بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بهترین تقریب برای نگاشت‌های تعمیم‌یافته C ـ انقباضی در فضاهای‌متریک با ترتیب‌جزیی

نگارنده: الهه شاکریان

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

استاد مشاور

دکتر علیرضا خدّامی

بهمن ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نامو یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **الهه شاکریان** با شماره دانشجویی**۹۴۰۹۹۲۴**رشته ریاضی محض گرایش آنالیز تحت عنوان: **بهترین تقریب برای نگاشت‌های تعمیم‌یافته c-انقباضی در فضاهای متریک با ترتیب جزیی** که در تاریخ **۹۶/۱۱/۱۱** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: خوب **)** ☒ **مردود** ☐

نوع تحقیق: نظری ■ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱- استادراهنمای اول	دکتر مهدی ایرانمنش	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم	-------	------	
۳- استاد مشاور	دکترعلیرضا خدامی	استادیار	غایب
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی رضا خورسندی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر احمد معتمدنژاد	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر الهام دسترنج	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:۹۶/۱۱/۱۱

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به کسانی که حقی بر من دارند

حتی ذره ای...

شهدای مدافع حرم

و پدر عزیزم

و مادر مهربانم

سپاس‌گزاری...

شکر و سپاس معبودی را که عشق به آموختن را در دل انسان‌ها به ودیعه نهاد. خداوند را سپاس می‌گویم که به من فرصت داد تا عمر خود را در راه تحصیل علم و دانش سپری کنم.
از پدر و مادر عزیزم که از کودکی، شور دانستن و لذت کشف و جستجو را در من بیدار کردند و استقامت و تلاش را به من آموختند و در تمام این سالها، با فراهم کردن آرامش روحی، بسیاری از دشواری‌ها را بر من آسان نمودند، با تمام وجود، قدر دانشان هستم. به پاس احترام به مقام والای معلم، در مقابل تمام اساتید بزرگواری که در محضرشان کسب فیض نموده و کویر تشنه وجودم را از چشمه جوشان معرفتشان سیراب ساخته‌ام، سر تعظیم فرود آورده و مراتب سپاس گزاری خود را از ایشان ابراز می‌دارم.
از استاد راهنمای بردبارم، **جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش،** که تمام روزهایی که تحت نظارت ایشان مشغول به تحقیق بودم سرشار از آموختن توأم با علم و اخلاق بود، نهایت تشکر را دارم. در پرتو پر از امید ایشان بود که تمام دلسردی‌ها رنگ می‌باخت و در سایه وجود خستگی ناپذیرشان، پرسش‌های گاه و بی گاهم پاسخ می‌یافت. در آخر هم از استاد مشاورم ، **جناب آقای دکترعلیرضاخدّامی** برای راهنمایی‌ها و یاری بی دریغشان صمیمانه سپاسگزارم.
همچنین لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر احمد معتمد نژاد و خانم دکتر الهام دسترنج که داوری پایان نامه من را بر عهده داشتند، نهایت تشکر و قدر دانی را به عمل بیاورم.همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر مهدی رضا خورسندی بخاطر حضورشان بسیار سپاسگزارم.

الهه شاکریان
بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **الهه شاکریان** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بهترین تقریب برای نگاشت‌های تعمیم‌یافته C ـ انقباضی در فضاهای‌متریک با ترتیب‌جزیی** ، تحت راهنمایی **مهدی ایرانمنش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

الهه شاکریان
بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در سال ۱۹۹۲ باناخ ثابت کرد که در هر نگاشت انقباضی در فضاهای متریک کامل دارای یک نقطه منحصر به فرد است. در این پایان‌نامه، ایده نگاشت‌های C ـ انقباضی ضعیف را به حالت ناخود ـ نگاشت تعمیم داده و قضایای بهترین تقریب را برای این کلاس بررسی می‌کنیم. این نتایج تعمیم کارهایی است که بوسیله هارجانی و همکارانش [۱۰]انجام شده است. هدف ما فراهم کردن زمینه بررسی نقطه ثابت برای نگاشت های C ـ انقباضی ضعیف در فضاهای متریک کاملی است که دارای یک ترتیب جزیی می‌باشند. همچنین به معرفی مفهوم یکنوایی جفت شده نقاط ثابت در فضاهای متریک می‌پردازیم. در ادامه پروکسیمینال بودن نگاشت های تعمیم یافته C ـ انقباضی را نیز بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: نقطه ثابت، فضای متریک مرتب، ترتیب جزیی، بهترین تقریب، انقباضی، نقطه ثابت جفت شده، پروکسیمینال، نگاشت انقباضی، نگاشت C ـ انقباضی ضعیف

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. مقاله اول
۲. مقاله دوم
۳. مقاله سوم

فهرست مطالب

فصل ۱

کلیات و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان مفاهیم اساسی مورد نیاز و همچنین برخی از قضایایی که در فصل های بعد به کار می‌روند، می‌پردازیم. تعاریف به منظور معرفی علائم و اصطلاحات و صورت قضایا برای رفع نیاز از مراجعه به منابع مختلف بیان می‌شوند. لازم به ذکر است که اثبات قضایای معروف اغلب به کتب مربوطه [۲۱]ارجاع داده می‌شوند.

۱.۱ مفاهیم آنالیز ریاضی

فضای متریک یکی از مفاهیم مهم توپولوژی و آنالیز ریاضی است.

تعریف ۱.۱.۱. $(X, d, \preceq)$ رافضای مرتب جزئی[۱]نامند هرگاه (X, d) فضای متریک و $(X, \preceq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد.

تعریف ۲.۱.۱. نگاشت T را در فضای متریک (X, d) پیوسته می‌گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود باشد به‌گونه‌ای که وقتی $d(x, y) < \delta$ است. آنگاه $d(Tx, Ty) < \epsilon$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم $T : (X, d) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ یک نگاشت باشد. T را نیم پیوسته از بالا در نقطه $a \in X$ نامیم هرگاه برای هر $u \in \mathbb{R}^*$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$ اگر $d(x, a) < \delta$ آن‌گاه $T(x) < u$.

[۱] Partially ordered metric space

به طور مشابه T نیم پیوسته پایین در نقطه $a \in X$ نامیده می‌شود. هرگاه برای $v \in \mathbb{R}^*$ عددی مانند $\delta > \circ$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in X$ اگر $d(x,a) < \delta$ آن‌گاه $T(x) > v$

تعریف ۴.۱.۱. فضای متریک (X,d) و دنباله $\{x_n\}$ در X مفروض است. دنباله $\{x_n\}$ در X همگرا است هرگاه نقطه‌ای مانند $x \in X$ با ویژگی ذیل وجود داشته باشد:

$$\forall \epsilon > \circ, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathbb{N} \Rightarrow d(x_n, x) \leq \epsilon$$

$\{x_n\}$ همگرا به x است اگر و تنهااگر هرزیردنباله‌ی $\{x_n\}$ همگرا به x باشد.

قضیه ۱.۱.۱. در فضای متریک (X,d)

- حد هر دنباله در صورت وجود یکتا است
- هر دنباله همگرا کراندار است.
- $p_n \to p$ اگر و تنها اگر هر همسایگی p شامل تمام جملات جز تعدادی متناهی باشد.
- هرگاه p یک نقطه حدی $E \subseteq X$ باشد. دنباله‌ای مانند $\{p_n\}$ در E هست که $p_n \to p$

تعریف ۵.۱.۱. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^1$ دنباله‌ی $\{x_n\}$ را صعودی می‌نامیم، درصورتی که به ازای هر n ، $x_n \leq x_{n+1}$ هرگاه دنباله‌ای صعودی از بالا کراندار باشد یعنی عددی مانند $M > \circ$ باشد بقسمی که به ازای هر n ، $x_n \leq M$ آن‌گاه $\{x_n\}$ به سوپریمم برد خود یعنی $\sup\{x_1, x_2, \cdots\}$ همگرا است. بهمین نحو، $\{x_n\}$ را نزولی می‌نامیم، در صورتی که برای هر، n $\{x_{n+1} \leq x_n\}$ هر دنباله نزولی که از پایین کراندار باشد. به اینفیمم برد خود همگرا است.

قضیه ۲.۱.۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) حداکثر می‌تواند به یک نقطه در x همگرا باشد.

قضیه ۳.۱.۱. درفضای متریک (X,d)، دنباله $\{x_n\}$ به x همگرا است اگر و تنها اگر هر زیر دنباله‌ی آن مانند $\{x_{n(k)}\}$ نیز به x همگرا باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک (X,d) باشد. این دنباله کوشی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\epsilon > \circ$ عددی مانند k_ϵ موجود باشد. به‌طوری‌که به ازای هر $n,m > k_\epsilon$ داشته باشیم

$$d(x_m, x_n) < \epsilon$$

تعریف ۷.۱.۱. فضای متریک (X,d) را کامل گوییم درصورتی که هر دنباله‌ی کوشی $\{x_n\} \subseteq X$ همگرا به نقطه‌ای از X باشد، به‌طور مثال $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$ کامل هستند ولی $\mathbb{Q}$ کامل نیست.

مثال ۱.۱.۱. فرض کنیم $X = \mathbb{R}^{+}$ متریک جزیی، $p : \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ به‌صورت زیر باشد

$$p(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x,y \in [0,1) \\ \max\{x,y\}, & x or y \notin [0,1) \end{cases}$$

بنابراین زوج $(\mathbb{R}^{+}, p)$ یک فضای متریک جزیی کامل است.

قضیه ۴.۱.۱. هر دنباله همگرا مانند $\{x_n\}$ در یک فضای متریک مانند (X,d) دنباله‌ای کوشی است.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ همگرا به X باشد. و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. لذا عددی مانند $k_\epsilon \in N$ موجود است. به قسمتی که به ازای هر $n \geq k_\epsilon$

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

و نیز به ازای هر $m \geq k_\epsilon$ داریم

$$d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

پس برای هر $m,n \geq k_\epsilon$ ، $d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. لذا $\{x_n\}$ کوشی است. □

قضیه ۵.۱.۱. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در فضای متریک (X,d) باشد. که زیردنباله‌ای همگرا به X مانند $\{x_{n_k}\}$ دارد. دراین‌صورت $\{x_n\}$ نیز همگرا به X است.

برهان. فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. چون $\{x_n\}$ کوشی است. پس $k_1 \in \mathbb{N}$ موجود است. به قسمی که به‌ازای هر $m,n \geq k_1$ داریم

$$d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

و چون $x_{nk} \to x$ پس $k_2 \in \mathbb{N}$ ای موجود است به قسمی که به ازای هر $k_1 \geq k_2$ داریم

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

قرار می‌دهیم $k_\epsilon = \max\{k_1, k_2\} \in \mathbb{N}.$ دراین‌صورت به ازای هر $n \geq k_\epsilon$ داریم

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{k_\epsilon}}) + d(x_{n_{k_\epsilon}}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

در نتیجه $x_n \to x$. □

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری و $E \subseteq X$ باشد دراین‌صورت گوییم E کراندار است، هرگاه عدد حقیقی چون M و نقطه‌ای مثل $q \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $p \in E$ داشته باشیم $d(p,q) < M$.

تعریف ۹.۱.۱. فضای متریک (X,d) و زیر مجموعه $K \subseteq X$ مفروض‌اند. K را مجموعه فشرده گویند هرگاه بتوان برای هر پوشش باز K حداقل یک زیرپوشش متناهی پیدا کرد. می‌گوییم X یک فضای متریک فشرده است هرگاه X مجموعه‌ای فشرده باشد.

قضیه ۶.۱.۱. فرض کنیم (X,d) فضای متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به آن باشد. دراین‌صورت مجموعه $k = \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ فشرده است.

قضیه ۷.۱.۱. هر مجموعه فشرده مانند K درهر فضای متریک مانند (X,d) بسته است.

قضیه ۸.۱.۱. هر مجموعه فشرده در هر فضای متریک مانند (X,d) کراندار است.

قضیه ۹.۱.۱. [۲۱]

- در هر فضای متریک X هر دنباله همگرا یک دنباله کوشی است.
- هرگاه X یک فضای متریک فشرده و $\{p_n\}$ یک دنباله کوشی درآن باشد. آن‌گاه $\{p_n\}$ به نقطه‌ای از X همگراست.
- در $\mathbb{R}^k$ هر دنباله‌ی کوشی همگراست.

قضیه ۱۰.۱.۱. در فضای متریک X حدود زیردنباله‌ای $\{x_n\}$ مجموعه‌ی بسته‌ای از X را می‌سازند.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه و $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت باشد، عضو $x \in X$ را یک نقطه ثابت[۲] T نامند هرگاه $Tx = x$.

مثال ۲.۱.۱. اگر برای نگاشت پیوسته

$$T : [a,b] \longrightarrow [a,b]$$

داشته باشیم

$a - T(a) \leq 0$ و $b - T(b) \geq 0$ بنابر، قضیه مقدار میانی $x \mapsto x - T(x)$ دارای ریشه می‌باشد و این یعنی T نقطه ثابت دارد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم $(X,\preceq)$ یک فضای مرتب جزیی باشد در این‌صورت اعضای $x,y \in X$ را مقایسه پذیر می‌گوییم، هرگاه $x \preceq y$ یا $x \succeq y$.

---
[۲] Fixed point

۱.۱.۱ قضیه نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی

بیش‌تر قضایای نقطه ثابت بر پایه‌ی اصل انقباض باناخ می‌باشد این اصل یکی از ساده‌ترین و مهم‌ترین نتایج در نظریه نقطه ثابت می‌باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. دوفضای متریک (X,d) و (Y,d) را درنظر بگیرید. نگاشت T از فضای متریک (X,d) به فضای متریک (Y,d) را انقباضی [۳] گوییم هرگاه عدد حقیقی $\alpha \in [0,1)$ وجود داشته باشد. به‌طوری‌که برای هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y).$$

قضیه ۱۱.۱.۱. هر نگاشت انقباضی روی یک فضای متریک کامل نقطه ثابتی دارد که یکتا هم هست.

برهان. رجوع شود به [۲۱] □

گزاره ۱.۱.۱. در یک فضای متریک هر نگاشت انقباضی پیوسته است.

برهان. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $T: X \longrightarrow X$ یک نگاشت انقباضی روی (X,d) باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in X$ داشته باشیم

$$d(T(x),T(a)) \leq qd(x,a)$$

فرض کنیم $\epsilon > 0$ و با درنظر گرفتن $\delta = \frac{\epsilon}{q}$ ، با فرض $d(x,a) < \delta$ خواهیم داشت.

$$d(T(x),T(a)) \leq qd(x,a) \leq q.\frac{\epsilon}{q} = \epsilon$$

$$d(T(x),T(a)) \leq \epsilon \Longrightarrow \text{پیوسته است } T$$

□

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم (X,d_X) و (Y,d_Y) دو فضای متریک کامل باشند، آن‌گاه نگاشت $T: X \longrightarrow Y$ پیوسته و یکنواخت است. هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد یک $\delta > 0$ بطوری‌که :

$$\forall (x,x') \in X \qquad d_X(x,x\prime) < \delta \Longrightarrow d_Y(T(x),T(x\prime)) < \epsilon$$

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل باشد، نگاشت $T: X \longrightarrow X$ را یک Cـ انقباضی [۴] می‌گوییم، اگر $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$ وجود داشته باشد، که در این شرط صدق کند

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha\, d((x,Ty) + d(y,Tx)). \quad \forall x,y \in X,$$

---
[۳] Contraction

[۴] c-contraction

تعریف ۱۵.۱.۱. [۸] فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل باشد، تابع

$$\varphi:[\circ,\infty)\longrightarrow[\circ,\infty)$$

را تابع تغییر فاصله[۵] می‌نامند. اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\varphi(t)=\circ$ اگر وتنها اگر $t=\circ$ باشد.

ب) φ پیوسته و نانزولی باشد.

.

۲.۱.۱ مفاهیم بهترین تقریب

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک، A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از X و $T:A\to B$ یک نگاشت باشد. اگر T دارای نقطه ثابت باشد یعنی $x\in A$ ای وجود دارد که $Tx=x$ آن‌گاه $A\cap B\neq\emptyset$ و اما اگر $A\cap B=\emptyset$ آنگاه T نقطه ثابت ندارد در این حالت طبیعی است که به دنبال نقطه‌ای چون $x\in A$ باشیم به‌طوری‌که $d(Tx,x)$ کمترین مقدارممکن را داشته باشد. فرض کنیم $d(A,B)=\inf\{d(a,b):a\in A,b\in B\}$. در این حالت x را یک نقطه بهترین تقریب برای T گوییم اگر یک نقطه مانند $x\in A$ موجود باشد به طوری که

$$d(Tx,x)=d(A,B).$$

اگر A و B زیرمجموعه‌های ناتهی دلخواهی از x باشند که $d(A,B)=\circ$ و x یک نقطه بهترین تقریب باشد. آنگاه x یک نقطه ثابت T خواهد بود.
اینک با در نظر گرفتن این واقعیت که در حالت کلی برای هر $x\in A$ $d(Tx,x)\geq d(A,B)$ ، می‌توان توسط مینیمم نگاشت $x\longmapsto d(Tx,x)$ به بهترین تقریب دست یافت. علاوه بر این به آسانی میتوان دید که نقطه بهترین تقریب را می‌توان به مفهوم نقطه ثابت نگاشت T برگرداند.

