بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

همانی‌های تقریبی در جبرهای تابعی باناخ

نگارنده: فاطمه کوهساری

استاد راهنما

دکتر علی‌رضا خدّامی

بهمن ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **فاطمه کوهساری** با شماره دانشجویی **۹۴۱۵۰۲۴** رشته ریاضی محض گرایش آنالیز تحت عنوان **همانی های تقریبی در جبرهای تابعی باناخ** که در تاریخ **۹۶/۱۱/۰۲** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: عالی خوب) ☐	**مردود** ☐	
نوع تحقیق:	**نظری** ■	**عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر علیرضا خدّامی	استادیار	علیرضا خدّامی
۲- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سید حیدر جعفری	استادیار	
۳- استاد ممتحن اول	دکتر مهدی ایرانمنش	دانشیار	
۴- استاد ممتحن دوم	دکتر کامران شریفی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده ریاضی

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به پدر و مادر عزیزم:

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم.

والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چراکه این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی‌ام بوده‌اند. دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان...

سپاس‌گزاری...

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. پس از ارادت خاضعانه به درگاه خداوند یکتا، لازم است از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر خدّامی بابت علومی که به من آموختند و راهنمایی‌هایی که در جمع‌آوری این مجموعه نمودند تشکر و قدردانی کنم. در پایان بر خود واجب می‌دانم از کلیه کسانی که در طول مراحل تحصیل بنده را یاری نمودند، علی‌الخصوص خانواده عزیز و اساتید ارجمندم تشکر کنم.

فاطمه کوهساری
بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه کوهساری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **همانی‌های تقریبی در جبرهای تابعی باناخ** ، تحت راهنمایی **علی‌رضا خدّامی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه کوهساری
بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی جبرهای تابعی باناخ انقباضی و جبرهای تابعی باناخ نقطه‌وار انقباضی خواهیم پرداخت. بیان خواهیم کرد که هر ایده‌آل مدولی ماکسیمال در جبرهای تابعی باناخ انقباضی یک همانی تقریبی انقباضی و هر ایده‌آل مدولی ماکسیمال در جبرهای تابعی باناخ نقطه‌وار انقباضی یک همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی دارد. همچنین به مشخص سازی جبرهای تابعی باناخ انقباضی و نقطه‌وار انقباضی می‌پردازیم. در ادامه ضمن بیان مثال‌هایی متعدد از جمله، جبرهای یکنواخت، بیان خواهیم کرد که جبرهای باناخ انقباضی و جبرهای باناخ نقطه‌وار انقباضی با هم متمایز هستند. همچنین یک جبر تابعی باناخ انقباضی ارائه می‌دهیم که معادل با یک جبر یکنواخت نیست. نهایتاً بیان خواهیم کرد که جبرهای دنباله‌ای باناخ و جبرهای تابعی باناخ ایده‌آل‌هایی در دوگان دوم خود هستند.

کلمات کلیدی: اشتقاق‌های نقطه‌ای، جبر باناخ جابجایی، جبر تاوبرین، جبر دنباله‌ای باناخ، جبر دیتکین، جبر سگال مجرد، جبر کول، جبرهای تابعی باناخ، جبرهای تابعی باناخ انقباضی، جبرهای تابعی باناخ نقطه‌وار انقباضی، جبرهای یکنواخت، چگال، حاصل‌ضرب آرنز، خودالحاق، دنباله وزنی، کران‌دار، گروه توپولوژیک، مجموعه اوج، مجموعه جهت‌دار، مرز سیلو، منتظم آرنز، نقاط اوج، واحد تقریبی کران‌دار، واحد تقریبی نسبی کران‌دار، همانی تقریبی انقباضی، همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی، یک‌دار.

فهرست مطالب

---

[۱] Logmodular

[۲] Gelfand

[۳] Tauberian

[۴] Ditkin

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پیش‌نیاز

نمادگذاری ۱.۰.۱. چون مجموعه‌ها و نمادهای زیر مکرراً در این پایان‌نامه استفاده می‌شوند به معرفی آنها می‌پردازیم

۱ـ $\mathbb{I} = [0, 1]$.

۲ـ $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

۳ـ $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

۴ـ $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

تعریف ۱.۰.۱. فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$ یک جبر می‌باشد، هرگاه A، به همراه یک تابع ضرب $\cdot : A \times A \to A$ در شرایط زیر صدق کند

۱ـ برای هر $x, y, z \in A$،

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

۲ـ برای هر $x, y, z \in A$،

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x,$$

۳ـ برای هر $x, y \in A$ و برای هر $\alpha \in \mathbb{F}$،

$$(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y).$$

جبر A را یک‌دار گوییم هرگاه عضو ۱ در A موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1.$$

یک زیر مجموعه از جبر A را یک زیرجبر A گوییم، هرگاه نسبت به اعمال جمع و ضرب روی A، خود یک جبر باشد.

تعریف ۲.۰.۱. فرض کنید A یک جبر باشد. یک ایده‌آل چپ مینیمال در A یک عضو مینیمال در خانواده همه ایده‌آل‌های چپ ناصفر در A است.

تعریف ۳.۰.۱. فرض کنید I یک ایده‌آل چپ سره از جبر یک‌دار A و e_A عضو یکانی A باشد. I را مدولی می‌نامیم اگر $u \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که $A(e_A - u) \subseteq I$. دراین‌صورت u همانی مدولی راست برای I نامیده می‌شود.
یک ایده‌آل I را مدولی می‌نامیم اگر $u \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $A(e_A - u) + (e_A - u)A \subseteq I$.

تعریف ۴.۰.۱. فرض کنید A یک جبر باشد دراین‌صورت رادیکال A اشتراک تمام ایده‌آل‌های چپ مدولی ماکسیمال A تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۰.۱. جبر A را نیم‌ساده می‌نامیم هرگاه $radA = \{0\}$.

نکته ۱.۰.۱. یک ایده‌آل سره I مدولی است اگروفقط‌اگر $\frac{A}{I}$ یک جبر یک‌دار باشد.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

تعریف ۶.۰.۱. فرض کنید A یک جبر باشد دراین‌صورت یک ایده‌آل چپ مدولی ماکسیمال در A یک عضو ماکسیمال در خانواده همه ایده‌آل‌های چپ مدولی سره در A می‌باشد.

تعریف ۷.۰.۱. فرض کنید A یک فضای برداری باشد و تابعی چون $\|\cdot\| : A \longrightarrow [0, \infty)$ چنان موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند
۱ــ به‌ازای‌هر $x \in A$، $\|x\| = 0$ اگروفقط‌اگر $x = 0$،
۲ــ به‌ازای‌هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in A$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$،
۳ــ به‌ازای‌هر $x, y \in A$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
دراین‌صورت $\|\cdot\|$ را یک نرم بر A می‌نامیم و A را یک فضای نرم‌دار می‌گوییم.

تذکر ۱.۰.۱. هر فضای نرم‌دار A یک فضای متری تحت متر $d(x, y) = \|x - y\|$ می‌باشد که در آن $x, y \in A$ است.

تعریف ۸.۰.۱. اگر $(A, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد به‌طوری‌که A تحت متر تولید شده توسط نرم $\|\cdot\|$ تام باشد آنگاه A را یک فضای باناخ می‌نامند.

تعریف ۱.۰.۹. اگر A یک فضای برداری باشد آنگاه دو نرم $\|\cdot\|_۱$ و $\|\cdot\|_۲$ روی A را معادل می‌نامیم هرگاه، $\alpha, \beta > ۰$ چنان موجود باشند که به‌ازای‌هر $x \in A$، $\alpha\|x\|_۱ \leq \|x\|_۲ \leq \beta\|x\|_۱$.

تعریف ۱.۰.۱۰. اگر X و Y دو فضای نرم‌دار باشند و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی درنظر گرفته شود آنگاه قرار می‌دهیم $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|X\| \leq ۱\}$. هرگاه $\|T\| < \infty$ آنگاه T را یک عملگر خطی کران‌دار می‌نامیم.
هرگاه T عملگر خطی کران‌دار باشد آنگاه می‌توان نوشت

$$\|T\| = \inf\{M \geq ۰ \mid \|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \text{به‌ازای‌هر } x \in X\}.$$

مجموعه تمام عملگرهای خطی کران‌دار از X به Y را با $B(X, Y)$ و مجموعه تمام عملگرهای خطی کران‌دار از X به X را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۰.۱۱. هرگاه A یک فضای نرم‌دار باشد دوگان اول و دوم A را به ترتیب با A^* و A^{**} نمایش می‌دهیم و عبارتند از

$$A^* = \{f : A \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{خطی و کران‌دار باشد } f\},$$

$$A^{**} = \{m : A^* \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{خطی و کران‌دار باشد } m\}.$$

تعریف ۱.۰.۱۲. فرض کنید A یک جبر باشد و یک نرم مانند $\|\cdot\|$ روی A چنان موجود باشد که به‌ازای‌هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. دراین‌صورت A را یک جبر نرم‌دار می‌نامیم.
جبر نرم‌دار A را باناخ می‌نامیم هرگاه A یک فضای باناخ باشد.
جبر باناخ A را یک‌دار می‌نامیم اگر عضوی چون $e_A \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $a \in A$، $e_A a = a e_A = a$ و $\|e_A\| = ۱$.

تعریف ۱.۰.۱۳. فرض کنید S یک مجموعه ناتهی و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های S در نظر گرفته شود. دراین‌صورت τ را یک توپولوژی روی S می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند
۱ــ $\emptyset, S \in \tau$،
۲ــ به‌ازای‌هر زیر گردایه از τ مانند $\{A_i\}_{i \in I}$، $\cup A_i \in \tau$،
۳ــ به‌ازای‌هر زیرگردایه متناهی از τ مانند $\{A_i\}_{i \in I}$، $\cap A_i \in \tau$.
در این حالت S را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم و به اعضای مجموعه τ مجموعه‌های باز می‌گوییم.

تعریف ۱.۰.۱۴. فضای توپولوژیک K را هاسدورف می‌نامند هرگاه به‌ازای‌هر $x, y \in K$ که $x \neq y$ همسایگی‌هایی چون u_x و u_y موجود باشند به‌طوری‌که $u_x \cap u_y = \emptyset$.

تعریف ۱.۰.۱۵. هرگاه K یک فضای توپولوژیک باشد و به‌ازای‌هر $x \in K$ همسایگی چون u_x از x موجود باشد به‌طوری‌که $\overline{u_x}$ فشرده باشد آنگاه K را یک فضای موضعاً فشرده می‌نامیم.

تعریف ۱.۰.۱۶. فرض کنید K یک فضای ناتهی، هاسدورف و موضعاً فشرده باشد. همچنین فرض کنید $C^b(K)$ متشکل از تمام توابع مختلط مقدار، پیوسته و کران‌دار روی K لحاظ شود دراین‌صورت $C^b(K)$ با جمع و ضرب نقطه‌وار زیر

۱ـ $(f+g)(k)=f(k)+g(k)$،

۲ـ $(f\cdot g)(k)=f(k)g(k)$،

۳ـ $(\alpha f)(k)=\alpha f(k)$.

و همچنین نرم $\|f\|_k=\sup\{|f(k)|\mid k\in K\}$ یک جبر باناخ جابجایی و یک‌دار است.

تعریف ۱.۰.۱۷. فرض کنید K یک فضای ناتهی، هاسدورف و موضعاً فشرده باشد. گوییم $f\in C^b(K)$ در بی نهایت به صفر می‌گراید هرگاه به‌ازای‌هر $\varepsilon>\circ$ مجموعه $\{x\in K\mid |f(x)|\geq\varepsilon\}$ در K فشرده باشد.

مجموعه تمام توابعی از $C^b(K)$ را که در بی‌نهایت به صفر می‌گرایند را با $C_\circ(K)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۰.۱. هرگاه K یک فضای ناتهی، هاسدورف و موضعاً فشرده باشد آنگاه $C_\circ(K)$ یک ایده‌آل بسته در $C^b(K)$ می‌باشد.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۰.۱۸. اگر $f\in C_\circ(K)$ آنگاه محمل یا تکیه‌گاه f را با نماد $\mathrm{supp}f$ نمایش می‌دهیم و آن عبارت است از $\mathrm{supp}f=\overline{\{x\in K\mid f(x)\neq\circ\}}$.

تعریف ۱.۰.۱۹. فرض کنید A یک جبر باناخ و E یک فضای باناخ باشد. E یک $A-$ مدول چپ باناخ نامیده می‌شود، هرگاه نگاشت $(a,x)\longrightarrow a\cdot x$ از $A\times E$ به E وجود داشته باشد به‌طوری‌که دو شرط زیر برقرار باشند

الف) ۱ـ برای هر $a,b\in A$ و $x\in E$،

$$(a+b)\cdot x=a\cdot x+b\cdot x.$$

۲ـ برای هر $\alpha\in\mathbb{C}$، $a\in A$ و $x\in E$،

$$\alpha(a\cdot x)=(\alpha a)\cdot x=a\cdot(\alpha x).$$

۳ـ برای هر $x,y\in E$ و $a\in A$،

$$a\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y.$$

۴ـ برای هر $a,b\in A$ و $x\in E$،

$$(ab)\cdot x=a\cdot(b\cdot x).$$

ب) عدد حقیقی و مثبت K موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ و هر $x \in E$ داشته باشیم

$$\|a \cdot x\| \leq K\|a\|\|x\|.$$

$A-$ مدول راست باناخ به طور مشابه تعریف می‌شود.

E یک $A-$ دو مدول باناخ یا $A-$ مدول باناخ است، هرگاه E یک $A-$ مدول چپ و راست باناخ باشد و برای هر $a, b \in A$ و $x \in E$، داشته باشیم

$$(a \cdot x) \cdot b = a \cdot (x \cdot b).$$

فرض کنید A یک جبر باناخ و E یک $A-$ دو مدول باناخ باشد. دراین‌صورت فضای باناخ E^* با اعمال مدولی

$$\langle f \cdot a, x \rangle = \langle f, a \cdot x \rangle, \quad \langle a \cdot f, x \rangle = \langle f, x \cdot a \rangle,$$

$$(a \in A, x \in E, f \in E^*).$$

یک $A-$ مدول باناخ است. به ویژه A یک $A-$ دو مدول روی خودش است و همچنین A^* یک $A-$ دو مدول باناخ است به‌طوری‌که

$$\langle f \cdot a, b \rangle = \langle f, ab \rangle, \quad \langle b, a \cdot f \rangle = \langle f, b \cdot a \rangle,$$

$$(a, b \in A, f \in A^*).$$

تعریف ۲۰.۰.۱. هرگاه A یک جبر باشد و $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ یک نگاشت خطی باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $a, c \in A$ داشته باشیم $\varphi(ac) = \varphi(a)\varphi(c)$ آنگاه φ را یک همریختی جبری می‌نامیم.

تعریف ۲۱.۰.۱. فرض کنید A یک جبر باشد. دراین‌صورت به هر همریختی جبری ناصفر مانند $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ یک شاخص روی A گفته می‌شود.

فضای تمام شاخص‌های روی A را با Φ_A نمایش می‌دهیم و آن را فضای شاخص روی A می‌نامیم.

اگر A یک جبر باناخ جابجایی و یک‌دار باشد آنگاه فضای Φ_A ناتهی است.

اگر A یک جبر باناخ باشد آنگاه هر $\varphi \in \Phi_A$ یک تابعک خطی پیوسته روی A است به‌طوری‌که $\|\varphi\| \leq ۱$. بنابراین می‌توان Φ_A را به عنوان یک زیر مجموعه از $A^*_{[۱]} = \{f \in A^* \mid \|f\| \leq ۱\}$ در نظر گرفت.

تعریف ۲۲.۰.۱. رابطه $\leq$ روی مجموعه‌ی A را یک رابطه ترتیب جزیی می‌نامیم هرگاه برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in A$ داشته باشیم

۱ــ $\alpha \leq \alpha$،

۲ــ اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ آنگاه $\alpha = \beta$،

۳ــ اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ آنگاه $\alpha \leq \gamma$.

تعریف ۲۳.۰.۱. مجموعه‌ی غیر تهی J را یک مجموعه‌ی جهت‌دار می‌گوییم هرگاه یک رابطه ترتیب جزیی مانند $\leq$ روی J وجود داشته باشد که برای هر دو عضو α و β از J عنصر γ از J موجود باشد به‌طوری‌که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

تعریف ۲۴.۰.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و J یک مجموعه‌ی جهت‌دار باشد. دراین‌صورت یک تور در X، نگاشتی چون $x : J \longrightarrow X$ با ضابطه $\alpha \longrightarrow x(\alpha)$ می‌باشد که معمولاً آن را به صورت $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ می‌نویسیم.

تعریف ۲۵.۰.۱. فرض کنید $(x_\alpha)_\alpha$ یک تور در جبر نرم‌دار A باشد. گوییم تور $(x_\alpha)_\alpha$ به عضو $x \in A$ همگراست هرگاه

$$\forall\varepsilon > \circ \quad \exists\alpha_\circ, \quad \forall\alpha \geq \alpha_\circ \quad \|x_\alpha - x\| < \varepsilon.$$

تعریف ۲۶.۰.۱. فرض کنید A یک جبر نرم‌دار باشد. تور کران‌دار $(x_\alpha)_\alpha$ از A را یک همانی تقریبی کران‌دار چپ برای A می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\lim_\alpha\|x_\alpha a - a\| = \circ$.
به طور مشابه تور کران‌دار $(x_\alpha)_\alpha$ را همانی تقریبی کران‌دار راست می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\lim_\alpha\|ax_\alpha - a\| = \circ$.
هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\lim_\alpha\|x_\alpha a - a\| = \lim_\alpha\|ax_\alpha - a\| = \circ$ آنگاه $(x_\alpha)_\alpha$ را یک همانی تقریبی کران‌دار برای A می‌نامیم.

تعریف ۲۷.۰.۱. فرض کنید $(x_\alpha)_\alpha$ یک همانی تقریبی با کران ۱ برای A باشد. دراین‌صورت $(x_\alpha)_\alpha$ را یک همانی تقریبی انقباضی برای A می‌نامیم.

تعریف ۲۸.۰.۱. هرگاه دنباله‌ای کران‌دار مانند (x_n) در A موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$، $\lim_{n\to\infty}\|ax_n - a\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n a - a\| = \circ$ آنگاه (x_n) را یک همانی تقریبی کران‌دار دنباله‌ای برای A می‌نامیم.

تعریف ۲۹.۰.۱. فرض کنید $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر نرم‌دار باشد. دراین‌صورت A واحد تقریبی چپ دارد هرگاه برای هر $a \in A$ وهر $\varepsilon > \circ$، $u \in A_{[m]}$ چنان موجود باشد که $\|a - ua\| < \varepsilon$. به طریق مشابه واحد تقریبی راست دارد هرگاه برای هر $a \in A$ و هر $\varepsilon > \circ$، $u \in A_{[m]}$ چنان موجود باشد که $\|a - au\| < \varepsilon$.
A دارای واحد تقریبی است هرگاه برای هر $a \in A$ و هر $\varepsilon > \circ$، $u \in A_{[m]}$ چنان موجود باشد به‌طوری‌که $\|a - au\| + \|a - ua\| < \varepsilon$.
واحد تقریبی u را با کران m می‌نامیم هرگاه $u \in A_{[m]} \Longrightarrow A_{[m]} = \{a \in A \mid \|a\| \leq m\}$.

قضیه ۲.۰.۱. جبر نرم‌دار $(A, \|\cdot\|)$ یک واحد تقریبی با کران m دارد اگروفقط‌اگر A همانی تقریبی کران‌دار با کران m داشته باشد. همچنین اگر برای هر $\varepsilon > \circ$، A یک واحد تقریبی با کران $m + \varepsilon$ داشته باشد آنگاه A یک واحد تقریبی کران‌دار با کران m دارد.

