گیلان)، رودسر
۳. ربیعی م.ر، شیخی ن، پرچمی ع، (۱۳۹۶)، «فاصله اطمینان بوت استرپ شاخص‌های کارایی فرایند در محیط فازی»، ششمین کنگره مشترک سیستم‌های فازی و هوشمند ایران، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ شاخص‌های کارایی فرایند
۱	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ انواع حدود کنترل
۵	۳.۱ شاخص‌های کارایی فرایند
۱۴	۴.۱ فاصله اطمینان برای شاخص‌های کارایی فرایند
۱۶	۱.۴.۱ بوت استرپ
۱۹	۲.۴.۱ فواصل اطمینان بوت استرپ
۲۴	۵.۱ نتیجه‌گیری
۲۷	۲ مروری بر مفاهیم فازی
۲۷	۱.۲ مقدمه
۲۸	۲.۲ مجموعه‌های فازی
۳۶	۳.۲ اعداد فازی
۳۶	۴.۲ اعداد فازی LR
۴۰	۵.۲ فاصله بین دو عدد فازی
۴۴	۶.۲ فاصله بین حدود مشخصه فازی
۴۶	۷.۲ نتیجه‌گیری
۴۷	۳ شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته در محیط فازی
۴۷	۱.۳ مقدمه
۴۸	۲.۳ شاخص‌های کارایی فرایند بر اساس کیفیت فازی و داده غیر فازی
۵۰	۳.۳ شاخص‌های کارایی فرایند بر اساس کیفیت فازی و داده فازی
۵۷	۴.۳ نتیجه‌گیری

۵۹	۴	فواصل اطمینان بوت استرپی شاخص‌های کارایی تعمیم یافته
۵۹	۱.۴	مقدمه
۶۰	۱.۱.۴	فاصله اطمینان SB شاخص‌های کارایی فرایند فازی
۶۰	۲.۱.۴	فاصله اطمینان BB شاخص‌های کارایی فرایند فازی
۶۰	۳.۱.۴	فاصله اطمینان PB شاخص‌های کارایی فرایند فازی
۶۱	۴.۱.۴	فاصله اطمینان PTB شاخص‌های کارایی فرایند فازی
۶۱	۵.۱.۴	فاصله اطمینان BCa شاخص‌های کارایی فرایند فازی
۶۲	۲.۴	کاربرد شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته در صنعت لوله سازی
۷۰	۳.۴	نتیجه گیری
۷۵	آ	دستورات برنامه نویسی در R
۷۵	۱.آ	دستورات برنامه نویسی در R
۸۹		مراجع

فهرست تصاویر

۳	حدود تفرانس طبیعی	۱.۱
۳	حدود کنترل	۲.۱
	رابطه بین حدود تفرانس طبیعی، حدود کنترل و حدود مشخصه فنی در	۳.۱
۴	توزیع نرمال	۴
۶	شرح نموداری بر شاخص ژوران	۴.۱
۹	توابع چگالی احتمال مشخصه کیفیت فرایند A و B مثال ۳.۳.۱	۵.۱
۱۳	نمودار \bar{X} شاخص کارایی برای داده‌های جدول ۳.۱	۶.۱
۱۴	نمودار شاخص کارایی برای داده‌های جدول ۳.۱ در R	۷.۱
۳۱	نمودار توابع عضویت حدود مشخصه فازی بالایی و پایینی خطی	۱.۲
۳۲	نمودار توابع عضویت حدود مشخصه فازی بالایی و پایینی نمایی	۲.۲
۳۲	نمودار تابع عضویت مجموعه فازی افراد بلند قد	۳.۲
۳۳	نمودار اشتراک دو مجموعه فازی	۴.۲
۳۴	نمودار تابع عضویت $\widetilde{USL}_L(x)$ ، $\widetilde{USL}_L^2(x)$ و $\widetilde{USL}_L^{1/2}(x)$	۵.۲
۳۵	نگاشتی روی مجموعه A با استفاده از تابع f	۶.۲
۳۷	نمودار تابع عضویت عدد فازی LR متقارن در مثال ۱.۴.۲	۷.۲
۳۸	نمودار تابع عضویت عدد فازی مثلثی متقارن	۸.۲
۴۰	α -برش‌های دو عدد فازی	۹.۲
۴۳	اعداد فازی مثلثی و α -برش‌های آن‌ها	۱۰.۲
۶۴	نمودار \bar{X} مربوط به مشاهدات جدول ۲.۴	۱.۴
۶۴	نمودار \bar{X} مربوط به مشاهدات جدول ۲.۴ با حذف ۲ مشاهده	۲.۴
۶۵	نمودار \bar{X} مربوط به مشاهدات جدول ۲.۴ با حذف ۴ مشاهده	۳.۴
۶۵	برآورد شاخص‌های کارایی فرایند مشاهدات جدول ۲.۴ با حذف ۴ مشاهده	۴.۴
۶۸	برآوردهای بوت استرپ شاخص‌های کارایی فرایند	۵.۴
۶۹	برآورد بوت استرپ شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با حد فازی خطی	۶.۴

۶۹	۷.۴ نمودار جعبه‌ای برآورد بوت استرپ شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با حد مشخصه فازی خطی
۷۰	۸.۴ برآورد بوت استرپ شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با حد فازی نمایی . .
	۹.۴ نمودار جعبه‌ای برآورد بوت استرپ شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با حد فازی نمایی
۷۱	

فهرست جداول

۴ انواع حدود کنترل	۱.۱
 حداقل مقادیر پیشنهادی برای شاخص‌های کارایی یک‌طرفه و دوطرفه	۲.۱
۱۰ توسط د.مونتگومری	
۱۳ مشاهدات مربوط به ضخامت لایه‌ای شیشه در بررسی $STN - LCD$	۳.۱
۱۳ شاخص‌های کارایی فرایند و درصد پوشش بازه مشخصه فنی	۴.۱
 فواصل اطمینان بوت استرپ ۹۵٪ برای شاخص‌های کارایی داده‌های جدول	۵.۱
۲۴	۳.۱
 برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته برای داده‌های جدول ۳.۱ با در نظر	۱.۳
۵۰ گرفتن حدود مشخصه فازی خطی ونمایی	
 برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با در نظر گرفتن اندازه‌های فازی	۲.۳
۵۷ گزارش شده با پهناهای متفاوت	
۵۸ اعداد فازی مثلثی نامتقارن تولید شده با پهناهای متفاوت	۳.۳
۶۲ فواصل اطمینان بوت استرپی	۱.۴
۶۳ مشاهدات مربوط به طول لوله	۲.۴
۶۶ برآورد شاخص‌های کارایی مشاهدات جدول ۲.۴ با حذف ۴ مشاهده	۳.۴
 برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با کیفیت فازی و داده غیرفازی	۴.۴
۶۶ مشاهدات جدول ۲.۴ با حذف ۴ مشاهده	
 برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با کیفیت فازی و داده فازی مشاهدات	۵.۴
۶۷ جدول ۲.۴ با حذف ۴ مشاهده	
 فواصل اطمینان بوت استرپ ۹۵٪ برای شاخص‌های کارایی با حدود مشخصه	۶.۴
۶۷ $USL = 11/95$ و $LSL = 12/05$	
 فواصل اطمینان بوت استرپ ۹۵٪ برای شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با	۷.۴
۶۸ حدود مشخصه $\bar{USL}_L = (11/95, 11/975)$ و $\bar{LSL}_L = (12/025, 12/05)$	
 فواصل اطمینان بوت استرپ ۹۵٪ برای شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با	۸.۴
۷۰ حدود مشخصه $\bar{USL}_E = (11/975, 0/025)$ و $\bar{LSL}_E = (12/05, 0/025)$	

فصل ۱

شاخص‌های کارایی فرایند

در کنترل آماری کیفیت، شاخص کارایی فرایند آماره‌ای برای برآورد توانایی ذاتی یک فرایند در تولید محصولات منطبق با مشخصات فنی محصول است. چندین شاخص کارایی فرایند همچون C_p ، C_{pk} ، C_{pm} و C_{pmk} وجود دارد، که برای برآورد کارایی فرایندهای تولیدی به کار می‌روند. در این فصل این شاخص‌ها و روابط موجود بین آن‌ها را معرفی می‌کنیم. سپس فواصل اطمینان برای شاخص‌های کارایی فرایند محاسبه شده و از آنجا که محاسبه فواصل اطمینان برای همه شاخص‌ها راحت نیست، روش فواصل اطمینان بوت استرپی برای شاخص‌های کارایی فرایند را به کار می‌گیریم. در این فصل پنج روش فواصل اطمینان بوت استرپ برای شاخص‌های کارایی فرایند را ارائه می‌دهیم. اغلب مطالب این بخش از مراجع [۲، ۱۸، ۳۹] است.

۱.۱ مقدمه

علم آمار مجموعه‌ای از فنون مفیدی است که می‌تواند در زمان تصمیم‌گیری، در مورد یک فرایند یا جامعه، با استفاده از اطلاعات حاصل از نمونه مورد استفاده قرار گیرد. از طرفی آمار را می‌توان به زبانی تشبیه کرد که مهندسین طراح، مدیران و سایر کارکنان یک واحد تولیدی از آن به عنوان زبان مکالمه درباره کیفیت استفاده کنند [۷].

امروزه بیشتر کالاهای مصرفی با سیستم‌های تولید انبوه ساخته می‌شوند و به سبب پراکندگی

عوامل دخیل در تولید، به‌ندرت اقلام تولید شده از جهات مختلف یکسان‌اند. مصرف‌کننده به دلیل پایین بودن نسبی قیمت کالاهایی که با چنین سیستم‌های تولیدی ساخته می‌شوند، پراکندگی در کیفیت آن‌ها را، البته در محدوده‌ی مشخصی می‌پذیرند. از این رو تولیدکننده باید سعی کند تا پراکندگی کیفیت را در داخل محدوده‌ی قابل قبولی حفظ نماید [۶]. این محدوده‌ی قابل قبول در یک فرایند تولیدی، به‌وسیله‌ی حد مشخصه فنی بالایی USL^1 و حد مشخصه فنی پایینی LSL^2 تعیین می‌شود که منشاء معرفی و محاسبه‌ی این حدود خارج از فرایند است و معمولاً توسط مدیران، مهندسان طراح و یا مشتری تعیین می‌شود. بدیهی است که این حدود به فرایند تولید بستگی ندارد. شخصی که مسئول تعیین USL و LSL است، باید آگاهی کامل در مورد تغییر پذیری فرایند داشته باشد. می‌دانیم که هیچ رابطه ریاضی یا آماری بین حدود کنترل و حدود مشخصه فنی وجود ندارد و لذا حدود مشخصه فنی تابعی از مشاهدات و داده‌ها نیستند. بنابراین علیرغم مشاهدات و اندازه‌گیری‌های دقیق در یک فرایند تولیدی، ممکن است تشخیص حدود مشخصه فنی همراه با ابهام باشد که این ابهام را می‌توان به کمک نظریه مجموعه‌های فازی در قالب اعداد فازی مطرح نمود.

از جمله ابزار کنترل کیفیت، شاخص‌های کارایی فرایند هستند. با در نظر گرفتن چنین شاخص‌هایی می‌توان تغییر پذیری یک فرایند تولیدی را که می‌تواند شامل انحرافات با دلیل باشد، با توجه به نیازها و مشخصات فنی محصول، کمی کرد و با استفاده از آن می‌توان به حذف یا کاهش این تغییر پذیری کمک نمود. از دیگر کاربردهای شاخص‌های کارایی فرایند، تشخیص کارایی یا عدم کارایی یک فرایند تولیدی می‌باشد [۷]. علاوه بر این با یاری گرفتن از این شاخص‌ها، می‌توان چندین فرایند تولیدی را با یکدیگر مقایسه کرد و مناسب‌ترین فرایند را انتخاب نمود. توجه شود که منظور از مناسب‌ترین فرایند، فرایندی است که درصد محصولات تولیدی آن که در میان حدود کنترل معرفی شده قرار دارند، بیشتر از سایر فرایندها باشد.

۲.۱ انواع حدود کنترل

در بحث کنترل کیفیت آماری، حدود زیر قابل توجه می‌باشند:

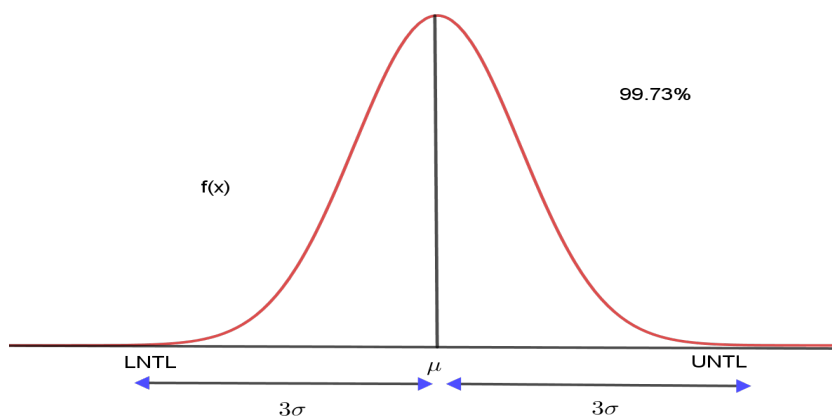
حدود تفرانس طبیعی: حدود تفرانس طبیعی بالا و پایین، که به ترتیب با $UNTL^3$ و $LNTL^4$ نشان داده می‌شوند، همان حدود 3σ می‌باشند (جدول ۱.۱) و به صورت سه برابر انحراف معیار مشخصه کیفیت در بالا و پایین میانگین واقعی فرایند تعریف می‌شوند. این حدود (شکل ۱.۱) توابعی از کلیه‌ی عوامل دخیل در فرایند تولید می‌باشند.

^۱Upper Specification Limit

^۲Lower Specification Limit

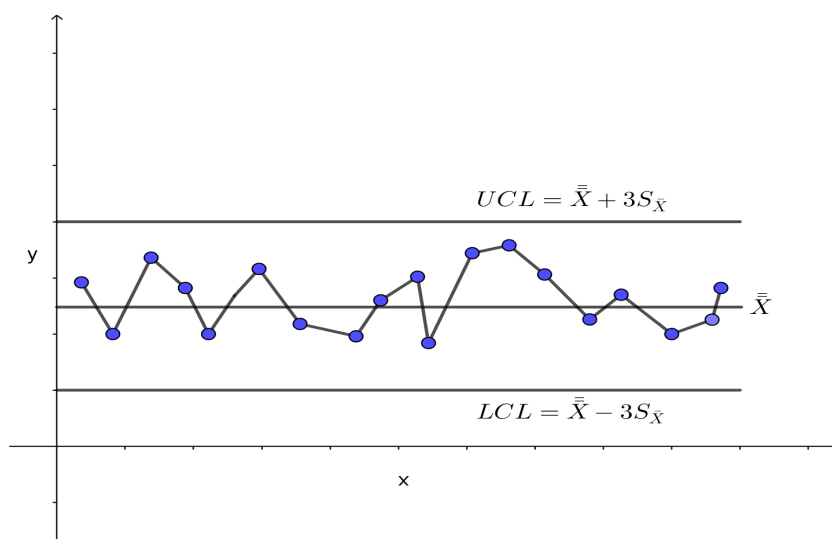
^۳Upper Natural Tolerance Limit

^۴Lower Natural Tolerance Limit



شکل ۱.۱: حدود تفرانس طبیعی

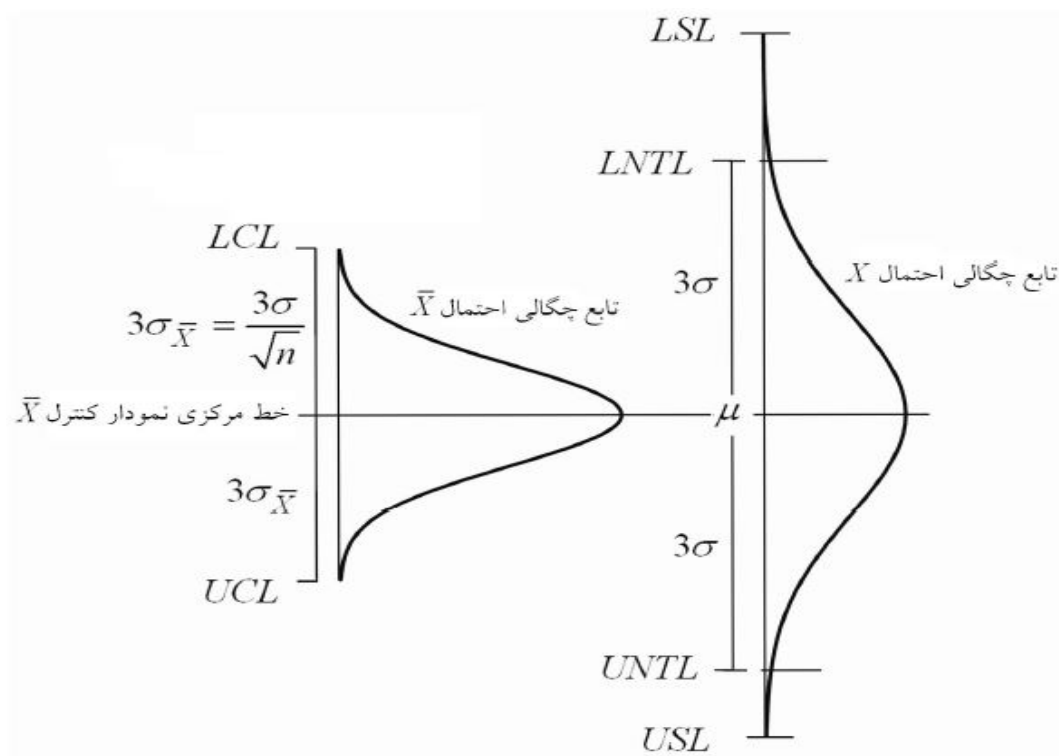
حدود کنترل: حدود کنترل بالا و پایین که به ترتیب با UCL و LCL نشان داده می‌شوند به عنوان توابعی از تغییرپذیری و تفرانس طبیعی فرایند، محدوده‌ای را تشکیل می‌دهند که در صورت تحت کنترل بودن فرایند تولیدی، مقدار آماره مربوط به کیفیت کالاهای تولیدی، در داخل آن محدوده به صورت کاملاً تصادفی نوسان خواهد داشت (شکل ۲.۱). حدود 2σ را حدود هشدار یا کنترل گویند (جدول ۱.۱).



شکل ۲.۱: حدود کنترل

^۵ Upper Control Limit
^۶ Lower Control Limit

حدود مشخصه فنی: حدود مشخصه فنی بالا و پایین که به ترتیب با USL و LSL نشان داده می‌شوند، از پراکندگی مجاز مشخصه کیفیت در محصول که به وسیله مهندسان ساخت، مشتری و یا طراحان محصول برای رسیدن به هدف مشخصی تعیین می‌گردند. این حدود بدون در نظر گرفتن کیفیت عوامل تولیدی و حدود کنترل تعیین می‌شوند (شکل ۳.۱). در



شکل ۳.۱: رابطه بین حدود تolerانس طبیعی، حدود کنترل و حدود مشخصه فنی در توزیع نرمال

یک توزیع نرمال، حدود تolerانس طبیعی ۹۹/۷۳٪ از مقادیر متغیر مورد نظر را شامل می‌شوند و یا به عبارت دیگر فقط ۰/۲۷٪ خروجی فرایند خارج از حدود تolerانس طبیعی واقع می‌شود که شاید خیلی ناچیز باشد، ولی این مقدار در هر یک میلیون محصول تولید شده برابر با ۲۷۰۰ محصول معیوب خواهد بود.

جدول ۱.۱: انواع حدود کنترل

درصد سطح زیر منحنی نرمال	حدود بازه	نوع حدود
توسط متخصص معین می‌شود	$[LSL, USL]$	حدود مشخصه فنی
۹۵/۴۵	$\mu \pm 2\sigma$	حدود کنترل یا هشدار
۹۹/۷۳	$\mu \pm 3\sigma$	حدود تolerانس طبیعی

۳.۱ شاخص‌های کارایی فرایند

تعریف ۱.۳.۱. شاخص کارایی فرایند در حقیقت عددی است که توان فرایند را در بازتولید محصولات قابل قبول نشان داده و رفتار فرایند را نسبت به حدود مشخصه‌ی فنی ارزیابی و اندازه‌گیری می‌کند. به این اندازه‌گیری، نسبت یا شاخص انجام نیز می‌گویند.

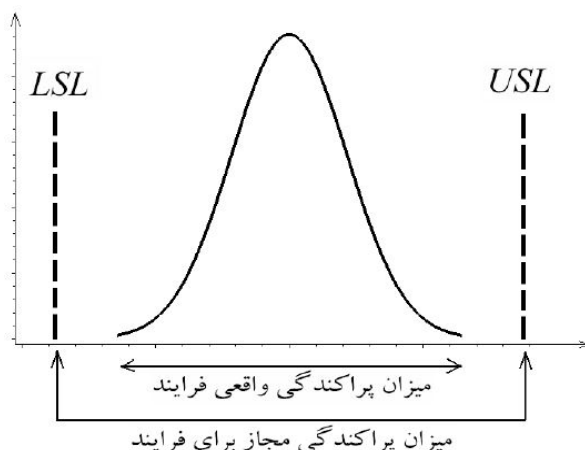
کار کردن با این شاخص‌ها خیلی راحت است زیرا اطلاعات یک فرایند پیچیده را در یک عدد خلاصه می‌کنند. شاخص‌های کارایی فرایند را نه تنها برای تشخیص کارایی یک فرایند، بلکه برای مقایسه کارایی دو فرایند متفاوت نیز به کار می‌برند. لذا برای خریدارانی که قصد انتخاب یک فرایند از میان دو یا چند فرایند را دارند، اطلاع از مقدار عددی این شاخص بسیار مفید است.

در صنعت، از شاخص‌های قابلیت برای تشخیص قابلیت فرایند ساخت محصولات استفاده می‌شود که نقش بسزایی در فرایند کنترل کیفیت مؤسسات مهندسی بزرگ دارند. افزون بر این، می‌توان گفت که تحلیل کارایی فرایند، استاندارد متعارف و متداولی برای بررسی کیفیت از دیدگاه تولیدکننده و مشتری است. روش عامه پسند برای تحلیل کارایی فرایند، استفاده از شاخص کارایی فرایند است. در حقیقت می‌توان گفت که شاخص کارایی فرایند برای بیان رابطه بین کارایی واقعی فرایند و آنچه بر اساس تقاضا و نیازمندی تعیین شده، طراحی شده است.

شاخص کارایی فرایند ابزاری جهت کمی کردن تغییرات فرایند و تجزیه و تحلیل این تغییرات با توجه به نیازها و مشخصات فنی محصول است. در نتیجه‌ی چنین کاری می‌توان تغییرات فرایند را ریشه‌یابی کرده و برای حذف یا کاهش آن‌ها اقدام نماید.

روش تشخیص به این صورت است که اگر مشخصه‌ی کیفیت محصولات با احتمال زیاد بین حدود مشخصه‌ی فنی بالایی و پایینی قرار گیرد، آن‌گاه فرایند کارا نامیده می‌شود، به نحوی که هر چه مقدار عددی شاخص مربوطه بزرگ‌تر باشد (مخصوصاً اگر بزرگ‌تر از یک باشد) احتمال قرار گرفتن مشخصه‌ی کیفیت در بین حدود مشخصه‌ی فنی بیشتر است. بنابراین، یک فرایند متمرکز زمانی کاراست که تقریباً صد در صد حدود تحمل طبیعی آن در میان حدود مشخصه‌ی فنی بالایی و پایینی قرار گیرد. شایان ذکر است، فرایند متمرکز به فرایندی اطلاق می‌شود که میانگین آن، μ ، بر نقطه‌ی میانی حدود مشخصه‌ی فنی، یعنی M منطبق باشد. تا کنون مطالعات زیادی در این زمینه صورت گرفته و شاخص‌های متعددی معرفی شده است. مهم‌ترین و رایج‌ترین این شاخص‌ها عبارتند از C_p ، C_{pk} ، C_{pm} و C_{pmk} . در ادامه به بررسی این شاخص‌ها می‌پردازیم.

در سال ۱۹۷۴ میلادی، اولین نسل شاخص‌های کارایی فرایند منسوب به ژوران [۲۵] به صورت نسبت پهنای حدود مشخصه فنی به پهنای حدود تolerانس طبیعی (6σ) معرفی و به



شکل ۴.۱: شرح نموداری بر شاخص ژوران

صورت زیر فرمول بندی شد:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (1.1)$$

این شاخص تنها وقتی کارایی دارد که نقطه‌ی تمرکز فرایند منطبق بر وسط حدود مشخصه فنی باشد، به عبارت دیگر $\mu = M$ ، به طوری که $M = (USL + LSL)/2$ است و همچنین μ و σ به ترتیب میانگین و انحراف معیار مشخصه کیفیت می‌باشند. به عنوان تفسیر تجربی از شاخص کارایی فرایند C_p ، می‌توان به درصد پوشش بازه مشخصه فنی به وسیله‌ی فرایند تولیدی اشاره نمود که برابر است با $P = 100(\frac{1}{C_p})\%$. جهت رفع محدودیت تطابق μ بر M ، نسل دوم شاخص‌های کارایی فرایند منسوب به کین [۲۶] به صورت زیر معرفی شد:

$$C_{pk} = \frac{USL - LSL - 2|\mu - M|}{6\sigma} = \frac{\min\{USL - \mu, \mu - LSL\}}{3\sigma} \quad (2.1)$$

با توجه به فرمول اخیر، می‌توان ادعا کرد که شاخص C_{pk} تعداد انحراف معیارهای بین میانگین فرایند و نزدیک‌ترین حد مشخصه فنی به میانگین را بر حسب واحد 3σ می‌شمارد. از این رو با افزایش انحراف معیار فرایند و یا افزایش میزان انحراف میانگین فرایند از M ، تعداد کمتری انحراف معیار در میان μ و نزدیک‌ترین حد مشخصه فنی به μ توسط شاخص C_{pk} شمرده خواهد شد. نسل سوم شاخص‌های کارایی توسط سیانگ و تاگوچی [۲۴] با توجه به مقدار هدف معرفی شده T ، به صورت زیر ارائه و معروف به شاخص تاگوچی شد.

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[(X - T)^2]}} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (3.1)$$

همچنین پیرن [۲۴] از ترکیب دو شاخص C_{pk} و C_{pm} شاخص کامل‌تری به صورت زیر ساخت:

$$C_{pmk} = \frac{USL - LSL - 2|\mu - M|}{6\sqrt{E[(X - T)^2]}} = \frac{USL - LSL - 2|\mu - M|}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (4.1)$$

بدیهی است که برآوردهای نقطه‌ای شاخص‌های کارایی به‌وسیله جایگذاری برآوردهای نقطه‌ای μ و σ یعنی به طور مثال \bar{x} و s ، در فرمول‌هایشان به دست می‌آیند.

ملاحظه ۱.۳.۱. چهار شاخص کارایی فوق را می‌توان براساس حساسیت نسبت به میزان انحراف میانگین μ از مقدار هدف T به‌ترتیب زیر مرتب نمود:

$$(1) C_{pmk} \text{ (بیشترین حساسیت)},$$

$$(2) C_{pm},$$

$$(3) C_{pk} \text{ (کمترین حساسیت) و}$$

$$(4) C_p \text{ (عدم حساسیت)}.$$

ملاحظه ۲.۳.۱. می‌توان نشان داد که تمامی چهار شاخص معرفی شده توابعی از شاخص ابرساختار زیر می‌باشند:

$$C_p(u, v) = \frac{USL - LSL - 2u|\mu - M|}{6\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}, \quad u, v \geq 0$$

به عبارت دیگر،

$$C_p = C_p(0, 0), \quad C_{pk} = C_p(1, 0), \quad C_{pm} = C_p(0, 1), \quad C_{pmk} = C_p(1, 1)$$

قضیه ۱.۳.۱. روابط زیر بین شاخص‌های کارایی فرایند برقرار است:

$$C_p \geq C_{pk} \geq C_{pmk}$$

$$C_p \geq C_{pm} \geq C_{pmk}$$

$$C_{pk} = C_p - \frac{1}{3} \left| \frac{\mu - M}{\sigma} \right|$$

$$C_{pm} = \frac{C_p}{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}$$

$$C_{pmk} = \frac{C_{pm}C_{pk}}{C_p}$$

برهان. با استفاده از معادلات (۴.۱)–(۱.۱) اثبات بدیهی است. به عنوان مثال:

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{(USL - LSL)/6\sigma}{(6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2})/6\sigma} = \frac{C_p}{\sqrt{\frac{\sigma^2 + (\mu - T)^2}{\sigma^2}}} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}}$$

□

مثال ۱.۳.۱. در یک فرایند نرمال با میانگین $\mu = 30$ ، انحراف معیار $s = 3$ و حدود مشخصه $USL = 40$ و $LSL = 20$ ، مقدار شاخص C_p به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\hat{C}_p = \frac{40 - 20}{6(3)} = 1/11$$

بنابراین می‌توان گفت که فرایند تولیدی $90/1 = 100 \left(\frac{1}{1.11} \right) = P$ درصد از فاصله بین مشخصه‌های فنی را پوشانده و مورد استفاده قرار می‌دهد. همچنین از آنجایی که در یک فرایند تولیدی معمولاً برآورد شاخص کارایی با عدد یک مقایسه می‌شود و با توجه به این که $\hat{C}_p > 1$ و $\mu = M = 30$ می‌توان ادعا کرد که صد در صد حدود تolerانس طبیعی فرایند توسط حدود مشخصه فنی پوشانده شده است و به عبارت دیگر فرایند کارا می‌باشد.

مثال ۲.۳.۱. در یک فرایند تولیدی نرمال، فرض کنید $LSL = 8$ و $USL = 20$. با توجه به این که میانگین و انحراف معیار نمونه‌ی اخذ شده از این فرایند به ترتیب $\bar{x} = 16$ و $s = 2$ مشاهده شده است، مقدار شاخص C_p به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6s} = \frac{20 - 8}{6(2)} = 1$$

برآورد $\hat{C}_p = 1$ به آن معنی است که فرایند کاراست به شرط آن که میانگین فرایند بر $M = 14$ منطبق باشد. ولی با توجه به مقدار $\bar{x} = 16$ این شرط برقرار نبوده و در نتیجه از شاخص C_{pk} با عدد ۱ می‌توان نتیجه گرفت که این فرایند تولیدی کارا نیست.

شاخص‌های کارایی فرایند نه تنها برای تشخیص تحت کنترل بودن یک فرایند به کار می‌روند، بلکه در مقایسه کارایی دو یا چند فرایند متفاوت نیز کاربرد دارند. لذا برای مشتریانی که قصد انتخاب یکی از دو یا چند فرایند را دارند بسیار مفید می‌باشند.

مثال ۳.۳.۱. به منظور ارجحیت دادن و انتخاب یکی از دو فرایند A و B ، دو نمونه تصادفی مستقل از این دو فرایند می‌گیریم. اطلاعات به دست آمده از این دو نمونه در زیر درج شده است (شکل ۵.۱).

$$\bar{x}_A = 20, \quad s_A = 4, \quad \bar{x}_B = 27/5, \quad s_B = 2$$

حال با توجه به این که $LSL = 5$ و $USL = 35$ در نظر گرفته شده، شاخص‌های C_p و C_{pk} را برای دو فرایند برآورد می‌کنیم

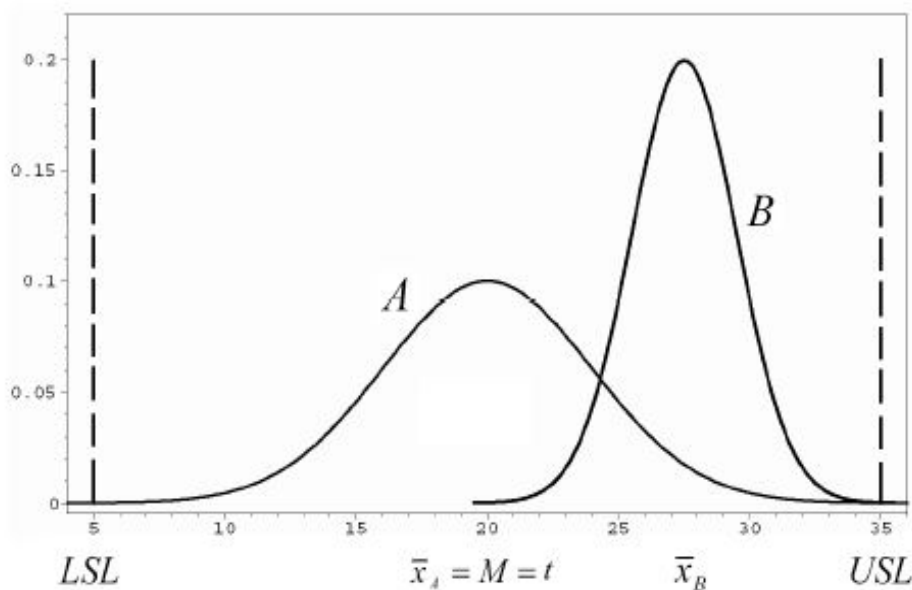
$$\hat{C}_p(B) = 2/5, \quad \hat{C}_p(A) = 1/25, \quad \hat{C}_{pk}(B) = 1/25, \quad \hat{C}_{pk}(A) = 1/25$$

ملاحظه می‌شود که از یک طرف با توجه به تساوی C_{pk} ها و از طرف دیگر عدم حساسیت C_p نسبت به انحراف μ از M ، نمی‌توان تصمیم درستی در مورد انتخاب یکی از دو فرایند، به عنوان فرایند کاراتر، گرفت. حال اگر مقدار هدف را برابر $T = 20$ در نظر بگیریم، می‌توانیم مقدار C_{pm} و C_{pmk} را برای دو فرایند برآورد کنیم

$$\hat{C}_{pm}(B) = 0/644, \quad \hat{C}_{pm}(A) = 1/25$$

$$\hat{C}_{pmk}(B) = 0/294, \quad \hat{C}_{pmk}(A) = 1/25$$

و در نتیجه فرایند A نسبت به فرایند B ترجیح داده می‌شود.