تعریف ۱۶.۱.۱. [۷] فرض کنیم X یک فضای متریک، $K\subseteq X$ و $x\in X$ باشد. در این‌صورت فاصله x از مجموعه‌ی K را با $d(x,K)$ یا $dist(x,K)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$d(x,K)=\inf\{(x,y_\circ):y_\circ\in k\}$$

تعریف ۱۷.۱.۱. [۷] فرض کنیم X یک فضای متریک، $K\subseteq X$ و $x\in X$ باشد. $y_\circ\in K$ را بهترین تقریب x از K می‌نامیم اگر داشته باشیم

$$d(x,y_\circ)=d(x,K).$$

[۵] altering distance function

همچنین مجموعه‌ی بهترین تقریب های x در K را با $P_K(x)$ نمایش می‌دهیم. یعنی داریم:

$$P_K(x) = \{y_\circ \in K : d(x, y_\circ) = d(x, K)\}.$$

$P_K : X \longrightarrow K$ را نگاشت تقریب می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۸. [۷] زیر مجموعه‌ی K از X را پروکسیمینال گوییم، اگر برای هر $x \in X$ مجموعه ی $P_K(x)$ نا تهی باشد.

در ادامه به بررسی قضایایی در فضای متریک و نتایج مورد بررسی آن می‌پردازیم.

فصل ۲

یکتایی نقطه ثابت در نگاشت‌های Cـ انقباضی

دراین فصل به بررسی قضایایی می‌پردازیم که اگر X یک فضای متریک کامل و نگاشت T ، C ـ انقباضی ضعیف باشد. آن‌گاه T یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد. مطالب این فصل از مراجع [۱۰]و [۱۲] می‌باشند.

۱.۰.۲ مقدمه

در سال ۱۹۹۲ باناخ با معرفی نگاشت های انقباضی ، نشان داد که این نگاشت‌ها روی فضای متریک کامل دارای نقطه ثابت هستند، پس از آن محققین مختلفی به تعمیم و توسیع اصل انقباض باناخ پرداخته و با ایجاد تغییراتی روی دامنه ی تعریف یا شرایط انقباض نگاشت نتایج مختلفی را در نظریه‌ی نقطه ثابت به اثبات رساندند.

درسال ۲۰۰۹ چودهاری[۱] [۵] تعمیم کلی‌تری از فضای C ـ انقباضی در زمینه فضای متریک جزیی را مطرح کرد.

تعریف ۱.۰.۲. اگر $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد، نگاشت $T : X \longrightarrow X$ را نانزولی

[۱] choudhury

گوییم اگر برای هر $x,y \in X$

$$x \preceq y \Longrightarrow Tx \preceq Ty$$

۱.۲ قضایای نقطه ثابت در شرایط انقباضی در فضای متریک

قضیه ۱.۱.۲. [۱۲] فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل و T نگاشت پیوسته‌ای باشد که برای هر $x,y \in X$ ، $x \neq y$ و برای $\alpha,\beta \in [0,1)$ که $\alpha+\beta<1$ باشد، در شرط انقباضی زیر صدق کند:

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha\frac{d(x,Tx).d(y,Ty)}{d(x,y)} + \beta d(x,y), \tag{۱.۲}$$

آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد.

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل و $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد، $T: X \to X$ نگاشت پیوسته و نانزولی باشد، به‌طوری‌که برای هر $x,y \in X$ که $x \succeq y$ و $x \neq y$ و $\alpha+\beta<1$ داشته باشیم

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha.\frac{d(x,Tx).d(y,Ty)}{d(x,y)} + \beta.d(x,y), \tag{۲.۲}$$

اگر $x_0 \in X$ موجود باشد، به‌طوری‌که $x_0 \preceq Tx_0$ آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان. اگر $Tx_0 = x_0$ آن‌گاه اثبات برهان تمام است. حال فرض کنیم که $x_0 \prec Tx_0$. چون T نگاشتی نانزولی است بااستفاده از استقرا به‌دست می‌آوریم.

$$x_0 \prec Tx_0 \preceq T^2x_0 \preceq \cdots \preceq T^nx_0 \preceq T^{n+1}x_0 \preceq \cdots \tag{۳.۲}$$

حال قرارمی‌دهیم $x_{n+1} = Tx_n$. اگر $n \geq 1$ به‌طوری‌که $x_{n+1} = Tx_n = x_n$، وجود داشته باشد. آن‌گاه x_n یک نقطه ثابت است و اثبات کامل می‌شود.
فرض کنیم برای هر $n \geq 1$، $x_{n+1} \neq x_n$ باشد. در این‌صورت از رابطه (۲.۲) عناصر مقایسه پذیر x_n و x_{n-1} وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $n \geq 1$ داریم،

$$d(x_{n+1},x_n) = d(Tx_n,Tx_{n-1}) \leq \alpha\frac{d(x_n,Tx_n),d(x_{n-1},Tx_{n-1})}{d(x_n,x_{n-1})} + \beta d(x_n,x_{n-1})$$

$$= \alpha\frac{d(x_n,x_{n+1}).d(x_{n-1},x_n)}{d(x_n,x_{n-1})} + \beta d(x_n,x_{n-1}) \tag{۴.۲}$$

$$= \alpha.d(x_n,x_{n+1}) + \beta.d(x_n,x_{n-1}).$$

از آخرین نامساوی نتیجه می‌شود

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\beta}{1-\alpha} d(x_n, x_{n-1}). \tag{۵.۲}$$

بااستفاده از استقرا داریم

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^n d(x_1, x_0), \tag{۶.۲}$$

قرار می‌دهیم $k = \frac{\beta}{(1-\alpha)} < 1$. بااستفاده از نامساوی مثلثی برای هر $m \geq n$ داریم

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\leq \left(k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n\right) d(x_1, x_0) \leq \left(\frac{k^n}{1-k}\right) d(x_1, x_0), \tag{۷.۲}$$

هنگامی که $m, n \longrightarrow +\infty$ داریم $d(x_m, x_n) \longrightarrow 0$.
بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است، چون X یک فضای متریک کامل است. پس $z \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = z$. علاوه براین پیوستگی T نتیجه می‌دهد

$$Tz = T\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} Tx_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n+1} = z, \tag{۸.۲}$$

و این ثابت می‌کند که z یک نقطه ثابت است. و اثبات کامل می‌شود. □

ملاحظه ۱.۱.۲. اگر x_n یک دنباله نانزولی در X باشد به‌طوری‌که $x_n \longrightarrow x$، آن‌گاه $x = \sup\{x_n\}$.

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنیم $(X, \preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و (X, d) فضای متریک کامل باشد. و X در شرط ملاحظه (۱.۱.۲) صدق کند همچنین نگاشت $T : X \to X$ نگاشت پیوسته و نانزولی باشد. به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ که $x \succeq y$ و $x \neq y$ و $\alpha + \beta < 1$ داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha . \frac{d(x, Tx).d(y, Ty)}{d(x, y)} + \beta . d(x, y), \tag{۹.۲}$$

اگر $x_0 \in X$ موجود باشد، به‌طوری‌که $x_0 \preceq Tx_0$ آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت است.

برهان. باتوجه به روند اثبات قضیه (۲.۱.۲) کافی است اثبات کنیم $Tz = z$.
اگر $\{x_n\}$ یک دنباله نانزولی در X باشد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = z$. آن‌گاه با توجه به ملاحظه ۱.۱.۲ داریم $z = \sup\{x_n\}$. بالاخص برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n \preceq z$. از آنجا که T نگاشت نانزولی است لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $Tx_n \preceq Tz$. که معادل است (برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_{n+1} \preceq Tz$) چون $x_0 \prec x_1 \preceq Tz$ و $z = \sup\{x_n\}$ در نتیجه $z \preceq Tz$ به‌دست می‌آید. فرض کنیم که $z \prec Tz$ باشد. مشابه اثبات قضیه (۲.۱.۲) برای $x_0 \preceq Tx_0$، دنباله نانزولی $\{T^n z\}$ را به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که برای بعضی از $y \in X$، $\lim_{n\to\infty} T^n z = y$ موجود است. بااستفاده مجدد از ملاحظه

۱.۱.۲ داریم $y = \sup\{T^n z\}$. چون از $x_\circ \preceq z$، برای هر $n \geq ۱$، داریم $x_n = T^n x_\circ \preceq T^n z$.
چون $x_n \prec T^n z$ برای هر $n \geq ۱$، $x_n \preceq z \prec Tz \preceq T^n z$ را نتیجه می‌دهد.
همان‌طور که x_n و $T^n z$ برای هر $n \geq ۱$ مقایسه پذیر و متمایز هستند و بااستفاده از شرایط انقباضی داریم

$$d(x_{n+۱}, T^{n+۱}z) = d(Tx_n, T(T^n z)) \leq \alpha \frac{d(x_n, Tx_n).d(T^n z, T^{n+۱}z)}{d(x_n, T^n z)} \tag{۱۰.۲}$$

$$+\beta d(x_n, T^n z) = \alpha \frac{d(x_n, x_{n+۱}).d(T^n z, T^{n+۱}z)}{d(x_n, T^n z)} + \beta d(x_n, T^n z)$$

هرگاه n را در نامساوی فوق به سمت بینهایت میل دهیم،داریم

$$d(z, y) \leq \beta d(z, y). \tag{۱۱.۲}$$

لذا اگر $\beta < ۱$ باشد آن‌گاه $d(z, y) = \circ$ بنابراین $z = y$. بالاخص $z = y = \sup\{T^n z\}$. درنتیجه $z \preceq Tz$ یک تناقض است و بنابراین $z = Tz$ است. □

مثال ۱.۱.۲. فرض کنیم $X = \{(\circ, ۱), (۱, \circ), (۱, ۱)\}$ یک فضای متریک مرتب جزئی در X باشد به‌طوری‌که $R = \{(x, x) : x \in X\}$ باشد. که عناصر در X تنها با خود قابل مقایسه هستند. علاوه بر این اگر $(X, d_۲)$ یک فضای متریک کامل باشد که $d_۲$ فاصله اقلیدسی است. همچنین فرض کنیم $T : X \to X$ توسط نگاشت زیر تعریف شده باشد

$$T(\circ, ۱) = (۱, \circ), \qquad T(۱, \circ) = (\circ, ۱), \qquad T(۱, ۱) = (۱, ۱) \tag{۱۲.۲}$$

واضح است که T پیوسته و نانزولی است، ودر شرط رابطه (۲.۲) در قضیه ۲.۱.۲ صدق می کند چون عنصرهای X فقط با خودشان مقایسه پذیر هستند. بنابراین

$$(۱, ۱) \preceq T(۱, ۱) = (۱, ۱)$$

و بااستفاده از قضیه ۲.۱.۲ نتیجه می‌گیریم که T دارای یک نقطه ثابت است.
و $x = (\circ, ۱), y = (۱, \circ) \in X$ خواهیم داشت.

$$d(Tx, Ty) = \sqrt{۲}, \quad d(x.Tx) = \sqrt{۲}, \quad d(y, Ty) = \sqrt{۲}, \quad d(x, y) = \sqrt{۲},$$

در شرط انقباضی قضیه ۱.۱.۲ صدق نمی‌کند چون

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) = \sqrt{۲} &\leq \alpha \frac{d(x, Tx).d(y, Ty)}{d(x, y)} + \beta d(x, y) \\ &= \alpha \frac{\sqrt{۲}.\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} + \beta \sqrt{۲} = (\alpha + \beta)\sqrt{۲}, \end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

بنابراین $\alpha+\beta\geq ۱$.
در نتیجه این مثال نمی‌تواند در شرط قضیه ۱.۱.۲ صدق کند. علاوه بر این، باید توجه داشت که در این مثال منحصر به فرد بودن نقطه ثابت $(X,\preceq)$ در حالتی که x و y مقایسه پذیر نیستند صدق نمی‌کند.

۲.۲ قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های C ـ انقباضی

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل باشد آن‌گاه نگاشت $T:X\longrightarrow X$ را C ـ انقباضی ضعیف[۲] می‌گوییم درحالی که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$d(Tx,Ty)\leq \frac{۱}{۲}(d(x,Ty)+d(y,Tx))-\varphi(d(x,Ty),d(y,Tx)),$$

که در آن $\varphi:[۰,\infty)^۲\longrightarrow[۰,\infty)$ یک تابع پیوسته و نانزولی باشد، بطوری‌که $\varphi(x,y)=۰$ اگر و تنها اگر $x=y=۰$.

۱.۲.۲ نتایج نقطه ثابت برای توابع نانزولی

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنیم $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی ، (X,d) یک فضای متریک کامل $T:X\longrightarrow X$ نگاشتی پیوسته و نانزولی است، به‌طوری‌که در رابطه زیر صدق کند.

$$d(Tx,Ty)\leq \frac{۱}{۲}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]-\varphi\left(d(x,Ty),d(y,Tx)\right)\quad \forall x\succeq y \tag{۱۴.۲}$$

که درآن $\varphi:[۰,\infty)^۲\longrightarrow[۰,\infty)$ تابعی پیوسته و نانزولی باشد به‌طوری‌که $\varphi(x,y)=۰$ اگر و تنها اگر $x=y=۰$. اگر $x_۰\in X$ موجود باشد به طوری که $x_۰\preceq Tx_۰$، آن‌گاه T داری یک نقطه ثابت است.

برهان. اگر $Tx_۰=x_۰$ برهان اثبات شده است
فرض کنیم $x_۰\prec Tx_۰$ و T یک نگاشت نانزولی است ، بنابراین

$$x_۰\prec Tx_۰\preceq T^۲x_۰\preceq T^۳x_۰\preceq\cdots\preceq T^nx_۰\preceq T^{n+۱}x_۰\preceq\cdots.$$

حال قرار می‌دهیم $x_{n+۱}=Tx_n$ و برای هر عدد صحیح $n\neq ۱$ در رابطه (۱۴.۲) با قرار دادن

[۲] weak c-contraction

$x_{n-1} = x_n$ داریم:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= (Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq \frac{1}{2}(d(x_n, Tx_{n-1}) + d(x_{n-1}, Tx_n)) - \varphi(d(x_n, Tx_{n-1}), d(x_{n-1}, Tx_n)) \\ &= \frac{1}{2}(d(x_n, x_n) + d(x_{n-1}, x_{n+1}) - \varphi(d(x_n, x_n), d(x_{n-1}, x_{n+1})) \\ &= \frac{1}{2}(d(x_{n-1}, x_{n+1})) - \varphi(0, d(x_{n-1}, x_{n+1})) \\ &\leq \frac{1}{2}(d(x_{n-1}, x_{n+1})) \\ &\leq \frac{1}{2}(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})) \end{aligned}$$

از این نامساوی داریم

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \tag{۱۵.۲}$$

بنابراین $\{d(x_{n+1}, x_n)\}$ یک دنباله کاهشی از اعداد حقیقی نامنفی است بنابراین همگرا است. فرض کنیم

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_{n+1}, x_n) = r. \tag{۱۶.۲}$$

هرگاه n در رابطه (۱۵.۲) به سمت بی‌نهایت میل کند، داریم.

$$r \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(r + r) = r$$

و یا به طور معادل داریم

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_{n-1}, x_{n+1}) = 2r. \tag{۱۷.۲}$$

بااستفاده مجدد در رابطه (۱۵.۲) هرگاه n به سمت بی‌نهایت میل کند، همچنین از رابطه‌های (۱۶.۲)، (۱۷.۲) و پیوستگی φ داریم.

$$r \leq \frac{1}{2} 2r - \varphi(0, 2r) = r - \varphi(0, 2r) \leq r$$

$\varphi(0, 2r) = 0$ لذا با توجه به مفروضات در مورد φ، $r = 0$ بدست می‌آید بنابراین داریم،

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0. \tag{۱۸.۲}$$

حال بااستفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است، فرض کنیم $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد در این‌صورت زیردنباله‌های صحیح و مثبت (x_{m_k}) و (x_{n_k}) موجود باشد برای هر عدد صحیح و مثبت k داشته باشیم $n_{(k)} > m_{(k)} > k$

$$d(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \epsilon. \tag{۱۹.۲}$$

علاوه بر این متناظر با $m(k)$ می‌توانیم $n(k)$ را طوری در نظر بگیریم که کوچکترین عدد صحیح با $n_{(k)} > m_{(k)} > k$ باشد در رابطه (۱۹.۲) صدق کند

$$d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) < \epsilon. \tag{۲۰.۲}$$

بااستفاده از روابط (۱۹.۲) و (۲۰.۲) و نامساوی مثلثی داریم

$$\begin{aligned}\epsilon &\leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\\ &\leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)})\\ &< d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + \epsilon.\end{aligned}$$