تعریف ۱.۰.۳۰. فرض کنید $[a,b]$ بازه فشرده‌ای باشد. اگر

$$a = x_\circ < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

مجموعه $P = \{x_\circ, x_1, \cdots, x_n\}$ را یک افراز $[a,b]$ می‌نامیم. بازه $[x_{k-1}, x_k]$ را زیر بازه k ام P نامیده، می‌نویسیم $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. دراین‌صورت $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$. دسته همه افرازهای ممکن $[a,b]$ با نماد $P[a,b]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۰.۳۱. فرض کنید f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد. اگر

$$P = \{x_\circ, x_1, \cdots, x_n\},$$

یک افراز $[a,b]$ باشد، به‌ازای $k = 1, 2, \cdots, n$ می‌نویسیم

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}).$$

هرگاه عددی مثبت مانند M وجود داشته باشد به قسمی که به‌ازای‌هر افراز $[a,b]$،

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leq M,$$

آنگاه گوییم f بر $[a,b]$ با تغییر کران‌دار است.

تعریف ۱.۰.۳۲. فرض کنید f بر بازه $[a,b]$ با تغییر کران‌دار باشد و $\sum(P)$ مجموع $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$ متناظر با افراز $P = \{x_\circ, x_1, \cdots, x_n\}$ از $[a,b]$ را نشان دهد.
عدد

$$V_{(a,b)^{(f)}} = \sup\{\sum(P) \mid P \in P[a,b]\},$$

را تغییر کل f بر بازه $[a,b]$ می‌نامیم.

تعریف ۱.۰.۳۳. فرض کنید (K,d) یک فضای متریک فشرده و ناتهی باشد و همچنین فرض کنید $\alpha \in (\circ, 1)$ باشد.
برای هر تابع مختلط مقدار f روی K تعریف کنید

$$P_\alpha(f) = \sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \mid x, y \in K, x \neq y\}.$$

حال قرار می‌دهیم $\mathrm{Lip}_\alpha K = \{f : K \longrightarrow \mathbb{C} \mid P_\alpha(f) < \infty\}$.
دراین‌صورت $\mathrm{Lip}_\alpha K$ جبر لیپ شیتز روی K با مرتبه α نامیده می‌شود.
همچنین $\mathrm{lip}_\alpha K$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{lip}_\alpha K = \{f \in \mathrm{Lip}_\alpha K \mid \lim_{d(x,y)\to\circ} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \circ\}.$$

اگر به‌ازای‌هر $f \in \mathrm{Lip}_\alpha K$ تعریف کنیم $\|f\|_\alpha = \|f\|_K + P_\alpha(f)$ آنگاه $\mathrm{Lip}_\alpha K$ و $\mathrm{lip}_\alpha K$ هر دو فضای باناخ هستند.

$\mathrm{lip}_\alpha K$ زیر فضای بسته از $\mathrm{Lip}_\alpha K$ است. اگر $1 \leq \beta < \alpha$ آنگاه $\mathrm{Lip}_\beta K \subset \mathrm{Lip}_\alpha K$. همچنین اگر $x_0 \in K$ آنگاه نگاشت $x \longrightarrow d(x, x_0)^\beta$ به $\mathrm{Lip}_\alpha K$ تعلق دارد هرگاه $\alpha \geq \beta$ و به $\mathrm{lip}_\alpha K$ تعلق دارد هرگاه $\beta \geq \alpha$.

قضیه ۳.۰.۱ (مازور)**.** فرض کنید E یک فضای باناخ باشد و S یک زیر مجموعه محدب از آن باشد. دراین‌صورت $\overline{S}^{\|\cdot\|} = \overline{S}^w$.

قضیه ۴.۰.۱ (پیک_شوارتز)**.** فرض کنید D دیسک واحد باشد و $f : D \to D$ یک تابع هولومورف(تابع تحلیلی) دراین‌صورت برای هر $z_1, z_2 \in D$ داریم

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)} f(z_2)}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z} z_2}\right|.$$

تعریف ۳۴.۰.۱. فرض کنید $E = \{z \mid |Z| < 1\}$ دیسک باز در صفحه $\mathbb{C}$ باشد. به‌ازای‌هر $z_1, z_2 \in E$ متر هذلولوی روی E به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - z_1 \overline{z_2}| + |z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \overline{z_2}| - |z_1 - z_2|}.$$

قضیه ۵.۰.۱ (همگرایی تسلطی)**.** فرض کنید $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ دنباله‌ای در فضای نرم‌دار $L^1(\mu)$ باشد. همچنین فرض کنید $f_n \xrightarrow{p.w} f$ و تابعی چون $g \in L^1(\mu)$ چنان موجود باشد که

$$\forall x \in X: \ g(x) \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ |f_n(x)| \leq g(x) \quad \mu.a.e$$

دراین‌صورت $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ و $f \in L^1(\mu)$.

لم ۱.۰.۱ (فاتو)**.** فرض کنید (X, F, μ) یک فضای اندازه و $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq L^+$ یک دنباله از توابع اندازه پذیر نامنفی باشد. دراین‌صورت

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

تعریف ۳۵.۰.۱. فرض کنید $X = (x_n)$ و $Y = (y_n)$ دنباله‌هایی در $\mathbb{R}$ باشند و به‌ازای‌هر $n \in \mathbb{N}$ به قدر کافی بزرگ، $y_n \neq 0$. دراین‌صورت

۱_ می‌گوییم X و Y هم ارز هستند و می‌نویسیم $X \sim Y$ یا $(x_n) \sim (y_n)$ هرگاه $\lim(\frac{x_n}{y_n}) = 1$.

۲_ می‌گوییم مرتبه بزرگی X از مرتبه Y کمتر است و می‌نویسیم $X = o(Y)$ یا $x_n = o(y_n)$ هرگاه $\lim(\frac{x_n}{y_n}) = 0$.

۳_ می‌گوییم X بر Y مسلط است و می‌نویسیم $X = O(Y)$ یا $x_n = O(y_n)$ هرگاه دنباله $(\frac{x_n}{y_n})$ کران‌دار باشد.

تعریف ۳۶.۰.۱. فرض کنید K یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده همراه با توپولوژی τ باشد. شیئی بیرون از K در نظر می‌گیریم. می‌توانیم این شیء را برای سهولت با نماد ∞ نمایش دهیم و با الحاق این شیء به K مجموعه $K_\infty = K \cup \{\infty\}$ را تشکیل می‌دهیم. اگر

فشرده است در K $\tau_\infty = \tau \cup \{K_\infty - C \mid K$فشرده است در $C\}$ آنگاه فضای K_∞ را فشرده شده تک نقطه‌ای K می‌نامیم.

قضیه ۶.۰.۱. فرض کنید K یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد که فشرده نیست و K_∞ فشرده شده تک نقطه‌ای K باشد. دراین‌صورت
۱ــ K_∞ فضای هاسدورف و فشرده است.
۲ــ K زیرفضایی از K_∞ است.
۳ــ مجموعه $K_\infty - K$ متشکل از یک نقطه است.
۴ــ $\overline{K} = K_\infty$.

تعریف ۳۷.۰.۱. فرض کنید A یک جبر باشد و $\varphi \in \Phi_A \cup \{0\}$ در نظر گرفته شود. تابعک خطی d روی A اشتقاق نقطه‌ای در φ است اگر برای هر $a, b \in A$، $d(ab) = \varphi(a)d(b) + \varphi(b)d(a)$.
$\mathbb{C}$ تحت اعمال $a \cdot \lambda = \varphi(a)\lambda$ و $\lambda \cdot a = \varphi(a)\lambda$ یک $A-$ مدول است که آن را با $\mathbb{C}\varphi$ نشان می‌دهیم.
فضای همه اشتقاق‌های نقطه‌ای با $Z^1(A, \mathbb{C}_\varphi)$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۱.۰.۱. فرض کنید

$$A = C^{(1)}(R) = \{f : R \longrightarrow R \mid \text{کران‌دار و مشتق‌پذیر است با مشتق پیوسته } f\}$$

با نرم یکنواخت $\|f\|_R$ در نظر گرفته شود. اگر

$$\varphi : A \to R$$
$$\varphi(f) = f(1)$$
$$d : A \to R$$
$$d(f) = f'(1)$$

آنگاه d یک اشتقاق نقطه‌ای در φ است.

تعریف ۳۸.۰.۱. یک چند جمله‌ای مثلثاتی مجموعی است متناهی به شکل $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ که در آن $a_0, \cdots, a_N$ و $b_0, \cdots, b_N$ اعداد مختلط می‌باشند. نظر به اتحادهای $\cos(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)]$ و $\sin(x) = \frac{1}{2i}[E(ix) - E(-ix)]$، $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ را می‌توان به شکل $f(x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$ نوشت.

تعریف ۳۹.۰.۱. فرض کنید A یک جبر باشد. دراین‌صورت یک برگشت روی A یک نگاشت مزدوج خطی مانند

$$A \to A$$
$$a \to a^*$$

است به‌طوری‌که برای هر $a,b \in A$ دو خاصیت زیر برقرار باشند

۱ـ $a^{**} = a$

۲ـ $(ab)^* = b^*a^*$

دراین‌صورت $(A,*)$ را یک جبر برگشت‌دار یا یک $*-$ جبر می‌نامیم.

تعریف ۴۰.۰.۱. یک $*-$ جبر باناخ یک $*-$ جبر مانند A همراه با یک نرم زیر ضربی کامل مانند $\|\cdot\|$ است که به‌ازای‌هر $a \in A$، $\|a\| = \|a^*\|$. به ویژه اگر A یک‌دار باشد و $\|1\| = 1$ آنگاه $*-$ جبر باناخ یک‌دار می‌نامیم.

تعریف ۴۱.۰.۱. یک $*-$ جبر باناخ مانند A را یک C^*- جبر می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in A$، $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

مثال ۲.۰.۱. فرض کنید K یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده و ناتهی باشد. دراین‌صورت $C_0(K)$ یک C^*- جبر است که عمل برگشت آن به‌ازای‌هر $f \in C_0(K)$ به صورت $f^*(x) = \overline{f(x)}$ تعریف می‌شود.

۱.۱ توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف‌ـ ستاره

فرض کنید Aیک فضای باناخ و A^* دوگان A در نظر گرفته شود. توپولوژی تولید شده به وسیله A^* روی A، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی روی A که هر $f \in A^*$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی A می‌نامیم و آن را با $\sigma(A, A^*)$ نمایش می‌دهیم.

اگر $x_0 \in A$، $\varepsilon > 0$ و $f \in A^*$ آنگاه $U(f, x_0, \varepsilon) = \{x \in A \mid |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ یک مجموعه باز (یک همسایگی از x_0) نسبت به توپولوژی ضعیف است. در حقیقت گردایه تمام مجموعه‌های به فرم $U(f, x_0, \varepsilon)$ وقتی f و x_0 و ε تغییر می‌کنند تشکیل یک زیر پایه برای توپولوژی ضعیف می‌دهند و گردایه تمام اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های به شکل $U(f, x_0, \varepsilon)$ تشکیل یک پایه برای توپولوژی ضعیف می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱. اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای باناخ A باشد و $x \in A$، آنگاه گوییم دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به صورت ضعیف به $x \in A$ میل می‌کند و می‌نویسیم $x_n \xrightarrow{w} x$، هرگاه به‌ازای‌هر همسایگی ضعیف مانند U از x عضوی چون $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که به‌ازای‌هر $n \geq N$ ، $x_n \in U$.

قضیه ۱.۱.۱. اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای باناخ A باشد و $x \in A$ آنگاه $x_n \xrightarrow{w} x$ اگروفقط‌اگر به‌ازای‌هر $f \in A^*$، $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید A یک فضای باناخ و $x \in A$ دلخواه باشد. دراین‌صورت نگاشت

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A^{**} \\ x &\longrightarrow \hat{x} \end{aligned}$$

را برای هر $f \in A^*$ به صورت $\hat{x}(f) = f(x)$ تعریف می‌کنیم. نگاشت فوق را تصویر متعارف A در A^{**} می‌نامیم.

اگر A یک فضای باناخ و A^* دوگان آن باشد آنگاه کوچکترین توپولوژی روی A^* که نسبت به آن به‌ازای‌هر $x \in A$، $\hat{x}$ پیوسته باشد را با نماد $\sigma(A^*, A)$ نمایش می‌دهیم و آن را توپولوژی ضعیف‌ـ‌ستاره روی A می‌نامیم.
یک مجموعه زیرپایه‌ای باز برای توپولوژی ضعیف‌ـ‌ستاره به فرم
$U(f_\circ, x, \varepsilon) = \{f \in A^* \mid |f(x) - f_\circ(x)| < \varepsilon\}$ است که در آن $x \in A$، $f_\circ \in A^*$، $\varepsilon > \circ$.
یک مجموعه پایه‌ای باز برای توپولوژی ضعیف‌ـ‌ستاره به فرم

$$B(f_\circ, x_۱, x_۲, ..., x_m, \varepsilon_۱, ..., \varepsilon_m) = \{f \in A^* \mid |f(x_i) - f_\circ(x_i)| < \varepsilon_i, ۱ \leq i \leq m\},$$

می‌باشد که در آن $f_\circ \in A^*$ و $x_۱, x_۲, ..., x_m \in A$ و $\varepsilon_۱, \varepsilon_۲ ..., \varepsilon_m$ اعدادی مثبت هستند.
به طور مشابه گوییم دنباله $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در A^* به عضو $f \in A^*$ به صورت ضعیف‌ـ‌ستاره میل می‌کند هرگاه به‌ازای‌هر همسایگی ضعیف‌ـ‌ستاره از f مانند U عضوی چون $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که به‌ازای‌هر $n \geq N$، $f_n \in U$. دراین‌صورت می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. دراین‌صورت عملگر خطی کران‌دار $T : X \longrightarrow Y$ را به طور ضعیف فشرده می‌نامند هرگاه مجموعه $\overline{T(X_{[۱]})}$ در Y به طور ضعیف فشرده باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. دراین‌صورت عضو $f \in A^*$ را به طور ضعیف متناوب تقریبی [۱] می‌نامیم هرگاه نگاشت

$$\begin{aligned} R_f : &A \longrightarrow A^* \\ &a \longrightarrow a \cdot f \end{aligned}$$

به طور ضعیف فشرده باشد.

فضای باناخ تمام تابعک‌های به طور ضعیف تقریبی روی A را با نماد $WAP(A)$ نمایش می‌دهیم. (برای مطالعه جزئیات بیشتر در مورد فضای $WAP(A)$ به مراجع [۶] بخش ۲.۶ و همچنین [۹] و [۱۰] و [۲۶] مراجعه شود.)

[۱] Weakly almost periodic

قضیه ۲.۱.۱. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در A^* باشد و $f \in A^*$ آنگاه $f_n \xrightarrow{w^*} f$ اگروتنهااگر به‌ازای‌هر $x \in A$ داشته باشیم $f_n(x) \to f(x)$.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۱.۱ (آلاگلو). گوی یکه بسته $A^*_{[1]} = \{f \in A^* \mid \|f\| \leq 1\}$ در توپولوژی ضعیف‌ـ‌ستاره فشرده است. (به عبارت دیگر $A^*_{[1]}$ نسبت به توپولوژی $\sigma(A^*, A)$ فشرده است.)

برهان. به مرجع [۶] قضیه A.۳.۲۰ مراجعه شود. □

گزاره ۱.۱.۱. اگر A یک جبر باناخ باشد آنگاه فضای Φ_A نسبت به توپولوژی ضعیف‌ـ‌ستاره موضعاً فشرده است. اگر A یک‌دار باشد آنگاه Φ_A فشرده است.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

اگر A یک جبر باناخ باشد آنگاه مجموعه‌های $A^{[2]}$ و A^2 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A^{[2]} = \{ab \mid a, b \in A\} \qquad , \qquad A^2 = \mathrm{lin}A^{[2]}$$

که در آن $\mathrm{lin}A^{[2]}$ مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی اعضای $A^{[2]}$ است.

تعریف ۵.۱.۱. اگر A یک جبر باناخ باشد آنگاه گوییم A تجزیه می‌شود هرگاه $A = A^{[2]}$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ یک‌دار باشد. دراین‌صورت مجموعه K_A که به صورت $K_A = \{f \in A^* \mid \|f\| = \langle f, e_A \rangle = 1\}$ تعریف می‌شود را فضای حالت جبر A می‌نامیم.

فضای K_A زیر مجموعه‌ای ناتهی، محدب و ضعیف‌ـ‌ستاره فشرده از $A^*_{[1]}$ است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید A یک فضای برداری و $S \subseteq A$ در نظر گرفته شود. عضو $x \in S$ را یک نقطه فرین مجموعه S می‌نامیم اگر $S - \{x\}$ محدب باشد.
مجموعه تمام نقاط فرین مجموعه S را با نماد exS نمایش می‌دهیم.

می‌توان ثابت کرد که x نقطه فرین مجموعه S است هرگاه از رابطه‌های $2x = y + z$ و $y, z \in S$ بتوان نتیجه گرفت که $x = y = z$.

گزاره ۲.۱.۱. فرض کنید A یک جبر نرم‌دار یک‌دار باشد. دراین‌صورت e_A یک نقطه فرین مجموعه $A_{[1]} = \{x \in A \mid \|x\| \leq 1\}$ است.

برهان. به مرجع [۶] گزاره ۲.۱.۱۶ مراجعه شود. □

قضیه ۴.۱.۱ (کرین‌میلمن). اگر K یک زیر مجموعه فشرده و ناتهی از یک فضای موضعاً فشرده باشد آنگاه $\overline{\langle \mathrm{exK} \rangle} = K$. که در آن $\langle \mathrm{exK} \rangle$ پوسته محدب مجموعه exK است.

برهان. به مرجع [۶] قضیه A.۳.۳۰ قسمت (i) مراجعه شود. □

نتیجه ۱.۱.۱. اگر A یک جبر باناخ یک‌دار باشد و $K_A = \{f \in A^* \mid \|f\| = \langle f, e_A\rangle = 1\}$ آنگاه $K_A = \overline{\langle \mathrm{exK}_A \rangle}^{w^*}$.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

برای جبر باناخ A دو نمادگذاری زیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A \cdot A^* = \{a \cdot f \mid a \in A, f \in A^*\},$$

$$AA^* = \mathrm{lin} A \cdot A^*.$$

جایی که $\mathrm{lin} A \cdot A^*$ مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی اعضای $A \cdot A^*$ است.

۲.۱ ضرب‌های آرنز نوع اول و دوم

تعریف ۱.۲.۱ (ضرب‌های آرنز). برای جبر نرم‌دار شرکت پذیر A فرض کنید A^{**} دوگان دوم A باشد. ضرب‌های آرنز نوع اول و دوم روی A^{**} که به ترتیب با $\Box$ و $\lozenge$ نمایش داده می‌شوند به صورت زیر تعریف می‌شوند. برای هر $a, b \in A$ و $f \in A^*$ و $m, n \in A^{**}$ داریم

$$\langle f \cdot a, b\rangle = \langle f, ab\rangle, \quad \langle n \cdot f, a\rangle = \langle n, f \cdot a\rangle, \quad \langle m \Box n, f\rangle = \langle m, n \cdot f\rangle$$

و

$$\langle b, a \cdot f\rangle = \langle ba, f\rangle, \quad \langle a, f \cdot m\rangle = \langle a \cdot f, m\rangle, \quad \langle f, m \lozenge n\rangle = \langle f \cdot m, n\rangle$$

به سادگی قابل بررسی است که $(A^{**}, \Box)$، $(A^{**}, \lozenge)$ جبرهای نرم‌دار شرکت پذیر هستند.

تعریف ۲.۲.۱. هرگاه ضرب‌های آرنز بر هم منطبق باشند به عبارتی دیگر هرگاه برای هر دو عضو دلخواه n، m متعلق به A^{**} داشته باشیم $m \Box n = m \lozenge n$ آنگاه A را منتظم آرنز می‌نامند.

مثال ۱.۲.۱. هر جبر نرم‌دار متناهی‌البعد منتظم آرنز است.

۳.۱ جبرهای لگاریتم مدولی[۲]

فرض کنید $C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ پیوسته است}\}$ دراین‌صورت $C(K)$ یک جبر روی $\mathbb{C}$ است.

