دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

زیرفضاهای به طور همزمان $f-$پروکسیمینال و فضاهای خارج قسمتی

سیده فاطمه سیدکتولی

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

دی ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سیده فاطمه سیه‌کتولی با شماره دانشجویی۹۲۰۸۱۶۴ رشته ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی تحت عنوان **زیرفضاهای به طور همزمان f - پروکسیمینال و فضاهای خارج قسمتی** که در تاریخ ۹۶/۱۰/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با امتیاز ۱۹ درجه عالی) ☐ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر مهدی ایرانمنش	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم	-		
۳- استاد مشاور	-		
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عبدالله آل هوز	استادیار	۸.۸
۵- استاد ممتحن اول	دکتر احمد معتمد نژاد	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر الهام دسترنج	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

دانشکده ریاضی

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

خدایا جهان پادشاهی تو راست
زما خدمت آید خدایی تو راست
پناه بلندی و پستی تویی
همه نیستند آنچه هستی تویی
همه آفریدست بالا و پست
تویی آفریننده هر چه هست
تویی برترین دانش آموز پاک
ز دانش قلم رانده بر لوح خاک
خرد را تو روشن بصر کرده ای
چراغ هدایت تو بر کرده ای
نبود آفرینش تو بودی خدای
نباشد همی هم تو باشی به جای

تقدیم به

همسر عزیزم

سپاس‌گزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. اکنون برخود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی‌رسید.

ابتدا از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش که زحمت راهنمایی و مشاوره‌ی این پایان نامه را برعهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

و سپاس آخر را به مهربانترین همراه زندگیم، همسرم که در این راه مرا یاری کرد، تقدیم می‌کنم.

سیده فاطمه سیدکتولی
دی ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **سیده فاطمه سیدکتولی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **زیرفضاهای به طور همزمان f-پروکسیمینال و فضاهای خارج قسمتی** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی ایرانمنش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سیده فاطمه سیدکتولی
دی ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

نظریه بهترین تقریب همزمان در شاخه های مختلفی از ریاضیات از جمله بهینه سازی، آنالیز عددی، اقتصاد و غیره به کار برده می شود. مثال ساده این بحث یافتن نقاطی از یک مجموعه است که نسبت به نقطه ای در فضا دارای کمترین فاصله باشد.

در این پایان نامه مساله بهترین تقریب، بهترین تقریب همزمان، f-بهترین تقریب و f-بهترین تقریب همزمان در فضاهای مختلف را مورد بررسی قرار می دهیم و به دنبال شرایطی هستیم که تحت آن شرایط یک مجموعه پروکسیمینال، به طور همزمان پروکسیمینال، f-پروکسیمینال و به طور همزمان f-پروکسیمینال باشد.

ابتدا بهترین تقریب همزمان در فضاهای خارج قسمتی را معرفی می کنیم. همچنین خصوصیات بهترین تقریب همزمان و به طور همزمان چبیشف در فضاهای خارج قسمتی را بررسی می کنیم. سپس مجموع زیرفضاهای به طور همزمان پروکسیمینال را معرفی می کنیم. سپس مفهوم به طور همزمان پروکسیمینال در فضاهای باناخ را بیان می کنیم. در ادامه زیرفضاهای به طور همزمان f-پروکسیمینال و فضاهای خارج قسمتی را بررسی می کنیم. سپس مفهوم به طور همزمان f-پروکسیمینال در فضاهای باناخ را معرفی می کنیم و با استفاده از مفهوم به طور همزمان f-پروکسیمینال، به اثبات برخی نتایج در مورد به طور همزمان f-پروکسیمینال بودن مجموع دو زیرفضا در فضای باناخ می پردازیم.
علاوه براین، مفهوم f-بهترین تقریب همزمان یک مجموعه متناهی در فضاهای ضرب داخلی را معرفی می کنیم. همچنین مفهوم f-بهترین تقریب درفضاهای برداری توپولوژیکی خارج قسمتی را بررسی می کنیم.

کلمات کلیدی: بهترین تقریب، f-بهترین تقریب، بهترین تقریب همزمان، f-بهترین تقریب همزمان، پروکسیمینال، f-پروکسیمینال، به طور همزمان پروکسیمینال، به طور همزمان f-پروکسیمینال

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱. فرض کنیم X یک فضای حقیقی باشد، X را یک فضای ضرب داخلی [۱] گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in X$، یک اسکالر (عدد حقیقی) چون $\langle x, y\rangle$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$\langle\ ,\ \rangle : X \times X \longrightarrow R$$

$i)$ برای هر $x \in X$ ، $\langle x, x\rangle \geq 0$

$ii)$ برای هر $x \in X$ ، $x = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0$

iii برای هر $x, y \in X$ ، $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

$iv)$ برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in R$ ، $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

$v)$ برای هر $x, y, z \in X$ ، $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

به دوتایی $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ فضای ضرب داخلی می گوییم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد، نگاشت $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ را نرم [۲] نامیم هرگاه :

۱) برای هر $x \in X$ ، $\|x\| \geq 0$

[۱] Inner Product Space

[۲] norm

۲) برای هر $x \in X$ ، $x = \circ \iff \|x\| = \circ$

۳) برای هر $x \in X$ و $\lambda \in K$ ، $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

۴) برای هر $x, y \in X$ ، $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث)

یک فضای برداری مجهز به یک نرم، فضای خطی نرمدار نامیده می شود.

تعریف ۳.۱. اگر دنباله ای هم کران پایین و هم کران بالا داشته باشد، دنباله کراندار [۳] نامیده می شود. به عبارت دیگر:

$$\Big(S\text{کراندار} \iff \forall x \in S \ \exists\, M > \circ \ : \ \|x\| \le M \ \Big)$$

تعریف ۴.۱. دنباله $\{x_n\}$ را در فضای نرمدار $(E, \|,\|)$، به x همگرا [۴] گوییم و می نویسیم $x_n \longrightarrow x$ یا $\|x_n - x\| \longrightarrow \circ$ اگر و فقط اگر

$$\Big(\forall \varepsilon > \circ \quad \exists K \in N \ ; \ n \ge K \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x\| < \varepsilon\Big) \tag{۱.۱}$$

تعریف ۵.۱. یک فضای باناخ [۵] یک فضای برداری نرمدار کامل$(E, \|,\|)$ است. هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا به عضوی از E باشد.

دنباله (x_n) درفضای E را کوشی می نامیم، هرگاه:

$$\Big(\forall \varepsilon > \circ \quad \exists n_\circ \in N \ ; \ m, n \ge N \ \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon\Big)$$

تعریف ۶.۱. به $K \subseteq X$ بسته[۶] می گوییم اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله $x_n \longrightarrow x$ که به ازای هر $n \in N$ داشته باشیم $x_n \in K$، آنگاه نتیجه شود $x \in K$.

تعریف ۷.۱. $K \subseteq X$ فشرده [۷] است، اگر هر دنباله ای در K، زیردنباله ای همگرا به نقطه ای در K داشته باشد.

یادآوری ۸.۱. *هرفضای ضرب داخلی، نرمدار است.*

هر دنباله کرانداری، حتما همگراست.

[۳] Bounded sequence
[۴] Convergent
[۵] Banach space
[۶] Close
[۷] Compact

هر دنباله همگرایی، کوشی است.

هر دنباله کوشی، کراندار است.

$$\forall x \in X \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \|x\|^{2} = \langle x, x\rangle$$

تعریف ۹.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و $G \subseteq X$ و $x \in X$ باشد در این صورت فاصله [۸] x از مجموعه G را با $d(x,G)$ یا $dist(x,G)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(x,G) = \underset{g\in G}{inf}\ \|x-g\| \tag{۲.۱}$$

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد، در این صورت برای هر $x \in X$، فاصله x از G را به صورت زیرتعریف می کنیم :

$$d(x,G) = \underset{g\in G}{inf}\ \|x-g\|. \tag{۳.۱}$$

$g_{\circ} \in G$ یک بهترین تقریب [۹] برای $x \in X$ نامیده می شود اگر

$$\|x-g_{\circ}\| = d(x,G).$$

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد. برای هر $x \in X$، مجموعه ی تمام بهترین تقریب های x از G را با $P_G(x)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P_G(x) = \{g_{\circ} \in G : \|x-g_{\circ}\| = d(x,G)\} \tag{۴.۱}$$

ممکن است $P_G(x) = \phi$.
اما اگر به ازای هر $x \in X$، $P_G(x) \neq \phi$، (حداقل یک بهترین تقریب در G وجود داشته باشد) در این صورت G، یک زیرمجموعه پروکسیمینال [۱۰] از X نامیده می شود.
اگر برای هر $x \in X$، فقط یک بهترین تقریب در G وجود داشته باشد، در این صورت G، یک زیرمجموعه چبیشف [۱۱] از X نامیده می شود.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X و E یک مجموعه کراندار از X باشد، فاصله E از G را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(E,G) := \underset{g\in G}{inf}\ \underset{e\in E}{sup}\ \|e-g\|. \tag{۵.۱}$$

---
[۸] Distanse
[۹] Best Approximation
[۱۰] Proximinal
[۱۱] Chebyshev

عنصر $g_\circ \in G$ یک بهترین تقریب همزمان [۱۲] E از G نامیده می شود، هرگاه:

$$d(E,G) = \sup_{e\in E} \|e - g_\circ\|. \tag{۶.۱}$$

مجموعه تمامی بهترین تقریب های همزمان E از G را با $P_G(E)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P_G(E) := \{g_\circ \in G : \sup_{e\in E} \|e - g_\circ\| = d(E,G)\}. \tag{۷.۱}$$

اگر برای هر مجموعه کراندار E در X، حداقل یک بهترین تقریب همزمان E از G وجود داشته باشد، در این صورت G، یک زیر مجموعه به طور همزمان پروکسیمینال [۱۳] از X نامیده می شود.

اگر برای هر مجموعه کراندار E در X، فقط یک بهترین تقریب همزمان E از G وجود داشته باشد، در این صورت G، یک زیرمجموعه به طورهمزمان چبیشف [۱۴] از X نامیده می شود.

تذکر ۱.۱. *فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد، اگر $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک زیرمجموعه متناهی از X باشد، با توجه به تعریف ۱۲.۱ داریم:*

$$d(E,G) := \inf_{g\in G} \ max\{\|x_1 - g\|, \|x_2 - g\|, \ldots, \|x_n - g\|\}.$$

تذکر ۲.۱. *باتوجه به مفروضات تذکر ۱.۱ داریم:*
فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد. برای هر $x, y \in X$، $d(x,y,G)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(x,y,G) = \inf_{g\in G} \ max\{\|x - g\|, \|y - g\|\} \tag{۸.۱}$$

و $P_G(x,y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_G(x,y) = \{g_\circ \in G : d(x,y,G) = max\{\|x - g_\circ\|, \|y - g_\circ\|\}\}. \tag{۹.۱}$$

تعریف ۱۳.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد. برای هر $x \in X$ و تابع صعودی پیوسته $f : [\circ, \infty) \longrightarrow [\circ, \infty)$، تعریف می کنیم:

$$d_f(x,G) = \inf_{g\in G} \ (f(\|x - g\|)).$$

[۱۲] Best Simultaneously Approximation
[۱۳] Simultaneously Proximinal
[۱۴] Simultaneously Chebyshev

$g_\circ \in G$ یک f_بهترین تقریب برای هر $x \in X$ نامیده می شود، اگر

$$d_f(x, G) = f(\|x - g_\circ\|)$$

و

$$P_G^f(x) := \{g_\circ \in G : f(\|x - g_\circ\|) = d_f(x, G)\}.$$

اگر برای هر $x \in X$، حداقل یک f_بهترین تقریب در G وجود داشته باشد، در این صورت G، f_پروکسیمینال [۱۵] است.

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد. برای مجموعه متناهی $E \subseteq X$ و تابع صعودی پیوسته $f : [\circ, \infty) \longrightarrow [\circ, \infty)$، تعریف می کنیم:

$$d_f(E, G) = \inf_{g \in G} \{\sum_{e \in E} f(\|e - g\|)\}.$$

$g_\circ \in G$ یک f_بهترین تقریب همزمان E از G نامیده می شود، هرگاه:

$$d_f(E, G) = \sum_{e \in E} f(\|e - g_\circ\|)$$

و

$$P_G^f(E) := \{g_\circ \in G : \sum_{e \in E} f(\|e - g_\circ\|) = d_f(E, G)\}.$$

اگر برای هر مجموعه کراندار E در X، حداقل یک f_بهترین تقریب همزمان E از G وجود داشته باشد، در این صورت G، یک زیر مجموعه به طور همزمان f_پروکسیمینال[۱۶] در X است.

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید G یک زیرفضای بسته از یک فضای خطی نرمدار X باشد. فضای خارج قسمتی[۱۷] X/G، تمام زیرمجموعه های وابسته $x + G$ از G، که برای هر $x, y \in X$ و اسکالر دلخواه λ، در شرایط زیر صدق کند:

$$(x + G) + (y + G) = (x + y) + G$$

$$\lambda \cdot (x + G) = \lambda x + G$$

آنگاه فضای خارج قسمتی X/G، یک فضای خطی نرمدار با نرم زیر است:

$$\|x + G\| = \inf_{g \in G} \|x - g\|.$$

[۱۵] f_Proximinal

[۱۶] Simultaneously f_Proximinal

[۱۷] Quotient Space

تعریف ۱.۰.۱۶. فرض کنید X فضای برداری و N زیرفضایی ازX باشد، تابع $\pi : X \longrightarrow X/N$ با ضابطه $\pi(x) = x + N$ نگاشت خارج قسمتی نامیده می شود.

تعریف ۱.۰.۱۷. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی روی R و f یک تابع حقیقی مقدار و G یک زیرمجموعه بسته ناتهی از X و $x \in X$ باشد. عنصر $g_{\circ} \in G$، f_بهترین تقریب [18] x در G گفته می شود اگر

$$f(x - g_{\circ}) = f_G(x) = \underset{g\in G}{inf}\ \{f(x - g)\}.$$

$P_G^f(x)$ مجموعه تمام f_بهترین تقریب های x از $g_{\circ} \in G$ می باشد.

تعریف ۱.۰.۱۸. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد، گردایه τ از زیرمجموعه های X یک توپولوژی روی X نامیده می شود، اگر

۱) τ شامل مجموعه تهی (ϕ) و X باشد.

۲) τ شامل اجتماع هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه های موجود در آن شود.

۳) اشتراک هر دو عضو τ به τ تعلق داشته باشد.

تعریف ۱.۰.۱۹. فرض کنید X یک فضای برداری و $F = (R$ یا $C)$ یک میدان و τ یک توپولوژی روی X باشد، در این صورت X یک فضای برداری توپولوژیک نامیده می شود، هرگاه:

۱) هر نقطه از X یک مجوعه بسته باشد.

۲) نگاشت های $X \times X \longrightarrow X$ و $F \times X \longrightarrow X$ به ترتیب با ضابطه های $x + y$ و αx نسبت توپولوژی τ پیوسته باشد.

تعریف ۱.۰.۲۰. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. فضای همه تابعک های خطی کراندار روی X را فضای دوگان [19] X می نامیم و با X^* نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X^* = \{\Lambda : X \longrightarrow F \ \ , \ \ \Lambda \text{پیوسته است}\}.$$

تعریف ۱.۰.۲۱. فرض کنید X^* مجموعه متشکل از همه تابعک های خطی کراندار روی فضای نرمدار X باشد، تعریف می کنیم :

$$\|f\| = sup\Big\{\frac{|f(x)|}{\|x\|} \ \ : \ \ \circ \neq x \in X\Big\}$$

آنگاه $(X^*, \|, \|)$ یک فضای نرمدار است.

$X^* = B(X, F)$ نخستین فضای دوگان X است، از آنجا که $F = R$ یا $F = C$ و از طرفی می دانیم R و C فضاهایی کامل اند، لذا $X^* = B(X, F)$ یک فضای کامل (باناخ) است.

[18] f-best approximation

[19] Dual Space

تعریف ۲۲.۱. X^{**} دوگان X^* است، که مجموعه ی همه تابعک های خطی کراندار روی X^* است. X^{**} را دوگان دوم X گویند.

تعریف ۲۳.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد. X^* یک فضای نرمدار با نرم زیر است:

$$\|\Lambda\| = sup\{\ |\Lambda x| \quad : \quad \|x\| \leq ۱\}.$$

دوگان X^* را با X^{**} نمایش می دهیم.

نگاشت ϕ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi : X \longrightarrow X^{**}$$

$$\phi(x)(\Lambda) = \Lambda x \quad , \quad \Lambda \in X^* .$$

قضیه ۱.۱. *اگر X یک فضای نرمدار و $x_۰ \in X \setminus \{۰\}$ باشد، آنگاه $\Lambda \in X^*$ وجوددارد به قسمی‌که $\|\Lambda\| = ۱$ و $\Lambda x_۰ = \|x_۰\|$ باشد. بعلاوه برای هر $x \in X$ داریم:*

$$\|x\| = sup\{|\Lambda x| \quad : \quad \Lambda \in X^* \ , \ \|\Lambda\| = ۱\}.$$

برهان. نگاه کنید به [۱۲]. □

تعریف ۲۴.۱. فرض کنیم X یک فضای نرمدار و X^* دوگان X باشد. توپولوژی تولید شده بوسیله X^* روی X، یعنی ضعیف ترین (کوچکترین) توپولوژی روی X به قسمی که هر $\Lambda \in X^*$ تحت این توپولوژی پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف [۲۰] روی X می نامیم و آن را با $\delta(X, X^*)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۵.۱. اگر X یک فضای نرمدار و X^* دوگان آن باشد، آنگاه توپولوژی $\delta(X^*, \phi(X))$ یعنی کوچکترین توپولوژی روی X^* که نسبت به آن برای هر $x \in X$، $\phi(x)$ تحت این توپولوژی پیوسته باشد را با $\delta(X^*, X)$ نشان می دهیم و آن را توپولوژی ضعیف ستاره [۲۱] روی X^* می نامیم.