هرگاه با میل دادن k به سمت بینهایت درنامساوی فوق و بااستفاده از رابطه (۱۸.۲) داریم:

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \lim_{k\longrightarrow\infty} d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) = \epsilon. \tag{۲۱.۲}$$

به‌طور مشابه بااستفاده از نامساوی مثلثی داریم

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \leq (x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}).$$

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)}).$$

با میل دادن k به سمت بینهایت در نامساوی فوق و بااستفاده از روابط (۱۸.۲) و (۲۱.۲) داریم

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) = \epsilon. \tag{۲۲.۲}$$

حال چون برای هر عدد صحیح مثبت k، $n(k) > m(k)$ و $x_{m(k)-1}$، $x_{n(k)-1}$ مقایسه پذیر است. سپس با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم

$$\begin{aligned}\epsilon &\leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)})\\ &= d(Tx_{n(k)-1}, Tx_{m(k)-1})\\ &\leq \frac{1}{2}(d(x_{n(k)-1}, Tx_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, Tx_{n(k)-1}))\\ &- \varphi(d(x_{n(k)-1}, Tx_{m(k)-1}), d(x_{m(k)-1}, Tx_{n(k)-1}))\\ &= \frac{1}{2}(d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)})) - \varphi(d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}), d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)})).\end{aligned}$$

هرگاه با میل دادن k به سمت بینهایت در رابطه های (۲۱.۲) (۲۲.۲) و پیوستگی از φ داریم

$$\epsilon \leq \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon) - \varphi(\epsilon, \epsilon) \leq \epsilon$$

از آخرین نامساوی $\varphi(\epsilon, \epsilon) = 0$ و از پیوستگی φ داریم $\epsilon = 0$ که این نتیجه یک تناقض است،

بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. چون (X,d) یک فضای متریک کامل است $z \in X$ ی موجود است، به‌طوری‌که $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = z$ علاوه بر این پیوستگی T نشان می‌دهد

$$z = \lim_{n\longrightarrow\infty} Tx_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n+1} = Tz$$

در نتیجه z یک نقطه ثابت برای T است، پس اثبات برهان تمام است. □

ملاحظه ۱.۲.۲. اگر $\{x_n\}$ یک دنباله ناکاهشی در X باشد به‌طوری که $x_n \to x$ آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم، $x_n \preceq x$.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنیم $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی، (X,d) یک فضای متریک کامل باشد. اگر نگاشت $T : X \longrightarrow X$ نانزولی بوده و در شرط ملاحظه ۱.۲.۲ صدق کند و به علاوه داشته باشیم

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{۱}{۲}(d(x,Ty)+d(y,Tx)) - \varphi(d(x,Ty),d(y,Tx)) \quad \forall x \succeq y,$$

که درآن $\varphi : [۰,\infty)^۲ \longrightarrow [۰,\infty)$ تابعی پیوسته باشد، به‌طوری‌که $\varphi(x,y) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y = ۰$. فرض کنیم عنصر $x_۰$ متعلق به X موجود باشد به‌طوری‌که $x_۰ \preceq Tx_۰$، آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت است.

برهان. پس از اثبات قضیه ۱.۲.۲ باید بررسی کنیم که $z = Tz$. چون $\{x_n\}$ یک دنباله نانزولی در x است و $x_n \longrightarrow z$ در شرط رابطه (۱۴.۲) برای هر $x_n \preceq z$ که $n \in N$ مفروض است و بنابر ملاحظه ۱.۲.۲ داریم

$$\begin{aligned} d(x_{n+۱},Tz) &= d(Tx_n,Tz) \\ &\leq \frac{۱}{۲}(d(x_n,Tz)+d(z,Tx_n)) - \varphi(d(x_n,Tz),d(z,Tx_n)) \\ &= \frac{۱}{۲}(d(x_n,Tz)+d(z,x_{n+۱})) - \varphi(d(x_n,Tz),d(z,x_{n+۱})). \end{aligned}$$

هرگاه n را به سمت بینهایت میل دهیم و بااستفاده از پیوستگی φ داریم

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &\leq \frac{۱}{۲}(d(z,Tz)+d(z,z)) - \varphi(d(z,Tz),d(z,z)) \\ &= \frac{۱}{۲}(d(z,Tz)) - \varphi(d(z,Tz),۰) \\ &\leq \frac{۱}{۲}d(z,Tz) \end{aligned}$$

و این انقباضی است جزاینکه $d(z,Tz) = ۰$ یا هم ارز $Tz = z$ باشد. □

در مثال زیر به دو فرضیه قضیه ها می پردازیم

مثال ۱.۲.۲. فرض کنیم با در نظر گرفتن ترتیب معمولی $X = \{(1,0),(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \preceq (z,t) \Longleftrightarrow x \leq z, y \leq t$$

بنابراین $(X,\preceq)$ یک مجموعه جزئی مرتب است که عناصر مختلفش باهم مقایسه پذیر نیستند. به‌علاوه اگر d_2 متر اقلیدسی باشد، (X,d_2) یک فضای متریک کامل است، چون به طور بدیهی نگاشت همانی $T(x,y)=(x,y)$ پیوسته و نانزولی است و در شرایط (۱۴.۲) قضیه ۱.۲.۲ صدق می‌کند که عناصر آن در X فقط با خودشان مقایسه پذیر ند، به‌علاوه $(1,0) \preceq T(1,0) = (1,0)$ دراین‌صورت T دو نقطه ثابت در X دارد.

باتوجه به نتایج قبل، شرط کافی برای منحصر به فرد بودن نقطه ثابت را بررسی می‌کنیم برای قضایای ۱.۲.۲ ، ۲.۲.۲ در مقاله [۲۲] بحث شده. بدین صورت که برای $x,y \in X$ کران بالا و پایینی وجود دارد.
درمقاله [۱۵] ثابت شده است که شرط فوق معادل است با اینکه:

* برای هر $x,y \in X$ یک $z \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که z با x و y مقایسه پذیر است.

حال اگر شرط * را به قضیه ۲.۲.۲ بیفزاییم، یکتایی نقطه ثابت نتیجه می‌شود.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنیم برای $x,y \in X$ یک $z \in X$ موجود باشد به‌طوری‌که z با x و y مقایسه پذیر باشد. همچنین $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و (X,d) فضای متریک کامل باشد. فرض کنیم $T: X \longrightarrow X$ نگاشت نانزولی باشد،و

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)] - \varphi(d(x,Ty),d(y,Tx)) \quad \forall x \succeq y \tag{۲۳.۲}$$

که درآن $\varphi: [0,\infty)^2 \longrightarrow [0,\infty)$ تابعی پیوسته و نانزولی است، به‌طوری‌که $\varphi(x,y)=0$ اگر و تنها اگر $x=y=0$. به‌علاوه اگر عنصر $x_0 \in X$ موجود باشد، به‌طوری‌که $x_0 \succeq Tx_0$ یا $x_0 \preceq Tx_0$ آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان. فرض کنیم $z,y \in X$ نقاط ثابت در T باشد دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم

الف) اگر y با z مقایسه پذیر باشد ،آن‌گاه $T^ny=y$ برای هر $n=1,2,3,\ldots$ با $T^nz=z$ مقایسه پذیر است،

$$\begin{aligned}
d(y,z) &= d(T^ny,T^nz)\\
&\leq \frac{1}{2}(d(T^{n-1}y,T^nz)+d(T^{n-1}z,T^ny)) - \varphi(d(T^{n-1}y,T^nz),d(T^{n-1}z,T^ny))\\
&= \frac{1}{2}(d(y,z)+d(z,y)) - \varphi(d(y,z),d(z,y))\\
&= d(y,z) - \varphi(d(y,z),d(z,y))\\
&\leq d(y,z)
\end{aligned}$$

لذا $\varphi(d(y,z),d(z,y))=0$ سپس با توجه ویژگی های φ داریم، $d(y,z)=0$ یا به طور معادل $y=z$.

ب) اگر y با z مقایسه پذیر نباشد آنگاه $x\in X$ وجود دارد که با y و z مقایسه پذیر است، یکنوایی T نتیجه می‌دهد که برای هر $n=1,2,3,\ldots$ ، T^nx مقایسه پذیر است با $T^ny=y$ و $T^nz=z$. که در شرایط قضیه ۲.۲.۲ صدق می‌کند، داریم

$$\begin{aligned} d(z,T^nx)&=d(T^nz,T^nx)\\ &\le \frac{1}{2}(d(T^{n-1}z,T^nx)+d(T^{n-1}x,T^nz))\\ &-\varphi(d(T^{n-1}z,T^nx),d(T^{n-1}x,T^nz))\\ &=\frac{1}{2}(d(z,T^nx)+d(T^{n-1}x,z))-\varphi(d(z,T^nx),d(T^{n-1}x,z))\\ &\le \frac{1}{2}(d(z,T^nx)+d(z,T^{n-1}x)) \end{aligned} \tag{۲۴.۲}$$

و از نامساوی فوق نتیجه می‌شود

$$d(z,T^nx)\le d(z,T^{n-1}x)$$

دنباله نامنفی کاهشی $(d(z,T^nx))$ که همگرا است. فرض می‌کنیم $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(z,T^nx)=r$. دراین صورت هرگاه در رابطه (۲۴.۲)، n را به سمت بینهایت میل دهیم و با توجه به پیوستگی φ خواهیم داشت،

$$r\le\frac{1}{2}(r+r)-\varphi(r,r)\le r.$$

این نتیجه می دهد که $\varphi(r,r)=0$. و لذا $r=\varphi=0$ در نتیجه $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(z,T^nx)=0$. با همین قیاس داریم $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(y,T^nx)=0$. در نهایت منحصربه فرد بودن حد نتیجه می‌دهد که $y=z$ و اثبات قضیه تمام است.

□

ملاحظه ۲.۲.۲. توجه داشته باشید اگر $(X,\preceq)$ یک مجموعه کلاً مرتب باشد، و در شرط رابطه (۲۴.۲) صدق می‌کند و لذا منحصر به فرد بودن نقطه ثابت را می‌توان نتیجه گرفت.

ملاحظه ۳.۲.۲. فرض کنیم $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ اگر در قضیه ۲.۲.۲ و φ ، داریم $\varphi:[0,\infty)^2\longrightarrow[0,\infty)$ باشد به‌طوری‌که

$$\varphi(a,b)=(\frac{1}{2}-\alpha)(a+b)$$

به روشنی واضح است که $\varphi(a,b)=0$ اگر و تنها اگر $a=b=0$، در شرط قضیه (۱.۲.۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$d(Tx.Ty)\le\alpha(d(x,Ty)+d(y,Tx))\quad \forall x\succeq y$$

قضیه های ۱.۲.۲ ، ۲.۲.۲ یا۳.۲.۲ می‌تواند به عنوان حالتی از فضاهای متریک در نظر گرفته شود و همچنین نتایجی در مورد نقطه ثابت نگاشت‌های صعودی در این خصوص توسط چهارتاجا[۳] [۴] اثبات شده اند.

۲.۲.۲ نتایج نقطه ثابت برای توابع ناصعودی

در این بخش به بررسی قضیه نگاشت C ـ انقباضی ضعیف می‌پردازیم زمانی که T نگاشتی ناصعودی باشد

تعریف ۲.۲.۲. اگر $(X, \preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد، نگاشت $T : X \longrightarrow X$ را ناصعودی گوییم اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$x \preceq y \Longrightarrow Tx \succeq Ty$$

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنیم $(X, \preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی، (X, d) یک فضای متریک کامل و $T : X \longrightarrow X$ نگاشت پیوسته و ناصعودی باشد که برای هر $x, y \in X$ ، $z \in X$ ی وجود داشته باشد به‌طوری‌که با x و y مقایسه پذیر باشد، در شرط زیر صدق کند

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{۱}{۲}(d(x, Ty) + d(y, Tx)) - \varphi(d(x, Ty), d(y, Tx)) \quad \forall x \succeq y \tag{۲۵.۲}$$

که درآن $\varphi : [\circ, \infty)^{۲} \longrightarrow [\circ, \infty)$ تابعی پیوسته است، به‌طوری‌که $\varphi(x, y) = \circ$ اگر و تنها اگر $x = y = \circ$. اگر عنصر $x_\circ \in x$ موجود باشد به‌طوری‌که $x_\circ \succeq Tx_\circ$ یا $x_\circ \preceq Tx_\circ$ آن‌گاه $\inf\{d(x.Tx) : x \in X\} = \circ$ است. علاوه بر این اگر X فشرده و T پیوسته باشد آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان. اگر $Tx_\circ = x_\circ$ آنگاه واضح است $\inf\{d(x.Tx) : x \in X\} = \circ$. حال فرض کنیم $x_\circ \prec Tx_\circ$ (برای همین استدلال نیز به‌کار می‌رود $x_\circ \succ Tx_\circ$) . در حققیت T ناصعودی وبه‌صوررت متوالی با دنباله $T^n x_\circ$ قابل مقایسه است و بااستفاده از (۲۵.۲) بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
d(T^{n+۱}x_\circ, T^n x_\circ) &\leq \frac{۱}{۲}(d(T^n x_\circ, T^n x_\circ) + d(T^{n-۱}x_\circ, T^{n+۱}x_\circ)) \\
&\quad - \varphi(d(T^n x_\circ, T^n x_\circ), d(T^{n-۱}x_\circ, T^{n+۱}x_\circ)) \\
&= \frac{۱}{۲}(d(T^{n-۱}x_\circ, T^{n+۱}x_\circ)) - \varphi(\circ, d(T^{n-۱}x_\circ, T^{n+۱}x_\circ)) \\
&\leq \frac{۱}{۲}(d(T^{n-۱}x_\circ, T^n x_\circ) + d(T^n x_\circ, T^{n+۱}x_\circ)).
\end{aligned}$$

از نامساوی فوق با فرض $r > \circ$ ، $\{d(T^{n+۱}x_\circ, T^n x_\circ)\}$ یک دنباله نامنفی کاهشی نتیجه می‌شود، بااستفاده از قضیه ۱.۲.۲ که $r = \circ$. و این به بدان معنی است که $\lim_{n \longrightarrow \infty} d(T^{n+۱}x_\circ, T^n x_\circ) = \circ$

[۳] chatterjea

و در نتیجه $\inf\{d(x,Tx) : x \in X\} = ۰$ این اثبات بخش اول را تمام می‌کند. اکنون فرض کنیم که X فشرده و T پیوسته است با توجه به این‌که نگاشت

$$X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow d(x,Tx),$$

پیوسته است که این نگاشت می‌تواند بدین صورت باشد

$$X \longrightarrow X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow (x,Tx) \longrightarrow d(x,Tx),$$

به روشنی واضح است که این ترکیب دو نگاشت پیوسته است زیرا T پیوسته است. و از آنجایی که X فشرده است مقدار $z \in X$ ای وجود دارد، بطوری‌که

$$d(z,Tz) = \inf\{d(x,Tx) : x \in X\}.$$

باتوجه به قسمت اول قضیه

$$d(z,Tz) = ۰$$

بنابراین z یک نقطه ثابت منحصر به فرد از T است. درقضیه ۳.۲.۲ به اثبات رساندیم. □

۳.۲ مثال

مثال ۱.۳.۲. فرض کنیم $X = \{(۰,۱),(۱,۰),(۱,۱)\} \subset \mathbb{R}^۲$ با $d_۲$ متراقلیدسی $(X,d_۲)$ بدیهی است که یک فضای متریک کامل است علاوه بر این ترتیب $\preceq$ در X توسط $R = \{(x,x) : x \in X\}$. درنظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که عناصر X تنها با خودشان قابل مقایسه هستند. همچنین نگاشت $T : X \to X$ به این صورت تعریف می‌شود

$$T(۱,۰) = (۰,۱)$$

$$T(۰,۱) = (۱,۰)$$

$$T(۱,۱) = (۱,۱).$$

به وضوح T نگاشت پیوسته و نانزولی است و لذا $(۱,۱) \preceq T(۱,۱)$. از آنجا که عناصر X فقط با خودشان قابل مقایسه هستند در شرایط قضیه ۱.۲.۲صدق می‌کند و

$$\sqrt{۲} = d_۲(T(۱,۰),T(۰,۱)) = d_۲((۰,۱),(۱,۰))$$

$$\frac{۱}{۲}(d_۲((۱,۰),T(۰,۱)) + d_۲((۰,۱),T(۱,۰))) = ۰,$$

به روشنی در شرایط قضیه ها صدق می‌کند.