[۲] Logmodular

فرض کنید $C_{\mathbb{R}}(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{R} \mid$ پیوسته است $f\}$ دراین‌صورت $C_{\mathbb{R}}(K)$ یک جبر روی $\mathbb{R}$ است.
فرض کنید A یک جبرباشد در این‌صورت

$$A^{-1} = \{f \in A \mid \text{معکوس پذیر است } f\}$$

$$\mathrm{Re}A = \{\mathrm{Re}f \mid f \in A\}$$

$$\overline{A} = \{\overline{f} \mid f \in A\}$$

$$\log|A^{-1}| = \{\log|f| \mid f \in A^{-1}\}$$

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید A یک جبر یکنواخت روی K باشد. گوییم A یک جبر لگاریتم مدولی روی K است اگر مجموعه توابع $\log|A^{-1}| = \{\log|f| \mid f \in A^{-1}\}$ به طور یکنواخت در $C_{\mathbb{R}}(K)$ چگال باشد. که در آن A^{-1} مجموعه تمام توابع معکوس پذیر A است.

فصل ۲

جبرهای تابعی باناخ

تعریف ۲.۰.۱. فرض کنید K یک فضای ناتهی، هاسدورف و موضعاً فشرده باشد. همچنین فرض کنید A یک زیرجبر از $C^b(K)$ لحاظ شود. گوییم A به طور قوی نقاط K را جدا می‌کند هرگاه برای هر $x, y \in K$ با شرط $x \neq y$، تابعی چون $f \in A$ چنان موجود باشد که $f(x) \neq f(y)$. همچنین برای هر $x \in K$ تابعی چون $g \in A$ چنان موجود باشد که $g(x) \neq \circ$.

تعریف ۲.۰.۲. فرض کنید K یک فضای ناتهی، هاسدورف و موضعاً فشرده باشد. دراین‌صورت یک جبر تابعی روی K یک زیرجبر از $C^b(K)$ مانند A است که به طور قوی نقاط K را جدا می‌کند.

تعریف ۲.۰.۳. جبر تابعی A را خودالحاق می‌نامیم هرگاه به‌ازای‌هر $f \in A$، $\overline{f} \in A$. که در آن برای هر $k \in K$، $\overline{f}(k) = \overline{f(k)}$.

تعریف ۲.۰.۴. فرض کنید A یک جبر تابعی روی فضای ناتهی، هاسدورف و موضعاً فشرده K باشد. همچنین فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نرم روی A لحاظ شود به‌طوری‌که A تحت نرم $\|\cdot\|$ تام باشد. دراین‌صورت $(A, \|\cdot\|)$ رایک جبر تابعی باناخ می‌نامیم.

همچنین یک جبر تابعی باناخ $(A, \|\cdot\|)$ را معادل با یک جبر یکنواخت می‌نامیم هرگاه نرم‌های $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_K$ روی A با هم معادل باشند. در این حالت A در $(C^b(K), \|\cdot\|_K)$ بسته است.

تعریف ۵.۰.۲. جبر تابعی باناخ $(A, \|\cdot\|)$ یکنواخت نامیده می‌شود هرگاه $\|\cdot\|_K = \|\cdot\|$.

تعریف ۶.۰.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی روی K باشد و برای هر $x \in K$ و $f \in A$ تابع $\varepsilon_x : A \to \mathbb{C}$ را با ضابطه‌ی $\varepsilon_x(f) = f(x)$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت ε_x یک شاخص روی A است که آن را شاخص ارزیابی در x می‌نامیم.

نکته ۱.۰.۲. با یکی گرفتن هر $x \in K$ با ε_x می‌توان K را به عنوان زیرمجموعه‌ای از Φ_A در نظر گرفت.

تعریف ۷.۰.۲. یک جبر تابعی باناخ A روی K را طبیعی می‌نامیم هرگاه $K = \Phi_A$. به عبارت دیگر جبر تابعی باناخ A روی K طبیعی است هرگاه به‌ازای‌هر شاخص مانند $\varphi \in \Phi_A$ عضوی چون $x \in K$ موجود باشد به‌طوری‌که $\varphi = \varepsilon_x$.

مثال ۱.۰.۲. اگر $A = C_\circ(K)$ آنگاه A یک جبر تابعی باناخ طبیعی است.
به راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر A یک جبر تابعی باناخ طبیعی باشد آنگاه $A \subseteq C_\circ(K)$ و به‌ازای‌هر $f \in A$، $\|f\| \geq \|f\|_K$.

قضیه ۱.۰.۲. فرض کنید $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر باناخ طبیعی روی K باشد. دراین‌صورت بستار یکنواخت A در $C_\circ(K)$ طبیعی است.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۲.۰.۲. فرض کنید $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی یک مجموعه ناتهی و فشرده K باشد. دراین‌صورت $1_K \in A$ و بنابراین A یک‌دار است و $\|1_K\| = 1$.

برهان. به مرجع [۶] نتیجه ۲.۴.۳۵ مراجعه شود. $\square$

تعریف ۸.۰.۲. فرض کنید $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر تابعی باناخ باشد. دراین‌صورت تور $(f_\alpha)_\alpha$ در A همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی نامیده می‌شود اگر برای هر α، $\|f_\alpha\| \leq 1$ و همچنین برای هر $\varphi \in \Phi_A$، $\lim_\alpha \varphi(f_\alpha) = 1$.

تعریف ۹.۰.۲. جبر تابعی باناخ $(A, \|\cdot\|)$ را نقطه‌وار انقباضی می‌نامیم اگر A و همه ایده‌آل‌های مدولی ماکسیمال آن دارای همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی باشند.

مثال ۲.۰.۲. فرض کنید K یک فضای موضعاً فشرده باشد و $A = C_\circ(K)$. دراین‌صورت A یک جبر تابعی باناخ انقباضی است.

۱.۲ تبدیل گلفاند[۱]

فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی باشد. اگر $\varphi \in \Phi_A$، آنگاه به وضوح $M_\varphi = \ker\varphi$ یک ایده‌آل مدولی ماکسیمال است. هر ایده‌آل مدولی ماکسیمال در A به فرم M_φ می‌باشد که در آن $\varphi \in \Phi_A$.

فرض کنید $\Phi_A \neq \emptyset$، به‌ازای‌هر $a \in A$، $\hat{a}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{a} : \Phi_A \to \mathbb{C}$$
$$\hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$$

دراین‌صورت تبدیل

$$\zeta : A \to C_\circ(\Phi_A)$$
$$\zeta(a) = \hat{a}$$

را تبدیل گلفاند A می‌نامیم.
ζ یک همریختی نرم نزولی است. به عبارت دیگر ζ یک همریختی است که به‌ازای‌هر $a \in A$، $\|\hat{a}\| = \|\zeta(a)\| \leq \|a\|$.
اگر $\hat{A} = \{\hat{a} \mid a \in A\}$، آنگاه $\hat{A}$ یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی Φ_A است.
چون $\hat{A} \cong \frac{A}{\ker\zeta}$، لذا نرم $\hat{A}$ همان نرم خارج قسمتی $\frac{A}{\ker\zeta}$ است. اگر A نیم‌ساده باشد آنگاه تبدیل ζ یک‌به‌یک است. دراین‌صورت $\hat{A} \cong \frac{A}{\ker\zeta} = A$.
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر جبر باناخ نیم ساده جابجایی یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی Φ_A است.

۲.۲ جبرهای تاوبرین[۲] و دیتکین[۳]

برای تعاریف جبرهای تاوبرین و دیتکین نمادگذاری‌های زیر را انجام می‌دهیم.

فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ روی یک فضای موضعاً فشرده K باشد و $x \in K$ دلخواه باشد. چون ε_x یک شاخص روی A است تعریف می‌کنیم $M_x = M_{\varepsilon_x} = \ker\varepsilon_x$ و همچنین $M_\infty = A$. اگر E زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از K باشد $I(E)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I(E) = \{f \in A \mid f|_E = \circ\}.$$

[۱] Gelfand
[۲] Tauberian
[۳] Ditkin

به راحتی می‌توان ثابت کرد که $I(E)$ یک ایدآل بسته در A است.
همچنین قرار می‌دهیم $J_\infty = J_\infty(A) = \left\{ f \in A \mid \text{محمل فشرده دارد } f \right\}$.
به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که J_∞ یک ایده‌آل در A است.
برای هر $x \in K$ مجموعه J_x یا $J_x(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$J_x = J_x(A) = \left\{ f \in J_\infty \;\middle|\; x \notin \mathrm{supp} f \right\}.$$

J_x یک ایده‌آل در A است و $J_x \subseteq M_x$.
$A_\circ$ را بستار J_∞ در A تعریف می‌کنیم یعنی $A_\circ = \overline{J_\infty}^A$.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ در فضای موضعاً فشرده K باشد. دراین‌صورت جبر A را تاوبرین می‌نامند اگر $A_\circ = A$.
بنابراین می‌توان نشان داد که $A_\circ$ یک جبر تابعی باناخ تاوبرین است هرگاه J_∞ به طور قوی نقاط K را جدا کند.

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی K باشد. دراین‌صورت A را به طور قوی منتظم می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in K \cup \{\infty\}$، J_x در M_x چگال باشد.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی K باشد. دراین‌صورت A را منتظم می‌نامیم اگر برای هر زیر مجموعه ناتهی بسته F در Kو هر $x \in K \setminus F$ عضوی چون $f \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که $f(x) = ۱$ و برای هر $y \in F$ ، $f(y) = ۰$.

گزاره ۱.۲.۲. هر جبر به‌طور قوی منتظم، منتظم است.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

تعریف ۴.۲.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ طبیعی باشد. در این صورت A را یک جبر دیتکین می‌نامیم اگر برای هر $x \in K \cup \{\infty\}$ و هر $f \in M_x$ داشته باشیم $f \in \overline{fJ_x}$.

گزاره ۲.۲.۲. هر جبر دیتکین به‌طور قوی منتظم است.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

مثال ۱.۲.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی یک فضای موضعاً فشرده و غیر فشرده K باشد. اگر $K_\infty = K \cup \{\infty\}$ فشرده‌سازی تک نقطه‌ای فضای K باشد آنگاه K_∞ فضایی فشرده است. اگر به ازای هر $f \in A$، $f(\infty)$ مقدار صفر تعریف شود دراین‌صورت می‌توان A را به عنوان یک زیر جبر از $C(K_\infty)$ در نظر گرفت. تابع ثابت روی K_∞ را $f(x) = ۱$ در نظر می‌گیریم. حال اگر یک‌دارسازی A را به صورت

$$A^\sharp = \{ f + z\mathbf{1} \mid f \in A, z \in \mathbb{C} \},$$

تعریف کنیم آنگاه $A^\sharp$ یک زیر جبر از $C(K_\infty)$ است. اگر نرم روی $A^\sharp$ به‌ازای‌هر $f+z1 \in A^\sharp$ به صورت $\|f+z1\| = \|f\| + |z|$ تعریف شود آنگاه $(A^\sharp, \|\cdot\|)$ یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی K_∞ است. همچنین A یک ایده‌آل ماکسیمال در $A^\sharp$ می‌باشد. بعلاوه $A^\sharp$ با یک جبر یکنواخت روی K_∞ معادل است اگروفقط‌اگر A با یک جبر یکنواخت روی K معادل باشد.

برای جزئیات بیشتر در مورد مطالب مثال قبل می‌توان از مرجع [۶] بخش ۲.۵ و ۴.۱ استفاده کرد.

۳.۲ همانی‌های تقریبی کران‌دار در جبرهای تابعی باناخ

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید $(A, \|\cdot\|_A)$ یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. جبر تابعی باناخ $(B, \|\cdot\|_B)$ جبر سگال [۵] مجرد (نسبت به A) است، اگر B یک ایده‌آل در A باشد و یک تور در B وجود داشته باشد که آن همانی تقریبی برای هر دو جبر $(A, \|\cdot\|_A)$ و $(B, \|\cdot\|_B)$ باشد.

با توجه به تعریف جبر سگال مجرد می‌توان نتیجه گرفت که اگر $(B, \|\cdot\|_B)$ جبر سگال مجرد نسبت به A باشد آنگاه موارد زیر برقرار هستند

۱ــ B در A چگال است.

۲ــ B طبیعی است.

۳ــ برای هر $f \in B$، $\|f\|_A \le \|f\|_B$.

۴ــ برای هر $f \in A$ و $g \in B$، $\|fg\|_B \le \|f\|_A \|g\|_B$.

تعریف ۲.۳.۲. یک جبر باناخ طبیعی A روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K را یک جبر دیتکین قوی می‌نامیم اگر برای هر $x \in K \cup \{\infty\}$، M_x یک همانی تقریبی کران‌دار در J_x داشته باشد. در خصوص این تعریف به مرجع [۶] تعریف ۴.۱.۳۱ مراجعه شود.

به راحتی می‌توان نشان داد که هر جبر دیتکین قوی، جبر دیتکین است.

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ روی یک فضای ناتهی و موضعاً فشرده K باشد. دراین‌صورت A واحد تقریبی نسبی کران‌دار با کران m دارد اگر برای هر زیر مجموعه ناتهی و فشرده L از Φ_A و هر $\varepsilon > 0$ عضوی چون $f \in A_{[m]}$ موجود باشد. به‌طوری‌که برای هر $y \in L$، $|1 - f(y)| < \varepsilon$.

[۵] Segal

به راحتی می‌توان ثابت کرد جبر باناخ A یک واحد تقریبی نسبی کران‌دار با کران m دارد هرگاه A یک همانی تقریبی کران‌دار با کران m داشته باشد.
در ادامه با بیان مثالی ۱.۴.۲ نشان می‌دهیم که عکس مطلب فوق برقرار نیست.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید A یک جبر باناخ با یک همانی تقریبی کران‌دار باشد. دراین‌صورت
۱ـ $A = A^{[2]}$ و $A \cdot A^* = \overline{AA^*}$،
۲ـ $WAP(A) \subseteq A \cdot A^*$،
۳ـ در حالتی که A منتظم آرنز باشد آنگاه $A^* = A \cdot A^*$.

برهان. ۱) با استفاده از قضیه تجزیه کوهن[۶] واضح است.
۲) به مرجع [۸] گزاره ۳.۱۲ مراجعه شود.
۳) با توجه به نتایجی از [۱۰] و [۲۹]، $A^* = WAP(A)$ اگروفقط‌اگر A منتظم آرنز باشد. دراین‌صورت با توجه به قسمت ۲ اثبات واضح است. □

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنید A جبر تابعی باناخ طبیعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. دراین‌صورت A انقباضی است اگر M_x برای هر $x \in K \cup \{\infty\}$ همانی تقریبی انقباضی داشته باشد.

مثال ۱.۳.۲. فرض کنید K یک فضای ناتهی و موضعاً فشرده باشد. دراین‌صورت $C_0(K)$ انقباضی است.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۳.۲. فرض کنید $(A, \|\cdot\|_A)$ و $(B, \|\cdot\|_B)$ دو جبر تابعی باناخ طبیعی روی یک فضای ناتهی و موضعاً فشرده K باشند، همچنین فرض کنید A یک زیرجبر چگال در B باشد به‌طوری‌که برای هر $f \in A$، $\|f\|_B \leq \|f\|_A$. دراین‌صورت اگر A انقباضی باشد آنگاه B نیز انقباضی است.

تعریف ۶.۳.۲. فرض کنید $t \in \mathbb{I}$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد و همچنین فرض کنید g_n تحدید تابعی مانند g به $\mathbb{I}$ باشد که به صورت زیر تعریف شده

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}] \\ 1 & x \in [t - \frac{2}{n}, t + \frac{2}{n}]^c \\ h(x) & x \in [t - \frac{2}{n}, t - \frac{1}{n}] \cup [t + \frac{1}{n}, t + \frac{2}{n}] \end{cases}$$

[۶] Cohens factorization

که در آن h تابعی خطی است. بنابراین (g_n) دنباله‌ای از توابع در $C(\mathbb{I})$ است و هر g_n روی یک همسایگی از t، صفر است.

در ادامه دو جبر تابعی باناخ کلاسیک را معرفی می‌کنیم که انقباضی نیستند.

مثال ۲.۳.۲. فرض کنید $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq ۱\}$. دراین‌صورت جبر $A(\overline{\mathbb{D}})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A(\overline{\mathbb{D}}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \mid \text{تحلیلی است } f|_{\mathbb{D}}\}.$$

که در آن $C(\overline{\mathbb{D}})$ مجموعه تمام توابع پیوسته روی $\overline{\mathbb{D}}$ است.
$A(\overline{\mathbb{D}})$ یک جبر یکنواخت طبیعی روی $\overline{\mathbb{D}}$ است.
برای $z \in \overline{\mathbb{D}}$ ایده‌آل ماکسیمال M_z زمانی دارای همانی تقریبی انقباضی است که $z \in \mathbb{T}$ باشد در این حالت $M_z = M_z^{[۲]}$ اما وقتی $z \in \mathbb{D}$، $M_z^{[۲]} = \overline{M_z^۲} = \{f \in M_z \mid f'(z) = ۰\} \subsetneq M_z$ و بنابراین وقتی $z \in \mathbb{D}$، M_z هیچ همانی تقریبی ندارد لذا $A(\overline{\mathbb{D}})$ انقباضی نیست.

فرض کنید A یک جبر یکنواخت روی فضای فشرده K باشد و فرض کنید $f \in A_{[۱]}$ و $F \in A(\overline{\mathbb{D}})_{[۱]}$. دراین‌صورت $F \circ f \in A_{[۱]}$.
به ویژه برای‌هر $a \in \mathbb{D}$ قرار می‌دهیم $(z \in \overline{\mathbb{D}}) \quad \psi_a(z) = \frac{(z-a)}{(۱-\bar{a}z)}$. بنابراین ψ_a تبدیل موبیوس با $\psi_a(a) = ۰$ است. لذا $\psi_a \in A(\overline{\mathbb{D}})_{[۱]}$ و بنابراین $\psi_a \circ f \in A_{[۱]}$.

مثال ۳.۳.۲. فرض کنید $A = BVC(\mathbb{I})$ جبر توابع پیوسته با تغییر کران‌دار روی $\mathbb{I}$ باشد. همچنین فرض کنید $\gamma > ۰$ ثابت فرض شود. اگر به‌ازای‌هر $f \in A$، $\|\cdot\|_\gamma$ به صورت زیر تعریف شود آنگاه A یک جبر تابعی باناخ یک‌دار طبیعی است.

$$\|f\|_\gamma = \|f\|_{\mathbb{I}} + \gamma V_{\mathbb{I}(f)}$$

که در آن $V_{\mathbb{I}(f)}$ تغییرات f روی $\mathbb{I}$ است.
می‌توان ثابت کرد که A جبر منتظم است ولی جبر یکنواخت نیست.
حال $t \in \mathbb{I}$ را ثابت در نظر می‌گیریم. اگر (g_n) همان دنباله‌ی تعریف شده درتعریف ۶.۳.۲ باشد آنگاه $g_n \in J_t(A)$ و این دنباله یک همانی تقریبی کران‌دار با کران $۲\gamma + ۱$ برای $M_t(A)$ است. بنابراین $(BVC(\mathbb{I}), \|\cdot\|_\gamma)$ یک جبر دیتکین قوی است که انقباضی نیست.

مثال قبل نشان می‌دهد که در بررسی جبرهای تابعی باناخ انقباضی نمی‌توان شرط داشتن همانی تقریبی انقباضی را با همانی تقریبی کران‌دار تعویض نمود.

۴.۲ جبرهای دنباله‌ای باناخ

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید S یک مجموعه ناتهی باشد. دراین‌صورت جبر تمام توابع روی S که محمل یا تکیه‌گاه متناهی دارند را با $c_{۰۰}(S)$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر $s \in S$ آنگاه تابع

مشخصه مجموعه تک عضوی $\{s\}$ را با δ_s نمایش می‌دهیم. واضح است که $\delta_s \in c_{\circ\circ}(S)$. زیرا

$$\mathrm{supp}\delta_s = \overline{\{t \in S \mid \delta_s(t) \neq \circ\}} = \overline{\{S\}} = \{S\}.$$

بنابراین $\mathrm{supp}\delta_s$ متناهی است و لذا $\delta_s \in c_{\circ\circ}(S)$.

