

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از تکنیک بهینه‌سازی مبتنی بر آموزش شبکه عصبی مصنوعی

نگارنده: الهام شکری

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور

دکتر حجت احسنی طهرانی

بهمن ۱۳۹۶



شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم الهام شکری با شماره دانشجویی ۹۴۳۶۳۹۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان حل رده ای از معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از تکنیک بهینه سازی مبتنی بر آموزش شبکه عصبی مصنوعی

که در تاریخ ۹۶/۱۱/۱۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه  $\geq 80$ )   مردود  
 نوع تحقیق: نظری  عملی

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استادیار	دکتر مهدی قوتمند	۱- استاد راهنمای اول
	دانشیار	دکتر حجت احسنی	۳- استاد مشاور
	استادیار	دکتر ابوالفضل پور عیدی	۴- نماینده تحصیلات تکمیلی
	دانشیار	دکتر علیرضا ناظمی	۵- استاد ممتحن اول
	استادیار	دکتر علی مس فروش	۶- استاد ممتحن دوم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: ۹۶/۱۱/۱۰

تصوه: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در متقاضی مجاز تحصیلات تکمیلی) تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).





تقدیم به پدرم

کوہی استوار و حامی من در طول تمام زندگی

تقدیم به مادرم

سنگ صبور می که انقبای زندگی را به من آموخت

و تقدیم به همه ی آنان که

بی دریغ کوشیدند تا امروز به این مرتبه علمی نائل شوم.

# هو العلميم

زیباترین نام را بر زبان جاری می‌کنم... که هر کس زبان به حمد تو گشوده بی تردید نگاه تو بر او افتاده. پس بر قلبم آن جاری کن که خود می‌پسندی در ثنایت لب گشایم. در وادی معرفت ننگند، سرچشمه هدایت نجوشد، سر بر قامت بندگی فرو نیفتد، گنجینه‌ای را که مقدسش خواندی و به آن قسم یاد کردی، کوچک شمرده شود و تنها خاطره‌ی جوهر خشک شده‌ای از آن بر برگ برگ صفحات زندگی باقی ماند. تو علم را روشنی قرار دادی و فانوسی در بیغوله راه که مسیر را راه نماید و تزکیه را مقدم بر آن دانستی تا نگاهبانش باشد که تزکیه و تعلیم در معیت هم گوهر وجودی انسان را به نور تو منور کند و پرده از واقعیات کنار زند. آن جاست که حقیقت رخ نمایاند، نظر فراتر افتد و خوان گنجینه‌های دانش رنگین شود آری آنجاست که آدمی معنا یابد.

من اگر وعده‌هایم با تو زیر خروارها تل فراموشی و غفلت مدفون گردیده، اگر زشتی طغیان در نظرم زیبا جلوه‌گری می‌کند و چشمانم خشک‌تر از آن است که در مقام توبه اشکی بر آن جاری شود، بدان از سر جهل است و نسیان... اما بار الهی چشم طمع بر رحمت دوخته‌ام و در تمنای رهایی از ظلمت ضلالت، ترنم باران معرفت را می‌طلبم، امید آنکه جوانه‌های حقیقت را در وجودم برویاند و انعکاس آن چشمانم را روشن کند. اکنون چهره بر چهره خاک می‌سایم و تو را به حبیبیت قسم می‌دهم که ”هر آن خصلت ناپسند که در من می‌بینی به لطف واسع خویش اصلاحش فرمای تا پسندیده شود و هر آن عیب که نفسم را به فساد بیالاید از من باز گیر و هر آن نقص که جانم را از کمال باز دارد برطرفش فرمای”.

زبان قاصر است و مجال کوتاه...  
تو خود قصیده مهر را از لوح نانوشتی قلمم بخوان...!



# سپاس گزارمی...

خداوند قادر و متعال را شاکر و سپاس گزارم که مرا در این مرحله از زندگی نیز یاری نمود. حال که با عنایت خداوند متعال این دوره علمی به پایان رسیده است وظیفه خود می دانم که تشکر قلبی خود را نسبت به کسانی که به طریقی در انجام این پژوهش مرا یاری نموده اند ابراز دارم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی قوتمند تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت والای ایشان هستم.

از جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند کمال تشکر را دارم.

با تقدیر و تشکر از استاد بزرگوارم که شایسته‌ی هر نوع سپاس، تکریم و تجلیل اند؛ جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که در طول دوران تحصیلی جهت آموزش و ارتقا علمی بنده زحمت فراوان کشیده‌اند.

همچنین لازم می دانم از آقای دکتر سلیمان حسین پور که از راهنمایی‌های ایشان در طول پیشبرد این پایان نامه بهره بردم تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم به پاس عاطفه‌ی سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در ایام تحصیل بهترین پشتیبان من بودند.

الهام شکری

بهمن ۱۳۹۶

## تعهد نامه

اینجانب الهام شکری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از تکنیک بهینه‌سازی مبتنی بر آموزش شبکه عصبی مصنوعی، تحت راهنمایی دکتر مهدی قوتمند متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده‌اند.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهند رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده‌اند.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

الهام شکری

بهمن ۱۳۹۶

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته‌شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نیست.



## چکیده

هدف این پایان نامه معرفی یک روش جدید با کاربرد شبکه عصبی مصنوعی برای تقریب جواب رده‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از مشتقات کسری و چندجمله‌ای‌ها می‌باشد.

چندجمله‌ای‌های کلاسیک همچون لژاندر، لاگرانژ و چبیشف نقش بسیار مهمی در حل مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل کلاسیک ایفا کرده‌اند. این چندجمله‌ای‌ها دارای توان‌های صحیح می‌باشند. مشتق کسری از این چندجمله‌ای‌ها، توابعی با توان‌های کسری می‌باشند. این ویژگی باعث می‌شود که با افزایش تعداد چندجمله‌ای‌ها، خطا با نرخ بسیار کمی کاهش یابد. یکی از روش‌های موثر برای حل مسائل مربوط به حسابان کسری استفاده از توابع پایه به صورت  $\Phi_n = \sum_{i=0}^n c_i x^{i\alpha}$  است. به همین منظور در این پایان نامه برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه عصبی، چندجمله‌ای‌ها پایه قرار داده شده است به طوری که ابتدا از چندجمله‌ای‌های کلاسیک به عنوان پایه با مشتق کسری کاپوتو- فابریسیو و در ادامه از چندجمله‌ای‌های کسری برای پایه شبکه عصبی با مشتق کاپوتو استفاده شده است و در پایان با شبیه‌سازی عددی کارایی روش نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: شبکه عصبی مصنوعی، معادلات دیفرانسیل کسری، چندجمله‌ای‌های کسری، مشتق کاپوتو، مشتق کاپوتو- فابریسیو.





# فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ مروری بر حسابان کسری
۱	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ توابع پر کاربرد در حسابان کسری
۸	۳.۱ انواع مشتق و انتگرال کسری
۸	۱.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف
۹	۲.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل
۱۲	۳.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری کاپوتو
۱۳	۴.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری کاپوتو-فابریسیو
۱۶	۵.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری ژومقی
۱۷	۴.۱ مثال‌های عددی
۱۹	۲ شبکه عصبی مصنوعی
۱۹	۱.۲ تاریخچه تکامل شبکه عصبی
۲۰	۲.۲ مقدمه‌ای بر شبکه‌های عصبی
۲۱	۱.۲.۲ چرا از شبکه‌های عصبی استفاده می‌کنیم؟
۲۲	۲.۲.۲ شبکه‌های عصبی بیولوژیکی
۲۳	۳.۲.۲ شبکه‌های عصبی مصنوعی
۲۷	۴.۲.۲ شبکه‌های عصبی پیشخور
۲۹	۵.۲.۲ شبکه‌های عصبی بازگشتی
۲۹	۳.۲ توابع فعال سازی
۳۳	۳ حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه‌های عصبی و مشتق کاپوتو-فابریسیو
۳۳	۱.۳ مقدمه

۳۴	.....	مشتق کسری کاپوتو- فابریسیو	۲.۳
۳۷	.....	چندجمله‌ای‌های لژاندر	۳.۳
۳۸	.....	۱.۳.۳ خواص چندجمله‌ای‌های لژاندر	
۳۹	.....	حل معادلات دیفرانسیل کسری به کمک شبکه عصبی مصنوعی	۴.۳
۳۹	.....	۱.۴.۳ محاسبه جواب تقریبی	
۴۱	.....	پیاده سازی روش	۵.۳
۴۵	.....	مثال‌های عددی	۶.۳
۴۹		<b>حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه عصبی و چندجمله‌ای‌های کسری</b>	<b>۴</b>
۴۹	.....	مقدمه	۱.۴
۵۰	.....	حل معادلات کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های کسری	۲.۴
۵۰	.....	۱.۲.۴ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه کسری	
۵۱	.....	۲.۲.۴ چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری	
۵۱	.....	۳.۲.۴ چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری	
۵۳	.....	مشتق کسری کاپوتو	۳.۴
۵۳	.....	پیاده سازی روش	۴.۴
۵۴	.....	مثال‌های عددی	۵.۴
۶۴	.....	نتیجه گیری و پیشنهادات	۶.۴
۶۵		<b>مراجع</b>	
۷۱		<b>واژه‌نامه فارسی به انگلیسی</b>	
۷۳		<b>واژه‌نامه انگلیسی به فارسی</b>	



# فهرست تصاویر

۴	..... نمودار تابع گاما	۱.۱
۶	..... تابع میتاگ- لفلر برای $\alpha = ۱, ۱/۵, ۲, ۵$	۲.۱
۲۳	..... ساختار یک نرون	۱.۲
۲۴	..... مدل ریاضی یک نرون	۲.۲
۲۵	..... مدل ریاضی و ساختار یک نرون	۳.۲
۲۶	..... ساختار یک نرون با لایه ورودی، لایه پنهان و لایه خروجی	۴.۲
۲۶	..... شبکه عصبی مثال (۱.۲.۲)	۵.۲
۲۸	..... ساختار شبکه عصبی مصنوعی (پرسپترون)	۶.۲
۲۸	..... پرسپترون چندلایه	۷.۲
۲۹	..... شبکه عصبی فیدفوروارد و شبکه عصبی بازگشتی	۸.۲
۳۰	..... تابع پله‌ای	۹.۲
۳۰	..... تابع پله‌ای دوقطبی	۱۰.۲
۳۱	..... تابع سیگموئید	۱۱.۲
۳۱	..... تابع سیگموئید قطبی	۱۲.۲
	شبیه‌سازی رابطه (۴.۳) با مشتق کاپوتو- فابریسیو با $\alpha = ۰/۶۶$ در بازه	۱.۳
۳۵	..... $[-۸, ۲۵]$	
۳۵	..... شبیه‌سازی رابطه (۴.۳) با مشتق کاپوتو با $\alpha = ۰/۶۶$ در بازه $[-۸, ۲۵]$	۲.۳
	شبیه‌سازی رابطه (۴.۳) با مشتق کاپوتو- فابریسیو با $\alpha = ۰/۱$ در بازه	۳.۳
۳۶	..... $[-۸, ۵۰]$	
۳۶	..... شبیه‌سازی رابطه (۴.۳) با مشتق کاپوتو با $\alpha = ۰/۱$ در بازه $[-۸, ۵۰]$	۴.۳
۳۷	..... چند جمله‌ای‌های لژاندر	۵.۳
۴۲	..... نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی با چندجمله‌ای تیلور و لژاندر	۶.۳
۴۳	..... نمودار خطای جواب تقریبی و جواب دقیق با پایه تیلور	۷.۳
۴۳	..... نمودار خطای جواب تقریبی و جواب دقیق با پایه لژاندر	۸.۳
۴۴	..... نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی با چندجمله‌ای تیلور و لژاندر	۹.۳

۴۵	.....	نمودار خطای جواب تقریبی و جواب دقیق با پایه تیلور	۱۰.۳
۴۵	.....	نمودار خطای جواب تقریبی و جواب دقیق با پایه لژاندر	۱۱.۳
۴۶	.....	نمودار جواب تقریبی مساله (۱۶.۳) به ازای $\alpha = 0/3, 0/5, 0/7$	۱۲.۳
۴۷	.....	نمودار جواب تقریبی مساله (۱۸.۳) به ازای $\alpha = 0/3, 0/5, 0/7$	۱۳.۳
۴۸	.....	نمودار جواب تقریبی مساله (۲۰.۳) به ازای $\alpha = 0/3, 0/5, 0/7$	۱۴.۳
۵۵	.....	نمودار جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$	۱.۴
۵۶	.....	نمودار جواب تقریبی مساله (۸.۴) به ازای $\alpha = 0/5, 0/7, 0/9$	۲.۴
۵۶	.....	نمودار مربوط به جواب دقیق و جواب تقریبی با $\alpha$ های مختلف	۳.۴
۵۷	...	نمودار مربوط به خطای جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$	۴.۴
۵۸	.....	نمودار جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$	۵.۴
۵۸	.....	نمودار مربوط به جواب تقریبی به ازای $\alpha = 0/5, 0/7, 0/9$	۶.۴
۵۹	.....	نمودار مربوط به جواب دقیق و جواب تقریبی با $\alpha$ های مختلف	۷.۴
۵۹	...	نمودار مربوط به خطای جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$	۸.۴
۶۰	.....	نمودار جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$	۹.۴
۶۰	.....	نمودار مربوط به جواب دقیق و جواب تقریبی با $\alpha$ های مختلف	۱۱.۴
۶۱	.....	نمودار جواب تقریبی مساله (۱۲.۴) به ازای $\alpha = 0/5, 0/7, 0/9$	۱۰.۴
۶۱	...	نمودار مربوط به خطای جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$	۱۲.۴
۶۲	.....	نمودار جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$	۱۳.۴
۶۲	.....	نمودار مساله (۱۳.۴) به ازای $\alpha = 0/5, 0/7, 0/9$	۱۴.۴
۶۳	.....	نمودار مربوط به جواب دقیق و جواب تقریبی با $\alpha$ های مختلف	۱۵.۴
۶۳	...	نمودار مربوط به خطای جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای $\alpha = 1$	۱۶.۴

# فهرست جداول

۳۲	.....	۱.۲ توابع فعال سازی
----	-------	---------------------



# فصل ۱

## مروری بر حسابان کسری

### ۱.۱ مقدمه

در این بخش به بیان تاریخچه‌ای از حسابان کسری می‌پردازیم. اگرچه از زمان تولد حسابان کسری حدود سیصد سال می‌گذرد امروزه اما و اگرها در مورد حسابان کسری به دلیل ناتوانی ما از درک این مفاهیم است. در آینده هنگامی که تولیداتی مبتنی بر این موضوع در صنعت رواج یابد، تصویر واضح تری از مفاهیم آن خواهیم داشت. در این فصل بعد از مرور تاریخچه‌ای از حسابان کسری به بیان تعاریف مختلف مشتق و انتگرال کسری می‌پردازیم. در فصل‌های بعد معرفی شبکه عصبی و کاربرد شبکه‌های عصبی با مشتق کسری برای حل معادلات دیفرانسیل کسری را ارائه می‌دهیم. مطالب ارائه شده در این فصل این ایده را به ما می‌دهد که قضایا و تعاریف ارائه شده در مورد حسابان کسری همانند حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه صحیح به یک اندازه دشوار است.

اولین بار لایبنیتس<sup>۱</sup> نماد  $\frac{d^n y}{dx^n}$  را برای مشتق مرتبه صحیح  $n$ ام معرفی کرده است. در رابطه با مشتق کسری، اولین اشارات را می‌توان در نامه لایبنیتس به هوییتال<sup>۲</sup> در سال ۱۶۹۵ پیدا کرد. در سال ۱۷۷۲ لاگرانژ<sup>۳</sup> قاعده زیر را برای عملگر دیفرانسیلی از مرتبه صحیح توسعه

---

<sup>۱</sup>Leibniz

<sup>۲</sup>L.Hopital

<sup>۳</sup>J.L.Lagrange

داد:

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}.$$

اویلر<sup>۴</sup> در سال ۱۷۸۳ روی تصاعد اعداد کار کرد و برای اولین بار تابع گاما را به عنوان تعمیم فاکتوریل معرفی کرد.