مثال ۲.۳.۲. با درنظر گرفت فضای X در مثال ۱.۳.۲ و متر اقلیدسی $d_۲$ و با ترتیب داده شده $R = \{(x,x) : x \in X\} \cup \{((۰,۱),(۱,۱))\}$. فرض کنید نگاشت $T : X \longrightarrow X$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد $T(۰,۱) = (۰,۱), T(۱,۱) = (۰,۱)$ و $T(۱,۰) = (۱,۰)$. واضح است که T یک نگاشت پیوسته و نانزولی است زیرا $(۱,۱) \preceq (۰,۱)$ و $T(۱,۱) = (۰,۱) \preceq T(۰,۱) = (۰,۱)$. بنابراین طبق رابطه (۱۴.۲) در قضیه ۱.۲.۲ برای $(۱,۱) \preceq (۰,۱)$ داریم

$$d(T(۰,۱),T(۱,۱)) = d((۰,۱),(۰,۱)) = ۰.$$

بنابراین در رابطه (۱۴.۲) صدق می‌کند. همچنین $T(۰,۱) \preceq (۰,۱)$ در قضیه ۱.۲.۲ گفته شد T دارای نقطه ثابت است. بنابراین $(۰,۱)$ و $(۱,۰)$ نقاط ثابت از T هستند، در نتیجه نقطه ثابت یکتایی نداریم. از این گذشته $(X,\preceq)$ در شرایط قضیه ۳.۲.۲ صدق نمی‌کند.
از سوی دیگر نگاشت T، C ـ انقباضی ضعیف نیست چون

$$d_۲(T(۱,۰),T(۰,۱) = d_۲((۱,۰),(۰,۱)) = \sqrt{۲},$$

و

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{۲}(d_۲((۱,۰),T(۰,۱)) + d_۲((۰,۱),T(۱,۰))) - \varphi(d_۲(۱,۰),T(۰,۱),d_۲((۰,۱),T(۱,۰)))\\
&= \frac{۱}{۲}(d_۲((۱,۰),(۰,۱)) + d_۲((۰,۱),(۱,۰))) - \varphi(d_۲(۱,۰),(۰,۱),d_۲((۰,۱),(۱,۰))))\\
&= \frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}+\sqrt{۲}) - \varphi(\sqrt{۲},\sqrt{۲})\\
&= \sqrt{۲} - \varphi(\sqrt{۲},\sqrt{۲})\\
&< \sqrt{۲},
\end{aligned}$$

بنابراین $\varphi(x,y) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y = ۰$.

فصل ۳

قضایای نقطه ثابت جفت شده درفضاهای متریک مرتب

۱.۳ مقدمه

باشکر[۱] و لاکسم مکتهام[۲] به معرفی مفهوم یکنوایی جفت شده نقاط ثابت در فضای متریک پرداختند. مطالب این فصل از مراجع [۳] ، [۶] می‌باشند.

۱.۱.۳ نتایج قضایای نقطه ثابت جفت شده

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنیم X یک فضای متریک کامل باشد. نگاشت C ـ انقباضی $T: X \to X$ دارای یک نقطه منحصر به فرد ثابت است.اگر $u \in X$ ای موجود باشد به قسمی که $u = Tu$.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم $(X, \preceq)$ مجموعه مرتب جزیی باشد. نگاشت $T: X \times X \to X$ دارای ویژگی یکنوای جفت شده است اگر $T(x,y)$ نانزولی یکنوا نسبت به X و ناصعودی یکنوا نسبت به y باشد. به‌عبارت دیگر اگر به ترتیب، برای هر $x, y \in X$

$$x_۱, x_۲ \in X, \quad x_۱ \preceq x_۲ \Longrightarrow T(x_۱, y) \preceq T(x_۲, y).$$

---

[۱] bhaskar

[۲] lakshmikantham

$$y_۱, y_۲ \in X, \quad y_۱ \preceq y_۲ \Longrightarrow T(x, y_۱) \succeq T(x, y_۲).$$

تعریف ۲.۱.۳. هرعنصر $(x, y) \in X \times X$ را نقطه ثابت جفت شده نگاشت $T : X \times X \to X$ می‌گوییم، اگر

$$T(x, y) = x, \qquad T(y, x) = y.$$

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنیم $(X, d, \preceq)$ یک فضای متریک مرتب جزیی و $T : X \times X \to X$ یک نگاشتی که دارای ویژگی یکنوای جفت شده در X است. در نظرمی‌گیریم که X در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. اگر (x_n) یک دنباله نانزولی همگرا به x باشد، آن‌گاه $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \preceq x$

۲. اگر (y_n) یک دنباله ناصعودی همگرا به y باشد، آن‌گاه $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \succeq y$.

به‌علاوه فرض کنیم برای هر $k \in [۰, ۱)$ داشته باشیم

$$d(T(x, y), T(u, v)) \leq \frac{k}{۲}(d(x, u) + d(y, v)), \quad \forall x \preceq u, y \succeq v.$$

حال اگر $(x_۰, y_۰) \in X \times X$ موجود باشد، به‌طوری‌که $x_۰ \preceq T(x_۰, y_۰)$ و $y_۰ \succeq T(y_۰, x_۰)$ آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت جفت شده است.

برهان. رجوع شود به مرجع [۳] $\square$

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنیم $(X, \preceq, d)$ یک فضای متریک مرتب کامل باشد و نگاشت $T : X \to X$ پیوسته و نانزولی باشد. اگر برای x و y مقایسه پذیر داشته باشیم

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi\left(\frac{۱}{۲}(d(x, Ty) + d(y.Tx))\right) - \varphi(d(x, Ty), d(y, Tx)) \tag{۱.۳}$$

که درآن

۱. $\psi : [۰, +\infty) \to [۰, +\infty)$ تابع تغییر فاصله است.

۲. $\varphi : [۰, +\infty) \times [۰, +\infty) \to [۰, +\infty)$ یک تابع پیوسته با این خاصیت باشد که $\varphi(t, s) = ۰$ اگر و تنها اگر $s = t = ۰$.
اگر $x_۰ \in X$ موجود باشد که $x_۰ \preceq Tx_۰$

آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت است.

برهان. اگر $Tx_۰ = x_۰$. آن‌گاه $x_۰$ نقطه ثابت از T است. حال فرض کنیم که $x_۰ \prec Tx_۰$ ، باشد. $x_۱ \in X$ رادرنظر می‌گیریم که $Tx_۰ = x_۱$. چون T یک تابع نانزولی است. پس داریم

$$x_۰ \preceq x_۱ = Tx_۰ \preceq Tx_۱.$$

حال فرض می‌کنیم $x_0 \prec x_1 = Tx_0 \preceq x_2 = Tx_1 \preceq Tx_2$.
باادامه این روند می‌توانیم دنباله $\{x_n\}$ در X بسازیم به‌طوری‌که $x_{n+1} = Tx_n$ بدین‌صورت

$$x_0 \prec x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq x_{n+1} \preceq \cdots .$$

از آن‌جا که x_n و x_{n+1} مقایسه‌پذیر هستند، توسط نامساوی (۱۲.۳) داریم

$$\begin{aligned}\psi(d(x_n, x_{n+1})) &= \psi(d(Tx_{n-1}, Tx_n)) \\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1}))\right) - \varphi(d(x_{n-1}, Tx_n), d(x_n, Tx_{n-1})) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}d(x_{n-1}, x_{n+1})\right) - \varphi(d(x_{n-1}, x_{n+1}), 0) \\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}(d(x_{n-1}, x_{n+1}))\right)\end{aligned} \tag{۲.۳}$$

چون ψ یک تابع نانزولی است. پس داریم

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(d(x_{n-1}, x_{n+1})). \tag{۳.۳}$$

توسط نامساوی مثلثی به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}d(x_n, x_{n+1}) &\leq \frac{1}{2}(d(x_{n-1}, x_{n+1})) \\ &\leq \frac{1}{2}(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})).\end{aligned} \tag{۴.۳}$$

بنابراین

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_{n-1}, x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

بنابراین از رابطه (۴.۳) به دنباله ناصعودی $\{d(x_n, x_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ دست می‌یابیم. لذا $r \geq 0$ ای وجو دارد، به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r. \tag{۵.۳}$$

همچنین توسط رابطه (۳.۳) به‌دست می‌آوریم

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}d(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})) \tag{۶.۳}$$

هرگاه n را به سمت بینهایت میل دهیم و از رابطه ۵.۳ داریم

$$r \preceq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}d(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(r + r) \tag{۷.۳}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n-1}.x_{n+1}) = 2r. \tag{۸.۳}$$

به علاوه از، پیوستگی ψ ، φ و رابطه ۸.۳ خواهیم داشت:

$$\psi(r) \leq \psi\left(\frac{۱}{۲}(۲r)\right) - \varphi(۲r, ۰).$$

از این نتیجه می‌گیریم که $\varphi(۲r,۰) = ۰$ بنابراین $r = ۰$.
حال نشان می‌دهیم که $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی از X است. فرض کنیم برهان خلف که $\{x_n\}$ دنباله کوشی نباشد آن‌گاه یک $\epsilon > ۰$ و زیر دنباله $\{x_{m(i)}\}$ و $\{x_{n(i)}\}$ از دنباله $\{x_n\}$ یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$n(i) > m(i) > i, \qquad d(x_{m(i)}, x_{(i)}) \geq \epsilon. \tag{۹.۳}$$

در نتیجه

$$d(x_{m(i)}, x_{n(i)-۱}) < \epsilon. \tag{۱۰.۳}$$

واز نامساوی رابطه های (۹.۳) و (۱۰.۳) خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \\
&\leq d(x_{m(i)}, x_{m(i)+۱}) + d(x_{m(i)+۱}, x_{n(i)-۱}) + d(x_{(n(i)-۱)}, x_{n(i)}) \\
&\leq d(x_{m(i)}, x_{m(i)+۱}) + d(x_{m(i)+۱}, x_{n(i)}) + ۲d(x_{n(i)-۱}, x_{n(i)}) \\
&< ۲d(x_{m(i)}, x_{m(i)+۱}) + \epsilon + ۳d(x_{n(i)-۱}, x_{n(i)}).
\end{aligned}$$

هرگاه i را در رابطه‌ی ۵.۳ به سمت بینهایت میل دهیم، خواهیم داشت.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) = \lim_{i\to\infty} d(x_{m(i)+۱}, x_{n(i)-۱}) = d(x_{m(i)+۱}, x_{n(i)}) = \epsilon. \tag{۱۱.۳}$$

از رابطه ۱۲.۳ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}
\psi(d(x_{m(i)+۱}, x_{n(i)})) &= \psi(d(Tx_{m(i)}, Tx_{n(i)-۱})) \\
&\leq \psi\left(\frac{۱}{۲}(d(x_{m(i)}, Tx_{n(i)-۱}) + d(x_{n(i)-۱}, Tx_{m(i)}))\right) \\
&\quad - \varphi(d(x_{m(i)}, Tx_{n(i)-۱}), d(x_{n(i)-۱}, Tx_{m(i)})) \\
&= \psi\left(\frac{۱}{۲}(d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) + d(x_{n(i)-۱}, x_{m(i)+۱}))\right) \\
&\quad - \varphi(d(x_{m(i)}, x_{n(i)}), d(x_{n(i)-۱}, x_{m(i)+۱})).
\end{aligned}$$

هرگاه i را به سمت بینهایت میل دهیم، بااستفاده از رابطه ۱۱.۳ و پیوستگی ψ و φ به‌دست می‌آوریم

$$\psi(\epsilon) \leq \psi(\epsilon) - \varphi(\epsilon, \epsilon).$$

بنابراین $\varphi(\epsilon,\epsilon) = ۰$ و همچنین $\epsilon = ۰$ که یک تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در X است. پس $u \in X$ ای وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = u$. پس T پیوسته است و $x_n \to u$ داریم $x_{n+۱} = Tx_n \to Tu$ با توجه به یکتایی حد، نتیجه می‌گیریم $u = Tu$. $\square$

اینک شرط پیوستگی T را در قضیه‌ی قبل حذف می‌کنیم. قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۴.۱.۳. $(X, \preceq, d)$ یک فضای متریک مرتب کامل باشد و نگاشت $T : X \to X$ نانزولی باشد. اگر برای x و y مقایسه پذیر داشته باشیم

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi\left(\frac{۱}{۲}(d(x, Ty) + d(y.Tx))\right) - \varphi(d(x, Ty), d(y, Tx)) \qquad (۱۲.۳)$$

که در آن

۱. $\psi : [\circ, +\infty) \to [\circ, +\infty)$ تابع تغییر فاصله است.

۲. $\varphi : [\circ, +\infty) \times [\circ, +\infty) \to [\circ, +\infty)$ یک تابع پیوسته با این خاصیت باشد که $\varphi(t, s) = \circ$ اگر و تنها اگر $s = t = \circ$.

اگر $x_\circ \in X$ ی موجود باشد، به‌طوری‌که $x_\circ \preceq Tx_\circ$ آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت است.

برهان. همانند قضیه ۳.۱.۳ یک دنباله کوشی $\{x_n\}$ در X موجود است. چون X کامل است. $u \in X$ ی وجود دارد، به طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u$. چون $\{x_n\}$ یک دنباله نانزولی است و باخاصیت $x_n \preceq u$. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم، بنابراین باتوجه به رابطه ۱۲.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\psi(d(Tu, x_{n+۱})) &= \psi(d(Tu, Tx_n)) \\
&\leq \psi\left(\frac{۱}{۲}(d(u, Tx_n) + d(x_n, Tu))\right) - \varphi(d(u, Tx_n), d(x_n, Tu)) \\
&\leq \psi\left(\frac{۱}{۲}(d(u, Tx_n) + d(x_n, Tu))\right) \\
&= \psi\left(\frac{۱}{۲}(d(u, x_{n+۱}) + d(x_n, Tu))\right).
\end{aligned}$$

هرگاه n را به سمت بینهایت میل دهیم و بااستفاده از پیوستگی ψ نتیجه می‌گیریم

$$\psi(Tu, u) \leq \psi\left(\frac{۱}{۲}d(u, Tu)\right).$$

چون ψ نانزولی است.در نتیجه

$$d(Tu, u) \leq \frac{۱}{۲}d(Tu, u).$$

بنابراین $d(Tu, u) = \circ$ و از این‌رو $u = Tu$. □

ملاحظه ۱.۱.۳. اگر $\psi = i_{[\circ,\infty]}$ تابع همانی در قضیه ۳.۱.۳ باشد، آن‌گاه قضیه ۱.۲.۲ به دست می‌آید.

ملاحظه ۲.۱.۳. اگر $\psi = i_{[\circ,\infty]}$ تابع همانی درقضیه ۴.۱.۳ باشد. آن‌گاه قضیه ۲.۲.۲ به دست می‌آید.

قضیه ۵.۱.۳. [۸] فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل باشد و S و Tز که $S,T:X\to X$ نگاشت‌هایی باشند، به‌طوری که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$\psi(d(Tx,Sy))\leq\psi(M(x,y))-\varphi(M(x,y)), \tag{۱۳.۳}$$

که

- $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ تابع پیوسته و نانزولی است. به‌طوری‌که $\psi(t)=0$ اگروتنهااگر $t=0$.
- $\varphi:[0.\infty)\to[0,\infty)$ نیم پیوسته پایینی است به‌طوری‌که $\varphi(t)=0$ اگروتنهااگر $t=0$.
- $M(x,y)=\max\{d(x,y),d(Tx,x),d(Sy,y),\frac{1}{2}[d(y,Tx)+d(x,Sy)]\}$

آن‌گاه نقطه منحصر به فرد $u\in X$ وجود دارد به‌طوری که $u=Tu=Su$.

برهان. قضیه را درچند مرحله اثبات می‌کنیم.