شکل ۵.۱: توابع چگالی احتمال مشخصه کیفیت فرایند A و B مثال ۳.۳.۱

ملاحظه ۳.۳.۱. با توجه به ماهیت مشخصه کیفیت برخی از محصولات، ممکن است در فرایندهای تولیدی تنها یک حد مشخصه فنی بالایی یا پایینی معرفی شود. در چنین فرایندهای یک طرفه‌ای، شاخص‌های کارایی یک طرفه پایینی و بالایی، به ترتیب به صورت $C_{pL} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}$ و $C_{pU} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}$ تعریف و بررسی می‌شوند.

ملاحظه ۴.۳.۱. یکی از مفروضات اولیه برای استفاده از شاخص‌های معرفی شده، تقریباً نرمال بودن توزیع مشخصه کیفیت می‌باشد. در صورت نرمال نبودن داده‌ها، یکی از دو راه زیر پیشنهاد می‌شود:

الف) نرمال کردن داده‌ها. از متداول‌ترین راه‌های نرمال کردن داده‌ها، استفاده از تبدیل باکس-کاکس می‌باشد که برای مطالعه جزئیات این روش مرجع [۱۷] پیشنهاد می‌شود.
 ب) استفاده از شاخص‌های کارایی تعمیم یافته برای توزیع‌های غیرنرمال. به عنوان نمونه در توزیع‌های غیرنرمال شاخص C_{pk} به صورت زیر تعمیم داده می‌شود:

$$C'_{pk}(\alpha) = \frac{USL - LSL - 2|q_{\alpha/2} - M|}{q_{1-\alpha} - q_{\alpha}}$$

که در آن q_{α} چندک مرتبه α از توزیع فرایند می‌باشد [۳۶].

ملاحظه ۵.۳.۱. گرچه حداقل مقادیر ثابت قابل قبول برای شاخص کارایی فرایند سلیقه‌ای بوده و با توجه به شرایط حاکم در هر کارخانه یا هر فرایند تولیدی تغییر می‌کند، ولی حداقل یکی از باتجربه‌ترین افراد متخصص در این زمینه، جدول زیر را برای مقایسه‌های عددی طراحی کرده است [۷].

جدول ۲.۱: حداقل مقادیر پیشنهادی برای شاخص‌های کارایی یک‌طرفه و دوطرفه توسط د. مونتگومری

وضعیت فرایند	حداقل میزان کارایی پیشنهادی در فرایندهای دوطرفه	حداقل میزان کارایی پیشنهادی در فرایندهای یک طرفه
فرایندهای قدیمی	۱/۳۳	۱/۲۵
فرایند جدید	۱/۵۰	۱/۴۵
یک فرایند قدیمی مطمئن که در آن مشخصه کیفیت بحرانی و مهم است	۱/۵۰	۱/۴۵
یک فرایند جدید مطمئن که در آن مشخصه کیفیت بحرانی و مهم است	۱/۶۷	۱/۶۰

معرفی بسته qcc در R

برای انجام تحلیل‌های کنترل کیفیت در R ابتدا باید بسته qcc را نصب و سپس آن را فراخوانی کنیم. برای انجام کنترل کیفیت آماری یک شیء از کلاس qcc ایجاد کنید. سپس این شیء می‌تواند برای طرح نمودارهای شوهارت، رسم نمودار OC، محاسبه شاخص‌های کارایی و غیره استفاده شود.

برای ایجاد هر گونه تغییری در نمودار می‌توان از دستورات زیر استفاده نمود.

```
qcc(data, type, sizes, center, std.dev, limits,
     data.name, labels, newdata, newsizes, newdata.name,
     newlabels, nsigmas = 3, confidence.level,
     rules = shewhart.rules, plot = TRUE, ...)
```

```
## S3 method for class 'qcc'
```

```
print(x, ...)
```

```
## S3 method for class 'qcc'
```

```
summary(object, digits = getOption("digits"), ...)
```

```
## S3 method for class 'qcc'
```

```
plot(x, add.stats = TRUE, chart.all = TRUE,
     label.limits = c("LCL ", "UCL"), title, xlab, ylab, ylim,
     axes.las = 0, digits = getOption("digits"),
     restore.par = TRUE, ...)
```

که موارد خواسته شده در این بسته به شرح زیر است:

data: نام داده
 type: نام نموداری که می‌خواهیم رسم کنیم.
 sizes: تعداد نمونه هر گروه (در مثال رینگ‌های پیستون ۵)
 center: مقدار خط مرکزی
 std.dev: مقدار انحراف استاندارد
 limits: مقدار حدود کنترل نمودار
 newdata: نام داده‌های جدید (در رسم نمودار شوهارت کاربرد دارد) تمامی آن‌هایی که new دارند مربوط به داده‌های جدید مذکور می‌باشد.
 nsigmas: انحراف استاندارد دامنه تغییرات نسبی (بدون تاپیش حافظه R آن را ۳ در نظر می‌گیرد)
 confidence.level: فاصله اطمینان برای حدود کنترل
 plot: دارای دو مقدار (TRUE: رسم نمودار و FALSE: عدم رسم نمودار)
 digits: تعداد ارقام معنادار
 TRUE = add.stats: چاپ توضیحات لازم زیر نمودار
 FALSE = add.stats: عدم چاپ توضیحات زیر نمودار
 TRUE = chart.all: در نمودار شوهارت کاربرد دارد (با تاپ T هر دو نمودار را توأم رسم می‌کند با تاپ F فقط داده‌های دارای کد F را رسم می‌کند)
 label.limits=c("LSL","USL"): نام حدود اطمینان روی نمودار را تغییر می‌دهد.
 title: عنوان تاپ شده روی نمودار را تغییر می‌دهد.
 xlab,ylab: نام محور عمودی و افقی را تغییر می‌دهد.
 ylim: محدوده عددی برای محور عمودی
 restore.par: دارای مقادیر (TRUE, FALSE) اگر بخواهیم نمودار دیگری (مثلاً یک خط) روی نمودارمان داشته باشیم این مقدار را برابر FALSE قرار می‌دهیم.
 تابع process.capability{qcc} شاخص‌های کارایی فرایند برای یک شیء «qcc» از نوع «xbar» را محاسبه و هیستوگرام آن را ترسیم می‌کند. این تابع حدود اطمینان برای شاخص C_p را با استفاده از روش ذکر شده توسط چو و همکاران [۱۶] محاسبه می‌کند. حدود اطمینان تقریبی برای شاخص‌های C_{pk} و C_{pm} را به ترتیب با استفاده از روش‌های مذکور در [۱۲] و [۱۳] محاسبه می‌کند.

```
process.capability(object,spec.limits, target, std.dev, nsigmas,
confidence.level = 0.95, breaks = "scott",
add.stats = TRUE, print = TRUE,
digits = getOption("digits"), restore.par = TRUE)
```

که موارد خواسته شده در این تابع به صورت زیر است:
 object: یک شیء «qcc» از نوع \bar{x}
 spec.limits: یک بردار حاوی دو عنصر حدود مشخصه پایینی و بالایی
 target: مقدار هدف معین فرایند
 std.dev: یک مقدار که انحراف استاندارد داخل گروه را مشخص می‌کند.
 breaks: یک مقدار یا رشته مورد استفاده برای رسم هیستوگرام.

مثال ۴.۳.۱. کریستال‌های مایع به اشکال مختلفی در نمایشگرهای $STN - LCD$ کاربرد دارند. جنس این کریستال‌های مایع، غالباً نستیک پیچیده (TN) یا نستیک فوق‌العاده پیچیده (STN) است. نمایشگرهای $STN - LCD$ در ساخت PDA ها (دستیاران دیجیتالی شخصی)، رایانه‌های نوت بوک، پردازنده‌های کلمه و دیگر لوازم جانبی به کار می‌روند. با توجه به پیشرفت فناوری تولید مدرن $STN - LCD$ و هزینه‌های تولیدی نسبتاً کم، $STN - LCD$ مزیت رقابتی در بازار را حفظ می‌کند. برای نشان دادن کارایی فرایند، یک مطالعه موردی روی فرایند تولید $STN - LCD$ ارائه شده است که در پارک علم و فناوری تایوان قرار دارد [۳۵]. این کارخانه انواع مختلف LCD را تولید می‌کند. برای یک مدل خاص $STN - LCD$ مورد بررسی قرار گرفت. حد مشخصه بالایی (USL) از ضخامت لایه‌ای شیشه ۰/۷۷ میلی‌متر، حد مشخصه پایینی (LSL) ضخامت لایه‌ای شیشه ۰/۶۳ میلی‌متر و مقدار هدف $T = ۰/۷۰$ میلی‌متر است. اگر مشخصه محصول در تolerانس (LSL, USL) قرار نگیرد، طول عمر یا قابلیت اطمینان $STN - LCD$ کاسته می‌شود. داده‌های نمونه جمع‌آوری شده (۱۵ نمونه هر کدام به حجم ۱۰) در جدول ۳.۱ نشان داده شده است. مقدار بحرانی برای کارایی این فرایند ۱/۳۳ در نظر گرفته شده است. میانگین نمونه \bar{x}_i و واریانس نمونه s_i^2 برای ۱۵ نمونه محاسبه شده و در دو ستون آخر جدول ۳.۱ آمده است.

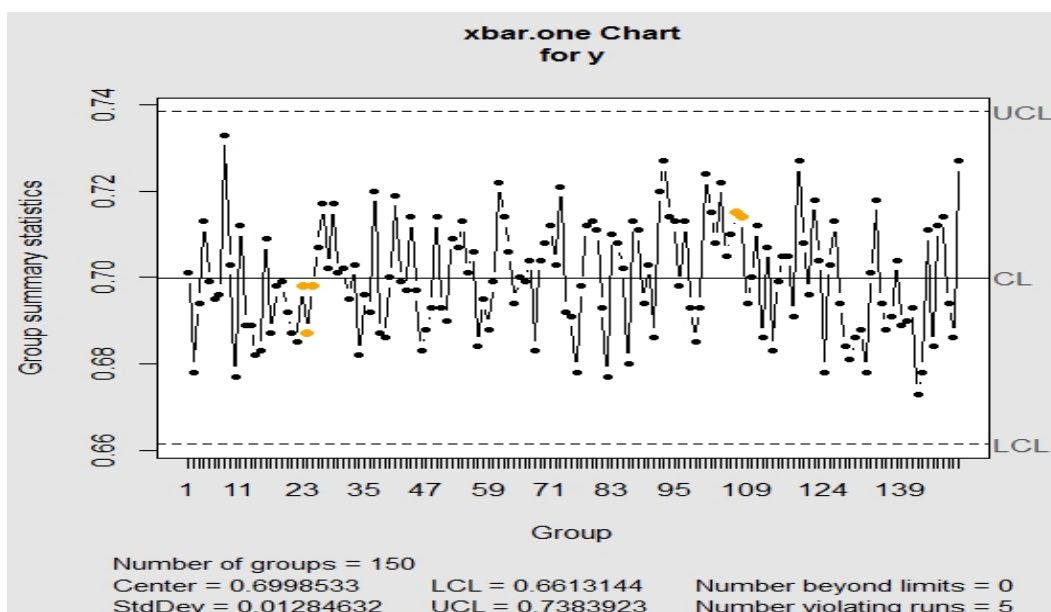
همان‌طور که در شکل ۷.۱ مشاهده می‌کنید برآورد شاخص‌های کارایی فرایند بزرگتر از مقدار بحرانی ۱/۳۳ است و فرایند ضخامت لایه‌ای شیشه در بررسی $STN - LCD$ کاراست و هیستوگرام شکل گواه این موضوع است. همچنین روابط بین شاخص‌های کارایی فرایند در قضیه ۱.۳.۱ برقرارند. شکل ۶.۱ فرایند تحت کنترل را نشان می‌دهد. با مراجعه به کد R در پیوست آ، شاخص‌های کارایی فرایند را برای داده‌های جدول ۳.۱ به دست آورده و در جدول ۴.۱ گزارش کرده‌ایم.

جدول ۳.۱: مشاهدات مربوط به ضخامت لایه‌ای شیشه در بررسی STN - LCD

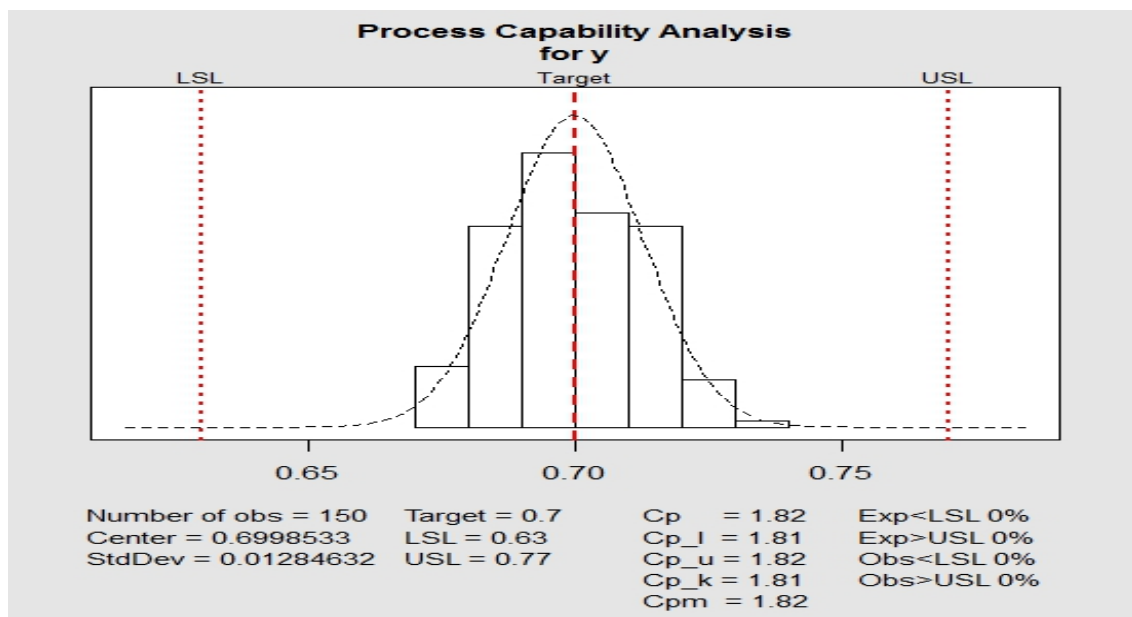
sample	x_{ij}										\bar{x}_i	s_i^2
۱	۰/۷۲۷	۰/۷۰۱	۰/۶۷۸	۰/۶۹۴	۰/۷۱۳	۰/۶۹۹	۰/۶۹۵	۰/۶۹۶	۰/۷۳۳	۰/۷۰۳	۰/۷۰۳۹	۰/۰۰۰۲۶۷
۲	۰/۶۷۷	۰/۷۱۲	۰/۶۸۶	۰/۶۸۹	۰/۶۸۲	۰/۶۸۳	۰/۷۰۹	۰/۶۸۷	۰/۶۹۸	۰/۶۹۹	۰/۶۹۲۲	۰/۰۰۰۱۳۹
۳	۰/۶۹۲	۰/۶۸۷	۰/۶۸۵	۰/۶۹۸	۰/۶۸۷	۰/۶۹۸	۰/۷۰۷	۰/۷۱۷	۰/۷۰۲	۰/۷۱۷	۰/۶۹۹۰	۰/۰۰۰۱۴۰
۴	۰/۷۰۱	۰/۷۰۲	۰/۶۹۵	۰/۷۰۳	۰/۶۸۲	۰/۶۹۶	۰/۶۹۲	۰/۷۲۰	۰/۶۸۷	۰/۶۸۶	۰/۶۹۶۴	۰/۰۰۰۱۲۰
۵	۰/۷۰۰	۰/۷۱۹	۰/۶۹۹	۰/۶۹۷	۰/۷۱۴	۰/۶۹۷	۰/۶۸۳	۰/۶۸۸	۰/۶۹۳	۰/۷۱۴	۰/۷۰۰۴	۰/۰۰۰۱۳۹
۶	۰/۶۹۳	۰/۶۹۰	۰/۷۰۹	۰/۷۰۷	۰/۷۱۳	۰/۷۰۱	۰/۷۰۶	۰/۶۸۴	۰/۶۹۵	۰/۶۸۸	۰/۶۹۸۶	۰/۰۰۰۰۹۹
۷	۰/۶۹۹	۰/۷۲۲	۰/۷۱۴	۰/۷۰۶	۰/۶۹۴	۰/۷۰۰	۰/۶۹۹	۰/۷۰۴	۰/۶۸۳	۰/۷۰۴	۰/۷۰۲۵	۰/۰۰۰۱۱۳
۸	۰/۷۰۸	۰/۷۱۲	۰/۷۰۳	۰/۷۲۱	۰/۶۹۲	۰/۶۹۱	۰/۶۷۸	۰/۶۹۸	۰/۷۱۲	۰/۷۱۳	۰/۷۰۲۸	۰/۰۰۰۱۷۰
۹	۰/۷۱۱	۰/۶۹۳	۰/۶۷۷	۰/۷۱۰	۰/۷۰۸	۰/۷۰۲	۰/۶۸۰	۰/۷۱۳	۰/۷۱۱	۰/۶۹۴	۰/۶۹۹۹	۰/۰۰۰۱۷۷
۱۰	۰/۷۰۳	۰/۶۸۶	۰/۷۲۰	۰/۷۲۷	۰/۷۱۴	۰/۷۱۳	۰/۶۹۸	۰/۷۱۳	۰/۶۹۳	۰/۶۸۵	۰/۷۰۵۲	۰/۰۰۰۲۰۸
۱۱	۰/۶۹۳	۰/۷۲۴	۰/۷۱۵	۰/۷۰۸	۰/۷۲۲	۰/۷۰۵	۰/۷۱۰	۰/۷۱۵	۰/۷۱۴	۰/۶۹۴	۰/۷۱۰۰	۰/۰۰۰۱۰۹
۱۲	۰/۷۰۰	۰/۷۱۲	۰/۶۸۶	۰/۷۰۷	۰/۶۸۳	۰/۶۹۹	۰/۷۰۵	۰/۷۰۵	۰/۶۹۱	۰/۷۲۷	۰/۷۰۱۵	۰/۰۰۰۱۶۹
۱۳	۰/۷۰۸	۰/۶۹۶	۰/۷۱۸	۰/۷۰۴	۰/۶۷۸	۰/۷۰۳	۰/۷۱۳	۰/۶۹۴	۰/۶۸۴	۰/۶۸۱	۰/۶۹۷۹	۰/۰۰۰۱۸۸
۱۴	۰/۶۸۶	۰/۶۸۸	۰/۶۷۸	۰/۷۰۱	۰/۷۱۸	۰/۶۹۴	۰/۶۸۸	۰/۶۹۱	۰/۷۰۴	۰/۶۸۹	۰/۶۹۲۷	۰/۰۰۰۱۲۸
۱۵	۰/۶۹۰	۰/۶۹۳	۰/۶۷۳	۰/۶۷۸	۰/۷۱۱	۰/۶۸۴	۰/۷۱۲	۰/۷۱۴	۰/۶۹۴	۰/۶۸۶	۰/۶۹۳۵	۰/۰۰۰۲۱۰

جدول ۴.۱: شاخص‌های کارایی فرایند و درصد پوشش بازه مشخصه فنی

مقدار C	نوع شاخص کارایی	درصد پوشش $P = \frac{1}{C} \times 100$
۱/۸۱۹۳	C_p	$P = 54/9633\%$
۱/۸۱۵۵	C_{pk}	$P = 55/0787\%$
۱/۸۱۹۲	C_{pm}	$P = 54/9669\%$
۱/۸۱۵۴	C_{pmk}	$P = 55/0823\%$



شکل ۶.۱: نمودار \bar{X} شاخص کارایی برای داده‌های جدول ۳.۱



شکل ۷.۱: نمودار شاخص کارایی برای داده‌های جدول ۳.۱ در R

۴.۱ فاصله اطمینان برای شاخص‌های کارایی فرایند

با جایگذاری مقدار انحراف معیار نمونه تصادفی به حجم n از فرایند تولیدی (S) در فرمول $C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$ ، می‌توان برآوردگر نقطه‌ای \hat{C}_p را برای C_p به دست آورد. از آنجا که \hat{C}_p همانند سایر آماره‌ها متأثر از تغییرات نمونه‌ای است، بهتر است یک فاصله اطمینان برای تعیین محدوده‌ای که مقدار صحیح پارامتر C_p را با احتمال زیاد در بر می‌گیرد، محاسبه شود. اگر مشخصه کیفیت X در یک فرایند تولیدی دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آن‌گاه $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$ و در نتیجه:

$$P\left(\chi_{(n-1), \alpha/2}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{(n-1), 1-\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

بنابراین،

$$P\left(\frac{USL - LSL}{S} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1), \alpha/2}^2}{n-1}} < \frac{USL - LSL}{\sigma} < \frac{USL - LSL}{S} \sqrt{\frac{\chi_{(n-1), 1-\alpha/2}^2}{n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

از این‌رو، می‌توان فاصله اطمینان $100(1 - \alpha)\%$ برای شاخص C_p را به صورت زیر معرفی نمود:

$$\left(\hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1), \alpha/2}^2}{n-1}}, \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi_{(n-1), 1-\alpha/2}^2}{n-1}}\right) \quad (5.1)$$

که در آن $\chi_{n, \alpha}^2$ چندک α ام از توزیع کی دو با n درجه آزادی می‌باشد [۲].

مثال ۱.۴.۱. با استفاده از داده‌های جدول ۳.۱ زمانی که $USL = 0.77$ و $LSL = 0.63$ است، با استفاده از رابطه (۵.۱) فاصله اطمینان تقریبی ۹۵٪ برای C_p به صورت فاصله عددی (۱/۶۱۲۹, ۲/۰۲۵۵) محاسبه می‌شود.

برخلاف فاصله اطمینان برای C_p ، محاسبه فاصله اطمینان برای دیگر شاخص‌های کارایی کار آسانی نیست. به عنوان مثال بویلز [۱۳] فاصله اطمینان تقریبی زیر را برای C_{pm} توصیه کرد:

$$\left[\hat{C}_{pm} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2, \hat{v}_n}^2}{\hat{v}_n}}, \hat{C}_{pm} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2, \hat{v}_n}^2}{\hat{v}_n}} \right] \quad (۶.۱)$$

به طوری که $\hat{v}_n = \frac{n(1+\delta^2)}{(1+2\delta^2)}$ ، $\delta = \frac{(\bar{x}-T)}{\sigma}$ و نشان دهنده $100\alpha\%$ درصد از متغیر کی دو مرکزی با \hat{v}_n درجه آزادی است.

مثال ۲.۴.۱. با استفاده از داده‌های جدول ۳.۱ زمانی که $USL = 0.77$ ، $T = 0.70$ و $LSL = 0.63$ است، با استفاده از رابطه (۶.۱) فاصله اطمینان ۹۵٪ برای C_{pm} به صورت فاصله عددی (۱/۶۴۶۰۸, ۲/۰۶۵۶۱) محاسبه می‌شود.

به‌عنوان یک روش جایگزین برای دستیابی به فاصله اطمینان، می‌توان از روش‌های بوت استرپی، که مبتنی بر بازنمونه‌گیری می‌باشند، استفاده کرد. توضیحاتی درباره بوت استرپ و فاصله اطمینان‌های بوت استرپی بر اساس مرجع [۳۹] در بخش بعد خواهد آمد.

اکثر ارزیابی‌ها روی شاخص‌های کارایی فرایند بر برآوردهای نقطه‌ای متمرکزاند، که ممکن است این نتیجه تخمین نامعتبری از پتانسیل فرایند باشد. بخش مهمی از شاخص کارایی فرایند فاصله اطمینان است، زیرا یک مقدار تخمینی است. چو و همکاران [۱۶] جداولی برای ساختار فاصله اطمینان پایینی ۹۵٪ برای C_p و C_{pk} فراهم کردند. بویلز [۱۳] یک روش تقریبی برای یافتن فاصله اطمینان پایینی ارائه داد. در محاسبه همه این فواصل اطمینان، فرایند دارای توزیع نرمال اختیار شده است. روش پارامتری مناسب برای تأیید فاصله اطمینان شاخص کارایی فرایند برای فرایندهایی با توزیع نرمال روش بوت استرپ پارامتری است. روش بوت استرپ در سال ۱۹۷۹ توسط افرون معرفی شده است. موضوع آن جانشینی قدرت محاسبات خام برای مفروضات نظری و تحلیل و بررسی است. فواصل اطمینان بوت استرپ ممکن است بدون هیچ اطلاعی از توزیع پایه به دست آید. فرانکلین و واسرمن [۲۲] روش بوت استرپ برای محاسبه فاصله اطمینان شاخص کارایی فرایند را معرفی کردند و برای برخی شاخص‌های کارایی فرایند فاصله اطمینان پایه ساختند. چوی و همکاران [۱۵]، هان و چو [۲۳]، تانگ [۴۰]، نام و همکاران [۲۹] و بلامورالی [۱۰] و [۱۱] فواصل اطمینان بوت استرپ برای توزیع‌های غیرنرمال و شاخص‌های کارایی فرایند غیرنرمال را مورد بحث قرار دادند. هدف این بخش بررسی عملکرد و قابلیت پنج فاصله اطمینان بوت استرپ برای برآورد شاخص کارایی فرایند تعمیم یافته در توزیع نرمال است.

۱.۴.۱ بوت استرپ

بوت استرپ در سال ۱۹۷۹ توسط افرون معرفی شده است [۱۸]، پیشرفت‌های بیشتر در ۱۹۸۱ [۱۹]، ۱۹۸۲ [۲۰]، و انتشارات متعدد دیگر از جمله رساله افرون و تیشیرانی [۲۱] صورت گرفته است. چرنیک [۱۴] یک منبع جامع با کاربردهای بسیار آن است.

روش‌های بوت استرپ یک کلاسی از روش‌های مونت کارلو هستند که توزیع جامعه رو با باز نمونه‌گیری برآورد می‌کنند. روش‌های باز نمونه‌گیری نمونه مشاهده شده را به عنوان یک جامعه متناهی اعمال می‌کنند، و نمونه‌های تصادفی تولید شده از آن را برای برآورد مشخصه‌های جامعه و استنتاج در مورد جامعه نمونه‌برداری شده در نظر می‌گیرند. روش‌های بوت استرپ اغلب زمانی به کار می‌روند که توزیع جامعه هدف مشخص نیست، تنها اطلاع موجود نمونه است.

واژه «بوت استرپ» می‌تواند به بوت استرپ پارامتری و بوت استرپ ناپارامتری اشاره کند. روش‌های مونت کارلویی که شامل نمونه‌گیری از توزیع احتمالی که به طور کامل مشخص شده است را بوت استرپ پارامتری می‌نامند. در بوت استرپ ناپارامتری، مجموعه داده اصلی را به عنوان یک جامعه متناهی در نظر می‌گیرد و یک نمونه شبیه‌سازی شده جدید، که در آن هر مشاهده با احتمال برابر انتخاب می‌شود، از آن استخراج می‌کند. سپس برآورد را با نمونه جدید تکرار می‌کند.

برآوردهای بوت استرپ از یک توزیع نمونه‌گیری مشابه ایده‌ی برآورد چگالی هستند. ما یک هیستوگرام نمونه را برای به دست آوردن برآوردی از شکل تابع چگالی ساختیم. این هیستوگرام چگالی نیست، اما در یک مسئله ناپارامتری، می‌توان به عنوان برآورد معقول از چگالی در نظر گرفت. روش‌های برای تولید نمونه‌های تصادفی از چگالی‌های مشخص شده کامل وجود دارد؛ بوت استرپ نمونه‌های تصادفی را از توزیع تجربی نمونه تولید می‌کند. فرض کنید که $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ یک نمونه تصادفی مشاهده شده از یک توزیع با تابع توزیع $F(x)$ است. اگر X^* از \mathbf{x} انتخاب شود، آن‌گاه

$$P(X^* = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

بازنمونه‌گیری یک نمونه تصادفی X_1^*, \dots, X_n^* را توسط نمونه‌گیری با جایگذاری از \mathbf{x} تولید می‌کند. متغیرهای تصادفی X_i^* مستقل‌اند و به صورت یکنواخت روی مجموعه $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ توزیع شده‌اند.

توزیع تجربی: می‌دانیم که منظور از $X \sim F(x)$ ، این است که $P(X \leq x) = F(x)$. پس هرگاه x_1, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از $F(x)$ باشد، انتظار می‌رود که تعداد $[nF(x)]$ از x_i ها از x کوچکتر باشند. از این راه می‌توانیم $F(x)$ را برای هر $x \in \mathbb{R}$ به صورت زیر برآورد کنیم: $\hat{F}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I(X_i \leq x)}{n}$. این برآورد را که به نمونه n تایی بستگی دارد معمولاً با $F_n(x)$ نشان داده و تابع توزیع تجربی می‌نامند.

تابع توزیع تجربی $F_n(x)$ برآوردگری از $F(x)$ است. می‌توان نشان داد که $F_n(x)$ یک آماره بسنده برای $F(x)$ است؛ بدین معنا که، همه اطلاعات در مورد $F(x)$ که در نمونه موجود است در $F_n(x)$ نیز موجود است. علاوه بر این، خود تابع توزیع یک متغیر تصادفی است؛ از جمله متغیر تصادفی که به صورت یکنواخت روی مجموعه $x = (x_1, \dots, x_n)$ توزیع شده‌اند. از این رو تابع توزیع تجربی $F_n(x)$ تابع توزیع X^* است. بنابراین در بوت استرپ، دو تقریب وجود دارد. تابع توزیع تجربی $F_n(x)$ یک تقریب برای تابع توزیع F_X است. تابع توزیع تجربی F_n^* از تکرارهای بوت استرپ یک تقریب برای تابع توزیع تجربی $F_n(x)$ است. بازنمونه‌گیری از نمونه x برابر با تولید نمونه‌های تصادفی از توزیع $F_n(x)$ است.

برای تولید نمونه تصادفی بوت استرپ توسط بازنمونه‌گیری x ، n عدد صحیح $\{i_1, \dots, i_n\}$ که به صورت یکنواخت روی $\{1, \dots, n\}$ توزیع شده‌اند تولید کنید. و نمونه بوت استرپ $x^* = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ را انتخاب کنید.

فرض کنید C پارامتر مورد علاقه است (C بردار هم می‌تواند باشد)، و \hat{C} یک برآوردگر از C است. پس برآورد بوت استرپ توزیع \hat{C} به صورت زیر به دست می‌آید.

۱. برای هر تکرار بوت استرپ که با $b = 1, \dots, B$ مشخص شده است:

(الف) نمونه $x^{*b} = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ را توسط نمونه‌گیری با جایگذاری از نمونه مشاهده شده $x = (x_1, \dots, x_n)$ تولید کنید.

(ب) $\hat{C}^{(b)}$ تکرار b ام از نمونه بوت استرپ b ام را محاسبه کنید.

۲. برآورد بوت استرپ $F_{\hat{C}}(\cdot)$ تابع توزیع از تکرارهای $\hat{C}^{(1)}, \dots, \hat{C}^{(B)}$ است.

ابتدا یک مثال برای نشان دادن رابطه بین تابع توزیع تجربی F_n و توزیع تکرارهای بوت استرپ ذکر می‌کنیم.

مثال ۳.۴.۱. فرض کنید نمونه مشاهده شده $x = \{2, 2, 1, 1, 5, 4, 4, 3, 1, 2\}$ داریم. برای بازنمونه‌گیری از x ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به ترتیب با احتمال‌هایشان $0/3$ ، $0/3$ ، $0/1$ و $0/2$ و $0/1$ انتخاب می‌کنیم، بنابراین تابع توزیع F_{X^*} از یک تکرار انتخاب شده تصادفی در واقع همان تابع توزیع تجربی $F_n(x)$ است:

$$F_{X^*}(x) = F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0/3 & 1 \leq x < 2 \\ 0/6 & 2 \leq x < 3 \\ 0/7 & 3 \leq x < 4 \\ 0/9 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

توجه کنید که اگر $F_n(x)$ به F_X نزدیک نباشد آن‌گاه توزیع تکرارها به F_X نزدیک نخواهد بود. نمونه x در واقع یک نمونه از توزیع پواسن با $\lambda = 2$ است. بازنمونه‌گیری از x با تعداد تکرار زیاد

یک برآورد خوب از $F_n(x)$ را تولید می‌کند اما یک برآوردگر خوب از F_X نیست، زیرا بدون در نظر گرفتن چه تعداد تکرار ترسیم شده است، نمونه‌های بوت استرپ هرگز شامل صفر نخواهد شد.