تعریف ۲۶.۱. ([۴]) یک دنباله $\{x_n\}$ در یک فضای ضرب داخلی X، همگرای ضعیف [۲۲] به x گفته می شود، اگر

$$\forall y \in X \quad \langle x_n, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$$

و به صورت $x_n \xrightarrow{w} x$ یا $x_n \to x$ ضعیف، نشان داده می شود.

به عبارت دیگر، $x_n \xrightarrow{w} x$ اگر و فقط اگر برای هر $x^* \in X^*$، $x^*(x_n) \to x^*(x)$.

[۲۰] Weak Topology

[۲۱] Weak-star Topology

[۲۲] Weak Convergence

تعریف ۲۷.۱. ([۱۳]) اگر ${x_n}^*$ دنباله ای از عناصر X^* باشد، گوییم ${x_n}^*$ به طور ضعیف ستاره همگرا [۲۳] به x^* است، هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم، ${x_n}^*(x) \longrightarrow x^*(x)$.

تعریف ۲۸.۱. ([۴]) یک زیر مجموعه G از یک فضای ضرب داخلی X، ضعیف بسته [۲۴] نامیده می شود، اگر $x_n \in G$ و $x_n \xrightarrow{w} x$، آنگاه $x \in G$.

تعریف ۲۹.۱. ([۳]) زیرمجموعه G درفضای نرمدار X در توپولوژی ضعیف را، فشرده یا فشرده ضعیف [۲۵] می گوییم، هرگاه هر دنباله ی $\{x_n\}$ در G، شامل زیردنباله ای باشد که در G، همگرای ضعیف به نقطه ای در G باشد.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. $A \subset X$ به طور ضعیف ستاره فشرده نامیده می شود، هرگاه هر دنباله در A دارای زیردنباله ای به طور ضعیف ستاره همگرا به نقطه ای از A باشد.

تعریف ۳۱.۱. اگر X یک فضای برداری توپولوژیک و A مجموعه ای و $\pi : X \longrightarrow A$ نگاشتی پوشا باشد، آنگاه تنها یک توپولوژی τ در A وجود دارد که در آن هر زیرمجموعه ی A مانند U در A باز باشد اگر و فقط اگر $\pi^{-1}(U)$ در X باز باشد. این توپولوژی به توپولوژی خارج قسمتی القا شده به وسیله π موسوم است.

تعریف ۳۲.۱. فضای باناخ X را انعکاسی [۲۶] گوئیم، هرگاه نگاشت $\pi : X \longrightarrow X^{**}$ تابعی پوشا از X به روی X^{**} باشد. یعنی $\pi(X) = (X^{**})$.

تعریف ۳۳.۱. یک زیرمجموعه K از فضای برداری X را محدب [۲۷] می نامیم، هرگاه برای هر دو نقطه دلخواه $x, y \in K$ و $0 \leq \lambda \leq 1$، $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

تعریف ۳۴.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار و M و N زیرفضاهای بسته از X باشند. X جمع مستقیم[۲۸] N و M نامیده می شود و به صورت $X = M \oplus N$ نشان داده می شود، اگر هر $x \in X$ نمایش یکتایی به شکل $x = m + n$ داشته باشد به قسمی که $m \in M$ و $n \in N$.

تعریف ۳۵.۱. دو فضای برداری X و Y (روی یک میدان) را یکریخت نامیم، هرگاه یک عملگر خطی یک به یک و پوشا از X به Y وجود داشته باشد.

تعریف ۳۶.۱. فرض کنیدX و Y دو فضای نرمدار باشند، X با Yبه طور ایزومتریک، یکریخت است، اگر عملگری خطی مانند $T : X \underset{\text{پوشا}}{\xrightarrow{1-1}} Y$ وجود داشته باشد که حافظ نرم باشد. یعنی:

$$\forall x \in X \quad ; \quad \|Tx\| = \|x\|.$$

[۲۳] Weak star Convergence
[۲۴] Weakly Closed
[۲۵] Weakly Compact
[۲۶] Reflexive
[۲۷] Convex
[۲۸] Direct Sum

قضیه ۲.۱ (نگاشت باز [۲۹]). *فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و $T:X\longrightarrow Y$ یک عملگر خطی پوشا و پیوسته باشد. اگر O زیرمجموعه ای باز در X باشد، آنگاه $T(O)$ در Y باز است. بعلاوه اگر T یک به یک باشد آنگاه T یک همانسانی (ایزومورفیسم) است، لذا مجموعه های باز X را به مجموعه های باز Y می برد.*

برهان. نگاه کنید به [۱۳]. □

یادآوری ۳۷.۱ (قاعده متوازی الاضلاع). *فرض کنید $(X,\langle,\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد و $x,y\in X$، در این صورت داریم:*

$$\forall x,y\in X \qquad \|x+y\|^{۲}+\|x-y\|^{۲}=۲\big(\|x\|^{۲}+\|y\|^{۲}\big).$$

یادآوری ۳۸.۱. *خاصیت مشخصه inf:*

$$inf\ A=\alpha\begin{cases}\forall x\in A\ \ x\geq\alpha\\ \forall\varepsilon>\circ\quad\exists x\in A\quad s.t\quad x<\alpha+\varepsilon\end{cases}$$

خاصیت مشخصه sup:

$$sup\ A=\alpha\begin{cases}\forall x\in A\ \ \alpha\geq x\\ \forall\varepsilon>\circ\quad\exists x\in A\quad s.t\quad \alpha<x+\varepsilon\end{cases}$$

تعریف ۳۹.۱. ([۱۱]) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، X، pـجمع [۳۰] دو زیرفضای ناتهی $X_۱$ و $X_۲$ نامیده می شود، اگر $X=X_۱\oplus X_۲$ و $X_۱\bigcap X_۲=\phi$ و برای هر $x\in X$ و $۱\leq p\leq\infty$،

$$x=x_۱+x_۲\quad \text{و}\quad \|x\|^p=\|x_۱\|^p+\|x_۲\|^p.$$

تعریف ۴۰.۱. ([۶]) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، X، fـجمع [۳۱] دو زیرفضای ناتهی $X_۱$ و $X_۲$ نامیده می شود، اگر $X=X_۱\oplus X_۲$ و $X_۱\bigcap X_۲=\phi$ و برای هر $x\in X$،

$$x=x_۱+x_۲\quad \text{و}\quad f(\|x\|)=f(\|x_۱\|)+f(\|x_۲\|).$$

اگر $f(x)=x$، می گوییم X، ۱ـجمع [۳۲] است.

تعریف ۴۱.۱ (ابرصفحه [۳۳]). ([۱]) برای $f\in X^*\backslash\{\circ\}$ و $c\in R$، ابرصفحه H در X به صورت زیر تعریف می شود:

$$H=\{y\in X; f(y)=c\}$$

و به صورت $H=\langle f,c\rangle$ نشان داده می شود.

[۲۹] Open Mapping Theorem
[۳۰] p-sum
[۳۱] f-sum
[۳۲] 1-sum
[۳۳] Hyperplane

تعریف ۴۲.۱. ([۱۰]) یک زیرمجموعه G از X، f_**فشرده** [۳۴] نامیده می شود، اگر هر دنباله در G یک f_زیردنباله همگرا در G (یعنی زیردنباله $\{g_{\alpha\beta}\}$ از $\{g_\alpha\}$ و $g_\circ \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $Lim\ f(g_{\alpha\beta} - g_\circ) = \circ$) داشته باشد.

تعریف ۴۳.۱. ([۱۰]) یک زیرفضای خطی G در X، f_**شبه چبیشف** [۳۵] نامیده می شود، اگر برای هر $x \in X$، $P_G^f(x)$ ناتهی و در X، f_فشرده باشد.

تعریف ۴۴.۱. ([۱۰]) تابع $f : X \longrightarrow R$، همگن [۳۶] نامیده می شود، اگر برای هر $\alpha \in R$ و $x \in X$، $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.
تابع f، زیرخطی [۳۷] نامیده می شود، اگر برای هر $x, y \in X$، $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

تابع f، مافوق [۳۸] نامیده می شود، اگر برای هر $x, y \in X$، $f(x + y) \leq max\{f(x), f(y)\}$.

تعریف ۴۵.۱. ([۱۰]) یک زیرمجموعه G از یک فضای توپولوژیکی X، f_**بسته** [۳۹] نامیده می شود، اگر برای هر دنباله $\{g_n\}$ از G و $x \in X$، به قسمی که $f(x - g_n) \longrightarrow \circ$، داشته باشیم $x \in G$.

تعریف ۴۶.۱. ([۱۰]) یک زیرمجموعه A از X، f_**کراندار** [۴۰] نامیده می شود اگر برای هر $a \in A$ و حداقل یک $M > \circ$ ای داشته باشیم $f(a) \leq M$.

نتیجه ۱.۱. ([۵]) *یک مجموعه ضعیف بسته کراندار، دریک فضای باناخ انعکاسی، فشرده ضعیف است. از طرف دیگر، این ویژگی فضای انعکاسی را توصیف می کند.*

نتیجه ۲.۱. ([۵]) *برای هر x در یک فضای خطی نرمدار X داریم:*

$$\|x\| = \sup_{x^* \in S^*} |x^* x|$$

که S^* کره واحد بسته در فضای X^* دوگان X است.

نتیجه ۳.۱. ([۵]) *اگر X یک فضای باناخ، $\{x_n\}$ دنباله ای از عناصر X، که همگرای ضعیف به x باشد، آنگاه دنباله ای از ترکیبات محدب از عناصر x_n همگرا به x در توپولوژیک متری است.*

نتیجه ۴.۱. ([۲]) *اگر E یک مجموعه محدب موضعی باشد، X فضای برداری توپولوژیکی مجزا روی K باشد، آنگاه هر زیرفضای خطی متناهی البعد از E، یک مکمل توپولوژیکی است.*

[۳۴] f-compact
[۳۵] f-quasi-chebyshev
[۳۶] Homogeneous
[۳۷] Sublinear
[۳۸] Ultra
[۳۹] f-closed
[۴۰] f-bounded

فصل ۲

بهترین تقریب همزمان در فضاهای خارج قسمتی

۱.۲ مقدمه

فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار و G و W زیرفضاهایی از X باشند. یک قضیه از بهترین تقریب همزمان در فضاهای خارج قسمتی را بررسی می کنیم و ادعای برابری بین زیرفضاهای W و $W+G$ و فضای خارج قسمتی W/G را بیان می کنیم.

۲.۲ به طورهمزمان پروکسیمیتی و به طور همزمان چبیشف در فضاهای خارج قسمتی

دراین بخش، خصوصیات بهترین تقریب همزمان و به طور همزمان چبیشف در فضاهای خارج قسمتی را بررسی می کنیم. برخی خصوصیات بهترین تقریب در فضاهای خارج قسمتی در [۷, ۹] آمده است. ابتدا تعریف شماره ۱۲.۱ را یادآوری می کنیم:

فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X و E یک مجموعه کراندار از X باشد، فاصله E از G را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(E,G) = \underset{g\in G}{inf}\ \underset{e\in E}{sup}\ \|e-g\|.$$

حال تعریف شماره ۱۶.۱ را یادآوری می کنیم:

فرض کنید X فضای برداری و N زیرفضایی ازX باشد، تابع $\pi : X \longrightarrow X/N$ با ضابطه $\pi(x) = x+N$ نگاشت خارج قسمتی نامیده می شود.

لم ۱.۲. *فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار و G یک زیرفضای پروکسیمینال از X باشد، آنگاه برای هرمجموعه کراندار ناتهی E در X، داریم:*

$$d(E,G) = \sup_{e\in E} \inf_{g\in G} \|e-g\|.$$

برهان. چون G پروکسیمینال است، در نتیجه برای هر $e \in E$، وجود دارد $g_\circ \in P_G(e)$ به قسمی که

$$\|e-g_\circ\| = \inf_{g\in G} \|e-g\|. \qquad (۱.۲)$$

بنابراین، باتوجه به (۱.۲) و تعریف بهترین تقریب همزمان، داریم:

$$\begin{aligned} d(E,G) &= \inf_{g\in G} \sup_{e\in E} \|e-g\| \\ &\le \sup_{e\in E} \|e-g_\circ\| \\ &\overset{(۱.۲)}{=} \sup_{e\in E} \inf_{g\in G} \|e-g\| \\ &\le \inf_{g\in G} \sup_{e\in E} \|e-g\| \qquad (\text{طبق مفهوم } \inf \text{ و } \sup) \\ &= d(E,G). \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$d(E,G) = \sup_{e\in E} \inf_{g\in G} \|e-g\|.$$

□

لم ۲.۲. *فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار و G یک زیرفضای پروکسیمینال از X باشد و فرض کنید E یک زیرمجموعه دلخواه از X باشد. آنگاه شرایط زیر با هم معادل هستند:*

۱) *E یک زیرمجموعه کراندار از X است.*

۲) *E/G یک زیرمجموعه کراندار از X/G است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲).

بدیهی است که اگر E یک زیرمجموعه کراندار از X باشد، آنگاه E/G یک زیرمجموعه کراندار از X/G است، زیرا برای هر $e \in E$ داریم:

$$\|e+G\| = \underset{g\in G}{inf}\ \|e-g\| \leq \|e-g\| \leq \|e\|.$$

.(۱) $\Longleftarrow$ (۲)

فرض کنید E/G یک زیرمجموعه کراندار از X/G باشد. آنگاه داریم:

$$\underset{e\in E}{sup}\ \|e+G\| < \infty.$$

چون G پروکسیمینال است، آنگاه برای هر $e \in E$، وجود دارد $g_\circ \in G$ به قسمی که $g_\circ \in P_G(e)$.
یعنی برای هر $e \in E$، داریم:

$$\|e-g_\circ\| = \underset{g\in G}{inf}\ \|e-g\| = \|e+G\|. \tag{۲.۲}$$

باتوجه به لم۱.۲ و رابطه (۲ . ۲) داریم:

$$\begin{aligned}\underset{e\in E}{sup}\ \|e-g_\circ\| &= \underset{e\in E}{sup}\ \underset{g\in G}{inf}\ \|e-g\| \\ &= \underset{g\in G}{inf}\ \underset{e\in E}{sup}\ \|e-g\|.\end{aligned}$$

آنگاه با توجه به خاصیت مشخصه inf، برای هر $\varepsilon > \circ$، وجود دارد $g_\varepsilon \in G$ به قسمی که

$$\underset{e\in E}{sup}\ \|e-g_\varepsilon\| \leq \underset{e\in E}{sup}\ \|e-g_\circ\| + \varepsilon.$$

بنابراین بواسطه ی رابطه (۲ . ۲) داریم:

$$\begin{aligned}\underset{e\in E}{sup}\ (\|e\| - \|g_\varepsilon\|) &\leq \underset{e\in E}{sup}\ \|e-g_\varepsilon\| \\ &\leq \underset{e\in E}{sup}\ \|e-g_\circ\| + \varepsilon \\ &= \underset{e\in E}{sup}\ \|e+G\| + \varepsilon.\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $\varepsilon > \circ$ داریم:

$$\underset{e\in E}{sup}\ \|e\| \leq \underset{e\in E}{sup}\ \|e+G\| + \|g_\varepsilon\| + \varepsilon.$$

□

لم ۳.۲. *فرض کنید G یک زیرفضای پروکسیمینال از یک فضای خطی نرمدار X و $G \subseteq W$ یک زیرفضا از X باشد. فرض کنید E یک مجموعه کراندار در X باشد. اگر $w_\circ \in P_W(E)$، آنگاه $w_\circ + G \in P_{W/G}(E/G)$.*

برهان. چون E یک مجموعه کراندار در X است، طبق لم ۲.۲، E/G یک مجموعه کراندار در X/G می باشد. فرض کنید $w_\circ \in P_W(E)$ و به برهان خلف، فرض کنید $w_\circ + G \notin P_{W/G}(E/G)$. بنابراین وجود دارد $w' \in W$ به قسمی که

$$\underset{e\in E}{sup}\ \|e - w' + G\| < \underset{e\in E}{sup}\ \|e - w_\circ + G\| \leq \underset{e\in E}{sup}\ \|e - w_\circ\| = d(E, W). \tag{۳.۲}$$

از طرف دیگر، برای هر $e \in E$ داریم:

$$\|e - w' + G\| = \underset{g\in G}{inf}\ \|e - w' - g\|.$$

در نتیجه طبق خاصیت مشخصه inf برای هر $\varepsilon > \circ$ و هر $e \in E$، وجود دارد $g_\circ \in G$ به قسمی که

$$\|e - w' - g_\circ\| \leq \|e - w' + G\| + \varepsilon. \tag{۴.۲}$$

چون $w' + g_\circ \in W$، درنتیجه داریم:

$$\begin{aligned} d(E, W) &= \underset{(w'+g_\circ)\in W}{inf}\ \underset{e\in E}{sup}\ \|e - (w' + g_\circ)\| \\ &\leq \underset{e\in E}{sup}\ \|e - (w' + g_\circ)\| \\ &\overset{(۴.۲)}{\leq} \underset{e\in E}{sup}\ \|e - w' + G\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$d(E, W) \leq \underset{e\in E}{sup}\ \|e - w' + G\|. \tag{۵.۲}$$