تعریف ۲.۴.۲. فرض کنید S یک مجموعه ناتهی باشد. دراین‌صورت یک جبر دنباله‌ای باناخ روی S یک جبر تابعی باناخ مانند A روی S است به‌طوری‌که $c_{\circ\circ}(S) \subset A$.

فرض کنید A یک جبر دنباله‌ای باناخ روی مجموعه S باشد. دراین‌صورت $J_\infty(A) = c_{\circ\circ}(S)$ و همچنین $A_\circ$ بستار مجموعه $c_{\circ\circ}(S)$ در A است.

لذا می‌توان گفت یک جبر دنباله‌ای باناخ تاوبرین است اگروفقط‌اگر $c_{\circ\circ}(S)$ در A چگال باشد.
همچنین یک جبر دنباله‌ای باناخ طبیعی، منتظم است .
یک جبر دنباله‌ای باناخ طبیعی به طور قوی منتظم است اگروفقط‌اگر آن تاوبرین باشد.

گزاره ۱.۴.۲. فرض کنید A یک جبر دنباله‌ای باناخ تاوبرین روی یک فضای ناتهی S باشد. دراین‌صورت A طبیعی است و یک ایده‌آل در A^{**} می‌باشد.

برهان. با توجه به مرجع [۶] گزاره ۴.۱.۳۵ قسمت (i)، A طبیعی است. برای اثبات اینکه یک ایده‌آل در A^{**} است برای هر $f, g \in A$ تعریف می‌کنیم

$$R_f : A \longrightarrow A$$
$$R_f(g) = gf$$

واضح است که $R_f \in B(A)$. زیرا خطی بودن R_f واضح است و همچنین برای هر $g \in A$،

$$\|R_f(g)\| = \|gf\| \leq \|g\|\,\|f\| \Rightarrow \|R_f\| \leq \|f\|.$$

از طرفی برای هر $f \in c_{\circ\circ}(S)$ برد عملگر R_f متناهی‌البعد است و لذا R_f فشرده است. حال چون $c_{\circ\circ}(S)$ در A چگال است و همچنین R_f فشرده است بنابراین برای هر $f \in A$، R_f به طور ضعیف فشرده می‌باشد. لذا با توجه به مرجع [۲۶] گزاره ۱.۴.۱۳، A یک ایده‌آل در A^{**} است. □

مثال ۱.۴.۲. فرض کنید $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \mid \alpha_k \in \mathbb{C}\}$. اگر $\alpha = (\alpha_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ آنگاه به‌ازای‌هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $p_n(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \mid \alpha_{k+1} - \alpha_k|$ و $p(\alpha) = \sup\{p_n(\alpha) \mid n \in \mathbb{N}\}$. همچنین فرض کنید $A = \{\alpha \in c_\circ \mid p(\alpha) < \infty\}$. دراین‌صورت A یک جبر دنباله‌ای باناخ خودالحاق روی $\mathbb{N}$ است که نرم آن برای هر $\alpha \in A$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}\|\alpha\| &= \|\alpha\|_{\mathbb{N}} + p(\alpha)\\ &= \sup\{|\alpha_k| \mid k \in \mathbb{N}\} + \sup\{p_n(\alpha) \mid n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

جبر A توسط Feinstein ارائه شد. برای اثبات جزئیات زیر خواننده می‌تواند به مرجع [۶] مثال ۴.۱.۴۶ رجوع کند.

A جبر طبیعی است و برای هر $m \in \mathbb{N}$ و هر زیر مجموعه فشرده K از $\mathbb{N}$ که $m \notin K$، $\alpha \in A$ چنان موجود است که $\alpha(m) = 0$ و برای هر $j \in K$، $\alpha(j) = 1$ و $\|\alpha\| \leq 4$.

بنابراین هر ایده‌آل مدولی ماکسیمال از A واحد تقریبی نسبی کران‌دار از کران ۴ دارد. همچنین $A^2 = A_0^2 = A_0$ و A_0 جدایی پذیر است در حالی که A جدایی پذیر نیست. علاوه بر این A^2 زیر فضایی بسته در A است که $\dim\frac{A}{A^2} = \infty$. بنابراین تاوبرین نیست و A هیچ همانی تقریبی ندارد.

مثال قابل توجه زیر که مربوط به Blecher و Read است و به عنوان اولین جبر دنباله‌ای باناخ طبیعی ارائه شد. همانی تقریبی کران‌دار دارد ولی تاوبرین نیست.

مثال ۲.۴.۲. جبر دنباله‌ای باناخ طبیعی A روی $\mathbb{N}$ با همه خواص زیر وجود دارد

۱ــ A خودالحاق است و بنابراین در c_0 چگال است.

۲ــ A همانی تقریبی انقباضی دارد و بنابراین $A^{[2]} = A$.

۳ــ عضوی چون $g \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که زیرجبر $B = \text{lin}(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ در A چگال است و همچنین A جدایی پذیر است.

۴ــ A تاوبرین نیست و $\frac{A}{A_0}$ فضای نامتناهی‌البعد است.

۵ــ A_0 ایده‌آل بسته است و همانی تقریبی انقباضی دارد.

۶ــ هر ایده‌آل مدولی ماکسیمال در A، همانی تقریبی کران‌دار دارد ولی هیچ کران بالایی برای کران‌های این همانی‌های تقریبی وجود ندارد.

۷ــ همانی تقریبی انقباضی برای A_0 مشمول در c_{00} است و بنابراین A_0 جبر دیتکین قوی است.

۸ــ A منتظم آرنز است اما A یک ایده‌آل در A^{**} نیست.

۵.۲ همانی‌های تقریبی نقطه‌وار

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. یک تور (e_α) در A، همانی تقریبی نقطه‌وار است اگر برای هر $(x \in K)$ داشته باشیم

$$\lim_\alpha e_\alpha(x) = 1.$$

همانی تقریبی نقطه‌وار (e_α) را کران‌دار با کران $m > 0$ می‌نامیم هرگاه $\sup_\alpha\|e_\alpha\| \leq m$.
دراین‌صورت (e_α) یک همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار است. یک همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار با کران یک را همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی می‌نامیم.

جبر A نقطه‌وار انقباضی نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in K \cup \{\infty\}$، M_x یک همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی داشته باشد.

قضیه ۱.۵.۲. جبر تابعی باناخ طبیعی A روی K نقطه‌وار انقباضی است اگروفقط‌اگر برای هر $x \in K \cup \{\infty\}$ و هر زیر مجموعه ناتهی و متناهی F از K که $x \notin F$ و هر $\varepsilon > ۰$، $f \in M_x$ وجود داشته باشد که $\|f\| \leq ۱$ و به‌ازای‌هر $y \in F$، $|۱ - f(y)| < \varepsilon$.

گزاره ۱.۵.۲. هر جبر تابعی باناخ، همانی تقریبی نقطه‌وار دارد.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

یک جبر تابعی باناخ با واحد تقریبی نسبی کران‌دار، همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار با کران یکسان دارد.
مثال ۱.۴.۲ نشان دهنده یک جبر دنباله‌ای باناخ با همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار است که همانی تقریبی ندارد.
همچنین با توجه به مرجع [۷] قضیه ۲.۳ یک جبر یکنواخت نقطه‌وار انقباضی و طبیعی وجود دارد که انقباضی نیست و در ادامه با توجه به مرجع [۱۵] قضیه ۲.۶ یک جبر یکنواخت طبیعی وجود دارد که همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی دارد ولی همانی تقریبی ندارد.
در نهایت مثال ۱.۳.۳ را به عنوان یک جبر تابعی باناخ نقطه‌وار انقباضی و طبیعی ارائه خواهیم کرد که هیچ همانی تقریبی ندارد.
هدف اصلی این مقاله مطالعه و درک ساختار جبرهای تابعی باناخ نقطه‌وار انقباضی و انقباضی است.

گزاره ۲.۵.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد و $x \in K$ دلخواه باشد. اگر $n > ۰$ چنان موجود باشد که برای هر همسایگی U از x، عضو $g \in A_{[n]}$ با شرط $g(x) = ۱$ و $\mathrm{supp} g \subset U$ موجود باشد.
۱ــ فرض کنید که $\overline{J_x} = M_x$ و A همانی تقریبی کران‌دار با کران m دارد. دراین‌صورت M_x دارای همانی تقریبی کران‌دار با کران $m(۱ + n)$ است.
۲ــ فرض کنید که A همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار با کران m دارد. دراین‌صورت M_x دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار با کران $m(۱ + n)$ است.

برهان. ۱ــ فرض کنید $h \in M_x$ و $\varepsilon > ۰$ دلخواه باشند. دراین‌صورت عضوی چون $h_۱ \in J_x$ با شرط $\|h - h_۱\| < \varepsilon$ موجود است. چون A همانی تقریبی کران‌دار با کران m دارد پس $f \in A_{[m]}$ چنان موجود است که $\|h_۱ - fh_۱\| < \varepsilon$.
حال می‌توان همسایگی U از x را با شرط $U \cap \mathrm{supp} h_۱ = \emptyset$ انتخاب نمود و لذا با در نظر گرفتن فرض عضوی چون $g \in A_{[n]}$ چنان موجود است که $g(x) = ۱$ و $\mathrm{supp} g \subset U$. بنابراین $h_۱ g = ۰$.

این نتیجه می‌دهد که $f - fg \in (M_x)_{[m(n+1)]}$ و همچنین

$$\begin{aligned}\|h - h(f - fg)\| \leq& \|h - h_1\| + \|h_1 - fh_1\| + \|h - h_1\|\|f - fg\| \\ <& \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon m(1 + n).\end{aligned}$$

بنابراین M_x واحد تقریبی کران‌دار با کران $m(n+1)$ دارد.
لذا دارای همانی تقریبی کران‌دار با کران $m(1+n)$ است.
۲ـ زیر مجموعه متناهی و ناتهی F از K را چنان انتخاب می‌کنیم که $x \notin F$ نباشد. همچنین $\varepsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین عضو $f \in A_{[m]}$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $y \in F$، $|1 - f(y)| < \varepsilon$.

همسایگی U از x را با شرط $U \cap F = \emptyset$ در نظر می‌گیریم. همچنین عضو $g \in A_{[m]}$ را در دو شرط $g(x) = 1$ و $\mathrm{supp} g \subset U$ انتخاب می‌کنیم.
حال قرار می‌دهیم $h = f - fg \in (M_x)_{[m(n+1)]}$ به وضوح $h \in (M_x)_{[m(n+1)]}$.
به راحتی می‌توان نشان داد که برای هر $y \in F$، $|1 - h(y)| < \varepsilon$ و لذا M_x همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار با کران $m(1+n)$ دارد.

□

حال به بیان دو مثال از جبرهای تابعی باناخ می‌پردازیم که ایده‌آل‌های ماکسیمال آن‌ها همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار ندارند.

تعریف ۲.۵.۲. فرض کنید $C^n(\mathbb{I})$ فضای باناخ تمام توابع به طور پیوسته مشتق پذیر تا مرتبه n روی $\mathbb{I}$ را نشان دهد.

قضیه ۲.۵.۲. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ باشد. دراین‌صورت $(C^n(\mathbb{I}), \|\cdot\|_n)$ جبر تابعی باناخ یک‌دار، خودالحاقی، منتظم و طبیعی است و به وسیله $\{Z\}$ چندجمله‌ای یک‌دار ایجاد می‌کند.

مثال ۱.۵.۲. فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $A = C^{(n)}(\mathbb{I})$ و برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$، $B = (\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{I}), \|\cdot\|_\alpha)$.
دراین‌صورت A و B جبرهای تابعی باناخ طبیعی هستند که ایده‌آل‌های ماکسیمال آنها همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار ندارند.
زیرا برای مثال اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{I})$ که در شرط $f(0) = 0$ و $f(\frac{1}{n}) > \frac{1}{2}$ صدق کند آنگاه باید $\|f\|_\alpha \geq \frac{n^\alpha}{2}$ باشد. لذا ایده‌آل‌های ماکسیمال این دو جبر نمی‌توانند همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار داشته باشند.

مثال ۲.۵.۲. فرض کنید $p \geq 1$ و $A = \ell^p = \ell^P(\mathbb{N})$. دراین‌صورت A جبر دنباله‌ای باناخ تاوبرین است که خودالحاق و طبیعی است و لذا A یک ایده‌آل در A^{**} است. اگر $p > 1$، آنگاه A انعکاسی است.

به راحتی می‌توان نشان داد که A و هر ایده‌آل مدولی ماکسیمال آنها دارای همانی تقریبی هستند. اما A دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار نیست. در مورد جبر A، $A^{[2]} = A^2 = \ell^{\frac{p}{2}}$.

مثال ۳.۵.۲. اگر $w : \mathbb{N} \longrightarrow [1, \infty)$ یک تابع باشد آنگاه مجموعه B_w را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B_w = \{\alpha \in c_0 \mid p_w(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} w(i)|\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \infty\},$$

حال برای هر $\alpha \in B_w$، قرار می‌دهیم $\|\alpha\|_w = \|\alpha\|_{\mathbb{N}} + p_w(\alpha)$.
دراین‌صورت B_w یک جبر دنباله‌ای باناخ تاوبرین طبیعی است که برای آن موارد زیر هم‌ارز هستند. به مرجع [11] قضیه ۳.۱۰.۱ مراجعه شود.
۱ـ B_w همانی تقریبی کران‌دار دارد.
۲ـ B_w واحد تقریبی نسبی کران‌دار دارد.
۳ـ B_w همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار دارد.
۴ـ $\liminf_{n\to\infty} w(n) < \infty$.

۶.۲ مجموعه‌های اوج و خواص مربوطه

تعریف ۱.۶.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. دراین‌صورت یک زیر مجموعه بسته مانند F از K را مجموعه اوج می‌نامیم اگر تابعی چون $f \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in F$، $f(x) = 1$ و برای هر $y \in K \setminus F$، $|f(y)| < 1$.
در این حالت می‌گوییم f روی F به اوج می‌رسد. همچنین اگر $x \in K$ آنگاه x را یک نقطه اوج می‌نامیم اگر $\{x\}$ یک مجموعه اوج باشد.

تعریف ۲.۶.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. عضو $x \in K$ را یک p ـ نقطه می‌نامیم اگر $\{x\}$ اشتراکی از مجموعه‌های اوج باشد. مجموعه تمام p ـ نقطه‌های جبر A را با $\Gamma_0(A)$ نمایش می‌دهیم.

در حالتی که A یک جبر تابعی باناخ باشد، اشتراک شمارش‌پذیری از مجموعه‌های اوج مجدداً یک مجموعه اوج است و بنابراین وقتی K متری پذیر است، $\Gamma_0(A)$ مجموعه نقاط اوج A می‌باشد.
در جبرهای یکنواخت ممکن است p ـ نقطه‌ها الزاماً نقاط اوج نباشند.

تعریف ۳.۶.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی روی یک فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. یک زیر مجموعه بسته مانند L از K یک مرز بسته برای A نامیده می‌شود اگر برای هر $f \in A$، $\|f\|_L = \|f\|_K$.

اشتراک همه مرزهای بسته برای A مرز سیلو [۷] نامیده می‌شود. که آن را با $\Gamma(A)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۶.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی روی یک فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. آنگاه $\Gamma(A) = \overline{\Gamma_\circ(A)}$ و همچنین $\Gamma(A)$ یک مرز بسته است.

برهان. به مرجع [۶] نتیجه ۴.۳.۷ قسمت (i) مراجعه شود. □

قضیه ۲.۶.۲. فرض کنید A یک جبر باناخ طبیعی روی فضای فشرده و متری پذیر K باشد. دراین‌صورت مجموعه‌ی نقاط اوج در $\Gamma(A)$ چگال است.

برهان. به مرجع [۵] و همچنین مرجع [۶] نتیجه ۴.۳.۷ قسمت (ii) مراجعه شود. □

با اندکی تغییر در اثبات قضیه ۴.۳.۵ از مرجع [۶] قضیه زیر قابل اثبات است.

قضیه ۳.۶.۲. فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ روی یک فضای فشرده و ناتهی K باشد. همچنین فرض کنید $x \in K$، اگر M_x واحد تقریبی نسبی کران‌دار داشته باشد. آنگاه x یک $p-$ نقطه برای A است.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

قضیه زیر یک شرط لازم برای آنکه جبر تابعی باناخ A انقباضی باشد را بیان می‌کند.

قضیه ۴.۶.۲. فرض کنید A جبر تابعی باناخ طبیعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. به‌طوری‌که هر ایده‌آل مدولی ماکسیمال از A همانی تقریبی کران‌دار داشته باشد. دراین‌صورت $\Gamma_\circ(A) = K$.

برهان. فرض کنید $x \in K$. دراین‌صورت M_x همانی تقریبی کران‌دار دارد و بنابراین M_x واحد تقریبی نسبی کران‌دار دارد. با توجه به قضیه ۳.۶.۲ ، x یک p ـ نقطه برای A است.
□

نتیجه ۱.۶.۲. فرض کنید A جبرتابعی باناخ انقباضی و طبیعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. دراین‌صورت $\Gamma_\circ(A) = K$.

برهان. با توجه به قضیه ۴.۶.۲ اثبات واضح است.

□

[۷] Šilov

فصل ۳

روابط بین همانی‌های تقریبی کران‌دار

در این بخش ما تعدادی از نتایج و مثال‌هایی را ارائه خواهیم کرد که نشان دهنده روابط بین مفاهیم متنوعی از همانی‌های تقریبی در جبرهای تابعی باناخ است.

گزاره ۱.۰.۳. فرض کنید A جبر تابعی باناخ باشد به‌طوری‌که A یک ایده‌آل در A^{**} است و همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار دارد. دراین‌صورت A همانی تقریبی کران‌دار با کران یکسان دارد.
در حالتی که همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار مشمول در $A_\circ$ باشد جبر A تاوبرین [1] است.

برهان. فرض کنید (e_α) همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار برای A با کران m باشد. دراین‌صورت (e_α) دارای یک نقطه حدی در $(A^{**})_{[m]}$ با توپولوژی ضعیف‌ـ ستاره دارد.
حال می‌توانیم با گذر به یک زیر تور فرض کنیم که $e_\alpha \xrightarrow{w^*} e \in [A^{**}]_{[m]}$.
چون A یک ایده‌آل در A^{**} است بنابراین برای هر $f \in A$، $e \cdot f \in A$.
علاوه بر این برای هر $\varphi \in \Phi_A$ می‌توان نوشت

$$\varphi(f) = \langle f, \varepsilon_\varphi \rangle = \lim_\alpha \langle e_\alpha f, \varepsilon_\varphi \rangle = \langle e, f \cdot \varepsilon_\varphi \rangle = \langle e \cdot f, \varepsilon_\varphi \rangle = \varphi(e \cdot f).$$

بنابراین $e \cdot f = f$. این نشان می‌دهد که $e_\alpha f \xrightarrow{w} f$ در A.
حال با توجه به [۶] گزاره ۲.۹.۱۴ قسمت (iii)، A همانی تقریبی کران‌دار با کران m دارد.

[1] Tauberian

حال فرض کنید برای هر α، $(e_\alpha) \in A_\circ$ و همچنین فرض کنید $f \in A$. دراین‌صورت برای هر α، $(e_\alpha f) \in A_\circ$ و همچنین $f \in \overline{A_\circ}^w$.
حال با توجه به قضیه مازور [۲] داریم: $\overline{A_\circ}^w = A_\circ$ و لذا $f \in A_\circ$. این نشان می‌دهد که A تاوبرین است. □

مثال ۵.۰.۳ جبر دنباله‌ای باناخ مانند A را ارائه خواهد کرد که A ایده‌آلی از A^{**} است بدون آنکه تاوبرین باشد.
البته یک سؤال اساسی وجود دارد و آن این است که اگر A یک جبر دنباله‌ای باناخ، A ایده‌آلی در A^{**} و A دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار باشد آنگاه آیا ضرورتاً A تاوبرین است یا خیر.