شاید اولین تعریف مشتق کسری به توابع خاص لاپلاس<sup>۵</sup> در سال ۱۸۱۲ برگردد. این توابع، به صورت انتگرالی  $\int T(x)t^{-x} dx$  بودند. بعد از آن در سال ۱۸۱۹ لاکرویسک<sup>۶</sup> برای اولین بار در قالب ۲ صفحه از کتاب ۷۰۰ صفحه‌ای خود، از مشتق مرتبه دلخواه از یک تابع چندجمله‌ای از درجه صحیح سخن به میان آورد. او فرض کرد که تابع به صورت  $y = x^m$  باشد که در آن  $m$  یک عدد صحیح است. لاکرویسک مشتق مرتبه  $n$ ام را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{d^m y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

که آن را بر حسب تابع گاما به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{d^m y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

در سال ۱۸۲۲ یکی دیگر از تعاریف کاربردی عملگر کسری توسط فوریه<sup>۷</sup> به صورت زیر ارائه شد:

$$\frac{d^i f(x)}{dx^i} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) p^i \cos(p(x-\alpha) + \frac{i\pi}{4}) dp d\alpha,$$

که  $i$  هم مثبت و هم منفی می‌تواند باشد. این اولین تعریف مناسب مشتق کسری برای هر تابع خوش تعریف بود. تا آن زمان کاربردی از مشتق و یا انتگرال کسری شناخته شده نبود، اما آبل با استفاده از این ابزار جدید به حل معادله انتگرالی به دست آمده از مسئله خم همزمانی پرداخت و گامی اساسی در جهت بیان کاربردهای حسابان کسری برداشت. این مسئله که اهمیت زیادی در فیزیک پیدا کرده بود شامل تعیین یک منحنی در صفحه  $(x, y)$  می‌باشد به طوریکه زمان لازم برای رسیدن ذره در حال لغزش به پایین ترین نقطه تحت جاذبه گرانشی زمین، مستقل از نقطه شروع  $(x_0, y_0)$  بر روی منحنی باشد. معادله انتگرالی بدست آمده در این مساله به معادله انتگرالی آبل شهرت یافت و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$K(x) = \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t) dt,$$

که در آن  $K$  مقداری ثابت است. آبل پس از آن، حالت کلی معادلات انتگرالی با هسته  $(x-t)^\alpha$  را مورد مطالعه قرار داد. این شاهکار بسیار بزرگ آبل در حسابان کسری منجر به آن شد که مشتق کسری از یک ثابت لزوماً صفر نشود.

<sup>۴</sup>L.Euler

<sup>۵</sup>P.S.Laplace

<sup>۶</sup>S.F.Lacroix

<sup>۷</sup>J.B.J.Fourier

بعد از آبل، در سال ۱۸۳۲ مطالعات وسیعی را لیوویل<sup>۸</sup> در حسابان کسری انجام داد. در سال ۱۸۴۷ ریمن<sup>۹</sup> تحقیقاتی را روی تعمیم سری تیلور انجام داد. او تعریف انتگرال کسری از مرتبه  $\alpha$  از تابع مفروض  $f(x)$  را به صورت زیر پیشنهاد کرد:

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \psi(x). \quad (1.1)$$

وجود تابع  $\psi(x)$  به علت ابهام در حد پایین انتگرال است. امروزه رابطه (۱.۱) بدون تابع  $\psi(x)$  رایج‌ترین تعریف از انتگرال گیری کسری است، که انتگرال کسری ریمن-لیوویل نام گرفته است. در اوایل قرن بیستم مارچاد<sup>۱۰</sup>، واتانابه<sup>۱۱</sup> و ریس<sup>۱۲</sup> تلاشهایی را در زمینه تعریف و تعمیم حسابان کسری انجام دادند. با گذشت زمان و پیدایش کاربردهای مختلفی از حسابان کسری تعاریف متعددی از مشتق و انتگرال کسری که متناسب با مدل‌های فیزیکی بودند بیان شد. تا نیمه قرن بیستم حسابان کسری تا حدی رشد پیدا کرد که اولین کنفرانس در سال ۱۹۷۴ فقط مربوط به نظریات و کاربردهای حسابان کسری برگزار شد.

## ۲.۱ توابع پرکاربرد در حسابان کسری

در این بخش به معرفی توابع خاص از جمله تابع گاما، بتا و تابع میتاگ-لفلر<sup>۱۳</sup> که نقش بسیار مهمی را در حسابان کسری دارند، می‌پردازیم [۴۵].

### تابع گاما

تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

که برخی از خواص آن عبارتند از

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\} \quad (1)$$

زیرا با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-t} t^z]_{t=0} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

<sup>۸</sup>Liouville

<sup>۹</sup>Riemann

<sup>۱۰</sup>Marchaud

<sup>۱۱</sup>Watanabe

<sup>۱۲</sup>Riesz

<sup>۱۳</sup>Mittag-Leffler

به وضوح  $\Gamma(1) = 1$  و برای  $n = 1, 2, 3, \dots$  خواهیم داشت

$$\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2 \times 1! = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 3 \times \Gamma(3) = 3 \times 2! = 3!.$$

⋮

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

به روشنی نتیجه می‌گیریم که  $\Gamma(n+1) = n!$  از این جاست که می‌توان تابع گاما را تعمیم مفهوم فاکتوریل در نظر گرفت.

(۲) با استفاده از خاصیت اول به راحتی می‌توان نشان داد

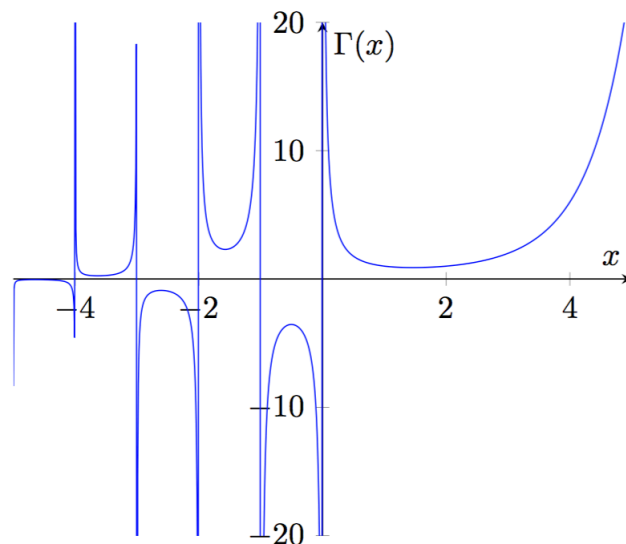
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\cdots(z+m-1)},$$

$$-m < \operatorname{Re}(z) < -m+1, \quad m \in \mathbb{Z}^+, \quad z \neq \{0, -1, -2, \dots\}.$$

(۳) تعریف حدی تابع گاما به صورت زیر می‌باشد:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

در شکل ۱.۱ می‌توانید نمودار تابع گاما را مشاهده نمایید.



شکل ۱.۱: نمودار تابع گاما



## تابع بتا

در بعضی موارد بهتر است از تابع بتا به جای ترکیب مشخصی از توابع گاما استفاده کرد. تابع بتا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0).$$

لم ۱.۲.۱. [۴۵] رابطه بین تابع بتا و تابع گاما به صورت زیر می باشد:

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

برهان. برای بدست آوردن رابطه بین تابع بتا و گاما از تبدیل لاپلاس استفاده می کنیم که به صورت زیر تعریف می شود:

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (t-\tau)^{w-1} d\tau.$$

واضح است که  $h_{z,w}(t)$  یک کانولوشن از توابع  $t^{z-1}$  و  $t^{w-1}$  می باشد و  $h_{z,w}(1) = \beta(z, w)$ . با توجه به اینکه لاپلاس کانولوشن دو تابع برابر حاصل ضرب تبدیل لاپلاس آن دو تابع است، داریم

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}},$$

که در آن  $H_{z,w}(s)$  تبدیل لاپلاس تابع  $h_{z,w}(t)$  است. به عبارت دیگر چون  $\Gamma(z)\Gamma(w)$  یک ثابت است می توان  $h_{z,w}(t)$  را با گرفتن معکوس تبدیل لاپلاس از طریق رابطه فوق دوباره بدست آورد، بنابراین خواهیم داشت

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1}$$

و با قرار دادن  $t = 1$  داریم

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

□

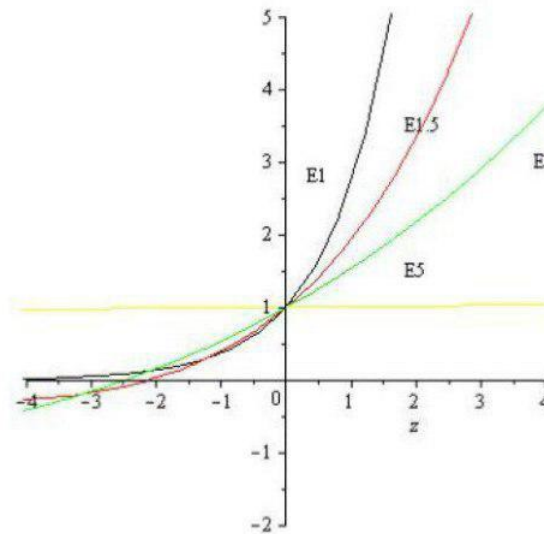
## تابع میتاگ- لفلر

می دانیم تابع نمایی  $e^z$  در نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی نقش مهمی ایفا می کند. تعمیم یک پارامتری آن به صورت زیر نمایش داده می شود [۴۱]:

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(1+k\alpha)}, \quad \alpha \geq 0.$$

این تابع توسط جی. ام میتاگ- لفلر تعریف و مورد مطالعه قرار گرفت و تابع میتاگ- لفلر [۴۲] نامیده می شود.

در شکل ۲.۱ تابع میتاگ- لفلر برای  $\alpha = 1, 1/5, 2, 5$  نمایش داده شده است.



شکل ۲.۱: تابع میتاگ- لفلر برای  $\alpha = 1, 1/5, 2, 5$

تابع دو پارامتری از نوع میتاگ- لفلر که در حساب کسری اهمیت ویژه‌ای دارد را اولین بار آگراوال<sup>۱۴</sup> [۳] به صورت زیر معرفی کرد:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

با نمادهای تعریف فوق چنانچه فرض کنیم  $\alpha = 1$  و  $\beta = 1$  خواهیم داشت

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

به همین ترتیب می‌توان روابط زیر را به دست آورد:

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z}),$$

$$E_{2,2}(z) = \frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}.$$

همچنین اشاره می‌کنیم که اگر در تابع دو پارامتری میتاگ- لفلر  $\beta = 1$  باشد، تابع یک پارامتری میتاگ- لفلر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \cong E_{\alpha}(z).$$

فرمول‌های دیگری از تابع میناگ- لفلر وابسته به مجموع‌یابی و انتگرال‌گیری از تابع میناگ- لفلر معمولی (دارای یک پارامتر  $\alpha$ ) را به صورت زیر ارائه می‌کنیم:

$$E_{\alpha}(z) = \frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-1} E_{\frac{\alpha}{p}} \left( z^{\frac{1}{p}} e^{iz\pi \frac{h}{p}} \right), \quad p \in N,$$

$$E_{\alpha}(z) = \frac{1}{\sqrt[p]{\alpha}} \left[ E_{\frac{\alpha}{p}}(+z^{\frac{1}{p}}) + E_{\frac{\alpha}{p}}(-z^{\frac{1}{p}}) \right].$$

و همچنین

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\frac{\alpha}{p})}} E_{\alpha}(x^{\alpha}) dx = \sqrt{\pi t}, \quad t E_{\frac{\alpha}{p}}(t^{\frac{\alpha}{p}}) > 0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-u} E_{\alpha}(u^{\alpha} z) du = \frac{1}{1-z}, \quad \alpha > 0.$$

تابع چند متغیره میناگ- لفلر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \beta(z_1, \dots, z_{n+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_{n+1} = k \\ l_j \geq 0}} (k; l_1 + \dots + l_{n+1}) \left[ \frac{\prod_{j=1}^{n+1} z_j^{l_j}}{\Gamma\left(\beta + \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j l_j\right)} \right].$$

**تعریف ۱.۲.۱. (قاعده لایب‌نیتز).** قاعده لایب نیتز برای دو تابع  $g(t)$  و  $f(t)$ ، برای محاسبه مشتق  $n$ ام حاصل ضرب این دو تابع به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d^n}{dt^n} (g(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(t) f^{(n-k)}(t).$$

**تعریف ۲.۲.۱. (قانون لایب نیتز برای مشتق‌گیری از انتگرال).** اگر بخواهیم از انتگرال

نسبت به  $x$  مشتق بگیریم با توجه به قانون لایب نیتز داریم

$$\frac{d}{dx} \int_{f(x)}^{h(x)} G(x, t) dt = G(x, h(x)) \frac{dh(x)}{dx} - G(x, f(x)) \frac{df(x)}{dx} + \int_{f(x)}^{h(x)} \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} dt,$$

که در آن  $G(x, t)$  و  $\frac{\partial G(x, t)}{\partial x}$  توابعی پیوسته در دامنه  $D$  می‌باشند به طوری که  $D$  شامل مستطیل  $R$ ، به صورت  $R = ((x, t) | a \leq x \leq b, t_0 \leq t \leq t_1)$  و می‌باشد. از طرفی  $f(t)$  و  $g(t)$  توابعی هستند که دارای مشتق پیوسته می‌باشند.

**تعریف ۳.۲.۱. (فرمول کوشی برای انتگرال  $n$  گانه).** فرمول کوشی انتگرال  $n$  گانه به فرم

زیر است:

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

## ۳.۱ انواع مشتق و انتگرال کسری

با گذشت زمان و پیدایش کاربردهای فراوان حسابان کسری تعاریف مختلفی از مشتق و انتگرال کسری ارائه شد. برای مثال می توان به تعریف مشتق و انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف<sup>۱۵</sup>، مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل<sup>۱۶</sup>، مشتق کاپوتو<sup>۱۷</sup>، مشتق کاپوتو-فابریسیو<sup>۱۸</sup> و مشتق ژومقی<sup>۱۹</sup> اشاره کرد. در ادامه به بیان تعاریف و ویژگی های هر یک می پردازیم [۴۵].

### ۱.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف

همانطور که در ابتدای این فصل اشاره کردیم، تعاریف و قضایای ارائه شده برای مشتقات کسری سخت تر از تعاریف مشتقات مرتبه صحیح نیست. فرض کنیم  $f$  تابعی پیوسته باشد در این صورت مشتق مرتبه اول تابع  $f$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

با بکارگیری تعریف بالا مشتق مرتبه دوم به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned}$$

اگر این روند را همین طور ادامه دهیم، خواهیم داشت

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh), \quad n \in \mathbb{N}.$$

بنابراین می توان مشتق کسری مرتبه  $\alpha$  ام را به صورت زیر تعمیم داد:

$${}_a^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh), \quad \alpha > 0, \quad (2.1)$$

که  $[\alpha] = n$ ,  $nh = t - a$ ,  $a \leq t \leq b$ . علامت  $[\alpha]$  کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی  $\alpha$  با تعریف می شود. به طور کلی برای تقریب مشتق کسری (۲.۱) در روشهای عددی، از این تعریف با مجموع متناهی استفاده می شود.

<sup>۱۵</sup>Grunwald-Letnikov

<sup>۱۶</sup>Riemann-Liouville

<sup>۱۷</sup>Caputo

<sup>۱۸</sup>Caputo-Fabrizio

<sup>۱۹</sup>Jumari

می‌توان با جابجایی  $-\alpha$  و  $\alpha$  در فرمول (۲.۱)، انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف از مرتبه  $\alpha$  را تعریف کرد. یعنی با فرض  $nh = t - a$  داریم

$$\begin{aligned} {}_a^G I_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-\alpha}{k} f(t - kh), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(k + 1)} f(t - kh), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

### ۲.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل

فرض می‌کنیم  $f(\tau)$  پیوسته و در هر بازه متناهی  $(a, t)$  انتگرال پذیر باشد. آنگاه طبق فرمول کوشی داریم

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$f^{(-n)}$  یا  $D^{-n}$ ،  $n$  بار انتگرال گیری را نشان می‌دهد. با الهام گرفتن از فرمول کوشی تعریف انتگرال ریمن-لیوویل با جانشینی عدد حقیقی  $\alpha > 0$  به جای عدد صحیح  $n$  به صورت زیر بیان می‌شود [۳۸]:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

زیر نویس های  $a$  و  $t$  دو حد مربوط به عملگر انتگرال گیری کسری در  ${}_a I_t^\alpha f(t)$  را نمایش می‌دهند. در بعضی از کتابها به جای انتگرال کسری  $I^\alpha$  از نماد  ${}^R D^{-\alpha}$  استفاده می‌کنند. با استفاده از انتگرال کسری، مشتق کسری ریمن-لیوویل به صورت زیر تعریف می‌شود که امروزه از آن در حل مسائل کاربردی زیاد استفاده می‌شود

$${}^R D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^n \left\{ {}^R D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \right\} = {}^R D_t^n \left\{ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\} \quad (۳.۱)$$

که در آن  $0 \leq n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$

از این به بعد هر جا اشاره به تعریف مشتق ریمن-لیوویل کردیم، منظورمان رابطه فوق می‌باشد. لذا رابطه (۳.۱) را به صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

$${}^R D^\alpha f(t) = {}^R D^n I^{n-\alpha} f(t).$$

حال برخی از ویژگی‌های مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل را بیان می‌کنیم.