یکی از کاربردهای روش‌های بوت استرپی، برآورد خطای استاندارد و اریبی یک برآوردگر است که در ادامه به آن‌ها می‌پردازیم.

برآوردگر بوت استرپ خطای استاندارد

برآورد بوت استرپ خطای استاندارد از یک برآوردگر \hat{C} انحراف استاندارد نمونه از تکرارهای بوت استرپ $\hat{C}^{(1)}, \dots, \hat{C}^{(B)}$ است، که آن را با نماد زیر نشان می‌دهیم:

$$se(\hat{C}^*) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{C}^{(b)} - \bar{\hat{C}}^*)^2} \quad (7.1)$$

به طوری که $\bar{\hat{C}}^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{C}^{(b)}$.

مطابق با [۲۱]، تعداد تکرارهای مورد نیاز برای برآوردهای خوب از خطای استاندارد زیاد نیست؛ معمولاً $B = 50$ کفایت می‌کند، و به ندرت $B > 200$ نیاز است (B خیلی بزرگتر برای برآورد فاصله اطمینان مورد نیاز خواهد بود).

اریبی برآوردگر بوت استرپ

اگر \hat{C} یک برآوردگر ناریب از C باشد، آن گاه $E[\hat{C}] = C$. اریبی یک برآوردگر \hat{C} برای C به صورت زیر است:

$$bias(\hat{C}) = E[\hat{C} - C] = E[\hat{C}] - C$$

بنابراین، هر آماره یک برآوردگر ناریب از مقدار مورد انتظار آن است، و به خصوص، میانگین نمونه از یک نمونه تصادفی یک برآوردگر ناریب از میانگین جامعه است. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی واریانس مثالی از یک برآوردگر اریب است، $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ، که دارای مقدار مورد انتظار $(1 - 1/n)\sigma^2$ است. بنابراین، اریبی برابر $-\sigma^2/n$ است.

برآورد بوت استرپ اریبی، تکرارهای بوت استرپ از \hat{C} را برای برآورد توزیع نمونه‌گیری \hat{C} به کار می‌برد. برای جامعه متناهی $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ، پارامتر $\hat{C}(x)$ است و B برآوردگر مستقل و هم‌توزیع $\hat{C}^{(b)}$ وجود دارد. میانگین نمونه از تکرارها $\{\hat{C}^{(b)}\}$ برای مقدار مورد انتظار آن $E[\hat{C}^*]$ ناریب است، بنابراین برآورد بوت استرپ اریبی به صورت ذیل است:

$$bias(\hat{C}) = \bar{\hat{C}}^* - \hat{C}$$

به طوری که $\bar{\hat{C}}^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{C}^{(b)}$ ، و $\hat{C} = \hat{C}(x)$ برآورد محاسبه شده از نمونه مشاهده شده اصلی است.

۲.۴.۱ فواصل اطمینان بوت استرپ

در این بخش چندین روش برای به دست آوردن فاصله اطمینان تقریبی برای پارامتر هدف در بوت استرپ بحث شده است. روش‌ها شامل فاصله اطمینان بوت استرپ نرمال استاندارد (SB)^۷، فاصله اطمینان بوت استرپ پایه (BB)^۸، فاصله اطمینان بوت استرپ صدکی (PB)^۹، فاصله اطمینان بوت استرپ t (PTB)^{۱۰} و فاصله اطمینان بوت استرپ با درصد اریبی تصحیح شده شتابیده (BCa)^{۱۱} می‌باشند.

فرض کنید x_1, \dots, x_n داده‌هایی باشند که به عنوان تحقق از متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع F به طور مستقل و هم‌توزیع مشاهده شده‌اند، یعنی $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F$. X را به صورت $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ کل مجموعه داده‌ها را نشان می‌دهد. یک نمونه تصادفی با جایگذاری از مجموعه X به حجم n انتخاب کرده و آن‌ها را با $X^* = \{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ نمایش داده و به آن یک نمونه بوت استرپی گوییم. تحقق از این نمونه بوت استرپی را نیز با x_1^*, \dots, x_n^* نشان می‌دهیم. n^n مجموعه بازنمونه‌گیری وجود دارد که از آن برای محاسبه n^n مقادیر \hat{C}^* استفاده می‌شود و C نشان دهنده شاخص کارایی است. هر یک از آن‌ها برآوردی از C^* است و مجموعه تمام آن‌ها توزیع بوت استرپی \hat{C} را تشکیل می‌دهد. نمونه بوت استرپ معادل با نمونه با جایگذاری از تابع توزیع تجربی است. بنابراین، توزیع بوت استرپ \hat{C} برآوردی از توزیع تجربی C است. در عمل، حداقل ۱۰۰۰ نمونه بوت استرپ برای محاسبه منطقی برآورد دقیق فاصله اطمینان کفایت می‌کند (افرون و تییشیرانی ۱۹۸۶). فرض بر این است که $B = ۱۰۰۰$ بار نمونه بوت استرپ گرفته شود و $B = ۱۰۰۰$ بار \hat{C} بوت استرپی محاسبه و سپس از کوچکترین به بزرگترین مرتب شوند. در زیر پنج ساختار مختلف برای فاصله اطمینان شاخص کارایی فرایند با استفاده از روش بوت استرپ بیان شده است.

فاصله اطمینان بوت استرپ استاندارد (SB)

فاصله اطمینان بوت استرپ نرمال استاندارد یکی از ساده‌ترین روش‌هاست، اما لزوماً بهترین نیست. فرض کنید \hat{C} یک برآورد از پارامتر C است و $se(\hat{C})$ برآوردگر خطای استاندارد است. اگر $E(\hat{C})$ میانگین نمونه و حجم نمونه بزرگ باشد، آن‌گاه طبق قضیه حد مرکزی، توزیع:

$$Z = \frac{\hat{C} - E(\hat{C})}{se(\hat{C})}$$

^۷Standard Bootstrap

^۸Basic Bootstrap

^۹Percentile Bootstrap

^{۱۰}Percentile T Bootstrap

^{۱۱}Bias Corrected accelerated Bootstrap

تقریباً نرمال استاندارد است. بنابراین اگر \hat{C} برای C ناریب باشد، آن‌گاه یک فاصله اطمینان $100(1 - \alpha)\%$ تقریبی برای C عبارت است از:

$$[\hat{C} - z_{\alpha/2} se(\hat{C}), \hat{C} + z_{\alpha/2} se(\hat{C})]$$

به طوری که $z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(\alpha/2)$ است. محاسبه این فاصله آسان است، اما چندین فرض را در نظر می‌گیریم. برای به کار بردن توزیع نرمال، فرض می‌کنیم که توزیع \hat{C} نرمال است یا \hat{C} میانگین نمونه است و حجم نمونه بزرگ است. همچنین به طور ضمنی \hat{C} را برای C ناریب در نظر می‌گیریم.

اریبی را می‌توان برآورد کرد و برای مرکز آماره Z به کار برد. که در این صورت متغیر تبدیل یافته Z دارای توزیع نرمال نیست. اینجا $se(\hat{C})$ را به عنوان پارامتر معلوم لحاظ می‌کنیم، اما در بوت استرپ $se(\hat{C})$ برآورد شده است. از تعداد B برآورد بوت استرپ \hat{C}_i^* ، به ازای $i = 1, \dots, B$ میانگین نمونه $\bar{C}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{C}_i^*$ و انحراف استاندارد نمونه $se(\hat{C}^*) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{C}_i^* - \bar{C}^*)^2}$ محاسبه می‌شود و فاصله اطمینان بوت استرپ استاندارد برای C به صورت زیر است:

$$[\hat{C} - z_{\alpha/2} se(\hat{C}^*), \hat{C} + z_{\alpha/2} se(\hat{C}^*)] \quad (8.1)$$

فاصله اطمینان بوت استرپ پایه (BB)

فاصله اطمینان بوت استرپ پایه توزیع نمونه‌های نمونه‌های شبیه سازی شده به دست می‌دهند. از مجموعه مورد نظر \hat{C}_i^* ، برای فاصله اطمینان بوت استرپ پایه برای C به صورت زیر است:

$$[2\hat{C} - \hat{C}_{1-\alpha/2}, 2\hat{C} - \hat{C}_{\alpha/2}] \quad (9.1)$$

که در آن $\hat{C}_{1-\alpha/2}$ چندک مرتبه $\alpha/2$ ام از توزیع تجربی مبتنی بر یک نمونه بوت استرپی است. برای اینکه ببینید چطور حدود اطمینان (9.1) مشخص شده است، در ابتدا یک مورد پارامتری را در نظر بگیرید. فرض کنید که \hat{C} برآوردگری از C و a_α چندک α ام از $\hat{C} - C$ است. پس

$$P[\hat{C} - C > a_\alpha] = 1 - \alpha \Rightarrow P[\hat{C} - a_\alpha > C] = 1 - \alpha$$

بنابراین، فاصله اطمینان $100(1 - 2\alpha)\%$ با α خطای برابر دم بالایی و پایینی توسط $(t - a_{1-\alpha}, t - a_\alpha)$ داده شده است. معمولاً در بوت استرپ توزیع \hat{C} نامعلوم است، اما چندک‌ها را می‌توان برآورد کرد و یک روش تقریبی به کار برد. چندک‌های α ام نمونه \hat{C}_α را از تابع توزیع تجربی \hat{C}^* محاسبه کنید. چندک α ام $\hat{C}^* - \hat{C}$ را با b_α مشخص کنید. پس $\hat{b}_\alpha = \hat{C}_\alpha - \hat{C}$ برآوردگری از b_α است. یک حدود اطمینان بالایی تقریبی برای یک فاصله اطمینان $100(1 - \alpha)\%$ برای C

به صورت زیر داده شده است:

$$\hat{C} - \hat{b}_{\alpha/2} = \hat{C} - (\hat{C}_{\alpha/2} - \hat{C}) = 2\hat{C} - \hat{C}_{\alpha/2}$$

به طور مشابه، یک حدود اطمینان پایینی تقریبی توسط $2\hat{C} - \hat{C}_{1-\alpha/2}$ داده شده است. فاصله اطمینان بوت استرپ پایه یک فاصله اطمینان مبتنی بر کمیت محوری است. به سادگی قابل محاسبه است و دقت آن قابل قبول است.

فاصله اطمینان بوت استرپ صدکی (PB)

فاصله صدکی بوت استرپ توزیع تجربی از تکرارهای بوت استرپ را به عنوان توزیع مرجع به کار می‌برد. چندک‌های توزیع تجربی برآوردگرهایی از چندک‌های توزیع نمونه‌ای \hat{C} هستند، بنابراین اگر توزیع \hat{C} نرمال نباشد این چندک‌ها ممکن است توزیع واقعی را بهتر نشان دهند. نقاط α درصدی و $1 - \alpha$ درصدی از توزیع \hat{C}_i^* را برای فواصل اطمینان نقاط انتهایی انتخاب کنید.

از مجموعه مورد نظر \hat{C}_i^* ، برای $i = 1, \dots, n$ ، فاصله اطمینان بوت استرپ صدکی برای C به صورت زیر است:

$$[\hat{C}^*(\alpha B), \hat{C}^*((1 - \alpha)B)] \quad (10.1)$$

ساده‌ترین روش، روش صدکی است و زمانی کاربرد دارد که آماره مورد نظر به عنوان کمیت محوری استفاده شده و دارای توزیع متقارن است. با افزایش حجم نمونه و افزایش تعداد تکرار مونت کارلو می‌توان انتظار داشت که روش صدکی تقریباً دقیق است. اساساً بیان می‌کند که سطح اطمینان واقعی فاصله تقریباً همان سطح اعلام شده است. روش صدکی دارای ویژگی حافظ دامن است. این ویژگی دقت و اطمینان بیشتری را در بر دارد.

فاصله اطمینان بوت استرپ درصد اریبی تصحیح شده (BCPB)

علی‌رغم این که روش صدکی کاملاً جذاب و قابل درک است، اما ممکن است توزیع بوت استرپی آن اریب باشد. بدین معنی که، توزیع به بالاتر یا پایین‌تر از مقدار مورد انتظار تغییر مکان یابد. بنابراین، سومین روش برای تصحیح این اریبی بالقوه بسط یافته است. ابتدا، با استفاده از توزیع مرتب از \hat{C}^* احتمال $P_0 = P_r(\hat{C}_i^* \leq \hat{C})$ را محاسبه می‌کنیم. پس، $Z_0 = \Phi^{-1}(P_0)$ ، بنابراین، می‌توان درصد توزیع مرتب را دریافت کنیم $F^*(\hat{C}^*)$ و $P_L = \Phi(Z_0 - Z_\alpha)$ و $P_U = \Phi(Z_0 + Z_\alpha)$ ، به طوری که Φ تابع تجمعی نرمال استاندارد است. در نهایت با انتخاب این نقاط درصدی از توزیع \hat{C}^* فاصله اطمینان نقاط انتهایی (BCPB) به صورت زیر است:

$$[\hat{C}^*(P_L B), \hat{C}^*(P_U B)] \quad (11.1)$$

فاصله اطمینان بوت استرپ t درصدی (PTB)

بر اساس باز نمونه گیری بوت استرپ X^* ، $Z_i^* = \frac{(\hat{C}_i^* - \hat{C})}{se_i^*}$ ، $i = 1, \dots, B$ را محاسبه می‌کنیم، به طوری که \hat{C}_i^* برآوردی از C بر اساس باز نمونه گیری بوت استرپ X_1^*, \dots, X_B^* است و se_i^* خطای استاندارد برآورد شده از \bar{C}^* است. بنابراین، یک مجموعه از Z_i^* ، $i = 1, \dots, B$ را دریافت می‌کنیم. فرض کنید $Z^*(i)$ کوچکترین مقدار i ام در بین Z_i^* ، $i = 1, \dots, B$ را نشان می‌دهد. سپس چندک α ام از این مقادیر Z توسط مقدار $\hat{t}(\alpha)$ همچون $\sum_{i=1}^B I[Z^*(i) \leq \hat{t}(\alpha)] = \alpha B$ برآورد می‌شود. توجه کنید که اگر αB عدد صحیح نباشد، چندک α ام برابر کوچکترین مقدار $[(B+1)\alpha]$ و چندک $1 - \alpha$ ام برابر $[(B+1) - (B+1)\alpha]$ کوچکترین مقدار بین Z_i^* ، $i = 1, \dots, B$ است.

فاصله اطمینان بوت استرپ $100(1 - 2\alpha)\%$ برای C دارای ساختار زیر است:

$$[\hat{C} + \hat{t}(\alpha)s_d, \hat{C} + \hat{t}(1 - \alpha)s_d] \quad (12.1)$$

به طوری که s_d نشان دهنده خطای استاندارد از \hat{C} است. با این وجود، به دلیل پیچیدگی ساختار خطای استاندارد از \hat{C} هیچ فرمول ساده برای محاسبه آن وجود ندارد. بدین معناست که هر دو s_d و se_i^* برای باز نمونه گیری بوت استرپ X_1^*, \dots, X_B^* داده شده را نمی‌توان محاسبه نمود. بنابراین، ممکن است برآورد بوت استرپ s_c^* به جای s_d استفاده کنیم. ابتدا یک برآورد بوت استرپ از خطای استاندارد برای هر باز نمونه گیری بوت استرپ توسط دو سطح توزیع از باز نمونه گیری بوت استرپ محاسبه کنیم. برای انجام چنین باز نمونه گیری، ۲۵ نمونه بوت استرپ X_1^*, \dots, X_B^* با هدف تخمین خطای استاندارد تولید می‌کنیم. برای هر ۲۵ باز نمونه

گیری بوت استرپ $\bar{C}_i^* = \sum_{j=1}^{n_T} \hat{C}_{ij}^*$ و $s\hat{e}_i^* = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_T} (\hat{C}_{ij}^* - \bar{C}_i^*)^2}{n_T}}$ محاسبه می‌کنیم. بنابراین یک فاصله اطمینان بوت استرپ $100(1 - \alpha)\%$ برای C به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[\hat{C} + \hat{t}(\frac{\alpha}{n_T})s_c^*, \hat{C} + \hat{t}(1 - \frac{\alpha}{n_T})s_c^*]$$

فاصله اطمینان بوت استرپ تصحیح اریبی شتابیده (BCa)

فواصل اطمینان بوت استرپ بهتری وجود دارد که در واقع نسخه‌ی اصلاح شده فواصل صدکی است که ویژگی‌های نظری و در عمل عملکرد بهتری دارند. برای یک فاصله اطمینان $100(1 - \alpha)\%$ ، چندک‌های $\alpha/2$ و $1 - \alpha/2$ معمول توسط دو عامل تنظیم شده است؛ یک تصحیح برای اریبی و یک تصحیح برای چولگی. تصحیح اریبی با z مشخص شده است و چولگی یا شتاب با a تنظیم شده است. این فاصله اطمینان بوت استرپ بهتر BCa نامیده شده است. برای یک فاصله اطمینان بوت استرپ تصحیح اریبی شتابیده $100(1 - \alpha)\%$ محاسبه می

کنیم:

$$\alpha_1 = \Phi\left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{\alpha/2})}\right) \quad (13.1)$$

$$\alpha_2 = \Phi\left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{1-\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{1-\alpha/2})}\right) \quad (14.1)$$

به طوری که $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ ، \hat{z}_0 و \hat{a} توسط معادلات (۱۶.۱) و (۱۷.۱) داده شده است. فاصله BCa به صورت زیر است:

$$(\hat{C}_{\alpha_1}^*, \hat{C}_{\alpha_2}^*) \quad (15.1)$$

حدود اطمینان بالایی و پایینی فواصل اطمینان BCa چندک‌های تجربی α_1 و α_2 از تکرارهای بوت استرپ هستند. عامل تصحیح اریبی در عمل اریبی میانه از تکرارهای \hat{C}^* برای \hat{C} را اندازه‌گیری می‌کند. برآورد این اریبی به صورت زیر است:

$$\hat{z}_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B I(\hat{C}^{(b)} < \hat{C})\right) \quad (16.1)$$

به طوری که $I(\cdot)$ تابع نشانگر است. توجه کنید که اگر \hat{C} میانه توزیع‌های بوت استرپ باشد، آن‌گاه $\hat{z}_0 = 0$ است. فرض کنید i امین تکرار جک نایف $C_{(i)}$ است و $\bar{C}_{(\cdot)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{C}_{(i)}$. برآورد عامل شتاب از تکرارهای جک نایف برابر است با:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{C}_{(\cdot)} - C_{(i)})^3}{6 \sum_{i=1}^n ((\bar{C}_{(\cdot)} - C_{(i)})^2)^{3/2}} \quad (17.1)$$

که چولگی را اندازه می‌گیرد.

روش‌های دیگری برای برآورد شتاب نیز پیشنهاد شده است. فرمول (۱۷.۱) توسط افرون و تیبشیرانی [۱۸] داده شده است. عامل شتاب \hat{a} نرخ تغییر خطای استاندارد از \hat{C} را با توجه به پارامتر هدف C برآورد می‌کند. زمانی که ما یک فاصله اطمینان نرمال استاندارد را به کار می‌بریم، فرض می‌کنیم که \hat{C} تقریباً نرمال با میانگین C و واریانس ثابت $\sigma^2(\hat{C})$ است که به پارامتر C بستگی ندارد. با این حال، این همیشه صدق نمی‌کند که واریانس برآوردگر، واریانس ثابتی با توجه به پارامتر هدف دارد. به عنوان مثال، فرض کنید نسبت نمونه $\hat{p} = X/n$ به عنوان یک برآوردگر از احتمال موفقیت p در یک آزمایش دوجمله‌ای، که دارای واریانس $p(1-p)/n$ است. هدف عامل شتاب تنظیم حدود اطمینان برای حساب احتمال اینکه واریانس برآوردگر ممکن است به مقدار واقعی پارامتر هدف بستگی داشته باشد، است.

ویژگی‌های فواصل BCa

دو مزیت نظری اصلی برای فواصل اطمینان BCa وجود دارد.

تعریف ۱.۴.۱. تبدیل پایا بدین معنی که اگر $(\hat{C}_{\alpha_1}^*, \hat{C}_{\alpha_2}^*)$ یک فاصله اطمینان برای C باشد، و $t(C)$ یک تبدیلی از پارامتر C باشد، آن‌گاه فاصله اطمینان مربوطه برای $t(C)$ برابر است با $(t(\hat{C}_{\alpha_1}^*), t(\hat{C}_{\alpha_2}^*))$.

تعریف ۲.۴.۱. یک فاصله اطمینان دارای دقت مرتبه اول است اگر برای حجم نمونه n خطا با نرخ $1/\sqrt{n}$ به صفر میل کند، و دارای دقت مرتبه دوم است اگر خطا با نرخ $1/n$ به صفر میل می‌کند.

فواصل اطمینان BCa نسبت به تبدیل پایا هستند و این فواصل دارای دقت مرتبه دوم هستند. فاصله اطمینان t بوت استرپ دارای دقت مرتبه دوم است اما در تبدیل پایا نیست. فاصله صدکی بوت استرپ دارای تبدیل پایاست اما دارای دقت مرتبه اول است. فاصله اطمینان نرمال استاندارد نه دارای دقت مرتبه دوم است و نه تبدیل پایا.

مثال ۴.۴.۱. داده‌های جدول ۳.۱ را در نظر بگیرید. برآورد نقطه‌ای بوت استرپ و فواصل اطمینان بوت استرپ ذکر شده در معادلات (۱۵.۱) – (۸.۱) را با استفاده از نرم افزار R محاسبه می‌کنیم. به عنوان مثال، برآورد نقطه‌ای و فاصله اطمینان بوت استرپ را برای شاخص کارایی C_{pm} با کد R که در پیوست آمده است، حساب می‌کنیم. نتایج را در جدول ۵.۱ گردآوری کردیم، همان‌طور که مشاهده می‌کنید مقدار برآوردهای نقطه‌ای شاخص‌های کارایی فرایند بزرگ‌تر از $1/33$ است و همه فواصل اطمینان بوت استرپی شامل عدد $1/33$ می‌باشند. پس فواصل حاکی از فرایند کارا است (حدود مشخصه $USL = 0/77$ و $LSL = 0/63$). به دلیل عدم

جدول ۵.۱: فواصل اطمینان بوت استرپ ۹۵٪ برای شاخص‌های کارایی داده‌های جدول ۳.۱

	برآورد نقطه‌ای	SB	BB	PB	PTB	BCa
\hat{C}_p	۱/۸۱۹۳	(۱/۶۴۳, ۱/۹۷۹)	(۱/۶۲۷, ۱/۹۷۸)	(۱/۶۶۱, ۲/۰۱۲)	(۱/۶۴۸, ۱/۹۶۹)	(۱/۶۴۴, ۱/۹۹۰)
\hat{C}_{pk}	۱/۸۱۵۵	(۱/۶۴۵, ۱/۹۹۲)	(۱/۶۲۷, ۱/۹۸۵)	(۱/۶۴۶, ۲/۰۰۵)	(۱/۶۴۸, ۲/۰۱۳)	(۱/۶۴۹, ۲/۰۱۳)
\hat{C}_{pm}	۱/۸۱۹۲	(۱/۶۴۰, ۱/۹۸۱)	(۱/۶۲۵, ۱/۹۶۷)	(۱/۶۷۲, ۲/۰۱۴)	(۱/۶۵۲, ۱/۹۹۷)	(۱/۶۶۴, ۲/۰۰۰)
\hat{C}_{pmk}	۱/۸۱۵۴	(۱/۶۵۲, ۱/۹۹۶)	(۱/۶۴۲, ۱/۹۸۸)	(۱/۶۴۳, ۱/۹۸۹)	(۱/۶۵۶, ۱/۹۹۹)	(۱/۶۶۲, ۲/۰۰۰)

انطباق میانگین $\mu = 0/6999$ با مقدار هدف $T = 0/7$ شاخص کارایی \hat{C}_{pmk} معیار مناسبی برای کارایی است.

۵.۱ نتیجه‌گیری

شاخص کارایی فرایند ابزاری جهت کمی کردن تغییرات فرایند و تجزیه و تحلیل این تغییرات با توجه به نیازها و مشخصات فنی محصول است. در نتیجه‌ی چنین کاری می‌توان تغییرات

فرایند را ریشه‌یابی کرده و برای حذف یا کاهش آن‌ها اقدام نماید. در این فصل به معرفی چندین شاخص کارایی فرایند و روابط بین آن‌ها پرداختیم. اکثر ارزیابی‌ها روی شاخص‌های کارایی فرایند بر برآوردهای نقطه‌ای متمرکزاند، که ممکن است این نتیجه تخمین نامعتبری از پتانسیل فرایند باشد. بنابراین فواصل اطمینان برای شاخص‌های کارایی فرایند را بیان کردیم، اما به دلیل پیچیدگی محاسبات، فواصل اطمینان بوت استرپی برای شاخص‌های کارایی فرایند را پیشنهاد کردیم. فواصل اطمینان بوت استرپ نرمال استاندارد، پایه، صدکی، t درصدی و تصحیح ارببی شتابیده مطرح شده است.

فصل ۲

مروری بر مفاهیم فازی

در این فصل مروری بر مفهوم مجموعه‌های فازی، عملگرهای مجموعه‌ای بر مجموعه‌های فازی، α -برش‌ها، اعداد فازی و عملگرها بر اعداد فازی، فاصله بین اعداد فازی و چند فرمول محاسباتی برای واریانس اعداد فازی مثلثی و نرمال نامتقارن انجام می‌شود. همچنین به تعاریف توابع عضویت حدود بالایی و پایینی فازی خطی و نمایی و فاصله بین حدود فازی پرداخته می‌شود. اکثر مطالب این فصل از مرجع [۲، ۵، ۳۰] است.

۱.۲ مقدمه

مفاهیم نادقیق بسیاری در پیرامون ما وجود دارند که آن‌ها را به صورت روزمره در قالب عبارت‌های مختلف بیان می‌کنیم. به عنوان مثال: «هوا خوب است» هیچ کمیتی برای خوب بودن هوا مطرح نیست تا آن را به‌طور دقیق اندازه‌گیری نماییم، بلکه این یک حس کیفی است. در واقع مغز انسان با در نظر گرفتن عوامل گوناگون و بر پایه تفکر استنتاجی جملات را تعریف و ارزش‌گذاری می‌نماید که الگوبندی آن‌ها به زبان و فرمول‌های ریاضی اگر غیرممکن نباشد، کاری بسیار پیچیده خواهد بود. منطق فازی فناوری جدیدی است که شیوه‌هایی را که برای طراحی و مدل‌سازی یک سیستم نیازمند ریاضیات پیچیده و پیشرفته است، با استفاده از مقادیر زبانی و دانش فرد خبره جایگزین می‌سازد.

در جهان واقعیات، بسیاری از مفاهیم را آدمی به‌صورت فازی (به معنای غیردقیق، ناواضح و

مبهم) درک می‌کند و به کار می‌بندد. به عنوان نمونه، هر چند کلمات و مفاهیمی همچون گرم، سرد، بلند، کوتاه، پیر، جوان و نظایر این‌ها به عدد خاص و دقیقی اشاره ندارد، اما ذهن انسان با سرعت و با انعطاف‌پذیری شگفت‌آوری همه را می‌فهمد و در تصمیمات و نتیجه‌گیری‌های خود به کار می‌گیرد. این، در حالی است که ماشین فقط اعداد را می‌فهمد و اهل دقت است. اهداف شیوه‌های نو در علوم کامپیوتر آن است که اولاً رمز و راز این‌گونه توانایی‌ها را از انسان بیاموزد و سپس آن‌ها را تا حد امکان به ماشین یاد دهد.

منطق فازی اولین بار در پی تنظیم نظریه‌ی مجموعه‌های فازی توسط پرفسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ میلادی در صحنه‌ی محاسبات نو ظاهر شد. کاربرد این بخش در علوم نرم افزاری را می‌توان به طور ساده این‌گونه تعریف کرد: منطق فازی از منطق ارزش‌های «صفر و یک» نرم افزارهای کلاسیک فراتر رفته و درگاهی جدید برای دنیای علوم نرم افزاری و رایانه‌ها می‌گشاید، زیرا فضای شناور و نامحدود بین اعداد صفر و یک را نیز در منطق و استدلال‌های خود به کار برده و به چالش می‌کشد.

۲.۲ مجموعه‌های فازی

تعریف ۱.۲.۲. گردایه‌ای معین از اشیاء را مجموعه می‌نامند. اشیاء این گردایه، اعضا یا عناصر مجموعه نامیده می‌شوند.

در هر موضوع، مجموعه‌ی شامل تمام عناصر مورد بحث را مجموعه مرجع نامیده با X نشان می‌دهند. در عمل، بسیاری از موارد ویژگی مورد بحث، یک ویژگی دقیق و خوش تعریف نیست. در این موارد، در تعیین عناصر مجموعه‌ی متناظر با آن ویژگی، دچار مشکل می‌شویم. مثلاً در هیچ‌یک از حالت‌های زیر ویژگی P خوش تعریف نیست.

(الف) X مجموعه اعداد طبیعی و P ویژگی خیلی کوچک‌تر از ۱۰ بودن،

(ب) X مجموعه زنان و P ویژگی زیبا بودن،

(ج) X مقادیر درجه حرارت هوا و P ویژگی گرم بودن.

در هیچ‌یک از مثال‌های بالا، نمی‌توان عناصر مجموعه متناظر با ویژگی P را دقیقاً مشخص کرد. در این موارد با نوعی عدم قطعیت مواجه هستیم که مربوط به عدم مرزبندی دقیق مفاهیم است. این عدم دقت ربطی به نامعلوم بودن وقوع یک پیشامد مانند آنچه در نظریه احتمال بیان می‌شود، ندارد. بلکه به خوش تعریف نبودن مفاهیم و مبهم بودن آن‌ها باز می‌گردد. یک روش مفید در تعریف و نشان دادن یک مجموعه، استفاده از تابع نشانگر است.

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید A یک زیرمجموعه از مجموعه مرجع X باشد. تابع نشانگر A به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

دقت دارید که دامنه‌ی تابع نشانگر، مجموعه مرجع، و برد آن مجموعه دو عضوی $\{0, 1\}$ است. یک مجموعه معمولی، با یک ویژگی دقیق و معین مشخص می‌شود. اگر یک عضو از مجموعه مرجع، آن ویژگی را دارا باشد، عضو مجموعه‌ی مورد نظر است و اگر فاقد آن ویژگی باشد در مجموعه عضو نیست. مثلاً اگر مجموعه مقادیر ممکن برای طول قد انسان‌ها $X = [0, 250]$ باشد، و P ویژگی بلندتر از 180 سانتی‌متر، آن گاه P یک ویژگی دقیق است که یک مجموعه مانند A را تعریف می‌کند که عبارت است از انسان‌های با قد بیشتر از 180 سانتی‌متر. اکنون اگر بخواهیم درباره‌ی انسان‌های بلند قد گفتگو کنیم، با یک ویژگی نادقیق و مبهم سروکار داریم. به عبارت دیگر عضویت یا عدم عضویت افراد در گردایه‌ی انسان‌های بلند قد قطعی و مشخص نیست.

نکته‌ی مهم آن است که اکثر مفاهیمی که در زندگی روزمره به کار می‌بریم و بر اساس آن‌ها استدلال انجام می‌دهیم و تصمیم‌گیری می‌کنیم، مفاهیمی نادقیق هستند و مجموعه‌هایی با حدود تقریبی می‌باشند. مثلاً لامپ‌های با طول عمر زیاد، شوری خاک حدوداً $12/4$ ، ضریب هوشی پایین، مسافت‌های طولانی، نرخ تورم بالا، مقاومت کششی زیاد، تأثیر کم دارو، فشار خون بسیار بالا، همگی از این نوع مفاهیم و مجموعه‌ها هستند.

نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه‌ای برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این‌گونه مفاهیم است. برای توضیح مفهوم مجموعه فازی، مثال بالا را پی می‌گیریم. در مثال بالا هر مقدار عددی طول قد یا بیشتر از 180 است یا نیست و لذا مقدار تابع نشانگر برای هر x از $[0, 250]$ یا صفر است (عدم تعلق x به A) یا یک (تعلق x به A). حال فرض می‌کنیم که تابع نشانگر بتواند هر عددی را از بازه $[0, 1]$ اختیار کند. در این صورت می‌توانیم به مقادیر بزرگ طول قد اعداد نزدیک ۱ متناظر کنیم (یعنی تعلق بیشتر به مجموعه انسان‌های بلند قد) و به مقادیر کوچک طول قد اعداد نزدیک ۰ را متناظر کنیم (یعنی تعلق کمتر به مجموعه انسان‌های بلند قد). پس به جای آن که یک شخص با طول قد 183 را بلند قد خطاب کنیم یا نه، گوییم وی با درجه‌ی $0/7$ ، بلند قد محسوب می‌شود. واضح است که اساس کار، چیزی جز گسترش مفهوم تابع نشانگر به یک تابع با برد $[0, 1]$ نیست.

تعریف ۳.۲.۲. یک زیر مجموعه فازی (مجموعه فازی) از مجموعه مرجع X ، توسط یک تابع $\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر x از X ، مقدار $\mu_A(x)$ میزان عضویت x در مجموعه فازی A را نشان می‌دهد.