گزاره ۲.۰.۳. فرض کنید A جبر تابعی باناخ طبیعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. به‌طوری‌که A به عنوان یک فضای باناخ انعکاسی است. همچنین فرض کنید $x \in K$ و M_x دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار باشد. دراین‌صورت M_x همانی است و x یک نقطه تنها از K است. علاوه بر این K فشرده است.

برهان. چون A انعکاسی است بنابراین گوی‌های بسته M_x به طور ضعیف فشرده هستند و لذا همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار در M_x دارای یک زیرتور است که در توپولوژی ضعیف همگرا است، حد ضعیف آن را f می‌نامیم.
به وضوح برای هر $y \in K \setminus \{x\}$، $f(y) = ۱$ و بنابراین f یک عضو همانی برای M_x است.
از طرفی چون $f \in C_\circ(K)$ پس باید x یک نقطه تنهای K باشد و K نیز فشرده باشد.
□

حال به بیان مثال‌هایی از جبرهای تابعی باناخ یک‌دار می‌پردازیم که به عنوان یک فضای باناخ انعکاسی هستند و ایده‌آلی در دوگان دوم خود می‌باشند.
همچنین دارای فضای شاخص همبند هستند به گونه‌ای که آنها جبرهای دنباله‌ای باناخ نیستند و ایده‌آل‌های ماکسیمال آنها دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار نیست.

تعریف ۱.۰.۳. فرض کنید S مجموعه $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{Z}^+$ باشد. دراین‌صورت عضو $w = (w_n)_{n\in S}$ را یک دنباله وزنی روی S می‌نامیم اگر $w_\circ = ۱$ و به‌ازای‌هر $n \in S$، $w_n > \circ$. همچنین برای هر $m, n \in S$، $w_{m+n} \leq w_m w_n$.

مثال ۱.۰.۳. فرض کنید $p > ۱$ و همچنین w یک دنباله وزنی روی S باشد.
قرار می‌دهیم $\ell^p(S,w) = \{\alpha = (\alpha_n)_{n\in S} \mid \|\alpha\|_{p,w} = (\sum_{n\in S} |\alpha_n|^p w_n^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$.

[۲] Mazurs

$\ell^p(S,w)$ همراه با ضرب پیچشی $\alpha\star\beta=(\alpha_n)_{n\in S}\star(\beta_n)_{n\in S}=(\sum_{m\in S}\alpha_m\beta_{n-m})_{n\in S}$ یک جبر باناخ است مشروط بر اینکه عدد ثابتی چون $C>0$ موجود باشد که به‌ازای‌هر $k\in S$، $\sum_{m+n=k}\frac{w_k^q}{w_m^q w_n^q}\leq C$ که در آن q مزدوج p است. یعنی $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
برای مطالعه جزئیات این جبر خواننده را به مرجع [۲۱] قضیه ۶.۷ قسمت D ارجاع می‌دهیم.

تذکر ۳.۰.۱. اگر $\alpha,\beta\in\ell^p(S,w)$ آنگاه $\alpha\star\beta\in\ell^p(\mathbb{Z}^+,w)$ و همچنین $\|\alpha\star\beta\|_{p,w}\leq C^{\frac{1}{q}}\|\alpha\|_{p,w}\|\beta\|_{p,w}$.
برای آنکه $\ell^p(S,w)$ تبدیل به یک جبر تابعی باناخ شود لازم است که $\|\cdot\|_{p,w}$ با یک نرم معادل تعویض گردد. تحت این دو نرم $\ell^p(S,w)$ به عنوان یک فضای باناخ انعکاسی است و همچنین منتظم آرنز است و یک ایده‌آل در دوگان دومش می‌باشد.

مثال ۳.۰.۲. فرض کنید S مجموعه $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{Z}^+$ باشد و برای هر $n\in S$، $w_n=(1+|n|)^r$ که در آن $r>\frac{1}{q}$.
به راحتی می‌توان نشان داد که $w=(w_n)_{n\in S}$ یک دنباله وزنی روی S است که در نامساوی $\sum_{m+n=k}\frac{w_k^q}{w_m^q w_n^q}\leq C$ صدق می‌کند. بنابراین $\ell^p(\mathbb{Z}^+,w)$ و $\ell^P(\mathbb{Z},w)$ جبرهای باناخ هستند. همچنین $\ell^P(\mathbb{Z},w)\subset\ell^1(\mathbb{Z})$.
$\ell^p(\mathbb{Z}^+,w)$ و $\ell^P(\mathbb{Z},w)$ هر دو جبرهای تابعی باناخ یک‌دار، طبیعی و نیم‌ساده هستند که به ترتیب روی $\mathbb{T}$ و $\overline{\mathbb{D}}$ تعریف شده‌اند.
اگر M_z یک ایده‌آل ماکسیمال از هر کدام از این دو جبر باشد چون z یک نقطه تنها از فضای شاخص این جبر نیست با توجه به گزاره ۳.۰.۲، M_z همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار ندارد.

گزاره ۳.۰.۳. فرض کنید A یک جبر تابعی باناخ نقطه‌وار انقباضی روی یک فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. همچنین فرض کنید F و G دو زیرمجموعه متناهی، ناتهی و مجزا از K باشند و $\varepsilon>0$ دلخواه باشد. دراین‌صورت $f\in A_{[1]}$ چنان موجود است که برای هر $x\in F$، $|1-f(x)|<\varepsilon$ و برای هر $x\in G$، $f(x)=0$.

برهان. فرض کنید $\kappa=|G|$ و $\eta\in(0,\frac{\varepsilon}{k})$. دراین‌صورت برای هر $y\in G$، عضوی چون $f_y\in A_{[1]}$ چنان موجود است که $f_y(y)=0$ و برای هر $x\in F$، $|1-f_y(x)|<\eta$.
حال f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $f=\prod\{f_y\mid y\in G\}$.
به راحتی می‌توان ثابت کرد که $f\in A_{[1]}$ و برای هر $y\in G$، $f(y)=0$.
همچنین برای هر $x\in F$، داریم

$$|1-f(x)|\leq\sum\{|1-f_y(x)|\;\big|\;y\in G\}<\kappa\eta<\varepsilon.$$

□

در ادامه نشان خواهیم داد که تنها جبر دنباله‌ای باناخ نقطه‌وار انقباضی و طبیعی روی یک مجموعه S، $c_0(S)$ است.

قضیه ۳.۰.۱. فرض کنید A جبر دنباله‌ای باناخ طبیعی روی مجموعه ناتهی S باشد. همچنین فرض کنید که A نقطه‌وار انقباضی باشد. دراین‌صورت A با جبر یکنواخت $c_\circ(S)$ معادل است.

برهان. فرض کنید F و G دو زیرمجموعه غیر تهی، بسته و مجزا از S_∞ باشند.
در ابتدا فرض کنید F و G دو زیرمجموعه از S باشند. بنابراین F و G متناهی هستند.
حال با توجه به گزاره ۳.۰.۳، عضو $f \in A_{[1]}$، چنان موجود است که برای هر $x \in F$،
$|1 - f(x)| < \frac{1}{2}$ و $f|G = \circ$.
سپس فرض کنید که $\infty \in G$ باشد. در این حالت F متناهی است.
چون A نقطه‌وار انقباضی است عضوی چون $f \in A_{[1]}$ چنان موجود است که برای هر $x \in F$،
$|1 - f(x)| < \frac{1}{4}$.
حال مجموعه H را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $H = \{y \in G \mid |f(y)| \geq \frac{1}{4}\}$.
H زیرمجموعه‌ای فشرده و لذا متناهی از S است که $F \cap H = \emptyset$.
حال با توجه به گزاره ۳.۰.۳، عضو $g \in A_{[1]}$، چنان موجود است که برای هر $x \in F$،
$|1 - g(x)| < \frac{1}{2}$ و $g|H = \circ$.
اگر $h = fg$ آنگاه $h \in A_{[1]}$ و برای هر $x \in F$، $|1 - h(x)| < \frac{1}{2}$ و برای هر $y \in G$، $|h(y)| < \frac{1}{4}$.
بنابراین فرضیات مرجع [۶] قضیه ۴.۱.۱۹ (در حالت $m = 1$) برقرار هستند و لذا با توجه به مرجع [۶] قضیه ۴.۱.۱۹، $A^\sharp$ معادل $C(S_\infty)$ است. این نشان می‌دهد که A با $c_\circ(S)$ معادل است.

□

حال به بیان مثالی می‌پردازیم که یک جبر تابعی باناخ انقباضی معادل با یک جبر یکنواخت است. ولی خود یک جبر یکنواخت نیست.

مثال ۳.۰.۳. فرض کنید B گوی یکه بسته از $(c_\circ, \|\cdot\|_{\mathbb{N}})$ باشد و همچنین فرض کنید
$C = \{(x_n) \in B \mid |x_1 - x_2| \leq 1\}$.
به راحتی می‌توان ثابت کرد که C به طور مطلق محدب و بسته است و همچنین
$(\frac{1}{2})B \subset C \subset B$. به ویژه اگر $x, y \in C$ آنگاه $xy \in C$.
بنابراین نرمی چون $\|\cdot\|$ موجود است که C گوی یکه بسته از فضای $(c_\circ, \|\cdot\|)$ باشد و $(c_\circ, \|\cdot\|)$ یک جبر تابعی باناخ در نظر گرفته شود. لذا $(c_\circ, \|\cdot\|)$ معادل با یک جبر یکنواخت است ولی خود جبر یکنواخت نیست زیرا $\|(-1, 1, \circ, \circ, \circ, \cdots)\| = 2$.
در حالی که $\|(-1, 1, \circ, \circ, \circ, \cdots)\|_{\mathbb{N}} = 1$.
حال اگر $\{(x_n) \in c_\circ \mid x_1 = \circ\}$ یک ایده‌آل مدولی ماکسیمال از $(c_\circ, \|\cdot\|)$ باشد آنگاه $\sum_{j=2}^{n} \delta_j$ یک همانی تقریبی انقباضی برای $(c_\circ, \|\cdot\|)$ است.
این نشان می‌دهد که $(c_\circ, \|\cdot\|)$ انقباضی است.

در ادامه به دنبال آن هستیم که مشخص کنیم چه وقت وجود همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی برای یک جبر تابعی باناخ مانند A وجود یک همانی تقریبی کران‌دار یا فقط وجود یک همانی تقریبی برای A را نتیجه می‌دهد.
البته در گزاره ۳.۰.۱، نشان دادیم که در حالتی که A یک ایده‌آل در A^{**} باشد آنگاه وجود یک همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی، وجود یک همانی تقریبی انقباضی را نتیجه می‌دهد.
در این راستا اولین مثال نقض توسط Jones و Lahr در مرجع [۲۳] ارائه شد. آنها مثال ارائه دادند که یک جبر تابعی باناخ می‌تواند یک همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی داشته باشد بدون آنکه دارای همانی تقریبی باشد.

مثال ۳.۰.۴. فرض کنید $S = (\mathbb{Q}^{+\bullet}, +)$ نیم‌گروه از اعداد گویای اکیداً مثبت باشد، جبر نیم‌گروهی $A = (\ell^{1}(S), \star, \|\cdot\|_{1})$ جبر باناخ نیم‌ساده و جابه‌جایی است.
در مرجع [۲۳] نشان داده شد که یک دنباله اکیداً صعودی مانند (n_d) در $\mathbb{N}$ چنان موجود است که دنباله $(\delta_{\frac{1}{n_d}})$ یک همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی برای A است. لذا A هیچ همانی تقریبی ندارد. زیرا برای هر $x \in S$ و $f \in A$ داریم $\|\delta_x - \delta_x \star f\|_1 \geq 1$.

برای بیان مثال‌های دیگری از جبرهای تابعی باناخ طبیعی که نقطه‌وار انقباضی هستند ولی دارای همانی تقریبی نیستند گزاره زیر را بیان می‌کنیم.

گزاره ۳.۰.۴. فرض کنید $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. همچنین فرض کنید که $f_\circ \in C_\circ(K) \setminus A$ باشد. به‌طوری‌که برای هر $f \in A \cup \{f_\circ\}$، $ff_\circ \in A$ و $\|ff_\circ\| \leq \|f\|$.
قرار می‌دهیم $B = A \oplus \mathbb{C}f_\circ$ و برای هر $f \in A$ و $z \in \mathbb{C}$ نرم روی B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $\|f + zf_\circ\| = \|f\| + |z|$.
آنگاه B یک جبر تابعی باناخ طبیعی روی K است که A را به عنوان یک ایده‌آل بسته سره در بر دارد. علاوه بر این $B^{2} \subset A$ و بنابراین B همانی تقریبی ندارد.
فرض کنید A همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی یا نقطه‌وار انقباضی داشته باشد. دراین‌صورت B نیز همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی یا نقطه‌وار انقباضی دارد.

برهان. واضح است که B جبر تابعی باناخ روی K است و همچنین A به عنوان یک ایده‌آل سره بسته از B در نظر گرفته می‌شود.
فرض کنید $\varphi \in \Phi_B$ باشد. دراین‌صورت $\varphi|A \in \Phi_A$ و بنابراین $x \in K$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f \in A$، $\varphi(f) = f(x)$.
حال اگر $f \in A$ چنان باشد که $\varphi(f) = f(x) = 1$. آنگاه

$\varphi(f_\circ)=\varphi(ff_\circ)=(ff_\circ)(x)=f_\circ(x)$ و بنابراین برای هر $g\in B$، $\varphi(g)=g(x)$. لذا B روی K طبیعی است.

به روشنی $B\subsetneq A\subset B^۲$ و بنابراین B همانی تقریبی نیست.

فرض کنید $M_x(A)$ یک ایده‌آل ماکسیمال در A باشد. دراین‌صورت یک همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی در $M_x(A)$ یک همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی در $M_x(B)$ می‌باشد که در آن $M_x(B)$ ایده‌آل ماکسیمال متناظر در B است.

□

مثال ۵.۰.۳. فرض کنید $A=\ell^۲$ با ضرب نقطه‌وار در نظر گرفته شود. همچنین فرض کنید $f_\circ$ دنباله $(\frac{۱}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ باشد.

همچنین فرض کنید $B=A\oplus\mathbb{C}f_\circ$ همان جبر تعریف شده در گزاره ۴.۰.۳ باشد. آنگاه شرایط گزاره ۴.۰.۳ برقرار است و بنابراین B یک جبر دنباله‌ای باناخ روی $\mathbb{N}$ است. علاوه بر این به عنوان یک فضای باناخ انعکاسی است و همچنین B یک ایده‌آل در B^{**} است. ولی B تاوبرین نیست و B دارای همانی تقریبی نمی‌باشد.

در واقع $B\subsetneq A=B_\circ$. این نشان می‌دهد که جبر B دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار نیست.

۱.۳ جبرهای یکنواخت

قضیه ۱.۱.۳. هر C^* ــ جبر A، منتظم آرنز است.

برهان. به مرجع [۶] نتیجه ۳.۲.۳۷ مراجعه شود. □

قضیه ۲.۱.۳. اگر A یک C^* ــ جبر باشد آنگاه $(A^{**},\Box)$ نیز یک C^* ــ جبر است.

برهان. به مرجع [۶] قضیه ۳.۲.۳۶ مراجعه شود.

□

مثال ۱.۱.۳. فرض کنید K یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده و ناتهی باشد. دراین‌صورت $(C_\circ(K)^{**},\Box)$ یک C^* ــ جبر جابجایی و یک‌دار است و به صورت $C(\widetilde{K})$ است که در آن $\widetilde{K}$ یک فضای فشرده است.

برهان. به مرجع [۶] قضیه ۳.۲.۶ مراجعه شود. □

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنید A یک جبر یکنواخت روی یک فضای ناتهی و موضعاً فشرده K باشد. دراین‌صورت $(A^{**},\Box)$ یک منتظم آرنز است و یک زیر جبر بسته‌ای از $C(\widetilde{K})$ می‌باشد.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

قضیه ۴.۱.۳. فرض کنید که A یک جبر یکنواخت روی یک فضای فشرده و متناهی K باشد و همچنین $x \in K$ در نظر گرفته شود. دراین صورت شرایط زیر روی x هم‌ارز هستند

a) $\varepsilon_x \in \mathrm{exK}_A$.

b) $x \in \Gamma_\circ(A)$.

c) M_x همانی تقریبی کران‌دار دارد.

d) M_x همانی تقریبی انقباضی دارد.

برهان. هم ارز بودن a و b و c یک حالت خاصی از قضیه ۴.۳.۵ در مرجع [۶] است و همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که d، c را نتیجه می‌دهد.
حال فرض کنیدc برقرار باشد. دراین‌صورت M_x^{**} یک زیر جبر بسته از $C(\widetilde{K})$ است و همچنین با توجه به گزاره ۲.۹.۱۶ قسمت (iii) از مرجع [۶] دارای یک همانی مانند e است.
به وضوح e در $C(\widetilde{K})$ خود توان است و همچنین $\|e\|_{\widetilde{K}} = ۱$.
با به کارگیری مجدد گزاره ۲.۹.۱۶ قسمت (iii) از مرجع [۶] می‌توان نتیجه گرفت که M_x یک همانی تقریبی انقباضی دارد و این d را نتیجه می‌دهد. □

قضیه ۵.۱.۳. فرض کنید که A یک جبر یکنواخت روی یک فضای فشرده و متناهی K باشد و همچنین $x \in K$ در نظر گرفته شود. دراین صورت اگر x یک p ـ نقطه باشد آنگاه M_x تجزیه می‌شود.

برهان. به قضیه ۱.۳.۲ قسمت (i) مراجعه شود. □

قضیه ۶.۱.۳. فرض کنید که A یک جبر یکنواخت روی یک فضای فشرده و متناهی K باشد و همچنین فرض کنید $x \in K$ یک نقطه اوج در نظر گرفته شود. آنگاه M_x دارای یک همانی تقریبی کران‌دار دنباله‌ای است. همچنین در M_x همانی تقریبی انقباضی دنباله‌ای دارد.

برهان. فرض کنید $f \in A$ در نقطه x به اوج می‌رسد. دراین‌صورت دنباله $(۱_K - f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک همانی تقریبی کران‌دار دنباله‌ای برای M_x است که کران آن ۲ است.
حال برای $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $f_n = ۱_K - f^n$. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ عضوی چون $e_n \in (M_x)_{[۱]}$ با شرط $\|f_n - e_n f_n\|_K < \frac{۱}{n}$ موجود است.
اگر $g \in M_x$ و $\varepsilon > \circ$ دلخواه باشند آنگاه عضوی چون $n \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که $\|g - f_n g\|_K < \varepsilon$ و $n\varepsilon > \|g\|_K$. بنابراین $\|g - e_n g\|_K < ۲\varepsilon$.
این نشان می‌دهد که (e_n) یک همانی تقریبی انقباضی دنباله‌ای برای M_x است.
□

در ادامه با توجه به مرجع [۱۵] قضیه ۲.۱ یک جبر یکنواخت وجود دارد که همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار دارد ولی همانی تقریبی نقطه وار انقباضی ندارد.

این نشان می‌دهد که در این حالت نمی‌توان از قسمت c در قضیه ۴.۱.۳ قسمت d را نتیجه گرفت.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید A جبر یکنواخت طبیعی روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی K باشد. دراین صورت اگر $\Gamma_\circ(A)=K$ آنگاه A یک جبر کول [۳] است.

مثال ۲.۱.۳. اگر K یک فضای موضعاً فشرده و ناتهی باشد آنگاه $C_\circ(K)$ یک جبر کول است.