**نکته ۱.۳.۱.** همانند مشتق گیری مرتبه صحیح، عملگر مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل خطی می‌باشد.

$${}^R D^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 {}^R D^\alpha f_1 + c_2 {}^R D^\alpha f_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$I^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 I^\alpha f_1 + c_2 I^\alpha f_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

نکته ۲.۳.۱. مشابه مشتقات مرتبه صحیح برای مشتق ریمن-لیوویل داریم

$${}_a^R D_t^n ({}_a^R D_t^\alpha f(t)) = {}_a^R D_t^{n+\alpha} f(t), \quad n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (۴.۱)$$

نکته ۳.۳.۱. اگر  $f(t)$  به ازای  $t \geq a$  پیوسته باشد، آنگاه  ${}_a^R D_t^\circ f(t) = f(t)$ . به عبارت دیگر اگر  $\alpha = k \in \mathbb{N}$ ، آنگاه با استفاده از مشتق ریمن-لیوویل خواهیم داشت

$${}_a^R D_t^\alpha f(t) = \frac{d^k}{dt^k} ({}_a^R D_t^\circ f(t)) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t).$$

یعنی مشتق کسری ریمن-لیوویل از مرتبه  $k$  ام با مشتقات کلاسیک مرتبه  $k$  برابر می باشد.

لم ۱.۳.۱. [۴۵] انتگرال ریمن-لیوویل از مرتبه دلخواه وقتی که  $\alpha, \beta > 0$  می باشند برابر است با

$${}_a I_t^\beta ({}_a I_t^\alpha f(t)) = {}_a I_t^{\beta+\alpha} f(t). \quad (۵.۱)$$

برهان. با استفاده از تعریف انتگرال ریمن-لیوویل داریم

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\beta ({}_a I_t^\alpha f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} {}_a I_\tau^\alpha f(\tau) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^t \int_a^\tau (t-\tau)^{\beta-1} (\tau-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^t \int_\xi^t f(\xi) (t-\tau)^{\beta-1} (\tau-\xi)^{\alpha-1} d\tau d\xi, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^t (t-\xi)^{\beta+\alpha-1} f(\xi) d\xi = {}_a I_t^{\beta+\alpha} f(t). \end{aligned}$$

حال برای محاسبه انتگرال از  $\xi$  تا  $t$  از تغییر متغیر  $\tau = \xi + z(t-\xi)$  و تعریف تابع بتا استفاده می کنیم، لذا داریم

$${}_a I_t^\beta ({}_a I_t^\alpha f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^t (t-\xi)^{\beta+\alpha-1} f(\xi) d\xi = {}_a I_t^{\beta+\alpha} f(t).$$

□

یکی از مهمترین خواص این مشتق در لم زیر آمده است.

لم ۲.۳.۱. برای مشتق ریمن-لیوویل اگر  $\alpha > 0$  و  $t > a$  باشد، آنگاه

$${}_a^R D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f(t)) = f(t).$$

یعنی عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل معکوس چپ برای عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل از همان مرتبه می باشد [۴۵].

برهان. ابتدا حالت صحیح  $\alpha = n \geq 1$  را در نظر می‌گیریم

$${}^R D_t^n ({}_a I_t^n f(t)) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \int_a^t dt \int_a^t dt \cdots \int_a^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t),$$

حال فرض کنید  $k-1 \leq \alpha < k$ ، از (۵.۱) داریم

$${}_a I_t^k f(t) = {}_a I_t^{k-\alpha} ({}_a I_t^\alpha f(t)).$$

بنابراین از (۳.۱) خواهیم داشت

$${}^R D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f(t)) = \frac{d^k}{dt^k} \left\{ {}_a I_t^{k-\alpha} ({}_a I_t^\alpha f(t)) \right\} = \frac{d^k}{dt^k} \left\{ {}_a I_t^k f(t) \right\} = f(t).$$

□

لم ۳.۳.۱. [۴۵] اگر اعداد حقیقی نامنفی باشند، آنگاه

$${}^R D_t^\alpha ({}_a I_t^\beta f(t)) = \begin{cases} {}^R D_t^{\alpha-\beta} f(t), & \alpha \geq \beta \geq 0 \\ {}_a I_t^{\beta-\alpha} f(t), & \beta \geq \alpha \geq 0 \end{cases} \quad (۶.۱)$$

لم ۴.۳.۱. عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل نیست. یعنی

$${}_a I_t^\alpha ({}^R D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}^R D_t^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)},$$

که در آن  $0 \leq k-1 \leq \alpha < k$ . [۴۵]

برهان. ابتدا از رابطه (۶.۱) داریم  ${}_a I_t^\alpha = \frac{d}{dt} I^{\alpha+1}$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha ({}^R D_t^\alpha f(t)) &= \frac{d}{dt} \left\{ I^{\alpha+1} ({}^R D_t^\alpha f(t)) \right\}, \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^\alpha {}^R D_\tau^\alpha f(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

حال عبارت داخل آکولاد را با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء و خاصیت (۵.۱) به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^\alpha {}^R D_\tau^\alpha f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^\alpha \frac{d^k}{d\tau^k} \left\{ {}_a I_\tau^{k-\alpha} f(\tau) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-k} {}_a I_\tau^{k-\alpha} f(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^k \left[ \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} ({}_a I_t^{k-\alpha} f(t)) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-k} {}_a I_\tau^{k-\alpha} f(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^k \left[ {}^R D_t^{\alpha-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \\ &= {}_a I_t^{\alpha-k+1} ({}_a I_t^{k-\alpha} f(t)) - \sum_{j=1}^k \left[ {}^R D_t^{\alpha-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \\ &= {}_a I_t^\alpha f(t) - \sum_{j=1}^k \left[ {}^R D_t^{\alpha-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \end{aligned}$$

□ حال با یک بار مشتق گیری از عبارت فوق، حکم اثبات می شود.

نکته ۴.۳.۱. انتگرال کسری ریمن-لیوویل تابع  $f(t) = t^k$  برای  $k > -1$  برابر است با

$$I_t^\alpha t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} t^{k+\alpha}.$$

### ۳.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری کاپوتو

تعریف مشتق کسری ریمن-لیوویل نقش بسیار مهمی را در توسعه نظریه مشتق و انتگرال کسری دارد. اما این روش در حل معادلات دیفرانسیل کسری، شرایط اولیه را فقط به صورت  $[{}_a^R D_t^{\alpha-k} y(t)]_{t \rightarrow a} = b_k$  که  $(k = 1, 2, \dots, n)$  و  $n-1 \leq \alpha < n$  می باشد اعمال می کند. از آن جایی که در بسیاری از مسائل مدل سازی های ریاضی به شرایط اولیه نیاز است، پس باید تعاریفی از مشتق های کسری را بکار ببریم که امکان استفاده از شرایط اولیه را فراهم کنند. برخلاف مشتق کسری ریمن-لیوویل شرایط اولیه برای مشتق کسری کاپوتو به صورت مقادیر اولیه مشتق مرتبه صحیح می باشد. لذا برای بیان شرایط اولیه به صورت  $y^{(k)}(\circ) = b_k$ ،  $(k = \circ, 1, \dots, n-1)$  از مشتق کسری کاپوتو استفاده می کنیم.

فرض کنید  $f(t)$  روی بازه  $[a, b]$  در  $\mathbb{R}$  تعریف شده است. مشتق کسری چپ و راست کاپوتو تابع  $f(t)$  از مرتبه  $\alpha > \circ$ ، به ترتیب با نماد  ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$  و  ${}_t^C D_b^\alpha f(t)$  نشان داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

و  $n-1 < \alpha \leq n$ ،  $n \in \mathbb{N}$  که در آن  $n = [\alpha] + 1$  و  $[\alpha]$  جزء صحیح عدد  $\alpha$  می باشد. استفاده از تعریف کاپوتو به علت سودمندی آن در فرمول بندی و حل مسائل کاربردی می باشد.

حال تعدادی از ویژگی های مشتق کسری کاپوتو را بیان می کنیم. برخلاف مشتق کسری ریمن-لیوویل مشتقات کسری کاپوتو از عدد ثابت، صفر است به طوری که:

$${}_a^C D_t^\alpha c = \circ, \quad {}^\circ R D_t^\alpha c = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad c \text{ ثابتی دلخواه}$$

همچنین باید توجه داشته باشیم که مشتق کسری کاپوتو از یک تابع زمانی، زمانی قابل محاسبه است که مشتقات صحیح آن موجود باشند. یعنی برای محاسبه مشتق کسری کاپوتو به ازای  $0 < \alpha < 1$  باید مشتق مرتبه اول تابع  $f$  وجود داشته باشد. مشتقات کسری کاپوتو غیرموضعی محسوب می شوند بنابراین وقتی بخواهیم مقدار  $y(x_2)$  را



محاسبه کنیم، بایستی کل تاریخچه  $y$  از نقطه شروع تا نقطه مورد نظر یعنی  $x_2$  را محاسبه کنیم. در صورتی که مشتقات مرتبه صحیح موضعی محسوب می شوند بطوریکه اگر مقدار  $y(x_1)$  در مساله مقدار اولیه را بدانیم می توانیم مقدار  $y(x_2)$  را در نقطه  $x_2 > x_1$  بدست آوریم. در اینجا نیاز به استفاده از مقادیر  $y(x)$  برای  $x \in [0, x_1]$  نداریم. این نتیجه گیری اساس روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می باشد.

**نکته ۵.۳.۱.** عملگر مشتق کسری کاپوتو خطی می باشد، یعنی

$${}^C D^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 {}^C D^\alpha f_1 + c_2 {}^C D^\alpha f_2.$$

**نکته ۶.۳.۱.** اگر  $n = [\alpha]$  و  $\alpha > 0$ ، آنگاه

$${}^C D^\alpha t^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

رابطه بین مشتق کسری کاپوتو و مشتق کسری ریمن - لیوویل در لم زیر آمده است.

**لم ۵.۳.۱ [۷].** اگر  $\alpha > 0$  و  $n = [\alpha]$ ، آنگاه

$${}^C D^\alpha_x f(x) = {}^R D^\alpha_x f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^R D^k f(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha}.$$

نتیجه: با شرایط فوق اگر  ${}^R D^k f(a) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$ ، آنگاه  ${}^R D^\alpha f = {}^C D^\alpha f$ .

**لم ۶.۳.۱ [۷].** اگر  $f$  پیوسته و  ${}_a I^\alpha$  عملگر انتگرال کسری ریمن - لیوویل و  $\alpha > 0$ ، آنگاه

$${}^C D^\alpha {}_a I^\alpha f = f.$$

یعنی عملگر مشتق کسری کاپوتو معکوس چپ برای عملگر انتگرال ریمن - لیوویل از همان مرتبه می باشد. اما اگر  $f \in C^n[0, 1]$ ، آنگاه

$${}_0 I_t^\alpha {}^C D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} t^j (D_t^j f)(0), \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

### ۴.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری کاپوتو- فابریسیو

تعریفی که کاپوتو از مشتق کسری ارائه داد به صورت زیر است:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \quad (7.1)$$

به طوری که  $\alpha \in [0, 1]$  و  $a \in (-\infty, t)$  و  $f \in H^1(a, b)$  و هم چنین  $b > a$ . این تعریف دارای یک نقطه تکین در  $t = \tau$  است. برای رفع این مشکل، کاپوتو و فابریسیو تعریف جدیدی ارائه دادند.

با جایگزین کردن هسته‌ی  $(t-\tau)^{-\alpha}$  با تابع  $\exp(\frac{-\alpha(t-\tau)}{1-\alpha})$  و  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  با  $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$  به تعریف جدیدی از مشتق کاپوتو می‌رسیم که به مشتق کاپوتو-فابریسیو یا مشتق اصلاح شده‌ی کاپوتو معروف است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp[\frac{-\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}] d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (8.1)$$

که  $M(\alpha)$  یک ثابت نرمال شده بر حسب  $\alpha$  است به طوری که  $M(0) = M(1) = 1$  [۶]. طبق تعریف جدید واضح است که اگر  $f$  تابعی ثابت باشد آن گاه مشابه تعریف مشتق کاپوتو،  ${}_a^{CF}D_t^\alpha f(t) = 0$ . تفاوت اصلی بین مشتق کاپوتو-فابریسیو و مشتق کاپوتو این است که مشتق جدید در نقطه  $t = \tau$  دارای نقطه تکین نیست. مشتق کاپوتو-فابریسیو می‌تواند روی توابعی اعمال شود که به فضای  $H^1(a, b)$  متعلق نیستند. در واقع رابطه (۸.۱) می‌تواند برای هر  $f \in L^1(-\infty, b)$  و هر  $\alpha \in [0, 1]$  فرموله شده باشد به طوری که

$${}_a^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{\alpha M(\alpha)}{1-\alpha} \int_{-\infty}^t [f(t) - f(\tau)] \exp[\frac{-\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}] d\tau.$$

حال اگر قراردادیم  $\alpha = \frac{1}{1+\sigma}$  و  $\sigma = \frac{1-\alpha}{\alpha} \in [0, \infty)$  به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$D_t^{(\sigma)} = \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\tau) \exp[-\frac{(t-\tau)}{\sigma}] d\tau,$$

که  $N(\sigma)$  معادله نرمال شده مربوط به  $M(\alpha)$  است بطوریکه  $N(0) = N(\infty) = 1$  زیرا

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \exp[-\frac{(t-\tau)}{\sigma}] = \delta(t-\tau)$$

و برای هر  $\alpha \rightarrow 1$  داریم:  $\sigma \rightarrow 0$  آن گاه (مراجع [۲۲] و [۱۷] را ملاحظه کنید).

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} D_t^{(\alpha)} f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}] d\tau \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\tau) \exp[-\frac{(t-\tau)}{\sigma}] d\tau = f'(t). \end{aligned}$$

در غیر این صورت زمانی که  $\alpha \rightarrow 0$  خواهیم داشت  $\sigma \rightarrow +\infty$  در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} D_t^{(\alpha)} f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}] d\tau \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(\tau) \exp[-\frac{(t-\tau)}{\sigma}] d\tau = f(t) - f(a). \end{aligned}$$

**تعریف ۱.۳.۱.** اگر  $\alpha \in [0, 1]$ ،  $n \geq 1$  مشتق کاپوتو-فابریسیو برای مرتبه  $(n + \alpha)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a^{CF}D_t^{(\alpha+n)} f(t) := {}_a^{CF}D_t^{(\alpha)} ({}_a^{CF}D_t^{(n)} f(t)). \quad (9.1)$$

قضیه ۱.۳.۱. اگر برای هر مشتق کاپوتو- فابریسیو تابع  $f(t)$  به صورت زیر باشد:

$$f^{(s)}(a) = \circ, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

آن گاه خواهیم داشت

$${}_a^{CF} D_t^{(n)} (D_t^{(\alpha)} f(t)) = {}_a^{CF} D_t^{(\alpha)} ({}_a^{CF} D_t^{(n)} f(t)).$$

برهان. با استفاده از روش استقرا ابتدا  $n = 1$  را در نظر می گیریم. از رابطه (۹.۱)  $D_t^{(\alpha+1)}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_t^{(\alpha)} (D_t^{(1)} f(t)) = \frac{M(\alpha)}{\Gamma - \alpha} \int_a^t f'' \exp \left( -\frac{\alpha(t-\tau)}{\Gamma - \alpha} \right) d\tau,$$

پس از انتگرال گیری و با فرض  $f'(a) = \circ$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D_t^{(\alpha)} (D_t^{(1)} f(t)) &= \frac{M(\alpha)}{\Gamma - \alpha} \int_a^t \left( \frac{d}{d\tau} f'(\tau) \right) \exp \left( -\frac{\alpha(t-\tau)}{\Gamma - \alpha} \right) d\tau \\ &= \frac{M(\alpha)}{\Gamma - \alpha} \left[ \int_a^t \left( \frac{d}{d\tau} f'(\tau) \right) \exp \left( -\frac{\alpha(t-\tau)}{\Gamma - \alpha} \right) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{\Gamma - \alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp \left( -\frac{\alpha(t-\tau)}{\Gamma - \alpha} \right) d\tau \right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{\Gamma - \alpha} \left[ f'(t) - \frac{\alpha}{\Gamma - \alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp \left( -\frac{\alpha(t-\tau)}{\Gamma - \alpha} \right) d\tau \right]. \end{aligned}$$

از طرفی،

$$\begin{aligned} D_t^{(1)} (D_t^{(\alpha)} f(t)) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{M(\alpha)}{\Gamma - \alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp \left( -\frac{\alpha(t-\tau)}{\Gamma - \alpha} \right) d\tau \right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{\Gamma - \alpha} \left[ f'(t) - \frac{\alpha}{\Gamma - \alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp \left( -\frac{\alpha(t-\tau)}{\Gamma - \alpha} \right) d\tau \right]. \end{aligned}$$

□

اثبات برای  $n > 1$  نیز به آسانی حاصل می شود.