فرض کنید \mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی و $F(\mathbb{R}) = \{\tilde{A} | \tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]\}$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی از \mathbb{R} باشد. $-\alpha$ برش \tilde{A} یک مجموعه غیرفازی است که برای هر $\alpha \in (0, 1]$ با $\tilde{A}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} | \tilde{A}(x) \geq \alpha\}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۲. اگر \widetilde{USL} دارای دو شرط زیر باشد، آن گاه \widetilde{USL} یک حد بالای فازی نامیده می‌شود

(الف) \widetilde{USL} یک تابع غیرصعودی باشد،

(ب) وجود داشته باشد $u_1 \in R$ به طوری که به ازای هر $x \leq u_1$ داشته باشیم $\widetilde{USL}(x) = 1$.

تعریف ۵.۲.۲. اگر \widetilde{LSL} دارای دو شرط زیر باشد، آن گاه \widetilde{LSL} یک حد پایینی فازی نامیده می‌شود

(الف) \widetilde{LSL} یک تابع غیرنزولی باشد،

(ب) وجود داشته باشد $l_1 \in R$ به طوری که به ازای هر $x \geq l_1$ داشته باشیم $\widetilde{LSL}(x) = 1$.

می‌دانیم که توابع نشانگر $I_{\{x|x \leq USL\}}$ و $I_{\{x|x \geq LSL\}}$ به ترتیب دو مجموعه فازی «بزرگ‌تر از LSL بودن» و «کوچک‌تر از USL بودن» را نشان می‌دهند و این توابع مقادیر مختلف مشخصه کیفیت x را به مجموعه دو عضوی $\{0, 1\}$ می‌برند. ایده تعریف حدود فازی ریشه در تعمیم این توابع نشانگر به توابع عضویت \widetilde{USL} و \widetilde{LSL} دارد. توابع \widetilde{USL} و \widetilde{LSL} که به ترتیب دو مجموعه فازی «تقریباً بزرگ‌تر بودن» و «تقریباً کوچک‌تر بودن» را مشخص می‌کنند، قادر خواهند بود مقادیر مختلف مشخصه کیفیت x را به بازه $[0, 1]$ ببرند و نگاهی منصفانه‌تر و جامع‌تر به کیفیت یک کالا داشته باشند. چرا که بر خلاف روش‌های سنتی سنجش کیفیت که نگاهی سیاه و سفید (معیوب و سالم) به کیفیت کالاها داشتند، در این نگرش جدید می‌توان کالاها را با اعداد متعلق به بازه $[0, 1]$ از لحاظ میزان کیفیت درجه‌بندی نمود. حال با مطرح نمودن نگرش کیفیت فازی می‌توان به عنوان مثال گفت که یک کالای خاص با درجه عضویت 0.7 متعلق به کالاهای با کیفیت می‌باشد که این درجه عضویت در واقع اشتراک دو مجموعه فازی \widetilde{USL} و \widetilde{LSL} می‌باشد.

$F_L(\mathbb{R})$ و $F_U(\mathbb{R})$ به ترتیب مجموعه‌ای از همه حدود فازی بالایی و مجموعه‌ای از همه حدود فازی پایینی را مشخص می‌کنند.

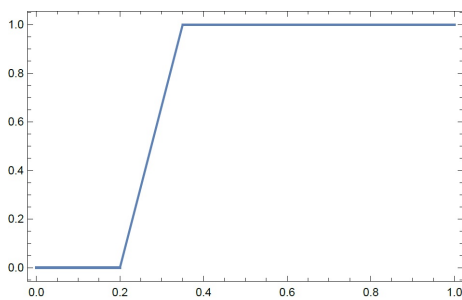
تعریف ۶.۲.۲. [۳] حد بالایی فازی $\widetilde{USL}_L \in F_U(\mathbb{R})$ و حد پایینی فازی $\widetilde{LSL}_L \in F_L(\mathbb{R})$ را به ترتیب حد فازی بالایی و پایینی خطی می‌نامیم و آن‌ها را به ترتیب با $\widetilde{USL}_L = (u_1, u_0)_{UL}$ و $\widetilde{LSL}_L = (l_0, l_1)_{LL}$ نشان می‌دهیم، هرگاه توابع عضویت آن‌ها به صورت زیر باشد:

$$\widetilde{USL}_L(x) = \begin{cases} 1 & x \leq u_1 \\ \frac{x-u_0}{u_1-u_0} & u_1 \leq x \leq u_0, \\ 0 & x > u_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

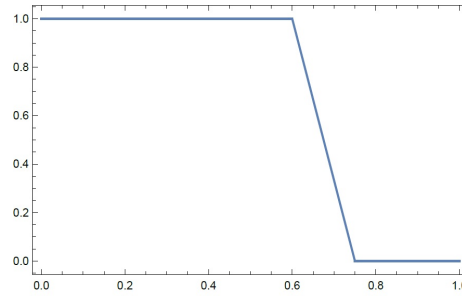
$$\widetilde{LSL}_L(x) = \begin{cases} 0 & x \leq l_0 \\ \frac{x-l_0}{l_1-l_0} & l_0 \leq x \leq l_1 \\ 1 & x > l_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

به طوری که $u_0, u_1, l_0, l_1 \in \mathbb{R}$ و $l_0 < l_1 \leq u_1 < u_0$.

به طور مثال، اگر حدود مشخصه فنی تقریباً بزرگتر از ۰/۳۵ و تقریباً کوچکتر از ۰/۶۰ باشند که به ترتیب با $\widetilde{LSL}_L = (0/20, 0/35)_{LL} \in F_L(\mathbb{R})$ و $\widetilde{USL}_L = (0/60, 0/75)_{UL} \in F_U(\mathbb{R})$ مشخص شوند، آن‌گاه نمودار توابع عضویت حدود مشخصه فازی بالایی و پایینی خطی همانند شکل ۱.۲ است.



(ب) نمودار تابع عضویت \widetilde{LSL}_L



(آ) نمودار تابع عضویت \widetilde{USL}_L

شکل ۱.۲: نمودار توابع عضویت حدود مشخصه فازی بالایی و پایینی خطی

تعریف ۷.۲.۲. [۳] حد بالایی فازی $\widetilde{USL}_E \in F_U(\mathbb{R})$ و حد پایینی فازی $\widetilde{LSL}_E \in F_L(\mathbb{R})$ را به ترتیب حدود فازی بالایی و پایینی نمایی می‌نامیم و آن‌ها را به ترتیب با $\widetilde{USL}_E = (u_1, s_u)_{UE} \in F_U(\mathbb{R})$ و $\widetilde{LSL}_E = (l_1, s_l)_{LE} \in F_L(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. هرگاه توابع عضویت آن‌ها به صورت زیر باشد:

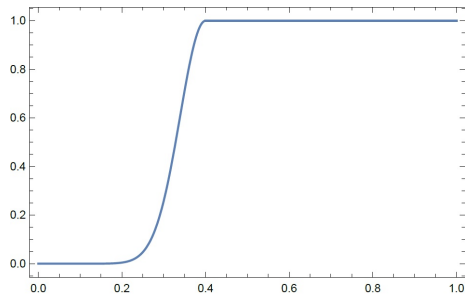
$$\widetilde{USL}_E(x) = \begin{cases} 1 & x \leq u_1 \\ e^{-[(x-u_1)/s_u]^2} & x > u_1, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\widetilde{LSL}_E(x) = \begin{cases} 1 & x \geq l_1 \\ e^{-[(x-l_1)/s_l]^2} & x < l_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

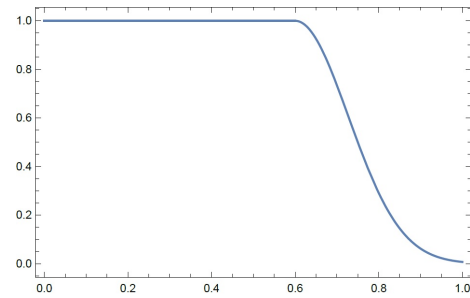
به طوری که $u_1, s_u, l_1, s_l \in \mathbb{R}$ و $s_u, s_l > 0$ و $l_1 \leq u_1$.

به طور مثال، اگر حدود مشخصه فنی تقریباً بزرگتر از ۰/۴۰ و تقریباً کوچکتر از ۰/۶۰ باشند که به ترتیب با $\widetilde{LSL}_E = (0/40, 0/18)_{LE} \in F_L(\mathbb{R})$ و $\widetilde{USL}_E = (0/60, 0/86)_{UE} \in F_U(\mathbb{R})$ مشخص شوند، آن‌گاه نمودار توابع عضویت حدود مشخصه فازی بالایی و پایینی نمایی همانند شکل ۲.۲ است.

با جایگزینی حدود فازی به جای غیر فازی می‌توان یک قضاوت موجه در تصمیم‌گیری روی فرایندهای تولید انتظار داشت. یکی دیگر از مزایای فرض حدود فازی به جای غیر فازی افزایش توانایی مهندسیین برای تعریف USL و LSL است. از این رو مهندسیین می‌توانند تولیداتی با



(ب) نمودار تابع عضویت \widetilde{LSL}_E



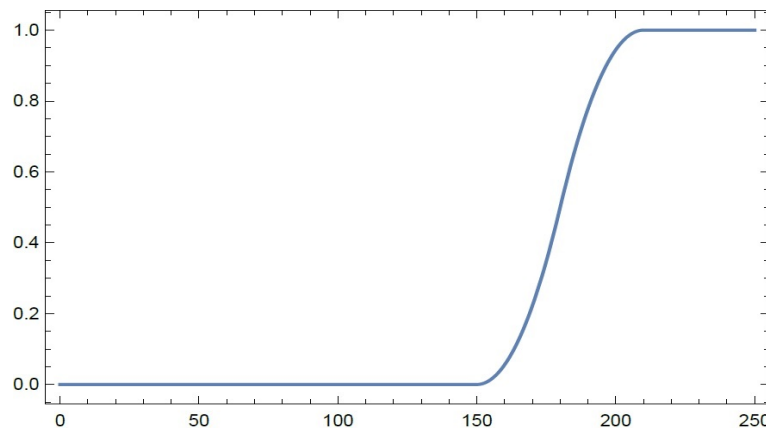
(آ) نمودار تابع عضویت \widetilde{USL}_E

شکل ۲.۲: نمودار توابع عضویت حدود مشخصه فازی بالایی و پایینی نمایی

اندازه‌های مشخصه پایین‌تر از LSL یا بالاتر از USL را با درجه عضویت بین $(0, 1]$ به عنوان انطباق تولیدات (تا رسیدن به استاندارد) بپذیرند. بنابراین معرفی و فرض حدود فازی می‌تواند تعداد زیادی از موارد غیرانطباق را به حداقل رساند و همچنین هزینه‌های تولید را کاهش دهد. [۳۸].

مثال ۱.۲.۲. فرض کنید $X = [0, 250]$ مجموعه مقادیر ممکن طول قد انسان‌ها باشد. مجموعه فازی افراد بلند قد، A ، را می‌توان با تابع عضویت زیر مدل‌سازی کرد (شکل ۳.۲).

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 150 \\ 2\left(\frac{x-150}{60}\right)^2 & 150 \leq x \leq 180 \\ 1 - 2\left(\frac{210-x}{60}\right)^2 & 180 \leq x \leq 210 \\ 1 & 210 \leq x \end{cases}$$



شکل ۳.۲: نمودار تابع عضویت مجموعه فازی افراد بلند قد

عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های فازی به صورت یک تعمیم طبیعی این عملگرها برای مجموعه‌های معمولی تعریف می‌شوند.

تعریف ۸.۲.۲ (الف) اشتراک دو مجموعه فازی A و B به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

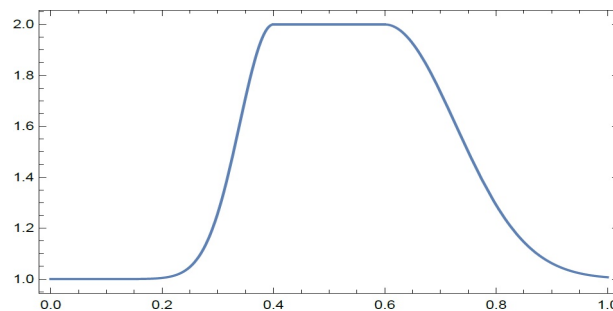
$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)], \quad \forall x \in X$$

(ب) اجتماع دو مجموعه فازی A و B به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)], \quad \forall x \in X$$

مثال ۲.۲.۲. اگر در یک فرایند فازی \widetilde{USL} و \widetilde{LSL} حدود مشخصات بالایی و پایینی فازی نمایی به ترتیب با $\widetilde{USL}_E = (0/60, 0/86)_{UE} \in F_U(\mathbb{R})$ و $\widetilde{LSL}_E = (0/40, 0/18)_{LE} \in F_L(\mathbb{R})$ مشخص شوند، آنگاه نمودار اشتراک توابع عضویت حدود مشخصه فازی بالایی و پایینی نمایی همانند شکل ۴.۲ است.

$$\widetilde{Q}(x) = \widetilde{USL}_E \cap \widetilde{LSL}_E = \min[\widetilde{USL}_E(x), \widetilde{LSL}_E(x)]$$



شکل ۴.۲: نمودار اشتراک دو مجموعه فازی

تعریف ۹.۲.۲. مجموعه (معمولی) عناصری را از X که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی A دست کم به بزرگی α ($0 < \alpha \leq 1$) باشد، α -برش A گوئیم و با A_α نشان می‌دهیم، یعنی

$$A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}$$

مثال ۳.۲.۲. تابع عضویت حد بالایی فازی خطی را به عنوان یک مجموعه فازی در نظر بگیرید، که یک توصیف برای فرضیه فازی: x تقریباً در بازه $(0/60, 0/75)$ است، می‌باشد

$$\widetilde{USL}_L(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0/60 \\ \frac{x-0/75}{0/60-0/75} & 0/60 \leq x \leq 0/75 \\ 0 & x > 0/75 \end{cases}$$

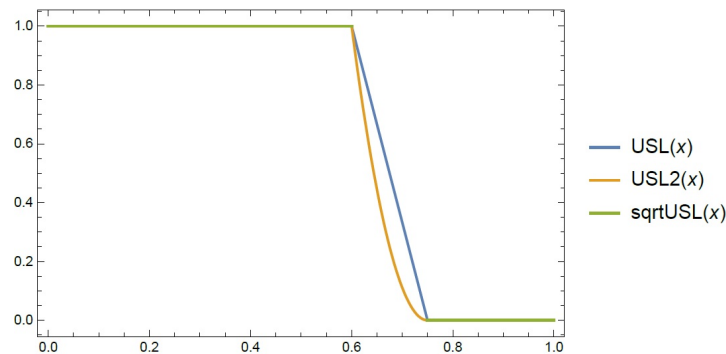
u_α به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \{x \in \mathbb{R} \mid \widetilde{USL}_L(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x - 0.75}{0.60 - 0.75} \geq \alpha\} \\ &= -0.15\alpha + 0.75 \end{aligned}$$

اکنون اگر بخواهیم فرضیه فازی x بسیار نزدیک به بازه $(0.60, 0.75)$ است را مدل‌سازی کنیم می‌توانیم از $\widetilde{USL}_L^2(x)$ استفاده کنیم. همچنین فرضیه فازی x نسبتاً نزدیک به بازه $(0.60, 0.75)$ است را با مجموعه فازی $\widetilde{USL}_L^{1/2}(x)$ مدل‌سازی می‌کنیم. داریم:

$$\widetilde{USL}_L^2(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0.60 \\ (\frac{x-0.75}{0.60-0.75})^2 & 0.60 \leq x \leq 0.75 \\ 0 & x > 0.75 \end{cases}$$

$$\widetilde{USL}_L^{1/2}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0.60 \\ (\frac{x-0.75}{0.60-0.75})^{1/2} & 0.60 \leq x \leq 0.75 \\ 0 & x > 0.75 \end{cases}$$



شکل ۵.۲: نمودار تابع عضویت $\widetilde{USL}_L(x)$ ، $\widetilde{USL}_L^2(x)$ و $\widetilde{USL}_L^{1/2}(x)$

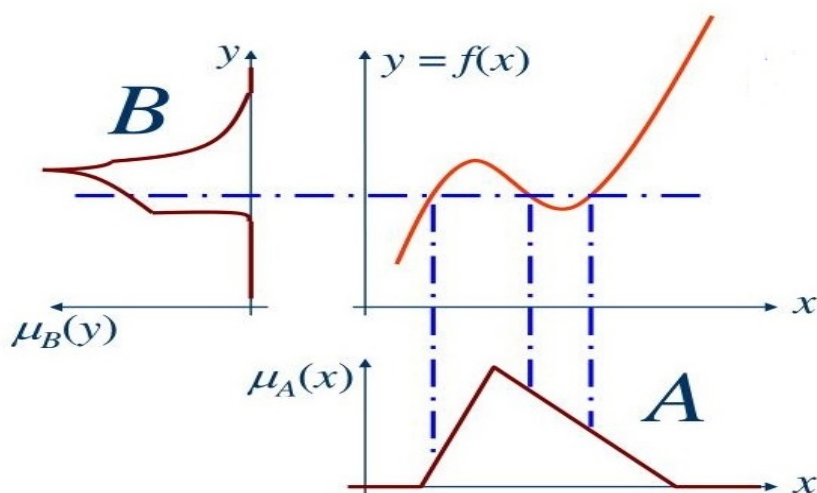
تعریف ۱۰.۲.۲. فرض کنید f یک تابع از X به Y باشد، یعنی

$$y = f(x), \quad x \in X, \quad y \in Y$$

این تابع به هر نقطه از X ، نقطه‌ای را از Y می‌نگارد. حال فرض کنید A زیر مجموعه معمولی از X باشد. با استفاده از f و A می‌توانیم نگاشت A تحت f ، یعنی $f(A)$ را به صورت زیر به دست آوریم:

$$f(A) = \{f(a) \in Y \mid a \in A\}$$

اکنون می‌خواهیم f را طوری گسترش دهیم که به جای این که صرفاً به یک نقطه از X یا یک زیرمجموعه معمولی از X عمل کند، بتواند بر یک زیرمجموعه فازی از X نیز عمل کند. مسلماً انتظار داریم که $f(A)$ ، حاصل عمل f بر مجموعه فازی A از X ، دیگر یک مجموعه معمولی از Y نباشد، بلکه یک مجموعه فازی از Y همانند $B = f(A)$ باشد. بدیهی است که اگر f تابعی یک به یک باشد، آن‌گاه $B(y) = A(f^{-1}(Y))$ (شکل ۶.۲).



شکل ۶.۲: نگاشتی روی مجموعه A با استفاده از تابع f

تعریف ۱۱.۲.۲. (اصل توسیع) فرض کنید X_1, \dots, X_n ، n مجموعه مرجع و $X = X_1 \times \dots \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آن‌ها باشد. همچنین A_1, \dots, A_n ، n مجموعه فازی به ترتیب از X_1, \dots, X_n باشند. به‌علاوه $y = f(x_1, \dots, x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی A_1, \dots, A_n به صورت مجموعه فازی B از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$B(y) = f(A_1, \dots, A_n)(y) = \begin{cases} \sup_{x_1, \dots, x_n; y=f(x_1, \dots, x_n)} \min A_1(x_1), \dots, A_n(x_n) & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ نگاشت معکوس y تحت f است.

مثال ۴.۲.۲. فرض کنید $X_1 = X_2 = N$ مجموعه اعداد صحیح مثبت، A_1 مجموعه فازی تقریباً ۵، و A_2 مجموعه فازی تقریباً ۶ به صورت زیر باشند:

$$A_1 = \left\{ \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0}{6}, \frac{0}{7} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \frac{0}{5}, \frac{1}{6}, \frac{0}{7} \right\}$$

پس بر اساس اصل توسیع می‌توان جمع دو مجموعه فازی تقریباً ۵ و تقریباً ۶ را انجام داد.

مثلاً

$$\begin{aligned}(A_1 \oplus A_2)(8) &= \max_{\{x_1, x_2; x_1+x_2=8\}} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\} \\ &= \min\{A_1(3), A_2(5)\} = \min\{0/3, 0/6\} = 0/3\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(A_1 \oplus A_2)(9) &= \max_{\{x_1, x_2; x_1+x_2=9\}} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2)\} \\ &= \max\{\min\{A_1(3), A_2(6)\}, \min\{A_1(4), A_2(5)\}\} \\ &= \max\{0/3, 0/6\} = 0/6\end{aligned}$$

و در نهایت

$$A_1 \oplus A_2 = \left\{ \frac{0/3}{8}, \frac{0/6}{9}, \frac{0/7}{10}, \frac{1}{11}, \frac{0/7}{12}, \frac{0/6}{13}, \frac{0/3}{14} \right\}$$

۳.۲ اعداد فازی

اعداد فازی، که زیرمجموعه‌های فازی خاصی از مجموعه اعداد حقیقی هستند، در بیشتر مسائل کاربردی استفاده می‌شوند. در این بخش اعداد فازی و نوع ویژه‌ای از آن‌ها، موسوم به اعداد فازی LR را مرور می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۲. مجموعه فازی N از R (اعداد حقیقی) را یک عدد فازی (حقیقی) نامیم، اگر $N(1) = 1$ و تک‌نمایی باشد. یعنی یک و دقیقاً یک $x_0 \in R$ وجود داشته باشد که $N(x_0) = 1$.

(۲) α -برش‌های N به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، به صورت بازه‌های بسته باشند.

مجموعه همه‌ی اعداد فازی را با $F(R)$ نشان می‌دهیم.

۴.۲ اعداد فازی LR

اعداد فازی LR نوع خاصی از اعداد فازی هستند که علاوه بر آن‌که ساختار ویژه‌ای دارند، اعمال حسابی بر آن‌ها نیز از قواعد خاصی پیروی می‌کند. این ساختار و این قواعد باعث شده است که در عمل، عمدتاً از این نوع اعداد فازی استفاده شود.

تعریف ۱.۴.۲. اگر ساختار تابع عضویت عدد فازی N به صورت زیر باشد:

$$N(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیرصعودی از R^+ به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$ ، آن گاه N را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $N = LR(m, \alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم. عدد m را مقدار نما (یا میانه) و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهناهای چپ و پهناهای راست N می‌نامیم. L و R توابع مرجع نامیده می‌شوند.

توابع رایج برای L (به طور مشابه R) عبارتند از:

$$L(x) = \max\{0, 1 - |x|^p\}$$

$$L(x) = e^{-|x|^p}$$

$$L(x) = \frac{1}{1 + |x|^p}$$

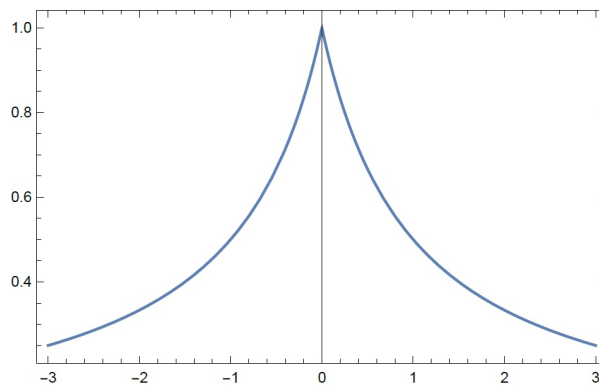
$$L(x) = \frac{1}{1 + p|x|}$$

که در آن‌ها $p > 0$.

مثال ۱.۴.۲. فرض کنید N یک عدد فازی LR متقارن باشد و $L(x) = R(x) = \frac{1}{1+p|x|}$ و $m = 0$ و $\alpha = \beta = 1$ و $p = 1$.

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+p|x|} & x \leq 0 \\ \frac{1}{1+p|x|} & x > 0 \end{cases} = \frac{1}{1+p|x|} \quad x \in R$$

با استفاده از نمودار زیر می‌توان N را یک عدد فازی تقریباً صفر در نظر گرفت.



شکل ۷.۲: نمودار تابع عضویت عدد فازی LR متقارن در مثال ۱.۴.۲

تعریف ۲.۴.۲. فرض کنید $N = LR(m, \alpha, \beta)$ ، و $L = R$. در این صورت

(الف) N را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $N = T(m, \alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$.

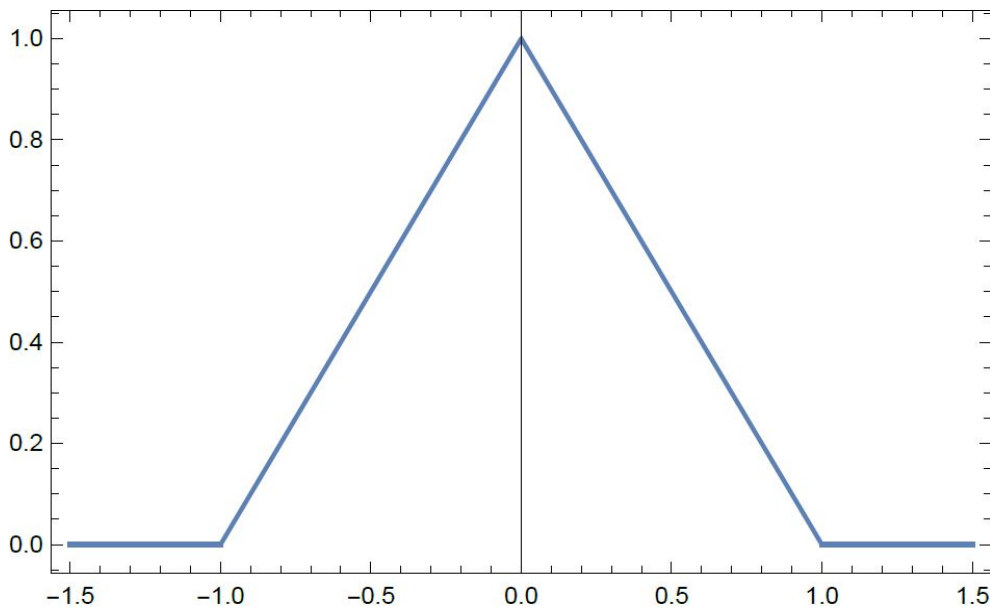
(ب) N را یک عدد فازی نرمال نامیده و با $N = N(m, \alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = e^{-x^2}$.

پ) N را یک عدد فازی سهموی نامیده و با $N = P(m, \alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم اگر $L(x) = \max\{0, 1 - x^2\}$.

مثال ۲.۴.۲. با فرض مجموعه فازی $R(x) = L(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$ عدد مثلثی N به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

با توجه به شکل می‌توان عدد مثلثی N را تقریباً صفر بیان کرد.



شکل ۸.۲: نمودار تابع عضویت عدد فازی مثلثی متقارن

تعریف ۳.۴.۲. اگر برای عدد فازی N ، $L = R$ و $\alpha = \beta$ ، آن‌گاه N را یک عدد فازی متقارن می‌نامیم و با $N = L(m, \alpha)$ نشان می‌دهیم. اگر عدد فازی متقارن N ، مثلثی، نرمال یا سهموی باشد، به ترتیب از نمادهای $N = T(m, \alpha)$ و $N = N(m, \alpha)$ و $N = P(m, \alpha)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۴.۴.۲. فرض کنید M و N دو عدد فازی و $X : R \times R \rightarrow R$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم عملگر $*$ را برای اعداد فازی با \otimes نشان دهیم، با استفاده از اصل توسیع، حاصل $M \otimes N$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$M \otimes N(z) = \sup_{z=x*y} \min[M(x), N(x)]$$

به طوری که $*$ هر یک از چهار عملگر حسابی \oplus ، \ominus ، \otimes و \div می‌تواند باشد.

قضیه ۱.۴.۲. [۵] اگر $M = LR(m, \alpha, \beta)$ و $\lambda \in R$ آن گاه

$$\lambda \otimes LR(m, \alpha, \beta) = LR(\lambda m, \lambda \alpha, \lambda \beta) \quad \lambda > 0$$

$$\lambda \otimes LR(m, \alpha, \beta) = LR(\lambda m, -\lambda \alpha, -\lambda \beta) \quad \lambda < 0$$

قضیه ۲.۴.۲. [۵] اگر $M = LR(m, \alpha, \beta)$ و $N = LR(n, \delta, \gamma)$ ، آن گاه $M \oplus N$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$M \oplus N = LR(m + n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)$$

قضیه ۳.۴.۲. اگر $M = LR(m, \alpha, \beta)$ و $N = LR(n, \delta, \gamma)$ ، آن گاه $M \ominus N$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$M \ominus N = LR(m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)$$

تعریف ۵.۴.۲. (الف) یک حالت خاص از اعداد فازی، اعداد فازی مثلثی نامتقارن هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{T}(a, s^L, s^R)_{(x)} = \begin{cases} \frac{x-a+s^L}{s^L} & a - s^L \leq x \leq a \\ \frac{a+s^R-x}{s^R} & a < x \leq a + s^R \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases} \quad (5.2)$$

که به صورت نمادین با $T(x, s_x^L, s_x^R)$ نشان می‌دهیم.

(ب) یک حالت خاص دیگر از اعداد فازی، اعداد فازی نرمال نامتقارن هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{N}(a, s_a^L, s_a^R)_{(x)} = \begin{cases} e^{-[(a-x)/s_a^L]^\gamma} & x \leq a \\ e^{-[(x-a)/s_a^R]^\gamma} & x > a \end{cases} \quad (6.2)$$

و به صورت نمادین با $N(a, s_a^L, s_a^R)$ نشان می‌دهیم.

عدد حقیقی a و اعداد حقیقی مثبت s^L و s^R به ترتیب مقدار نما و پهنای چپ و راست این دو نوع از اعداد فازی اند. همچنین $F_T(\mathbb{R})$ و $F_N(\mathbb{R})$ به ترتیب مجموعه‌ای از همه اعداد فازی مثلثی نامتقارن و اعداد فازی نرمال نامتقارن را مشخص می‌کنند. همچنین فرض می‌کنیم که $T(a, 0, 0)$ و $N(a, 0, 0)$ تابع نشانگر a ، یعنی، $I_{\{a\}}$ هستند.

به منظور اندازه‌گیری فاصله بین دو عدد فازی، یک عملگر حسابی روی اعداد فازی که بر اساس تابع وزنی $g(\alpha)$ است ارائه می‌دهیم. این فاصله به طور کامل در فصل بعد برای معرفی نسل جدیدی از شاخص‌های کارایی بر اساس مشاهدات فازی و کیفیت فازی به کار برده خواهد شد.

گزاره ۱.۴.۲. فرض کنید $\tilde{A}_1 = T(a_1, s_1)$ و $\tilde{A}_2 = T(a_2, s_2)$ دو عدد فازی مثلثی متقارن و c یک عدد حقیقی باشد، در این صورت

$$c\tilde{A}_1 = T(ca_1, |c|s_1)$$

و

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = T(a_1 + a_2, s_1 + s_2)$$

گزاره ۲.۴.۲. فرض کنید $\tilde{A}_1 = T(a_1, s_1^L, s_1^R)$ و $\tilde{A}_2 = T(a_2, s_2^L, s_2^R)$ دو عدد فازی مثلثی نامتقارن و c یک عدد حقیقی باشد، در این صورت

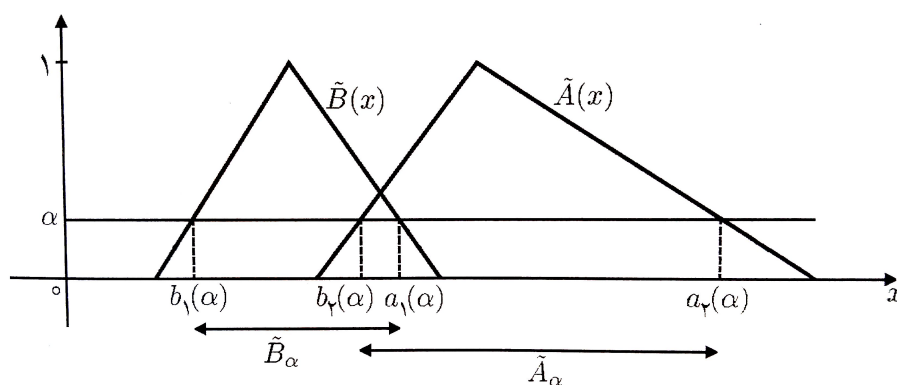
$$c\tilde{A}_1 = \begin{cases} T(ca_1, cs_1^L, cs_1^R) & c > 0 \\ c\tilde{A}_1 = T(ca_1, -cs_1^R, -cs_1^L) & c < 0 \end{cases}$$

و

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = T(a_1 + a_2, s_1^L + s_2^L, s_1^R + s_2^R)$$

۵.۲ فاصله بین دو عدد فازی

فرض کنید که \tilde{A} و \tilde{B} دو عدد فازی، و $\tilde{A}_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ و $\tilde{B}_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$ به ترتیب α -برش‌های \tilde{A} و \tilde{B} باشند.



شکل ۹.۲: α -برش‌های دو عدد فازی

تعریف ۱.۵.۲. فاصله بین دو عدد فازی \tilde{A} و \tilde{B} بر پایه‌ی تابع وزنی $g(\alpha)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[\int_0^1 g(\alpha) d^2(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) d\alpha \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.2)$$

که

$$d^{\alpha}(\tilde{A}_{\alpha}, \tilde{B}_{\alpha}) = [a_1(\alpha) - b_1(\alpha)]^2 + [a_2(\alpha) - b_2(\alpha)]^2 \quad (۸.۲)$$

و $g(\alpha)$ یک تابع صعودی روی بازه $[0, 1]$ است که برای آن $g(0) = 0$ و $\int_0^1 g(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$. مقدار $d(\tilde{A}, \tilde{B})$ فاصله‌ی بین α -برش‌های اعداد فازی \tilde{A} و \tilde{B} را اندازه می‌گیرد. تابع $g(\alpha)$ را می‌توان به عنوان وزن $d^{\alpha}(\tilde{A}_{\alpha}, \tilde{B}_{\alpha})$ تعبیر کرد. ویژگی صعودی بودن $g(\alpha)$ منجر به این می‌شود که درجات عضویت بالاتر، اهمیت بیشتری در تعیین فاصله‌ی بین دو عدد فازی \tilde{A} و \tilde{B} داشته باشند. شرط‌های $g(0) = 0$ و $\int_0^1 g(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$ نیز این اطمینان را می‌دهد که فاصله‌ی فوق، یک تعمیم معمولی از فاصله بین دو عدد حقیقی است.