برهان. به قضیه ۴.۶.۲ مراجعه شود. □

در این پایان‌نامه به دلایل مشروحه در ذیل به معرفی جبرهای کول می‌پردازیم.
در حالتی که K یک مجموعه فشرده و متری پذیر باشد یک جبر یکنواخت طبیعی روی K یک جبر کول است اگروفقط‌اگر هر نقطه از K یک نقطه اوج باشد.
حدس نقطه اوج به عنوان یکی از حدس‌هایی که حل آن مدت‌ها به طول انجامید این بود که $C(K)$ تنها جبر کول روی یک فضای فشرده و متری پذیر K است.
اولین مثال نقض در این مورد مربوط به کول در مرجع [۴] است. که در مرجع [۳۲] بخش ۱۹ توصیف شد.
همچنین Basener در مرجع [۱] زیر مجموعه فشرده‌ای مانند K از $\mathbb{C}^۲$ معرفی نمود و توابعی با دامنه K که روی یک همسایگی از K گویا هستند را در نظر گرفت.
مجموعه همه حدهای یکنواخت این گونه توابع را $R(K)$ نامید و ثابت کرد که $R(K)$ یک جبر کول است و همچنین ثابت نمود $R(K)\neq C(K)$ است.
علاوه بر آن Feinstein در مرجع [۱۴] و [۱۶] مثال‌هایی از جبرهای کول غیر بدیهی روی فضاهای فشرده و متری پذیر K چنان ارائه داد که جبر دیتکین قوی هستند ولی منتظم نیستند.
فرض کنید A یک جبر یکنواخت طبیعی روی بازه بسته $\mathbb{I}=[\circ,۱]$ باشد.
یک سؤال خیلی مشهور از گلفاند این بود که آیا A ضرورتاً با $C(\mathbb{I})$ برابر است.
یکی از نتایج قضیه مدول‌های ماکسیمال موضعی توسط Rossis اثبات شد این است که $\Gamma_\circ(A)$ در $\mathbb{I}$ چگال است. به مرجع [۳۲] نتیجه ۹.۱۴ مراجعه شود.
اما مشخص نیست که آیا شرط $\overline{\Gamma_\circ(A)}=\mathbb{I}$ می‌تواند معادل با کول بودن جبر A باشد و همچنین مشخص نیست آیا هر جبر کول روی $\mathbb{I}$ ضرورتاً جبر بدیهی است.
در حالتی که با توجه به مرجع [۳۴] هر جبر یکنواخت قویاً منتظم روی $\mathbb{I}$ بدیهی است.
حال قضیه زیر را به عنوان یکی از نتایج اصلی این بخش بیان می‌کنیم.

قضیه ۷.۱.۳. فرض کنید A جبر یکنواخت روی فضای فشرده K باشد. دراین صورت موارد زیر هم‌ارز هستند

[۳] Cole algebra

۱ـ A انقباضی است.
۲ـ A جبر کول است.
۳ـ برای هر $x \in K$، M_x دارای همانی تقریبی کران‌دار است.

برهان. به مرجع [۶] مراجعه شود. □

۲.۳ روابط بین جبرهای یکنواخت انقباضی و جبرهای یکنواخت نقطه‌وار انقباضی

در این بخش به بررسی این موضوع می‌پردازیم که چه زمانی ایده‌آل‌های ماکسیمال جبرهای یکنواخت، همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار یا همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی دارند.
همچنین به روابط بین جبرهای یکنواخت نقطه‌وار انقباضی و انقباضی می‌پردازیم.

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنید A یک جبر یکنواخت روی فضای موضعاً فشرده و ناتهی باشد. همچنین فرض کنید که A یک همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار دنباله‌ای داشته باشد. دراین‌صورت A یک همانی تقریبی انقباضی دنباله‌ای دارد.

برهان. دنباله (f_n) در A چنان موجود است که به‌ازای‌هر $x \in K$،
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = ۱$ و $\sup\|f_n\|_K \leq m$.
فرض کنید $f \in A$ دلخواه باشد. دراین‌صورت دنباله $ff_n - f$ روی K به طور نقطه‌وار به صفر همگرا است و بنابراین با توجه به قضیه همگرایی تسلطی برای هر اندازه مثبت μ روی K داریم
$\lim_{n\to\infty} \int_K (ff_n - f)(x) d\mu(x) = ۰$.
بنابراین برای هر $\lambda \in A^*$، $\lim_{n\to\infty}\langle ff_n - f, \lambda\rangle = ۰$.
حال با توجه به مرجع [۶] گزاره ۲.۹.۱۴ قست (iii)، A دارای همانی تقریبی کران‌دار با کران m دارد.
حال A یک ایده‌آل ماکسیمال در جبر یکنواخت $A^\sharp$ روی K_∞ است و لذا A همانی تقریبی کران‌دار نسبت به نرم یکنواخت دارد.
با توجه به قضیه ۴.۱.۳، A دارای همانی تقریبی انقباضی است که می‌توان آن را به صورت دنباله‌ای اختیار کرد.

□

لم ۱.۲.۳. فرض کنید A یک جبر یکنواخت طبیعی روی یک فضای فشرده K باشد و همچنین $x, y \in K$ در نظر گرفته شوند.
اگر ρ نمایش دهنده متر هذلولوی روی $\mathbb{D}$ باشد. آنگاه موارد زیر هم‌ارز هستند

۱ـ $\|\varepsilon_x - \varepsilon_y\| < 2$.
۲ـ $c \in (0,1)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f \in M_y$، $|f(x)| < c\|f\|_K$.
۳ـ وجود دارد $M > 0$ به‌طوری‌که برای هر $f \in A_{[1]}$، $\rho(f(x), f(y)) \leq M$.

حال به معرفی رابطه هم‌ارزی $\sim$ روی K می‌پردازیم.
فرض کنید K مجموعه فشرده باشد و $x, y \in K$ در نظر گرفته شود. دراین‌صورت تعریف می‌کنیم $x \sim y$ اگروفقط‌اگر x و y در شرایط لم ۱.۲.۳ صادق باشند.

گزاره ۲.۲.۳. رابطه $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی K است.

برهان. چون $x \sim y$ پس یک $M > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f \in A_{[1]}$، $\rho(f(x), f(y)) \leq M$. چون $y \sim z$ پس یک $N > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f \in A_{[1]}$، $\rho(f(y), f(z)) \leq N$.
لذا برای هر $f \in A_{[1]}$، $\rho(f(x), f(z)) \leq \rho(f(x), f(y)) + \rho(f(y), f(z)) \leq M + N$. این نشان می‌دهد که $x \sim z$.

□

کلاس‌های هم‌ارزی مربوط به این رابطه هم‌ارزی را بخش گلیسون برای A می‌نامیم.
متر گلیسون روی مجموعه فشرده K به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta : K \times K \longrightarrow [0, \infty)$$
$$\delta(x, y) = \|\varepsilon_x - \varepsilon_y\|.$$

دراین‌صورت بخش‌های گلیسون یک افراز برای K تشکیل می‌دهند و همچنین نسبت به توپولوژی القاء شده توسط متر گلیسون σ ـ فشرده هستند.
به راحتی می‌توان نشان داد که اگر x یک P ـ نقطه برای جبر یکنواخت طبیعی A باشد آنگاه مجموعه $\{x\}$ یک بخش گلیسون یک نقطه‌ای است.
برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد بخش‌های گلیسون خواننده می‌تواند به مرجع [۱۹] فصل VI مراجعه نماید.
حال به قضیه زیر در ارتباط با بخش‌های گلیسون می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید A یک جبر یکنواخت طبیعی روی فضای فشرده K باشد. همچنین فرض کنید $x \in K$ در نظر گرفته شود. دراین صورت موارد زیر هم‌ارز هستند
a) مجموعه $\{x\}$ یک بخش گلیسون یک نقطه‌ای است.
b) M_x همانی تقریبی نقطه وار انقباضی دارد.

c) برای هر $y \in K \setminus \{x\}$ دنباله (f_n) در M_x چنان موجود است که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\|f_n\|_K \leq ۱$ و همچنین $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = ۱$.

برهان. هم‌ارزی a و c به راحتی از لم ۱.۲.۳ بدست می‌آید. همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که b، c را نتیجه می‌دهد.
حال فرض کنید c برقرار باشد. مجموعه متناهی $F = \{y_۱, \cdots, y_m\} \subseteq K \setminus \{x\}$ را در نظر می‌گیریم.
اگر B زیر جبر بسته‌ای از A متشکل از توابعی در A باشد که روی F ثابت است و همچنین اگر $M = M_{y_۱} \cap \cdots \cap M_{y_m}$. دراین‌صورت M یک ایده‌آل ماکسیمال B است و B یک جبر یکنواخت طبیعی روی مجموعه فشرده $L = \{y_F\}$ است که در آن $y_۱ = y_۲ = \cdots = y_m = y_F$.
برای هر $j \in \mathbb{N}_m$ دنباله $(f_{j,n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (M_{y_j})_{[۱]}$ چنان موجود است که $\lim_{n\to\infty} f_{j,n}(x) = ۱$.
برای هر $n \in \mathbb{N}$، f_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $f_n = f_{۱,n} \cdots f_{m,n}$. دراین‌صورت $f_n \in M$ است و $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = ۱$ و همچنین $x \nsim y_F$.
بنابراین دنباله (h_n) در $(M_x)_{[۱]}$ چنان موجود است که $\lim_{n\to\infty} h_n(y_F) = ۱$. لذا برای هر $j \in \mathbb{N}_m$، $\lim_{n\to\infty} h_n(y_j) = ۱$ و h_n دنباله‌ای در A است.
این نشان می‌دهد که M_x یک همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی دارد که شرط b را برقرار می‌کند.

□

اگر A یک جبر یکنواخت طبیعی روی مجموعه فشرده K باشد و $x \in K$ در نظر گرفته شود و همچنین M_x دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار باشد آنگاه $x \in K$ نسبت به متر گلیسون نقطه‌ی تنها است.
حال به بیان دومین نتیجه اصلی این بخش می‌پردازیم.

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید A یک جبر یکنواخت طبیعی روی فضای فشرده K باشد. دراین‌صورت A نقطه‌وار انقباضی است اگروفقط‌اگر هر بخش گلیسون در K یک مجموعه یک عضوی باشد.

برهان. با توجه به قضیه ۱.۲.۳ اثبات واضح است. □

حال به بیان تعداد متنوعی از جبرهای یکنواخت می‌پردازیم و ارتباط آن‌ها را با بخش‌های گلیسون بررسی می‌کنیم.
این مثال‌ها نشان می‌دهند که تمام احتمالاتی که توسط قضیه‌های قبل حذف نمی‌شوند، رخ می‌دهد.

مثال ۱.۲.۳. فرض کنید $A = A(\mathbb{D})$ جبر تعریف شده در مثال ۲.۳.۲ باشد. برای $z \in \mathbb{D}$، قرار دهید $M_z = \{f \in A \mid f(z) = ۰\}$.

اگر $z \in \mathbb{D}$ و $f \in M_z$ داده شده باشند آنگاه با توجه به قضیه پیک_شوارتز برای تابع $\frac{f}{\|f\|_{\mathbb{D}}}$ و $w \in \mathbb{D}$ داریم

$$\left|\frac{\frac{f(w)}{\|f\|_{\mathbb{D}}} - \frac{f(z)}{\|f\|_{\mathbb{D}}}}{1 - \frac{\overline{f(w)}}{\|f\|_{\mathbb{D}}} \frac{f(z)}{\|f\|_{\mathbb{D}}}}\right| \leq \left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| \Longrightarrow \frac{|f(w)|}{\|f\|_{\mathbb{D}}} \leq \left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| \Longrightarrow |f(w)| \leq \frac{|w-z|}{|1-\overline{w}z|}\|f\|_{\mathbb{D}}.$$

بنابراین $\delta > 0$ چنان موجود است که به‌ازای‌هر w با شرط $|w-z| < \delta$ رابطه $|f(w)| < \frac{1}{2}$ برقرار است و لذا M_z دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار نیست.
حال اگر $z \in \overline{\mathbb{D}}$ آنگاه M_z دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار است اگروفقط‌اگر M_z همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی داشته باشد و این معادل است با این‌که z یک نقطه اوج باشد.

مثال ۲.۲.۳. فرض کنید A یک جبر یکنواخت روی مجموعه فشرده K باشد و همچنین $x \in K$ را انتخاب کنید.
می‌توان $x \in K$ با $x \in \Gamma(A)$ را چنان انتخاب کرد که M_x همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار نداشته باشد.
برای اثبات این موضوع فرض کنید $K = \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{I}$ و

$$A = \{f \in C(K) \mid \text{تحلیلی باشد } |z| < 1 \text{ به‌ازای } f(z,1)\},$$

دراین‌صورت A یک جبر یکنواخت متشکل از همه توابع پیوسته f روی K است. به‌طوری‌که تابع

$$\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$$
$$z \to f(z,1)$$

روی $\mathbb{D}$ تحلیلی باشد. آنگاه $\Gamma_0(A) = \{(z,t) \in K \mid 0 \leq t < 1\} \cup \{(z,1) \in K \mid z \in \mathbb{T}\}$ و $\Gamma(A) = K$ می‌باشد.
مجموعه $K \setminus \Gamma_0(A) = \{(z,1) \mid z \in \mathbb{D}\}$ یک بخش گلیسون است و همچنین M_x دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار است اگروفقط‌اگر M_x دارای همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی باشد و این معادل است با این‌که x یک نقطه اوج است.
همچنین اگر $x \in K \setminus \Gamma_0(A)$ آنگاه $M_x^2 = \overline{M_x^2} \subsetneq M_x$ و لذا M_x دارای همانی تقریبی نیست.

مثال ۳.۲.۳. فرض کنید K یک مجموعه فشرده در صفحه باشد و همچنین $R(K)$ جبر یکنواخت طبیعی روی K لحاظ شود.
اگر $x \in K$ آن‌گاه با توجه به مرجع [۳۲] نتیجه ۲۶.۱۴، مجموعه $\{x\}$ یک بخش گلیسون یک نقطه‌ای است اگروفقط‌اگر x یک نقطه اوج باشد.
بنابراین M_x یک همانی تقریبی کران‌دار دارد اگروفقط‌اگر M_x دارای همانی تقریبی نقطه‌وار

انقباضی باشد و این معادل با این است که x یک نقطه اوج جبر $R(K)$ باشد.
با توجه به مرجع [۳۲] نتیجه ۲۶.۱۵، $R(K) = C(K)$ اگروفقط‌اگر هر نقطه از K یک بخش گلیسون یک نقطه‌ای است و همچنین $R(K) = C(K)$ اگروفقط‌اگر $R(K)$ نقطه‌وار انقباضی باشد.
حال با توجه به مرجع [۳۲] نتیجه ۲۶.۱۲، هرگاه x یک نقطه اوج نباشد آنگاه x نسبت به متر گلیسون نقطه تنها نیست. بنابراین M_x همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار دارد اگروفقط‌اگر دارای همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی باشد.
همچنین با توجه به مرجع [۳۲] نتیجه ۲۶.۱۳، هر بخش گلیسون برای $R(K)$ که یک نقطه‌ای نیست در صفحه مساحتی ناصفر دارد.

جبرهای یکنواخت جدایی‌پذیر و طبیعی مانند A روی یک فضای فشرده K وجود دارند که به ازای برخی از $x \in K \setminus \Gamma(A)$، مجموعه $\{x\}$ بخش گلیسون یک نقطه‌ای است.
برای چنین نقاطی مانند x ایده‌آل ماکسیمال M_x دارای همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی است. اما همانی تقریبی کران‌دار ندارد. برای مثال می‌توان به جبر یکنواخت U_α از مرجع [۳۲] قضیه ۱۸.۱ مراجعه نمود.

مثال ۴.۲.۳. فرض کنید H^∞ جبر یکنواخت همه‌ی توابع تحلیلی کران‌دار روی مجموعه $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < ۱\}$ باشد. دراین‌صورت H^∞ جدایی‌پذیر نیست.
فضای شاخص جبر H^∞ توسط Φ نمایش داده می‌شود. که در مرجع [۲۰] فصل ۱۰ مورد مطالعه قرار گرفته است.
چون H^∞ یک جبر لگاریتم مدولی روی مرز سیلو خودش است هر نقطه از $\Gamma = \Gamma(H^\infty)$ دارای یک اندازه نمایش منحصربفرد روی Γ است و این اندازه نمایش منحصربفرد باید اندازه متمرکز شده در یک نقطه باشد. در نتیجه هر نقطه از Γ یک p ـ نقطه است و بنابراین یک بخش یک نقطه‌ای گلیسون است. درحقیقت هر بخش گلیسون برای H^∞ یا یک بخش یک نقطه‌ای است یا دیسک تحلیلی است و بخش‌های گلیسون یک نقطه‌ای وجود دارد که در $\Gamma(H^\infty)$ نیستند.
فرض کنید که $\{x\}$ بخش یک نقطه‌ای با $x \in \Phi$ باشد دراین‌صورت با توجه به مرجع [۲۰] قضیه ۲.۴، M_x تجزیه می‌شود
با توجه به مرجع [۷] قضیه ۲.۳ جبری یکنواخت مانند A، جدایی‌پذیر و طبیعی روی یک فضای متریک فشرده K وجود دارد که یک بخش گلیسون یک نقطه‌ای است. بنابراین A نقطه‌وار انقباضی است ولی $\Gamma(A) \subsetneq K$.
این نشان می‌دهد که A جبر کول نیست و لذا انقباضی نیست بنابراین ایده‌آل‌های ماکسیمالی از A موجود هستند که جبرهای یکنواخت نقطه‌وار انقباضی هستند که دارای همانی تقریبی کران‌دار نیستند. همچنین وجود مثالی از این گونه جبرها از مرجع [۴] قضیه ۲.۵ نیز نتیجه می‌شود.

حال با توجه به مرجع [۱۵] قضیه ۲.۱، Feinstein یک جبر یکنواخت طبیعی، منتظم و

جداپی‌پذیر مانند A روی یک مجموعه فشرده مانند K ارائه داد که برای آن یک بخش گلیسون دو نقطه‌ای مانند $\{x_۱, x_۲\}$ وجود دارد و تمام نقاط دیگر K بخش‌های گلیسون یک نقطه‌ای هستند.

همچنین با توجه به این مثال قرار می‌دهیم $M = M_{x_۱}$ و F را یک زیر مجموعه متناهی از $K \setminus \{x_۱\}$ در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال F را یک زیر مجموعه از مجموعه $\{x_۲, \cdots, x_n\}$ که در آن $x_۲, \cdots, x_n$ مجزا هستند انتخاب می‌کنیم. عضو $f_۲ \in M_{x_۲}$ را با شرط $f_۲(x_۱) = ۱$ انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $m = \|f_۲\|_K$.

برای $\varepsilon \in (۰,۱)$، $\delta > ۰$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $mn\delta < \varepsilon$. برای $j = ۳, \cdots, n$ عنصر $f_j \in M_{x_j}$ را با شرط $|f_j(x_۱)| > ۱ - \delta$ و $\|f_j\|_K = ۱$ انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $f = f_۲ f_۳ \cdots f_n$.

به وضوح $f \in A$ است و $\|f\|_K \leq m$ و $|f(x_۱) - ۱| < mn\delta < \varepsilon$. حال قرار می‌دهیم $g = f(x_۱)۱_K - f$ بنابراین $g \in M$ و $|g(x_j)| > ۱ - \varepsilon$ و همچنین $\|g\|_K \leq m + ۱ + \varepsilon$.

این نشان می‌دهد که M دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار است که کران آن $m+۱$ می‌باشد. به طور مشابه $M_{x_۲}$ همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار دارد و هر نقطه‌ی دیگر از K همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی دارد.

بنابراین در این مثال هر ایده‌آل ماکسیمال دارای همانی تقریبی نقطه‌وار کران‌دار است ولی این جبر نقطه‌وار انقباضی نیست.

مثال ۵.۲.۳. مثال‌های ارائه شده‌ی ۵.۱۳ و ۵.۱۶ در مرجع [۳۱] جبرهای یکنواخت طبیعی مانند A روی فضاهای فشرده K موجود هستند که در آن‌ها نقاطی چون $x \in K \setminus \Gamma(A)$ چنان موجود است که مجموعه $\{x\}$ یک بخش گلیسون یک نقطه‌ای است و $M_x^۲$ در M_x چگال نیست به ویژه M_x تجزیه نمی‌شود. در این حالت جبر یکنواخت M_x دارای همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی است ولی همانی تقریبی ندارد.

حال در ادامه برای یک ایده‌آل ماکسیمال M_x یک شکل قوی از همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی بدست می‌آوریم به‌طوری‌که برای هر مجموعه متناهی و ناتهی مانند F مجزایی از x، تابعی چون $f \in (M_x)_{[۱]}$ وجود دارد که روی F مقدار ثابت ۱ را اتخاذ می‌کند.