نتیجه ۱.۳.۱. مشتق کسری کاپوتو- فابریسیو جابجایی پذیر است، یعنی

$${}_a^{CF} D_t^{(n)} ({}_a^{CF} D_t^{(\alpha)} f(t)) = {}_a^{CF} D_t^{(\alpha)} ({}_a^{CF} D_t^{(n)} f(t)) = {}_a^{CF} D_t^{(\alpha+n)} f(t), \quad n-1 < \alpha \leq n$$

اگر و فقط اگر

$$f^{(s)}(a) = \circ, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

**تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو- فابریسیو**

تعریف ۲.۳.۱. تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو- فابریسیو با متغیر  $p$  و  $a = \circ$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$LT[D_t^{(\alpha)} f(t)] = \frac{1}{(\lambda - \alpha)} \int_0^\infty \exp(-pt) \int_0^t f'(\tau) \exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{\lambda - \alpha}\right) d\tau dt$$

در نتیجه طبق ویژگی کانولوشن لاپلاس داریم

$$LT[D_t^{(\alpha)} f(t)] = \frac{1}{(\lambda - \alpha)} LT[f'(t)] LT\left[\exp\left(-\frac{\alpha t}{\lambda - \alpha}\right)\right] = \frac{pLT(f(t) - f(0))}{p + \alpha(\lambda - p)}$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} LT[D_t^{(\alpha+1)} f(t)] &= \frac{1}{(\lambda - \alpha)} LT[f''(t)] LT\left[\exp\left(-\frac{\alpha t}{\lambda - \alpha}\right)\right] \\ &= \frac{p^2 LT[f(t)] - pf(0) - f'(0)}{p + \alpha(\lambda - p)} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} LT[D_t^{(\alpha+n)} f(t)] &= \frac{1}{(\lambda - \alpha)} LT[f^{(n+1)}(t)] LT\left[\exp\left(-\frac{\alpha t}{\lambda - \alpha}\right)\right] \\ &= \frac{p^{n+1} LT[f(t)] - p^n f(0) - p^{n-1} f'(0) - \dots - f^{(n)}(0)}{p + \alpha(\lambda - p)}. \end{aligned}$$

### ۵.۳.۱ مشتق و انتگرال کسری ژومقی

همانطور که در قسمت‌های قبل بیان شد، مشتق کسری ریمن-لیوویل از عدد ثابت صفر نیست. همچنین بایستی توجه داشته باشیم که مشتق کسری کاپوتو از یک تابع زمانی، زمانی قابل محاسبه است که مشتقات صحیح آن موجود باشند. برای این منظور ژومقی تعریف جدیدی از مشتق کسری ارائه داد که مشتق کسری از عدد ثابت صفر شود و لزومی به وجود مشتقات مرتبه صحیح برای مشتق کسری نباشد. انتگرال ژومقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a^J I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (f(\tau) - f(a)) d\tau, \quad \alpha > 0.$$

به ازای  $0 < \alpha < 1$  مشتق کسری ژومقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a^J D_t^\alpha f(t) = D_a^J I_t^{\alpha-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (f(\tau) - f(a)) d\tau.$$

برای  $n-1 \leq \alpha < n$  و  $n \geq 1$  مشتق کسری ژومقی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$${}_a^J D_t^\alpha f(t) = D_a^{nJ} I_t^{\alpha-n} f(t).$$

با توجه به تعریف بالا، مشتق کسری ژومقی از عدد ثابت، صفر است و برای محاسبه مشتق کسری ژومقی به ازای  $0 < \alpha < 1$  لزومی به وجود مشتق مرتبه اول تابع  $f$  نیست. از آنجا که هدف ما پیدا کردن جواب تحلیلی با استفاده از مشتق کسری کاپوتو و کاپوتو-فابریسیو و بکارگیری شبکه عصبی می‌باشد، بنابراین به همین تعاریف بسنده می‌کنیم. خواننده علاقه‌مند می‌تواند عملگرهای مشتق کسری دیگر را در کتاب‌های حسابان کسری از جمله [۸، ۳۱، ۳۸، ۴۵] مطالعه نماید.

## ۴.۱ مثال‌های عددی

مثال ۱.۴.۱. در این قسمت انواع مشتقات کسری از توابعی که در کاربردها زیاد استفاده می‌شود، را ارائه می‌دهیم. توجه شود  $\alpha > 0$  و  $n = [\alpha]$  فرض گرفته می‌شود [۴۵، ۸].

$${}_a^G D_t^\alpha (t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-\alpha+\nu+1)} (t-a)^{\nu-\alpha}, \quad \nu > n.$$

$${}_0^R D_t^\alpha e^{\lambda t} = t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t).$$

$${}_0^R D_t^\alpha \cosh(\sqrt{\lambda}t) = t^{-\alpha} E_{\sqrt{\lambda}, 1-\alpha}(\lambda t^{\sqrt{\lambda}}).$$

$${}_0^R D_t^\alpha \frac{\sinh(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}t} = t^{1-\alpha} E_{\sqrt{\lambda}, 2-\alpha}(\lambda t^{\sqrt{\lambda}}).$$

$${}_0^C D_t^\alpha x^k = \begin{cases} 0, & k < n, \quad k \in \{0, 1, \dots\} \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}, & k \geq n, \quad k \in \{0, 1, \dots\} \\ \text{or} \quad k > n-1, \quad k \notin \{0, 1, \dots\}. \end{cases}$$

$${}_0^C D_t^\alpha e^{\lambda t} = \lambda^n t^{n-\alpha} E_{\lambda, n-\alpha+1}(\lambda t).$$

$${}_0^C D_t^\alpha \sin(t) = t^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\sqrt{k}}}{\Gamma(\sqrt{k} + \sqrt{k} - \alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

$${}_0^I_t^\alpha e^{\lambda t} = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(\alpha + k + 1)}.$$

$${}_0^I_t^\alpha \cos(\lambda t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda t)^{\sqrt{k}}}{\Gamma(\alpha + \sqrt{k} + 1)}.$$

$${}_0^I_t^\alpha \sin(\lambda t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda t)^{\sqrt{k+1}}}{\Gamma(\alpha + \sqrt{k} + \sqrt{k+1})}.$$

مثال ۲.۴.۱. مشتق کسری کاپوتو و ریمن-لیوویل تابع  $f(t) = t$  را به ازای  $\alpha = 1/5$  بدست می‌آوریم:

$${}_0^C D_t^{1/5} t = \frac{1}{\Gamma(1/5)} \int_0^t (t-\tau)^{-1/5} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1/5)} [-\sqrt[5]{(t-\tau)^{-4/5}}]_0^t = \frac{\sqrt[5]{2}}{\Gamma(1/5)} t^{1/5}.$$

$$\begin{aligned} {}_0^R D_t^{1/5} t &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1/5)} \int_0^t \tau (t-\tau)^{-1/5} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1/5)} \frac{d}{dt} \left( [-\sqrt[5]{(t-\tau)^{-4/5}}]_0^t + \sqrt[5]{2} \int_0^t (t-\tau)^{1/5} d\tau \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/5)} \frac{d}{dt} \left( \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}} t^{1/5} \right) = \frac{\sqrt[5]{2}}{\Gamma(1/5)} t^{1/5}. \end{aligned}$$

مثال ۳.۴.۱. فرض کنید  $f(t) = (t-a)^\nu$  که  $\nu > -1$ . مشتق ریمن-لیوویل از مرتبه  $\alpha > 0$  را محاسبه می‌کنیم.

ابتدا نشان می دهیم که

$${}_a I_t^\alpha (t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)} (t-a)^{\nu+\alpha}, \quad (\alpha > 0, \nu > -1)$$

برای این منظور داریم

$${}_a I_t^\alpha (t-a)^\nu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\nu d\tau,$$

با توجه به تعریف تابع بتا و اینکه  $\nu > -1$ ، انتگرال فوق همگراست. با تغییر متغیر  $\tau = a + \xi(t-a)$  و با استفاده از تعریف تابع بتا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha (t-a)^\nu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\nu+\alpha} \int_0^1 \xi^\nu (1-\xi)^{\alpha-1} d\xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \nu+1) (t-a)^{\nu+\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)} (t-a)^{\nu+\alpha}, \quad (\alpha > 0, \nu > -1) \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $n-1 \leq p < n$  و  $\alpha = n-p$ . با استفاده از تعریف مشتق ریمن-لیوویل داریم

$${}_a^R D_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left( {}_a I_t^{n-p} f(t) \right) = \frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)} (t-a)^{\nu+\alpha} \right),$$

$$\Rightarrow {}_a^R D_t^p ((t-a)^\nu) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)} (t-a)^{\nu-p}, \quad \nu > -1. \quad (10.1)$$

## فصل ۲

# شبکه عصبی مصنوعی

### ۱.۲ تاریخچه تکامل شبکه عصبی

در سال ۱۹۴۳ یک نرولوژیست به نام وارن مک کلاچ<sup>۱</sup> به همراه یک متخصص آمار به نام والتر پیتز<sup>۲</sup> اولین مدل ریاضی نرون را ارائه دادند [۳۷]. این نرون ساده یک عنصر محاسبه‌گر بود که عناصری به نام ورودی را در مقادیر ثابتی به نام وزن ضرب می‌کرد و آنها را از یک عملگر خطی عبور می‌داد و حاصل خروجی نرون را تشکیل می‌داد. در این مدل وزن‌ها مقادیر ثابتی بودند. در سال ۱۹۴۹ دونالد هب<sup>۳</sup> [۱۶] کتابی درباره نحوه یادگیری در مغز انسان نوشت. بر این مبنا قانون یادگیری برای نرون را ارائه داد که به قانون هب معروف است و بعدها در تعلیم شبکه‌های عصبی از آن استفاده شد. در سال ۱۹۵۴ فارلی و کلارک<sup>۴</sup> [۱] مدلی از نرون‌ها را به‌طور تصادفی به هم وصل کردند و قانون هب را پیاده‌سازی نمودند و نشان دادند که می‌توان دو الگوی ورودی را با این قانون تعلیم از هم تشخیص داد. با پیشرفت علم کامپیوتر اولین مدل از نرون عصبی مصنوعی توسط ناتانیال روچستر<sup>۵</sup> محقق شرکت IBM در سال ۱۹۵۸ با استفاده از کامپیوتر شبیه‌سازی شد. روزنبلات [۴۸، ۴۹] در سال ۱۹۵۸ نرون ساده مک کلاچ-پیتز را

<sup>۱</sup> Warren McCulloch

<sup>۲</sup> Walter Pitts

<sup>۳</sup> Donald Hebb

<sup>۴</sup> Farley and Clark

<sup>۵</sup> Nathaniel Rochester

اصلاح کرد و به آن قابلیت یادگیری و سازگاری را اضافه کرد و این نرون را پرسپترون نامید. قانون تعلیم پرسپترون<sup>۶</sup> اولین قانون رسمی برای شبکه‌های عصبی است.

برنارد ویدرو<sup>۷</sup> و مارسین هاف<sup>۸</sup> و همکارانشان یک مدل سه سطحی از نرون‌ها را ابداع کردند که آدلاین<sup>۹</sup> نام‌گذاری شد و مختصر شده حروف ”عناصر خطی تطبیقی<sup>۱۰</sup>” بود [۶۰، ۵۹، ۵۸، ۵۷]. و برای آدلاین یک قانون تعلیم بر مبنای مشتق‌گیری بیان نمودند. این قانون تعلیم به  $\alpha - LMS$  معروف است. از متصل کردن چند آدلاین به یکدیگر مادالاین<sup>۱۱</sup> ساخته شد. ویدرو و هاف از شبکه عصبی مادالاین برای حذف اکو از خطوط تلفن استفاده نمودند.

سال ۱۹۶۹ آغاز یک دوره رکود برای شبکه عصبی بود. پاپرت و مینسکی<sup>۱۲</sup> [۳۹] کتابی به نام پرسپترون نوشتند و نشان دادند که اگرچه گیت‌های AND و OR را می‌توان با استفاده از پرسپترون پیاده‌سازی کرد ولی گیت XOR قابل پیاده‌سازی نمی‌باشد و لذا نمی‌توان از شبکه عصبی برای پردازش اطلاعات استفاده کرد. الگوریتم پس انتشار<sup>۱۳</sup> پال ورباس<sup>۱۴</sup> [۵۶] در سال ۱۹۷۴ ارائه شد و بعدها توسط رامل هارت<sup>۱۵</sup> [۵۱] به‌طور مستقل کشف گردید. این الگوریتم از زمان پیدایش به‌طور گسترده به‌عنوان یک الگوریتم آموزش در شبکه‌های عصبی پیش‌خورد<sup>۱۶</sup> مورد استفاده قرار گرفته است. سال ۱۹۸۲ تا ۱۹۸۶ را می‌توان تولد دوباره شبکه عصبی دانست. در این سال‌ها دو اتفاق مهم در این زمینه رخ داد. اول ارائه شبکه عصبی بازگشتی و مفهوم تابع انرژی توسط جان هاپفیلد<sup>۱۷</sup> [۱۸] بود که در سال ۱۹۸۲ منتشر شد. دومین اتفاق، حل مساله فروشنده دوره‌گرد TSP توسط شبکه هاپفیلد بود [۱۹]. هاپفیلد نشان داد که از این شبکه بازگشتی می‌توان برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده کرد و افق جدیدی را در شبکه‌های عصبی مصنوعی گشود.

## ۲.۲ مقدمه‌ای بر شبکه‌های عصبی

یکی از مدل‌های کارآمد پردازش اطلاعات پیشنهادی که اجزای آن بر اساس سیستم‌های عصبی زیستی بنا نهاده شده است، شبکه عصبی مصنوعی<sup>۱۸</sup> (ANN) نام دارد. اساساً این سیستم

<sup>۶</sup>Perceptron

<sup>۷</sup>Bernard Widrow

<sup>۸</sup>Marcian Hoff

<sup>۹</sup>Adeline

<sup>۱۰</sup>Adaptive Linear Elements

<sup>۱۱</sup>Madaline

<sup>۱۲</sup>Papert and Minsky

<sup>۱۳</sup>Back Propagation

<sup>۱۴</sup>Paul Werbos

<sup>۱۵</sup>Rumelhart

<sup>۱۶</sup>Feed Forward

<sup>۱۷</sup>John Hopfield

<sup>۱۸</sup>Artificial Neural Networks



پردازش اطلاعات زیادی از سیگنال ورودی را می‌تواند از منابع مختلف دریافت کند و سپس آنها را عموماً با عملیات‌های غیر خطی ترکیب می‌کند و در نهایت به عنوان نتایج خروجی نشان می‌دهد. از این رو توانایی این شبکه‌ها در حل مسائل پیچیده که قابل حل با روش‌های برنامه نویسی معمول نیستند قابل توجه است. به عبارت دیگر شبکه‌های عصبی برای حل کردن تعدادی از مسائل پیچیده جهان واقعی<sup>۱۹</sup> که در محیط‌های محاسبه استاندارد قابل محاسبه نیستند طراحی شده‌اند.

## ۱.۲.۲ چرا از شبکه‌های عصبی استفاده می‌کنیم؟

شبکه‌های عصبی با توانایی قابل توجه خود در استنتاج نتایج از داده‌های پیچیده می‌توانند در استخراج الگوها و شناسایی گرایش‌های مختلفی که برای انسان‌ها و کامپیوتر بسیار دشوار است استفاده شوند. از مزایای شبکه‌های عصبی می‌توان موارد زیر را نام برد:

(۱) **یادگیری تطبیقی:** توانایی یادگیری اینکه چگونه وظایف خود را بر اساس اطلاعات داده شده به آن یا تجارب اولیه انجام دهد.

(۲) **خود سازماندهی:** یک شبکه عصبی مصنوعی به صورت خودکار سازماندهی و داده‌هایی که در طول آموزش دریافت کرده را ارائه می‌دهد.

(۳) **عملگرهای بی‌درنگ:** محاسبات در شبکه عصبی مصنوعی می‌تواند به صورت موازی و به وسیله سخت‌افزارهای مخصوصی که طراحی و ساخت آن برای دریافت نتایج بهینه قابلیت‌های شبکه عصبی مصنوعی است انجام شود.

(۴) **تحمل خطا:** با ایجاد خرابی در شبکه مقداری از کارایی کاهش می‌یابد ولی برخی امکانات آن با وجود مشکلات بزرگ همچنان حفظ می‌شود.

(۵) **دسته‌بندی:** شبکه‌های عصبی قادر به دسته‌بندی ورودی‌ها برای دریافت خروجی مناسب می‌باشند.

(۶) **تعمیم‌دهی:** این خاصیت شبکه را قادر می‌سازد تا تنها با برخورد با تعداد محدودی نمونه، یک قانون کلی از آن را به دست آورده، نتایج این آموخته‌ها را به موارد مشاهده از قبل نیز تعمیم دهد. توانایی که در صورت نبود آن سامانه باید بی‌نهایت اطلاعات و روابط را به خاطر بسپارد.