طبق روابط (۳.۲) و (۵.۲) داریم:

$$d(E, W) \leq \underset{e\in E}{sup}\ \|e - w' + G\| < d(E, W)$$

که این غیرممکن است. بنابراین داریم:

$$w_\circ + G \in P_{W/G}(E/G).$$

□

نتیجه ۱.۲. *فرض کنید G یک زیرفضای پروکسیمینال از یک فضای خطی نرمدار X و $G \subseteq W$ یک زیرفضااز X باشد. اگر W به طورهمزمان پروکسیمینال در X باشد، آنگاه W/G یک زیرفضای به طورهمزمان پروکسیمینال از X/G است.*

برهان. فرض کنید E یک مجموعه کراندار در X باشد، چون W به طورهمزمان پروکسیمینال در X است، آنگاه برای هر مجموعه کراندار $E \subseteq X$، وجود دارد $w_\circ \in W$، به قسمی که $w_\circ \in P_W(E)$.
بنابراین طبق لم ۳.۲ داریم:

$$w_\circ + G \in P_{W/G}(E/G).$$

بنابراین W/Gیک زیرفضای به طور همزمان پروکسیمینال از X/G است. $\square$

نتیجه ۲.۲. *فرض کنید G یک زیرفضای پروکسیمینال از یک فضای خطی نرمدار X و $G \subseteq W$ یک زیرفضا از X باشد. اگر W به طورهمزمان پروکسیمینال در X باشد، آنگاه برای هر مجموعه کراندار E در X، داریم:*

$$\pi\big(P_W(E)\big) \subseteq P_{W/G}(E/G).$$

برهان. طبق لم ۳.۲ داریم، اگر $w_\circ \in P_W(E)$، آنگاه $w_\circ + G \in P_{W/G}(E/G)$. طبق تعریف نگاشت خارج قسمتی داریم $\pi : E \longrightarrow E/G$ با ضابطه $\pi(e) = e + G$. بنابراین اگر داشته باشیم:

$$w_\circ \in P_W(E)$$

آنگاه داریم:

$$\pi(w_\circ) \in \pi(P_W(E)) \qquad (۱)$$

ازطرفی داریم $\pi(w_\circ) = w_\circ + G$ و $w_\circ + G \in P_{W/G}(E/G)$، درنتیجه داریم:

$$\pi(w_\circ) \in P_{W/G}(E/G). \qquad (۲)$$

بنابراین از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\pi(P_W(E)) \subseteq P_{W/G}(E/G).$$

$\square$

گزاره ۱.۲. *فرض کنید G یک زیرفضای پروکسیمینال از یک فضای خطی نرمدار X و $G \subseteq W$ یک زیرفضا از X باشد. اگر E یک مجموعه کراندار در X باشد به قسمی که*

$$w_\circ + G \in P_{W/G}(E/G) \quad \text{و} \quad g_\circ \in P_G(E - w_\circ) \qquad (۶.۲)$$

آنگاه داریم:

$$w_\circ + g_\circ \in P_W(E).$$

برهان. طبق لم ۱.۲ و رابطه (۲ . ۶) داریم:

$$\begin{aligned}
\sup_{e\in E} \|e - w_\circ - g_\circ\| &= \inf_{g\in G} \sup_{e\in E} \|e - w_\circ - g\| \\
&= \sup_{e\in E} \inf_{g\in G} \|e - w_\circ - g\| \\
&= \sup_{e\in E} \|e - w_\circ + G\| \\
&\leq \sup_{e\in E} \|e - w + G\| \qquad \forall w \in W \\
&\leq \sup_{e\in E} \|e - w\| \qquad \forall w \in W \\
&= d(E, W).
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{e\in E} \|e - (w_\circ + g_\circ)\| \leq \sup_{e\in E} \|e - w\| \qquad \forall w \in W.$$

چون $w_\circ + g_\circ \in W$، بنابراین $w_\circ + g_\circ$ بهترین تقریب همزمان از E در W است، درنتیجه داریم:

$$w_\circ + g_\circ \in P_W(E).$$

□

قضیه ۱.۲. *فرض کنید G یک زیرفضای پروکسیمینال از یک فضای خطی نرمدار X باشد و $G \subseteq W$ یک زیرفضای به طورهمزمان پروکسیمینال از X باشد. آنگاه برای هر مجموعه کراندار E در X، داریم:*

$$\pi\big(P_W(E)\big) = P_{W/G}(E/G).$$

برهان. طبق نتیجه ۲.۲، داریم:

$$\pi\big(P_W(E)\big) \subseteq P_{W/G}(E/G). \tag{۷.۲}$$

چون W یک زیرفضای به طورهمزمان پروکسیمینال از X است، طبق نتیجه ۱.۲، W/G به طورهمزمان پروکسیمینال در X/G است، بنابراین $P_{W/G}(E/G) \neq \phi$. حال، فرض کنید

$$w_\circ + G \in P_{W/G}(E/G) \tag{۸.۲}$$

که $w_\circ \in W$. طبق به طورهمزمان پروکسیمینالیتی G، وجود دارد $g_\circ \in G$ به قسمی که

$$g_\circ \in P_G(E - w_\circ). \tag{۹.۲}$$

آنگاه طبق روابط (۸.۲) و (۹.۲) و آنچه درگزاره ۱.۲ دیدیم، نتیجه می‌گیریم که $w_\circ + g_\circ \in P_W(E)$. بنابراین طبق تعریف نگاشت خارج قسمتی داریم:

$$\pi(w_\circ + g_\circ) = w_\circ + G \in \pi\big(P_W(E)\big). \tag{۱۰.۲}$$

درنتیجه از روابط (۸.۲) و (۱۰.۲) داریم:

$$P_{W/G}(E/G) \subseteq \pi\big(P_W(E)\big). \tag{۱۱.۲}$$

بنابراین از روابط (۷.۲) و (۱۱.۲) داریم:

$$\pi\big(P_W(E)\big) = P_{W/G}(E/G).$$

□

نتیجه ۳.۲. *فرض کنید W و G زیرفضاهایی از یک فضای خطی نرمدار X باشند. اگر G به طور همزمان پروکسیمینال در X و $G \subseteq W$ یک زیرفضا از X باشد، آنگاه شرایط زیر باهم معادل هستند:*

۱) W/G *به طور همزمان پروکسیمینال در X/G است.*

۲) $W + G$ *به طور همزمان پروکسیمینال در X است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲).

فرض کنید E یک زیر مجموعه کراندار دلخواه در X باشد. آنگاه طبق لم ۲.۲، داریم E/G یک زیرمجموعه کراندار در X/G است. چون $(W+G)/G = W/G$ و اینکه W/G به طورهمزمان پروکسیمینال در X/G و G هم به طورهمزمان پروکسیمینال در X است، در نتیجه $w_\circ + G \in (W+G)/G$ و $g_\circ \in G$ای وجود دارد به قسمی که

$$w_\circ + G \in P_{(W+G)/G}(E/G) \quad \text{و} \quad g_\circ \in P_G(E - w_\circ).$$

حال، طبق آنچه در گزاره ۱.۲ دیدیم، نتیجه می گیریم که $w_\circ + g_\circ \in P_{W+G}(E)$. درنتیجه $P_{W+G}(E) \neq \phi$، بنابراین $W + G$ به طور همزمان پروکسیمینال در X است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱).

چون $W+G$ به طور همزمان پروکسیمینال در X و $G \subseteq W+G$ و G یک زیرفضای به طورهمزمان پروکسیمینال از فضای خطی نرمدار X است، آنگاه طبق نتیجه ۱.۲، داریم $(W+G)/G = W/G$ به طور همزمان پروکسیمینال در X/G است.

□

قضیه ۲.۲. *فرض کنید W و G زیرفضاهایی از فضای خطی نرمدار X باشند. اگر G به طور همزمان چبیشف در X و $G \subseteq W$ یک زیرفضا از X باشد، آنگاه شرایط زیر با هم معادل هستند:*

۱) *W/G به طور همزمان چبیشف در X/G است.*

۲) *$W+G$ به طور همزمان چبیشف در X است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲).
طبق فرض $(W+G)/G = W/G$ به طور همزمان چبیشف در X/G است. به برهان خلف فرض کنید (۲) برقرار نباشد، آنگاه حداقل یک زیرمجموعه کراندار E از X وجود دارد به قسمی که E دارای دو بهترین تقریب همزمان در $W+G$ باشد، فرض کنید ℓ_0 و ℓ_1 در $W+G$ باشند و داشته باشیم:

$$\ell_0, \ell_1 \in P_{W+G}(E). \tag{۱۲.۲}$$

چون $G \subseteq W+G$، طبق لم ۳.۲ داریم:

$$\ell_0 + G, \ell_1 + G \in P_{(W+G)/G}(E/G) = P_{W/G}(E/G).$$

بنابراین این یک تناقض است با این فرض که W/G به طور همزمان چبیشف در X/G است. همچنین $\ell_0 + G = \ell_1 + G$. آنگاه وجود دارد $g_0 \in G \setminus \{0\}$ به قسمی که $\ell_1 = \ell_0 + g_0$.

بنابراین طبق رابطه (۲ . ۱۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\sup_{e\in E} \|(e-\ell_0) - g_0\| &= \sup_{e\in E} \|e - (\ell_0 + g_0)\| \\
&= \sup_{e\in E} \|e - \ell_1\| \\
&= \sup_{e\in E} \|e - \ell_0\| \\
&= d(E, W+G) \\
&= d(E-\ell_0, W+G) \\
&\leq d(E-\ell_0, G).
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{e\in E} \|(e-\ell_0) - g_0\| \leq d(E-\ell_0, G)$$

و

$$\sup_{e\in E} \|(e-\ell_0) - 0\| \leq d(E-\ell_0, G).$$

بنابراین داریم:

$$g_\circ \in P_G(E-\ell_\circ) \quad \text{و} \quad \circ \in P_G(E-\ell_\circ).$$

در نتیجه $g_\circ$ و $\circ$ به طور همزمان بهترین تقریب های $E-\ell_\circ$ در G هستند. بنابراین G به طور همزمان چبیشف در X نیست، که این یک تناقض است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱).

به برهان خلف فرض کنید (۱) برقرار نباشد، آنگاه حداقل یک زیرمجموعه کراندار E از X موجود است به قسمی که E/G دارای دو بهترین تقریب همزمان در W/G مانند $w+G$ و $w'+G$ است.
یعنی $w+G, w'+G \in P_{W/G}(E/G)$، بنابراین $w-w' \notin G \quad (*)$.
چون G به طور همزمان پروکسیمینال در X است، به ترتیب بهترین تقریب های همزمان g و g' از $E-w$ و $E-w'$ در G وجود دارند. یعنی:

$$g \in P_G(E-w) \quad \text{و} \quad g' \in P_G(E-w').$$

چون $G \subseteq W+G$ و

$$w+G, w'+G \in P_{W/G}(E/G) = P_{(W+G)/G}(E/G)$$

آنگاه طبق گزاره ۱.۲ داریم:

$$w+g \text{ و } w'+g' \in P_{W+G}(E).$$

اما، $W+G$ به طور همزمان چبیشف در X است. آنگاه داریم:

$$w+g = w'+g'.$$

بنابراین داریم:

$$w-w' \in G$$

که این یک تناقض با $(*)$ است.

$\square$

نتیجه ۴.۲. *فرض کنید G یک زیرفضای به طور همزمان چبیشف از فضای خطی نرمدار X باشد. اگر $G \subseteq W$ یک زیرفضا از X باشد، آنگاه شرایط زیر معادل هستند :*

۱) W به طور همزمان چبیشف در X است.

۲) W/G به طور همزمان چبیشف در X/G است.

برهان. فرض کنید W/G به طورهمزمان چبیشف در X/G باشد، طبق قضیه ۲.۲، $W+G$ به طور همزمان چبیشف در X است. چون G یک زیرفضای به طور همزمان چبیشف در X و $G \subseteq W$ یک زیرفضا از X است، بنابراین $W+G=W$ به طور همزمان چبیشف در X است.

حالت عکس هم به طور مشابه اثبات می شود. □

فصل ۳

مجموع زیرفضاهای به طورهمزمان پروکسیمینال

۱.۳ مقدمه

دراین فصل اثبات می‌کنیم اگر F و G دوزیرفضا از یک فضای باناخ X باشند، به قسمی که G انعکاسی و F به طورهمزمان پروکسیمینال باشد، آنگاه $F+G$ به طورهمزمان پروکسیمینال است، به شرط اینکه $F\cap G$ متناهی البعد و $F+G$ بسته باشد. همچنین نتایج مشابه دیگری را بدست می آوریم.

ابتدا تعریف ۱۲.۱ را یادآوری می کنیم:
فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته ازیک فضای نرمدار X و E یک زیرمجموعه کراندار از X باشد. یک نقطه $g_\circ\in G$، بهترین تقریب همزمان E از G نامیده می شود، اگر

$$d(E,G)=\underset{g\in G}{inf}\ \underset{e\in E}{sup}\ \|e-g\|=\underset{e\in E}{sup}\ \|e-g_\circ\|$$

یک زیرفضای $G\supset X$ به طورهمزمان پروکسیمینال نامیده می شود، اگر هر مجموعه کراندار $E\supset X$ دارای حداقل یک نقطه بهترین تقریب همزمان باشد.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید F یک زیر فضای به طور همزمان پروکسیمینال از فضای نرمدار X و E زیرفضایی از X باشد به طوری که $E+F$ بسته باشد. اگر $E+F$ به طور همزمان پروکسیمینال در X باشد، آنگاه $(E+F)/F$ به طور همزمان پروکسیمینال در X/F است.*

برهان. فرض کنید B یک زیرمجموعه کراندار ناتهی از X/F باشد. با توجه به لم ۲.۲، زیرمجموعه کرانداری مانند $A\subset X$ وجود دارد به قسمی که

$$B=A/F.$$

فرض کنید $a \in A$ و $\bar{a} \in A/F$ باشد. چون $E+F$ به طور همزمان پروکسیمینال در X است، وجود دارد $g_\circ \in E+F$، به قسمی که برای هر $g \in E+F$ داریم:

$$\begin{aligned} d(A, E+F) &= \inf_{g\in E+F} \sup_{a\in A} \|a-g\| \\ &= \sup_{a\in A} \|a-g_\circ\| \\ &\leq \sup_{a\in A} \|a-g\|. \end{aligned}$$

حال برای هر $g \in E+F$ داریم:

$$\begin{aligned} \sup_{a\in A} \|\bar{a}-\bar{g_\circ}\| &= \sup_{a\in A} \|\overline{a-g_\circ}\| \\ &= \sup_{a\in A} \|a-g_\circ+F\| \\ &= \sup_{a\in A} (\inf_{w\in F} \|a-g_\circ-w\|) \\ &\leq \sup_{a\in A} \|a-g_\circ\| \\ &\leq \sup_{a\in A} \|a-g\|. \end{aligned}$$

چون $E+F$ یک زیرفضا از X است، بنابراین، برای هر $g \in E+F$ و $w \in F$ ای داریم:

$$\sup_{a\in A} \|\bar{a}-\bar{g_\circ}\| \leq \sup_{a\in A} \|a-g-w\|.$$

در نتیجه داریم:

$$\sup_{a\in A} \|\bar{a}-\bar{g_\circ}\| = \sup_{a\in A} \inf_{w\in F} \|a-g_\circ-w\| \leq \sup_{a\in A} \inf_{w\in F} \|a-g-w\| = \sup_{a\in A} \|\bar{a}-\bar{g}\|.$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{a\in A} \|\bar{a}-\bar{g_\circ}\| \leq \sup_{a\in A} \|\bar{a}-\bar{g}\|.$$

بنابراین $(E+F)/F$ به طور همزمان پروکسیمینال در X/F است.

$\square$

قضیه ۲.۳. *اگر G یک زیر فضای بازتابی(انعکاسی) از یک فضای باناخ X باشد، آنگاه Gبه طور همزمان پروکسیمینال در X است.*

برهان. فرض کنید A یک زیرمجموعه کراندار از X باشد، آنگاه یک دنباله $g_k \in G$ وجود دارد به قسمی که

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{a\in A} \|a-g_k\| = d(A,G) = \inf_{g\in G} \sup_{a\in A} \|a-g\|. \quad (*)$$

بنابراین $S_k = \sup_{a\in A} \|a-g_k\|$ یک دنباله کراندار در R، که همگراست.

بنابراین وجود دارد $M_۱ > ۰$، به قسمی که برای هر $k \in N$ از اعداد صحیح مثبت، داشته باشیم:

$$\|S_k\| = \sup_{a\in A} \|a-g_k\| \leq M_۱.$$

چون A کراندار است، برای هر $a \in A$، $M_۲ > ۰$ وجود دارد به قسمی که

$$\sup_{a\in A} \|a\| \leq M_۲.$$

حال برای هر $k \in N$ داریم:

$$\begin{aligned} \|g_k\| &\leq \|g_k - a\| + \|a\| \\ &\leq \sup_{a\in A} \|g_k - a\| + \sup_{a\in A} \|a\| \\ &\leq M_۱ + M_۲ = M. \end{aligned}$$

بنابراین $\{g_k\}$، یک دنباله کراندار درG است.

چون G انعکاسی است، داریم:

$$B(۰, M) = \{g \in G : \|g\| \leq M\} \subseteq G = G^{**}.$$

بنابراین $B(۰, M)$ به طور ضعیف بسته با نرم کراندار است.

چون G انعکاسی است طبق نتیجه ۱.۱، گوی $B(۰, M)$ به طور ضعیف فشرده است، بنابراین زیردنباله (g_{kr}) از (g_k) وجود دارد به طوری که برای حداقل یک $g_۰ \in G$، $g_{kr} \xrightarrow{w} g_۰$ است.