قضیه ۳.۲.۳. جبر یکنواخت نقطه‌وار انقباضی و طبیعی مانند A روی یک فضای متری پذیر، فشرده و ناتهی مانند K وجود دارد به‌طوری‌که یک ایده‌آل ماکسیمال مانند M از A دارای همانی تقریبی کران‌دار نیست و $\Gamma_۰(A) \subsetneq K$.

برهان. فرض کنید A جبر یکنواخت روی یک فضای متری‌پذیر و فشرده K باشد که با توجه به مرجع [۱۴] قضیه ۵.۱ ارائه شد. این جبر طبیعی است و دارای این خاصیت است که عضوی چون $x \in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $\Gamma_۰(A) = K \setminus \{x\}$ و لذا $A \neq C(K)$.

فرض کنید F یک زیرمجموعه متناهی و ناتهی از $K \setminus \{x\}$ باشد. دراین‌صورت F مجموعه اوج است و بنابراین تابع $f \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $y \in F$، $f(y) = ۱$ و برای هر $y \in K \setminus F$، $|f(y)| < ۱$.

فرض کنید $a = f(x)$. دراین‌صورت $a \in \mathbb{D}$. با انتخاب مناسب عضو $\zeta \in \mathbb{T}$ و ترکیب تابع f با تابع $(z \in \overline{\mathbb{D}}) \quad \psi_a(z) = \frac{\zeta(z-a)}{(۱-\bar{a}z)}$.

می‌توان فرض کرد که $f \in M_x$. بنابراین M_x دارای همانی تقریبی انقباضی است. هر نقطه $y \in K \setminus \{x\}$ یک نقطه اوج برای A است و بنابراین M_y دارای همانی تقریبی انقباضی است. لذا A نقطه‌وار انقباضی است.

حال چون $x \notin \Gamma_\circ(A)$ از قضیه ۴.۱.۳ می‌توان نتیجه گرفت که M_x همانی تقریبی کران‌دار ندارد. لذا A انقباضی نیست و A جبر کول نمی‌باشد.

□

لازم به ذکر است که برای نویسندگان مقاله و دیگر افراد تا به حال مشخص نیست که آیا جبر یکنواخت طبیعی چون A روی یک مجموعه فشرده مانند K وجود دارد که هر نقطه از K بخش یک‌نقطه‌ای باشد و در مقابل A دارای ایده‌آل ماکسیمالی چون M باشد که حاوی همانی تقریبی نباشد.

۳.۳ جبرهای تابعی باناخ روی فاصله‌های بسته

در این بخش دو جبر تابعی باناخ یک‌دار و طبیعی روی فاصله‌های بسته $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند. مثال اول جبر دیتکین نقطه‌وار انقباضی را ارائه می‌دهد که یکی از ایده‌آل‌های ماکسیمالش دارای واحد تقریبی نسبی کران‌دار نیست و بنابراین همانی تقریبی کران‌دار ندارد. در واقع این ایده‌آل ماکسیمال یک جبر سگال مجرد نسبت به $C_\circ((\circ, ۱])$ است.

دومین مثال به معرفی یک جبر تابعی باناخ انقباضی می‌پردازد که معادل با یک جبر یکنواخت نیست.

مثال ۱.۳.۳. فرض کنید $A = \{f \in C(\mathbb{I}) \mid I(f) = \int_\circ^۱ \frac{|f(t)-f(\circ)|}{t} dt < \infty\}$.

به وضوح A خودالحاق، زیر فضای خطی از $C(\mathbb{I})$ است که در بردارنده چندجمله‌ای‌ها است و لذا A به طور یکنواخت در $C(\mathbb{I})$ چگال است. در حقیقت A بسیار بزرگ است به این معنی که آن همه‌ی جبرهای تابعی باناخ $(\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{I}), \|\cdot\|_\alpha)$ را برای $\circ < \alpha \leq ۱$ دربردارد. همچنین A شامل تمام توابعی چون $f \in C(\mathbb{I})$ است که $\mathrm{supp} f \subset (\circ, ۱]$.

حال برای هر $f \in A$ تعریف می‌کنیم $\|f\| = \|f\|_{\mathbb{I}} + I(f)$.

به راحتی می‌توان نشان داد که $(A, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار است. نشان می‌دهیم که $(A, \|\cdot\|)$ یک فضای کامل است. برای این هدف فرض کنید (f_n) یک دنباله کوشی در $(A, \|\cdot\|)$ باشد. دراین‌صورت $f \in C(\mathbb{I})$ چنان موجود است که $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{I}} = \circ$.

فرض کنید $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. دراین‌صورت عضو $n_۰ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که برای $m, n \geq n_۰$، $\|f_m - f_n\|_I + I(f_m - f_n) < \varepsilon$.

با توجه به لم فاتو برای هر $m \geq n_۰$، $I(f_m - f) \leq \liminf_{n\to\infty} I(f_m - f_n) \leq \varepsilon$. لذا $I(f) \leq I(f_{n_۰}) + \varepsilon$ و بنابراین $f \in A$. علاوه بر این برای هر $m \geq n_۰$، $\|f_m - f\| \leq ۲\varepsilon$. این نشان می‌دهد که (f_n) به تابع f در $(A, \|\cdot\|)$ میل می‌کند.

اولین ادعا این است که مجموعه A یک زیرجبر از $C(\mathbb{I})$ است و علاوه بر این برای هر $f, g \in A$، $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$. زیرا برای $f, g \in A$ می‌توان نوشت

$$|(fg)(t) - (fg)(۰)| \leq \|f\|_{\mathbb{I}}|g(t) - g(۰)| + \|g\|_{\mathbb{I}}|f(t) - f(۰)| \qquad (t \in \mathbb{I}),$$

و بنابراین $I(fg) \leq \|f\|_{\mathbb{I}} I(g) + \|g\|_{\mathbb{I}} I(f)$. این ادعای بیان شده را ثابت می‌کند.

همچنین $\|۱\|_{\mathbb{I}} = ۱$ و بنابراین $(A, \|\cdot\|)$ جبر تابعی باناخ روی $\mathbb{I}$ است. حال فرض کنید $M = M_۰(A)$. دراین‌صورت M یک ایده‌آل در $C_۰((۰, ۱])$ است و برای $f \in M$ و $g \in C_۰((۰, ۱])$ داریم $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|_{\mathbb{I}}$.

دومین ادعا این است که A روی $\mathbb{I}$ طبیعی است. با توجه به مرجع [۶] گزاره ۴.۱.۵ قسمت **(ii)**، کافی است نشان دهیم که هر $f \in A$، با شرط $(t \in \mathbb{I}) \quad f(t) \neq ۰$ در A معکوس پذیر است.

بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم که $f(۰) = ۱$. قرار می‌دهیم $f = ۱ + g$. جایی که $g \in M$ و همچنین $\frac{۱}{f} = ۱ + h$ که در آن $h \in C(\mathbb{I})$ و $h(۰) = ۰$.

$\delta > ۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر $t \in [۰, \delta]$ داشته باشیم $|g(t)| < \frac{۱}{۲}$. چون برای هر $t \in [۰, \delta]$، $|h(t)| \leq ۲|g(t)|$، داریم $\int_۰^\delta (\frac{|h(t)|}{t}) dt < \infty$.

به وضوح $\int_\delta^۱ \frac{|h(t)|}{t} dt \leq \|h\|_{\mathbb{I}} \log(\frac{۱}{\delta}) < \infty$ و بنابراین $h \in M$ و $\frac{۱}{f} \in A$. این ادعای بیان شده را ثابت می‌کند.

سومین ادعا این است که نرم A معادل با یک نرم یکنواخت نیست. برای اثبات این مطلب فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و f_n را طوری انتخاب می‌کنیم که روی $[۰, \frac{۱}{n}]$ خطی و روی $[\frac{۱}{n}, ۱]$ مساوی ۱ است. پس $f_n \in A$ و $\|f_n\| = ۱ + \int_۰^{\frac{۱}{n}} n dt + \int_{\frac{۱}{n}}^۱ \frac{۱}{t} dt = ۲ + \log n$ در حالی که $\|f_n\|_{\mathbb{I}} = ۱$. این ادعای بیان شده را ثابت می‌کند. اگر تابع $h_۰$ را به صورت متناوب با ضابطه‌ی $h_۰(t) = \frac{۱}{\log(\frac{۱}{t})}$ برای $۰ < t \leq ۱$ و $h_۰(۰) = ۰$ تعریف کنیم آنگاه $h_۰ \in C(\mathbb{I})$ ولی $h_۰ \notin A$.

زیرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $f \in M$ با شرط $(\frac{۱}{n} \leq x \leq ۱) \quad |۱ - f(x)| < \frac{۱}{۲}$ می‌توان نتیجه گرفت که $\|f\| \geq \frac{(\log n)}{۲}$ و لذا M واحد تقریبی نسبی کران‌دار ندارد.

فرض کنید $t_۰ \in \mathbb{I}$ باشد و همچنین فرض کنید (g_n) همان دنباله بیان شده در تعریف ۶.۳.۲ باشد. بنابراین (g_n) یک دنباله در $J_{t_۰}(A)$ است. و همچنین فرض کنید $f \in M_{t_۰}$. دراین‌صورت ادعا می‌کنیم که $\lim_{n\to\infty}\|f - fg_n\| = ۰$. برای $t_۰ > ۰$ این مطلب واضح است.

در حالتی که $t_۰ = ۰$ فرض کنید $\varepsilon > ۰$ ثابت در نظر گرفته شود و همچنین $\delta > ۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر $۰ \leq t \leq \delta$، $|f(t)| < \varepsilon$ و $\int_۰^\delta \frac{|f(t)|}{t} dt < \varepsilon$. پس برای $n > \frac{۱}{\delta}$ داریم

$\|f - fg_n\| < ۲\varepsilon$. این ادعای بیان شده را ثابت می‌کند.
بنابراین جبر تابعی باناخ طبیعی A جبر دیتکین است و به طور قوی منتظم می‌باشد.
دنباله (g_n) برای $t_\circ = \circ$ همانی تقریبی برای M و $C_\circ((\circ, ۱])$ است و بنابراین M نسبت به $C_\circ((\circ, ۱])$ جبر سگال مجرد است.
برای $t_\circ > \circ$ وقتی $n \to \infty$ داریم $\|g_n\| = ۱ + O(\frac{۱}{n})$ و بنابراین دنباله $(\frac{g_n}{\|g_n\|})_{n\in\mathbb{N}}$ برای $M_{t_\circ}$ همانی تقریبی انقباضی است. لذا نتیجه می‌گیریم که $M_{t_\circ} = M_{t_\circ}^{[۲]} = \overline{J_{t_\circ}}$.
چهارمین ادعا این است که جبر چند جمله‌ای‌های محدود شده به $\mathbb{I}$ در A چگال است. در حقیقت برای اثبات آن کافی است نشان دهیم که برای $f \in J_\circ$ و $\varepsilon > \circ$ یک چندجمله‌ای مانند p چنان موجود است که $\|f - p\| < \varepsilon$. برای این هدف در ابتدا تابع $g(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{t} & t \in \mathbb{I} \\ \circ & t = \circ \end{cases}$$

بنابراین $g \in C(\mathbb{I})$.
چندجمله‌ای q موجود است به‌طوری‌که $\|g - q\|_{\mathbb{I}} < \frac{\varepsilon}{۴}$. برای $t \in \mathbb{I}$ قرار می‌دهیم $p(t) = tq(t)$.
لذا p یک چندجمله‌ای است و به وضوح $\|f - p\| < \varepsilon$.
ایده‌آل M همانی تقریبی کران‌دار ندارد.
در واقع، در پنجمین ادعا حکمی را ثابت می‌کنیم که از نامتناهی بودن همبعد $M^۲$ در M کمی قوی‌تر است و بنابراین فضای اشتقاق‌های نقطه‌ای در صفر نامتناهی‌البعد است. زیرا فرض کنید $f \in M^۲$ باشد. دراین‌صورت اعضای $g_۱, \cdots, g_k$ و $h_۱, \cdots, h_k$ در M چنان موجود هستند که $f = \sum_{j=۱}^{k} g_j h_j$. قرار می‌دهیم $u = \sum_{j=۱}^{k}(|g_j| + |h_j|)$. پس $u \in M$ و برای $t \in \mathbb{I}$، $|f(t)| \leq u(t)^۲$.
حال اگر برای $\alpha > \circ$ تابع f_α به صورت

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{۱}{(\log(\frac{۱}{t}))^\alpha} & t \in (\circ, ۱] \\ \circ & t = \circ \end{cases}$$

تعریف شود آنگاه می‌توان گفت برای $\alpha > ۱$، $f_\alpha \in M$.
فرض کنید $f_\alpha \in M^۲$ باشد. دراین‌صورت $u_\alpha \in M$ موجود است به‌طوری‌که برای‌هر $t \in \mathbb{I}$، $|f_\alpha(t)| \leq u_\alpha(t)^۲$ و بنابراین برای هر $t \in (\circ, ۱]$ داریم $u_\alpha(t) \geq \frac{۱}{(\log(\frac{۱}{t}))^{\frac{\alpha}{۲}}}$. لذا نتیجه می‌گیریم که $\alpha > ۲$ و بنابراین برای هر $\alpha \in (۱, ۲]$، $f_\alpha \in M \setminus M^۲$.
به آسانی نتیجه می‌شود که مجموعه $\{f_\alpha + M^۲ \mid \alpha \in (۱, ۲]\}$ در $\frac{M}{M^۲}$ مستقل خطی است. این ادعای بیان شده را ثابت می‌کند.
تا اینجا ثابت کردیم که M همانی تقریبی کران‌دار ندارد. حال به عنوان ادعای ششم ثابت می‌کنیم M دارای همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی است. زیرا فرض کنید F یک زیر مجموعه

متناهی از $[0,1]$ باشد. دراین‌صورت $F=\{t_1,\cdots,t_k\}$. برای‌هر $n\in\mathbb{N}$ و $i\in\mathbb{N}_k$ فرض کنید $f_{n,i}$ تحدید تابعی چون g به مجموعه $\mathbb{I}$ باشد که

$$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$g(x)=\begin{cases}0 & x\in[t_i-\frac{1}{n},t_i+\frac{1}{n}]^c\\ h(x) & x\in[t_i-\frac{1}{n},t_i]\cup[t_i,t_i+\frac{1}{n}]\end{cases}$$

قرار می‌دهیم $f_{F,n}=\sum_{i=1}^{k}f_{n,i}$. به راحتی برای $t\in F$، $f_{F,n}(t)=1$ و وقتی $n\to\infty$ داریم $\|f_{F,n}\|=1+O(\frac{1}{n})$.

این ادعای بیان شده را ثابت می‌کند. توجه می‌کنیم که همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی در M یک تور است و دنباله نیست. این نشان می‌دهد که A نقطه‌وار انقباضی است.

فرض کنید h_0 تابعی باشد که $h_0(t)=\frac{1}{\log(\frac{1}{t})}\quad(t\in(0,1])$ و $h_0(0)=0$. بنابراین $h_0\in C(\mathbb{I})\backslash M$ و $h_0^2\in M$. همچنین فرض کنید $B=M\oplus\mathbb{C}h_0$. برای هر $f\in M$ داریم

$\|fh_0\|\le\|f\|\|h_0\|_{\mathbb{I}}$ و لذا با ضرب کردن h_0 در یک ثابت مثبت مناسب می‌توان فرض کرد که h_0 در شرایط گزاره ۴.۰.۳ صادق است.

چون M نقطه‌وار انقباضی است لذا B نیز نقطه‌وار انقباضی است. بنابراین B هیچ همانی تقریبی ندارد.

مثال ۲.۳.۳. جبر تابعی باناخ روی دایره $\mathbb{T}$ را به صورت زیر بیان می‌کنیم. برای به کارگیری علائم مناسب $C(\mathbb{T})$ را با زیرجبری از $C([-1,1])$ یکی می‌گیریم که شامل تابع‌های $f\in C([-1,1])$ با شرط $\exp(-\pi if(-1))=\exp(\pi if(1))$ است.

جمع و تفریق در $[-1,1)$ به پیمانه $[-1,1)$ در نظر گرفته می‌شود.

ضریب α با شرط $1<\alpha<2$ را ثابت در نظر می‌گیریم.

برای $t\in[-1,1)$ اگر $f\in C(\mathbb{T})$ آنگاه S_tf را انتقال f توسط t می‌نامیم هرگاه

$$(S_tf)(s)=f(s-t)\qquad(s\in[-1,1])$$

نوسان تابع f به صورت

$$w_f(t)=\sup\{|f(s)-(S_tf)(s)|\mid s\in[-1,1]\}\qquad(t\in[-1,1]),$$

و

$$\Omega_f(t)=\|f-S_tf\|_1=\int_{-1}^{1}|f(s)-f(s-t)|ds\qquad(t\in[-1,1]),$$

تعریف می‌شود. بنابراین تعریف می‌کنیم

$$I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{\Omega_f(t)}{|t|^{\alpha}}dt.$$

می‌دانیم که نگاشت

$$[-1,1] \to \mathbb{R}^+$$
$$t \to \Omega_f(t)$$

پیوسته است و بنابراین $I(f)$ در $[0,\infty]$ خوش‌تعریف است. همچنین $\Omega_f = \Omega_{1-f}$ و لذا $I(f) = I(1-f)$.

حال A را فضای توابع $f \in C(\mathbb{T})$ با شرط $I(f) < \infty$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$\|f\| = \|f\|_{\mathbb{T}} + I(f) \qquad (f \in A).$$

به وضوح A خودالحاق، زیر فضای خطی از $C(\mathbb{T})$ است و همچنین $(A, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار است. علاوه بر این $(A, \|\cdot\|)$ کامل می‌باشد و بنابراین فضای باناخ است زیرا فرض کنید (f_n) دنباله کوشی در $(A, \|\cdot\|)$ باشد. دراین‌صورت $f \in C(\mathbb{T})$ چنان موجود است که $f_n \xrightarrow{u} f$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت برای هر $t \in [-1,1]$ داریم

$\lim_{n\to\infty} \Omega_{f_n}(t) = \Omega_f(t)$ و همچنین با استفاده دوباره از لم فاتو در $(A, \|\cdot\|)$ داریم $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

دیدیم که برای هر $f \in A$ و $t \in [-1,1]$، $S_t f \in A$ و $\|S_t f\| = \|f\|$. همچنین جبر A روی دایره همگن است.

فرض کنید برای برخی از $\gamma > \alpha - 1$، $f \in C(\mathbb{T})$ به گونه‌ای باشد که $w_f(t) = O(t^\gamma)$. دراین‌صورت $f \in A$ است. به ویژه A در بردارنده چندجمله‌ای‌های مثلثاتی است و بنابراین A در $C(\mathbb{T})$ به طور یکنواخت چگال است.

ادعای اول این است که $(A, \|\cdot\|)$ جبر تابعی باناخ روی $\mathbb{T}$ است. زیرا اگر $f, g \in A$ و $t \in [-1,1]$ آنگاه برای هر $s \in [-1,1]$ داریم

$$|(fg - S_t(fg))(s)| \le \|f\|_{\mathbb{T}} |(g - S_t g)(s)| + \|g\|_{\mathbb{T}} |(f - S_t f)(s)|.$$

و بنابراین $\Omega_f g(t) \le \|f\|_{\mathbb{T}} \Omega_g(t) + \|g\|_{\mathbb{T}} \Omega_f(t)$. این نشان می‌دهد که $I(fg) \le \|f\|_{\mathbb{T}} I(g) + \|g\|_{\mathbb{T}} I(f)$ و همچنین $\|fg\| \le \|f\|\|g\|$. بعلاوه $\|1_{\mathbb{T}}\| = 1$. این ادعای بیان شده را ثابت می‌کند.

ادعای دوم این است که A روی $[-1,1]$ طبیعی است. زیرا فرض کنید $f \in A$ تابعی باشد که برای هر $t \in [-1,1]$، $|f(t)| \ge \delta > 0$. دراین‌صورت به راحتی می‌توان دید که $I(\frac{1}{f}) \le \delta^2 I(f) < \infty$ و بنابراین $\frac{1}{f} \in A$. بنابراین A طبیعی است.