(۷) **پایداری - انعطاف‌پذیری:** یک شبکه عصبی هم به حد کافی پایدار است تا اطلاعات فراگرفته خود را حفظ کند و هم قابلیت انعطاف و تطبیق را دارد و بدون از دست دادن اطلاعات قبلی می‌تواند موارد جدید را بپذیرد.

<sup>۱۹</sup>Real-World

## ۲.۲.۲ شبکه‌های عصبی بیولوژیکی

واحد اصلی دستگاه عصبی، سلولی خاص به نام نرون می‌باشد و بدون شک نحوه کار مغز و راز شعور آدمی در آن نهفته است. نرون‌ها با وجود تفاوت‌های زیاد از نظر اندازه و شکل ظاهری، مشخصه‌های مشترکی دارند. همان‌طور که در شکل ۱.۲ نشان داده شده است از تنه سلولی نرون تعدادی شاخک کوتاه خارج می‌شود که دندریت<sup>۲۰</sup> نام دارند. دندریت‌ها و تنه سلولی، سیگنال‌ها را از نرون‌های مجاور دریافت می‌کنند و از طریق یک لوله باریک به نام آکسون<sup>۲۱</sup> به نرون‌های دیگر منتقل می‌گردد.

آکسون در انتهای خود به تعدادی رشته جانبی باریک تقسیم می‌گردد که پایانه‌های آکسونی نام دارد و با دندریت‌های سایر نرون‌ها مرتبط است. ارتباط بین آکسون یک نرون و دندریت نرون دیگر را سیناپس<sup>۲۲</sup> می‌نامند. یک سیناپس مرکب از پایانه قبل از سیناپسی<sup>۲۳</sup>، شکاف سیناپسی<sup>۲۴</sup> و پایانه بعد از سیناپسی<sup>۲۵</sup> می‌باشد. همه سیگنال‌های جمع‌بندی شده، در تنه نرون ترکیب می‌شوند و اگر وسعت سیگنال‌های ترکیب شده به آستانه نرون برسد، مرحله تحریک شدن<sup>۲۶</sup> فعال می‌شود و یک سیگنال خروجی تولید می‌شود. این سیگنال به صورت یک پالس منفرد یا بخشی از پالس‌ها در یک میزان خاص به موازات آکسون به پایانه‌های سیناپسی انتقال می‌یابد و موجب ترشح موادی به نام عصب-رسانه می‌شود. عصب-رسانه در داخل شکاف سیناپسی پخش می‌شود و نرون بعدی را تحریک می‌کند و به این ترتیب یک سیگنال از یک نرون به دیگری انتقال می‌یابد. تعداد بسیار زیادی آکسون از نرون‌های مختلف با دندریت‌های یک نرون به این صورت ارتباط برقرار می‌کنند.

نرون‌ها با توجه به عملکردشان به سه دسته تقسیم می‌شوند:

(۱) **نرون‌های حسی:** این نرون‌ها پیام‌ها را از گیرنده‌ها به دستگاه عصبی مرکزی منتقل می‌کنند. گیرنده سلول خاصی است که در اندام‌های حسی، عضلات، پوست و ... قرار دارد و تغییرات فیزیکی یا شیمیایی را در می‌یابد، این تغییرات را به سیگنال‌های عصبی تبدیل می‌کند.

(۲) **نرون‌های حرکتی:** این نرون‌ها پیام‌ها را از مغز یا طناب نخاعی به اندام‌های عمل کننده می‌رسانند.

(۳) **نرون‌های رابط:** این نرون‌ها پیام‌ها را از نرون‌های حسی می‌گیرند و به یک نرون رابط دیگر

<sup>۲۰</sup> Dendrite

<sup>۲۱</sup> Axon

<sup>۲۲</sup> Synapse

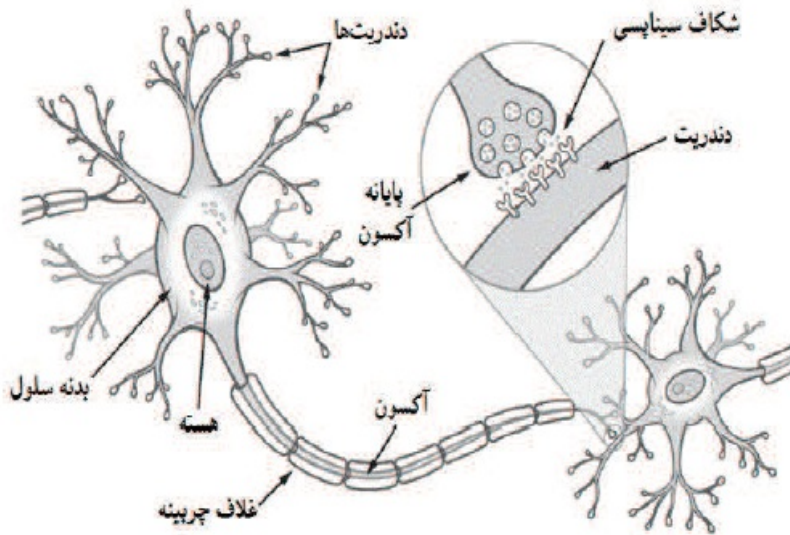
<sup>۲۳</sup> Presynaptic Terminal

<sup>۲۴</sup> Synaptic Cleft

<sup>۲۵</sup> Postsynaptic Terminal

<sup>۲۶</sup> Firing

انتقال می‌دهند و یا پیام‌ها را به یک نرون حرکتی می‌رسانند. نرون‌های رابط فقط در مغز، چشم و طناب نخاعی یافت می‌شوند. حال منظور از یادگیری عبارت است از تغییری نسبتاً ساختاری در سیناپس (بعد از تحریک)، که این تغییر ساختاری باعث افزایش کارایی سیناپس می‌شود.



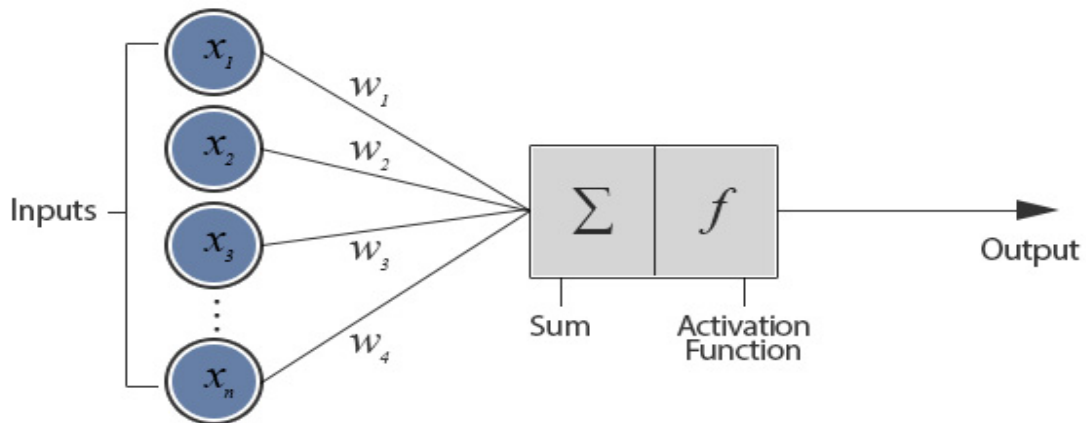
شکل ۱.۲: ساختار یک نرون

### ۳.۲.۲ شبکه‌های عصبی مصنوعی

بعد از اشاره‌ای گذرا بر شبکه عصبی بیولوژیکی و نشان دادن گوشه‌ای بسیار کوچک از این جهان مرموز و فوق‌العاده پیچیده به موضوع اصلی یعنی شبکه‌های عصبی مصنوعی می‌پردازیم. شبکه‌های عصبی مصنوعی مدل‌های سخت افزاری یا نرم افزاری الهام گرفته از ساختار و رفتار نرون‌های بیولوژیکی و سیستم‌های عصبی انسان هستند که شامل عناصر پردازشی (به نام نرون‌ها) و ارتباطات میان آنها با ضرایب (وزن‌ها) اختصاص یافته به ارتباطات است، که ساختار شبکه عصبی را تشکیل می‌دهند. یک شبکه عصبی شامل اجزای سازنده لایه‌ها و وزن‌ها می‌باشد. رفتار شبکه نیز وابسته به ارتباط بین اعضا است. در حالت کلی در شبکه‌های عصبی سه نوع لایه نرونی وجود دارد:

- لایه ورودی: دریافت اطلاعات خامی که به شبکه تغذیه شده است.
- لایه‌های پنهان: عملکرد این لایه‌ها به وسیله ورودی‌ها و وزن ارتباط بین آنها و لایه‌های پنهان تعیین می‌شود. وزن‌های بین واحدهای ورودی و پنهان تعیین می‌کند که چه وقت یک واحد پنهان باید فعال شود.
- لایه خروجی: عملکرد واحد خروجی بسته به فعالیت واحد پنهان و وزن ارتباط بین واحد پنهان و خروجی می‌باشد.

در این پایان‌نامه شبکه‌های عصبی مصنوعی را یک مدل ریاضی فرض خواهیم کرد و به‌جای استفاده از عبارت شبکه‌های عصبی مصنوعی به‌طور خلاصه عبارت شبکه‌های عصبی را به‌کار خواهیم برد.



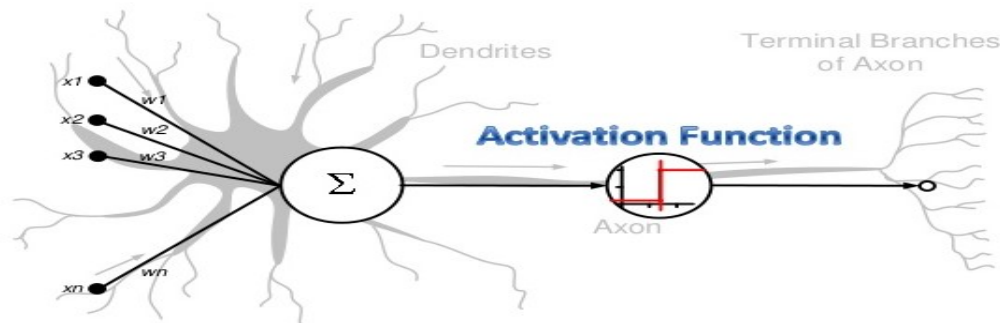
شکل ۲.۲: مدل ریاضی یک نرون

مدل شبیه‌سازی شده یک نرون، در شکل ۲.۲ نمایش داده شده است. یک نرون در حالت کلی یک مجموعه از  $n$  ورودی  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) دارد. این ورودی‌ها همان سیگنال‌های عصبی می‌باشند که از محیط یا از یک نرون دیگر فرستاده می‌شوند.  $w_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) که روی آکسون‌ها واقع هستند نقش ساختار سیناپسی را ایفا می‌کنند. این‌ها هستند که باید تغییر کنند تا فرآیند یادگیری اتفاق افتد حال اینکه این تغییر بر چه قاعده‌ای استوار باشد بستگی به الگوریتم آموزش یا تعلیم دارد. وزن آخرین ورودی را با  $b$  نشان می‌دهند و آن را بایاس<sup>۲۷</sup> می‌نامند. سیگنال‌های عصبی  $x_1$  و  $x_2$  و ... و  $x_n$  به‌ترتیب در  $w_1$  و  $w_2$  و ... و  $w_n$  ضرب شده و مجموع این حاصل‌ضرب‌ها که در شکل آن را با  $\Sigma$  نشان می‌دهیم، وارد نرون می‌شوند. در این مرحله نرون همانند یک تابع روی  $\Sigma$  عمل می‌کند و حاصل کار خود (برد تابع) را از طریق آکسون‌های طرف راست به نرون‌های دیگر می‌فرستد. این تابع را تابع فعال‌سازی<sup>۲۸</sup> می‌نامند. البته خاطر نشان می‌کنیم که اگر نرون به‌عنوان تابع فرض شود این تابع از  $\mathbb{R}^n$  به  $\mathbb{R}$  تعریف می‌گردد. یعنی سیگنال خروجی از نرون در تمام آکسون‌های طرف راست یکسان می‌باشد که روی شکل با 0 نمایش داده‌ایم. شکل ۳.۲ مدل ریاضی و ساختار یک نرون را در یک تصویر نشان می‌دهد. شبکه عصبی توانایی تجربه اندوزی از گذشته و بهبود رفتار خود را داراست. روندی که در آن ماتریس وزن‌ها و بردارهای بایاس شبکه عصبی تنظیم می‌شوند را قانون یادگیری می‌گویند که این قوانین توسط روابط بازگشتی و عموماً به‌صورت معادلات تفاضلی بیان می‌شوند.

<sup>۲۷</sup> Bias

<sup>۲۸</sup> Activation Function

همان‌طور که قبلاً اشاره شد نرون‌ها می‌توانند حسی، ارتباطی و یا حرکتی باشند. اطلاعات از طریق نرون‌های حسی دریافت می‌شود و از طریق نرون‌های ارتباطی انتقال می‌یابد و بالاخره نتیجه کار شبکه عصبی و یا واکنش شبکه عصبی به اطلاعات دریافت شده از طریق نرون‌های حرکتی به خارج منتقل می‌گردد (شکل ۴.۲). نرون‌های حسی را لایه ورودی، نرون‌های حرکتی را لایه خروجی و نرون‌های ارتباطی را لایه پنهان نیز می‌گویند. لایه مخفی می‌تواند از چندین لایه تشکیل گردد البته در شکل ۴.۲ لایه مخفی را تک لایه در نظر گرفته شده است. نحوه‌ی اتصالات نرون‌ها می‌تواند به گونه‌ای باشد که شبکه تک لایه یا چندلایه بوجود آورد. شبکه‌های چند لایه از لایه ورودی که الگوهای ورودی به آن اعمال می‌شود و لایه خروجی که خروجی شبکه را تعیین می‌کند و لایه پنهان که خود متشکل از چند لایه است و وظیفه‌ی آن ارتباط دادن لایه‌ی ورودی و لایه‌ی خروجی است، تشکیل می‌شود.



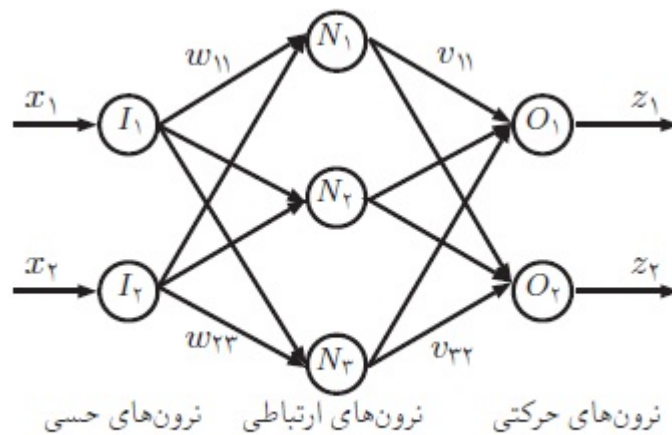
شکل ۳.۲: مدل ریاضی و ساختار یک نرون

مشخصه‌های اصلی یک شبکه عصبی که در طراحی آن باید مدنظر قرار گیرند عبارتند از:  
**معماری شبکه عصبی:** نحوه اتصالات بین نرون‌ها، تعداد آن‌ها و تعداد لایه‌های تشکیل دهنده بخش نرون‌های ارتباطی را معماری شبکه عصبی می‌گوییم.  
**تابع‌های فعال‌سازی:** این که چه تابعی روی نرون قرار بگیرد تا بر ورودی‌های نرون اثر کرده و خروجی نرون را تولید کند تابع فعال‌سازی آن نرون گویند. در جدول ۱.۲ تعدادی از مهم‌ترین توابع فعال‌سازی نشان داده شده است.

**الگوریتم آموزش:** روشی که وزن‌های روی آکسون‌ها بر اساس آن تغییر می‌کنند ( $w_{ij}$  ها و  $v_{jk}$  ها در شکل ۴.۲) تا خروجی شبکه عصبی به حالت مطلوب درآید را الگوریتم آموزش می‌گوییم.

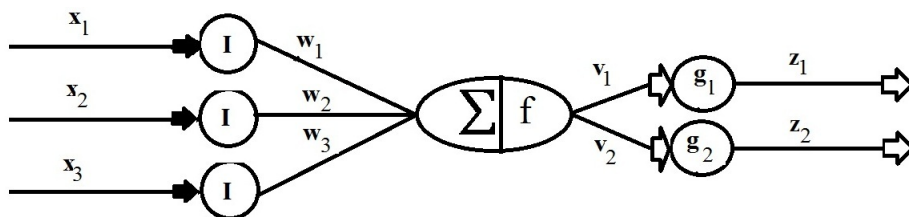
با توجه به مطالب قبل می‌توان برای شبکه‌های عصبی مصنوعی خصوصیات عمومی زیر را نسبت داد:

۱. پردازش اطلاعات در عناصر بسیار ساده به نام نرون (سلول عصبی) انجام می‌گیرد.
۲. سیگنال‌های عصبی بین سلول‌های عصبی از طریق اتصالات بین آن‌ها مبادله می‌شوند.
۳. به هر خط اتصال (آکسون) یک وزن نسبت داده می‌شود که در شبکه‌های عصبی معمولی این وزن‌ها در سیگنال‌های منتقل شده ضرب می‌گردند.
۴. هر نرون دارای یک تابع فعال‌سازی می‌باشد که این تابع در اکثر موارد غیرخطی است.