۱. برای هر $x_0\in X$ دنباله $\{x_n\}$ برای هر $n\geq 0$ حالت بازگشتی را ایجاد کنیم

$$x_{2n+1}=Sx_{2n},\quad x_{2n}=Tx_{2n+1}$$

حال به اثبات $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}d(x_n,x_{n-1})=0$ می‌پردازیم. فرض کنیم n یک عدد فرد باشد و رابطه (۱۳.۳) $x=x_n$ و $y=x_{n-1}$ قراردهیم و با استفاده از پیوستگی توابع ψ و φ داریم

$$\begin{aligned}\psi(d(x_{n+1},x_n))&=\psi(Tx_n,Sx_{n-1})\\&\leq\psi(M(x_n,x_{n-1}))-\varphi(M(x_n,x_{n-1}))\\&\leq\psi(M(x_n,x_{n-1}))\end{aligned}$$

به این معنی است که

$$d(x_{n+1},x_n)\leq M(x_n,x_{n-1}).$$

حال از نامساوی مثلثی برای d به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}M(x_n,x_{n-1})&=\max\left\{d(x_n,x_{n-1}),d(x_{n+1},x_n),d(x_n,x_{n-1}),\frac{1}{2}(d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_n,x_n))\right\}\\&=\max\left\{d(x_n,x_{n-1}),d(x_{n+1},x_n),\frac{1}{2}(d(x_{n-1},x_{n+1}))\right\}\\&\leq\max\left\{d(x_n,x_{n-1}),d(x_{n+1},x_n).\frac{1}{2}(d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1}))\right\}.\end{aligned}$$

اگر $d(x_{n+1},x_n)>d(x_n,x_{n-1})$ باشد آن‌گاه $M(x_n,x_{n-1})=d(x_{n+1},x_n)>0$. علاوه براین، این نشان می‌دهد که

$$\psi(d(x_{n+1},x_n))\leq\psi(d(x_{n+1},x_n)-\varphi(d(x_{n+1},x_n))$$

که این یک تناقض است.در نتیجه داریم

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq M(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, x_{n-1}) \qquad (۱۴.۳)$$

به‌طور مشابه می‌توان از نامساوی (۱۴.۳) در زمانی که n یک عدد زوج است. یک دنباله $\{d(x_{n+1}, x_n)\}$ که کراندار ناصعودی است. را به دست آورد، لذا

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = \lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n-1}) = r \geq 0$$

هرگاه در نامساوی فوق، n را به سمت بینهایت میل دهیم خواهیم داشت

$$\psi(d(x_{n+1}, x_n)) \leq \psi(M(x_n, x_{n-1})) - \varphi(M(x_n, x_{n-1}))$$

در نتیجه داریم، $\psi \leq \psi(r) - \varphi(r)$ که این یک تناقض است جزاینکه $r = 0$ باشد. بنابراین داریم

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \qquad (۱۵.۳)$$

۲. حال ثابت می‌کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است.به‌واسطه رابطه (۱۵.۳) کافی است نشان دهیم $\{x_{2n}\}$ دنباله کوشی است، حال بااستفاده از برهان خلف، فرض می‌کنیم $\{x_{2n}\}$ دنباله کوشی نباشد، پس یک $\epsilon > 0$ و زیردنباله‌های $\{x_{2m(k)}\}$ و $\{x_{2n(k)}\}$ از $\{x_{2n}\}$ یافت می‌شود. به‌طوری‌که

$$n_{(k)} > m_{(k)} > k, \quad d(x_{2m_{(k)}}, x_{2m_{(k)}}) \geq \epsilon$$

این به این مفهوم است که

$$d(x_{2m(k)}, x_{2n_{(k)-2}}) < \epsilon \qquad (۱۶.۳)$$

از رابطه (۱۶.۳) و نامساوی مثلثی به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq d(x_{2m_{(k)}}, x_{2n_{(k)}}) \\
&\leq d(x_{2m_{(k)}}, x_{2n_{(k)-2}}) + d(x_{2n_{(k)-2}}, x_{2n_{(k)-1}}) + d(x_{2n_{(k)-1}}, x_{2n_{(k)}}) \\
&< \epsilon + d(x_{2n_{(k)-2}}, x_{2n_{(k)-1}}) + d(x_{2n_{(k)-1}}, x_{2n_{(k)}})
\end{aligned}$$

همان‌طور که k را به سمت بینهایت میل دهیم و بااستفاده از رابطه (۱۵.۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (d(x_{2_{m(k)}}, x_{2_{n(k)}}) = \epsilon \qquad (۱۷.۳)$$

بنابراین با

$$\left| d(x_{2_{m(k)}}, x_{2n_{(k)+1}}) - d(x_{2m_{(k)}}, x_{2n_{(k)}}) \right| \leq d(x_{2n_{(k)}}, x_{2n_{(k)+1}})$$

$$\left|d(x_{۲m_{(k)-۱}}, x_{۲n_{(k)}}) - d(x_{۲m_{(k)}}, x_{۲n_{(k)}})\right| \leq d(x_{۲m_{(k)}}, x_{۲m_{(k)-۱}})$$

بااستفاده از رابطه‌های (۱۵.۳) و (۱۷.۳) بدین ترتیب

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_{۲m_{(k)-۱}}, x_{۲n(k)}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_{۲m_{(k)}}, x_{۲n_{(k)+۱}}) = \epsilon \qquad (۱۸.۳)$$

و همچنین از

$$\left|d(x_{۲m(k)-۱}, x_{۲n(k)+۱}) - d(x_{۲m(k)-۱}, x_{۲n(k)})\right| \leq d(x_{۲n_{(k)}}, x_{۲n_{(k)+۱}})$$

و با استفاده از رابطه (۱۵.۳) و (۱۸.۳) به دست می‌آید

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_{۲m_{(k)-۱}}, x_{۲n_{(k)+۱}}) = \epsilon. \qquad (۱۹.۳)$$

همچنین و با استفاده معادله M و رابطه های (۱۵.۳) و (۱۷.۳) (۱۹.۳) به این نتیجه دست می‌یابیم.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} M(x_{۲m_{(k)-۱}}, x_{۲n_{(k)}}) = \epsilon. \qquad (۲۰.۳)$$

اگر درمعادله (۱۳.۳) به جای $x = x_{۲m_{(k)-۱}}$ و $y = x_{۲n_{(k)}}$ قرار دهیم. به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\psi(d(x_{۲m(k)}, x_{۲n(k)+۱})) &= \psi(d(Tx_{۲m(k)-۱}, Sx_{۲n(k)}))\\ &\leq \psi(M(x_{۲m_{(k)-۱}}, x_{۲n_{(k)}})) - \varphi(M(x_{۲m_{(k)-۱}}, x_{۲n(k)})).\end{aligned}$$

هرگاه k را به سمت بینهایت میل دهیم وبااستفاده از رابطه (۱۹.۳) و (۱۸.۳) به این نتیجه دست می‌یابیم

$$\psi(\epsilon) \leq \psi(\epsilon) - \varphi(\epsilon) \qquad (۲۱.۳)$$

که با $\epsilon > ۰$ در تناقض است. چون $\{x_{۲n}\}$ و $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در X هستند و همچنین چون X یک فضای متریک کامل است. پس ی u وجود دارد، به‌طوری‌که $x_n \longrightarrow u$ درحالی که $n \longrightarrow \infty$.

۳. اکنون ثابت می‌کنیم u نقطه ثابتی برای T و S است. طبق اثبات قضیه (۱ − ۲) در مقاله [۲۷] می توانیم فرض کنیم $M(u, x_{۲n}) = d(u, Tu)$. باشد. بنابراین

$$\psi(d(Tu, x_{۲n+۱})) = \psi(d(Tu, Sx_{۲n})) \leq \psi(M(u, x_{۲n})) - \varphi(M(u, x_{۲n}))$$

هرگاه n را به سمت بینهایت میل دهیم به دست می‌آید.

$$\psi(d(Tu, u)) \leq \psi(d(Tu, u)) - \varphi(d(Tu, u))$$

که این نشان می‌دهد $\psi(d(Tu,u)) = 0$ چون $d(Tu,u) = 0$ یا $Tu = u$. لذا u یک نقطه ثابت برای T است. در نتیجه

$$\begin{aligned}\psi(d(u,Su) &= \psi(d(Tu,Su))\\ &\leq \psi(M(u,u) - \varphi(M(u,u))\\ &= \psi(d(u,Su)) - \varphi(d(u,Su))\end{aligned}$$

و با استفاده از استدلال مشابه آنچه در بالا ذکر شد، نتیجه می گیریم که $d(u,Su) = 0$ یا $u = Su$.

۴. اگر نقطه ثابت دیگری همچون $v \in X$ وجود داشته باشد. آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned}\psi(d(u,v)) &= \psi(d(Tu,Sv))\\ &\leq \psi(M(u,v)) - \varphi(M(u,v))\\ &= \psi(d(u,v)) - \varphi(d(u,v))\end{aligned}$$

بنابراین $u = v$ اثبات تمام است. □

با قرار دادن $\psi = i$ در قضیه ۵.۱.۳ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۱.۳. فرض کنیم (X,d) فضای متریک کامل باشد و برای نگاشت $T : X \longrightarrow X$ داشته باشیم

$$d(Tx,Ty) \leq M(x,y) - \varphi(M(x,y))$$

که در آن $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ یک تابع نیم پیوسته پایینی با $\varphi(t) > 0$ برای هر $t \in [0,+\infty)$ و $\varphi(t) = 0$ بوده و

$$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(Tx,x), d(Ty,y), \frac{1}{2}[d(y,Tx) + d(x,Ty)]\right\}$$

آن‌گاه یک نقطه منحصر به فرد $u \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $u = Tu$.

مثال ۱.۱.۳. $E := [0,1]$ را با متر اقلیدسی $d(x,y) = |x-y|$ درنظر می‌گیریم. حال اگر $Tx = \frac{1}{3}x$ باشد و برای هر $x \in E$ داشته باشیم $Sx = 0$، آن‌گاه $d(Tx,Sy) = \frac{1}{3}x$. بنا بر این داریم:

$$M(x,y) = \max\left\{|x-y|, x - \frac{1}{3}x, y, \frac{1}{2}\left(x + \left|y - \frac{1}{3}x\right|\right)\right\}$$

$$= \begin{cases} x - y, & 0 \leq y \leq \frac{1}{3}x;\\ \frac{2}{3}x, & \frac{1}{3}x \leq y \leq \frac{2}{3}x;\\ y & \frac{2}{3}x \leq y \leq 1.\end{cases}$$

برای $\varphi(t) = ۳t$ و $\varphi(t) = t$ داریم $\psi(d(Tx, Ty)) = x$ و

$$\psi(M(x,y)) - \varphi(M(x,y)) = \begin{cases} ۲x - ۲y, & \circ \leq y \leq \frac{۱}{۳}x; \\ \frac{۴}{۳}x, & \frac{۱}{۳}x \leq y \leq \frac{۲}{۳}x; \\ ۲y & \frac{۲}{۳}x \leq y \leq ۱. \end{cases}$$

در نتیجه در این رابطه

$$d(Tx, Sy) \leq M(x,y) - \varphi(M(x,y)) \quad \forall x, y \in E$$

و شرط رابطه (۱۳.۳) در قضیه ۵.۱.۳ صدق نمی‌کند.

اکنون دو نگاشت در نظر می‌گیریم و با تکنیک اثبات قضیه بالا به اثبات قضایای ذیل می‌پردازیم.

قضیه ۶.۱.۳. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل باشد.و $S, T : X \to X$ دو نگاشت باشند. فرض کنیم که برای هر $x, y \in X$، داشته باشیم

$$\psi(d(Tx, Sy)) \leq \psi\left(\frac{۱}{۲}(d(x, Sy) + d(y, Tx)\right) - \varphi(d(x, Sy), d(y, Tx)) \qquad (۲۲.۳)$$

که ψ ، φ در شرایط ۳.۱.۳ صدق می‌کند. در این‌صورت T و S دارای نقطه ثابت منحصر به فرد مشترک هستند. آن‌گاه $u \in X$ ای موجود است، به‌طوری‌که $u = Tu = Su$.

برهان. عنصر $x_\circ \in X$ در نظر می‌گیریم. حال $x_۱ \in X$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $Tx_\circ = x_۱$. همچنین $x_۲ \in X$ را طوری اختیار می‌کنیم $Sx_۱ = x_۲$. با ادامه این روند دنباله $\{x_n\}$ در X ایجاد می‌شود به‌طوری‌که $x_{۲n+۱} = Tx_{۲n}$ و $x_{۲n+۲} = Sx_{۲n+۱}$. بااستفاده از نامساوی (۶.۱.۳) داریم

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲})) &= \psi(d(Tx_{۲n}, Sx_{۲n+۱})) \\ &\leq \psi\left(\frac{۱}{۲}(d(x_{۲n}, Sx_{۲n+۱}) + d(x_{۲n+۱}, Tx_{۲n}))\right) \\ &- \varphi(d(x_{۲n}, Sx_{۲n+۱}), d(x_{۲n+۱}, Tx_{۲n})) \\ &= \psi\left(\frac{۱}{۲}d(x_{۲n}, x_{۲n+۲})\right) - \varphi(d(x_{۲n}, x_{۲n+۲}), \circ) \\ &\leq \psi\left(\frac{۱}{۲}d(x_{۲n}, x_{۲n+۲})\right). \end{aligned}$$

چون ψ یک تابع نانزولی است. درنتیجه

$$d(x_{۲n+۱}, x_{۲n+۲}) \leq \frac{۱}{۲}(d(x_{۲n}, x_{۲n+۲})). \qquad (۲۳.۳)$$

چون $d(x_{2n},x_{2n+2})) \leq d(x_{2n},x_{2n+1}) + d(x_{2n+1},x_{2n+2})$. داریم

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2}) \leq d(x_{2n},x_{2n+1}). \tag{۲۴.۳}$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد

$$d(x_{2n+2},x_{2n+3}) \leq d(x_{2n+1},x_{2n+2}). \tag{۲۵.۳}$$

از رابطه‌های (۲۴.۳) و (۲۵.۳) داریم

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq d(x_{n-1},x_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{۲۶.۳}$$

لذا بااستفاده از رابطه (۲۶.۳) دنباله ناصعودی $\{d(x_n,x_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ را داریم. لذا $r \geq 0$ ای وجود دارد، به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x_{n+1}) = r. \tag{۲۷.۳}$$

و باتوجه به رابطه (۲۳.۳) داریم

$$d(x_{2n+1},x_{2n+2}) \leq \frac{1}{2}d(x_{2n},x_{2n+2}) \leq \frac{1}{2}(d(x_{2n},x_{2n+1}) + d(x_{2n+1},x_{2n+2})). \tag{۲۸.۳}$$

بااستفاده از رابطه (۲۷.۳) هرگاه n را به سمت بینهایت میل دهیم داریم

$$r \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}d(x_{2n},x_{2n+2}) \leq \frac{1}{2}(r+r) \tag{۲۹.۳}$$

از این‌رو

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{2n},x_{2n+2}) = 2r. \tag{۳۰.۳}$$

بااستفاده از پیوستگی ψ و φ درمی‌یابیم

$$\psi(r) \leq \psi\left(\frac{1}{2}(2r)\right) - \varphi(2r,0),$$

که این یعنی $\varphi(2r,0) = 0$ بنابراین $r = 0$. برای اثبات اینکه $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در X است. کافی است نشان دهیم $\{x_{2n}\}$ یک دنباله کوشی است. حال بااستفاده از برهان خلف فرض کنیم که دنباله $\{x_{2n}\}$ کوشی نیست. آن‌گاه $\epsilon > 0$ و دو زیر دنباله $\{x_{2m(i)}\}$ و $\{x_{2n(i)}\}$ از $\{x_n\}$ را در نظر می‌گیریم به طوری‌که

$$n_{(i)} > m_{(i)} > i, \quad d(x_{2m(i)},x_{2n(i)}) \geq \epsilon. \tag{۳۱.۳}$$

بدین ترتیب خواهیم داشت.

$$d(x_{2m(i)},x_{2n(i)-2}) < \epsilon. \tag{۳۲.۳}$$

از رابطه‌های (۳۱.۳) و (۳۲.۳) و از نامساوی مثلثی داریم

$$\begin{aligned}\epsilon &\leq d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)})\\ &\leq d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)-2}) + d(x_{2n(i)-2}, x_{2n(i)-1})) + d(x_{2n(i)-1}, x_{2n(i)})\\ &< \epsilon + d(x_{2n(i)-2}, x_{2n(i)-1}) + d(x_{2n(i)-1}, x_{2n(i)}).\end{aligned}$$

هرگاه i رادر نامساوی فوق به سمت بینهایت میل دهیم و بااستفاده از رابطه (۲۷.۳) داریم

$$\lim_{i\to+\infty} d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}) = \epsilon. \tag{۳۳.۳}$$

همچنین

$$\begin{aligned}\epsilon &\leq d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)})\\ &\leq d(x_{2m(i)}, x_{2m(i)-1}) + d(x_{2m(i)-1}, x_{2n(i)})\\ &\leq 2d(x_{2m(i)}, x_{2m(i)-1}) + d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}).\end{aligned}$$

بااستفاده از رابطه (۲۷.۳) و (۳۳.۳) هر گاه i را به سمت بینهایت میل دهیم داریم

$$\lim_{i\to+\infty} d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}) = \lim_{i\to+\infty} d(x_{2m(i)-1}, x_{2n(i)}) = \epsilon. \tag{۳۴.۳}$$

از سوی دیگر خواهیم داشت

$$\begin{aligned}d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}) &\leq d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)+1}) + d(x_{2n(i)+1}, x_{2n(i)})\\ &\leq d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)}) + 2d(x_{2n(i)+1}, x_{2n(i)}).\end{aligned}$$

با میل دادن i به سمت بینهایت، خواهیم داشت

$$\lim_{i\to+\infty} d(x_{2m(i)}, x_{2n(i)+1}) = \epsilon. \tag{۳۵.۳}$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned}d(x_{2n(i)-1}, x_{2n(i)}) &\leq d(x_{2m(i)-1}, x_{2n(i)+1}) + d(x_{2n(i)+1}, x_{2n(i)})\\ &\leq d(x_{2m(i)-1}, x_{2n(i)}) + 2d(x_{2n(i)+1}, x_{2n(i)}).\end{aligned}$$

بااستفاده از رابطه های (۲۶.۳) و (۳۴.۳) و میل دادن i به سمت بینهایت، داریم

$$\lim_{i\to+\infty} d(x_{2m(i)-1}, x_{2n(i)+1}) = \epsilon. \tag{۳۶.۳}$$

از رابطه (۲۲.۳) داریم

$$\begin{aligned}\psi(d(x_{2n(i)+1},x_{2m(i)})) &= \psi(d(Tx_{2n(i)},Sx_{2m(i)-1}))\\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}(d(x_{2n(i)},Sx_{2m(i)-1})+d(x_{2m(i)-1},Tx_{2n(i)}))\right)\\ &- \varphi(d(x_{2n(i)},Sx_{2m(i)-1}),d(x_{2m(i)-1},Tx_{2n(i)}))\\ &= \psi\left(\frac{1}{2}(d(x_{2n(i)},x_{2m(i)})+d(x_{2m(i)-1},x_{2n(i)+1}))\right)\\ &- \varphi(d(x_{2n(i)},x_{2m(i)}),d(x_{2m(i)-1},x_{2n(i)+1})).\end{aligned}$$