بنابراین برای هر تابع خطی کراندار $x_i^* \in X^*$ و $\|x_i^*\| = ۱$ و $a \in A$ و تعریف همگرای ضعیف داریم:

$$\lim_{kr\to\infty} |x_i^*(g_{kr} - a)| \leq \lim_{kr\to\infty} \sup_{a\in A} |x_i^*(g_{kr} - a)|.$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{a\in A}\lim_{kr\to\infty}|x_i^*(g_{kr}-a)| \leq \lim_{kr\to\infty}\sup_{a\in A}|x_i^*(g_{kr}-a)|. \quad (**)$$

اما (g_{kr}) همگرای ضعیف به $(g_\circ)$، بنابراین داریم:

$$\lim_{kr\to\infty} x_i^*(g_{kr}-a) = \lim_{kr\to\infty} x_i^*(g_{kr}) - x_i^*(a) = x_i^*(g_\circ) - x_i^*(a) = x_i^*(g_\circ - a).$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{a\in A}|x_i^*(g_\circ - a)| &= \sup_{a\in A}\lim_{kr\to\infty}|x_i^*(g_{kr}-a)| \\ &\overset{(**)}{\leq} \lim_{kr\to\infty}\sup_{a\in A}|x_i^*(g_{kr}-a)| \\ &\leq \lim_{kr\to\infty}\sup_{a\in A}\sup_{\|x_i^*\|=1}|x_i^*(g_{kr}-a)|.\end{aligned}$$

چون طبق نتیجه ۲.۱، $\|(g_{kr}-a)\| = \sup_{\|x_i^*\|=1 \text{ و } x_i^*\in X^*}|x_i^*(g_{kr}-a)|$، داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{a\in A}|x_i^*(g_\circ - a)| &\leq \lim_{kr\to\infty}\sup_{a\in A}\|(g_{kr}-a)\| \\ &\leq \lim_{k\to\infty}\sup_{a\in A}\|(g_k - a)\| \\ &\overset{(*)}{=} d(A,G).\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از نتیجه ۲.۱، داریم:

$$\sup_{a\in A}\sup_{\|x_i^*\|=1 \text{ و } x_i^*\in X^*}|x_i^*(g_\circ - a)| = \sup_{a\in A}\|(g_\circ - a)\| \leq d(A,G). \quad (1)$$

اما

$$d(A,G) \leq \sup_{a\in A}\|(g_\circ - a)\|. \quad (2)$$

بنابراین از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$d(A,G) = \sup_{a\in A}\|(g_\circ - a)\|.$$

بنابراین G به طور همزمان پروکسیمینال در X است.

$\square$

قضیه ۳.۳. *فرض کنید E و F دو زیرفضا از فضای باناخ X باشند و E انعکاسی و F به طور همزمان پروکسیمینال باشد، به طوری‌که $E+F$ در X بسته باشد. آنگاه $(E+F)/F$ به طور همزمان پروکسیمینال در X/F است.*

برهان. چون E انعکاسی است و فضای $E\cap F$ در X بسته است و $E\cap F\subseteq E$ و چون طبق قضیه ای هر زیرمجموعه ی بسته از یک فضای انعکاسی خودش انعکاسی است، آنگاه $E\cap F$انعکاسی است. می دانیم $E/(E\cap F)$ به طور جبری یکریخت(ایزومورفیسم) است با $(E+F)/F$. حال برای نگاشت

$$T: E/(E\cap F)\longrightarrow (E+F)/F$$

تعریف شده توسط $T(x+(E\cap F))=x+F$ داریم:

$$\|T\|\leq ۱.$$

چون $E+F$ و X فضاهای باناخ هستند، آنگاه طبق قضیه نگاشت باز (قضیه ۲.۱)، $(E+F)/F$ و $E/(E\cap F)$ ایزومورفیسم (یکریخت) هستند.

بنابراین چون E انعکاسی است، پس $(E+F)/F$ انعکاسی است. از اینرو طبق قضیه ۲.۳، $(E+F)/F$ به طور همزمان پروکسیمینال در X/F است. $\square$

گزاره ۱.۳. *فرض کنید $X=X_۱\oplus X_۲$، یک pـ جمع از $X_۱$ و $X_۲$ باشد و A یک زیرمجموعه کراندار از X باشد به قسمی‌که $A=A_۱\oplus A_۲$ که $A_۱\subseteq X_۱$ و $A_۲\subseteq X_۲$. آنگاه داریم:*

$$\sup_{a\in A}\|a\|^p=\sup_{a_۱\in A_۱}\|a_۱\|^p+\sup_{a_۲\in A_۲}\|a_۲\|^p.$$

برهان. همواره می دانیم:

$$\sup_{a\in A}\|a\|^p\leq \sup_{a_۱\in A_۱}\|a_۱\|^p+\sup_{a_۲\in A_۲}\|a_۲\|^p\ .\qquad (*)$$

زیرا:

$A=A_۱\oplus A_۲$، پس برای هر $۱\leq p\leq\infty$، $A^p={A_۱}^p\oplus {A_۲}^p$. قرار می دهیم:

$$A^p:=\{\|a\|^p\quad:\quad a\in A\}$$

و

$${A_۱}^p:=\{\|a_۱\|^p\quad:\quad a_۱\in A_۱\}$$

و

$$A_2^p := \{\|a_2\|^p \quad : \quad a_2 \in A_2\}$$

بنابراین داریم:

$$\|a\|^p = \|a_1\|^p + \|a_2\|^p$$

درنتیجه داریم:

$$\|a\|^p = \|a_1 + a_2\|^p = \|a_1\|^p + \|a_2\|^p$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{a\in A} \|a\|^p \leq \sup_{a_1\in A_1} \|a_1\|^p + \sup_{a_2\in A_2} \|a_2\|^p .$$

حال ثابت می کنیم:

$$\sup_{a\in A} \|a\|^p \geq \sup_{a_1\in A_1} \|a_1\|^p + \sup_{a_2\in A_2} \|a_2\|^p .$$

فرض کنید $a \in A$، آنگاه $a = a_1 + a_2$ که $a_1 \in A_1$ و $a_2 \in A_2$. به برهان خلف فرض کنید

$$\sup_{a\in A} \|a\|^p < \sup_{a_1\in A_1} \|a_1\|^p + \sup_{a_2\in A_2} \|a_2\|^p$$

آنگاه داریم:

$$\sup_{a_1\in A_1} \|a_1\|^p + \sup_{a_2\in A_2} \|a_2\|^p - \sup_{a\in A} \|a\|^p > 0 . \qquad (3)$$

طبق خاصیت مشخصه sup، برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، $x_1 \in A_1$ و $x_2 \in A_2$ وجود دارد به قسمی که $(1) \quad \sup_{a_2\in A_2} \|a_2\|^p - \varepsilon < \|x_2\|^p$ و $(2) \quad \sup_{a_1\in A_1} \|a_1\|^p - \varepsilon < \|x_1\|^p$ بنابراین با توجه به تعریف p-جمع داریم:

$$\begin{aligned} \|x_1\|^p + \|x_2\|^p &= \|x_1 + x_2\|^p \\ &\overset{(1),(2)}{>} \sup_{a_1\in A_1} \|a_1\|^p + \sup_{a_2\in A_2} \|a_2\|^p - 2\varepsilon . \qquad (4) \end{aligned}$$

با توجه به نامساوی شماره (۳) قرار می دهیم:

$$2\varepsilon = \sup_{a_1\in A_1} \|a_1\|^p + \sup_{a_2\in A_2} \|a_2\|^p - \sup_{a\in A} \|a_1 + a_2\|^p > 0 . \qquad (5)$$

بنابراین با توجه به روابط (۴) و (۵) داریم:

$$\|x_1 + x_2\|^p > \sup_{a\in A} \|a_1 + a_2\|^p \ .$$

که تناقض با مفهوم sup دارد، بنابراین داریم:

$$\sup_{a\in A} \|a\|^p \geq \sup_{a_1\in A_1} \|a_1\|^p + \sup_{a_2\in A_2} \|a_2\|^p \ . \qquad (**)$$

بنابراین با توجه به نامساوی های $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\sup_{a\in A} \|a\|^p = \sup_{a_1\in A_1} \|a_1\|^p + \sup_{a_2\in A_2} \|a_2\|^p \ .$$

□

قضیه ۴.۳. *فرض کنید $X = X_1 \oplus X_2$، یک p_جمع از X_1 و X_2 باشد. اگر $E \subseteq X_1$ و $F \subseteq X_2$ به ترتیب به طور همزمان پروکسیمینال در X_1 و X_2 باشند، آنگاه $E \oplus F$ به طور همزمان پروکسیمینال در X است.*

برهان. فرض کنید A یک زیرمجموعه کراندار از X باشد. چون X یک p_جمع از X_1 و X_2، برای هر $a \in A$ای، وجود دارد $a_1 \in X_1$ و $a_2 \in X_2$ به قسمی که $a = a_1 + a_2$. بنابراین، اگر قرار دهیم:

$$A_1 = \{a_1 \in X_1 : a = a_1 + a_2 \in A\} \subseteq X_1$$

و

$$A_2 = \{a_2 \in X_2 : a = a_1 + a_2 \in A\} \subseteq X_2$$

آنگاه $A = A_1 \bigoplus A_2$. چون A کراندار است، بدیهی است که A_1 و A_2 مجموعه هایی کراندارند، زیرا:

$$\|a_1 + a_2\|^p = \|a_1\|^p + \|a_2\|^p \geq max\big(\|a_1\|^p, \|a_2\|^p\big).$$

از آنجا که E و F به ترتیب در X_1 و X_2 به طورهمزمان پروکسیمینال هستند، آنگاه $e_1 \in E$ و $f_1 \in F$ ای وجود دارد به طوری که برای هر $e \in E$ و $z \in F$ای داریم:

$$\sup_{a_1\in A_1} \|a_1 - e_1\|^P \leq \sup_{a_1\in A_1} \|a_1 - e\|^P \qquad (1)$$

و

$$\underset{a_۲\in A_۲}{sup}\ \|a_۲ - f_۱\|^P \leq \underset{a_۲\in A_۲}{sup}\ \|a_۲ - z\|^P. \qquad (۲)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\underset{a\in A}{sup}\ \|a-(e_۱+f_۱)\|^P &= \underset{a\in A}{sup}\ \|a_۱+a_۲-(e_۱+f_۱)\|^P\\ &= \underset{a\in A}{sup}\ \left(\|a_۱-e_۱\|^p+\|a_۲-f_۱\|^P\right).\end{aligned}$$

حال با استفاده از گزاره ۱.۳ و روابط (۱) و (۲)، برای هر $e\in E$ و $z\in F$ داریم:

$$\begin{aligned}\underset{a\in A}{sup}\ \|a-(e_۱+f_۱)\|^P &= \underset{a\in A}{sup}\ \|a_۱-e_۱\|^p+\underset{a\in A}{sup}\ \|a_۲-f_۱\|^P\\ &\overset{(۱),(۲)}{\leq} \underset{a_۱\in A_۱}{sup}\ \|a_۱-e\|^p+\underset{a_۲\in A_۲}{sup}\ \|a_۲-z\|^P\\ &= \underset{a\in A}{sup}\ \left(\|a_۱-e\|^p+\|a_۲-z\|^P\right)\\ &= \underset{a\in A}{sup}\ \|a_۱+a_۲-(e+z)\|^P.\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $e\in E$ و $z\in F$ داریم:

$$\underset{a\in A}{sup}\ \|a-(e_۱+f_۱)\|^P \leq \underset{a\in A}{sup}\ \|a-(e+z)\|^P.$$

بنابراین $e_۱+f_۱$ بهترین تقریب همزمان از $A\supseteq X$ در $E\oplus F$ است.

□

دراین بخش برخی نتایج مربوط به مجموع زیرفضاهای پروکسیمینال راثابت می کنیم.

قضیه ۵.۳ (قضیه گراف بسته [۱]). *فرض کنید T یک عملگر خطی از فضای باناخ X به فضای باناخ Y باشد، به قسمی‌که هر زمان $x_n \longrightarrow x$ در X و $Tx_n \longrightarrow y$ در Y، آنگاه $Tx=y$، آنگاه T پیوسته است.*

یادآوری ۱.۳. *تابع پیوسته، خطی و کراندار است.*

[۱] Closed Graph Theorem

قضیه ۶.۳. *فرض کنید F و G دو زیرفضا از فضای باناخ X باشند و F به طور همزمان پروکسیمینال و G انعکاسی باشد به قسمی که $F \cap G$ متناهی البعد و $F+G$ بسته باشد. آنگاه $F+G$ به طور همزمان پروکسیمینال در X است.*

برهان. اول قضیه را برای حالت $F \cap G = \{0\}$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید A یک زیرمجموعه کراندار از X باشد. آنگاه یک دنباله $\{f_k\}$ در F و $\{g_k\}$ در G وجود دارد به قسمی که

$$\sup_{a\in A} \|a-(f_k+g_k)\| \longrightarrow d(A, F+G).$$

بنابراین $S_k = \sup_{a\in A} \|a-(f_k+g_k)\|$ یک دنباله کراندار در R، که همگراست.

بنابراین $M_1 > 0$ ای وجود دارد به قسمی که $|S_k| \le M_1$. چون A کراندار است، برای هر $a \in A$ای، $M_2 > 0$ وجود دارد به قسمی که $\sup_{a\in A} \|a\| \le M_2$.

داریم:

$$\|f_k+g_k\| \le \|f_k+g_k-a\| + \|a\|.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \|f_k+g_k\| &\le \sup_{a\in A} \|f_k+g_k-a\| + \sup_{a\in A} \|a\| \\ &\le M_1 + M_2 = M. \qquad (1) \end{aligned}$$

بنابراین (f_k+g_k) یک دنباله کراندار در $F+G$.

چون عملگر $P : F+G \longrightarrow G$، با ضابطه $P(f+g) = g$ کراندار است و $P(F) = 0$، طبق قضیه گراف بسته داریم:

$$\begin{aligned} \|g_k\| &= \|P(f_k+g_k)\| \\ &\le \|P\|\|f_k+g_k\| \\ &\le \|f_k+g_k\| \overset{(1)}{\le} M. \end{aligned}$$

بنابراین g_k کراندار است و همچنین f_k کراندار است.

چون G انعکاسی است، داریم:

$$B(\circ, M) = \{g \in G : \|g\| \leq M\} \subseteq G = G^{**}.$$

بنابراین $B(\circ, M)$ به طور ضعیف بسته با نرم کراندار است.

چون G انعکاسی است، طبق نتیجه ۱.۱، گوی $B(\circ, M)$ به طور ضعیف فشرده است، بنابراین، $\{g_k\}$، یک زیردنباله به طور ضعیف همگرا $g_{kr} \to g_\circ$ برای حداقل یک $g_\circ \in G$ دارد. بنابراین با استفاده از نتیجه ۳.۱، دنباله ای به صورت ترکیب محدب

$$\hat{g}_k = \sum_{i \in I_k} \lambda_i g_i$$

وجود دارد به قسمی که $I_k = \{i : P_k < i \leq P_{k+1}\}$، P_k دنباله صعودی از اعدادصحیح، $\lambda_i \geq \circ$ و $\sum_{i \in I_k} \lambda_i = 1$، به قسمی که $\|\hat{g}_k - g_\circ\| \longrightarrow \circ$. حال فرض کنید

$$\hat{f}_k = \sum_{i \in I_k} \lambda_i f_i$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \sup_{a \in A} \|a - (\hat{f}_k + \hat{g}_k)\| &= \sup_{a \in A} \left\| \sum_{i \in I_k} \lambda_i (a - f_i - g_i) \right\| \\ &\leq \sup_{a \in A} \sum_{i \in I_k} \lambda_i \|a - f_i - g_i\| \\ &\leq \sum_{i \in I_k} \lambda_i \sup_{a \in A} \|a - f_i - g_i\|. \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{a \in A} \|a - (\hat{f}_k + \hat{g}_k)\| \leq \sum_{i \in I_k} \lambda_i \sup_{a \in A} \|a - f_i - g_i\|$$

بنابراین همواره به ازای هر $g_i \in G$ و $f_i \in F$ داریم:

$$\sup_{a \in A} \|a - (\hat{f}_k + \hat{g}_k)\| \leq \sup_{a \in A} \|a - f_i - g_i\|.$$

در نتیجه داریم:

$$\sup_{a \in A} \|a - (\hat{f}_k + \hat{g}_k)\| \leq \inf_{f_i \in F, g_i \in G} \sup_{a \in A} \|a - f_i - g_i\| = d(A, F + G).$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{a \in A} \|a - \hat{f}_k - \hat{g}_k\| \longrightarrow d(A, F + G).$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{a\in A}\|a-(\hat{f}_k+g_\circ)\| &\leq \sup_{a\in A}\left(\|a-(\hat{f}_k+\hat{g}_k)\|+\|\hat{g}_k-g_\circ\|\right)\\ &=\sup_{a\in A}\|a-(\hat{f}_k+\hat{g}_k)\|.\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{a\in A}\|a-(\hat{f}_k+g_\circ)\|\longrightarrow d(A,F+G).$$

فرض کنید $f_\circ$ یک نقطه از تقریب همزمان مجموعه $A-g_\circ$ در F باشد، آنگاه

$$\sup_{a\in A}\|a-(f_\circ+g_\circ)\|=\sup_{a\in A}\|a-f_\circ-g_\circ\|\leq\sup_{a\in A}\|a-\hat{f}_k-g_\circ\|\longrightarrow d(A,F+G)$$

و

$$d(A,F+G)\leq\sup_{a\in A}\|a-(f_\circ+g_\circ)\|.$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{a\in A}\|a-(f_\circ+g_\circ)\|=d(A,F+G).$$

بنابراین $F+G$ به طور همزمان پروکسیمینال است.