شکل ۴.۲: ساختار یک نرون با لایه ورودی، لایه پنهان و لایه خروجی

مثال ۱.۲.۲. می‌خواهیم خروجی شبکه زیر را تعیین کنیم:



شکل ۵.۲: شبکه عصبی مثال (۱.۲.۲)

شبکه‌های عصبی مربوط به شکل را به صورت ریاضی بیان می‌کنیم. این شبکه در ۳ لایه ارائه شده است. نرون‌های حسی سیگنال‌های دریافتی را عیناً انتقال می‌دهند این سیگنال‌ها در وزن‌های موجود در روی آکسون‌ها ضرب می‌شوند و در ورودی نرون ارتباطی با هم جمع می‌شوند.

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$$

اگر خروجی این لایه را با  $y$  نشان دهیم خواهیم داشت

$$y = f(w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3) = f\left(\sum_{i=1}^3 w_ix_i\right).$$

این خروجی هنگام عبور از آکسون‌های لایه بعدی باید در وزن‌های موجود در آن ضرب شود و بعد از گذر از لایه‌ی خارجی سیگنال‌های زیر به عنوان سیگنال حرکتی از شبکه عصبی خارج می‌گردند.

$$z_1 = g_1(v_1y), \quad z_2 = g_2(v_2y)$$

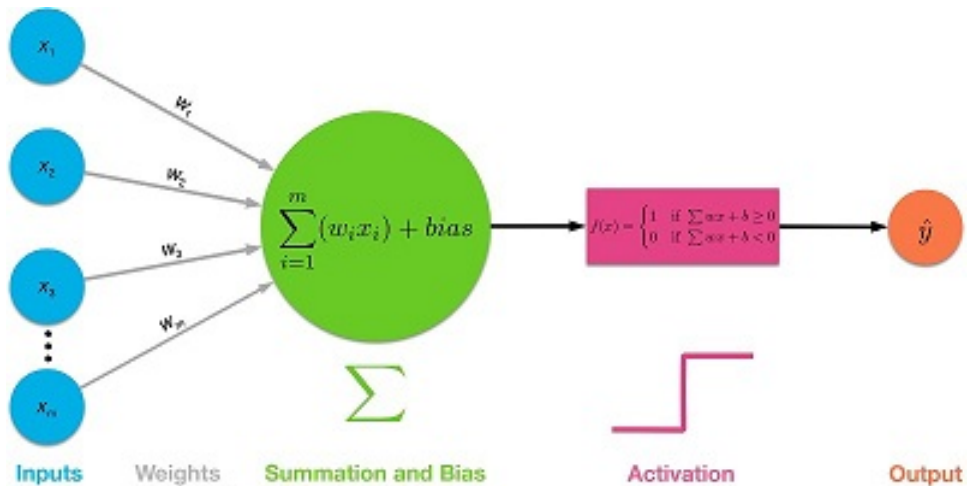
## ۴.۲.۲ شبکه‌های عصبی پیشخور

شبکه‌های عصبی مصنوعی (ANN) یک صورت بسیار جالب از هوش مصنوعی است که شبیه به فرآیند یادگیری از مغز انسان به منظور استخراج الگوهایی از داده‌های تاریخی هستند [۵۳]. برای سال‌های بسیاری این تکنولوژی بطور موفقیت آمیز برای گونه‌های گسترده‌ای از کاربردهای دنیای واقعی بکارگرفته شده است [۴۶]. یک شبکه عصبی پیشخور<sup>۲۹</sup> (فیدفورارد) یک شبکه عصبی مصنوعی است، که در آن اتصال میان واحدهای تشکیل دهنده آن یک چرخه را تشکیل نمی‌دهند. در واقع این شبکه متفاوت از شبکه‌های عصبی بازگشتی می‌باشد. شبکه عصبی پیشخور اولین و ساده‌ترین نوع شبکه عصبی مصنوعی می‌باشد. در این شبکه اطلاعات تنها از یک مسیر حرکت می‌کند که جهت آن رو به جلو می‌باشد. در واقع اطلاعات با شروع از گره (نرون)‌های ورودی و گذر از لایه‌های پنهان (در صورت وجود) به سمت گره‌های خروجی می‌روند. همانطور که گفته شد در این شبکه حلقه یا دوری وجود ندارد. شبکه پرسپترون<sup>۳۰</sup> برای اولین بار توسط روزنبلات<sup>۳۱</sup> در سال ۱۹۵۸ معرفی شد [۴۰] (شکل ۶.۲ رابینید). پرسپترون ساده به یک آموزش‌دهنده احتیاج دارد که به شبکه بگوید که چه خروجی مطلوبی باید داشته باشد. شکل ۷.۲ مثالی از پرسپترون سه لایه را نشان می‌دهد. پرسپترون چندلایه با لایه‌های بیشتر از سه‌تا، از لایه‌های پنهان استفاده می‌کنند [۱۵، ۳۰].

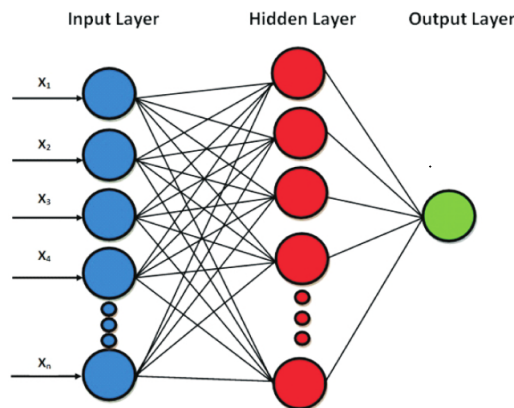
<sup>۲۹</sup>Feedforward Neural Network

<sup>۳۰</sup>Perceptron

<sup>۳۱</sup>Rosenblatt



شکل ۶.۲: ساختار شبکه عصبی مصنوعی (پرسپترون)



شکل ۷.۲: پرسپترون چندلایه

در پرسپترون‌های چندلایه واحدهای ورودی به واحدهای خروجی توسط یک نگاشت غیرخطی بهم متصل می‌شوند [۲۵]. مهم‌ترین کاربرد پرسپترون چندلایه توانایی آنها در تقریب تابع است. از قضیه وجود کولوموگروف<sup>۳۲</sup> می‌دانیم که یک پرسپترون سه‌لایه با  $n(2n + 1)$  گره می‌تواند برای هر تابع پیوسته با  $n$  متغیر محاسبه شود [۲۰، ۳۳]. دقت تقریب به تعداد نرون<sup>۳۳</sup>‌ها در لایه‌های پنهان بستگی دارد و به تعداد لایه‌های پنهان بستگی ندارد [۳۲]. شبکه‌های عصبی چندلایه فیدفوروارد قابل یادگیری هستند که در برخی موارد مساله‌ی آموزشی فیدفوروارد بدحالت است [۲۴].

یک نرون بیولوژیکی<sup>۳۴</sup> ممکن است  $10^4$  ورودی‌های متفاوت داشته باشد و ممکن است خروجی آن را به بسیاری از نرون‌های دیگر ارسال کند. شبکه عصبی مصنوعی هرچیزی را که

<sup>۳۲</sup> Kolomogrov's

<sup>۳۳</sup> Neuron

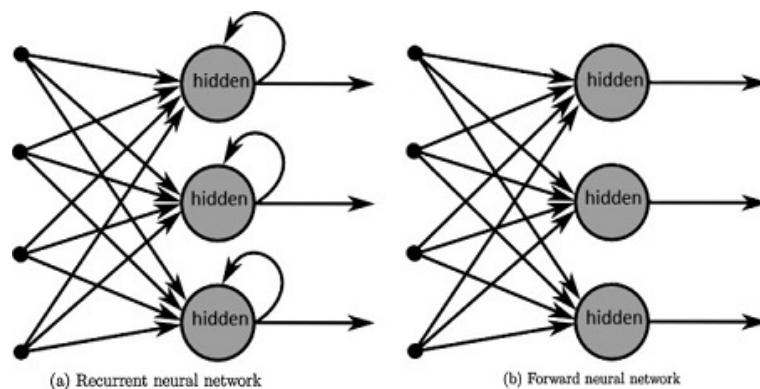
<sup>۳۴</sup> Biological Neural Network



با روش‌های محاسبات سنتی قابل انجام نیست را می‌تواند انجام دهد. از شبکه‌های عصبی فیدفوروارد به صورت یک مدل (تابع با متغیرهای زیاد) از داده‌های آموزشی (داده‌های ورودی) استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم شبکه از معادلات دیفرانسیل، به منظور تولید یک تابع شامل پارامترهای اصلی قابل تنظیم که از شبکه عصبی می‌آید، یاد می‌گیرد. با کمینه سازی این تابع با متغیرهای زیاد، پارامترهای قابل تنظیم بهینه برای پرسپترون چندلایه مربوطه بدست می‌آید. این تحلیل برای محاسبه جواب معادله دیفرانسیل مفید است. به سادگی می‌توان گفت که این یک جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مربوطه است.

## ۵.۲.۲ شبکه‌های عصبی بازگشتی

در شبکه‌های عصبی بازگشتی<sup>۳۵</sup>، حداقل یک سیگنال برگشتی از یک نرون به همان نرون یا نرونهای همان لایه و یا لایه قبل وجود دارد. چنین شبکه‌ای حافظه را نگه می‌دارد و حالت بعد نه تنها به سیگنالهای ورودی بلکه به حالات قبل شبکه نیز وابسته است. در واقع شبکه عصبی بازگشتی، شبکه‌های عصبی با یک حلقه برگشتی (پسخور) یا بیشتر هستند. برگشت‌ها می‌توانند محلی یا کلی باشند. خاصیت اصلی آنها این است که رفتار آنها هم به وسیله خودشان و هم به وسیله ورودی‌های خارجی یک شبکه تعیین می‌گردد. پسخور محلی ساده‌ترین اتصال بازگشتی است که اتصال از هر لایه پنهان به خودش صورت می‌گیرد.



شکل ۸.۲: شبکه عصبی فیدفوروارد و شبکه عصبی بازگشتی

## ۳.۲ توابع فعال سازی

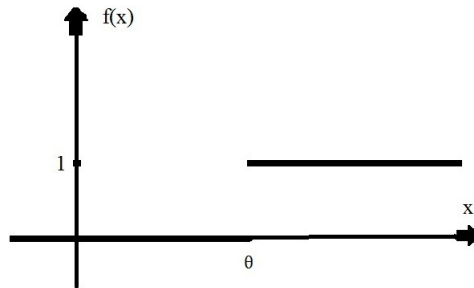
چند نمونه از این توابع را در زیر بیان می‌کنیم:

**تابع پله‌ای:** این تابع با حد آستانه‌ای  $x$  است که اگر ورودی از  $x$  عبور کند نرون داغ خواهد

<sup>۳۵</sup>Feedback (Recurrent) Neural Network

شد و به صورت زیر می باشد:

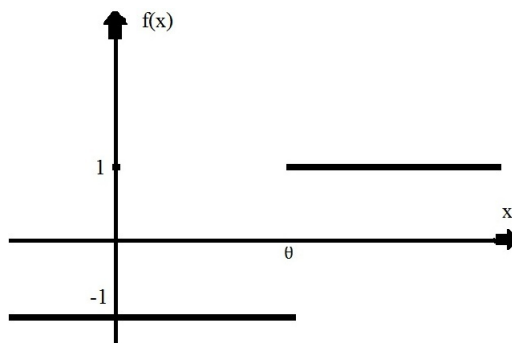
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta. \end{cases}$$



شکل ۹.۲: تابع پله‌ای

تابع پله‌ای دوقطبی: این تابع با حد آستانه‌ای  $x$  است و به صورت زیر تعریف می شود:

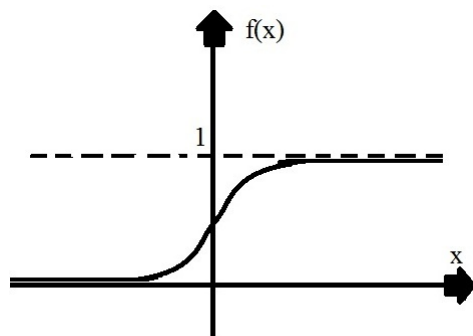
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \theta \\ -1, & x < \theta. \end{cases}$$



شکل ۱۰.۲: تابع پله‌ای دوقطبی

تابع سیگموئید: تابع سیگموئید، تابعی یکنوا، کراندار و مشتق پذیر است و می توان مشتق تابع را به کمک خود تابع بیان کرد و به شکل زیر است:

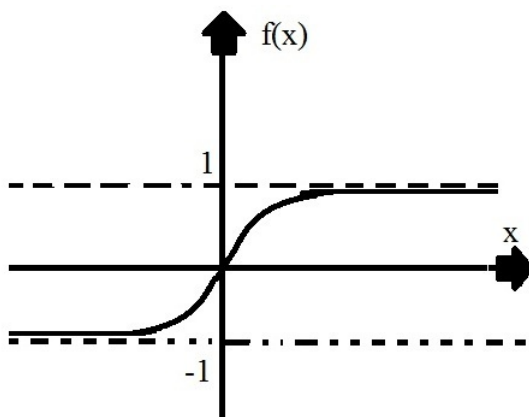
$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad f'(x) = f(x)(1 - f(x)).$$



شکل ۱۱.۲: تابع سیگموئید

**تابع سیگموئید قطبی:** این تابع همان خواص تابع سیگموئید را دارد و به صورت زیر تعریف می شود:

$$g(x) = 2f(x) - 1 = 2 \left( \frac{1}{1 + e^{-x}} \right) - 1 = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad g'(x) = \frac{1}{4}(1 + g(x))(1 - g(x)).$$



شکل ۱۲.۲: تابع سیگموئید قطبی

**تابع همانی:** این تابع بیشتر برای نرون های ورودی مورد استفاده قرار می گیرد و به صورت زیر بیان می شود:

$$f(x) = x.$$

چند تابع فعال سازی مهم دیگر را در جدول ۱.۲ آورده ایم.

جدول ۱.۲: توابع فعال سازی

شکل تابع	تعریف تابع	نام	ردیف
	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$	آستانه‌ای دو مقداره	۱
	$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$	آستانه‌ای دو مقداره متقارن	۲
	$f(x) = x$	خطی	۳
	$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$	آستانه‌ای خطی متقارن	۴
	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$	آستانه‌ای خطی	۵
	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & x \geq 0. \end{cases}$	خطی مثبت	۶
	$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	تانژانت هایپربولیک	۷

# فصل ۳

## حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه‌های عصبی و مشتق کاپوتو- فابریسیو

### ۱.۳ مقدمه

در این فصل جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مرتبه کسری زیر را با استفاده از تعریف جدید مشتق کسری کاپوتو- فابریسیو که در فصل اول عنوان شد و شبکه عصبی بررسی می‌کنیم.

$$({}^{CF}D_t^\alpha x)(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.3)$$

هدف ما در این فصل معرفی یک روش جدید برای حل از معادله دیفرانسیل کسری با استفاده از شبکه‌ی عصبی با پایه‌های چندجمله‌ای تیلور<sup>۱</sup>، لژاندر<sup>۲</sup> و مشتق کاپوتو- فابریسیو می‌باشد. این روش با استفاده از مشتق کاپوتو- فابریسیو و با تبدیل معادله اصلی به یک مسئله مینیمم‌سازی شروع می‌شود و سپس با کمک یک ساختار شبکه عصبی خطای مساله را به صفر نزدیک می‌سازد. با استفاده از روش شبکه عصبی می‌توان یک جواب پیوسته مشتق پذیر

<sup>۱</sup>Taylor

<sup>۲</sup>Legendre

از معادلات دیفرانسیل کسری ارائه داد که در همه شرایط اولیه یا مرزی صدق می‌کند در حالی که دقت روش را می‌توان با تغییر پارامترهای ANN تنظیم کرد. برای همین منظور در این فصل به معرفی شبکه عصبی مورد نظر می‌پردازیم و در ادامه چند جمله‌ای‌های تیلور و لژاندر را معرفی می‌کنیم و در انتها با ارائه مثال‌های عددی در نرم افزار متلب کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهیم.