با میل دادن i به سمت بینهایت و با استفاده از رابطه‌های (۳۴.۳) و (۳۶.۳) و از پیوستگی ψ و φ داریم

$$\psi(\epsilon)\leq\psi(\epsilon)-\varphi(\epsilon,\epsilon).$$

بنابراین به‌این نتیجه خواهیم رسید که $\varphi(\epsilon,\epsilon)=0$. زیرا $\epsilon=0$ که این تناقض است. چون $\{x_{2n}\}$ یک دنباله کوشی در X است ولذا $\{x_n\}$ نیز یک دنباله کوشی است. بنابراین $u\in X$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=u.$$

بااستفاده از رابطه (۲۲.۳) به این نتیجه می‌رسیم

$$\begin{aligned}\psi(d(x_{2n+1},Su)) &= \psi(d(Tx_{2n},Su))\\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}(d(x_{2n},Su)+d(u,Tx_{2n}))\right)-\varphi(d(x_{2n},Su),d(u,Tx_{2n}))\\ &= \psi\left(\frac{1}{2}(d(x_{2n},Su)+d(u,x_{2n+1}))\right)-\varphi(d(x_{2n},Su),d(u,x_{2n+1})).\end{aligned}$$

هرگاه n را به سمت بینهایت میل دهیم به دست می‌آوریم

$$\psi(d(u,Su))\leq\psi\left(\frac{1}{2}(d(u,Su))\right)-\varphi(d(u,Su),0)\leq\psi\left(\frac{1}{2}d(u,Su)\right).$$

چون ψ نگاشت تابع تغییر فاصله است پس $d(u,Su)=0$ لذا $Su=u$. بااستفاده مجدد از رابطه (۲۲.۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\psi(d(Tu,u)) &= \psi(d(Tu,Su))\\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}(d(u,Su)+d(u,Tu))\right)-\varphi(d(u,Su),d(u,Tu))\\ &= \psi\left(\frac{1}{2}(d(u,Tu))\right)-\varphi(0,d(u,Tu))\\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}(d(u,Tu))\right).\end{aligned}$$

همچنین می‌دانیم که ψ نانزولی است پس داریم

$$d(Tu,u) \leq \frac{1}{2}d(u,Tu)$$

در نتیجه $d(u,Tu)=0$. زیرا $u=Tu$. بنابراین $u=Tu=Su$ ، همچنین u یک نقطه ثابت مشترک برای T و S است.
حال باید نقطه ثابت منحصر به فرد مشترک را اثبات کنیم. فرض کنیم v یک نقطه ثابت دیگری از T و S باشد. در این‌صورت بااستفاده از رابطه (۲۲.۳) داریم

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(Tu,Sv) \\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}(d(u,Sv)+d(v,Tu))\right) - \varphi(d(u,Sv),d(v,Tu)) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}(d(u,v)+d(v,u))\right) - \varphi(d(u,v),d(v,u)) \\ &= \psi(d(u,v)) - \varphi(d(u,v),d(v,u)). \end{aligned}$$

بنابراین $\varphi(d(u,v),d(v,u))=0$. زیرا $d(u,v)=0$. در نتیجه $u=v$. □

نتیجه ۲.۱.۳. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل و نگاشت $T:X\to X$ باشد. فرض کنیم که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$\psi(d(Tx,Ty)) \leq \psi\left(\frac{1}{2}(d(x,Ty)+d(y,Tx)) - \varphi(d(x,Ty),d(y,Tx))\right)$$

که در آن

۱. $\psi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ تابع تغییر فاصله است.

۲. $\varphi:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ یک تابع پیوسته با این خاصیت باشد $\varphi(t,s)=0$ اگرو تنها اگر $s=t=0$. آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد است.

برهان. با پیروی از قضیه فوق و با قرار دادن $T=S$ اثبات تمام است. □

نتیجه ۳.۱.۳. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل باشد دو نگاشت $T,S:X\to X$ در نظر می‌گیریم فرض کنیم برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$d(Tx,Sy) \leq \frac{1}{2}(d(x,Sy)+d(y,Tx)) - \varphi(d(x,Sy),d(y,Tx))$$

که در آن $\varphi:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ تابعی پیوسته است و $\varphi(t,s)=0$ اگر و تنهااگر $t=s=0$. باشد.آن‌گاه T وS دارای نقطه ثابت منحصر به فرد مشترک هستند.

برهان. با پیروی از قضیه فوق و قرار دادن $\psi=i_{[0,+\infty]}$. □

ملاحظه ۳.۱.۳. اگر درنتیجه (۳.۱.۳)، $T=S$ در نظر بگیریم آن‌گاه قضیه (۱.۱.۳) را می‌توان نتیجه گرفت.

۲.۱.۳ مثال

مثال ۲.۱.۳. فرض کنیم $X=[\circ,۱]$. (X,d) فضای متریک کامل تعریف شده باشد. داشته باشیم $d(x,y)=|x-y|$. و همچنین برای هر $x\in X$ داریم $Tx=\frac{۱}{۴}x^{۲}$ و $Sx=\circ$ همچنین ψ و φ این‌گونه تعریف شوند.

$$\psi:[\circ,+\infty)\to[\circ,+\infty)$$

$$\varphi:[\circ,+\infty)\times[\circ,+\infty)\to[\circ,+\infty)$$

$$\psi(t)=t^{۲} \quad \text{و} \quad \varphi(t,s)=\frac{۱}{۴}(t+s)^{۲}$$

آن‌گاه برای هر $x,y\in X$ داریم

$$\begin{aligned}\psi(d(Tx,Sy))&=\psi\left(d\left(\frac{۱}{۴}x^{۲},\circ\right)\right)\\&=\psi\left(\frac{۱}{۴}x^{۲}\right)=\frac{۱}{۱۶}x^{۴}\le\frac{۱}{۸}x^{۲}\\&\le\frac{۱}{۸}\left(x+\left|y-\frac{۱}{۴}x^{۲}\right|\right)^{۲}\\&=\frac{۱}{۴}\left(x+\left|y-\frac{۱}{۴}x^{۲}\right|\right)^{۲}-\frac{۱}{۸}\left(x+\left|y-\frac{۱}{۴}x^{۲}\right|\right)^{۲}\\&=\psi\left(\frac{۱}{۲}(d(x,Sy)+d(y,Tx))\right)-\varphi(d(x,Sy),d(y,Tx))\end{aligned}$$

بدین ترتیب طبق قضیه (۶.۱.۳) T و S دارای نقطه ثابت منحصربه فرد مشترک $\circ$ هستند.

۳.۱.۳ نقطه ثابت جفت شده در فضاهای متریک از نوع غیرخطی

در این بخش به نقاط جفت شده در فضای متریک برای نگاشت های Cـانقباضی ضعیف غیرخطی می‌پردازیم.

قضیه ۷.۱.۳. فرض کنیم $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و (X,d) فضای متریک کامل باشد. همچنین درنظر بگیریم $T:X\times X\to X$ نگاشتی پیوسته و دارای خاصیت یکنوای جفت شده در X باشد و برای هر $x,y,u,v\in X$ که $x\preceq u$ و $y\succeq v$ داشته باشیم

$$\psi(d(T(x,y),T(u,v)))\le\left(\frac{۱}{۲}(d(x,u)+d(y,v))\right)-\varphi(d(x,u),d(y,v)) \qquad (۳۷.۳)$$

که در آن ψ و φ همان ψ و φ در قضیه (۳.۱.۳) داریم اگر $(x_\circ,y_\circ)\in X\times X$ وجود داشته باشد. به طوری که $x_\circ\preceq T(x_\circ,y_\circ)$ و $y_\circ\succeq T(y_\circ,x_\circ)$ آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت جفت شده است.

برهان. فرض کنیم $x_0, y_0 \in X$ به‌طوری‌که $x_0 \preceq T(x_0, y_0)$ و $y_0 \succeq T(y_0, x_0)$. همچنین درنظر بگیریم $x_1 = T(x_0, y_0)$ و $y_1 = T(y_0, x_0)$. که $x_0 \preceq x_1$ و $y_0 \succeq y_1$. به طور مجدد $x_2 = T(x_1, y_1)$ و $y_2 = T(y_1, x_1)$. اختیار کنیم. در این‌صورت T دارای خاصیت یکنوا جفت شده است. بنابراین داریم $x_1 \preceq x_2$ و $y_1 \succeq y_2$. بدین ترتیب دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X یافت می‌شود، به‌طوری‌که داریم $x_{n+1} = T(x_n, y_n)$ ، $y_{n+1} = T(y_n, x_n)$، $x_0 \preceq x_1 \preceq x_2 \preceq \dots$ و $y_0 \succeq y_1 \succeq y_2 \succeq \cdots$.
برای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم

$$\begin{aligned}\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) &= \psi(d(T(x_n, y_n), T(x_{n+1}, y_{n+1})))\\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}(d(x_n, x_{n+1}) + d(y_n, y_{n+1}))\right) - \varphi(d(x_n, x_{n+1}), d(y_n, y_{n+1}))\end{aligned}$$

$$\leq \psi(\max\{d(x_n, x_{n+1}), d(y_n, y_{n+1})\}) - \varphi(d(x_n, x_{n+1}), d(y_n, y_{n+1})) \tag{۳.۳۸}$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned}&\psi(d(y_{n+1}, y_{n+2})) \leq \psi(\max\{d(x_n, x_{n+1}), d(y_n, y_{n+1})\})\\ &- \varphi(d(y_n, y_{n+1}), d(x_n, x_{n+1})).\end{aligned} \tag{۳.۳۹}$$

چون ψ یک تابع نانزولی است، سپس با رابطه‌های (۳.۳۸) و (۳.۳۹) داریم.

$$\begin{aligned}\psi(\max\{d(x_{n+1}, x_{n+2}), d(y_{n+1}, y_{n+2})\}) &= \max\{\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})), \psi(d(y_{n+1}, y_{n+2}))\}\\ &\leq (\max\{d(x_n, x_{n+1}), d(y_n, y_{n+1})\})\end{aligned}$$

$$- \min\{\varphi(d(x_n, x_{n+1}), d(y_n, y_{n+1})), \varphi(d(y_n, y_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}))\} \tag{۳.۴۰}$$

چون برای هر $s, t \in [0, +\infty)$ داریم $\varphi(t, s) \geq 0$ همچنین ψ یک تابع نانزولی است و پس نتیجه می گیریم که $(\max\{d(x_{n+1}, x_{n+2}), d(y_{n+1}, y_{n+2})\})$ یک دنباله نانزولی است. لذا $r \geq 0$ ای وجود دارد به‌طوری‌که خواهیم داشت.

$$\lim_{n \to +\infty} \max\{d(x_{n+1}, x_{n+2}), d(y_{n+1}, y_{n+2})\} = r.$$

هرگاه در رابطه (۳.۴۰) n را به سمت بینهایت میل دهیم درمی‌یابیم

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \lim_{n \to +\infty} \min\{\varphi(d(x_n, x_{n+1}), d(y_n, y_{n+1})), \varphi(d(y_n, y_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}))\}.$$

بنابراین خواهیم داشت.

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(d(x_n, x_{n+1}), d(y_n, y_{n+1})) = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{n \to +\infty} \varphi(d(y_n, y_{n+1}), d(x_n, x_{n+1})) = 0$$

در هر دو حالت داریم $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ همچنین $\lim_{n \to +\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0$. بنابراین خواهیم داشت $r = 0$.

حال نشان می‌دهیم که $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله کوشی در X هستند. بااستفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم اگر $\{x_n\}$ یا $\{y_n\}$ دنباله کوشی نباشند. به عبارتی $(\max\{d(x_n, x_m), d(y_n, y_m)\})$ دنباله کوشی در X نباشند. آن‌گاه $\epsilon > 0$ و $\{x_m(i)\}$ و $\{x_n(i)\}$ از دنباله $\{x_n\}$ یافت می‌شود، به‌طوری‌که

$$n(i) > m(i) > i, \qquad \max\{d(x_{m(i)}, x_{n(i)}), d(y_{m(i)}, y_{n(i)})\} \geq \epsilon. \tag{۴۱.۳}$$

که این نشان می‌دهد

$$\max\{d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}), d(y_{m(i)}, y_{n(i)-1})\} < \epsilon. \tag{۴۲.۳}$$

از نامساوی مثلثی و با استفاده رابطه (۴۲.۳) خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) &\leq d(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}) + d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) \\ &\leq 2d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}) + d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) + d(x_{n(i)-1}, x_{n(i)}) \\ &< 2d(x_{m(i)}, x_{m(i)+1}) + \epsilon + d(x_{n(i)-1}, x_{n(i)}). \end{aligned}$$

هرگاه i را به سمت بینهایت میل دهیم داریم

$$\lim_{i\to+\infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq \lim_{i\to+\infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) \leq d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) \leq \epsilon. \tag{۴۳.۳}$$

به‌طور مشابه به دست می‌آوریم

$$\lim_{i\to\infty} d(y_{m(i)}, y_{n(i)}) \leq \lim_{i\to+\infty} d(y_{m(i)+1},, y_{n(i)}) \leq \lim_{i\to+\infty} d(y_{m(i)}, y_{n(i)-1}) \leq \epsilon. \tag{۴۴.۳}$$

از رابطه‌های (۴۱.۳) (۴۳.۳) (۴۴.۳) خواهیم داشت.

$$\lim_{i\to+\infty} \max\{d(x_{m(i)}, x_{n(i)}), d(y_{m(i)}, y_{n(i)}\} = \lim_{i\to+\infty} \max\{d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}), d(y_{m(i)+1}, y_{n(i)})\}$$

$$= \lim_{i\to+\infty} \max\{d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}), d(y_{m(i)}, y_{n(i)-1})\} = \epsilon. \tag{۴۵.۳}$$

چون $x_m(i) \preceq x_{n(i)-1}$ و $y_{m(i)} \succeq y_{n(i)-1}$ در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)})) &= \psi(T(x_{m(i)}, y_{m(i)}), T(x_{n(i)-1}, y_{n(i)-1})) \\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}(d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) + d(y_{m(i)}, y_{n(i)-1}))\right) \\ &- \varphi(d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}), d(y_{m(i)}, y_{n(i)-1})) \\ &\leq \psi(\max\{d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}), d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)})\}) \\ &- \varphi(d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}), d(y_{n(i)-1}, y_m(i)). \end{aligned}$$

به‌طور مشابه نتیجه می‌گیریم.

$$\begin{aligned}\psi(d(y_{n(i)}, y_{m(i)+1})) &= \psi(T(y_{n(i)-1}, x_{n(i)-1}), T(y_{m(i)}, x_{m(i)}))\\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}(d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)}) + d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}))\right)\\ &- \varphi(d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)}), d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}))\\ &\leq \psi(\max\{d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}), d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)})\})\\ &- \varphi(d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)}), d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}))\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&\psi(\max\{d(x_{n(i)}, x_{m(i)+1}), d(y_{n(i)}, y_{m(i)+1})\})\\ &\qquad = \max\{\psi(d(x_{n(i)}, x_{m(i)+1})), \psi(d(y_{n(i)}, y_{m(i)+1}))\}\\ &\qquad \leq \psi(\max\{d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}), d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)})\})\\ &\qquad - \min\{\varphi(d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}), d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)})),\\ &\qquad \varphi(d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)}), d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}))\}\end{aligned}$$

هرگاه i را به سمت بینهایت میل دهیم و بااستفاده از رابطه‌ی (۴۵.۳) و همچنین از پیوستگی ψ و φ دارای دو حالت خواهیم بود

$$\lim_{i\to+\infty} \varphi(d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}), d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)})) = 0$$

یا

$$\lim_{i\to+\infty} \varphi(d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)}), d(x_{n(i)-1}, y_{m(i)})) = 0.$$

اما حال با این دو حالت خواهیم داشت

$$\lim_{i\to+\infty} d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{i\to+\infty} d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)}) = 0.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{i\to+\infty} \max\{d(x_{n(i)-1}, x_{m(i)}), d(y_{n(i)-1}, y_{m(i)})\} = 0$$

با استفاده از رابطه (۴۵.۳) نتیجه می‌گیریم که $r = 0$ که این یک تناقض است. بنابراین $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ هر دو دنباله‌های کوشی در X هستند.چون X کامل است پس $x, y \in X$ موجود است، به‌طوری‌که $x_n \to x$ و $y_n \to y$ را نتیجه خواهد داد. به علاوه

$$x_{n+1} = T(x_n, y_n) \to T(x, y)$$

و

$$y_{n+1} = T(y_n, x_n) \to T(y, x)$$

.
با استفاده از یکتایی نتیجه می‌گیریم

$$x = T(x, y) \qquad y = T(y, x)$$

بنابراین (x, y) نقطه ثابت جفت شده از T هستند. $\square$

فصل ۴

نتایج قضایای بهترین تقریب در نگاشت‌های انقباضی

دراین بخش به بررسی بهترین نقطه تقریب نگاشت تعمیم یافته پروکسیمینال C ـ انقباضی می‌پردازیم.مطالب این فصل از مراجع [۷]، [۱۷] می‌باشند.