حال فرض کنیم $F\cap G\neq\{\circ\}$ باشد. بنابراین، اگر $F\cap G$ متناهی البعد باشد، با استفاده ازنتیجه ۴.۱، یک زیرفضای بسته $G_۱$ از G پیدا می‌کنیم، به قسمی که $F+G=F+G_۱$ با $F\cap G_۱=\{\circ\}$. بنابراین $F+G$ به طور همزمان پروکسیمینال است.

□

فصل ۴

زیرفضاهای به طور همزمان fـپروکسیمینال و فضاهای خارج قسمت

۱.۴ مقدمه

در این فصل مفهوم به طور همزمان fـپروکسیمینال در فضاهای باناخ را معرفی می کنیم.
ابتدا تعریف شماره ۱۲.۱ را یادآوری می کنیم:
فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضا بسته از X باشد. یک نقطه $g_\circ \in G$، بهترین تقریب همزمان مجموعه کراندار $E \subseteq X$ نامیده می شود، اگر

$$d(E,G) = \underset{g\in G}{inf}\ \underset{e\in E}{sup}\ \|e-g\| = \underset{e\in E}{sup}\ \|e-g_\circ\|.$$

یک زیر فضای $G \subseteq X$ به طور همزمان پروکسیمینال نامیده می شود، اگر هر مجموعه کراندار $E \subseteq X$ دارای یک نقطه بهترین تقریب همزمان در G باشد.
فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار نامنفی و پیوسته و صعودی تعریف شده در $[\circ, \infty)$ باشد. با استفاده ازمفهوم به طور همزمان fـپروکسیمینال در فضای باناخ X، به اثبات برخی نتایج در مورد به طور همزمان fـپروکسیمینال بودن مجموع دو زیر فضای F و G از X می پردازیم.

می دانیم مجموعه های پروکسیمینال، بسته هستند.

حال تعریف شماره ۱۴.۱ را یادآوری می کنیم:
فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد. برای مجموعه متناهی $E \subseteq X$ و تابع صعودی پیوسته $f : [\circ, \infty) \longrightarrow [\circ, \infty)$، تعریف می کنیم:

$$d_f(E,G) = \underset{g\in G}{inf}\ \{\sum_{e\in E} f(\|e-g\|)\}.$$

بدیهی است که inf لزوما اخذ نمی شود، اما اگر اخذ شود، می گوییم:
G به طور همزمان f_پروکسیمینال در X است.
بدیهی است که اگر کاردینالیتی E برابر ۱ باشد و $f(x) = x$، آنگاه این مفهوم همان مفهوم پروکسیمینال در تعریف ۱۰.۱ خواهد بود، یعنی می گوییم G در X پروکسیمینال است.

۲.۴ به طور همزمان f_پروکسیمینالیتی در جمع دو زیرفضا

دراین بخش به بیان برخی نتایج مربوط به f_پروکسیمینالیتی از مجموع دو زیرفضا می پردازیم.

گزاره ۱.۴. *به ازای هر دو مجموعه A و B از اعداد حقیقی مثبت داریم:*

$$infA + infB = inf(A\oplus B) \tag{۱.۴}$$

که درآن

$$(A\oplus B) = \{a+b : a\in A, b\in B\}.$$

برهان. می دانیم

$$infA + infB \leq inf(A\oplus B). \qquad (*)$$

حال ثابت می کنیم:

$$infA + infB \geq inf(A\oplus B).$$

برای نابرابری معکوس فرض کنید(فرض خلف)

$$infA + infB < inf(A\oplus B). \qquad (۱)$$

آنگاه طبق خاصیت مشخصه inf، برای هر $\varepsilon > ۰$ داده شده، $a\in A$ و $b\in B$ وجود دارد، به طوری که (۲) $\quad ۰ < a < infA + \varepsilon$ و (۳) $\quad ۰ < b < infB + \varepsilon$.

بنابراین با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$۰ < inf(A\oplus B) - infA - infB. \qquad (۴)$$

بنابراین با توجه به نامساوی (۴) قرار می دهیم:

$$۲\varepsilon < inf(A\oplus B) - infA - infB. \qquad (۵)$$

بنابراین از روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\begin{aligned} 0 &< a+b < infA + infB + 2\varepsilon \\ &\overset{(5)}{<} infA + infB + inf(A \oplus B) - infA - infB \\ &= inf(A \oplus B) \end{aligned}$$

که این یک تناقض است. بنابراین داریم:

$$infA + infB \geq inf(A \oplus B). \qquad (**)$$

بنابراین از روابط $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$.infA + infB = inf(A \oplus B).$$

□

قضیه ۱.۴. *فرض کنید F یک زیر فضای به طور همزمان fـ پروکسیمینال از فضای باناخ X و E زیرفضایی از X باشد به طوری که $E+F$ بسته باشد. آنگاه گزاره های زیرمعادل هستند:*

۱) $E+F$ *به طور همزمان fـ پروکسیمینال در X است.*

۲) $(E+F)/F$ *به طور همزمان fـ پروکسیمینال در X/F است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲).

فرض کنید $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \in X/F$ باشد. از آنجا که $E+F$ به طور همزمان fـپروکسیمینال در X است، آنگاه (طبق تعریف به طور همزمان fـپروکسیمینال) $y \in E+F$ ای وجود دارد، به طوری که برای هر
$z \in E+F$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - y\|) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - z\|). \qquad (*)$$

علاوه بر این داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) &= \sum_{i=1}^{n} f(\|\overline{x_i - y}\|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - y + F\|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\inf_{h\in F} \|x_i - y - h\|) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - y\|) \qquad (\text{چون } f \text{ صعودی}) \\
&\overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - z\|)
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $z \in E+F$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - z\|).$$

اما $E+F$ یک زیرفضا از X است، بنابراین برای هر $z \in E+F$ و هر $w \in F$ ای داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) &= \sum_{i=1}^{n} f(\|\overline{x_i - y}\|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - y + F\|) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - z + F\|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\inf_{\ell\in F} \|x_i - z - \ell\|) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} f(\inf_{w\in F} \|x_i - z - w\|) \qquad \forall w \in F \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\|(x_i - z) + F\|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\|\overline{(x_i - z)}\|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{z}\|).
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $\bar{z} \in (E+F)/F$، داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{z}\|).$$

بنابراین $(E+F)/F$ به طور همزمان f_پروکسیمینال در X/F است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱).

فرض کنید $(E+F)/F$ به طور همزمان f_پروکسیمینال در X/F باشد و $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ و $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \in X/F$.
(طبق تعریف به طور همزمان f_پروکسیمینال) فرض کنید $\bar{y} \in (E+F)/F$ ای وجود دارد به قسمی که برای هر $\bar{z} \in (E+F)/F$، داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) &\leq \sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{z}\|) \qquad (1)\\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\|\overline{x_i - z}\|)\\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - z + F\|)\\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\inf_{g\in F} \|x_i - z - g\|)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - z\|) \qquad (**)
\end{aligned}$$

اما

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) &= \sum_{i=1}^{n} f(\|\overline{x_i - y}\|)\\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - y + F\|)\\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\inf_{w\in F} \{\|x_i - y - w\|\}).
\end{aligned}$$

با استفاده از گزاره ۱.۴ و اینکه f صعودی است، نتیجه می گیریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i - \bar{y}\|) = \inf_{w\in F} \{\sum_{i=1}^{n} f\|x_i - y - w\|\}.$$

از آنجا که F به طور همزمان f_پروکسیمینال است، وجود دارد $w_0 \in F$ای، به طوری که برای هر $z \in (E+F)$، داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\|\bar{x}_i-\bar{y}\|) &= \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i-y+F\|)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\inf_{w\in F} \|x_i-y-w\|)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i-y-w_0\|)\\ &\overset{(**)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i-z\|).\end{aligned}$$

چون $y+w_0 \in (E+F)$، پس برای هر $z\in(E+F)$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|x_i-(y+w_0)\|) \leq \sum_{i=1}^{n}(\|x_i-z\|).$$

بنابراین $(E+F)$ به طور همزمان fـ پروکسیمینال در X است.

□

قضیه ۲.۴ (باناخ-آلاغلو [1]). *اگر X یک فضای نرمدار باشد، آنگاه گوی X^* به طور ضعیف ستاره فشرده است.*

برهان. نگاه کنید به [۳]. □

قضیه ۳.۴. *فرض کنید X یک فضای باناخ و G یک زیر فضای بازتابی(انعکاسی) از X باشد، آنگاه Gبه طور همزمان fـ پروکسیمینال درX است.*

برهان. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. طبق تعریف فاصله، یک دنباله $g_k\in G$ وجود دارد به قسمی که

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\|x_i-g_k\|) = d_f(x_1,x_2,\ldots,x_n,G) = \inf_{g\in G}\ \{\sum_{i=1}^{n} f(\|x_i-g\|)\}. \quad (*)$$

بنابراین $S_k=\sum_{i=1}^{n} f(\|x_i-g_k\|)$ یک دنباله کراندار در R، که همگراست.
بنابراین $M>0$ ای وجود دارد، به قسمی که $|S_k|\leq M$. اما داریم:

[1] Banach-Aloglue Theorem

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|g_k\|) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - g_k\|) + \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i\|)$$

این بدین معنی است که :

$$n.f(\|g_k\|) \leq M + \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i\|)$$

بنابراین داریم:

$$\|g_k\| \leq f^{-1}(\frac{1}{n}(M + \sum_{i=1}^{n} f\|x_i\|)).$$

بنابراین g_k یک دنباله کراندار در G است. پس λ ای وجود دارد، به طوری که برای هر kای، $\|g_k\| \leq \lambda$ باشد.
اما G انعکاسی است، بنابراین داریم:

$$B(0, \lambda) = \{g \in G : \|g\| \leq \lambda\} \subseteq G = G^{**}.$$

بنابراین $B(0, \lambda)$، به طور ضعیف ستاره بسته با نرم کراندار است.
طبق قضیه باناخ-آلاغلو، $B(0, \lambda)$، به طور ضعیف ستاره فشرده است، بنابراین زیردنباله g_{kr} از g_k وجود دارد به طوری که برای حداقل یک $g_0 \in G$، $g_{kr} \xrightarrow{w} g_0$ است.
بنابراین برای هر $x_i^* \in X^*$ و $\|x_i^*\| = 1$ و $1 \leq i \leq n$ و تعریف همگرای ضعیف داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(|x_i^*(g_0 - x_i)|) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(|x_i^*(g_{kr} - x_i)|).$$

اما

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(|x_i^*(g_{kr} - x_i)|) &\leq \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\sup_{x_i^* \in X^*} |x_i^*(g_{kr} - x_i)|) \\ &\overset{\text{قضیه } 1.1}{=} \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - g_{kr}\|) \\ &= \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - g_k\|) \\ &\overset{(*)}{=} d_f(x_1, x_2, \ldots, x_n, G). \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $x_i^* \in X^*$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(|x_i^*(g_0 - x_i)|) \leq d_f(x_1, x_2, \ldots, x_n, G).$$

چون برای هر $x_i^* \in X^*$ برقرار است، پس برای sup آن برقرار است. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\sup_{x_i^* \in X^*} |x_i^*(g_0 - x_i)|) \leq d_f(x_1, x_2, \ldots, x_n, G)$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - g_0\|) \leq d_f(x_1, x_2, \ldots, x_n, G). \qquad (1)$$

چون

$$d_f(x_1, x_2, \ldots, x_n, G) = \inf_{g \in G} \{\sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - g\|)\} \leq \sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - g_0\|). \qquad (2)$$

بنابراین از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\|x_i - g_0\|) = d_f(x_1, x_2, \ldots, x_n, G).$$

بنابراین G به طور همزمان f_پروکسیمینال در X است. □

قضیه ۴.۴. *فرض کنید E و F دو زیرفضا از X باشند و E انعکاسی و F به طور همزمان f_پروکسیمینال باشد، به طوری که $E+F$ در X بسته باشد، آنگاه $E+F$ به طور همزمان f_پروکسیمینال در X است.*

برهان. فضای $E \cap F$ در X بسته است از آنجا که E انعکاسی است و $E \cap F \subseteq E$ و چون طبق قضیه ای هر زیرمجموعه ی بسته ای از یک فضای انعکاسی خودش انعکاسی است، آنگاه $E \cap F$ انعکاسی است.
می دانیم $E/(E \cap F)$ به طور جبری یکریخت(ایزومورفیسم) است با $(E+F)/F$. حال برای نگاشت

$$T : E/(E \cap F) \longrightarrow (E+F)/F$$

تعریف شده توسط $T(x + (E \cap F)) = x + F$، داریم:

$$\|T\| \leq 1.$$

اگر $E+F$ و X فضاهای باناخ باشند، آنگاه توسط قضیه نگاشت باز (قضیه ۲.۱)، $(E+F)/F$ و $E/(E\cap F)$ یکریخت هستند.
بنابراین چون E انعکاسی است، پس $(E+F)/F$ انعکاسی است. از این رو طبق قضیه ۳.۴، $(E+F)/F$ به طور همزمان f ـ پروکسیمینال در X/F است. بنابراین با توجه به قضیه ۱.۴، $E+F$ به طور همزمان f ـ پروکسیمینال در X است. $\square$

۳.۴ به طور همزمان f_پروکسیمینالیتی در f_جمع دو زیرفضا

دراین بخش برخی نتایج مربوط به مجموع زیرفضاهای f_پروکسیمینال در فضاهای خاص باناخ را ثابت می کنیم.

قضیه ۵.۴. *فرض کنید $X=X_۱\oplus X_۲$، یک fـ جمع از $X_۱$ و $X_۲$ باشد. اگر $E\subseteq X_۱$ و $F\subseteq X_۲$ به ترتیب به طور همزمان f ـ پروکسیمینال در $X_۱$ و $X_۲$ باشند، آنگاه $E\oplus F$ به طور همزمان f ـ پروکسیمینال در X است.*

برهان. فرض کنید $x_۱,x_۲,\dots,x_n\in X=X_۱\oplus X_۲$. آنگاه برای هر $۱\leqslant i\leqslant n$، $x_i=a_i+b_i$ که $a_i\in X_۱$ و $b_i\in X_۲$.
از آنجا که E و F به ترتیب به طورهمزمان f_پروکسیمینال در $X_۱$ و $X_۲$ هستند، وجود دارد $e_۱\in E$ و $f_۱\in F$، به طوری که برای هر $e\in E$ و $z\in F$ای، داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\|a_i-e_۱\|)\leq\sum_{i=۱}^{n} f(\|a_i-e\|) \qquad (۱)$$

و

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\|b_i-f_۱\|)\leq\sum_{i=۱}^{n} f(\|b_i-z\|). \qquad (۲)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n} f(\|x_i-(e_۱+f_۱)\|) &= \sum_{i=۱}^{n} f(\|a_i+b_i-e_۱-f_۱\|)\\ &= \sum_{i=۱}^{n} f(\|a_i-e_۱+b_i-f_۱\|)\\ &= \sum_{i=۱}^{n} f(\|a_i-e_۱\|)+\sum_{i=۱}^{n} f(\|b_i-f_۱\|) && (\text{یک } f\text{_جمع } X)\\ &\leq \sum_{i=۱}^{n} f(\|a_i-e\|)+\sum_{i=۱}^{n} f(\|b_i-z\|) && (\text{از (۱) و (۲)})\\ &= \sum_{i=۱}^{n} f(\|a_i+b_i-(e+z)\|). && (\text{طبق تعریف } f\text{_جمع})\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $e \in E$ و $z \in F$ای، داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\|x_i - (e_۱ + f_۱)\|) \leq \sum_{i=۱}^{n} f(\|x_i - (e + z)\|).$$

بنابراین، $e_۱ + f_۱$، f-بهترین تقریب همزمان در $E \oplus F$ است.

□

فصل ۵

یافتن fـبهترین تقریب همزمان یک مجموعه متناهی در فضاهای ضرب داخلی

۱.۵ مقدمه

دراین فصل به دنبال روشی هستیم تا برای n نقطه دلخواه در مجموعه های محدب، fـبهترین تقریب همزمان را بدست آوریم.
اول یک ابرصفحه مخصوص را که پایه ای روی n نقطه دارد پیدا می‌کنیم. آنگاه با این ابرصفحه بدست آمده، fـبهترین تقریب از هر نقطه را تعریف کرده و به هدفمان می رسیم.

فرض کنید X فضای ضرب داخلی حقیقی و G زیرمجموعه ای ناتهی از X و f یک تابع حقیقی مقدار نامنفی و صعودی و پیوسته در $[0,\infty)$ باشد.
ابتدا تعریف ۱۴.۱ را یادآوری می کنیم :
فرض‌کنید X یک فضای باناخ و G یک زیرفضای بسته از X باشد و E یک مجموعه متناهی و ناتهی در X و $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ تابع صعودی پیوسته باشد، تعریف می کنیم :

$$d_f(E,G)=\inf_{g\in G}\{\sum_{e\in E}f(\|e-g\|)\}$$

و

$$P_G^f(E):=\{g_0\in G:\sum_{e\in E}f(\|e-g_0\|)=d_f(E,G)\}.$$

اگر کاردینالیتی E برابر ۱ باشد، آنگاه داریم:

$$d_f(e,G)=\inf_{g\in G}(f(\|e-g\|))$$

و

$$P_G^f(e) := \{g_\circ \in G : f(\|e - g_\circ\|) = d_f(e, G)\}.$$

بنابراین G، f_پروکسیمینال است.