ملاحظه ۱.۵.۲. زمانی که دو عدد \tilde{A} و \tilde{B} به جای اعداد فازی، غیرفازی باشند، به عبارت دیگر، زمانی که آن‌ها توابع نشانگر $I_{\{a\}}$ و $I_{\{b\}}$ باشند، پس فاصله معرفی شده در تعریف ۱.۵.۲ با قدرمطلق تفاضل a و b منطبق می‌شود زیرا

$$\begin{aligned} d(I_{\{a\}}, I_{\{b\}}) &= \left\{ \int_0^1 \frac{g(\alpha)}{2} [(I_{\{a\}})_{\alpha}(-)(I_{\{b\}})_{\alpha}]^2 d\alpha \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \int_0^1 \frac{g(\alpha)}{2} [(a-b)^2 + (a-b)^2] d\alpha \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{(a-b)^2 \int_0^1 g(\alpha) d\alpha\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |a-b| \end{aligned}$$

فاصله تعریف شده در رابطه (۷.۲) خواص متر در مجموعه‌ی همه اعداد فازی را دارد [۳۳]. اکنون، چندین ویژگی فاصله تعریف شده در رابطه (۷.۲) را در قضیه زیر ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۵.۲. [۳۳] فاصله تعریف شده در رابطه (۷.۲) یک متری روی مجموعه‌ای از همه اعداد فازی است.

برهان. فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in F(\mathbb{R})$

(۱) واضح است که $d(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0$

(۲) اگر $\tilde{A} = \tilde{B}$ ، آن‌گاه $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$. برعکس، اگر $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$ ، آن‌گاه $d(\tilde{A}_{\alpha}, \tilde{B}_{\alpha}) = 0$. از

آنجائی که g یک تابع نانزولی حقیقی مقدار روی $[0, 1]$ و $g(0) = 0$ است. بنابراین $a_1(\alpha) = b_1(\alpha)$ و $a_2(\alpha) = b_2(\alpha)$ برای هر $\alpha \in (0, 1]$ پس نتیجه می‌گیریم که $\tilde{A} = \tilde{B}$.

(۳) به وضوح دارای ویژگی تقارن است، به عنوان مثال $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = d(\tilde{B}, \tilde{A})$.

(۴) از آنجائی که فاصله اقلیدسی در \mathbb{R}^2 یک متر است، بنابراین با توجه به خاصیت مثلثی

متر داریم:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^2 [a_i(\alpha) - c_i(\alpha)]^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^2 [a_i(\alpha) - b_i(\alpha)]^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^2 [b_i(\alpha) - c_i(\alpha)]^2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{g(\alpha)}{\Upsilon} \sum_{i=1}^{\Upsilon} [a_i(\alpha) - c_i(\alpha)]^{\Upsilon} d\alpha \\ & \leq \int_0^1 \frac{g(\alpha)}{\Upsilon} \sum_{i=1}^{\Upsilon} [a_i(\alpha) - b_i(\alpha)]^{\Upsilon} d\alpha + \int_0^1 \frac{g(\alpha)}{\Upsilon} \sum_{i=1}^{\Upsilon} [b_i(\alpha) - c_i(\alpha)]^{\Upsilon} d\alpha \\ & \quad + \Upsilon \int_0^1 \frac{g(\alpha)}{\Upsilon} \sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^{\Upsilon} [a_i(\alpha) - b_i(\alpha)]^{\Upsilon} \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{\Upsilon} [b_i(\alpha) - c_i(\alpha)]^{\Upsilon} \right\}} d\alpha \end{aligned}$$

که در آن برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، $g(\alpha) \geq 0$. بنابراین با تعریف ۱.۵.۲ و نامساوی کوشی-شوارتز (نامساوی کوشی-شوارتز اشاره بر آن دارد که طبق فاصله‌ی معرفی شده برای اعداد فازی، فاصله دو عدد / نقطه فازی کمتر از مجموع فواصل این اعداد / نقاط از هر نقطه‌ی دلخواه سوم است.) یک نتیجه می‌توان گرفت:

$$\begin{aligned} & d^{\Upsilon}(\tilde{A}, \tilde{C}) \\ & \leq d^{\Upsilon}(\tilde{A}, \tilde{B}) + d^{\Upsilon}(\tilde{B}, \tilde{C}) \\ & \quad + \Upsilon \int_0^1 \sqrt{\left\{ \frac{g(\alpha)}{\Upsilon} \sum_{i=1}^{\Upsilon} [a_i(\alpha) - b_i(\alpha)]^{\Upsilon} \right\}} \sqrt{\left\{ \frac{g(\alpha)}{\Upsilon} \sum_{i=1}^{\Upsilon} [b_i(\alpha) - c_i(\alpha)]^{\Upsilon} \right\}} d\alpha \\ & \leq d^{\Upsilon}(\tilde{A}, \tilde{B}) + d^{\Upsilon}(\tilde{B}, \tilde{C}) \\ & \quad + \Upsilon \sqrt{\left(\int_0^1 \left\{ \frac{g(\alpha)}{\Upsilon} \sum_{i=1}^{\Upsilon} [a_i(\alpha) - b_i(\alpha)]^{\Upsilon} \right\} d\alpha \right)} \\ & \quad \times \sqrt{\left(\int_0^1 \left\{ \frac{g(\alpha)}{\Upsilon} \sum_{i=1}^{\Upsilon} [b_i(\alpha) - c_i(\alpha)]^{\Upsilon} \right\} d\alpha \right)} \\ & = d^{\Upsilon}(\tilde{A}, \tilde{B}) + d^{\Upsilon}(\tilde{B}, \tilde{C}) + \Upsilon d(\tilde{A}, \tilde{B})d(\tilde{B}, \tilde{C}) \\ & = [d(\tilde{A}, \tilde{B}) + d(\tilde{B}, \tilde{C})]^{\Upsilon}, \end{aligned}$$

□ و بنابراین، $d(\tilde{A}, \tilde{C}) \leq d(\tilde{A}, \tilde{B}) + d(\tilde{B}, \tilde{C})$.

قضیه ۲.۵.۲. [۵] فرض کنید $\tilde{A} = (a, s_a)_T$ و $\tilde{B} = (b, s_b)_T$ دو عدد فازی مثلثی متقارن باشند. در این صورت، بر پایه‌ی تابع وزنی $g(\alpha) = \alpha$

$$d^{\Upsilon}(\tilde{A}_{\alpha}, \tilde{B}_{\alpha}) = (a - b)^{\Upsilon} + \frac{1}{\Upsilon} (s_a - s_b)^{\Upsilon}$$

برهان. تابع عضویت یک عدد فازی مثلثی متقارن مانند \tilde{A} به صورت زیر است

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \frac{x - (a - s_a)}{s_a} & a - s_a \leq x < a \\ \frac{(a + s_a) - x}{s_a} & a \leq x < a + s_a \end{cases}$$

α -برش‌های دو عدد فازی مثلثی متقارن \tilde{A} و \tilde{B} به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\tilde{A}_\alpha = [(\alpha - 1)s_a + a, (1 - \alpha)s_a + a]$$

$$\tilde{B}_\alpha = [(\alpha - 1)s_b + b, (1 - \alpha)s_b + b]$$

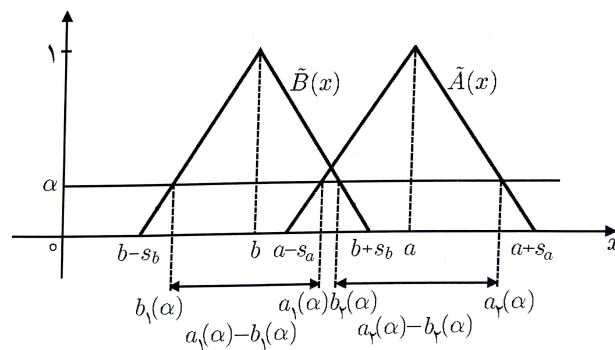
بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۸.۲)،

$$\begin{aligned} d^\nabla(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) &= [(\alpha - 1)s_a + a - (\alpha - 1)s_b - b]^2 \\ &\quad + [(1 - \alpha)s_a + a - (1 - \alpha)s_b - b]^2 \\ &= [\alpha(s_a - s_b) + (a - b) - (s_a - s_b)]^2 \\ &\quad + [\alpha(s_b - s_a) + (a - b) + (s_a - s_b)]^2 \end{aligned}$$

حال با استفاده از $g(\alpha) = \alpha$ ، داریم

$$\begin{aligned} d^\nabla(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \int_0^1 \alpha d^\nabla(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha [\alpha(s_a - s_b) + (a - b) - (s_a - s_b)]^2 d\alpha \\ &\quad + \int_0^1 \alpha [\alpha(s_b - s_a) + (a - b) + (s_a - s_b)]^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{3}(s_a - s_b)^2 + \frac{1}{3}[(a - b) + (s_a - s_b)]^2 + \frac{1}{3}[(a - b) - (s_a - s_b)]^2 \\ &\quad + \frac{2}{3}(s_a - s_b)[(a - b) - (s_a - s_b)] + \frac{2}{3}(s_a - s_b)[(a - b) + (s_a - s_b)] \\ &= (a - b)^2 + \frac{1}{3}(s_a - s_b)^2 \end{aligned}$$

□



شکل ۱۰.۲: اعداد فازی مثلثی و α -برش‌های آن‌ها

قضیه ۳.۵.۲. [۵] فرض کنید $\tilde{A} = (a, s_a)_N$ و $\tilde{B} = (b, s_b)_N$ دو عدد فازی نرمال متقارن باشند. در این صورت، بر پایه‌ی تابع وزنی $g(\alpha) = \alpha$

$$d^\gamma(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) = (a - b)^\gamma + \frac{1}{\gamma}(s_a - s_b)^\gamma$$

برهان. در این حالت، α -برش‌های \tilde{A} و \tilde{B} عبارت‌اند از

$$\tilde{A}_\alpha = [a - s_a\sqrt{-\ln \alpha}, a + s_a\sqrt{-\ln \alpha}]$$

$$\tilde{B}_\alpha = [b - s_b\sqrt{-\ln \alpha}, b + s_b\sqrt{-\ln \alpha}]$$

بنابراین، طبق رابطه (۸.۲)،

$$\begin{aligned} d^\gamma(\tilde{A}, \tilde{B}) &= [a - s_a\sqrt{-\ln \alpha} - (b - s_b\sqrt{-\ln \alpha})]^\gamma \\ &\quad + [a + s_a\sqrt{-\ln \alpha} - (b + s_b\sqrt{-\ln \alpha})]^\gamma \\ &= \gamma(a - b)^\gamma - \gamma(s_a - s_b)^\gamma \ln \alpha \end{aligned}$$

با استفاده از $g(\alpha) = \alpha$

$$\begin{aligned} d^\gamma(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \int_0^1 \alpha d^\gamma(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha) d\alpha \\ &= (a - b)^\gamma - \gamma(s_a - s_b)^\gamma \int_0^1 \alpha \ln \alpha d\alpha \\ &= (a - b)^\gamma + \frac{1}{\gamma}(s_a - s_b)^\gamma \end{aligned}$$

□

۶.۲ فاصله بین حدود مشخصه فازی

تعریف ۱.۶.۲. [۳۱] اگر $\widetilde{USL} \in F_U(\mathbb{R})$ و $\widetilde{LSL} \in F_L(\mathbb{R})$ ، آن‌گاه $\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL}$ و $\widetilde{USL}(+)\widetilde{LSL}$ را جمع و تفریق \widetilde{USL} و \widetilde{LSL} می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL} = \int_0^1 g(\alpha)(u_\alpha - l_\alpha) d\alpha \quad (۹.۲)$$

$$\widetilde{USL}(+)\widetilde{LSL} = \int_0^1 g(\alpha)(u_\alpha + l_\alpha) d\alpha \quad (۱۰.۲)$$

که در آن

$$l_\alpha = \inf_x \{x \in \widetilde{LSL}_\alpha\} \quad \text{و} \quad u_\alpha = \sup_x \{x \in \widetilde{USL}_\alpha\}$$

از $\widetilde{USL}_\alpha = (-\infty, u_\alpha]$ و $\widetilde{LSL}_\alpha = [l_\alpha, +\infty)$ به دست آمده‌اند و g تابعی نانزولی روی بازه $[0, 1]$ می‌باشد به طوری که $g(0) = 0$ و $\int_0^1 g(\alpha) d\alpha = 1$ است (به عنوان مثال، به ازای $m = 0, 1, 2, \dots$ می‌توان g را به صورت $g(\alpha) = (m+1)\alpha^m$ در نظر گرفت).

توجه داشته باشید که در تعریف ۱.۶.۲ $u_\alpha - l_\alpha$ تفاضل نقاط انتهایی راست و چپ از α -برش \widetilde{USL} و \widetilde{LSL} است. مقدار $g(\alpha)$ می‌تواند به عنوان وزنی از $u_\alpha - l_\alpha$ باشد و ویژگی نانزولی بودن g بدین معنی است که بالاترین مقدار α در تعیین تفاضل \widetilde{USL} و \widetilde{LSL} دارای اهمیت بیشتری است. مزیت این عملگرها این است که می‌تواند مجموعه‌های α -برش مختلف را با وزن‌های متفاوت در محاسبه در بر گیرد.

ملاحظه ۱.۶.۲. [۳۱]، در حالتی که حدود مشخصه به صورت غیر فازی با توابع مشخصه $I_{\{x; x \geq LSL\}}$ و $I_{\{x; x \leq USL\}}$ در نظر گرفته شوند، می‌توان نشان داد که

$$\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL} = \int_0^1 g(\alpha)(u_\alpha - l_\alpha) d\alpha = USL - LSL$$

$$\widetilde{USL}(+)\widetilde{LSL} = \int_0^1 g(\alpha)(u_\alpha + l_\alpha) d\alpha = USL + LSL$$

قضیه ۱.۶.۲. [۳۰] فرض کنید $\widetilde{USL}_L = (u_1, u_0)_{UL}$ و $\widetilde{LSL}_L = (l_0, l_1)_{LL}$ به ترتیب حدود فازی بالایی و پایینی خطی باشند. اگر $m = 0, 1, 2, \dots$ $g(\alpha) = (m+1)\alpha^m$ آن‌گاه

$$\widetilde{USL}_L(-)\widetilde{LSL}_L = \frac{1}{m+2} [(m+1)(u_1 - l_1) + (u_0 - l_0)] \quad (11.2)$$

$$\widetilde{USL}_L(+)\widetilde{LSL}_L = \frac{1}{m+2} [(m+1)(u_1 + l_1) + (u_0 + l_0)] \quad (12.2)$$

برهان. مجموعه‌های α -برش از حدود مشخصات فازی خطی \widetilde{USL}_L و \widetilde{LSL}_L را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\widetilde{USL}_{L\alpha} = (-\infty, u_\alpha], \quad u_\alpha = u_0 - \alpha(u_0 - u_1),$$

$$\widetilde{LSL}_{L\alpha} = [l_\alpha, +\infty), \quad l_\alpha = l_0 + \alpha(l_1 - l_0).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \widetilde{USL}_L(-)\widetilde{LSL}_L &= \int_0^1 (m+1)\alpha^m (u_\alpha - l_\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^1 (m+1)\alpha^m [u_0 - \alpha(u_0 - u_1) - l_0 - \alpha(l_1 - l_0)] d\alpha \\ &= (m+1) \int_0^1 \alpha^{m+1} [(u_1 - l_1) + (l_0 - u_0)] d\alpha + (m+1) \int_0^1 \alpha^m [u_0 - l_0] d\alpha \\ &= \frac{m+1}{m+2} [(u_1 - l_1) + (l_0 - u_0)] + [u_0 - l_0] \\ &= \frac{1}{m+2} [(m+1)(u_1 - l_1) + (u_0 - l_0)]. \end{aligned}$$

□

اثبات $\widetilde{USL}_L(+)\widetilde{LSL}_L$ هم مشابه صورت بالاست.

قضیه ۲.۶.۲. [۳۰] فرض کنید $\widetilde{USLE} = (u_1, s_u)_{UE}$ و $\widetilde{LSLE} = (l_1, s_l)_{LE}$ به ترتیب حدود فازی بالایی و پایینی نمایی باشند. اگر $l_1 > \sqrt{\pi/4(m+1)}s_l$ و $m = 0, 1, 2, \dots$ $g(\alpha) = (m+1)\alpha^m$

$$\widetilde{USLE}(-)\widetilde{LSLE} = u_1 - l_1 + \sqrt{\pi/4(m+1)}(s_u + s_l) \quad (13.2)$$

$$\widetilde{USLE}(+)\widetilde{LSLE} = u_1 + l_1 + \sqrt{\pi/4(m+1)}(s_u - s_l) \quad (14.2)$$

برهان. مجموعه‌های برش از حدود مشخصات فازی خطی \widetilde{LSLE} و \widetilde{USLE} را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\widetilde{USL}_{L\alpha} = (-\infty, u_\alpha], \quad u_\alpha = u_1 + s_u\sqrt{-\ln \alpha}$$

$$\widetilde{LSL}_{L\alpha} = [l_\alpha, +\infty), \quad l_\alpha = l_1 + s_l\sqrt{-\ln \alpha}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \widetilde{USLE}(-)\widetilde{LSLE} &= \int_0^1 (m+1)\alpha^m(u_\alpha - l_\alpha)d\alpha \\ &= \int_0^1 (m+1)\alpha^m[u_1 + s_u\sqrt{-\ln \alpha} - l_1 - s_l\sqrt{-\ln \alpha}]d\alpha \\ &= (m+1) \int_0^1 \alpha^m(u_1 - l_1)d\alpha + (m+1) \int_0^1 \alpha^m\sqrt{-\ln \alpha}d\alpha \\ &= u_1 - l_1 + \sqrt{\pi/4(m+1)}(s_u + s_l) \end{aligned}$$

□ اثبات $\widetilde{USLE}(+)\widetilde{LSLE}$ هم مشابه صورت بالاست.

با توجه به عدم ارتباط حدود مشخصه فنی و مقادیر مشاهده شده از مشخصه فنی در یک فرایند تولیدی، ابهام موجود در آن‌ها نیز به یک دیگر مرتبط نبوده و بنابراین در عمل، ممکن است با چهار حالت زیر مواجه شویم: (۱) حدود غیرفازی و داده غیرفازی، (۲) حدود فازی و داده غیرفازی، (۳) حدود غیرفازی و داده فازی (۴) حدود فازی و داده فازی.

۷.۲ نتیجه‌گیری

اگر حدود مشخصه فنی به جای غیر فازی، فازی باشند و یا اعداد به جای غیر فازی، فازی باشند آن‌گاه شاخص‌های کارایی فرایند معمولی برای اندازه‌گیری کارایی یک فرایند مناسب نیستند. به منظور برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته در فصل ۳، در این فصل ابتدا به معرفی مجموعه‌ها، اعداد و عملگرهای فازی پرداختیم، سپس حدود مشخصه فازی، توابع عضویت و فاصله بین حدود مشخصه فازی و فاصله بین دو عدد فازی را بیان کردیم.

فصل ۳

شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته در محیط فازی

این فصل شاخص‌های C_{pm} ، C_{pk} ، C_p و C_{pmk} را در یک محیط فازی تعمیم می‌دهیم و روابط بین آن‌ها را بررسی می‌کنیم. این شاخص‌های کارایی تعمیم یافته قادر به اندازه‌گیری کارایی فرایند فازی مبتنی بر کیفیت فازی‌اند. فرمول محاسباتی سریع شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته زمانی که مشاهدات اعداد فازی مثلثی و نرمال نامتقارن هستند، محاسبه می‌شود که در آن کیفیت فازی بر اساس کران‌های فازی خطی و نمایی تعریف شده‌اند [۸، ۹، ۳۰، ۳۳].

۱.۳ مقدمه

از علل پیدایش شاخص‌های کارایی فرایند، نیاز موجود در کارخانه‌ها برای تخمین و اندازه‌گیری میزان کارایی فرایندهای تولیدی در تولید اقلامی استاندارد است. چندین شاخص کارایی مانند C_{pm} ، C_{pk} ، C_p و C_{pmk} وجود دارند که برای تخمین کارایی فرایندهای نرمال (معمولاً با حجم بزرگ) استفاده می‌شوند. در سال‌های اخیر، بعضی مقالات که تمرکز آن‌ها روی زمینه‌های مختلفی از شاخص‌های کارایی با استفاده از نظریه مجموعه فازی بودند منتشر شده است. این زمینه‌ها عبارت‌اند از: محاسبه شاخص‌های کارایی فازی زمانی که مشاهدات اعداد فازی‌اند [۲۸]، برآورد شاخص‌های کارایی با استفاده از روش برآورد فازی باکلی [۳۲]، تحلیل کارایی

فرایند بر اساس اندازه‌های فازی و نمودارهای کنترل فازی [۲۷]، معرفی یک نسل جدید از شاخص‌های کارایی بر اساس داده‌های فازی [۳۳] و معرفی یک نسل جدید از شاخص‌های کارایی بر اساس حدود مشخصه فازی [۳۰]. در این فصل، شاخص‌های کارایی C_{pm} ، C_{pk} ، C_p و C_{pmk} تعمیم یافته مبتنی بر مشاهدات فازی و حدود مشخصات فازی را به دست می‌آوریم. ساختار این فصل به این شرح است: در بخش ۲ چندین شاخص کارایی تعمیم یافته بر اساس کیفیت فازی و داده‌های غیرفازی و چندین نسخه ساختار فوق‌العاده از شاخص‌های کارایی معرفی می‌شود که قادر به ارائه اندازه‌های عددی برای میزان توانایی یک فرایند فازی-مقدار همراه با حدود مشخصه فازی است و یک مثال کاربردی برای نشان دادن کارایی شاخص‌های پیشنهادی در این بخش ارائه شده است. نتیجه‌گیری بخش آخر است.

۲.۳ شاخص‌های کارایی فرایند بر اساس کیفیت فازی و داده غیر فازی

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید $\widetilde{USL} \in F_U(\mathbb{R})$ و $\widetilde{LSL} \in F_L(\mathbb{R})$ به طوری که $l_1 \leq u_1$. یک فرایند با حدود مشخصه بالایی و پایینی فازی \widetilde{USL} و \widetilde{LSL} ، به اختصار فرایند فازی نام دارد.

تعریف ۲.۲.۳. در یک فرایند فازی فرض کنید $\widetilde{USL} \in F_U(\mathbb{R})$ و $\widetilde{LSL} \in F_L(\mathbb{R})$ به ترتیب کران‌های فنی بالایی و پایینی فازی باشند که $l_1 \leq u_1$. پس شاخص‌های کارایی تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_{\widetilde{p}} = \frac{\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL}}{6\sigma} \quad (1.3)$$

توجه کنید که $C_{\widetilde{p}}$ زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که $\mu = M$ ، به طوری که $M = (l_1 + u_1)/2$. به علاوه

$$C_{\widetilde{pk}} = \frac{\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL} - 2|\mu - M|}{6\sigma} \quad (2.3)$$

$$C_{\widetilde{pm}} = \frac{\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL}}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (3.3)$$

$$C_{\widetilde{pmk}} = \frac{\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL} - 2|\mu - M|}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (4.3)$$

به طوری که T مقدار هدف است.

برای هر یک از این شاخص‌ها، با جایگذاری میانگین نمونه و انحراف استاندارد در معادلات (۴.۳) - (۱.۳) یک برآورد نقطه‌ای فراهم می‌شود و یک مقدار بزرگ از برآورد دلالت بر توزیع بهتر از مشخصه کیفیت می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۳. [۳۰] در یک فرایند فازی $l_1 \leq u_1$ را در نظر بگیرید. آن‌گاه روابط زیر بین شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته برقرار است.

$$C_{\bar{p}} \geq C_{\widetilde{pk}} \geq C_{\widetilde{pmk}} \quad (۵.۳)$$

$$C_{\bar{p}} \geq C_{\widetilde{pm}} \geq C_{\widetilde{pmk}} \quad (۶.۳)$$

$$C_{\widetilde{pk}} = C_{\bar{p}} - \frac{1}{3} \left| \frac{\mu - \frac{\widetilde{USL}(+) \widetilde{LSL}}{3}}{\sigma} \right| \quad (۷.۳)$$

$$C_{\widetilde{pm}} = \frac{C_{\bar{p}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}} \quad (۸.۳)$$

$$C_{\widetilde{pmk}} = \frac{C_{\widetilde{pk}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}} \quad (۹.۳)$$

$$C_{\widetilde{pmk}} = \frac{C_{\widetilde{pm}} C_{\widetilde{pk}}}{C_{\bar{p}}} \quad (۱۰.۳)$$

برهان. با استفاده از معادلات (۴.۳) - (۱.۳) اثبات بدیهی است. به عنوان مثال:

$$C_{\widetilde{pm}} = \frac{\widetilde{USL}(-) \widetilde{LSL}}{6 \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{(\widetilde{USL}(-) \widetilde{LSL}) / 6 \sigma}{(6 \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}) / 6 \sigma} = \frac{C_{\bar{p}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 + (\mu - T)^2}{\sigma^2}}} = \frac{C_{\bar{p}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}}$$

□

مثال ۱.۲.۳. مشاهدات مربوط به ضخامت لایه‌ای شیشه در بررسی $STN - LCD$ در جدول (۳.۱) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم کارایی فرایند را زمانی که حدود مشخصه فازی خطی و نمایی است، به دست آوریم. $m = 2$ در تعریف ۱.۶.۲ در نظر گرفته شده است. اعداد به دست آمده از شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم‌یافته در جدول ۱.۳ حاکی از کارا بودن فرایند تولید $STN - LCD$ است، زیرا مقادیر عددی تمامی شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم‌یافته با فرض حدود مشخصه فازی خطی و نمایی بزرگتر از $1/33$ است.

جدول ۱.۳: برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته برای داده‌های جدول ۳.۱ با در نظر گرفتن حدود مشخصه فازی خطی و نمایی

خطی	نمایی
$\widetilde{USL}_L = (0.77, 0.80)_{UL}$	$\widetilde{USL}_E = (0.77, 0.73)_{UE}$
$\widetilde{LSL}_L = (0.60, 0.63)_{LL}$	$\widetilde{LSL}_E = (0.63, 0.73)_{LE}$
$\hat{C}_{\bar{p}} = 2.0552$	$\hat{C}_{\bar{p}} = 2.2634$
$\hat{C}_{\bar{pk}} = 2.0499$	$\hat{C}_{\bar{pk}} = 2.2581$
$\hat{C}_{\bar{pm}} = 2.0549$	$\hat{C}_{\bar{pm}} = 2.2631$
$\hat{C}_{\bar{pmk}} = 2.0469$	$\hat{C}_{\bar{pmk}} = 2.2578$

۳.۳ شاخص‌های کارایی فرایند بر اساس کیفیت فازی و داده فازی

تعریف ۱.۳.۳. [۳۳] فرض کنید \widetilde{USL} و \widetilde{LSL} به ترتیب حدود مشخصه فازی بالایی و پایینی باشند. برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته بر اساس مشاهدات فازی $\tilde{x}_i \in F(\mathbb{R})$ و $i = 1, \dots, n$ به صورت زیر است:

$$\hat{C}_{\bar{p}} = \frac{\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL}}{6\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d^{\mathcal{Y}}(\tilde{x}_i, \bar{\tilde{x}})}} \quad (11.3)$$

$$\hat{C}_{\bar{pm}} = \frac{\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL}}{6\sqrt{d^{\mathcal{Y}}(\bar{\tilde{x}}, I_{\{T\}}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d^{\mathcal{Y}}(\tilde{x}_i, \bar{\tilde{x}})}} \quad (12.3)$$

$$\hat{C}_{\bar{pk}} = \frac{\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL} - 2\left|\mu - \frac{\widetilde{USL}(+)\widetilde{LSL}}{4}\right|}{6\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d^{\mathcal{Y}}(\tilde{x}_i, \bar{\tilde{x}})}} \quad (13.3)$$

$$\hat{C}_{\bar{pmk}} = \frac{\widetilde{USL}(-)\widetilde{LSL} - 2\left|\mu - \frac{\widetilde{USL}(+)\widetilde{LSL}}{4}\right|}{6\sqrt{d^{\mathcal{Y}}(\bar{\tilde{x}}, I_{\{T\}}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d^{\mathcal{Y}}(\tilde{x}_i, \bar{\tilde{x}})}} \quad (14.3)$$

به طوری که $I_{\{T\}}$ تابع نشانگر مقدار هدف و $\bar{\tilde{x}}$ میانگین مشاهدات فازی \tilde{x}_i است.

ملاحظه ۱.۳.۳. برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته بر اساس مشاهدات فازی بسطی مناسب برای شاخص‌های کارایی معمولی است. از این رو با در نظر داشتن ملاحظه ۱.۶.۲،

وقتی که داده‌های مشاهده شده دقیق و حدود مشخصه فنی مربوطه با توابع نشانگر $I_{\{x:x \leq USL\}}$ و $I_{\{x:x \geq LSL\}}$ طراحی شوند، برآورد شاخص‌های تعمیم یافته $C_{\bar{p}}$ ، $C_{\bar{p}k}$ ، $C_{\bar{p}m}$ و $C_{\bar{p}mk}$ منطبق بر برآورد شاخص‌های معمولی C_p ، C_{pk} ، C_{pm} و C_{pmk} می‌شوند.

قضیه ۱.۳.۳. [۳۰] در فرایندهای فازی (با فرض $l_1 \leq u_1$)، روابط زیر بین شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته همواره برقرارند:

$$C_{\bar{p}} \geq C_{\bar{p}k} \geq C_{\bar{p}mk} \quad (۱۵.۳)$$

$$C_{\bar{p}} \geq C_{\bar{p}m} \geq C_{\bar{p}mk} \quad (۱۶.۳)$$

$$C_{\bar{p}k} = C_{\bar{p}} - \frac{1}{3} \left| \frac{\mu - \frac{\overline{USL} + \overline{LSL}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{x}_i, \tilde{x})}} \right| \quad (۱۷.۳)$$

$$C_{\bar{p}m} = \frac{C_{\bar{p}}}{\sqrt{d^2(\tilde{x}, I_{\{T\}}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{x}_i, \tilde{x})}} \quad (۱۸.۳)$$

$$C_{\bar{p}mk} = \frac{C_{\bar{p}k}}{\sqrt{d^2(\tilde{x}, I_{\{T\}}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{x}_i, \tilde{x})}} \quad (۱۹.۳)$$

$$C_{\bar{p}mk} = \frac{C_{\bar{p}m} C_{\bar{p}k}}{C_{\bar{p}}} \quad (۲۰.۳)$$

□ برهان. با به کار بردن معادلات (۱۴.۳)–(۱۱.۳) اثبات بدیهی است.

در دو قضیه زیر، قصد داریم تا چند فرمول محاسباتی سریع برای واریانس اعداد فازی مثلثی نامتقارن و نرمال نامتقارن به دست آوریم که در این فصل برای برآورد شاخص‌های کارایی بر اساس مشاهدات فازی استفاده خواهند شد.

قضیه ۲.۳.۳. [۸، ۹] فرض کنید $\tilde{x}_i = T(x_i, s_{x_i}^L, s_{x_i}^R) \in F_T(\mathbb{R})$ و $i = 1, \dots, n$. بر اساس تابع وزنی $g(\alpha) = (m+1)\alpha^m$ و $m = 0, 1, 2, \dots$ ، واریانس اعداد فازی مثلثی نامتقارن $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ به صورت زیر است:

$$v_T(\tilde{x}) = \left[v(x) + \frac{1}{(m+2)(m+3)} [v(s_x^R) + v(s_x^L)] \right. \\ \left. + \frac{1}{m+2} [cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)] \right] \quad (۲۱.۳)$$

که در آن

$$v(s_x^L) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_{x_i}^L - \overline{s_x^L})^2, \quad v(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$v(s_x^R) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_{x_i}^R - \overline{s_x^R})^2$$

به ترتیب واریانس x_i ها، $s_{x_i}^L$ ها و $s_{x_i}^R$ ها هستند. و همچنین

$$cov(x, s_x^R) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(s_{x_i}^R - \overline{s_x^R})$$

$$cov(x, s_x^L) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(s_{x_i}^L - \overline{s_x^L})$$

به ترتیب کواریانس بین x_i ها و $s_{x_i}^R$ ها و کواریانس بین x_i ها و $s_{x_i}^L$ ها هستند.