۱.۴ مقدمه

در سال ۲۰۱۱ توسط هرجانی[۱] وهمکاران [۱۰] نتایجی از نقطه ثابت برای نگاشت C ـ انقباضی ضعیف در یک فضای متریک کامل با بهرمندی از یک ترتیب جزیی ارایه داده که بشرح زیر است.

۱.۱.۴ نگاشت‌های تعمیم یافته C ـ انقباضی

از سوی دیگر بسیاری از نتایج بر قضیه نقطه ثابت باناخ دلالت دارد.فرض کنید A و B دو زیر مجموعه ناتهی از فضای متریک (X,d) باشند .می‌دانیم که معادله تابعی $Tx = x$ که در آن T یک خود نگاشت نیست، لزوماً جواب ندارد. پس در این حالت سعی می‌کنیم که یک جواب

[۱] Harjani

تقریبی از X را بیابیم به طوری‌که $(d(x,Tx))$ مینیمم باشد .قضایای بهترین تقریب شرایط کافی را برای وجود یک جواب تقریبی فراهم می‌نمایند که آن را بهترین تقریب ناخود_نگاشت T می‌نامند؛ قضیه بهترین تقریب ابتدا توسط فان [۲] [۹] معرفی شده بود. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد به‌طوری‌که $(X,\preceq)$ مجموعه مرتب جزیی و (X,d) یک فضای متریک کامل باشد. فرض کنید A و B زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک (X,d) است قراردادهای زیر را می پذیریم:

$$d(A,B) := \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\},$$

$$A_\circ := \{x \in A : d(x,y) = d(A,B); y \in B \text{ برای حداقل یک}\},$$

$$B_\circ := \{y \in B : d(x,y) = d(A,B); x \in A \text{ برای حداقل یک}\},$$

اگر $A \bigcap B \neq \circ$ آنگاه $A_\circ$ و $B_\circ$ ناتهی است. پس از آن چندین نویسنده از جمله پرولا [۳] [۱۸] و رایش [۴] [۱۹] وسهگال [۵] وسینگ [۶] [۲۴] قضیه فان را در بسیاری از جهات ، تعمیم داده اند.

تعریف ۱.۱.۴. یک نگاشت $T : A \longrightarrow B$ پروکسیمینال حافظ ترتیب است اگر در شرط زیر صدق کند :

$$\left.\begin{array}{l} x \preceq y \\ d(u,Tx) = d(A,B) \\ d(v,Ty) = d(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow u \preceq v \quad \forall u,v,x,y \in A$$

۲.۴ نگاشت های پروکسیمینال تعمیم‌یافته C ـ انقباضی

در این بخش، ما ابتدا مفهوم نگاشت C_انقباضی پروکسیمینال را در نقطه بهترین تقریب درنظر گرفتیم.

تعریف ۱.۲.۴. نگاشت $T : A \longrightarrow B$ یک نگاشت تعمیم یافته C ـ انقباضی [۷] گوییم که در شرط

[۲] Fan
[۳] Prolle
[۴] Reich
[۵] Sehgel
[۶] Singh
[۷] Generalized proximal c-contraction

زیر صدق کند

$$\left.\begin{array}{l} x \preceq y \\ d(u,Tx)=d(A,B) \\ d(v,Ty)=d(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(u,v) \leq \frac{1}{2}(d(x,v)+d(y,u)) - \varphi(d(x,v),d(y,u)) \qquad (1.4)$$

که در آن $\varphi : [0,\infty)^2 \longrightarrow [0,\infty)$ یک تابع پیوسته و نانزولی است به‌طوری‌که $\varphi(x,y)=0$ اگر $x=y=0$.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و (X,d) یک فضای متریک کامل باشند. همچنین A و B زیرمجموعه‌های ناتهی بسته از X باشند. اگر A_0 و B_0 ناتهی و نگاشت $T : A \longrightarrow B$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) T پیوسته و حافظ ترتیب پروکسیمینال تعمیم یافته C ـ انقباضی است $T(A_0) \subseteq B_0$

ب) x_0 و x_1 در A_0 وجود داشته باشد به طوری‌که اگر $x_0 \preceq x_1$

$$d(x_1,Tx_0)=d(A,B).$$

آن‌گاه نقطه $x \in A$ ای وجود دارد به‌طوری‌که $d(x,Tx)=d(A,B)$ علاوه‌بر این، برای هر نقطه $x_0 \in A_0$ دنباله $\{x_n\}$ که به صورت $d(x_{n+1},Tx_n)=d(A,B)$ تعریف می‌شود به نقطه x همگرا است.

برهان. با فرضیه (ب) $x_0, x_1 \in A_0$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که اگر $x_0 \preceq x_1$ و $d(x_1,Tx_0)=d(A,B)$ چون $T(A_0) \subseteq B_0$، نقطه $x_2 \in A_0$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(x_2,Tx_1)=d(A,B)$. بااستفاده از ویژگی های حافظ ترتیب پروکسیمینالی T داریم $x_1 \preceq x_2$. در ادامه روند دنباله‌ای $\{x_n\}$ در A_0 می‌یابیم ، $x_{n-1} \preceq x_n$ و $d(x_n,Tx_{n-1})=d(A,B)$. با پیدا کردن نقطه x_n نقطه $x_{n+1} \in A_0$ را در نظر می گیریم ، به‌طوری‌که $x_n \preceq x_{n+1}$ و

$$d(x_{n+1},Tx_{n-1})=d(A,B). \qquad (2.4)$$

چون T یک پرروکسمینال C ـ انقباضی است، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+1}) &\leq \frac{1}{2}d(x_{n-1},x_{n+1}) + d(x_n,x_n) - \varphi(d(x_{n-1},x_{n+1}),d(x_n,x_n)) \\ &= \frac{1}{2}d(x_{n-1},x_{n+1}) - \varphi(d(x_{n-1},x_{n+1}),0) \\ &\leq \frac{1}{2}d(x_{n-1},x_{n+1}) \\ &\leq \frac{1}{2}(d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})) \qquad (3.4) \end{aligned}$$

$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_{n-1}, x_n)$، چون دنباله $\{d(x_{n-1}, x_n)\}$ نانزولی و از پایین کراندار است پس $r \geq 0$ ای وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = r \tag{۴.۴}$$

هرگاه با میل دادن n، به سمت بینهایت در رابطه (۳.۴) داریم

$$r \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(r + r) = r$$

و همچنین

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 2r. \tag{۵.۴}$$

هرگاه با میل دادن n ، به سمت بینهایت در رابطه (۳.۴) و با استفاده ازرابطه‌های (۴.۴)، (۵.۴) و از پیوستگی φ خواهیم داشت.

$$r \leq \frac{1}{2}(2r) = r - \varphi(2r, 0) \leq r$$

از این‌رو $\varphi(2r, 0) = 0$. بنابراین ، به‌وسیله ویژگی های از φ ، داریم $r = 0$ به این معنی است

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0. \tag{۶.۴}$$

سپس اثبات می‌کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی نباشد.آن‌گاه یک $\epsilon > 0$ وجود دارد و زیردنباله های $\{x_{m_k}\}, \{x_{n_k}\}$ از دنباله‌ی $\{x_n\}$ به‌طوری‌که با $n_k > m_k \geq k$

$$r_k := d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \epsilon, \quad d(x_{m_k, x_{n_k - 1}}) < \epsilon \tag{۷.۴}$$

برای هر $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. برای هر $n \geq 1$ ، فرض کنیم $\alpha_n := d(x_{n+1}, x_n)$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \epsilon \leq r_k &\leq d(x_{m_k}, x_{n_k - 1}) + d(x_{n_k - 1}, x_{n_k}) \\ &< \epsilon + \alpha_{n_k - 1}. \end{aligned}$$

با پیروی از رابطه (۶.۴) داریم

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} r_k = \epsilon \tag{۸.۴}$$

همچنین باید توجه داشته باشیم

$$\begin{aligned} r_k = d(x_{n_k}, x_{m_k}) &\leq d(x_{n_k}, x_{m_k+1}) + d(x_{m_k+1}, x_{m_k}) \\ &= d(x_{n_k}, x_{m_k+1}) + \alpha_{m_k} \\ &\leq d(x_{n_k}, x_{m_k}) + d(x_{mk}, x_{m_k+1}) + \alpha_{m_k} \\ &= r_k + \alpha_{m_k} + \alpha_{m_k}. \end{aligned} \tag{۹.۴}$$

هرگاه k در رابطه (۹.۴)، به سمت بینهایت میل دهیم و بااستفاده از رابطه‌های (۶.۴) و (۸.۴) داریم

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_{n_k}, x_{m_k+1}) = \epsilon \tag{۱۰.۴}$$

به‌طورمشابه می‌توانیم نشان دهیم

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) = \epsilon \tag{۱۱.۴}$$

از سوی دیگر با ساختن $\{x_n\}$ ممکن است فرض کنیم که $x_{m_k} \preceq x_{n_k}$، به‌طوری‌که

$$d(x_{n_k+1}, Tx_{n_k}) = d(A, B) \tag{۱۲.۴}$$

و

$$d(x_{m_k+1}, Tx_{m_k}) = d(A, B). \tag{۱۳.۴}$$

با نامساوی مثلثی و رابطه های (۱۲.۴)، (۱۳.۴) بنابر T پروکسیمینال تعمیم یافته C ـ انقباضی، داریم

$$\begin{aligned}
\epsilon \leq r_k &\leq d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + d(x_{n_k+1}, x_{n_k}) + d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1})\\
&= \alpha_{m_k} + \alpha_{n_k} + d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1})\\
&\leq \alpha_{m_k} + \alpha_{n_k} + \frac{1}{2}(d(x_{n_k}, x_{m_k+1}) + d(x_{m_k}, x_{n_k+1}))\\
&- \varphi(d(x_{n_k}, x_{m_k+1}), d(x_{m_k}, x_nk+1)).
\end{aligned}$$

در نامساوی فوق هرگاه k به سمت بینهایت میل دهیم از رابطه‌های (۶.۴)، (۱۰.۴)، (۱۱.۴) و پیوستگی φ داریم:

$$\epsilon \leq \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon) - \varphi(\epsilon, \epsilon) \leq \epsilon$$

بنابراین ، $\varphi(\epsilon, \epsilon) = 0$ و با ویژگی‌های φ خواهیم داشت $\epsilon = 0$ که این یک تناقض است. بنابراین دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است. چون A یک زیرمجموعه بسته از فضای متریک کامل X است. $x \in A$ ای وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x. \tag{۱۴.۴}$$

هرگاه در رابطه (۲.۴) n را به سمت بینهایت میل دهیم و بااستفاده از رابطه (۱۴.۴) و پیوستگی T خواهیم داشت.

$$d(x, Tx) = d(A, B).$$

□

نتیجه ۱.۲.۴. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و (X,d) یک فضای متریک کامل باشند. همچنین A، B زیرمجموعه ناتهی بسته ای از Xهستند، اگر A_0، B_0 ناتهی و نگاشت $T:A\longrightarrow B$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) T پیوسته ونانزولی است به طوری‌که $T(A_0)\subseteq B_0$

$$\left.\begin{array}{l} x\preceq y \\ d(u,Tx)=d(A,B) \\ d(v,Ty)=d(A,B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(u,v)\preceq \alpha(d(x,v)+d(y,u)), \tag{۱۵.۴}$$

که $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$؛

ب) x_0 و x_1 در A_0 وجود داشته باشد به طوری‌که اگر $x_0\preceq x_1$

$$d(x_1,Tx_0)=d(A,B).$$

آن‌گاه نقطه $x\in A$ ای وجود دارد به‌طوری‌که $d(x,Tx)=d(A,B)$ علاوه‌بر این، برای هر دنباله $\{x_n\}$ تعریف می‌کنیم، $d(x_{n+1},Tx_n)=d(A,B)$ که همگرا به X است.

برهان. فرض کنیم $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ و طبق تابع تعریف شده φ در قضیه ۱.۲.۴ داریم

$$\varphi(a,b)=(\frac{1}{2}-\alpha)(a+b).$$

واضح است $\varphi(a,b)=0$ اگروتنهااگر $a=b=0$، برطبق تعریف (۱.۴) به رابطه (۱۵.۴) تبدیل می‌شود.از این‌روست که نتیجه (۱.۲.۴) را به‌دست می‌آوریم.

□

برای یک نگاشت شرط (ب) به این معنی است که $x_0\preceq Tx_0$ بنابراین قضیه ۴.۲.۲ که شامل نتایج هارجانی و همکارانش [۱۱] به شرح زیراست.

نتیجه ۲.۲.۴. [۱۱] فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد به‌طورکه $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و (X,d) فضای متریک کامل باشد همچنین $T:X\longrightarrow X$ یک نگاشت نانزولی و پیوسته باشد. به طوری‌که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$d(Tx,Ty)\leq\frac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]-\varphi(d(x,Ty),d(y,Tx)) \qquad \forall x\preceq y$$

که درآن $\varphi:[0,\infty)^2\longrightarrow[0,\infty)$ تابع پیوسته و نانزولی است، به‌طوری‌که $\varphi(x,y)=0$ اگر و تنهااگر $x=y=0$. به‌علاوه اگر وجود داشته باشد $x_0\in X$ با $x_0\preceq Tx_0$ آن‌گاه T دارای یک نقطه ثابت است.

۱.۲.۴ مثال

مثال ۱.۲.۴. فضای متریک کامل $\mathbb{R}^{۲}$ را با متراقلیدسی و مجموعه‌های زیر را در نظربگیرید.

$$A:\{(x,\circ):x\in\mathbb{R}\},\qquad B:\{(\circ,y):y\in\mathbb{R},y\geq ۱\}.$$

پس $d(A,B)=۱$، $A_\circ=\{(\circ,\circ)\}$ و $B_\circ=\{(\circ,۱)\}$. و نگاشت $T:A\longrightarrow B$ را تعریف می‌کنیم که به شرح زیر است

$$T((x,\circ))=(\circ,۱+|x|)$$

برای هر $A\in(x,\circ)$. به وضوح روشن است T پیوسته است و $T(A_\circ)\subseteq B_\circ$. اگر $x_۱\preceq x_۲$ و

$$d(u_۱,Tx_۱)=d(A,B)=۱,\quad d(u_۲,Tx_۲)=d(A,B)=۱$$

برای هر $u_۱,u_۲,x_۱,x_۲\in A$ آن‌گاه داریم

$$u_۱=u_۱=(\circ,\circ),\qquad x_۱=x_۲=(\circ,\circ)$$

بنابراین T یک پروکسیمینال تعمیم یافته C ـ انقباضی با $\varphi:[\circ,\infty)\longrightarrow[\circ,\infty)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\varphi(a,b)=\frac{۱}{۴}(a+b).$$

به‌علاوه ، دیده می‌شود که $A\in(\circ,\circ)$ بطوری‌که

$$d((\circ,\circ),T(\circ,\circ))=d(A,B)=۱.$$

اکنون با حذف پیوستگی T قضیه زیر را خواهیم داشت.و با تمام شرایط در قضیه (۱.۲.۴) در یک بهترین تقریب جدید

قضیه ۲.۲.۴. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و $(X,\preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و (X,d) یک فضای متریک کامل باشند. همچنین A، B زیرمجموعه ناتهی بسته ای از Xهستند، $A_\circ$ و $B_\circ$ ناتهی هستند. و نگاشت $T:A\longrightarrow B$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) T یک حافظ ترتیب پروکسیمینال تعمیم یافته C ـ انقباضی است به طورکه $T(A_\circ)\subseteq B_\circ$

ب) عناصر $x_\circ,x_۱\in A_\circ$ وجود داشته باشد به طوری‌که $x_\circ\preceq x_۱$

$$d(x_۱,Tx_\circ)=d(A,B);$$

ج) اگر $\{x_n\}$ دنباله نانزولی در A همگرا به x باشد، به‌طوری‌که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_n\preceq x$. آن‌گاه یک نقطه $x\in A$ ای وجود دارد، به‌طوری‌که

$$d(x,Tx)=d(A,B).$$

برهان. همانند اثبات قضیه ۱.۲.۴ برای هر $n \geq 0$ داریم

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B) \tag{۱۶.۴}$$

به‌علاوه دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است و به $x \in A$ همگرا است. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، داریم.

$$\begin{aligned} d(A, B) = d(x_{n+1}, Tx_n) &\leq d(x_{n+1}, x) + d(x, Tx_n) \\ &\leq d(x, x_{n+1}) + d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) \\ &\leq d(x, x_{n+1}) + d(x, x_{n+1}) + d(A, B). \end{aligned}$$

هرگاه در نامساوی فوق n را به سمت بینهایت میل دهیم، داریم $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x, Tx_n) = d(A, B)$ بنابراین $x \in A_0$. چون $T(A_0) \subseteq B_0$، ی $v \in A$ وجود دارد، به‌طوری‌که

$$d(v, Tx) = d(A, B). \tag{۱۷.۴}$$

آن‌گاه $x = v$ به‌دست می‌آوریم.با توجه به شرایط (ج) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n \preceq x$. بااستفاده از رابطه‌های (۱۶.۴)، (۱۷.۴) و پروکسیمینال تعمیم یافته C ـ انقباضی از T داریم

$$d(x_{n+1}, v) \leq \frac{1}{2}[d(x_n, v) + d(x, x_{n+1})] - \varphi(d(x_n, v), d(x, x_{n+1})). \tag{۱۸.۴}$$

هرگاه n را در رابطه (۱۸.۴) به سمت بینهایت میل دهیم

$$d(x, v) \leq \frac{1}{2}(x, v) - \varphi(d(x, v), 0),$$

پس دراین‌صورت به این نتیجه می‌رسیم که $d(x, v) = 0$، چون $x = v$. اگر v را با x در رابطه (۱۷.۴) جایگزین کنیم، داریم

$$d(x, Tx) = d(A, B).$$

□

نتیجه ۳.۲.۴. فرض کنیم مجموعه X ناتهی و $(X, \preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و (X, d) یک فضای متریک کامل باشند. فرض کنیم A وB زیرمجموعه‌های بسته ناتهی از X باشند.اگر A_0 و B_0 ناتهی و نگاشت $T : A \longrightarrow B$ در شرایط زیر صدق کند :

الف T نگاشت صعودی است بطوری‌که $T(A_0) \subseteq B_0$

$$\left.\begin{array}{l} x \preceq y \\ d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{array}\right\} \Rightarrow d(u, v) \preceq \alpha(d(x, v) + d(y, u)), \tag{۱۹.۴}$$

که $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$؛

ب $x_0, x_1 \in A_0$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $x_0 \preceq x_1$ و

$$d(x_1, Tx_0) = d(A, B)$$

.