۲.۵ f_بهترین تقریب همزمان در مجموعه های محدب

در این بخش:

$$E = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$$

و

$$i = ۱, ۲, \ldots, n \quad \text{و} \quad k = ۱, ۲, \ldots, n \quad (k \neq i)$$

در نظر می گیریم و تعریف می کنیم:

$$W_i := \{w \in G; \ \ \max_{x_k \in E} \ d(w, x_k) = d(w, x_i)\} \tag{۱.۵}$$

$$f_{ik}(y) := \langle y, x_i - x_k \rangle \qquad \forall y \in X \tag{۲.۵}$$

$$c_{ik} := \frac{\|x_i\|^۲ - \|x_k\|^۲}{۲} \tag{۳.۵}$$

$$V_{ik} := \{v \in G; f_{ik}(v) \leq c_{ik}\} \tag{۴.۵}$$

$$H_{ik} := \{v \in G; f_{ik}(v) = c_{ik}\}. \tag{۵.۵}$$

لم ۱.۵. *فرض کنید $x_i, x_k \in E$، به قسمی که $(k \neq i)$ $\quad k = ۱, ۲, \ldots, n$ و $i = ۱, ۲, \ldots, n$ و ابرصفحه $H = \{y \in X; f_{ik}(y) = c_{ik}\}$، آنگاه داریم:*

$$d_f(x_i, H) = d_f(x_k, H).$$

برهان. $y \in H$ داده شده است، بنابراین طبق تعریف H، داریم:

$$f_{ik}(y) = \langle y, x_i - x_k \rangle = c_{ik}$$

$$\langle y, x_i \rangle - \langle y, x_k \rangle = \frac{\|x_i\|^۲ - \|x_k\|^۲}{۲}$$

$$\|x_k\|^۲ - ۲\langle y, x_k \rangle = \|x_i\|^۲ - ۲\langle y, x_i \rangle$$

بنابراین با اضافه کردن $\|y\|^۲$ به تساوی بالا داریم:

$$\|y\|^۲ + \|x_k\|^۲ - ۲\langle y, x_k \rangle = \|y\|^۲ + \|x_i\|^۲ - ۲\langle y, x_i \rangle$$

$$\langle x_k - y, x_k - y \rangle = \langle x_i - y, x_i - y \rangle$$

بنابراین داریم:

$$\|x_k - y\|^۲ = \|x_i - y\|^۲$$

چون f صعودی است، داریم:

$$\inf_{y \in H} \{f(\|x_k - y\|)\} = \inf_{y \in H} \{f(\|x_i - y\|)\}.$$

بنابراین داریم:

$$d_f(x_k, H) = d_f(x_i, H).$$

□

یادآوری ۱.۵. *طبق تعریف W_i در رابطه شماره (۵ ۰ ۱)، بدیهی است که $G \subseteq \underset{i}{\cup} W_i$. حال نشان می دهیم $G \subseteq \underset{i}{\cup} W_i$.*
فرض کنید $w \in G$، بنابراین iای متعلق به $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ وجود دارد که $d(w, x_i) \geq d(w, x_k)$ برای هر $k \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ (برای $i \neq k$)
یعنی $d(w, x_i) = \max_{x_k \in E} d(w, x_k)$، بنابراین با نگاهی به رابطه شماره (۵ ۰ ۱)، دیده می شود که $w \in W_i$، پس $w \in \underset{i}{\cup} W_i$، یعنی $G \subseteq \underset{i}{\cup} W_i$، بنابراین $G = \underset{i}{\cup} W_i$.

قضیه ۱.۵. *فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی و G زیرمجموعه ای ناتهی از X باشد، داریم:*

۱) $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ $W_i = \bigcap_{k=۱, k\neq i}^{n} V_{ik}$.

۲) *اگر G یک زیرمجموعه محدب از X باشد، آنگاه W_i یک مجوعه محدب است.*

۳) *اگر G یک مجموعه بسته باشد، آنگاه W_i یک مجموعه بسته است.*

برهان. ۱) فرض کنید $v \in \bigcap_{k=۱, k\neq i}^{n} V_{ik}$. بنابراین $v \in V_{ik}$ به ازای هر $k = ۱, ۲, \ldots, n \quad (k \neq i)$ و همچنین طبق تعریف V_{ik}، $f_{ik}(v) \leq c_{ik}$، آنگاه داریم :

$$\langle v, x_i - x_k \rangle \leq \frac{\|x_i\|^۲ - \|x_k\|^۲}{۲}$$

$$۲\langle v, x_i \rangle - ۲\langle v, x_k \rangle \leq \|x_i\|^۲ - \|x_k\|^۲$$

$$\|x_k\|^۲ - ۲\langle v, x_k \rangle \leq \|x_i\|^۲ - ۲\langle v, x_i \rangle$$

با اضافه کردن $\|v\|^۲$ به تساوی بالا داریم :

$$\|v\|^۲ + \|x_k\|^۲ - ۲\langle v, x_k \rangle \leq \|v\|^۲ + \|x_i\|^۲ - ۲\langle v, x_i \rangle$$

$$\langle x_k - v, x_k - v \rangle \leq \langle x_i - v, x_i - v \rangle$$

بنابراین داریم:

$$\|x_k - v\|^۲ \leq \|x_i - v\|^۲$$

بنابراین داریم:

$$d(x_k, v) \leq d(x_i, v) \qquad \forall k = ۱, ۲, \ldots, n \quad (k \neq i)$$

بنابراین طبق تعریف W_i در رابطه شماره (۱۰۵)، داریم:

$$v \in W_i$$

بنابراین داریم:

$$\bigcap_{k=1,k\neq i}^{n} V_{ik} \subseteq W_i \ . \qquad (1)$$

چون تمام مراحل قبلی برگشت پذیرند، بنابراین طبق تعریف W_i در رابطه شماره (۵.۱)، برای هر $w \in W_i$ در یک i ثابت داریم $d(w,x_i) = \sup_{x_k \in E} d(w,x_k)$، آنگاه داریم:

$$\|x_k - w\|^2 \leq \|x_i - w\|^2 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\|w\|^2 + \|x_k\|^2 - 2\langle w, x_k\rangle \leq \|w\|^2 + \|x_i\|^2 - 2\langle w, x_i\rangle$$

$$\langle w, x_i\rangle - \langle w, x_k\rangle \leq \frac{\|x_i\|^2 - \|x_k\|^2}{2}$$

بنابراین داریم:

$$f_{ik}(w) \leq c_{ik} \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n \quad (k \neq i)$$

بنابراین طبق تعریف V_{ik} در رابطه شماره (۵.۴)، داریم:

$$w \in V_{ik} \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n \quad (k \neq i)$$

بنابراین داریم:

$$w \in \bigcap_{k=1,k\neq i}^{n} V_{ik}$$

پس برای هر $w \in W_i$ داریم:

$$W_i \subseteq \bigcap_{k=1,k\neq i}^{n} V_{ik}. \qquad (2)$$

بنابراین از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$W_i = \bigcap_{k=1,k\neq i}^{n} V_{ik} \ .$$

۲) اول ثابت می‌کنیم V_{ik} برای هر i,k $(k \neq i)$ یک مجموعه محدب است. بنابراین فرض می‌کنیم $y_1, y_2 \in V_{ik}$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ و مجموعه

$$y := \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \ .$$

چون f تابعی صعودی است، داریم :

$$\begin{aligned} f(y) &= \lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2) \\ &\le \lambda c_{ik} + (1-\lambda) c_{ik} = c_{ik} \ . \end{aligned}$$

بنابراین طبق تعریف V_{ik}، $y \in V_{ik}$. آنگاه V_{ik} مجموعه ای محدب است و چون اشتراک هر مجموعه محدب، محدب است و $W_i = \bigcap_{k=1, k\neq i}^{n} V_{ik}$، بنابراین W_i یک مجموعه محدب است.

۳) می دانیم

$$W_i = \bigcap_{k=1, k\neq i}^{n} V_{ik}.$$

از طرفی f تابعی پیوسته است و طبق رابطه شماره (۴۰۵) داریم:

$$V_{ik} = f^{-1}[c_{ik}, +\infty) \cap G.$$

بنابراین V_{ik} یک مجموعه بسته است و چون اشتراک هر مجموعه بسته، بسته است، بنابراین W_i یک مجموعه بسته است.

□

۳.۵ الگوریتم

قضیه ای بیان می کنیم به قسمی که، f-بهترین تقریب همزمان یک مجموعه متناهی E از G را بدست آورد. کافی است، f-بهترین تقریب همزمان برای هر x_i در W_i یعنی $P^f_{W_i}(x_i)$ را بدست آوریم.

بنابراین، $P^f_{W_i}(x_i)$ به اصطلاح f-بهترین تقریب همزمان از E در G، اگر $d_f\big(x_i, P^f_{W_i}(x_i)\big)$، حداقل باشد.

قضیه ۲.۵. *اگر G یک زیرمجموعه محدب از X و E یک مجموعه متناهی در X باشد و برای هر i که، $i = 1, 2, \ldots, n$، $P^f_{W_i}(x_i)$ موجود باشد، آنگاه:*

$$d_f(E, G) = \inf_i \ d_f\big(P^f_{W_i}(x_i), x_i\big) = \inf_i \ d_f\big(W_i, x_i\big).$$

برهان. باتوجه به تعریف f_بهترین تقریب همزمان و یادآوری ۱.۵ داریم:

$$d_f(E,G) = \underset{w\in G}{inf}\ \{\sum_{x_j\in E} f(\|x_j - w\|)\ \}$$
$$= \underset{i}{inf}\ \underset{w\in W_i}{inf}\ \{\sum_{x_j\in E} f(\|x_j - w\|)\ \}.$$

طبق تعریف W_i در رابطه شماره (۱۰۵)، داریم:

$$\sum_{x_j\in E} f(\|x_j - w\|) = \ f(\|x_i - w\|).$$

بنابراین داریم:

$$d_f(E,G) = \underset{i}{inf}\ \underset{w\in W_i}{inf}\ \ \{f(\|x_i - w\|)\ \}$$
$$= \underset{i}{inf}\ \ d_f\big(W_i, x_i\big).$$

چون وجود دارد

$$P^f_{W_i}(x_i) \in W_i$$

بنابراین داریم:

$$d_f(E,G) = \underset{i}{inf}\ \ d_f\big(P^f_{W_i}(x_i), x_i\big).$$

□

نتیجه ۱.۵. *با فرض از قضیه قبلی، i ای وجود دارد، به قسمی‌که $P^f_{W_i}(x_i)$، f_بهترین تقریب همزمان از E در G است.*

برهان. با توجه به قضیه قبلی، iای متعلق به $\{1, 2, \ldots, n\}$ وجود دارد، به قسمی که

$$d_f(E,G) = d_f\big(P^f_{W_i}(x_i), x_i\big).$$

بنابراین طبق تعریف W_i در رابطه شماره (۱۰۵)، داریم:

$$d_f(E,G) = d_f\big(P^f_{W_i}(x_i), x_i\big) = \underset{x_j\in E}{sup}\ d_f\big(P^f_{W_i}(x_i), x_j\big).$$

آنگاه طبق تساوی بالا و تعریف f_بهترین تقریب همزمان از رابطه دلخواه داریم:

$$P^f_{W_i}(x_i) \in P^f_G(E).$$

به هر حال، با این فرض که G یک مجموعه محدب و $E=\{x_1,\dots,x_n\}$ یک مجموعه متناهی باشد، الگوریتم زیر معرفی می شود.
با توجه به لم ۱.۵ برای نقاط x_1 و x_2، ابرصفحه $H_{12}=\{y\in X; f_{12}(y)=c_{12}\}$ مناسبی گردآوری شده است، طبق تعریف، نقاط G در H_{12}، V_{12} نامیده می شود.
بنابراین برای نقاط x_1 و x_3، ابرصفحه $H_{13}=\{y\in X; f_{13}(y)=c_{13}\}$ تشکیل می شود و نقاط G در H_{13}، V_{13} نامیده می شود و همچنین به طور مشابه برای نقاط x_1 و x_n. طبق اشتراک از هر V_{1n}، W_1 ای یافت می شود که این یک مجموعه محدب است (طبق قضیه ۱.۵ قسمت ۲).
بنابراین اگر fـبهترین تقریب x_1 در این مجموعه وجود داشته باشد، آن $P^f_{W_1}(x_1)$ نامیده می شود.
بنابراین $P^f_{W_i}(x_i)$ برای هر i که، $i=\{1,2,\dots,n\}$ گردآوری شده است.
سرانجام، نقطه $P^f_{W_i}(x_i)$ کوچکترین فاصله تا x_i، fـبهترین تقریب همزمان از E در G است.

□

فصل ۶

f_بهترین تقریب در فضاهای برداری توپولوژیکی خارج قسمتی

۱.۶ مقدمه

فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار روی یک فضای برداری توپولوژیکی X باشد. f_بهترین تقریب در فضاهای خارج قسمتی را بررسی می کنیم. کافی است شرایط بوجود آمدن و یکتایی f_بهترین تقریب را گردآوری کنیم.

۲.۶

ابتدا تعریف شماره ۱۷.۱ را یادآوری می کنیم:
فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی روی R و f یک تابع حقیقی مقدار و G یک زیرمجموعه بسته ناتهی از X و $x \in X$ باشد. عنصر $g_\circ \in G$، f_بهترین تقریب [۱] x در G گفته می شود اگر

$$f(x - g_\circ) = f_G(x) = \inf_{g \in G} \{f(x - g)\}.$$

$P_G^f(x)$ مجموعه تمام f_بهترین تقریب های x از G $g_\circ \in$ می باشد.

مجموعه G، f_پروکسیمینال [۲] نامیده می شود، اگر برای هر $x \in X$، $P_G^f(x)$ ناتهی باشد.
مجموعه G، f_نیم چبیشف [۳] نامیده می شود، اگر برای هر $x \in X$، $P_G^f(x)$ حداکثر یک عنصر داشته باشد.
مجموعه G، f_چبیشف [۴] نامیده می شود، اگر برای هر $x \in X$، $P_G^f(x)$ فقط یک عنصر داشته باشد.

[۱] f-best approximation
[۲] f-proximinal
[۳] f-semi-Chebyshev
[۴] f-Chebyshev

یادآوری ۱.۶. *وقتی X فضای خطی نرمدار روی میدان اعدادحقیقی باشد و برای هر $x, y \in X$، $f(x,y) = \|x - y\|$، نمادهایی‌که در بالا معرفی شدند منطبقند با اهداف متناظری که قبلا گفته شد.*

۳.۶ مجموعه fـپروکسیمینال

قضیه ۱.۶. *فرض‌کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی و f یک تابع حقیقی مقدار باشد.*

a) *اگر G یک زیرمجموعه از X باشد، آنگاه داریم:*

۱) *برای هر* $x, y \in X$ $\quad f_{G+y}(x+y) = f_G(x)$.

۲) *برای هر* $x, y \in X$ $\quad P^f_{G+y}(x+y) = P^f_G(x) + y$.

۳) *G، fـ پروکسیمینال (fـ چبیشف) است، اگر و فقط اگر برای هر $y \in X$، $G+y$، fـ پروکسیمینال (fـ چبیشف) باشد.*

اگر f همگن باشد، آنگاه داریم:

۴) *برای هر* $x \in X$ *و* $\alpha \geq 0$ $\quad f_{\alpha G}(\alpha x) = \alpha f_G(x)$.

۵) *برای هر* $x \in X$ *و* $\alpha \geq 0$ $\quad P^f_{\alpha G}(\alpha x) = \alpha P^f_G(x)$.

۶) *G، fـ پروکسیمینال (fـ چبیشف) است، اگر و فقط اگر برای هر $\alpha \geq 0$، αG، fـ پروکسیمینال (fـ چبیشف) باشد.*

b) *اگر M یک زیرفضا از X باشد، آنگاه داریم:*

۱) *برای هر* $x, y \in X$ $\quad f_M(x+y) = f_M(x)$.

۲) *برای هر* $x, y \in X$ $\quad P^f_M(x+y) = P^f_M(x) + y$.

اگر f همگن باشد، آنگاه داریم:

۳) *برای هر* $x \in X$ *و* $\alpha \in R$ $\quad f_M(\alpha x) = \alpha f_M(x)$.

۴) *برای هر $x \in X$ و $\alpha \in R$* $\quad P^f_M(\alpha x) = \alpha P^f_M(x)$.

اگر f زیرخطی و مثبت باشد، آنگاه داریم:

۵) $\quad f_M(x+y) \le f_M(x) + f_M(y)$.

برهان. a) (۱) فرض کنید $x, y \in X$، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} f_{G+y}(x+y) &= \inf_{g \in G} f(x+y-(g+y)) \\ &= \inf_{g \in G} f(x-g) \\ &= f(x-g_\circ) \\ &= f_G(x) \end{aligned}$$

(۲) $g_\circ + y \in P^f_{G+y}(x+y)$ اگر و فقط اگر $f_{G+y}(x+y) = f(x+y-(g_\circ+y))$ و طبق (۱) اگر وفقط اگر $f_G(x) = f(x-g_\circ)$. این درست است اگر وفقط اگر $g_\circ \in P^f_G(x)$. پس $g_\circ + y \in P^f_G(x) + y$. بنابراین $P^f_{G+y}(x+y) = P^f_G(x) + y$.

(۳) بدیهی است طبق (۲).

G، f _ پروکسیمینال است، اگر و فقط اگر حداقل یک $g_\circ \in G$ وجود داشته باشد که $P^f_G(x) \neq \phi$ اگر و فقط اگر $g_\circ \in G$ وجود داشته باشد که به ازای هر $y \in X$، $P^f_G(x) + y \neq \phi$ و طبق (۲) اگر وفقط اگر $P^f_{G+y}(x+y) \neq \phi$ اگر وفقط اگر $G+y$، f_پروکسیمینال باشد.