برهان. با در نظر گرفتن اصل گسترش [۴۱]، میانگین اعداد فازی مثلثی نامتقارن $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ می‌تواند به صورت $\tilde{x} = T(\bar{x}, s_{\tilde{x}}^L, s_{\tilde{x}}^R)$ محاسبه شود که در آن $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ و $s_{\tilde{x}}^L = \sum_{i=1}^n s_{x_i}^L/n$ و $s_{\tilde{x}}^R = \sum_{i=1}^n s_{x_i}^R/n$ است. بنابراین،

$$\begin{aligned} sd_{\tilde{x}} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^{\vee}(\tilde{x}_i, \tilde{x})} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^{\vee}(T(x_i, s_{x_i}^L, s_{x_i}^R), T(\bar{x}, s_{\tilde{x}}^L, s_{\tilde{x}}^R))} \end{aligned} \quad (22.3)$$

به طوری که $g(\alpha) = (m+1)\alpha^m$. با فرض تابع عضویت اعداد فازی مثلثی نامتقارن در معادله (۵.۲)، می‌توان α -برش از \tilde{x}_i به عنوان بازه بسته $(\tilde{x}_i)_\alpha = [x_i - s_{x_i}^L(1-\alpha), x_i + s_{x_i}^R(1-\alpha)]$ برای $i = 1, \dots, n, \alpha \in (0, 1]$ به دست آورد. به طور مشابه $(\tilde{x})_\alpha = [\bar{x} - s_{\tilde{x}}^L(1-\alpha), \bar{x} + s_{\tilde{x}}^R(1-\alpha)]$ را می‌توان به عنوان α -برشی از اعداد فازی مثلثی نامتقارن \tilde{x} به دست آورد. از این رو، برای هر $i = 1, \dots, n$ می‌توان فاصله بین α -برش \tilde{x}_i و α -برش از \tilde{x} را مطابق تعریف ۱.۵.۲ برای $\alpha \in (0, 1]$ به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} d^{\vee}((\tilde{x}_i)_\alpha, \tilde{x}_\alpha) &= \{x_i - s_{x_i}^L(1-\alpha) - [\bar{x} - s_{\tilde{x}}^L(1-\alpha)]\}^{\vee} \\ &\quad + \{x_i + s_{x_i}^R(1-\alpha) - [\bar{x} + s_{\tilde{x}}^R(1-\alpha)]\}^{\vee} \\ &= [(x_i - \bar{x}) - (1-\alpha)(s_{x_i}^L - s_{\tilde{x}}^L)]^{\vee} \\ &\quad + [(x_i - \bar{x}) + (1-\alpha)(s_{x_i}^R - s_{\tilde{x}}^R)]^{\vee} \\ &= \vee(x_i - \bar{x})^{\vee} + (1-\alpha)^{\vee} [(s_{x_i}^L - s_{\tilde{x}}^L)^{\vee} + (s_{x_i}^R - s_{\tilde{x}}^R)^{\vee}] \\ &\quad + \vee(x_i - \bar{x})(1-\alpha)[(s_{x_i}^R - s_{\tilde{x}}^R) - (s_{x_i}^L - s_{\tilde{x}}^L)] \end{aligned}$$

و بنابراین، با استفاده از $g(\alpha) = (m+1)\alpha^m$ در تعریف ۱.۵.۲، برای هر $i = 1, \dots, n$ و $m = 1, 2, \dots$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d^{\vee}(\tilde{x}_i, \tilde{x}) &= \int_0^1 \frac{m+1}{\Upsilon} \alpha^m [(x_i)_{\alpha}(-)\tilde{x}_{\alpha}]^{\vee} d\alpha \\ &= (x_i - \tilde{x})^{\vee} + \frac{m+1}{\Upsilon} [(s_{x_i}^L - s_{\tilde{x}}^L)^{\vee} + (s_{x_i}^R - s_{\tilde{x}}^R)^{\vee}] \int_0^1 \alpha^m (1-\alpha)^{\vee} d\alpha \\ &\quad + (m+1)(x_i - \tilde{x}) [(s_{x_i}^R - s_{\tilde{x}}^R) - (s_{x_i}^L - s_{\tilde{x}}^L)] \int_0^1 \alpha^m (1-\alpha) d\alpha \\ &= (x_i - \tilde{x})^{\vee} + \frac{m+1}{\Upsilon} [(s_{x_i}^L - s_{\tilde{x}}^L)^{\vee} + (s_{x_i}^R - s_{\tilde{x}}^R)^{\vee}] \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\Upsilon)}{\Gamma(m+\Upsilon)} \\ &\quad + (m+1)(x_i - \tilde{x}) [(s_{x_i}^R - s_{\tilde{x}}^R) - (s_{x_i}^L - s_{\tilde{x}}^L)] \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\Upsilon)}{\Gamma(m+\Upsilon)} \\ &= (x_i - \tilde{x})^{\vee} + \frac{1}{(m+\Upsilon)(m+\Upsilon)} [(s_{x_i}^L - s_{\tilde{x}}^L)^{\vee} + (s_{x_i}^R - s_{\tilde{x}}^R)^{\vee}] \\ &\quad + \frac{(x_i - \tilde{x})}{m+\Upsilon} [(s_{x_i}^R - s_{\tilde{x}}^R) - (s_{x_i}^L - s_{\tilde{x}}^L)] \end{aligned}$$

بنابراین، توسط معادله (۲۲.۳)،

$$\begin{aligned} v_T(\tilde{x}) &= [v(x) + \frac{1}{(m+\Upsilon)(m+\Upsilon)} [v(s_x^R) + v(s_x^L)] \\ &\quad + \frac{1}{m+\Upsilon} [cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)]] \end{aligned} \quad (23.3)$$

□

قضیه ۳.۳.۳. [۸، ۹] فرض کنید $\tilde{x}_i = N(x_i, s_{x_i}^L, s_{x_i}^R) \in F_N(\mathbb{R})$ و $i = 1, \dots, n$. بر اساس تابع وزنی $g(\alpha) = (m+1)\alpha^m$ و $m = 0, 1, 2, \dots$ ، واریانس اعداد فازی نرمال $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ تحت شرایط مطرح شده در قضیه ۲.۳.۳ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} v_N(\tilde{x}) &= v(x) - \frac{1}{\Upsilon(m+1)} [v(s_x^R) + v(s_x^L)] + \sqrt{\frac{\pi}{\Upsilon(m+1)}} \\ &\quad \times [cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)] \end{aligned} \quad (24.3)$$

برهان. برهان مشابه قضیه ۲.۳.۳ است. اما حداقل فاصله بین دو عدد فازی نرمال $\tilde{A} = N(a, s_a^L, s_a^R) \in F_N(R)$ و $\tilde{B} = N(b, s_b^L, s_b^R) \in F_N(R)$ را می‌توان در نظر گرفت که به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} d(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \{(a-b)^{\vee} - \frac{1}{\Upsilon(m+1)} [(s_b^L - s_a^L)^{\vee} + (s_b^R - s_a^R)^{\vee}] \\ &\quad + (a-b) \sqrt{\frac{\pi}{\Upsilon(m+1)}} [(s_b^R - s_a^R) - (s_b^L - s_a^L)]\}^{\vee}, \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن انتگرال ناسره در تعریف ۱.۵.۲ به طوری که تابع وزنی $g(\alpha) = (m+1)\alpha^m$ و $m = 1, 2, \dots$ است.

□

نتیجه ۱.۳.۳. در مقایسه با آنچه در [۳] برای داده‌های متقارن مطرح شده است، کسرهای

$$\sqrt{\frac{\pi}{4(m+1)}}[cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)] \text{ و } \frac{1}{m+2}[cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)]$$

معمولاً اعدادی نسبتاً کوچک می‌باشند که به دلیل عدم تقارن موجود در اعداد مثلثی و نرمال در قضیه ۲.۳.۳ و ۳.۳.۳ پدیدار شده است.

ملاحظه ۲.۳.۳. [۲۳] همان‌طور که قبلاً ذکر شد، برای محاسبه آسان میانگین چندین اعداد فازی LR و بنابراین تفاضل دو عدد فازی LR می‌توان روش اصل گسترش را به کار برد. اما گاهی در محاسبه انحراف استاندارد اعداد فازی LR بر اساس اصل گسترش با مشکلات عمده مواجه خواهیم شد. در این مقاله، یک فازی سازی منطقی و معنی دار در قضیه ۲.۳.۳ و ۳.۳.۳ برای محاسبه انحراف استاندارد اعداد فازی به کار می‌بریم، زیرا:

- (۱) اگر چه مربع عدد فازی LR توسط اصل گسترش قابل محاسبه است، اما آن یک عدد فازی LR نیست. به عنوان مثال، مربع یک عدد فازی مثلثی، یک عدد فازی مثلثی نیست.
- (۲) پس از محاسبه میانگین مربع از تفاضل بین \tilde{x}_i و \bar{x} برای محاسبه رادیکال بر اساس اصل گسترش با شکلی شبیه حالت (۱) مواجه خواهیم شد.
- (۳) اصل گسترش ما را به یک عدد فازی بسیار مبهم به عنوان انحراف استاندارد هدایت می‌کند. که در نهایت محاسبات بر اساس حجم نمونه بزرگ صورت می‌گیرد.

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنید $\widetilde{LSL}_L = (l_o, l_1)_{LL}$ و $\widetilde{USL}_L = (u_1, u_o)_{UL}$ به ترتیب حدود مشخصه فازی بالایی و پایینی خطی باشند، به طوری که $l_1 \leq u_1$. پس برآوردهایی از شاخص‌های کارایی تعمیم یافته (۱۴.۳) - (۱۱.۳) بر اساس مشاهدات فازی مثلثی نامتقارن $\tilde{x}_i = T(x_i, s_{x_i}^L, s_{x_i}^R) \in F_T(R); i = 1, \dots, n$ و تابع وزنی $g(\alpha) = (m+1)\alpha^m; m = 1, 2, \dots$ به صورت زیر قابل محاسبه‌اند:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{\tilde{p}} &= (m+1)(u_1 - l_1) + (u_o - l_o)/6(m+2) \\ &\times \left\{ sd_x^2 + \frac{1}{(m+2)(m+3)} [sd_{s_x^R}^2 + sd_{s_x^L}^2] \right. \\ &\left. + \frac{1}{m+2} [cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (25.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{\tilde{p}m} &= (m+1)(u_1 - l_1) + (u_o - l_o)/6(m+2) \\ &\times \left\{ (\bar{x} - T)^2 + sd_x^2 + \frac{1}{(m+2)(m+3)} [(sd_{s_x^R}^2 + (s_{\bar{x}}^R)^2) \right. \\ &\left. + (sd_{s_x^L}^2 + (s_{\bar{x}}^L)^2) + (\bar{x} - T)(s_{\bar{x}}^R - s_{\bar{x}}^L)] \right. \\ &\left. + \frac{1}{m+2} [cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (26.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{pk} &= \frac{1}{m+2} [(m+1)(u_1 - l_1) + (u_o - l_o)] \\ &\quad - 2 \left| \bar{x} - \frac{(m+1)(u_1 + l_1) + (u_o + l_o)}{2} \right| \\ &\quad \div 6 \left[v(x) + \frac{1}{(m+2)(m+3)} [v(s_x^R) + v(s_x^L)] \right] \\ &\quad + \frac{1}{m+2} [cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (27.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{pmk} &= \frac{1}{m+2} [(m+1)(u_1 - l_1) + (u_o - l_o)] \\ &\quad - 2 \left| \bar{x} - \frac{(m+1)(u_1 + l_1) + (u_o + l_o)}{2} \right| \\ &\quad \div 6(m+2) \{ (\bar{x} - T)^2 + sd_x^2 + \frac{1}{(m+2)(m+3)} [(sd_{s_x^R}^2 + (s_{\bar{x}}^R)^2) \\ &\quad + (sd_{s_x^L}^2 + (s_{\bar{x}}^L)^2) + (\bar{x} - T)(s_{\bar{x}}^R - s_{\bar{x}}^L)] \} \\ &\quad + \frac{1}{m+2} [cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (28.3)$$

به طوری که T مقدار هدف است.

برهان. برآوردگرهای (۲۵.۳) و (۲۷.۳) با در نظر گرفتن تعریف ۱.۳.۳ و قضیه‌های ۱.۶.۲ و ۲.۳.۳ به آسانی قابل محاسبه‌اند. اما برای برآوردگرهای (۲۶.۳) و (۲۸.۳)، باید توجه داشت که بر اساس اعداد فازی مثلثی نامتقارن عبارت زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} d^2(\bar{x}, I_{\{T\}}) &= (\bar{x} - T)^2 + \frac{1}{(m+2)(m+3)} \\ &\quad \times [(s_{\bar{x}}^L)^2 + (s_{\bar{x}}^R)^2] + \frac{(\bar{x} - T)}{(m+2)(m+3)} [s_{\bar{x}}^R - s_{\bar{x}}^L] \end{aligned}$$

□

قضیه ۵.۳.۳. فرض کنید $\widetilde{LSLE} = (l_1, s_l)_{LE}$ و $\widetilde{USLE} = (u_1, s_u)_{UE}$ به ترتیب حدود مشخصه فنی فازی بالایی و پایینی نمایی باشند. به طوری که $l_1 \leq u_1$. پس شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته (۱۱.۳) و (۱۴.۳) بر اساس مشاهدات فازی نرمال نامتقارن $\tilde{x}_i = N(x_i, s_{x_i}^L, s_{x_i}^R) \in F_N(R)$; $i = 1, \dots, n$ اگر $F_N(R)$ اگر $g(\alpha) = (m+1)\alpha^m$, $m = 1, 2, \dots$ آن گاه به صورت زیر قابل محاسبه‌اند:

$$\hat{C}_{\tilde{p}} = \frac{u_1 - l_1 + \sqrt{\pi/4(m+1)}(s_u + s_l)}{6 \{ sd_x^2 - \frac{1}{4(m+1)} [sd_{s_x^R}^2 + sd_{s_x^L}^2] + \sqrt{\frac{\pi}{4(m+1)}} [cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)] \}^{\frac{1}{2}}} \quad (29.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{pm} = & (u_1 - l_1) + \sqrt{\pi/\mathfrak{F}(m+1)}(s_u + s_l)/\mathfrak{E}\{(\bar{x} - T)^2 + sd_x^2 \\ & - \frac{1}{\mathfrak{V}(m+1)}[(sd_{s_x^R}^2 + (s_{\bar{x}}^R)^2) + (sd_{s_x^L}^2 + (s_{\bar{x}}^L)^2)] \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{\mathfrak{F}(m+1)}}[cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L) - (\bar{x} - T)(s_{\bar{x}}^R - s_{\bar{x}}^L)]\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (30.3)$$

$$\hat{C}_{pk} = \frac{(u_1 - l_1) + \sqrt{\pi/\mathfrak{F}(m+1)}(s_u + s_l) - \mathfrak{V}\left|\bar{x} - \frac{(u_1 + l_1) + \sqrt{\pi/\mathfrak{F}(m+1)}(s_u - s_l)}{\mathfrak{V}}\right|}{\mathfrak{E}\left\{sd_x^2 - \frac{1}{\mathfrak{V}(m+1)}[sd_{s_x^R}^2 + sd_{s_x^L}^2] + \sqrt{\frac{\pi}{\mathfrak{F}(m+1)}}[cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L)]\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (31.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_{pmk} = & (u_1 - l_1) + \sqrt{\pi/\mathfrak{F}(m+1)}(s_u + s_l) - \mathfrak{V}\left|\bar{x} - \frac{(u_1 + l_1) + \sqrt{\pi/\mathfrak{F}(m+1)}(s_u - s_l)}{\mathfrak{V}}\right| \\ & \div \mathfrak{E}\{(\bar{x} - T)^2 + sd_x^2 - \frac{1}{\mathfrak{V}(m+1)}[(sd_{s_x^R}^2 + (s_{\bar{x}}^R)^2) + (sd_{s_x^L}^2 + (s_{\bar{x}}^L)^2)] \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{\mathfrak{F}(m+1)}}[cov(x, s_x^R) - cov(x, s_x^L) - (\bar{x} - T)(s_{\bar{x}}^R - s_{\bar{x}}^L)]\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (32.3)$$

طوری که T مقدار هدف است.

برهان. برآوردگرهای (29.3) و (31.3) با در نظر گرفتن تعریف 1.3.3 و قضیه 2.6.2 و 3.3.3 به آسانی قابل محاسبه‌اند اما برای برآوردگرهای (30.3) و (32.3)، باید توجه داشت که بر اساس اعداد فازی نرمال نامتقارن عبارت زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} d^2(\bar{x}, I_{\{T\}}) = & (\bar{x} - T)^2 - \frac{1}{\mathfrak{V}(m+1)}((s_{\bar{x}}^R)^2 + (s_{\bar{x}}^L)^2) \\ & - (\bar{x} - T)(s_{\bar{x}}^R - s_{\bar{x}}^L)\sqrt{\pi/\mathfrak{F}(m+1)} \end{aligned}$$

□

ملاحظه 3.3.3. انگیزه اصلی برای معرفی دو نوع خاص از حدود مشخصات فازی خطی و نمایی و همچنین در نظر گرفتن دو نوع خاص از اعداد فازی مثلثی نامتقارن و اعداد فازی نرمال نامتقارن، به دست آوردن برخی فرمول‌های محاسباتی سریع برای برآوردهایی از شاخص‌های کارایی تعمیم یافته در قضیه 4.3.3 و 5.3.3 است. که به طور مستقیم به انتگرال‌های معرفی شده در روابط (9.2) و (7.2) وابسته نیستند. به طور مشابه می‌توان برای محاسبه فرمول محاسباتی سریع انواع دیگری از حدود مشخصات فازی و اعداد فازی را در نظر گرفت.

مثال 1.3.3. داده‌های مربوط به تولید رینگ پیستون در محیط صنعتی قونیه از کایا و قهرمان [27] را در نظر بگیرید که در آن مشخصه کیفیت قطر داخلی رینگ پیستون می‌باشد. می‌خواهیم

اعداد فازی مثلثی با همان مقادیر اصلی اما با پهناهای متفاوتی را به کار ببریم. هسته‌ی این اعداد برابر هسته‌ی اعداد کایا و قهرمان در نظر گرفته شده‌اند ولی پهناهای این اعداد، یعنی $s_{x_i}^R$ و $s_{x_i}^L$ ، اعداد تصادفی تولید شده از توزیع یکنواخت روی بازه $(0, 0/001)$ می‌باشند (جدول ۴.۴). در این حالت، می‌خواهیم شاخص‌های تعمیم یافته براساس قضیه‌های ۴.۳.۳ و ۵.۳.۳ با کران‌های فازی خطی و نمایی محاسبه کنیم. هم‌چنین، $m = 1$ برای تابع وزنی g در تعریف ۱.۵.۲ و ۱.۳.۳ در نظر می‌گیریم.

همان‌طور که در جدول ۳.۳ مشاهده می‌کنید، فرایند قطر رینگ پیستون کارا نیست، چون که مقادیر برآورد شده از $C_{\bar{p}}$ و $C_{\bar{pk}}$ خیلی کوچکتر از مقدار بحرانی $1/33$ می‌باشند و مهندسین کیفیت باید این نتیجه را در روند پیشرفت کارایی فرایند در نظر بگیرند. همان‌گونه که در جدول ۲.۳ مشاهده می‌کنید تمامی روابط قضیه ۱.۳.۳ برقرارند.

جدول ۲.۳: برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با در نظر گرفتن اندازه‌های فازی گزارش شده با پهناهای متفاوت

خطی	نمایی
$\widehat{USL}_L = (74/0146, 74/0168)_{UL}$	$\widehat{USL}_E = (74/0146, 0/0022)_{UE}$
$\widehat{LSL}_L = (73/9856, 73/9878)_{LL}$	$\widehat{LSL}_E = (73/9878, 0/0022)_{LE}$
$\hat{C}_{\bar{p}} = 0/4824$	$\hat{C}_{\bar{p}} = 0/5043$
$\hat{C}_{\bar{pk}} = 0/4700$	$\hat{C}_{\bar{pk}} = 0/4920$
$\hat{C}_{\bar{pm}} = 0/4820$	$\hat{C}_{\bar{pm}} = 0/5042$
$\hat{C}_{\bar{pmk}} = 0/4696$	$\hat{C}_{\bar{pmk}} = 0/4920$

۴.۳ نتیجه گیری

شاخص‌های کارایی فرایند ابزارهای آماری مفیدی برای میزان سنجش کیفیت محصول، خلاصه سازی پراکندگی و وضعیت فرایند با استفاده از تجزیه و تحلیل کارایی فرایند هستند. با این حال، برخی از محدودیت‌ها همانند تعریف غیرفازی از کیفیت و تعریف دقیق از داده‌ها وجود دارند که مانع تجزیه و تحلیل عمیق و انعطاف پذیر می‌شوند. در این فصل، یک نسخه تعمیم یافته از چندین شاخص کارایی برای برآورد کارایی فرایند بر اساس کیفیت فازی و داده‌های فازی-مقدار نامتقارن پیشنهاد شده است. این شاخص‌های تعمیم یافته قادر به ارزیابی فرایندهای فازی توسط ترکیب برداری از اعداد فازی و دو تابع عضویت از حدود مشخصه فنی فازی هستند. برآوردهای فاصله‌ای از شاخص‌های کارایی تعمیم یافته و آزمون کارایی فرایندهای فازی دو مسئله جالب هستند که می‌توان در کارهای آینده در نظر گرفت.

جدول ۳.۳: اعداد فازی مثلثی نامتقارن تولید شده با پهناهای متفاوت

$T(۷۴/۰۰۱۲۵, ۹/۷۵ \times 10^{-۴}, ۴/۴۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۶/۳۷ \times 10^{-۴}, ۱/۸ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۶۵, ۵/۴۷ \times 10^{-۴}, ۱/۲ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۲۵, ۴/۳۹ \times 10^{-۴}, ۹/۳۴ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۱۱۵, ۶ \times 10^{-۴}, ۱/۲۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۴۵, ۵/۲۴۳ \times 10^{-۴}, ۲/۲۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۵/۲۷ \times 10^{-۴}, ۸/۴ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۵/۳۴۷ \times 10^{-۴}, ۵/۵۵ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۴۵, ۷/۳۱ \times 10^{-۴}, ۷/۶ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۲, ۱/۱۳ \times 10^{-۴}, ۱/۱۱ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۵, ۱/۲۳ \times 10^{-۴}, ۱/۸ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۲۵, ۱/۲۳ \times 10^{-۴}, ۱/۲۳ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۹۵, ۵/۶۶ \times 10^{-۴}, ۹/۲۳ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۵/۶۶ \times 10^{-۴}, ۱/۱۱ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۶۵, ۶/۳۴ \times 10^{-۴}, ۱/۹ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۱/۹ \times 10^{-۴}, ۸/۳۳ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۲/۹۴ \times 10^{-۴}, ۷/۷۹ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۳۵, ۳/۲۸ \times 10^{-۴}, ۹/۶۳ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۳۵, ۹/۷۸ \times 10^{-۴}, ۱/۵ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۲/۱۹ \times 10^{-۴}, ۱/۸ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۵/۴۳ \times 10^{-۴}, ۱/۲۳ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۳۵, ۳/۲۷ \times 10^{-۴}, ۱/۴۴ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۷۵, ۵/۵۹ \times 10^{-۴}, ۲/۴۵ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۵, ۳/۳۱ \times 10^{-۴}, ۸/۴ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۹۵, ۸/۹۵ \times 10^{-۴}, ۱/۱۱ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۲۵, ۱/۷۵ \times 10^{-۴}, ۵/۴۴ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۵, ۸/۷۸ \times 10^{-۴}, ۱/۵۹ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۲۵, ۵/۷۸ \times 10^{-۴}, ۱/۱۶ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۷/۸۳ \times 10^{-۴}, ۴/۵۴ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۶۵, ۸/۶۸ \times 10^{-۴}, ۲/۴۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۱/۱ \times 10^{-۴}, ۸/۲۳ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۵, ۴/۳۷ \times 10^{-۴}, ۷/۵۵ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۹۱۵, ۵/۵۷ \times 10^{-۴}, ۱/۳۵ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۳/۴۴ \times 10^{-۴}, ۵/۳ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۲۵, ۵/۵۳۱ \times 10^{-۴}, ۷/۵ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۶۵, ۶/۴ \times 10^{-۴}, ۹/۷ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۱۲۵, ۲ \times 10^{-۴}, ۲/۹۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۲/۳۱ \times 10^{-۴}, ۳/۳۳ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۳۵, ۷/۹۷ \times 10^{-۴}, ۵/۵۹ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۶/۸۹ \times 10^{-۴}, ۹/۵۱ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۳۰۹ \times 10^{-۴}, ۵/۸۷ \times 10^{-۴}, ۴/۸۵ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۱۵, ۴/۸۵ \times 10^{-۴}, ۳/۵۹ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۶۵, ۹/۵۴ \times 10^{-۴}, ۳/۵۱ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۲۵, ۱/۶۱ \times 10^{-۴}, ۵/۳۰۵ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۹۵, ۶/۵۱ \times 10^{-۴}, ۲/۲ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۶۵, ۵/۴۸ \times 10^{-۴}, ۷/۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۷۵, ۹/۴۸ \times 10^{-۴}, ۶/۸۵ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۶/۲۳ \times 10^{-۴}, ۸/۹۶ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۱/۳۵ \times 10^{-۴}, ۸/۵۱ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۵, ۷/۸۴ \times 10^{-۴}, ۵/۸۲ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۸۵, ۱/۳۸ \times 10^{-۴}, ۹/۷۸ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۸۵, ۹/۵۵ \times 10^{-۴}, ۲/۸۸ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۹۷۵, ۱/۹۷ \times 10^{-۴}, ۴/۶۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۷۵, ۱/۷۵ \times 10^{-۴}, ۲/۴۸ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۹۵, ۴/۵۵ \times 10^{-۴}, ۷/۴۱ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۸/۶۶ \times 10^{-۴}, ۵/۸۸ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۲۵, ۳/۷۸ \times 10^{-۴}, ۳/۷۲ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۲۵, ۳/۷۲ \times 10^{-۴}, ۵/۳۶۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۳۹۸ \times 10^{-۴}, ۵/۳۹۸ \times 10^{-۴}, ۸/۹۸ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۵, ۵/۸۴ \times 10^{-۴}, ۱/۱۳ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۱۵, ۸/۵۴ \times 10^{-۴}, ۹/۹۴ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۵/۴۹۵ \times 10^{-۴}, ۵/۸۳ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۷۵, ۲/۲۸ \times 10^{-۴}, ۴/۶ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۵, ۸/۸۹ \times 10^{-۴}, ۶/۸۵ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۰۵, ۱/۹۳ \times 10^{-۴}, ۷/۵۵ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۲۵, ۶/۱۲ \times 10^{-۴}, ۱/۶ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۸۵, ۵/۷۳۹ \times 10^{-۴}, ۴/۶ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۸۵, ۴/۸۵ \times 10^{-۴}, ۵/۷۱۶ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۹۵, ۴/۸۹ \times 10^{-۴}, ۶/۶۵ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۲۵, ۳/۴۶ \times 10^{-۴}, ۴/۷۸ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۷۵, ۱/۸۶ \times 10^{-۴}, ۴/۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۹/۲۱ \times 10^{-۴}, ۷/۷۵ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۵/۵۲ \times 10^{-۴}, ۳/۸۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۶۵, ۶/۷۳ \times 10^{-۴}, ۴/۷۵ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۱۵, ۷/۹۲ \times 10^{-۴}, ۱/۴۴ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۲۵, ۷/۵۶ \times 10^{-۴}, ۷/۷۷ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۹۴۵, ۹/۲۹ \times 10^{-۴}, ۸/۵۱ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۶۵, ۲/۵۷ \times 10^{-۴}, ۹/۴۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۳۵, ۶/۷۴ \times 10^{-۴}, ۴/۳ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۸۵, ۲/۵۱ \times 10^{-۴}, ۵/۳۰۲ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۹۲۵, ۲/۲۳ \times 10^{-۴}, ۳/۸۷ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۶۵, ۷/۳۱ \times 10^{-۴}, ۹/۶۸ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۷۵, ۲/۲۲ \times 10^{-۴}, ۸/۵۵ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۴۵, ۹/۵۱ \times 10^{-۴}, ۵/۳۰۲ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۲۵, ۷/۷ \times 10^{-۴}, ۳/۱۶ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۷۵, ۳/۴۲ \times 10^{-۴}, ۵/۶۳ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۲۵, ۳/۳۷ \times 10^{-۴}, ۲/۶۲ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۶۵, ۱/۴۴ \times 10^{-۴}, ۴/۴۵ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۶۵, ۲/۵ \times 10^{-۴}, ۹/۶۸ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۱/۸۴ \times 10^{-۴}, ۳/۷۴ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۵۵, ۲/۹۹ \times 10^{-۴}, ۱/۱۹ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۲۵, ۳/۴۱ \times 10^{-۴}, ۹/۱۴ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۸۵۵, ۷/۷۸ \times 10^{-۴}, ۴/۵۴ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۳۵, ۹/۶۵ \times 10^{-۴}, ۸/۵۹ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۵۵, ۷/۵۸ \times 10^{-۴}, ۹/۸۸ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۱۱۵, ۲/۲۹ \times 10^{-۴}, ۲/۶۱ \times 10^{-۴})$
$T(۷۴/۰۰۰۱۵۵, ۴/۵۴ \times 10^{-۴}, ۱/۶۶ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۷۵, ۴/۵۴ \times 10^{-۴}, ۲/۵۲ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۹۵, ۸/۳۷ \times 10^{-۴}, ۱/۵۸ \times 10^{-۴})$	$T(۷۴/۰۰۰۸۸۵, ۳/۲۵ \times 10^{-۴}, ۴/۷۹ \times 10^{-۴})$

فصل ۴

فواصل اطمینان بوت استرپی شاخص‌های کارایی تعمیم یافته

در این فصل فواصل اطمینان بوت استرپی شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته را معرفی می‌کنیم [۴]. سپس به تحلیل شاخص‌های کارایی فرایند کلاسیک و تعمیم یافته و همچنین فواصل اطمینان بوت استرپی آن‌ها در یک مثال کاربردی در صنعت لوله‌سازی می‌پردازیم.

۱.۴ مقدمه

در بخش ۲ از فصل دوم در مورد فاصله اطمینان بوت استرپی شاخص‌های کارایی فرایند صحبت کردیم. اکنون می‌خواهیم فواصل اطمینان بوت استرپی برای شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته را معرفی کنیم. این کار تنها با جایگذاری شاخص کارایی فرایند تعمیم یافته با شاخص کارایی فرایند امکان‌پذیر است.

فرض کنید x_1, \dots, x_n داده‌هایی باشند که به عنوان تحقیقی از متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع F به طور مستقل و هم‌توزیع مشاهده شده‌اند، یعنی $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F$. گیریم $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ کل مجموعه داده‌ها را نشان می‌دهد. یک نمونه تصادفی با جایگذاری از مجموعه X به حجم n انتخاب کرده و آن‌ها را با $X^* = \{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ نمایش داده و به آن یک نمونه بوت استرپی گوئیم. تحقیقی از این نمونه بوت استرپی را نیز x_1^*, \dots, x_n^* نشان می‌دهیم. n^n

مجموعه باز نمونه گیری وجود دارد که از آن برای محاسبه n^n مقادیر \hat{C}^* استفاده می‌شود که در آن \bar{C} نشان دهنده شاخص کارایی تعمیم یافته است. هر یک از آن‌ها برآوردی از \bar{C}^* است و مجموعه تمام آن‌ها توزیع بوت استرپی \hat{C} را تشکیل می‌دهد. نمونه بوت استرپ معادل با نمونه با جایگذاری از تابع توزیع تجربی است. بنابراین، توزیع بوت استرپ \hat{C} برآوردی از توزیع تجربی \bar{C} است. در عمل، حداقل ۱۰۰۰ نمونه بوت استرپ برای محاسبه منطقی برآورد دقیق فاصله اطمینان کفایت می‌کند (افرون و تیشیرانی ۱۹۸۶). فرض بر این است که $B = ۱۰۰۰$ بار نمونه بوت استرپ گرفته شود و $B = ۱۰۰۰$ بار \hat{C} بوت استرپی محاسبه و سپس از کوچکترین به بزرگترین مرتب شوند. در زیر پنج ساختار مختلف برای فاصله اطمینان شاخص کارایی فرایند تعمیم یافته با استفاده از تکنیک بوت استرپ بیان شده است.

۱.۱.۴ فاصله اطمینان SB شاخص‌های کارایی فرایند فازی

فاصله اطمینان بوت استرپ استاندارد برای شاخص کارایی فرایند تعمیم یافته \bar{C} به صورت زیر است:

$$[\hat{C} - z_{\alpha/2} se(\hat{C}^*), \hat{C} + z_{\alpha/2} se(\hat{C}^*)] \quad (۱.۴)$$

از تعداد B برآورد بوت استرپ \hat{C}_i^* ، به ازای $i = 1, \dots, B$ میانگین نمونه $\bar{C}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{C}_i^*$ و انحراف استاندارد نمونه $se(\hat{C}^*) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{C}_i^* - \bar{C}^*)^2}$ محاسبه می‌شود و $z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(\alpha/2)$ است.

۲.۱.۴ فاصله اطمینان BB شاخص‌های کارایی فرایند فازی

با توجه به B برآورد بوت استرپ \hat{C}_i^* به ازای $i = 1, \dots, B$ ، فاصله اطمینان بوت استرپ پایه برای \bar{C} به صورت زیر است:

$$[2\hat{C} - \hat{C}_{1-\alpha/2}, 2\hat{C} - \hat{C}_{\alpha/2}] \quad (۲.۴)$$

که در آن $\hat{C}_{1-\alpha/2}$ چندک مرتبه $\alpha/2$ ام از توزیع تجربی مبتنی بر یک نمونه بوت استرپی است.