ج اگر $\{x_n\}$ یک دنباله صعودی در A که همگرا به نقطه x باشد آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n \preceq x$ بنابراین یک نقطه $x \in A$ وجود دارد به طوری‌که

$$(x, Tx) = d(A, B).$$

نتیجه ۴.۲.۴. فرض کنیم X مجموعه ناتهی و $(X, \preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی و (X, d) فضای متریک کامل باشند. همچنین $\{x_n\} \subseteq X$ یک دنباله صعودی باشد، به طوری‌که $x_n \to x$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. آن‌گاه $x_n \preceq x$ فرض کنیم نگاشت $T : X \to X$ نگاشت نانزولی است به طوری‌که برای هر $x \preceq y$ دارای شرط زیر باشد

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2}[d(x, Ty) + d(y, Tx)] - \varphi(d(x, Ty), d(y, Tx))$$

که در آن $\varphi : [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ یک تابع پیوسته است به طوری‌که $\varphi(x, y) = 0$ اگرو تنها اگر $x = y = 0$.به‌علاوه اگر $x_0 \in X$ و $x_0 \preceq Tx_0$، آن‌گاه T دارای نقطه ثابت است.

اینک، شرایطی را که توسط نیتو[8] [۱۶] و رودریگز لوپز[9] [۱۵] برای یکتایی بهترین نقطه تقریب در قضیه‌های ۱.۲.۴ و ۲.۲.۴ ذکر شد را به یاد می آوریم.همچنین از شرط زیر نیز استفاده می‌کنیم.

(۲۰.۴) برای هر $x, y \in X$ ، یک $z \in X$ وجود داردکه با x و y مقایسه پذیر است

قضیه ۳.۲.۴. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. و $(X, \preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی (X, d) فضای متریک کامل باشد و A و B زیر مجموعه‌های ناتهی بسته از X و فرض کنیم A_0 و B_0 ناتهی هستند به طوری که برای A_0 در شرط (۲۰.۴) برقرار باشد، فرض کنیم $T : A \to B$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) T یک نگاشت پیوسته، حافظ ترتیب پروکسیمینال تعمیم‌یافته Cـ انقباضی است به‌طوری‌که $T(A_0) \subseteq B_0$

ب) عناصر x_0 و x_1 در A_0 وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $x_0 \preceq x_1$ و

$$d(x_1, Tx_0) = d(A, B)$$

آن‌گاه یک نقطه منحصر به فرد مانند $x \in A_0$ وجود دارد به‌طوری $d(x, Tx) = d(A, B)$.

[8] Nieto

[9] Rodríguez-López

برهان. ابتدا یکتایی نقطه $x \in A$ را اثبات می‌کنیم، به‌طوری‌که $d(x, Tx) = d(A, B)$. فرض کنید $x, x^* \in A$ بهترین نقاط تقریب هستند. یعنی $d(x, Tx) = d(A, B)$ و $d(x^*, Tx^*) = d(A, B)$
. مورد اول :اگر x با x^* مقایسه پذیر باشد ، یعنی $x \preceq x^*$ یا $x^* \preceq x$ با پروکسیمینال بودن تعمیم‌یافته Cــ انقباضی T داریم

$$d(x, x^*) \leq \frac{1}{2}[d(x, x^*) + d(x^*, x)] - \varphi(d(x, x^*), d(x^*, x)) \leq d(x^*, x),$$

تابع $\varphi(d(x, x^*), d(x^*, x)) = 0$ را نتیجه می‌دهد.وبااستفاده از ویژگی های φ داریم $d(x^*, x) = 0$ بنابراین $x = x^*$.

مورد دوم :اگر x با x^* مقایسه پذیر نباشد، از آنجا A_0 در شرط (۲۰.۴) صدق می‌کند، آن‌گاه $z \in A_0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که z مقایسه پذیر است، با x و x^* باشد، یعنی $x \preceq z$ $(z \preceq x)$ ، $x^* \preceq z$ $(z \preceq x^*)$. فرض کنیم $z \preceq x$ و $z \preceq x^*$. چون $T(A_0) \subseteq B_0$، یک نقطه $v_0 \in A_0$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(v_0, Tz) = d(A, B)$. با خاصیت حافظ ترتیب پروکسیمینالی از T داریم $x \preceq v_0$ و $x^* \preceq v_0$. دراین‌صورت $T(A_0) \subseteq B_0$ یک نقطه $v_1 \in A_0$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(v_1, Tv_0) = d(A, B)$. و با تکرار این روند و استفاده از ویژگی های حافظ ترتیب پروکسیمینالی T داریم $x \preceq v_1$ و $x^* \preceq v_1$. با تکرار این روند در $v_0 \in A_0$ ، $v_{n+1} \in A_0$ یافت می‌شود، به‌طوری‌که $d(v_{n+1}, Tv_n) = d(A, B)$. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x \preceq v_n$ و $x^* \preceq v_n$. با پروکسیمینال تعمیم یافته Cــ انقباضی T داریم

$$d(v_{n+1}, x) \leq \frac{1}{2}[d(v_n, x) + d(x, v_{n+1})] - \varphi(d(v_n, x), x), d(x, v_{n+1})), \tag{۲۱.۴}$$

$$d(v_{n+1}, x^*) \leq \frac{1}{2}[d(v_n, x^*) + d(x^*, v_{n+1})] - \varphi(d(v_n, x^*), d(x^*, v_{n+1})). \tag{۲۲.۴}$$

با پیروی از رابطه‌های (۲۱.۴) (۲۲.۴) و ویژگی φ ، درمی‌یابیم $v_n \longrightarrow x$ و $v_n \longrightarrow x^*$ به‌طوری‌که $n \longrightarrow \infty$. به روشنی واضح است که با یکتایی حد $x = x^*$. □

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد به‌طوری‌که $(X, \preceq)$ یک مجموعه مرتب جزیی وهمچنین (X, d) فضای متریک کامل باشد و زیر مجموعه‌های ناتهی بسته A و B از X باشد.و A_0 و B_0 ناتهی به‌طوری‌که A_0 در شرط رابطه (۲۰.۴) صدق کند، و فرض کنیم $T : A \to B$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) T یک نگاشت پیوسته، حافظ ترتیب پروکسیمینال تعمیم‌یافته Cــ انقباضی است به‌طوری‌که $T(A_0) \subseteq B_0$

ب) عناصر x_0 و x_1 در A_0 وجودداشته باشد، به‌طوری‌که $x_0 \preceq x_1$ و

$$d(x_1, Tx_0) = d(A, B)$$

آن‌گاه یک نقطه منحصر به فرد مانند $x \in A_0$ وجود دارد به‌طوری $d(x, Tx) = d(A, B)$.

ج) اگر دنباله صعودی $\{x_n\} \in A$ همگرا به x باشد، آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \preceq x_1$.
بنابراین یک نقطه منحصر به فرد $x \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$d(x, Tx) = d(A, B).$$

مراجع

[1] R.P. Agarwal, M.A. El-Gebeily, D. O'Regan, **Generalized contractions in partially ordered metric spaces** , Appl. Anal. 87, (2008) 109-116

[2] R.P. Agarwal, M. Meehan, D.ORegan,**Fixed point theory and applications** , Cambridge tracts in mathematics. 141 (2001).

[3] T.G. Bhaskar, V. Lakshmikantham,**Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications** , Nonlinear Anal. 65 , (2006) 1379–1393

[4] S.K. Chatterjea, **Fixed point theorems**, C.R.Acad.Bulgare Sci. 25 , (1972) 727-730

[5] B.S. Choudhury, **Unique fixed point theorem for weak-contractive mappings**, Kathmandu.Univ. Sci.Eng. Technol.5, (2009) 6-13

[6] A. Cabada, J.J. Nieto,**Fixed points and approximate solutions for nonlinear operator** , J. Comput. Appl. Math. 113, (2000) 17–25

[7] F.R. Deutsch, **Best Approximation in Inner Product Spaces**, Springer, (2001).

[8] D. Doric,**Common fixed point for generalized (ψ, φ)-weak contraction** , Appl. Math. Lett. 22 (2009) 1896–1900

[9] K. Fan, **Extensions of two fixed point theorems of F.E. Browder** , Math .Z 111, (1969) 234-240

[10] J. Harjani, J.Lopez, B. sadarangani, **Fixed point theorems for weakly C-contractive mappings in order metric space**, Comput ,Math.app61, (2011) 790-796

[11] J. Harjani, B. Sadarangani,**Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets** , Nonlinear Anal. 71 (2009) 3403-3410

[12] J. Harjani, K. Sadarangani,B. López,**A fixed point theorem for mappings satisfying a contractive condition of rational type on a partially ordeed metric space** , Nonlinear Anal. 10 , (2010) 11-55

[13] J.J. Nieto, R. Rodríguez,B. López, **Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations** , Acta Math. Sinica 23, (2007) 2205-2212

[14] J.J. Nieto, R.L. Pouso, R. Rodríguez, B. López, **Fixed Point theorems in ordered abstract spaces** , Proc. Amer. Math. Soc.. 135 , (2007) 2505-2517

[15] J.J. Nieto,R, Rodríguez, B. López, **Contractive mapping theorems in partially order sets and application to ordinary differential equation**,Order 22, (2005) 223-239

[16] J.J. Nieto,R, Rodríguez-López, **Application of contractive -like mapping principlees to fuzzy equations**, Rev.Math.complute .19 , (2006) 361-383

[17] C. Mongkolkeha,Y.Cho,P.Kumam, **Best proximity points for generalized proximal C-contraction mappings in metric spaces with partial orders**,Comput.Math.Appl.61, (2011) 790-796

[18] J.B. Prolla , **Fixed point theorems for set valued mappings and existence of best approximations**, Number.Funct. Anal,Optim . 5, (1982-1983) 449 -455

[19] S. Reich, **Approximate selection, best approximations,fixed points and invariant sets**, J.Math.Anal.Appl.62 (1978) 104-113

[20] W. Rudin, **Real and complex analysis**, McGraw-Hill, New York, (1973).

[21] W. Rudin, **Principles of mathematical analysis**, New York: McGraw-Hill(1976)

[22] A.C.M. Ran, M.C.B. Reurings,**A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations** , Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004) 1435–1443

[23] T. Suzuki, G. Takahashi, W , **Fixed point Theorems and characterizations of metric completeness**, in:Topol. Meth. Nonlinear Anal. 8, (1996) 371–382

[24] V.M. Sehgal, S.P. Singh, **A generalization to multifunctions of Fan's best approximation theorem**, Proc. Am, Math.Soc. 102, (1978) 534 -537

[25] V. Lakshmikantham, L. Ciric,**Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric** , Nonlinear Anal. 70 , (2009) 4341–4349

[26] Y, Wu, **New fixed point theorems and applictions of monotone operator**, J.Math.Anal.Appl.341, (2008) 883–893

[27] Q. Zhang, Y. Song, **Fixed point theory for generalized ’-weak contractions**, Applied Mathematics Letters 22 , (2009) 75-78

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

افزایشی .... Increasing
استقرا .... Induction
انقباض .... Contraaction
cـ انقباضی .... C-contraction
cـ انقباضی ضعیف .... Weak c-contraction
باز .... Open
بهترین تقریب .... Best appoxmation
پیوسته .... Continuse
پروکسمینال .... Proximal
پروکسمینال تعمیم یافته .... genralized proximal
پیوستگی .... Continuity
پوشا .... Onto
تقریب .... Approxmation
ترتیب جزیی .... Partial ordering
تابع .... Function
تناظر .... Correspondence
ثابت .... Fixed
حافظ ترتیب .... order-preseving
دنباله کوشی .... Cauchy sequence
دامنه‌توانی .... Powerdomain
زیرمجموعه .... Subset
ضعیف .... Weak
فضای باناخ .... Banach space
فضای متریک .... Metric spaces
فشرده .... Compact
فضای هاسدروف .... Housdroff space

فضای متریک جزیی .... Order metric space
کاهشی .... Decreasing
کراندار .... Bounded
متناهی .... Finite
مرتب جزیی .... Partial orderd
مجموعه .... Set
مرتب .... Ordered
مجموعه بسته .... Closed set
متریک .... Metric
نیم پیوسته پایینی .... Lower-semi-continuous
نامتناهی .... Infinite
نقطه ثابت .... Fixed point
نگاشت .... Mapping
نامنفی .... Nonnegative
نقطه .... Point
ویژگی .... Property
همگرایی .... Covergence
هم‌ارز .... Equivalent
یک به یک .... One-to-one
یکنوا .... Monotone

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Approxmation	تقریب
Best appoxmation	بهترین تقریب
Bounded	کراندار
Banach space	فضای باناخ
Covergence	همگرایی
Continuse	پیوسته
Compact	فشرده
Contraaction	انقباض
Cauchy sequence	دنباله کوشی
Closed set	مجموعه بسته
C-contraction	Cـ انقباضی
Correspondence	تناظر
Decreasing	کاهشی
Equivalent	هم‌ارز
Fixed	ثابت
Finite	متناهی
Function	تابع
Fixed point	نقطه ثابت
genralized proximal	پروکسمینال تعمیم یافته
Housdroff space	فضای هاسدروف
Induction	استقرا
Infinite	نامتناهی
Increasing	افزایشی
Lower-semi-continuous	نیم پیوسته پایینی
Mapping	نگاشت
Metric	متریک

فضای متریک	Metric spaces
یکنوا	Montone
نگاشت	Mapping
متریک	Metric
فضای متریک	Metric spaces
یکنوا	Monotone
نامنفی	Nonnegative
مرتب	Ordered
حافظ ترتیب	Order-preseving
یک به یک	One-to-one
پوشا	Onto
باز	Open
فضای متریک جزیی	Order metric space
ویژگی	Property
دامنه‌توانی	Powerdomain
ترتیب جزیی	Partial ordering
مرتب جزیی	Partial orderd
نقطه	Point
پروکسمینال	Proximal
زیرمجموعه	Subset
مجموعه	Set
Cـ انقباضی ضعیف	Weak C-contraction
ضعیف	Weak

Aabstract

In1992, Banach proved that every contractive mapping in a complete metric space has a unique fixed point. In this thesis we extend the notion of weakly C-contraction mappings to the case of non-self mappings and establish the best proximity point theorems for this class. Our results generalize the result due to Harjani et al. The purpose of the subject is to provide some fixed point results for weak contractions C- mappings In a complete metric space, they have a small sequence.Also, introduced the concept of pairwise uniformity of fixed points in metric space We proceeded to study the proximity of generalized C -contraband maps.

Keyword: Fixed point ; Order metric space ; Partial ordering ; Best approximation ; Contraction ; coupled fixed point ; Proximal ; mapping C-contraction; mapping Weak C-contraction

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Approximation theory

Best approxmation for generalized c - contraaction mappings in metric spaces with partial orders

By: Elahe Shakeriyan

Supervisor

Mahdi Iranmanesh

Advisor

Ali reza khoddami

Junuary 2018