(۴)

$$\begin{aligned} f_{\alpha G}(\alpha x) &= \inf_{g \in G} f(\alpha x - \alpha g) \\ &= \alpha \inf_{g \in G} f(x-g) \\ &= \alpha f_G(x) \end{aligned}$$

(۵) اگر $\alpha = \circ$، نتیجه درست است. بنابراین فرض کنید $\alpha > \circ$ باشد. $g_\circ \in P^f_{\alpha G}(\alpha x)$ اگر و فقط اگر $g_\circ \in \alpha G$ و $f(\alpha x - g_\circ) = f_{\alpha G}(\alpha x)$ و طبق (۴) اگر و فقط اگر $\frac{1}{\alpha} g_\circ \in G$ و $\alpha f(x - \frac{1}{\alpha} g_\circ) = \alpha f_G(x)$ یعنی $\frac{1}{\alpha} g_\circ \in P^f_G(x)$. بنابراین $g_\circ \in \alpha\ P^f_G(x)$.

(۶) بدیهی است طبق (۵).

G، f-پروکسیمینال است، اگر و فقط اگر حداقل یک $g_\circ \in G$ وجود داشته باشد که $P_G^f(x) \neq \phi$ اگر و فقط اگر $g_\circ \in G$ وجود داشته باشد که برای هر $\alpha \geq \circ$، $\alpha\ P_G^f(x) \neq \phi$ و طبق (۵) اگر وفقط اگر $P_{\alpha G}^f(\alpha x) \neq \phi$ اگر وفقط اگر αG، f-پروکسیمینال باشد.

b) (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتیجه مستقیم از (۱)، (۲)، (۴) و (۵) قسمت (a) است و این یک حقیقت است که برای هر $y \in M$ و $\alpha \neq \circ$، $M + y = M$ و $\alpha M = M$.

(۵)

$$\begin{aligned} f_M(x+y) &= \underset{m\in M}{inf}\ f(x+y-m) \\ &= \underset{m,m'\in M}{inf}\ f(x+y-(m+m')) \\ &\leq \underset{m,m'\in M}{inf}\ (f(x-m)+f(y-m')) \\ &= \underset{m\in M}{inf}\ f(x-m) + \underset{m'\in M}{inf}\ f(y-m') \\ &= f_M(x)+f_M(y). \end{aligned}$$

□

فرض کنید برای یک زیرمجموعه G از X، $\hat{G}_f = \{x \in X \ :\ f_G(x) = f(x)\}$، بنابراین خصوصیات یک زیرفضای f-پروکسیمینال G از X را داریم.

قضیه ۲.۶. *اگر G یک زیرفضا از X و f تابعی حقیقی باشد، آنگاه G، f-پروکسیمینال است اگر و فقط اگر $X = G + \hat{G}_f$.*

برهان. اگر G، f-پروکسیمینال و $x \in X$ باشد، آنگاه $P_G^f(x) \neq \phi$ و $g_\circ \in G$ وجود دارد به قسمی که $f_G(x) = f(x - g_\circ)$. چون طبق تعریف $\hat{G}_f$ داریم $f(x) = f_G(x)$، پس $f(x) = f(x - g_\circ)$، بنابراین $x - g_\circ \in \hat{G}_f$ و $x = g_\circ + (x - g_\circ) \in G + \hat{G}_f$، پس $X \subseteq G + \hat{G}_f$، همچنین می دانیم $G + \hat{G}_f \subseteq X$، بنابراین $X = G + \hat{G}_f$.

حالت عکس، فرض کنید $x \in X$ باشد. بنابراین $g_1 \in G$ و $g_2 \in \hat{G}_f$ وجود دارد به قسمی که $x = g_1 + g_2$. بنابراین $x - g_1 = g_2 \in \hat{G}_f$. بنابراین طبق تعریف $\hat{G}_f$، $f_G(x - g_1) = f(x - g_1)$ است. چون G زیرفضا است، آنگاه $f(x-g_1) = f_G(x)$. بنابراین $g_1 \in P_G^f(x)$ و G، f-پروکسیمینال است.

$\square$

قضیه ۳.۶. *فرض کنید f یک تابع مثبت باشد و $x = \circ$ اگروفقط اگر $f(x) = \circ$، آنگاه G، fـ پروکسیمینال است اگرو فقط اگر G، fـ بسته باشد و $\pi(\hat{G}_f) = X/G$.*

برهان. چون f تابعی متقارن و مافوق است، لذا برای هر $x \in X$، $f(\circ) \leq max\{f(x)\ ,\ f(-x)\}$. بنابراین برای هر $x \in X$، $f(x) \geq \circ$ می باشد.
فرض کنید G، fـ پروکسیمینال باشد و $\{g_n\} \subset G$ و $x \in X$ و $f(x-g_n) \longrightarrow \circ$ باشد. آنگاه $f_G(x) = \underset{g\in G}{inf} f(x-g) = \circ$ است.
چون G، fـ پروکسیمینال است، آنگاه $g_\circ \in G$ وجود دارد، به قسمی که $f_G(x) = f(x-g_\circ)$ است. بنابراین $f(x-g_\circ) = \circ$، پس $x - g_\circ = \circ$ است. بنابراین $x = g_\circ \in G$ می باشد. بنابراین G، fـ بسته است.

حال فرض کنید $x \in X$ و $g_\circ \in P_G^f(x)$، بنابراین $f_G(x) = f(x-g_\circ)$ و طبق تعریف $\hat{G}_f$ داریم $x - g_\circ \in \hat{G}_f$. بنابراین داریم:

$$x + G = x - g_\circ + G \in \hat{G}_f + G = \pi(\hat{G}_f)$$

و

$$\pi(\hat{G}_f) = \hat{G}_f + G \subseteq X/G$$

بنابراین داریم:

$$\pi(\hat{G}_f) = X/G.$$

حالت عکس، فرض کنید $\pi(\hat{G}_f) = X/G$. بنابراین اگر $x \in X$، آنگاه برای حداقل یک $y \in \hat{G}_f$ داریم $x + G = y + G$. بنابراین برای حداقل یک $g_\circ \in G$، $x - y = g_\circ$. بنابراین $x = y + g_\circ \in \hat{G}_f + G$، پس $X \subseteq G + \hat{G}_f$، همچنین می دانیم $G + \hat{G}_f \subseteq X$، بنابراین $X = \hat{G}_f + G$. بنابراین طبق قضیه ۲.۶، G، fـ پروکسیمینال است.

$\square$

مثال ۲.۶. فرض کنید G یک زیرفضای fـ پروکسیمینال از X باشد. تعریف می‌کنیم $\varphi_G : \frac{X}{G} \longrightarrow ۲^{\hat{G}_f}$ با ضابطه

$$\varphi_G(x+G) = x - P_G^f(x).$$

تابع φ_G خوشتعریف است، چون برای هر $y \in P_G^f(x)$ داریم، $x - y \in \hat{G}_f$ و اگر $x_۱ + G = x_۲ + G$، آنگاه $x_۱ - x_۲ \in G$. چون G زیرفضا است و از طرفی برای حداقل یک $g \in G$ داریم $x_۱ - x_۲ = g$ که $x_۱ = x_۲ + g$، بنابراین $P_G^f(x_۱) = P_G^f(x_۲) + g$. بنابراین داریم:

$$\varphi_G(x_1 + G) = \varphi_G(x_2 + G).$$

همچنین چون G، fـپروکسیمینال است، آنگاه برای هر $x + G \in X/G$، $\varphi_G(x + G) \neq \phi$.

فرض کنید $g_1, g_2 \in P_G^f(x)$، آنگاه $f_G(x) = f(x - g_1) = f(x - g_2) = f(x)$. بنابراین اگر f تابع همگن و مافوق باشد و $0 \leq \lambda \leq 1$ و مجموعه $g = \lambda g_1 + (1 - \lambda) g_2$، آنگاه نشان می دهیم $g \in P_G^f(x)$، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(x - (\lambda g_1 + (1 - \lambda) g_2)) &= f(\lambda(x - g_1) + (1 - \lambda)(x - g_2)) \\ &\leq max\{f(\lambda(x - g_1)) \ , \ f((1 - \lambda)(x - g_2))\} \\ &= max\{\lambda f(x - g_1) \ , \ (1 - \lambda) f(x - g_2)\} \\ &= max\{\lambda f_G(x) \ , \ (1 - \lambda) f_G(x)\} \\ &\leq f(x - g_1) = f(x - g_2) = f_G(x) \\ &\Longrightarrow f(x - (\lambda g_1 + (1 - \lambda) g_2)) = f_G(x). \end{aligned}$$

بنابراین $P_G^f(x)$ محدب است، همچنین اگر f زیرخطی و متقارن باشد و $x \in X$ و $g_0 \in P_G^f(x)$، آنگاه داریم:

$$f(g_0) = f(g_0 - x + x) \leq f(x - g_0) + f(x) = f_G(x) + f(x) = 2 f_G(x).$$

بنابراین $P_G^f(x)$، fـکراندار است.

بنابراین داریم:

لم ۱.۶. ۱) *اگر G یک زیرفضای fـپروکسیمینال از X باشد، آنگاه برای هر $x \in X$، $\varphi_G(x + G) \neq \phi$.*

۲) *اگر f زیرخطی و متقارن باشد، آنگاه $\varphi_G(x + G)$، fـکراندار است.*

۳) *اگر f تابع همگن و مافوق باشد، آنگاه $\varphi_G(x + G)$ محدب است.*

لم ۲.۶. *فرض کنید G یک زیرفضای fـ پروکسیمینال از X و برای هر i که، $(i=1,2)$، $y_i+M\in X/M$ و $x_1\in X$ باشد به قسمی‌که $x_1+G=y_1+G$. آنگاه $x_2\in X$ وجود دارد به قسمی‌که*

$$x_2+G=y_2+G \quad \text{و} \quad f(x_1-x_2)=f_G(y_1-y_2).$$

برهان. چون $x_1+G=y_1+G$، وجود دارد $g_1\in G$ به قسمی که $y_1=x_1-g_1$. $\quad (*)$
چون G، fـ پروکسیمینال است، وجود دارد $g_0\in G$ به قسمی که برای $x=y_1-y_2$ داریم:

$$f(y_1-y_2-g_0)=f_G(y_1-y_2) \qquad (**)$$

بنابراین از روابط $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$f(x_1-g_1-y_2-g_0)=f_G(y_1-y_2).$$

فرض کنید $x_2=g_0+g_1+y_2$. بنابراین داریم:

$$x_2+G=y_2+G \quad \text{و} \quad f(x_1-x_2)=f_G(y_1-y_2).$$

□

۴.۶ fـ تقریب در فضاهای خارج قسمتی

فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد و G و M زیرفضاهایی از X باشند به قسمی که M بسته و $M\subset G$ و $f:X\longrightarrow R$ یک تابع باشد. تعریف می کنیم:

$$\widetilde{f}(x+M)=inf\ \{f(x+y)\ :\ y\in M\}.$$

بنابراین داریم:

قضیه ۴.۶. ۱) *اگر f تابعی متقارن باشد، آنگاه $\widetilde{f}$ تابعی متقارن است.*

۲) *اگر f تابعی زیرخطی و مثبت باشد، آنگاه $\widetilde{f}$ تابعی زیرخطی است.*

۳) *اگر f تابعی مافوق باشد، آنگاه $\widetilde{f}$ تابعی مافوق است.*

۴) *اگر g_0 یک fـ بهترین تقریب x در G باشد، آنگاه g_0+M یک $\widetilde{f}$ـ بهترین تقریب $x+M$ در G/M است.*

۵) اگر $g_\circ + M$ یک $\widetilde{f}$ـ بهترین تقریب $x+M$ از G/M باشد و $m_\circ$ یک fـ بهترین تقریب $x - g_\circ$ از M باشد، آنگاه $g_\circ + m_\circ$ یک fـ بهترین تقریب x از G است.

۶) اگر M، fـ پروکسیمینال در X و G/M، $\widetilde{f}$ـ پروکسیمینال در X/M باشد، آنگاه G، fـ پروکسیمینال در X است.

۷) اگر M یک fـ نیم چبیشف در X و G/M یک $\widetilde{f}$ـ نیم چبیشف در X/M باشد، آنگاه G، fـ نیم چبیشف در X است.

۸) اگر G، fـ پروکسیمینال در X باشد، آنگاه G/M، $\widetilde{f}$ـ پروکسیمینال در X/M است.

۹) اگر M، fـ چبیشف در X و G/M، $\widetilde{f}$ـ چبیشف در X/M باشد، آنگاه G، fـ چبیشف در X است.

۱۰) اگر M، fـ پروکسیمینال در X و G، fـ نیم چبیشف در X باشد، آنگاه G/M، $\widetilde{f}$ـ نیم چبیشف در X/M است.

۱۱) اگر M، fـ پروکسیمینال در X و G، fـ چبیشف در X باشد، آنگاه G/M، $\widetilde{f}$ـ چبیشف در X/M است.

برهان. ۱) فرض کنید $x \in X$، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(x+M) &= inf\ \{f(x+y)\ :\ y \in M\}\\
&= inf\ \{f(-x-y)\ :\ y \in M\}\\
&= inf\ \{f(-x+z)\ :\ z \in M\}\\
&= \widetilde{f}(-x+M).
\end{aligned}$$

۲) اگر $x_1, x_2 \in X$، داریم:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}\big((x_۱+M)+(x_۲+M)\big) &= \widetilde{f}\big((x_۱+x_۲)+M\big)\\ &= inf\ \{f(x_۱+x_۲+y)\ :\ y\in M\}\\ &= inf\ \{f(x_۱+y_۱+x_۲+y_۲)\ :\ y_۱,y_۲\in M\}\\ &\le inf\{f(x_۱+y_۱)+f(x_۲+y_۲)\ :\ y_۱,y_۲\in M\}\\ &= inf\{f(x_۱+y_۱)\ :\ y_۱\in M\}+inf\{f(x_۲+y_۲)\ :\ y_۲\in M\}\\ &= \widetilde{f}(x_۱+M)+\widetilde{f}(x_۲+M).\end{aligned}$$

۳) مشابه (۲).

$$\begin{aligned}\widetilde{f}\big((x_۱+M)+(x_۲+M)\big) &= \widetilde{f}\big((x_۱+x_۲)+M\big)\\ &= \inf_{y\in M}\ \{f(x_۱+x_۲+y)\ \}\\ &= \inf_{y_۱,y_۲\in M}\ \{f(x_۱+y_۱+x_۲+y_۲)\}\\ &\le \inf_{y_۱,y_۲\in M}\ max\{\ f(x_۱+y_۱)\ \ ,\ \ f(x_۲+y_۲)\ \}\\ &= max\{\inf_{y_۱\in M}\ f(x_۱+y_۱)\ \ ,\ \ \inf_{y_۲\in M}\ f(x_۲+y_۲)\ \}\\ &= max\{\widetilde{f}(x_۱+M)\ ,\ \widetilde{f}(x_۲+M)\}\ .\end{aligned}$$

۴) اگر $g_{\circ}+M$ یک $\widetilde{f}$_بهترین تقریب $x+M$ در G/M نباشد، آنگاه برای هر $g\in G$ داریم:

$$\widetilde{f}(x-g_{\circ}+M)\not\leq\widetilde{f}(x-g+M).$$

بنابراین $g_۱\in G$ ای وجود دارد به قسمی که

$$\widetilde{f}(x-g_۱+M)<\widetilde{f}(x-g_{\circ}+M)\qquad(۱)$$

چون

$$\widetilde{f}(x-g_{\circ}+M)\leq f(x-g_{\circ})\qquad(۲)$$

بنابراین از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\widetilde{f}(x-g_۱+M)<f(x-g_{\circ}).$$

بنابراین برای حداقل یک $m_{\circ}\in M$ داریم:

$$\widetilde{f}(x-(g_1+m_0)) < f(x-g_0).$$

از $M \subset G$ نتیجه می گیریم که $g_1+m_0 \in G$. بنابراین g_0 یک fـبهترین تقریب x در G نیست و این یک تناقض است.

۵) طبق فرضیه، چون m_0 یک fـبهترین تقریب $x-g_0$ از M است، داریم:

$$f(x-g_0-m_0) = f_M(x-g_0) \qquad (1)$$

چون g_0+M یک $\widetilde{f}$ـبهترین تقریب $x+M$ از G/M است، پس برای هر $g \in G$، داریم:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x+M-g_0+M) &= \widetilde{f}(x-g_0+M)\\ &\le \widetilde{f}(x-g+M). \qquad (2)\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۲) برای هر $g \in G$، داریم:

$$\begin{aligned}f\big(x-(g_0+m_0)\big) &\overset{(1)}{=} f_M(x-g_0)\\ &= \inf_{m\in M} f(x-g_0-m)\\ &= \widetilde{f}(x-g_0+M)\\ &\overset{(2)}{\le} \widetilde{f}(x-g+M)\\ &\le f(x-g)\\ &= f_G(x) \qquad (*)\end{aligned}$$

و

$$f_G(x) = inf\ f(x-g) = f(x-g_0) \le f(x-g_0+m_0) \qquad (**)$$

بنابراین از روابط $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$f\big(x-(g_0+m_0)\big) = f_G(x).$$

بنابراین g_0+m_0، fـبهترین تقریب x از G است.

۶) بدیهی است طبق (۵).