### ۲.۳ مشتق کسری کاپوتو- فابریسیو

همان طور که در فصل ۱ اشاره کردیم تعریفی که کاپوتو از مشتق کسری ارائه داد به صورت زیر است:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

به طوری که  $\alpha \in [0, 1]$  و  $a \in (-\infty, t)$  و  $f \in H^1(a, b)$  و هم‌چنین  $b > a$ . این تعریف دارای یک نقطه تکین در  $t = \tau$  است. برای رفع این مشکل کاپوتو و فابریسیو تعریف جدیدی ارائه دادند. با جایگزین کردن هسته‌ی  $(t-\tau)^{-\alpha}$  با تابع  $\exp(\frac{-\alpha(t-\tau)}{1-\alpha})$  و  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  با  $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$  به تعریف جدیدی از مشتق کاپوتو می‌رسیم که به مشتق کاپوتو- فابریسیو یا مشتق اصلاح شده کاپوتو معروف است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

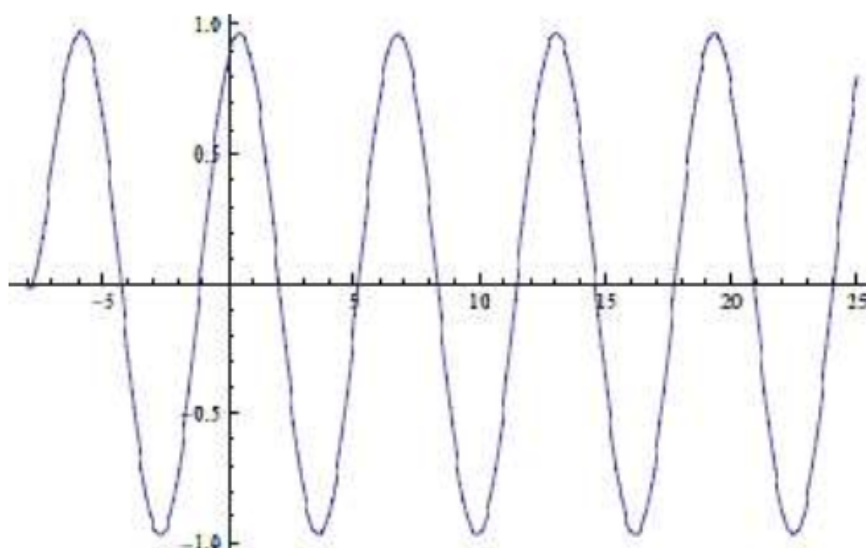
$${}^{CF} D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) \exp[\frac{-\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}] d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.3)$$

که  $M(\alpha)$  یک ثابت نرمال شده برحسب  $\alpha$  است به طوری که  $M(0) = M(1) = 1$ . طبق تعریف جدید واضح است که اگر  $f$  تابعی ثابت باشد آن‌گاه مشابه تعریف مشتق کاپوتو،  ${}^{CF} D_t^\alpha f = 0$ . تفاوت اصلی بین مشتق کاپوتو فابریسیو و مشتق کاپوتو این است که مشتق جدید در نقطه  $t = \tau$  دارای نقطه تکین نیست.

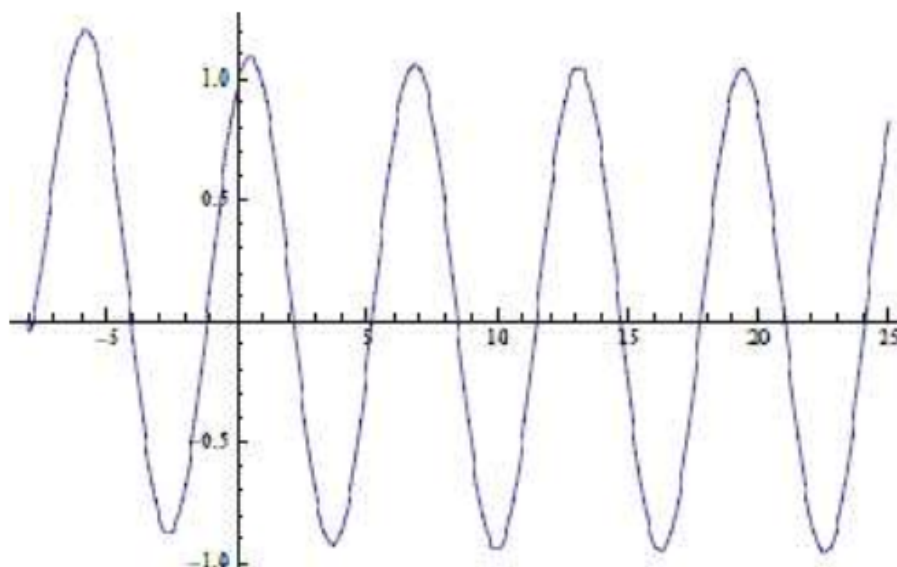
**مثال ۱.۲.۳.** فرض کنید یک تابع خاص به صورت  $f(t) = \sin wt$  باشد به ازای  $\alpha = 0.66$  و  $a = -8$  و  $w = 1$  طبق رابطه (۳.۳) خواهیم داشت

$${}^{CF} D_t^{(0.66)} \sin wt = \frac{M(0.66)}{0.33} \int_a^t \cos \tau \exp -2(t-\tau) d\tau. \quad (4.3)$$

نمودارهای زیر نتیجه شبیه‌سازی مساله فوق با مشتق کاپوتو و کاپوتو- فابریسیو می‌باشد.

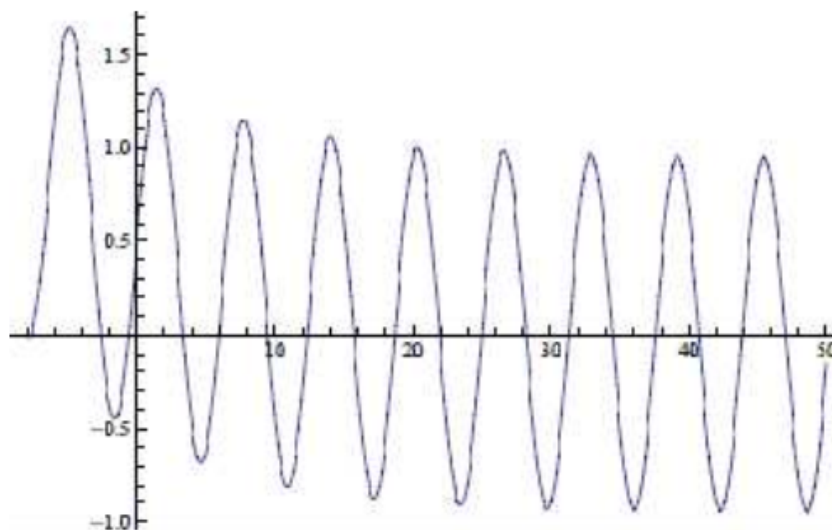


شکل ۱.۳: شبیه‌سازی رابطه (۴.۳) با مشتق کاپوتو- فابریسیو با  $\alpha = 0.66$  در بازه  $[-8, 25]$

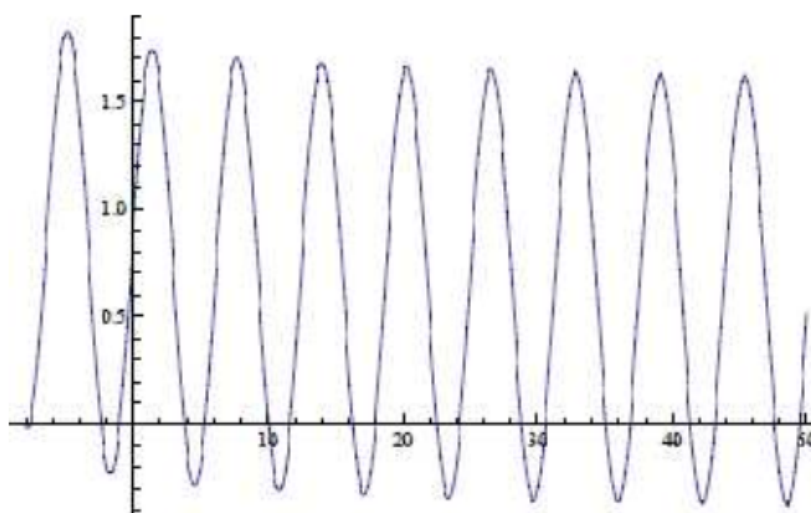


شکل ۲.۳: شبیه‌سازی رابطه (۴.۳) با مشتق کاپوتو با  $\alpha = 0.66$  در بازه  $[-8, 25]$

شکل‌های ۱.۳ و ۲.۳ با  $\alpha = 0.66$ ، بسیار شبیه هم هستند. در غیر این صورت زمانی که  $\alpha$  را نزدیک صفر در نظر می‌گیریم تغییراتی را ملاحظه خواهیم کرد.



شکل ۳.۳: شبیه‌سازی رابطه (۴.۳) با مشتق کاپوتو- فابریسیو با  $\alpha = 1/10$  در بازه  $[-8, 50]$



شکل ۴.۳: شبیه‌سازی رابطه (۴.۳) با مشتق کاپوتو با  $\alpha = 1/10$  در بازه  $[-8, 50]$

در شکل‌های ۳.۳ و ۴.۳ با  $\alpha = 1/10$  تفاوت‌های بیشتری را مشاهده می‌کنیم که نمودار با مشتق کاپوتو نسبت به کاپوتو- فابریسیو بیشتر تغییر کرده و تحت تاثیر قرار گرفته است در حالی که کاپوتو- فابریسیو یک تثبیت سریع را نشان می‌دهد.



### ۳.۳ چند جمله‌ای‌های لژاندر

چند جمله‌ای‌های لژاندر چند جمله‌ای‌های متعامد در بازه  $[-1, 1]$  می‌باشند که در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$L_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{i+1}xL_i(x) - \frac{i}{i+1}L_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

به طوری که  $L_0(x) = 1$  و  $L_1(x) = x$

با استفاده از تغییر متغیر  $x = 2t - 1$  چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته  $p_m(t)$  از مرتبه  $m$  روی بازه  $[0, 1]$  به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

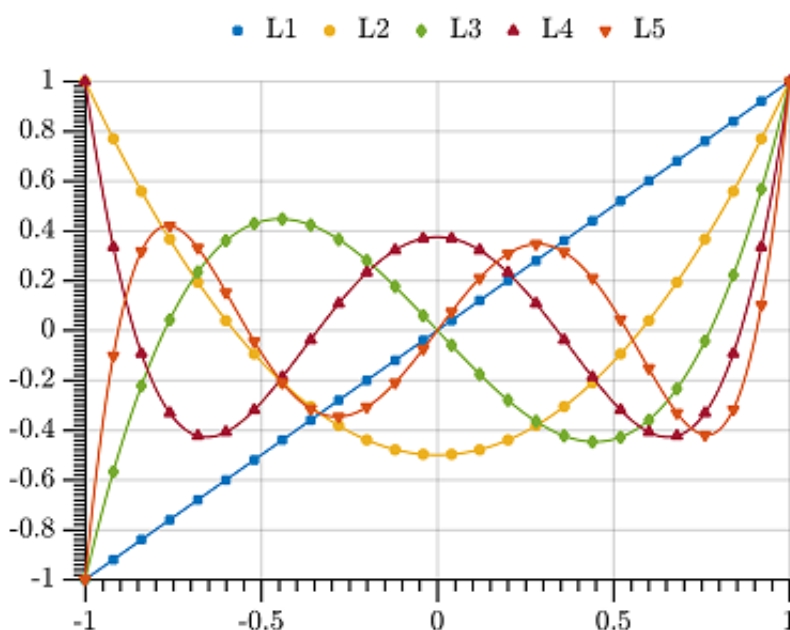
$$p_{m+1}(t) = \frac{2m+1}{m+1}(2t+1)p_m(t) - \frac{m}{m+1}p_{m-1}(t) \quad m = 1, 2, \dots$$

که  $p_0(t) = 1$  و  $p_1(t) = 2t - 1$  می‌باشند.

فرم تحلیلی چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته  $p_n(t)$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)2^n} t^k.$$

در شکل ۵.۳ نمودار چند جمله‌ای‌های لژاندر تا مرتبه ۵ نشان داده شده است:



شکل ۵.۳: چند جمله‌ای‌های لژاندر

### ۱.۳.۳ خواص چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای‌های لژاندر دارای خواص جالب توجهی هستند بعضی از این خواص عبارتند از

(۱) در بازه  $(-1, 1)$  یک مجموعه متعامد هستند بدین معنی که

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 p_m(x)p_n(x)dx = 0, & m \neq n \\ \int_{-1}^1 [p_m(x)]^2 dx = \frac{2}{2m+1}, & m = n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

(۲) در معادله بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$(M+1)p_{m+1}(x) = (2m+1)xp_m(x) - mp_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

که  $M = \frac{m}{2}$  یا  $M = \frac{m-1}{2}$ ، هر کدام که صحیح باشد. از این فرمول با داشتن  $p_0(x) = 1$  و  $p_1(x) = x$  می‌توان همه‌ی چندجمله‌ای‌های لژاندر را بدست آورد.

(۳) می‌توان ثابت که

$$p_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} [(x^2 - 1)^m] \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

این فرمول، فرمول رودریگز<sup>۳</sup> نامیده می‌شود. از این فرمول می‌توان چند جمله‌ای‌های لژاندر را محاسبه کرد.

(۴) می‌توان نشان داد که

$$p_i(1) = 1, \quad p_i(-1) = (-1)^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

تعریف ۱.۳.۳. ( چندجمله‌ای‌های تیلور). فرض کنید  $f \in C^n[a, b]$  و  $x_0 \in [a, b]$ ، چندجمله‌ای زیر را چندجمله‌ای تیلور از مرتبه  $n$  به مرکز  $x_0$  می‌نامند.

$$T_n[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} D^k f(x_0).$$

<sup>۳</sup>Rodrigues formula

## ۴.۳ حل معادلات دیفرانسیل کسری به کمک شبکه عصبی مصنوعی

فرم کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = f(t, x(t)); \quad x(t_0) = x_0 \quad (۵.۳)$$

که در آن  $t_0 \leq t \leq T$  می باشد. فرض می کنیم  $x_N(t)$  یک جواب تقریبی برای مساله فوق باشد. ساختار  $x_N(t)$  به گونه ای است که باید در شرایط اولیه و مرزی صدق کند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$x_N(t) = x_0 + (t - t_0)N(t) \quad (۶.۳)$$

که در آن  $N(t)$  مدل شبکه عصبی است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$N(t) = \sum_{k=1}^n V_k \varphi_i(\xi_k) \quad (۷.۳)$$

و  $\varphi_i$  یک تابع فعال ساز است و  $\xi_k$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\xi_k = w_k t + b_k.$$

در این پایان نامه شبکه عصبی از نوع پرسپترون دولایه و تابع فعال ساز چند جمله ای ها هستند. با جایگذاری رابطه (۶.۳) در رابطه (۵.۳) خواهیم داشت

$$({}^C D_t^\alpha x_N)(t) = f(t, x_N(t)) \quad (۸.۳)$$

که در این صورت با حل رابطه (۸.۳)، رابطه (۵.۳) را به صورت تقریبی حل می کنیم. بنابراین بازه  $[t_0, T]$  را به  $M$  قسمت مساوی تقسیم می کنیم و پس از انجام عملیات گسسته سازی بازه، بهینه سازی مساله به صورت زیر است که با استفاده از روش های بهینه سازی حل می شود:

$$\min \sum_{i=1}^m [({}^C D_t^\alpha x_N(t_i)) - f(t, x_N(t_i))]^2.$$

برای تقریب مشتق کسری در رابطه (۸.۳) می توانیم از روش انتگرال گیری عددی استفاده کنیم که روش انتگرال گیری دوزنقه ای یکی از روش های مناسب برای این نوع مسائل می باشد.

### ۱.۴.۳ محاسبه جواب تقریبی

جواب تقریبی  $x_N(t)$  در معادلات دیفرانسیل کسری همانند روش محاسبه آن در معادلات دیفرانسیل مرتبه معمولی است. می دانیم که معادله ی دیفرانسیل کسری به صورت زیر تعریف

## ۴۰ حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه‌های عصبی و مشتق کاپوتو- فابریسیو

می‌شود:

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, T]$$

با تغییر بازه‌ی  $\alpha$ ، حالت‌های مختلفی برای  $x_N(t)$  رخ می‌دهد که به اختصار به بعضی از این حالت‌ها که در این پایان نامه مورد نیاز است اشاره می‌کنیم. حالت‌های مختلف دیگری را می‌توانید در مرجع [۳۶] ملاحظه کنید.