ادعای سوم این است که $A \neq C(\mathbb{T})$ برای این منظور برای $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم

$$e_n(s) = \exp(i\pi n s) \qquad (s \in [-1,1]).$$

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\Omega_{e_n}(t) = \int_{-1}^{1} |e^{i\pi n s} - e^{i\pi n(s-t)}| ds = 2|1 - e^{i\pi n t}| \qquad (t \in [-1,1]).$$

و همچنین رابطه $I(e_n) = 2\int_{-1}^{1} \frac{|1-e^{i\pi nt}|}{|t|^\alpha}dt \geq 2(\pi n)^{\alpha-1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{|1-e^{iu}|}{|u|^\alpha}du = Cn^{\alpha-1}$ به ازای یک عدد ثابت $C>0$ برقرار است.
این نشان می‌دهد که $\|e_n\| \geq Cn^{\alpha-1}$ بنابراین $\lim_{n\to\infty}\|e_n\| = \infty$. در حالی که برای $n\in\mathbb{N}$، $\|e_n\|_{\mathbb{T}} = 1$. این ادعای بیان شده را ثابت می‌کند.
چهارمین ادعا این است که جبر تابعی باناخ A انقباضی است. چون A روی $\mathbb{T}$ همگن است کافی است نشان دهیم که ایده‌آل ماکسیمال $M=\{f\in A \mid f(0)=0\}$ همانی تقریبی انقباضی دارد.
برای این هدف تعریف می‌کنیم $\Delta_n(s) = \max\{1-n|s|,0\} \quad (s\in[-1,1], n\in\mathbb{N})$.
اولاً فرض کنید که $|t|\le \frac{1}{n}$. دراین‌صورت برای $|s|\le\frac{2}{n}$، $|\Delta_n(s)-\Delta_n(s-t)|\le n|t|$ و برای $|s|\ge \frac{2}{n}$، $\Delta_n(s)=\Delta_n(s-t)=0$ و بنابراین $\Omega_{\Delta_n}(t)\le 2\int_0^{\frac{2}{n}} n|t|ds = 4|t|$.
سپس فرض کنید که $|t|\ge\frac{1}{n}$ دراین‌صورت $\Omega_{\Delta_n}(t) \le 2\int_{-1}^{1}\Delta_n(s)ds = \frac{2}{n}$. بنابراین

$$I(\Delta_n)\le 8\int_0^{\frac{1}{n}} t^{1-\alpha}dt + \frac{2}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1} t^{-\alpha}dt = O(\frac{1}{n^{2-\alpha}}).$$

که در آن $\lim_{n\to\infty}O(\frac{1}{n^{2-\alpha}})=0$. زیرا $\alpha<2$ و بنابراین وقتی $n\to\infty$ داریم $\|1-\Delta_n\| = \|\Delta_n\| = 1+o(1)$.
در حقیقت می‌توانیم برای همه $n\in\mathbb{N}$ فرض کنیم که $I(\Delta_n)\le 1$ و $\|\Delta_n\|\le 2$.
در انتها نشان می‌دهیم که $(1-\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک همانی تقریبی برای ایده‌آل ماکسیمال M است.
به وضوح برای هر $n\in\mathbb{N}$، $(1-\Delta_n)\in M$.
اکنون برای $f\in A$ و برای هر $\delta>0$ می‌نویسیم $I_\delta(f)=\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\Omega_f(t)}{|t|^\alpha}dt$ و $J_\delta(f) = 2\int_\delta^1 \frac{\Omega_f(t)}{|t|^\alpha}dt$.
بنابراین برای $f\in A$، $I(f)=I_\delta(f)+J_\delta(f)$. حال $f\in M$ و $\varepsilon>0$ را ثابت در نظر می‌گیریم و همچنین $\delta>0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $I_\delta(f)<\varepsilon$ و $\|f\|_{[-\delta,\delta]}<\varepsilon$. دراین‌صورت $I_\delta(f\Delta_n)\le\|\Delta_n\|_{\mathbb{T}}I_\delta(f)+\|f\|_{[-\delta,\delta]}I(\Delta_n)<2\varepsilon$.
اکنون $n_0\in\mathbb{N}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $n_0\delta>1$ و $\int_{\frac{-1}{n_0}}^{\frac{1}{n_0}}|f(t)|dt<\varepsilon\delta^\alpha$. فرض کنید $n\ge n_0$ دراین‌صورت $\|f\Delta_n\|_{[-1,1]}\le\|f\|_{[-1,1]}<\varepsilon$ و برای $t\in[-1,1]$، $\Omega_{f\Delta_n}(t)\le 2\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}}|f(s)|ds<2\varepsilon\delta^\alpha$ و بنابراین $J_\delta(f\Delta_n)<4\varepsilon\delta^\alpha\int_\delta^1\frac{dt}{t^\alpha}<4\varepsilon$.
بنابراین برای $n\ge n_0$، $\|f\Delta_n\|\le\varepsilon+2\varepsilon+4\varepsilon=7\varepsilon$. دراین‌صورت $\lim_{n\to\infty}f\cdot(1-\Delta_n)=f$ در $(A,\|\cdot\|)$. لذا $(1-\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ برای M همانی تقریبی است.
همچنین نتیجه می‌گیریم که $(\frac{(1-\Delta_n)}{\|1-\Delta_n\|})_{n\in\mathbb{N}}$ یک همانی تقریبی انقباضی در M است و بنابراین A انقباضی است.

مراجع

[1] R. F. Basener, ”On rationally convex hulls” **Trans. Amer. Math. Soc**. 182 (1973), 353-381.

[2] D. Blecher and C. J. Read, ”Operator algebras with contractive approximate identities, IV: a large operator algebra in c0 ” **Trans. Amer. Math. Soc**. to appear.

[3] C. Chou and G. Xu, ”The weak closure of the set of left translation operators” **Proc. Amer. Math. Soc**. 127 (1999), 465-471.

[4] B. Cole, ”One point parts and the peak point conjecture” **Thesis, Yale Univ**., 1968.

[5] H. G. Dales, ”Boundaries and peak points for Banach function algebras” **Proc. London Math. Soc**. (3) 22 (1971), 121-136.

[6] H. G. Dales, ”**Banach Algebras and Automatic Continuity**”, London Math. Soc. Monogr. 24, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[7] H. G. Dales and J. F. Feinstein, ”Banach function algebras with dense invertible group” **Proc. Amer. Math. Soc**. 136 (2008), 1295-1304.

[8] H. G. Dales and A. T.-M. Lau, ”**The second duals of Beurling algebras**”, Mem. Amer. Math. Soc. 177 (2005), no. 836, 191 pp.

[9] H. G. Dales, A. T.-M. Lau, and D. Strauss, ”**Banach algebras on semi-groups and on their compactifications**”, Mem. Amer. Math. Soc. 205 (2010), no. 966, 165 pp.

[10] H. G. Dales, A. T.-M. Lau, and D. Strauss, ”Second duals of measure algebras” **Dissertationes Math**. 481 (2012), 121 pp.

[11] H. G. Dales and R. J. Loy, ”**Approximate amenability of semi-group algebras and Segal algebras**”, Dissertationes Math. 474 (2010), 58 pp.

[12] H. G. Dales and A. Ulger, ”**Banach function algebras having a BSE norm**”, in preparation.

[13] P. Eymard, ”L’algebre de Fourier d’un groupe localement compact” **Bull. Soc. Math. France** 92 (1964), 181-236.

[14] J. F. Feinstein, ”A non-trivial, strongly regular uniform algebra” **J. London Math. Soc**. (2) 45 (1992), 288-300.

[15] J. F. Feinstein, ”Regularity conditions for Banach function algebras”, in: Function Spaces (Edwardsville, IL, 1994), **Lecture Notes in Pure Appl. Math**. 172, Dekker, New York, 1995, 117-122.

[16] J. F. Feinstein, ”Trivial Jensen measures without regularity” **Studia Math**. 148 (2001), 67-74.

[17] G. B.”**Folland, A Course in Abstract Harmonic Analysis**”, 1995.

[18] B. Forrest and N. Spronk, ”Best bounds for approximate identities in ideals of the Fourier algebra vanishing on subgroups” **Proc. Amer. Math. Soc**. 134 (2005), 111-116.

[19] T. W. Gamelin,”**Uniform Algebras**”, Prentice-Hall, Englewood Clifis, NJ, 1969.

[20] J. B. Garnett, ”**Bounded Analytic Functions**”, Academic Press, San Diego, CA, 1981.

[21] S. Grabiner, ”Weighted shifts and Banach algebras of power series” **Amer. J. Math**. 97 (1975), 16-42.

[22] J. Inoue and S.-E. Takahasi, ”On characterizations of the image of the Gelfand transform of commutative Banach algebras” **Math. Nachr**. 280 (2007), 105-126.

[23] C. A. Jones and C. D. Lahr, ”Weak and norm approximate identities are different” **Pacific J. Math**. 72 (1977), 99-104.

[24] E. Kaniuth and A. T. Lau, ”A separation property of positive definite functions on locally compact groups and applications to Fourier algebras” **J. Funct. Anal**. 175 (2000), 89-110.

[25] E. Kaniuth and A. Ulger, ”The Bochner-Schoenberg-Eberlein property for commutative Banach algebras, especially Fourier and Fourier-Stietltjes algebras” **Trans. Amer. Math. Soc**. 362 (2010), 4331-4356.

[26] T. W. Palmer, ”**Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras. Volume 1: Algebras and Banach Algebras**”, Encyclopedia Math. Appl. 49, Cambridge Univ. Press, 1994.

[27] T. V. Pedersen, ”Some properties of the Pisier algebra” **Math. Proc. Cambridge Philos. Soc**. 128 (2000), 343-354.

[28] G. Pisier, ”A remarkable homogeneous Banach algebra” **Israel J. Math**. 34 (1979), 38-44.

[29] J. S. Pym, ”The convolution of functionals on spaces of bounded functions” **Proc. London Math. Soc**. (3) 15 (1965), 84-104.

[30] W. Rudin, ”**Fourier Analysis on Groups**”, Wiley, New York, 1962.

[31] S. J. Sidney, ”Properties of the sequence of closed powers of a maximal ideal in a sup-norm algebra” **Trans. Amer. Math. Soc**. 131 (1968), 128-148.

[32] E. L. Stout, ”**The Theory of Uniform Algebras**”, Bogden and Quigley, Tarrytown-on-Hudson, New York, 1971.

[33] A. Ulger, ”Some results about the spectrum of commutative Banach algebras under the weak topology and applications” **Monatsh. Math**. 121 (1996), 353-379.

[34] D. R. Wilken, ”A note on strongly regular function algebras” **Canad. J. Math**. 21 (1969), 912-914.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اشتراک شمارش‌پذیر .... Countable intersection
اشتقاق‌های نقطه‌ای .... Point derivations
انتقال .... Shift
انعکاسی .... Reflexive
انقباضی .... Contractive
ایده‌آل سره بسته .... Proper closed ideal
ایده‌آل مدولی ماکسیمال .... Maximal modular ideal
به طور ضعیف فشرده .... Weakly compact
به طور قوی منتظم .... Strongly regular
پیوسته .... Continuous
تابع مشخصه .... Acteristic function
تجزیه .... Factor
تحدید .... Restriction
تحلیلی .... Analytic
توپولوژی ضعیف .... Weak Topology
توپولوژی ضعیف_ ستاره .... Weak* Topology
تور .... Net
جابجایی .... Commutative
جبر باناخ جابجایی .... Commutative Banach algebra
جبر تاوبرین .... Tauberian algebra
جبر تابعی باناخ طبیعی .... Natural Banach function algebra
جبر دنباله‌ای باناخ .... Banach sequence algebra
جبر دیتکین .... Ditkin algebra
جبر دیتکین قوی .... Strong Ditkin algebra
جبر سگال .... Segal algebra

جبر سگال مجرد	Abstract Segal algebra
جبر کول	Cole algebra
جبر منتظم قوی	Strongly regular algebra
جبرهای تابعی باناخ	Banach function algebras
جبرهای تابعی باناخ انقباضی	Contractive Banach function algebras
جبرهای تابعی باناخ نقطه‌وار انقباضی	Pointwise contractive Banach function algebras
جبرهای دنباله‌ای باناخ	Banach sequence algebras
جبرهای یکنواخت	Uniform algebras
جبر یکنواخت طبیعی	Natural uniform algebra
جدایی پذیر	Separable
جدایی ناپذیر	Non-separable
چگال	Dense
چندجمله‌ای	Polynomial
حاصل‌ضرب‌های آرنز	Arens products
خود الحاق	Self-adjoint
دنباله اکیداً صعودی	Strictly increasing sequence
دنباله	Sequence
دنباله وزنی	Weight sequence
دوگان دوم	Second dual
زیر تور	Subnet
زیر جبر	Subalgebra
زیر فضای خطی	Linear subspace
زیر مجموعه فشرده	Compact subset
صفحه	Plane
ضرب پیچشی	Convolution multiplication
طبیعی	Natural
غیر بدیهی	Non-trivial
فاصله‌های بسته	Closed intervals
فضای برداری	Vector space
فضای حالت	State space
فضای خطی	Linear space
فضای فشرده	Compact space

فضای شاخص .... Character space
فضای موضعاً فشرده .... Locally compact space
فضای نامتناهی‌البعد .... Infinite-dimensional space
فضای نرم‌دار .... Normed space
کران‌دار .... Bounded
گویا .... Rational
متر گلیسون .... Gleason metric
متری پذیر .... Metrizable
متناهی .... Finite
مجموعه اوج .... Peak set
مجموعه جهت‌دار .... Directed set
محدب .... Convex
محمل فشرده .... Compact support
مرز بسته .... Closed boundary
مرز سیلو .... Silov boundary
مزدوج .... Conjugate
مستقل خطی .... Linearly independent
معکوس پذیر .... Invertible
منتظم آرنز .... Arens regular
ناتهی .... Non-empty
نامتناهی‌البعد .... Infinite dimensional
نرم نزولی .... Norm-decreasing
نرم یکنواخت .... Uniform norm
نقاط اوج .... Peak points
نقطه تنها .... Isolated point
نقطه حدی .... Accumulation point
نقطه‌وار انقباضی .... Pointwise contractive
نوسان .... Oscillation
نیم ساده .... Semi-simple
واحد تقریبی کران‌دار .... Bounded approximate units
واحد تقریبی نسبی کران‌دار .... Bounded relative approximate units
همانی تقریبی .... Approximate identity

همانی تقریبی انقباضی .... Contractive approximate identity

همانی تقریبی کران‌دار .... Bounded approximate identity

همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی .... Pointwise contractive approximate identity

همبند .... Connected

همسایگی .... Neighbourhood

یک‌دار .... Unital

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abstract Segal algebra .... جبرسگال مجرد
Accumulation point .... نقطه حدی
Acteristic function .... تابع مشخصه
Analytic .... تحلیلی
Approximate identity .... همانی تقریبی
Arens products .... حاصل‌ضرب‌های آرنز
Arens regular .... منتظم آرنز
Banach function algebras .... جبرهای تابعی باناخ
Banach sequence algebra .... جبر دنباله‌ای باناخ
Banach sequence algebras .... جبرهای دنباله‌ای باناخ
Bounded .... کران‌دار
Bounded approximate identity .... همانی تقریبی کران‌دار
Bounded approximate units .... واحد تقریبی کران‌دار
Bounded relative approximate units .... واحد تقریبی نسبی کران‌دار
Character space .... فضای شاخص
Closed boundary .... مرز بسته
Closed intervals .... فاصله‌های بسته
Cole algebra .... جبر کول
Commutative .... جابجایی
Commutative Banach algebra .... جبر باناخ جابجایی
Compact space .... فضای فشرده
Compact subset .... زیر مجموعه فشرده
Compact support .... محمل فشرده
Conjugate .... مزدوج
Connected .... همبند

Continuous	پیوسته
Contractive	انقباضی
Contractive approximate identity	همانی تقریبی انقباضی
Pointwise contractive Banach function algebras	جبرهای تابعی باناخ نقطه‌وار انقباضی
Countable intersection	اشتراک شمارش‌پذیر
Convex	محدب
Convolution multiplication	ضرب پیچشی
Dense	چگال
Directed set	مجموعه جهت‌دار
Ditkin algebra	جبر دیتکین
Factor	تجزیه
Finite	متناهی
Gleason metric	متر گلیسون
Infinite dimensional	نامتناهی‌البعد
Infinite-dimensional space	فضای نامتناهی‌البعد
Invertible	معکوس پذیر
Isolated point	نقطه تنها
Linearly independent	مستقل خطی
Linear space	فضای خطی
Linear subspace	زیر فضای خطی
Locally compact space	فضای موضعاً فشرده
Maximal modular ideal	ایده‌آل مدولی ماکسیمال
Metrizable	متری پذیر
Natural	طبیعی
Natural Banach function algebra	جبر تابعی باناخ طبیعی
Natural uniform algebra	جبر یکنواخت طبیعی
Neighbourhood	همسایگی
Net	تور
Non-empty	ناتهی
Non-trivial	غیر بدیهی
Non-separable	جدایی ناپذیر
Norm-decreasing	نرم نزولی

فضای نرم‌دار .... Normed space
نوسان .... Oscillation
نقاط اوج .... Peak points
مجموعه اوج .... Peak set
صفحه .... Plane
اشتقاق‌های نقطه‌ای .... Point derivations
نقطه‌وار انقباضی .... Pointwise contractive
همانی تقریبی نقطه‌وار انقباضی .... Pointwise contractive approximate identity
جبرهای تابعی باناخ نقطه‌وار انقباضی .... Pointwise contractive Banach function algebras
چندجمله‌ای .... Polynomial
ایده‌آل سره بسته .... Proper closed ideal
گویا .... Rational
انعکاسی .... Reflexive
تحدید .... Restriction
دوگان دوم .... Second dual
جبر سگال .... Segal algebra
خود الحاق .... Self-adjoint
نیم ساده .... Semi-simple
جدایی پذیر .... Separable
دنباله .... Sequence
انتقال .... Shift
مرز سیلو .... Silov boundary
فضای حالت .... State space
دنباله اکیداً صعودی .... Strictly increasing sequence
جبر دیتکین قوی .... Strong Ditkin algebra
به طور قوی منتظم .... Strongly regular
جبر منتظم قوی .... Strongly regular algebra
زیر جبر .... Subalgebra
زیر تور .... Subnet
جبر تاوبرین .... Tauberian algebra
جبرهای یکنواخت .... Uniform algebras
نرم یکنواخت .... Uniform norm

یک‌دار .... Unital
فضای برداری .... Vector space
توپولوژی ضعیف .... Weak topology
توپولوژی ضعیف‌ـ‌ستاره .... Weak* Topology
به طور ضعیف فشرده .... Weakly compact
دنباله وزنی .... Weight sequence

Aabstract

In this thesis, we shall study contractive and pointwise contractive Banach function algebras, in which each maximal modular ideal has a contractive or pointwise contractive approximate identity, respectively, and we shall seek to characterize these algebras. We shall give many examples, including uniform algebras, that distinguish between contractive and pointwise contractive Banach function algebras. We shall describe a contractive Banach function algebra which is not equivalent to a uniform algebra. We shall also obtain results about Banach sequence algebras and Banach function algebras that are ideals in their second duals.

Key words: Point derivations, Commutative Banach algebra, Tauberian algebra, Banach sequence algebra, Ditkin algebra, Abstract Segal algebra, Cole algebra, Banach function algebra, Contractive Banach function algebra, Pointwise contractive Banach function algebra, Uniform algebra, Dense, Arens product, Self-adjoint, Weight sequence, Bounded, Topologycal group, Peak set, Directed set, Silov boundary, Arens reqular, Peak points, Bounded approximate units, Bounded relative approximate units, Contractive approximate identity, Pointwise contractive approximate identity, Unital.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Partial Differntial equations

Approximate identities in Banach function algebras

By: Fatemeh Kouhsari

Supervisor

Ali Reza Khoddami

January 2018