طبق فرضیه چون M، f_پروکسیمینال در X است، پس $m_\circ \in P_M^f(x-g_\circ)$ وجود دارد به قسمی که اگر $m_\circ$، f_بهترین تقریب $x-g_\circ$ از M باشد، داریم:

$$f(x-g_\circ-m_\circ)=f_M(x-g_\circ) \qquad (۱)$$

چون G/M، $\widetilde{f}$_پروکسیمینال در X/M است، پس $g_\circ+M \in P_{G/M}^{\widetilde{f}}(x+M)$ وجود دارد که برای هر $g\in G$ داریم:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x+M-g_\circ+M)&=\widetilde{f}(x-g_\circ+M)\\&\leq \widetilde{f}(x-g+M). \qquad (۲)\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۲) برای هر $g\in G$ داریم:

$$\begin{aligned}f\big(x-(g_\circ+m_\circ)\big)&\overset{(۱)}{=}f_M(x-g_\circ)\\&=\inf_{m\in M} f(x-g_\circ-m)\\&=\widetilde{f}(x-g_\circ+M)\\&\overset{(۲)}{\leq}\widetilde{f}(x-g+M)\\&\leq f(x-g)\\&=f_G(x) \qquad (*)\end{aligned}$$

و

$$f_G(x)=inf\ f(x-g)=f(x-g_\circ)\leq f(x-g_\circ+m_\circ) \qquad (**)$$

بنابراین از روابط $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$f\big(x-(g_\circ+m_\circ)\big)=f_G(x).$$

بنابراین $g_\circ+m_\circ$ یک f_بهترین تقریب x از G است یعنی G، f_پروکسیمینال در X است.

۷) فرض کنید نتیجه نادرست باشد، آنگاه وجود دارد $x\in X$ای، به قسمی که $g_۱$ و $g_۲$ دو f_بهترین تقریب مجزا از G باشند.
طبق (۴)، $g_۱+M$ و $g_۲+M$، $\widetilde{f}$_بهترین تقریب $x+M$ در G/M. چون G/M، $\widetilde{f}$_نیم چبیشف در X/M، داریم $g_۱+M=g_۲+M$. بنابراین $m\in M-\{\circ\}$ وجود دارد به قسمی که $g_۲=g_۱+m$.

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(x-g_1+m) &= f(x-g_2)\\ &= f(x-g_1)\\ &= f_G(x)\\ &= f_G(x-g_1)\\ &\le f_M(x-g_1). \end{aligned}$$

بنابراین m و ۰، f_بهترین تقریب $x-g_1$ از M هستند. چون $m \neq 0$، آنگاه M، f_نیم چبیشف در X نیست و این یک تناقض است.

۸) جواب بی واسطه از (۴).

چون G، f_پروکسیمینال در X است پس $g_0 \in P_G^f(x)$ وجود دارد به قسمی که g_0، f_بهترین تقریب x در G باشد. بنابراین $g_0 + M$، $\tilde{f}$_بهترین تقریب $x+M$ در G/M است. پس $g_0 + M \in P_{G/M}^{\tilde{f}}(x+M)$ و G/M، $\tilde{f}$_پروکسیمینال در X/M می باشد.

۹) بدیهی است طبق (۶) و (۷).

فرض کنید نتیجه نادرست باشد، آنگاه $x \in X$ وجود دارد به قسمی که g_1 و g_2 دو f_بهترین تقریب مجزا از G باشند.

طبق (۴)، $g_1 + M$ و $g_2 + M$، $\tilde{f}$_بهترین تقریب $x + M$ در G/M می باشند. چون G/M، $\tilde{f}$_چبیشف در X/Mاست، داریم $g_1 + M = g_2 + M$. بنابراین $m \in M - \{0\}$ وجود دارد به قسمی که $g_2 = g_1 + m$.

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(x-g_1+m) &= f(x-g_2)\\ &= f(x-g_1)\\ &= f_G(x)\\ &= f_G(x-g_1)\\ &\le f_M(x-g_1). \end{aligned}$$

بنابراین m و ۰، f_بهترین تقریب $x-g_1$ از M هستند. چون $m \neq 0$، آنگاه M، f_چبیشف در X نیست و این یک تناقض است.

۱۰) اگر نتیجه نادرست باشد، آنگاه $x+M \in X/M$ و $g_۱+M$ و $g_۲+M$ متعلق به $P^{\tilde{f}}_{G/M}(x+M)$ وجود دارد به قسمی که $g_۱ + M \neq g_۲ + M$. بنابراین $g_۱ - g_۲ \notin M$.

چون M، fـپروکسیمینال در X است، آنگاه برای $x - g_۱, x - g_۲ \in X$ داریم $P^f_M(x - g_۱) \neq \phi$ و $P^f_M(x - g_۲) \neq \phi$.

فرض کنید $m_۱ \in P^f_M(x - g_۱)$ و $m_۲ \in P^f_M(x - g_۲)$. طبق (۵)، $g_۱ + m_۱$ و $g_۲ + m_۲$، fـبهترین تقریب x از G هستند. چون G، fـنیم چبیشف در X است، آنگاه $g_۱ + m_۱ = g_۲ + m_۲$. آنگاه $g_۱ - g_۲ = m_۱ - m_۲ \in M$ و این یک تناقض است.

۱۱) بدیهی است طبق (۸) و (۱۰).
به برهان خلف فرض کنیم نتیجه درست نباشد، آنگاه $x + M \in X/M$ و $g_۱ + M$ و $g_۲ + M$ متعلق به $P^{\tilde{f}}_{G/M}(x + M)$ وجود دارد به قسمی که $g_۱ + M \neq g_۲ + M$. بنابراین $g_۱ - g_۲ \notin M$.

چون M، fـپروکسیمینال در X است، آنگاه برای $x - g_۱, x - g_۲ \in X$ داریم $P^f_M(x - g_۱) \neq \phi$ و $P^f_M(x - g_۲) \neq \phi$.

فرض کنید $m_۱ \in P^f_M(x - g_۱)$ و $m_۲ \in P^f_M(x - g_۲)$. طبق (۵)، $g_۱ + m_۱$ و $g_۲ + m_۲$، fـبهترین تقریب x از G هستند. چون G، fـچبیشف در X است، آنگاه $g_۱ + m_۱ = g_۲ + m_۲$. آنگاه $g_۱ - g_۲ = m_۱ - m_۲ \in M$ و این یک تناقض است.

□

نتیجه ۱.۶. *فرض کنید G و M زیرفضاهایی از یک فضای برداری توپولوژیکی X باشند و $G \supset M$ باشد. همچنین فرض کنید $\pi : X \longrightarrow X/M$ نگاشت استاندارد و G، fـپروکسیمینال در X باشد. آنگاه داریم:*

$$\pi\big(P^f_G(x)\big) \subseteq P^{\tilde{f}}_{G/M}(x + M).$$

بنابراین اگر M، fـپروکسیمینال در X باشد آنگاه داریم:

$$\pi\big(P^f_G(x)\big) = P^{\tilde{f}}_{G/M}(x + M).$$

برهان. چون G، fـپروکسیمینال است، طبق قضیه ۴.۶، قسمت (۴)، اگر $g_۰ \in P^f_G(x)$، آنگاه $g_۰ + M \in P^{\tilde{f}}_{G/M}(x + M)$. بنابراین داریم:

$$g_۰ \in P^f_G(x)$$

آنگاه داریم:

$$\pi(g_\circ) \in \pi(P_G^f(x)).$$

از طرفی $\pi(g_\circ) = g_\circ + M$ و $g_\circ + M \in P_{G/M}^{\tilde{f}}(x+M)$، درنتیجه داریم:

$$\pi(g_\circ) \in P_{G/M}^{\tilde{f}}(x+M)$$

بنابراین داریم:

$$\pi\big(P_G^f(x)\big) \subseteq P_{G/M}^{\tilde{f}}(x+M). \qquad (۱)$$

حال، فرض کنید M، f_پروکسیمینال در X باشد. طبق قضیه ۴.۶، قسمت (۵)، اگر $g_\circ + M \in P_{G/M}^{\tilde{f}}(x+M)$ و $m_\circ \in P_M^f(x - g_\circ)$، آنگاه $g_\circ + m_\circ \in P_G^f(x)$. بنابراین داریم:

$$g_\circ + M = g_\circ + m_\circ + M = \pi(g_\circ + m_\circ) \in \pi\big(P_G^f(x)\big).$$

بنابراین داریم:

$$P_{G/M}^{\tilde{f}}(x+M) \subseteq \pi\big(P_G^f(x)\big). \qquad (۲)$$

بنابراین از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\pi\big(P_G^f(x)\big) = P_{G/M}^{\tilde{f}}(x+M).$$

□

۵.۶ f_شبه چبیشف در فضاهای خارج قسمتی

قضیه ۵.۶. *فرض کنید f یک تابع مثبت، M یک زیرفضای f_پروکسیمینال از X و G یک زیرفضای f_شبه چبیشف از X باشد به قسمی‌که $M \subset G$ باشد. آنگاه G/M، $\tilde{f}$_شبه چبیشف در X/M است.*

برهان. چون G یک زیرفضای f_شبه چبیشف است، پس برای هر $x \in X$، $P_G^f(x) \neq \phi$، درنتیجه G، f_پروکسیمینال در X است و طبق قضیه ۴.۶ قسمت (۸) داریم G/M، $\tilde{f}$_پروکسیمینال در X/M است، بنابراین $P_{G/M}^{\tilde{f}}(x+M) \neq \phi$.

فرض کنید $\{g_\alpha + M\}$ یک دنباله از $P_{G/M}^{\tilde{f}}(x+M)$ باشد. آنگاه طبق نتیجه ۱.۶، وجود دارد $g'_\alpha \in P_G^f(x)$ به قسمی که برای هر α داشته باشیم $g'_\alpha + M = g_\alpha + M$.

چون G، f_شبه چبیشف است، پس $P_G^f(x)$، در X، f_فشرده است، بنابراین زیردنباله $\{g'_{\alpha\beta}\}$ از g'_α و $g_\circ \in P_G^f(x)$ وجود دارد به قسمی که $f(g'_{\alpha\beta} - g_\circ) \longrightarrow \circ$.

چون $\widetilde{f}(g'_{\alpha\beta} - g_\circ + M) \leq f(g'_{\alpha\beta} - g_\circ)$ و f مثبت است، آنگاه $\widetilde{f}(g'_{\alpha\beta} - g_\circ + M) \longrightarrow \circ$.
بنابراین داریم:

$$\widetilde{f}\big((g'_{\alpha\beta} + M) - (g_\circ + M)\big) \longrightarrow \circ.$$

بنابراین $P^{\widetilde{f}}_{G/M}(x + M)$، $\widetilde{f}$ـفشرده است و بنابراین G/M، $\widetilde{f}$ـشبه چبیشف در X/M است.
$\square$

مراجع

[1] SH.Akbarzadeh, M.Iranmanesh, *Best Simultaneous Approximation of Finite set in Inner product space*, Advances in pure Mathematics, **3** , (2013), 479-481.

[2] S. K. Berberian, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York , (1979) , 137.

[3] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis* , New York.

[4] F. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces* , New York, (1936).

[5] N. Dunford and J. T . Schwartz, *Linear Operators* , Interscience Pule . INC , New York , (1957) ,65, 422-425.

[6] W.B.Domi and M.Rawashdeh and Sh.Al-Sharif, *on the sum of simultaneously f_proximinal subspaces and Quotient Spaces*, International Mathematical, vol.**6**, (2012), *No.* 1, 11-18.

[7] M. Feder, *OnThe sum of proximininal subspaces*, J.Approx.Theory, **49**,(1987), 144-148.

[8] M.Iranmanesh and H.Mohebi, *On best simultaneous approximation in quotient spaces*, Analysis in Theory and Applications **23** (2007) , 35-49.

[9] H. Mohebi and Sh. Rezapour, *On sum and quotiont of quasi chebyshev subspaces in Banach spaces*, Analysis in Theory and Applications,**19** (2003) , No.3,266-272.

[10] MA.Moghaddam, *on f_Best Approximation in Quotient Topological Vector Spaces*, International Mathematical Forum, **5**, (2010), No. 12, 581-595.

[11] M.Rawashdeh and Sh.Al-Sharif and W.B.Domi, *on the sum of Best simultaneously proximinal subspaces*, Hacttepe Journal of Mathematics and statistics volume **43**(4) (2014), 595-602.

[12] W.Rudin, *Functional analysis* , McGraw-Hill, (1991).

[۱۳] صدیقی، کریم. ''آنالیز تابعی''، تالیف کریم صدیقی، عبدالحمید ریاضی-[تهران]، دانشگاه هرمزگان، ۱۳۷۸.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

انعکاسی .... Reflexive
بهترین تقریب .... Best Approximation
fـ بهترین تقریب .... Best f_Approximation
بهترین تقریب همزمان .... Best Simultaneous Approximation
fـ بهترین تقریب همزمان .... Best f_Simultaneous Approximation
به طور همزمان پروکسیمینال .... Simultaneous Proximinal
به طور همزمان fـ پروکسیمینال .... Simultaneous f_Proximinal
به طور همزمان چبیشف .... Simultaneous Chebyshev
بسته .... Closed
fـ بسته .... f_Closed
پروکسیمینال .... Proximinal
fـ پروکسیمینال .... f_Proximinal
توپولوژی ضعیف .... Weak Topology
توپولوژی ضعیف ستاره .... Weak* Topology
چبیشف .... Chebyshev
fـ چبیشف .... f_Chebyshev
دنباله کراندار .... Bounded sequence
زیرخطی .... Sublinear
fـ شبه چبیشف .... f_Quasi Chebyshev
ضعیف بسته .... Weakly Closed
ضعیف فشرده .... Weakly Compact
ضعیف ستاره بسته .... Weakly* Closed
ضعیف ستاره فشرده .... Weakly* Compact
فضای باناخ .... Banach space
فضای ضرب داخلی .... Inner product space

فضای برداری توپولوژیکی .... Topological Vector space
فاصله .... Distance
فضای نرمدار .... Normed space
فشرده .... Compact
فضای دوگان .... Dual space
فضای خارج قسمتی .... Quotient space
قضیه باناخ آلاغلو .... Aloglue Theorem
قضیه نگاشت باز .... Open Mapping Theorem
قضیه گراف بسته .... Closed graph theorem
کراندار .... Bounded
f_کراندار .... f_Bounded
کوشی .... Cauchy
محدب .... Convex
مافوق .... Ultra
نرم .... norm
f_نیم چبیشف .... f_Semi_Chebyshev
همگرایی .... Convergent
همگن .... Homogeneous
همگرایی ضعیف .... Weakly Converges
یکریخت .... Isomorphic

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Aloglue Theorem	قضیه باناخ آلاغلو
Banach space	فضای باناخ
Best Approximation	بهترین تقریب
Best f_Approximation	f_بهترین تقریب
Best Simultaneous Approximation	بهترین تقریب همزمان
Best f_Simultaneous Approximation	f_بهترین تقریب همزمان
Bounded sequence	دنباله کراندار
Bounded	کراندار
Cauchy	کوشی
Chebyshev	چبیشف
Convergent	همگرایی
Closed	بسته
Compact	فشرده
Convex	محدب
Closed graph theorem	قضیه گراف بسته
Distance	فاصله
Dual space	فضای دوگان
f_Closed	f_بسته
f_Proximinal	f_پروکسیمینال
f_Chebyshev	f_چبیشف
f_Semi_Chebyshev	f_نیم چبیشف
f_Bounded	f_کراندار
f_Quasi Chebyshev	f_شبه چبیشف
Homogeneous	همگن
Isomorphic	یکریخت

فضای ضرب داخلی .... Inner product space

فضای نرمدار .... Normed space

نرم .... norm

قضیه نگاشت باز .... Open Mapping Theorem

پروکسیمینال .... Proximinal

فضای خارج قسمتی .... Quotient space

انعکاسی .... Reflexive

به طور همزمان پروکسیمینال .... Simultaneous Proximinal

به طور همزمان f_پروکسیمینال .... Simultaneous f_Proximinal

به طور همزمان چبیشف .... Simultaneous Chebyshev

زیرخطی .... Sublinear

فضای برداری توپولوژیکی .... Topological Vector space

مافوق .... Ultra

همگرایی ضعیف .... Weakly Converges

توپولوژی ضعیف .... Weak Topology

توپولوژی ضعیف ستاره .... Weak* Topology

ضعیف بسته .... Weakly Closed

ضعیف فشرده .... Weakly Compact

ضعیف ستاره بسته .... Weakly* Closed

ضعیف ستاره فشرده .... Weakly* Compact

نمایه

Abstract

The theory of the best approximation is used simultaneously in various branches of mathematics including optimization, numerical analysis, economics and so on. A simple example of this is to find points from a set to a point in space with the least distance.

In this thesis we introduce the problem of best approximation, the best simultaneously approximation, the best f_{-}approximation and the best f_{-}simultaneously approximation in different spaces and we are looking for conditions under which the conditions of a proximinal set are simultaneously proximinal, f_{-}proximinal, simultaneously f_{-}proximinal.

First we introduce best simultaneous approximation in quotient spaces. We give a characterization of best simultaneously approximation and best simultaneously chebyshev in quotient Spaces. Then we introduce the sum of Best simultaneously proximinal subspaces. We introduce the concept of simultaneously proximinal in Banach spaces.
In the following, we introduce the sum of simultaneously f_{-}proximinal subspaces and Quotient Spaces. We introduce the concept of simultaneously f_{-}proximinal in Banach spaces and the concept of f_{-}simultaneously approximation and we prove some results concerning simultaneously f_{-}approximation of the sum of two subspace in Banach spaces. Furthermore, we introduce the Best Simultaneous Approximation of finite set in Inner product spaces. We introduce the concept on f_{-}Best Approximation in Quotient Topological Vector Spaces.

Key words: best approximation, best simultaneously approximation, best f_{-}approximation, best f_{-}simultaneously approximation, proximinal, simultaneously proximinal, f_{-}proximinal, simultaneously f_{-}proximinal.

University of Shahrood

Faculty Of Mathematical Sciences

On the Sum of Simultaneously f-Proximinal Subspaces and Quotient Spaces

Seyede Fatemeh Seyedkatouli

Supervisor

Dr.Mahdi Iranmanesh

2018 January