۳.۱.۴ فاصله اطمینان PB شاخص‌های کارایی فرایند فازی

نقاط α درصدی و $1 - \alpha$ درصدی از توزیع \hat{C}_i^* را برای فواصل اطمینان نقاط انتهایی انتخاب می‌کنیم. از B برآورد بوت استرپ \hat{C}_i^* به ازای $i = 1, \dots, B$ ، فاصله اطمینان بوت استرپ صدکی برای \bar{C} به صورت زیر است:

$$[\hat{C}^*(\alpha B), \hat{C}^*((1 - \alpha)B)] \quad (۳.۴)$$

۴.۱.۴ فاصله اطمینان PTB شاخص‌های کارایی فرایند فازی

بر اساس باز نمونه گیری بوت استرپ X^* ، $Z_i^* = \frac{(\hat{C}_i^* - \hat{C})}{se_i^*}$ ، $i = 1, \dots, B$ را محاسبه می‌کنیم، به طوری که \hat{C}_i^* برآوردی از \bar{C} بر اساس باز نمونه گیری بوت استرپ X_1^*, \dots, X_B^* است و se_i^* خطای استاندارد برآورد شده از \bar{C}^* است. بنابراین، یک مجموعه از Z_i^* ، $i = 1, \dots, B$ را دریافت می‌کنیم. سپس چندک α ام از این مقادیر Z توسط مقدار $\hat{t}(\alpha)$ برآورد می‌شود. فاصله اطمینان بوت استرپ $\% (1 - 2\alpha) 100$ برای \bar{C} دارای ساختار زیر است:

$$[\hat{C} + \hat{t}(\alpha)s_d, \hat{C} + \hat{t}(1 - \alpha)s_d] \quad (4.4)$$

به طوری که $s_d = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{C}_i^* - \bar{C}^*)^2}$ نشان دهنده خطای استاندارد از \hat{C} است.

۵.۱.۴ فاصله اطمینان BCa شاخص‌های کارایی فرایند فازی

α_1 و α_2 از معادلات (۱۳.۱) و (۱۴.۱) را برای محاسبه یک فاصله اطمینان بوت استرپ تصحیح اریبی شتابیده $\% (1 - \alpha) 100$ محاسبه می‌کنیم. به طوری که $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ ، \hat{z}_0 و \hat{a} توسط معادلات (۶.۴) و (۷.۴) داده شده است. فاصله BCa به صورت زیر است:

$$(\hat{C}_{\alpha_1}^*, \hat{C}_{\alpha_2}^*) \quad (5.4)$$

حدود اطمینان بالایی و پایینی فواصل اطمینان BCa چندک‌های تجربی α_1 و α_2 از تکرارهای بوت استرپ هستند. عامل تصحیح اریبی در عمل اریبی میانه از تکرارهای \hat{C}^* برای \hat{C} را اندازه‌گیری می‌کند. برآورد این اریبی به صورت زیر است:

$$\hat{z}_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B I(\hat{C}^{(b)} < \hat{C})\right) \quad (6.4)$$

به طوری که $I(\cdot)$ تابع نشانگر است. اگر \hat{C} میانه توزیع‌های بوت استرپ باشد، آن‌گاه $\hat{z}_0 = 0$. عامل شتاب از تکرارهای جک نایف به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{C}_{(i)} - \bar{C}_{(i)})^3}{6 \sum_{i=1}^n ((\bar{C}_{(i)} - \bar{C}_{(i)})^2)^{3/2}} \quad (7.4)$$

که چولگی را اندازه می‌گیرد.

جدول ۱.۴: فواصل اطمینان بوت استرپی

فاصله اطمینان بوت استرپ استاندارد	$[\hat{C} - z_{\alpha/2} se(\hat{C}^*), \hat{C} + z_{\alpha/2} se(\hat{C}^*)]$
فاصله اطمینان بوت استرپ پایه	$[2\hat{C} - \hat{C}_{1-\alpha/2}, 2\hat{C} - \hat{C}_{\alpha/2}]$
فواصل اطمینان بوت استرپی صدکی	$[\hat{C}^*(\alpha B), \hat{C}^*((1-\alpha)B)]$
فاصله اطمینان بوت استرپی اریبی تصحیح شده	$[\hat{C}^*(P_L B), \hat{C}^*(P_U B)]$
فاصله اطمینان بوت استرپ t درصدی	$[\hat{C} + \hat{t}(\alpha) s_d, \hat{C} + \hat{t}(1-\alpha) s_d]$
فاصله اطمینان بوت استرپ تصحیح اریبی شتابیده	$[\hat{C}_{\alpha_1}^*, \hat{C}_{\alpha_2}^*]$

۲.۴ کاربرد شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته در صنعت لوله سازی

کارخانجات لوله سازی کالوپ در سال ۱۳۶۱ با هدف تولید لوله‌های فولادی آب، نفت و گاز به روش درز جوش مستقیم (ERW) در اقطار ۶، ۸، ۱۰، ۱۲ و ۱۴ اینچ و ضخامت ۴ تا ۱۰ میلی‌متر با همکاری شرکت KUSAKABE ژاپن در شهر صنعتی کاوه واقع در شهرستان ساوه تاسیس گردید. تولیدات این کارخانجات در ابتدا در زمینه صنایع آبرسانی به خدمت گرفته شد که در این راستا درصدی از تولیدات این شرکت به کشورهای اروپایی نظیر آلمان و اتریش نیز صادر گردید. پس از ۲۲ سال تأمین موفق این بازار در سال ۱۳۸۳ با استفاده از بالاترین تکنولوژی روز شرکت کالوپ موفق گردید لوله‌هایی با بالاترین استاندارد جهانی (API) جهت صنعت نفت و گاز تولید و عرضه نمایند و هم اکنون به عنوان یکی از بزرگترین تولیدکنندگان این محصول در کشور موفق به ارائه بیش از ۵۰۰۰ کیلومتر لوله‌های فولادی شده که در شبکه‌های نفت و گازرسانی نصب و مورد بهره‌برداری قرار گرفته است. سپس در گام دیگری در سال ۱۳۸۸ توسعه کارخانجات شرکت کالوپ در شهر صنعتی سگزی اصفهان منجر به احداث خط تولید لوله‌های اسپیرال و همچنین توسعه تولید لوله‌های فولادی ERW گردید که هم اکنون قابلیت ورود به صنعت ساختمان و تولید انواع مقاطع بسته و توخالی سازه‌های فولادی (HSS) با بالاترین کیفیت و تکنولوژی به وجود آمده است.

لوله‌ها برای انتقال آب: مواد خام لوله‌های فولادی ERW فولاد کربنی، فولاد کم آلیاژ و فولاد دیگر هستند. اشکال لوله‌های فولادی ERW به عنوان دایره، مربع و یا خاص هستند. بعضی از ویژگی‌های لوله‌های فولادی ERW تکنولوژی تولید ساده، صرفه جویی در تولید بالا و هزینه کم هستند:

- (۱) ۵/۸ اینچ با استاندارد ASTM
- (۲) ۸ ۵/۸ اینچ با استاندارد ASTM
- (۳) ۱۰ ۳/۴ اینچ با استاندارد ASTM

(۴) ۱۲ ۳/۴ اینچ با استاندارد *ASTM*

(۵) ۱۴ اینچ با استاندارد *ASTM*

(۶) ۱۶ اینچ با استاندارد *ASTM*

کارخانه‌جات کالوپ با داشتن ۲۵ سال سابقه در تولید و ساخت لوله‌های *ERW* با درز جوش مقاومت الکتریکی قادر به تولید لوله‌هایی از ۶ تا ۱۶ اینچ و ضخامت ۴ تا ۱۲/۷ میلی‌متر با بالاترین کیفیت و مطابق با استانداردهای جهانی می‌باشد.

در اینجا، کارایی طول لوله‌های انتقال آب *ERW* ۱۲ متری با ضخامت ورق ۶ میلی‌متر زمانی که، قطر لوله ۱۲ اینچ، عرض ورق ۱۰۲۰ میلی‌متر، وزن لوله ۴۷/۷ کیلوگرم بر متر طول، سرعت خط تولید بازه (۱۴/۵, ۱۵/۵) متر بر دقیقه و درجه صفر استاندارد که در پنج روز کاری سال ۲۰۱۷ برش خورده‌اند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس یک فاصله اطمینان بوت استرپ برای این شاخص‌های کارایی ارائه می‌دهیم. همچنین شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته و برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای بوت استرپی شاخص‌های کارایی تعمیم یافته ذکر شده را نیز محاسبه می‌کنیم. متخصصان حد مشخصه بالایی و پایینی را به ترتیب $USL = 12/05m$ و $LSL = 11/95m$ در نظر گرفته‌اند.

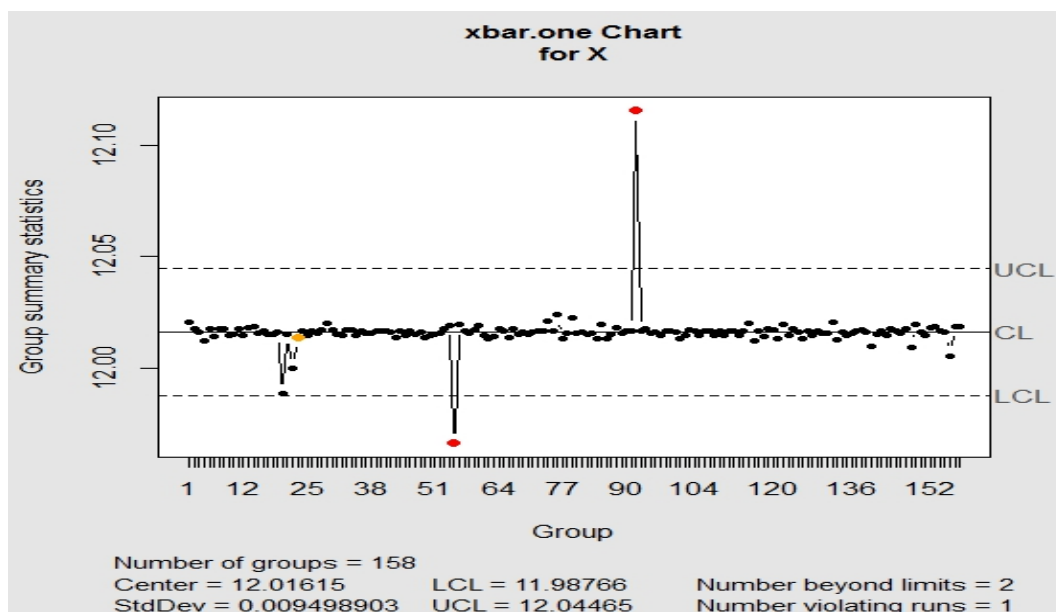
جدول ۲.۴: مشاهدات مربوط به طول لوله

۱۲/۰۲۰۷۲	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۱۲۱۵	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۴۱	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۴۸۸	۱۲/۰۱۵۲۶
۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۴۸۸	۱۲/۰۱۷۹۹	۱۲/۰۱۸۳۸	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۵۲۶	۱۲/۰۱۵۲۶	۱۲/۰۱۶۰۴	۱۱/۹۸۸۲۸
۱۲/۰۱۵۲۶	۱۱/۹۹۹۶۸	۱۲/۰۱۳۷۱	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۴۴۹	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۷۲۱	۱۲/۰۱۹۹۴	۱۲/۰۱۷۲۱
۱۲/۰۱۵۲۶	۱۲/۰۱۴۸۸	۱۲/۰۱۷۲۱	۱۲/۰۱۷۲۱	۱۲/۰۱۴۸۸	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۶۸۲
۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۱۳۷۱	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۴۸۸	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۵۲۶	۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۱۳۷۱	۱۲/۰۱۴۸۸
۱۲/۰۱۵۲۶	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۹۱۶	۱۱/۹۶۶۱۸	۱۲/۰۱۹۵۵	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۷۲۱	۱۲/۰۱۹۱۶
۱۲/۰۱۴۴۹	۱۲/۰۱۲۹۳	۱۲/۰۱۴۱	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۳۷۱	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۵۲۶	۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۱۵۲۶
۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۲۱۱۱	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۲۳۸۴	۱۲/۰۱۲۹۳	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۲۲۶۷	۱۲/۰۱۵۶۵
۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۱۵۲۶	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۳۳۲	۱۲/۰۱۹۵۵	۱۲/۰۱۳۳۲	۱۲/۰۱۵۲۶	۱۲/۰۱۷۹۹	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۶۴۳
۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۱۵۳۹	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۱۴۸۸	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۶۰۴
۱۲/۰۱۳۳۲	۱۲/۰۱۴۴۹	۱۲/۰۱۷۲۱	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۴۴۹	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۴۸۸	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۴۸۸
۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۴۴۹	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۹۹۴	۱۲/۰۱۲۱۵	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۴۱	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۷۲۱
۱۲/۰۱۳۳۲	۱۲/۰۱۹۵۵	۱۲/۰۱۴۴۹	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۱۳۳۲	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۴۸۸	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۵۶۵
۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۲۰۳۳	۱۲/۰۱۲۵۴	۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۱۴۴۹	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۷۲۱	۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۰۹۸۱
۱۲/۰۱۵۲۶	۱۲/۰۱۶۸۲	۱۲/۰۱۴۸۸	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۵۶۵	۱۲/۰۱۷۶	۱۲/۰۰۹۴۲	۱۲/۰۱۹۵۵	۱۲/۰۱۶۰۴
۱۲/۰۱۴۴۹	۱۲/۰۱۷۹۹	۱۲/۰۱۸۷۷	۱۲/۰۱۶۴۳	۱۲/۰۱۶۰۴	۱۲/۰۰۵۵۲	۱۲/۰۱۸۷۷	۱۲/۰۱۸۷۷		

باید به این نکته توجه داشت که در صورتی شاخص کارایی فرایند به‌طور قابل اطمینان تخمین زده می‌شود که فرایند تحت کنترل باشد. اگر در مراحل اولیه تجزیه و تحلیل کارایی فرایند پی ببریم که فرایند در حالت خارج از کنترل به سر می‌برد، ابتدا باید انحرافات با دلیل شناسایی و حذف گردند تا بدین وسیله فرایند به حالت تحت کنترل باز گردد. در تجزیه و تحلیل کارایی فرایند، می‌توان از نمودارهای کنترل برای مشخصه‌های متغیر نظیر نمودارهای \bar{X} و R که از قدرت آماری بالاتری برخوردار هستند و اطلاعات بیشتری را نیز فراهم می‌سازند، استفاده کرد.

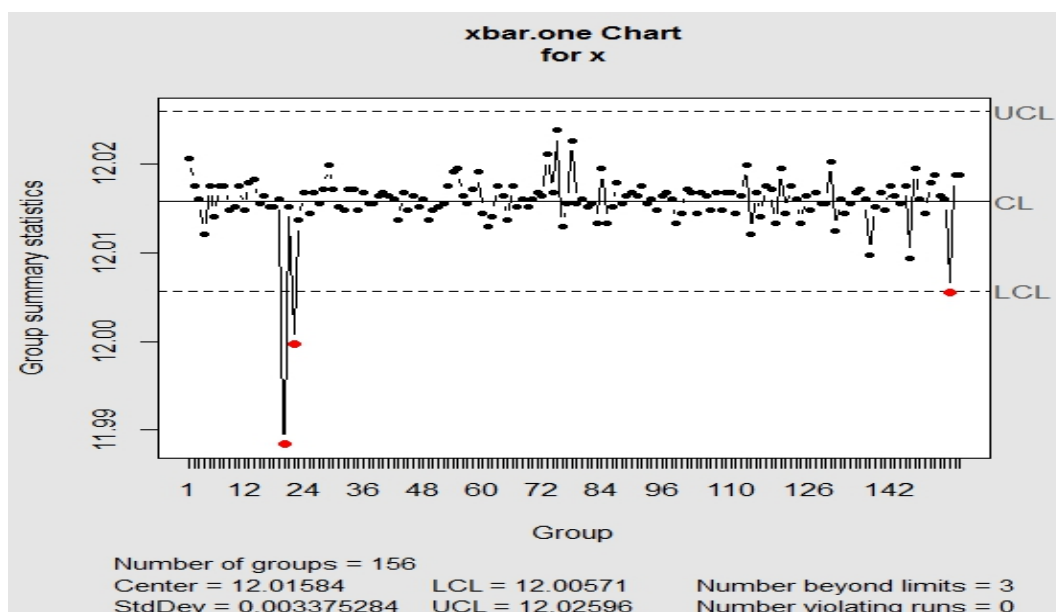
ابتدا نمودار \bar{X} برای مشاهدات مربوط به طول لوله ۱۲ متری با ضخامت ۶ سانتی‌متر را

رسم کردیم. همان‌طور که در شکل ۱.۴ مشاهده می‌کنید داده ۵۶ و ۹۳ خارج از حدود کنترل



شکل ۱.۴: نمودار \bar{X} مربوط به مشاهدات جدول ۲.۴

هستند. بررسی موضوع این واقعیت را منعکس می‌کند که خطا ناشی از دستگاه اندازه‌گیری بوده است. بنابراین این دو نقطه از مجموعه داده‌ها حذف و نمودار کنترل \bar{X} را مجدداً رسم می‌کنیم. با توجه به شکل ۲.۴ داده‌های ۲۱ و ۲۳ در حالت خارج از کنترل به سر می‌برند.



شکل ۲.۴: نمودار \bar{X} مربوط به مشاهدات جدول ۲.۴ با حذف ۲ مشاهده

دوباره این نقاط از مجموعه داده حذف می‌شوند و نمودار \bar{X} را ترسیم می‌کنیم. اکنون به

کاراست. شاخص کارایی C_{pmk} با توجه به روابط موجود در قضیه ۱.۳.۱ به دست می‌آید. این شاخص بیشترین حساسیت را نسبت به میزان انحراف میانگین $\mu = ۱۲/۰۱۶۲$ از مقدار هدف $T = ۱۲$ داراست. بنابراین، نسبت به شاخص‌های دیگر کوچک‌تر برآورد شده است و عدم کارایی فرایند را نشان می‌دهد.

جدول ۳.۴: برآورد شاخص‌های کارایی مشاهدات جدول ۲.۴ با حذف ۴ مشاهده

$C_p = ۷/۶۰۳$
$C_{pk} = ۵/۱۵۲$
$C_{pm} = ۱/۰۲۴$
$C_{pmk} = ۰/۶۹۳۸$

همان‌طور که در جدول ۳.۴ مشاهده می‌کنید، عدم انطباق میانگین فرایند بر وسط حدود مشخصه فنی، باعث عدم کارایی $C_{\bar{p}}$ در اندازه‌گیری میزان کارایی فرایند می‌شود و به خاطر همین موضوع میزان این شاخص نسبت به دیگر شاخص‌ها بسیار بزرگ‌تر برآورد شده است. اکنون شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با حدود فازی خطی و نمایی، زمانی که اعداد همان مقادیر اصلی اند را محاسبه می‌کنیم. همچنین $m = ۱$ را برای تابع وزنی g در نظر می‌گیریم. کد R برای برآورد شاخص کارایی تعمیم یافته $C_{\bar{pk}}$ با حدود فازی نمایی در پیوست آمده است. نتایج در جدول ۴.۴ گزارش شده است. همان‌گونه که در جدول ۴.۴ مشاهده می‌کنیم $\hat{C}_{\bar{p}}$ و $\hat{C}_{\bar{pk}}$ بزرگتر از یک است و کاراست، اما شاخص‌های کارایی دیگر کوچکتر از یک هستند و این بیان‌گر آن است که فرایند نسبتاً قادر به رعایت حدود مشخصات فنی نمی‌باشد. می‌خواهیم

جدول ۴.۴: برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با کیفیت فازی و داده غیرفازی مشاهدات جدول ۲.۴ با حذف ۴ مشاهده

خطی	نمایی
$\widehat{USL}_L = (۱۲/۰۲۵, ۱۲/۰۵)_{UL}$	$\widehat{USL}_E = (۱۲/۰۲۵, ۰/۰۲۵)_{UE}$
$\widehat{LSL}_L = (۱۱/۹۵, ۱۱/۹۷۵)_{LL}$	$\widehat{LSL}_E = (۱۱/۹۷۵, ۰/۰۲۵)_{LE}$
$\hat{C}_{\bar{p}} = ۵/۰۷۷۰$	$\hat{C}_{\bar{p}} = ۶/۱۹۳۹$
$\hat{C}_{\bar{pk}} = ۲/۶۲۱۶$	$\hat{C}_{\bar{pk}} = ۳/۷۳۸۵$
$\hat{C}_{\bar{pm}} = ۰/۶۸۲۹$	$\hat{C}_{\bar{pm}} = ۰/۸۳۳۲$
$\hat{C}_{\bar{pmk}} = ۰/۳۵۲۶$	$\hat{C}_{\bar{pmk}} = ۰/۵۰۲۹$

اعداد فازی مثلثی متقارن با همان مقادیر اصلی را به کار بریم. اما پهنای این اعداد، اعداد تصادفی تولید شده از توزیع یکنواخت روی بازه $(۰, ۰/۰۰۱)$ می‌باشند. در این حالت، شاخص‌های

کاربرد شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته در صنعت لوله سازی ۶۷

کارایی تعمیم یافته با حدود فازی خطی و نمایی را محاسبه می‌کنیم. همچنین $m = 1$ را برای تابع وزنی g در نظر می‌گیریم. برای برآورد شاخص کارایی تعمیم یافته C_{pk} به ازای داده مثلی و حدود مشخصه نمایی به کد R در پیوست آ مراجعه کنید. نتایج در جدول ۵.۴ آمده است. همان‌گونه که در جدول ۵.۴ مشاهده می‌کنید، برای دو حالت حدود خطی و نمایی جدول ۵.۴: برآورد شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با کیفیت فازی و داده فازی مشاهدات جدول ۲.۴ با حذف ۴ مشاهده

خطی	نمایی
$\widetilde{USL}_L = (12/025, 12/05)_{UL}$	$\widetilde{USL}_E = (12/025, 0/025)_{UE}$
$\widetilde{LSL}_L = (11/95, 11/975)_{LL}$	$\widetilde{LSL}_E = (11/975, 0/025)_{LE}$
$\hat{C}_{\bar{p}} = 5/0693$	$\hat{C}_{\bar{p}} = 6/1652$
$\hat{C}_{pk} = 2/6178$	$\hat{C}_{pk} = 3/7232$
$\hat{C}_{pm} = 0/6828$	$\hat{C}_{pm} = 0/8329$
$\hat{C}_{pmk} = 0/3526$	$\hat{C}_{pmk} = 0/5027$

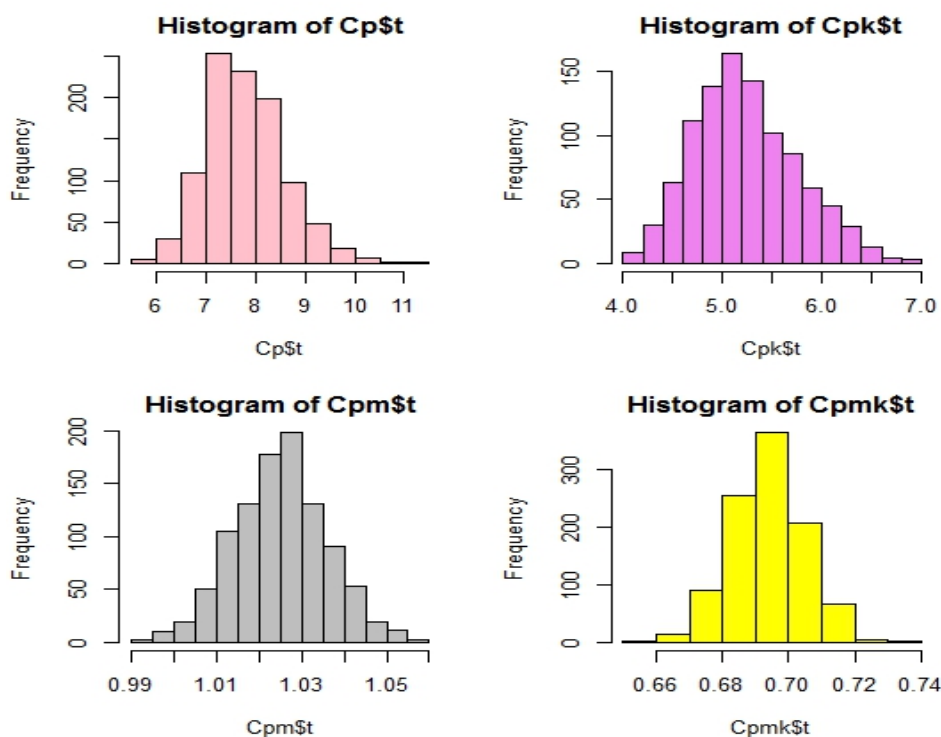
شاخص‌های \hat{C}_{pk} و $\hat{C}_{\bar{p}}$ بزرگ‌تر از یک است و فرایند قادر به رعایت حدود مشخصات فنی است. اما برای شاخص‌های دیگر چنین نیست و فرایند ناکارا را نشان می‌دهند.

جدول ۶.۴: فواصل اطمینان بوت استرپ ۹۵٪ برای شاخص‌های کارایی با حدود مشخصه $USL = 11/95$ و $LSL = 12/05$

برآورد نقطه‌ای	SB	BB	PB	PTB	BCa	
\hat{C}_p	۷/۶۱۵۵	(۵/۸۸۴, ۹/۰۴۰)	(۵/۷۷۲, ۸/۸۲۰)	(۶/۴۱۱, ۹/۴۵۹)	(۵/۶۶۲۰, ۹/۰۹۹۴)	(۶/۰۷۱, ۹/۲۱۰)
\hat{C}_{pk}	۵/۱۶۰۱	(۳/۹۹۳, ۶/۱۳۷)	(۳/۸۵۰, ۶/۰۶۷)	(۴/۲۵۳, ۶/۴۷۱)	(۳/۷۷۸۴, ۶/۱۷۰۱)	(۴/۰۸۷, ۶/۱۲۶)
\hat{C}_{pm}	۱/۰۲۴۴	(۱/۰۰۳, ۱/۰۴۵)	(۱/۰۰۳, ۱/۰۴۴)	(۱/۰۰۵, ۱/۰۴۶)	(۱/۰۰۲۹, ۱/۰۴۵۸)	(۱/۰۰۴, ۱/۰۴۴)
\hat{C}_{pmk}	۰/۶۹۴۱	(۰/۶۷۲۶, ۰/۷۱۵۸)	(۰/۶۷۰۶, ۰/۷۱۶۰)	(۰/۶۷۲۳, ۰/۷۱۷۷)	(۰/۶۷۲۲, ۰/۷۱۴۵)	(۰/۶۷۲۲, ۰/۷۱۶۹)

با استفاده از کد R در پیوست آ، برآورد نقطه‌ای بوت استرپ و برآوردهای فاصله‌ای بوت استرپ برای C_p محاسبه شده است. نتایج در جدول ۶.۴ گزارش شده است. همان‌طور که در جدول ۶.۴ ملاحظه می‌کنید، فواصل اطمینان بوت استرپ نرمال استاندارد، پایه، صدکی، t درصدی و تصحیح اریبی C_p ، C_{pk} و C_{pm} شامل یک و حتی بزرگ‌تر از یک هستند که در واقع بیان‌گر کارایی فرایند است. این فواصل برای شاخص C_{pmk} فرایند ناکارا را نشان می‌دهد که حاکی از سخت‌گیرانه بودن شاخص C_{pmk} نسبت به سایر شاخص‌ها است.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که اعداد همان طول لوله‌های ۱۲ متری با ضخامت ۶ سانتی‌متری هستند، اما حدود مشخصات فنی فازی‌اند. حدود مشخصه بالایی و پایینی فازی خطی به ترتیب $\widetilde{USL}_L = (11/95, 11/975)$ و $\widetilde{LSL}_L = (12/025, 12/05)$ در نظر گرفته شده‌اند.



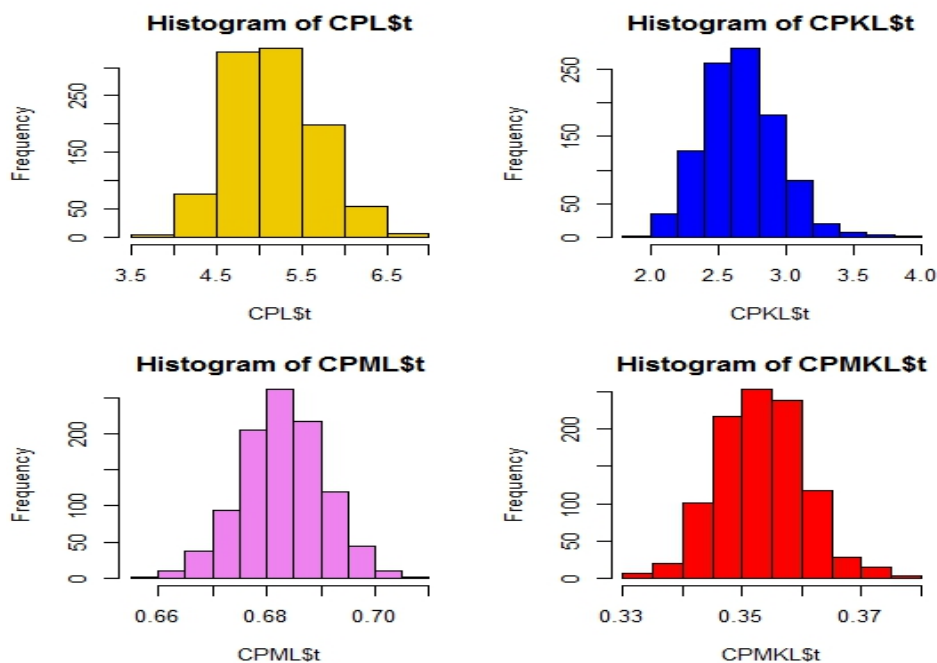
شکل ۵.۴: برآوردهای بوت استرپ شاخص‌های کارایی فرایند

با مراجعه به کد R در پیوست آ، برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای بوت استرپ برای شاخص کارایی تعمیم یافته C_{pk} را به دست می‌آوریم. نتایج در جدول ۷.۴ آمده است. در این حالت، استدلال مشابهی با حالت غیر فازی داریم. در اینجا دقیق‌تر بودن فواصل اطمینان بوت استرپ تصحیح اریبی شتابیده و t درصدی بیشتر به چشم می‌خورد. یعنی، برای حجم نمونه ۱۵۴، مقدار خطا با نرخ $1/154$ به صفر میل می‌کند. اشکال فاصله اطمینان بوت استرپ t درصدی زمان بر بودن محاسبات آن است. فواصل اطمینان بوت استرپ صدکی و پایه نسبت به فواصل اطمینان بوت استرپ نرمال استاندارد از دقت بیشتری برخوردارند.

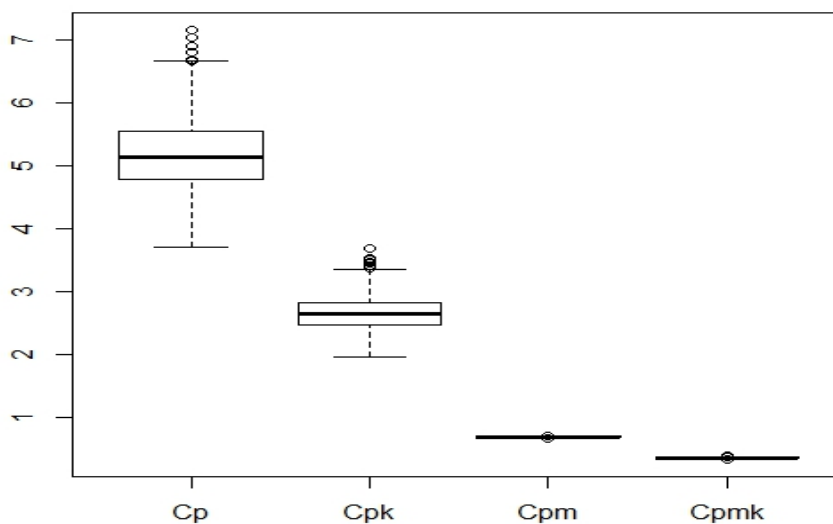
جدول ۷.۴: فواصل اطمینان بوت استرپ ۹۵٪ برای شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با حدود مشخصه $USL_L = (11/95, 11/975)$ و $LSL_L = (12/25, 12/5)$

برآورد نقطه‌ای	SB	BB	PB	PTB	BCa	
$\hat{C}_{\bar{p}}$	۵/۰۷۷۰	(۳/۹۸۴, ۵/۹۸۳)	(۳/۹۵۴, ۵/۸۸۳)	(۴/۲۷۱, ۶/۲۰۰)	(۳/۷۴۶۵, ۶/۰۸۹۶)	(۴/۰۸۲, ۶/۰۰۸)
$\hat{C}_{\bar{p}k}$	۲/۶۲۱۶	(۲/۰۲۱, ۳/۱۳۰)	(۱/۹۳۸, ۳/۰۴۹)	(۲/۱۹۵, ۳/۳۰۵)	(۱/۹۶۳۰, ۳/۱۳۹۹)	(۲/۰۸۱, ۳/۲۰۴)
$\hat{C}_{\bar{p}m}$	۰/۶۸۲۹	(۰/۶۶۸۳, ۰/۶۹۷۶)	(۰/۶۶۸۸, ۰/۶۹۷۶)	(۰/۶۶۸۴, ۰/۶۹۷۱)	(۰/۶۶۸۷, ۰/۶۹۷۱)	(۰/۶۶۸۲, ۰/۶۹۶۶)
$\hat{C}_{\bar{p}mk}$	۰/۳۵۲۶	(۰/۳۳۸۰, ۰/۳۶۶۴)	(۰/۳۳۶۹, ۰/۳۶۵۶)	(۰/۳۳۹۷, ۰/۳۶۸۴)	(۰/۳۳۸۵, ۰/۳۶۷۴)	(۰/۳۳۹۲, ۰/۳۶۷۰)

حال فرض کنید اعداد همان طول لوله‌های ۱۲ متری با ضخامت ۶ سانتی‌متری هستند، اما حدود مشخصات فنی فازی اند. حد مشخصه بالایی و پایینی فازی نمایی به ترتیب $USL_E = (11/975, 0/25)$ و $LSL_E = (12/25, 0/25)$ در نظر گرفته شده‌اند. نتایج مشابه حالتی است



شکل ۶.۴: برآورد بوت استرپ شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با حد فازی خطی



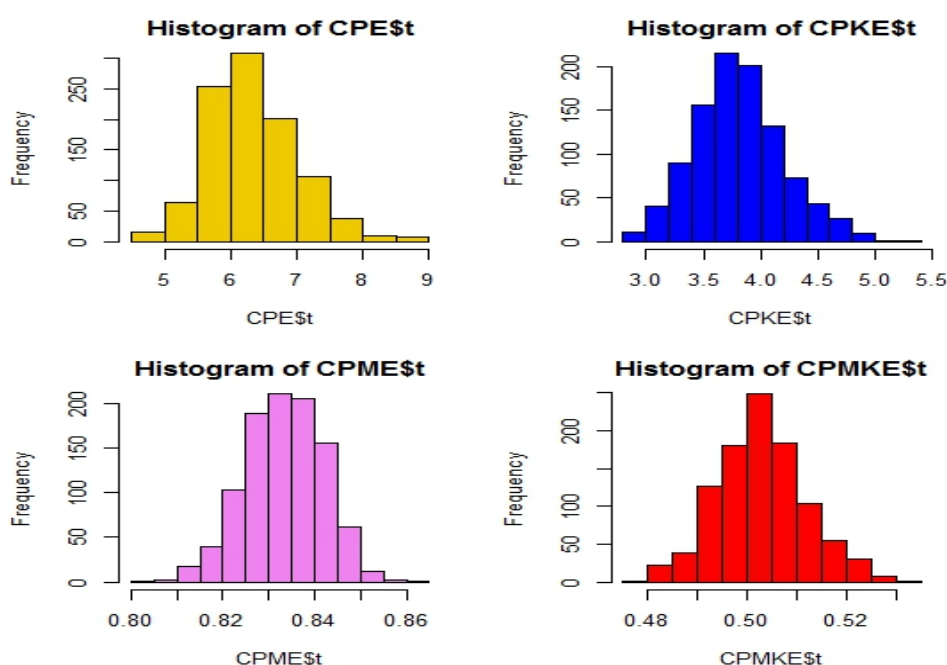
شکل ۷.۴: نمودار جعبه‌ای برآورد بوت استرپ شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با حد مشخصه فازی خطی

که حدود مشخصه فازی خطی اند، اما شاخص‌های کارایی تعمیم یافته در این حالت بزرگ‌تر از شاخص‌های کارایی تعمیم یافته در حالت حد مشخصه فازی خطی می‌باشند. با استفاده از

کد R در پیوست آ، برآورد نقطه‌ای و فواصل اطمینان بوت استرپ برای شاخص کارایی تعمیم یافته \hat{C}_{pmk} را زمانی که حدود مشخصه فازی نمایی‌اند، به دست می‌آوریم. نتایج در جدول ۸.۴ گزارش شده است.

جدول ۸.۴: فواصل اطمینان بوت استرپ ۹۵٪ برای شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با حدود مشخصه $\widetilde{USL}_E = (11/975, 0/025)$ و $\widetilde{LSL}_E = (12/05, 0/025)$

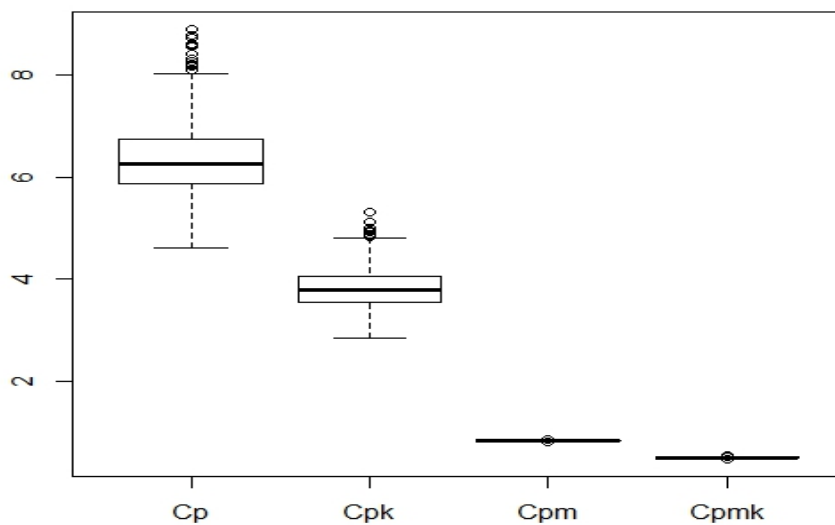
برآورد نقطه‌ای	SB	BB	PB	PTB	BCa
$\hat{C}_{\bar{p}}$	(۴/۸۲۴, ۷/۳۳۴)	(۴/۸۳۳, ۷/۱۶۲)	(۵/۲۲۶, ۷/۶۵۵)	(۴/۶۸۹۳, ۷/۴۸۵۳)	(۵/۰۲۶, ۷/۴۴۹)
$\hat{C}_{\bar{p}k}$	(۲/۹۰۷, ۴/۴۶۶)	(۲/۸۳۱, ۴/۳۹۳)	(۳/۰۸۴, ۴/۶۴۶)	(۲/۷۸۵۹, ۴/۳۶۸۳)	(۲/۹۴۱, ۴/۴۶۴)
$\hat{C}_{\bar{p}m}$	(۰/۸۱۵۷, ۰/۸۵۰۳)	(۰/۸۱۴۹, ۰/۸۵۰۲)	(۰/۸۱۶۲, ۰/۸۵۱۶)	(۰/۸۱۵۶, ۰/۸۵۰۱)	(۰/۸۱۵۴, ۰/۸۵۰۴)
$\hat{C}_{\bar{p}mk}$	(۰/۴۸۴۶, ۰/۵۲۰۰)	(۰/۴۸۳۳, ۰/۵۲۰۰)	(۰/۴۸۵۸, ۰/۵۲۲۵)	(۰/۴۸۴۱, ۰/۵۱۹۵)	(۰/۴۸۵۰, ۰/۵۲۰۵)



شکل ۸.۴: برآورد بوت استرپ شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با حد فازی نمایی

۳.۴ نتیجه گیری

همان‌طور که در جداول ۶.۴، ۷.۴ و ۸.۴ مشاهده می‌کنید فواصل اطمینان بوت استرپ تصحیح‌اریبی شتابیده نسبت پوشش کافی را فراهم می‌کنند و فواصلی دقیقتر را ارائه می‌دهند. با توجه به تعلق عدد بحرانی $1/33$ به فواصل اطمینان بوت استرپی ۹۵٪ برای شاخص‌های کارایی \hat{C}_{pk} و \hat{C}_p می‌توان فرضیه کارایی فرایند مورد نظر را برای این شاخص‌ها در سطح



شکل ۹.۴: نمودار جعبه‌ای برآورد بوت استرپ شاخص‌های کارایی تعمیر یافته با حد فازی نمایی

معنی‌داری ۵٪ پذیرفت. فواصل اطمینان جک نایف برای شاخص‌های کارایی فرایند تعمیر یافته را می‌توان برای کارهای آینده پیشنهاد کرد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

نتیجه‌گیری

شاخص‌های کارایی فرایند ابزار مؤثری برای اندازه‌گیری کیفیت و میزان کارایی فرایند هستند و در صنایع تولیدی موارد استفاده وسیعی داشته و معیاری جهت ارزیابی دقت، صحت و عملکرد فرایندهای تولیدی می‌باشند. با این حال، برخی از محدودیت‌ها همانند تعریف غیرفازی از کیفیت و تعریف دقیق از داده‌ها وجود دارند که مانع تجزیه و تحلیل عمیق و انعطاف پذیر می‌شوند. در این پژوهش، یک نسخه تعمیم یافته از چندین شاخص کارایی برای برآورد کارایی فرایند بر اساس کیفیت فازی و داده‌های فازی-مقدار نامتقارن پیشنهاد شده است. این شاخص‌های تعمیم یافته قادر به ارزیابی فرایندهای فازی توسط ترکیب برداری از اعداد فازی و دو تابع عضویت از حدود مشخصه فنی فازی هستند. اکثر ارزیابی‌ها روی شاخص‌های کارایی فرایند بر برآوردهای نقطه‌ای متمرکزاند، که ممکن است این نتیجه تخمین نامعتبری از پتانسیل فرایند باشد. بنابراین فواصل اطمینان برای شاخص‌های کارایی فرایند محاسبه شده و از آنجا که محاسبه فواصل اطمینان برای همه شاخص‌ها راحت نیست، روش فواصل اطمینان بوت استرپی برای شاخص‌های کارایی فرایند بیان شده است. پنج روش فواصل اطمینان بوت استرپ برای شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم‌یافته معرفی شده است.

پیشنهادات برای آینده تحقیق

در ادامه مباحث بیان شده در این پایان نامه موارد زیر قابل بحث می‌باشند:

- آزمون فرض برای شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم‌یافته بیان شده
- محاسبه فواصل اطمینان برای شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم‌یافته
- محاسبه فواصل اطمینان بوت استرپ شاخص‌های کارایی فرایند زمانی که اعداد فازی اند
- محاسبه فواصل اطمینان بوت استرپ شاخص‌های کارایی فرایند زمانی که کیفیت و اعداد فازی اند

- فواصل اطمینان جک نایف برای شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته
- فواصل اطمینان جک نایف بعد از بوت استرپ^۱ برای شاخص‌های کارایی فرایند تعمیم یافته

پیوست آ

دستورات برنامه نویسی در R

۱.آ دستورات برنامه نویسی در R

۱.۱. دستورات مربوط به صفحه ۱۳ به شرح ذیل است:

```
> library(qcc)
> data<- read.csv("E:/newliq.csv",header=T,sep="," ,dec=".")
> attach(data)
> my.qcc <- qcc(y, type="xbar.one", std.dev = "SD")
> process.capability(my.qcc,spec.limits=c(0.63,0.77))
```

Process Capability Analysis

Call:

```
process.capability(object = my.qcc, spec.limits = c(0.63, 0.77))
```

Number of obs = 150

Target = 0.7

Center = 0.6999

LSL = 0.63

StdDev = 0.01285

USL = 0.77

Capability indices:

	Value	2.5%	97.5%
Cp	1.816	1.610	2.022
Cp_l	1.813	1.634	1.991
Cp_u	1.820	1.641	1.999
Cp_k	1.813	1.600	2.025
Cpm	1.816	1.611	2.021

Exp<LSL 0% Obs<LSL 0%

Exp>USL 0% Obs>USL 0%

۱.۲. دستورات مربوط به مثال ۴.۴.۱ صفحه ۲۴ به شرح ذیل است:

```
> data<- read.csv("E:/crystal.csv",header=T,sep="," ,dec=".")
> x <- data$x
> USL <- 0.77
> LSL <- 0.63
> T <- 0.70
> Cpm <- function(x,i){
+   se <- sd(x[i])
+   mu <- mean(x[i])
+   (USL-LSL)/(6*sqrt(se^2+(mu-T)^2))
+ }
> library(boot)
> obj <- boot(data = x, statistic = Cpm, R = 1000)
> obj
```

ORDINARY NONPARAMETRIC BOOTSTRAP

Call:

```
boot(data = x, statistic = Cpm, R = 1000)
```

Bootstrap Statistics :

```
      original      bias      std. error
t1* 1.819275 0.01120153 0.09081367
> print(boot.ci(obj,type=c("basic","norm","perc","bca")))
```

BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS

Based on 1000 bootstrap replicates

CALL:

```
boot.ci(boot.out = obj, type = c("basic", "norm", "perc", "bca"))
```

Intervals:

Level	Normal	Basic
95%	(1.630, 1.986)	(1.626, 1.975)

Level	Percentile	BCa
95%	(1.664, 2.012)	(1.634, 1.988)

Calculations and Intervals on Original Scale

```
> boot.t.ci <-
+ function(x,B=1000,R=1000,level=0.95,statistic){
+   x <- as.matrix(x); n <- nrow(x)
+   stat <- numeric(B); se <- numeric(B)
+
+   boot.se <- function(x,R,f){
+     x <- as.matrix(x); m <- nrow(x)
+     th <- replicate(R,expr={
+       i <- sample(1:m,size=m,replace=T)
+       f(x[i, ])
+     })
+     return(sd(th))
+   }
+ }
```

```

+ for(b in 1:B){
+   j <- sample(1:n,size=n,replace=T)
+   y <- x[j, ]
+   stat[b] <- statistic(y)
+   se[b] <- boot.se(y,R=R,f=statistic)
+ }
+ stat0 <- statistic(x)
+ t.stats <- (stat-stat0)/se
+ se0 <- sd(stat)
+ alpha <- 1 - level
+ Qt <- quantile(t.stats,c(alpha/2,1-alpha/2),type=1)
+ names(Qt) <- rev(names(Qt))
+ CI <- rev(stat0 - Qt * se0)
+ }
> ci <- boot.t.ci(x,statistic=Cpm,B=1000,R=1000)
> print(ci)
      2.5%    97.5%
1.655839 1.972162

```

۱.۳. دستورات مربوط به صفحه ۶۵ به شرح ذیل است:

```

> library(qcc)
-- -- -- --
/ _ | / _ / _ | Quality Control Charts and
| ( _ | | ( _ | ( _ _ Statistical Process Control
 \ _ _ | \ _ _ \ _ _ |
   | _ |           version 2.7
Type 'citation("qcc")' for citing this R package in publications.
Warning message:
package 'qcc' was built under R version 3.4.3
> data<- read.csv("E:/data6.csv",header=T,sep="," ,dec=".")
> attach(data)
The following object is masked _by_ .GlobalEnv:

```

```
> my.qcc <- qcc(x, type="xbar.one", std.dev = "SD")
> process.capability(my.qcc,spec.limits=c(11.95,12.05))
```

Process Capability Analysis

Call:

```
process.capability(object = my.qcc, spec.limits = c(11.95, 12.05))
```

```
Number of obs = 154          Target = 12
      Center = 12.02          LSL = 11.95
      StdDev = 0.002192       USL = 12.05
```

Capability indices:

	Value	2.5%	97.5%
Cp	7.603	6.7516	8.454
Cp_l	10.055	9.1081	11.001
Cp_u	5.152	4.6653	5.638
Cp_k	5.152	4.5721	5.731
Cpm	1.024	0.8636	1.185

```
Exp<LSL 0%      Obs<LSL 0%
Exp>USL 0%      Obs>USL 0%
```

۱.۴. دستورات مربوط به صفحه ۶۶ به شرح ذیل است:

```
> data<- read.csv("E:/data6.csv",header=T,sep=" ",dec=".")
> x <- data$x
> m <- 1
> u0 <- 12.05
> u1 <- 12.025
> l0 <- 11.95
> l1 <- 11.975
> s1 <- 0.025
```

```
> su <- 0.025
> T <- 12
> se <- sd(x)
> mu <- mean(x)
> h <- (u1-l1)+((su+sl)*sqrt(pi/(4*(m+1))))
> g <- ((u1+l1)+(su-sl)*sqrt(pi/(4*(m+1))))/2
> CpkE <- (h-2*abs(mu-g))/(6*se)
> CpkE
[1] 3.738544
```

۱.۵. دستورات مربوط به صفحه ۶۷ به شرح ذیل است:

```
> data<- read.csv("E:/data6.csv",header=T,sep=" ",dec=".")
> x <- data$x
> m <- 1
> u0 <- 12.05
> u1 <- 12.025
> l0 <- 11.95
> l1 <- 11.975
> s1 <- 0.025
> su <- 0.025
> T <- 12
> se <- sd(x)
> mu <- mean(x)
> s <- runif(n=154,0,0.001)
> sd <- var(s)
> v <- var(x)
> se <- sqrt(v+sd/(m+1))
> h <- (u1-l1)+((su+sl)*sqrt(pi/(4*(m+1))))
> g <- ((u1+l1)+(su-sl)*sqrt(pi/(4*(m+1))))/2
> CpkE <- (h-2*abs(mu-g))/(6*se)
> CpkE
[1] 3.723198
```

۱.۶. دستورات مربوط به صفحه ۶۷ به شرح ذیل است:

```

> data<- read.csv("E:/data6.csv",header=T,sep="," ,dec=".")
> x <- data$x
> USL <- 12.05000
> LSL <- 11.95000
> T <- 12.00000
> Cp <- function(x,i){
+ se <- sd(x[i])
+ mu <- mean(x[i])
+ (USL-LSL)/(6*se)
+ }
> library(boot)
> obj <- boot(data = x, statistic = Cp, R = 1000)
> obj
ORDINARY NONPARAMETRIC BOOTSTRAP
Call:
boot(data = x, statistic = Cp, R = 1000)
Bootstrap Statistics :
      original      bias    std. error
t1* 7.615573 0.1535323   0.8049394
> print(boot.ci(obj,type=c("basic","norm","perc","bca")))
BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS
Based on 1000 bootstrap replicates

CALL :
boot.ci(boot.out = obj, type = c("basic", "norm", "perc", "bca"))

Intervals :
Level      Normal              Basic
95%   ( 5.884,  9.040 )   ( 5.772,  8.820 )

Level      Percentile          BCa
95%   ( 6.411,  9.459 )   ( 6.071,  9.210 )
Calculations and Intervals on Original Scale
Some BCa intervals may be unstable

```

```
> boot.t.ci <-
+ function(x,B=1000,R=1000,level=0.95,statistic){
+   x <- as.matrix(x); n <- nrow(x)
+   stat <- numeric(B); se <- numeric(B)
+   boot.se <- function(x,R,f){
+     x <- as.matrix(x); m <- nrow(x)
+     th <- replicate(R,expr={
+       i <- sample(1:m,size=m,replace=T)
+       f(x[i, ])
+     })
+     return(sd(th))
+   }
+   for(b in 1:B){
+     j <- sample(1:n,size=n,replace=T)
+     y <- x[j, ]
+     stat[b] <- statistic(y)
+     se[b] <- boot.se(y,R=R,f=statistic)
+   }
+   stat0 <- statistic(x)
+   t.stats <- (stat-stat0)/se
+   se0 <- sd(stat)
+   alpha <- 1 - level
+   Qt <- quantile(t.stats,c(alpha/2,1-alpha/2),type=1)
+   names(Qt) <- rev(names(Qt))
+   CI <- rev(stat0 - Qt * se0)
+ }
> ci <- boot.t.ci(x,statistic=Cp,B=1000,R=1000)
> print(ci)
      2.5%    97.5%
5.662029 9.099468
```

۱.۷. دستورات مربوط به صفحه ۶۸ به شرح ذیل است:

```
> data<- read.csv("E:/data6.csv",header=T,sep=" ",dec=".")
> x <- data$x
```

```

> u1 <- 12.025
> u0 <- 12.05
> l0 <- 11.95
> l1 <- 11.975
> m <- 1
> T <- 12.00000
> M <- 12.00000
> h <- ((m+1)*(u1-l1)+(u0-l0))/(m+2)
> g <- ((m+1)*(u1+l1)+(u0+l0))/(2*(m+2))
> CpkL <- function(x,i){
+ se <- sd(x[i])
+ mu <- mean(x[i])
+ (h-2*abs(mu-g))/(6*se)
+ }
> library(boot)
> CPKL <- boot(data = x, statistic = CpkL, R = 1000)
> CPKL

```

ORDINARY NONPARAMETRIC BOOTSTRAP

Call:

```
boot(data = x, statistic = CpkL, R = 1000)
```

Bootstrap Statistics :

	original	bias	std. error
t1*	2.62163	0.04625424	0.2830524

```
> print(boot.ci(CPKL,type=c("basic","norm","perc","bca")))
```

BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS

Based on 1000 bootstrap replicates

CALL :

```
boot.ci(boot.out = CPKL, type = c("basic", "norm", "perc", "bca"))
```

Intervals :

Level	Normal	Basic
95%	(2.021, 3.130)	(1.938, 3.049)

Level	Percentile	BCa
95%	(2.195, 3.305)	(2.081, 3.204)

Calculations and Intervals on Original Scale

Some BCa intervals may be unstable

```
> boot.t.ci <-  
+ function(x,B=1000,R=1000,level=0.95,statistic){  
+   x <- as.matrix(x); n <- nrow(x)  
+   stat <- numeric(B); se <- numeric(B)  
+  
+   boot.se <- function(x,R,f){  
+     x <- as.matrix(x); m <- nrow(x)  
+     th <- replicate(R,expr={  
+       i <- sample(1:m,size=m,replace=T)  
+       f(x[i, ])  
+     })  
+     return(sd(th))  
+   }  
+   for(b in 1:B){  
+     j <- sample(1:n,size=n,replace=T)  
+     y <- x[j, ]  
+     stat[b] <- statistic(y)  
+     se[b] <- boot.se(y,R=R,f=statistic)  
+   }  
+   stat0 <- statistic(x)  
+   t.stats <- (stat-stat0)/se  
+   se0 <- sd(stat)  
+   alpha <- 1 - level  
+   Qt <- quantile(t.stats,c(alpha/2,1-alpha/2),type=1)  
+   names(Qt) <- rev(names(Qt))
```



```
+ CI <- rev(stat0 - Qt * se0)
+ }
> CPKLT <- boot.t.ci(x,statistic=CpkL,B=1000,R=1000)
> CPKLT
      2.5%    97.5%
1.963094 3.139942
```

۱.۸. دستورات مربوط به صفحه ۷۰ به شرح ذیل است:

```
> data<- read.csv("E:/data6.csv",header=T,sep=" ",dec=".")
> x <- data$x
> u1 <- 12.025
> l1 <- 11.975
> s1 <- 0.025
> su <- 0.025
> m <- 1
> T <- 12.00000
> M <- 12.00000
> h <- (u1-l1)+((su+s1)*sqrt(pi/(4*(m+1))))
> g <- ((u1+l1)+(su-s1)*sqrt(pi/(4*(m+1))))/2
> CpmkE <- function(x,i){
+ se <- sd(x[i])
+ mu <- mean(x[i])
+ (h-2*abs(mu-g))/(6*sqrt(se^2+(mu-T)^2))
+ }
> library(boot)
> CPMKE <- boot(data = x, statistic = CpmkE, R = 1000)
> CPMKE
```

ORDINARY NONPARAMETRIC BOOTSTRAP

Call:

```
boot(data = x, statistic = CpmkE, R = 1000)
```

Bootstrap Statistics :

```

      original      bias      std. error
t1* 0.5029099 0.0006033845 0.009048238
> print(boot.ci(CPMKE,type=c("basic","norm","perc","bca")))
BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS
Based on 1000 bootstrap replicates

```

CALL :

```
boot.ci(boot.out = CPMKE, type = c("basic", "norm", "perc", "bca"))
```

Intervals :

Level	Normal	Basic
95%	(0.4846, 0.5200)	(0.4833, 0.5200)

Level	Percentile	BCa
95%	(0.4858, 0.5225)	(0.4850, 0.5205)

Calculations and Intervals on Original Scale

```

> boot.t.ci <-
+ function(x,B=1000,R=1000,level=0.95,statistic){
+   x <- as.matrix(x); n <- nrow(x)
+   stat <- numeric(B); se <- numeric(B)
+
+   boot.se <- function(x,R,f){
+     x <- as.matrix(x); m <- nrow(x)
+     th <- replicate(R,expr={
+       i <- sample(1:m,size=m,replace=T)
+       f(x[i, ])
+     })
+     return(sd(th))
+   }
+   for(b in 1:B){
+     j <- sample(1:n,size=n,replace=T)
+     y <- x[j, ]

```

```
+   stat[b] <- statistic(y)
+   se[b] <- boot.se(y,R=R,f=statistic)
+ }
+ stat0 <- statistic(x)
+ t.stats <- (stat-stat0)/se
+ se0 <- sd(stat)
+ alpha <- 1 - level
+ Qt <- quantile(t.stats,c(alpha/2,1-alpha/2),type=1)
+ names(Qt) <- rev(names(Qt))
+ CI <- rev(stat0 - Qt * se0)
+ }
> CPMKET <- boot.t.ci(x,statistic=CpmkE,B=1000,R=1000)
> print(CPMKET)
      2.5%      97.5%
0.4841186 0.5195065
```


مراجع

- [۱] پرچمی ع. و ماشین چی م، (۱۳۸۶)، «کیفیت فازی و نسل جدیدی از شاخص‌های کارایی»، اندیشه آماری، شماره ۱، دوره ۱۳، ص ۶۸-۷۶
- [۲] پرچمی ع. و ماشین چی م، (۱۳۸۹)، «کنترل کیفیت آماری» انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان
- [۳] پرچمی ع، (۱۳۹۴)، «آزمون‌های فرض و شاخص‌های کارایی فرایند در محیط فازی»، رساله دکتری آمار، دانشگاه فردوسی مشهد
- [۴] ربیعی م.ر، شیخی ن، پرچمی ع، (۱۳۹۶)، «فاصله اطمینان بوت استرپ شاخص‌های کارایی فرایند در محیط فازی»، ششمین کنگره مشترک سیستم‌های فازی و هوشمند ایران، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان
- [۵] طاهری س.م و ماشین چی م، (۱۳۹۲)، «مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی» انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، چاپ دوم
- [۶] طارقیان ح.ر، بزرگ‌نیا ا، (۱۳۷۶)، «کاربرد سیستم‌های کنترل کیفیت با استفاده از روش‌های آماری» انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، چاپ اول
- [۷] مونتگومری، (۱۳۷۶)، «کیفیت آماری» ترجمه دکتر رسول نورالسنا، انتشارات دانشگاه علم و صنعت
- [۸] شیخی ن، ربیعی م.ر و پرچمی ع، (۱۳۹۶)، «شاخص‌های کارایی تعمیم یافته با کیفیت فازی و اعداد فازی»، هفتمین سمینار آمار و احتمال فازی، دانشگاه بیرجند، بیرجند
- [۹] شیخی ن، ربیعی م.ر و پرچمی ع، (۱۳۹۶)، «شاخص‌های کارایی فرایند C_{pmk} و C_{pk} در محیط فازی»، دومین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین‌المللی محاسبات نرم، دانشگاه گیلان (دانشکده فنی مهندسی شرق گیلان)، رودسر
- [10] Balamurali S. and Kalyanasundaram M. (2002), "Bootstrap lower confidence limits for the process capability indices Cp, Cpk and Cpm" **International Journal of Quality & Reliability Management**, 19(8), pp 1088-1097

-
- [11] Balamurali, S. (2003), "Bootstrap confidence limits for short-run capability indices" **Quality Engineering**, 15(4), pp 643-648
- [12] Bissell A.F. (1990), "How reliable is your capability index?" **Applied Statistics**, 39, pp 331-340
- [13] Boyles R.A. (1991), "The Taguchi capability index" **Journal of Quality Technology**, 23(1), pp 107-126
- [14] Chernick M.A. (1999), "Bootstrap Methods: A Practitioner's Guide" **John Wiley**, New York
- [15] Choi K.C., Nam K.H. and Park D.H. (1996), "Estimation of capability index based on Bootstrap method" **Microelectron Reliability**, 36(9), pp 1141-1153
- [16] Chou Y. and Owen D.B. (1989), "On the distribution of the estimated process capability indices" **Communication in statistics-Theory and Method**, 18, pp 4549-4560
- [17] Chung S.H., Pearn W.L. and Yang Y.S. (2007), "A comparison of two methods for transforming non-normal manufacturing data" **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, 31, pp 956-968
- [18] Efron B. (1979), "Bootstrap methods: another look at the jackknife" **The Annals of Statistics**, 7, pp 1-26
- [19] Efron B. (1981), "Nonparametric standard error and confidence intervals (with discussion)" **Canadian Journal of Statistic**, 9, pp 139-172
- [20] Efron B. (1982), "The Jackknife, the Bootstrap and Other Resamplings Plans" **Society for Industrial and Applied Mathematics**, Philadelphia
- [21] Efron B. and Tibshirani R.J. (1993), "An Introduction to the Bootstrap", Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL
- [22] Franklin L.A. and Wasserman G. (1992), "Bootstrap lower confidence limits for capability indices" **Journal of Quality Technology**, 24(4), pp 196-240
- [23] Han J.H., Cho J.J. and Leem C.S. (2000), "Bootstrap confidence limits for Wright's Cs" **Communication in Statistics -Theory and Method** , 29, pp 485-505

- [24] Hsiang T.C. and Taguchi G. (1985), "Tutorial on quality control and assurance-The Taguchi methods" **Joint Meeting of the American Statistical Association, Las Vegas, Nevada**, pp 188-195
- [25] Juran J.M. and Gryna F.M. (1988), "**Juran, quality control handbook**", mcgrawhill, New York
- [26] Kane V. (1986), "Process capability indices" **Journal of Quality Technology**, 18, pp 41-52
- [27] Kaya I. and Kahraman C. (2011), "Process capability analyses based on fuzzy measurements and fuzzy control charts" **Expert Systems with Applications**, 38, pp 3172-3184
- [28] Lee H.T. (2001), "Cpk index estimation using fuzzy numbers" , pp 683-688
- [29] Nam K.H., Kim D.K. and Park D.H. (2001), "Large-sample interval estimators for process capability indices" **Quality Engineering**, 14(2), pp 213-221.
- [30] Parchami A. and Mashinchi M. (2010), "A new generation of process capability indices" **Journal of Applied Statistics**, 37, pp 77-89
- [31] Parchami A., Mashinchi M. and Sharayei A. (2010), "An effective approach for measuring the capability of manufacturing processes" **Production Planning & Control**, 21(3), pp 250-257
- [32] Parchami A. and Mashinchi M. (2007), "Fuzzy estimation for process capability indices" **Information Sciences**, 177, pp 1452-1462
- [33] Parchami A., Sadeghpour-Gildeh B., Nourbakhsh M. and Mashinchi M. (2014) "A new generation of process capability indices based on fuzzy measurements" **Journal of Applied Statistics**, 41, pp 1122-1136
- [34] Pearn W.L. (1992), "Distribution and inferential properties of capability indices" **Journal of Quality Technology**, 24, pp 41-52
- [35] Pearn W.L., Wu C.W. (2005), "A Bayesian approach for assessing process precision based on multiple samples" **European Journal of Operational Research**, 165 , pp 685-695
- [36] Pearn W.L., Wu C.W. and Wang K.H. (2005), "Capability measure for asymmetric tolerance non-normal processes applied to speaker manufacturing" **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, 25, pp 506-515

-
- [37] Pearn W.L. and Kotz S. (2006), "**Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices**", A Comprehensive Exposition of Quality Control Measures (Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics)
- [38] Parchami A., Sadeghpour-Gildeh B. and Mashinchi M. (2016), "Why fuzzy quality?" **International Journal for Quality Research**, 10, pp 457-470
- [39] Rizzo M.L. (2008), "**Statistical Computing with R**", Computer Science and Data Analysis Series (Chapman & Hall/CRC)
- [40] Tong L.I. and Chen J.P. (1998), "Lower confidence limits of process capability indices for non-normal processdistributions" **Internal Journal Quality & Reliability Management**, 15(8), pp 907-910
- [41] Viertl R. (2011), "Statistical Methods for Fuzzy Data" **John Wiley & Sons**, New York

Abstract

Process capability indices are used to determine whether a production process is capable of producing items within specification tolerance. they are very useful statistical tools to summarize process dispersion and location by using process capability analysis. However, there are some limitations which prevent a deep and flexible analysis such as the crisp definition of quality and precise definition of data. in this thesis, a flexible generation of PCIs is proposed which is able to measure the process capability based on fuzzy quality and fuzzy data. Therefore, introducing and considering fuzzy specification limits can minimize the number of non-conform items and so decrease the product costs. The major motivation for introducing two special kinds of linear and exponential fuzzy specification limits, and also considering two special kinds of triangular fuzzy number and normal fuzzy number, is obtaining some fast computing formulas for the estimations of the process capability indices. In this thesis several approaches to obtaining approximate confidence intervals for the PCIs in a bootstrap. the methods include "the standard normal bootstrap confidence interval, "the basic bootstrap confidence interval", "the percentile bootstrap confidence interval, "the bootstrap t confidence interval" and "the bootstrap bias corrected acceleration". A practical example is presented to show the performance of proposed indices and bootstrap confidence interval of them.

keywords: Process capability index; Fuzzy quality; triangular and normal fuzzy number; arithmetic operations; Bootstrap confidence interval.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Statistics

**Investigation of process capability indices in
fuzzy enviroment**

By: Negar Sheykhi

Supervisors

Dr. Mohamadrezam Rabie

Dr. Abbas Parchami

Jan 2018