(۱) اگر  $0 < \alpha < 1$  باشد. با وجود شرایط اولیه  $x(t_0) = x_0$  جواب تقریبی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_N(t) = x_0 + (t - t_0)N(t).$$

(۲) اگر  $1 < \alpha < 2$  باشد. با وجود شرایط اولیه  $x(t_0) = x_0$  و  $x'(t_0) = x_1$  جواب تقریبی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_N(t) = x_0 + x_1(t - t_0) + (t - t_0)^2 N(t)$$

و با وجود شرایط مرزی  $x(t_0) = x_0$  و  $x(T) = X_0$ ،  $x_N(t)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_N(t) = \frac{Tx_0 - t_0X_0}{T - t_0} + \frac{X_0 - x_0}{T - t_0}t + (t - t_0)(t - T)N(t).$$

(۳) وقتی دستگاهی از معادلات دیفرانسیل کسری معادلات مساله را تشکیل می‌دهند نیز جواب تقریبی مشابه قسمت‌های قبل بدست می‌آید به طوری که:

• اگر  $0 < \alpha < 1$  باشد، با وجود شرایط اولیه  $x_i(t_0) = (x_0)_i \quad \forall i = 1, \dots, k$  جواب تقریبی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_{N_i}(t) = (x_0)_i + (t - t_0)N_i(t), \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

• اگر  $1 < \alpha < 2$  باشد با وجود شرایط اولیه  $x_i(t_0) = (x_0)_i$  و  $x'_i(t_0) = (x_1)_i$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, k$  جواب تقریبی به صورت زیر است:

$$x_{N_i}(t) = (x_0)_i + (x_1)_i(t - t_0) + (t - t_0)^2 N_i(t)$$

و با وجود شرایط مرزی  $x_i(t_0) = (x_0)_i$  و  $x_i(T) = (X_0)_i$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, k$  جواب تقریبی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x_{N_i}(t) = \frac{T(x_0)_i - t_0(X_0)_i}{T - t_0} + \frac{(X_0)_i - (x_0)_i}{T - t_0}t + (t - t_0)(t - T)N_i(t).$$

## ۵.۳ پیاده سازی روش

می دانیم معادله دیفرانسیل کسری به صورت زیر تعریف می شود:

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = f(t, x(t)); \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (9.3)$$

در روش ارائه شده ابتدا تعداد نرون ها ( $N$ ) و تعداد نقاط ( $M$ ) را مشخص می کنیم. شبکه عصبی که در این بخش به کار می بریم شبکه عصبی پرسپترون دو لایه با تابع فعال ساز چندجمله‌ای می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} N(t) &= \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(\xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i x^{(i-1)}(\xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i x^{(i-1)}(w_i t + b_i) \end{aligned} \quad (10.3)$$

با تعریف مدل شبکه، جواب تقریبی  $x_N(t)$  مساله با توجه به شرایط اولیه، طبق حالت‌های ذکر شده در ۱.۳.۳ بدست می آید و همچنین برای مشتق‌گیری کسری از مشتق کسری کاپوتو-فابریسیو که در بخش ۲.۳ عنوان شد استفاده می کنیم و جواب مشتق به ازای  $\alpha$  داده شده در مساله حاصل می شود.

در این روش پیشنهادی چندجمله‌ای تیلور و چندجمله‌ای لژاندر را به عنوان توابع فعال ساز برای تعیین جواب تقریبی به کار می بریم به طوری که معادله دیفرانسیل کسری (۹.۳) را با استفاده از حداقل میانگین مربعات به مساله بهینه‌سازی زیر تبدیل می کنند:

$$\min \sum_{i=1}^m \left[ ({}^C D_t^\alpha x_N)(t_i) - f(t_i, x_N(t_i)) \right]^2 \quad (11.3)$$

سپس مساله مینیمم‌سازی با استفاده از دستور بهینه‌سازی `fminsearch` و شبکه عصبی مورد نظر (۱۰.۳) حل می شود. مزیت استفاده از شبکه عصبی این است که تابع انرژی ( $W$ ) خطا را کاهش می دهد و به صفر نزدیک می سازد.

دو مثال زیر را برای تایید روش بیان شده در این بخش مورد بررسی قرار می دهیم.

**مثال ۱.۵.۳.** معادله دیفرانسیل کسری با شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = 4 \exp(-t) + 4t - 4, \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 1] \quad (12.3)$$

جواب دقیق مساله به ازای  $\alpha = 0.5$  به صورت زیر است:

$$x(t) = t^2.$$

## ۴۲ حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه‌های عصبی و مشتق کاپوتو- فابریسیو

طبق تعریف مشتق کاپوتو- فابریسیو داریم

$${}^{\circ}D_t^{\alpha} (t^2) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^t 2\tau \exp(-(t - \tau)) d\tau,$$

حال با دوبار انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت

$${}^{\circ}D_t^{\alpha} (t^2) = 4 \exp(-t) + 4t - 4.$$

هم چنین جواب تقریبی مساله طبق حالت‌های عنوان شده در ۱.۴.۳ به صورت زیر می باشد:

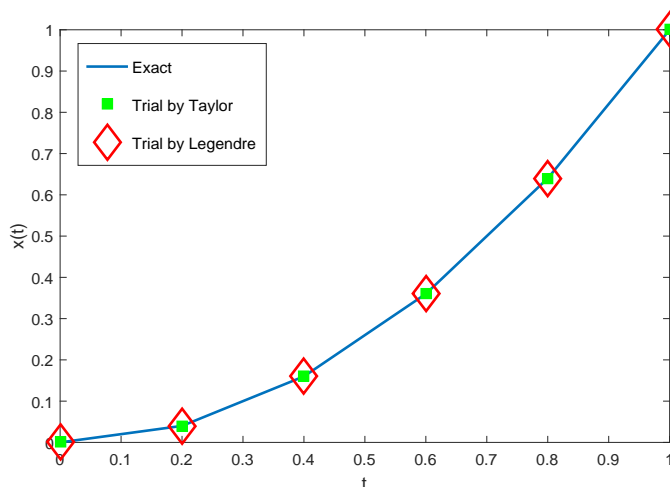
$$x_N(t) = tN(x, t),$$

با جایگزین کردن جواب تقریبی بالا در رابطه (۱۲.۳) و تقسیم بازه  $[0, 1]$  به  $M = 10$  و همچنین  $N = 5$  به مساله بهینه سازی زیر می‌رسیم:

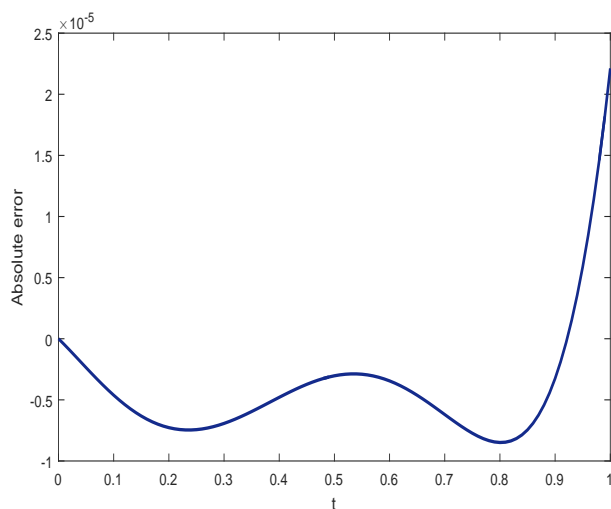
$$\min \sum_{i=1}^{10} \left[ ({}^{\circ}D_t^{\alpha} x_N)(t_i) - 4 \exp(-x_N(t_i)) - 4x_N(t_i) + 4 \right]^2 \quad (13.3)$$

که برای تقریب  $({}^{\circ}D_t^{\alpha} x_N)(t_i)$  از رابطه (۳.۳) استفاده می‌کنیم و در نهایت رابطه (۱۳.۳) با دستور بهینه سازی `fminsearch` حل می‌شود. قابل ذکر است که مساله بهینه سازی را می‌توان با دستورهای دیگر بهینه‌سازی نیز حل کرد.

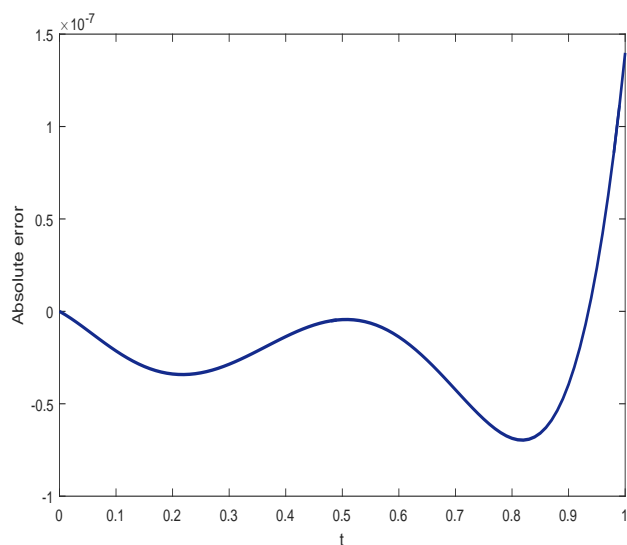
در شکل ۶.۳ نمودارهای مربوط به جواب دقیق و جواب تقریبی  $x_N(t)$  که با روش شبکه عصبی (۱۰.۳) و با پایه چندجمله‌ای تیلور و لژاندر حل شده است را مشاهده می‌کنید که در بازه  $[0, 1]$  نمودارها برهم منطبق هستند. در این مثال  $N = 5$  و  $M = 10$  در نظر گرفته شده است. هم‌چنین خطای جواب تقریبی و جواب دقیق با پایه‌ی چندجمله‌ای تیلور و لژاندر به ازای  $\alpha = 0.5$  در شکل‌های ۷.۳ و ۸.۳ آورده شده است.



شکل ۶.۳: نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی با چندجمله‌ای تیلور و لژاندر



شکل ۷.۳: نمودار خطای جواب تقریبی و جواب دقیق با پایه تیلور



شکل ۸.۳: نمودار خطای جواب تقریبی و جواب دقیق با پایه لژاندر

مثال ۲.۵.۳. معادله دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید.

$$({}^CF D_t^\alpha x)(t) + x(t) = \frac{29}{9} - \frac{20 \exp(-9t)}{9} + 2t, \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 1] \quad (14.3)$$

جواب دقیق مساله به ازای  $\alpha = 0/9$  به صورت زیر است:

$$x(t) = 2t + 1.$$

طبق تعریف مشتق کاپوتو-فابریسیو داریم

$${}^CF D_t^{0/9}(2t + 1) = \frac{1}{1 - 0/9} \int_0^t 2 \exp(-9(t - \tau)) d\tau,$$

## ۴۴ حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه‌های عصبی و مشتق کاپوتو-فابریسیو

که با یک یکبار انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت

$${}^{\circ}D_t^{\alpha} (2t+1) + 2t+1 = \frac{29}{9} - \frac{2^{\circ} \exp(-9t)}{9} + 2t.$$

همچنین جواب تقریبی مساله نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

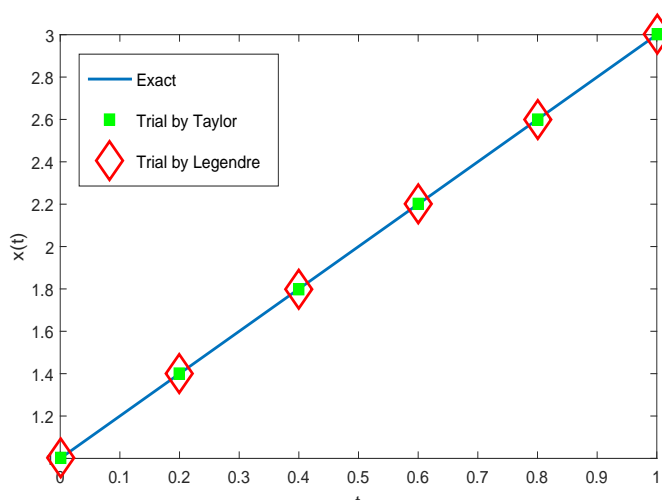
$$x_N(t) = 1 + tN(x, t).$$

همانند مثال قبل با جایگزین کردن جواب تقریبی در معادله‌ی اصلی و همچنین گسسته سازی بازه  $[0, 1]$  به مساله بهینه سازی زیر می‌رسیم:

$$\min \sum_{i=1}^{10} \left[ ({}^{\circ}D_t^{\alpha} x_N)(t_i) + x_N(t_i) - \frac{29}{9} + \frac{2^{\circ} \exp(-9x_N(t_i))}{9} - 2t \right]^2 \quad (15.3)$$

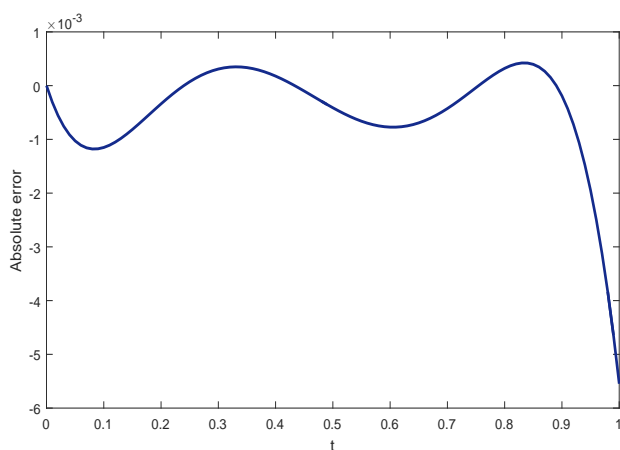
که در نهایت برای تقریب  $({}^{\circ}D_t^{\alpha} x_N)(t_i)$  از رابطه (۳.۳) استفاده می‌کنیم و رابطه (۱۵.۳) بادستور بهینه سازی `fminsearch` حل می‌شود.

در شکل ۹.۳ نمودارهای مربوط به جواب دقیق و جواب تقریبی  $x_N(t)$  که با روش شبکه عصبی (۱۰.۳) با پایه تیلور و لژاندر حل شده است را مشاهده می‌کنید که در بازه  $[0, 1]$  برهم منطبق می‌باشند در این مثال نیز  $N = 5$  و  $M = 10$  در نظر گرفته شده است. هم چنین خطای جواب تقریبی و جواب دقیق با پایه تیلور و لژاندر به ازای  $\alpha = 0.9$  در شکل‌های ۱۰.۳ و ۱۱.۳ آورده شده است.

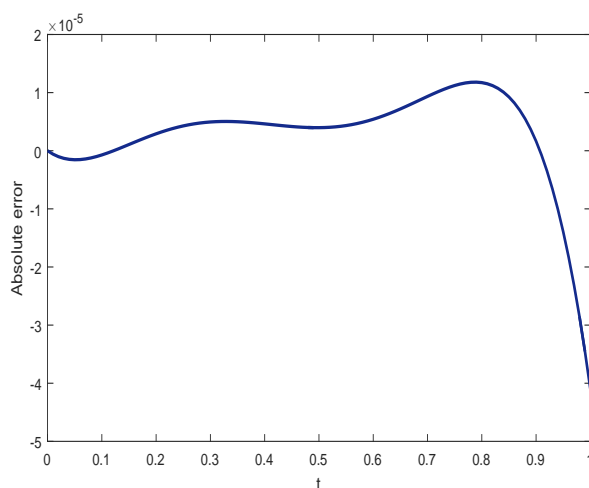


شکل ۹.۳: نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی با چند جمله‌ای تیلور و لژاندر





شکل ۱۰.۳: نمودار خطای جواب تقریبی و جواب دقیق با پایه تیلور



شکل ۱۱.۳: نمودار خطای جواب تقریبی و جواب دقیق با پایه لژاندر

همانطور که ملاحظه می‌کنید در دو مثال فوق نمودار مربوط به جواب تقریبی و جواب دقیق بر هم منطبق می‌باشند و روش مطرح شده با جواب دقیق سازگار است و در نمودار خطاها مشاهده می‌کنید که چندجمله‌ای لژاندر خطای جواب را بطور قابل توجهی کاهش می‌دهد.

## ۶.۳ مثال‌های عددی

در این بخش به منظور نشان دادن اثر روش پیشنهادی مثال‌های عددی خطی و غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم. در مثال‌های زیر تعداد نرون‌ها را ۳ و تعداد نقاط را ۱۰ در نظر گرفتیم. از

آنجایی که چند جمله ای لژاندر خطا را بطور قابل توجهی کاهش می‌دهد، در مثال‌های زیر از چندجمله‌ای‌های لژاندر به عنوان توابع پایه استفاده شده است. برای دستیابی به دقت بالاتر (بخصوص در موارد غیرخطی) می‌توان پارامترهای ANN (از جمله نقاط آزمایشی، تعداد نرون‌ها و...) را تغییر داد. محاسبه‌ی جواب‌های عددی برای مثال‌های زیر در نرم افزار متلب قابل دسترسی است.

مثال ۱۶.۳. معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = x^2(t) - \frac{2}{(t+1)^2}, \quad x(0) = -2, \quad t \in [0, 1] \quad (16.3)$$

جواب تقریبی مساله‌ی فوق بر اساس روش پیشنهادی ANN که شرایط اولیه را حفظ می‌کند به صورت زیر است:

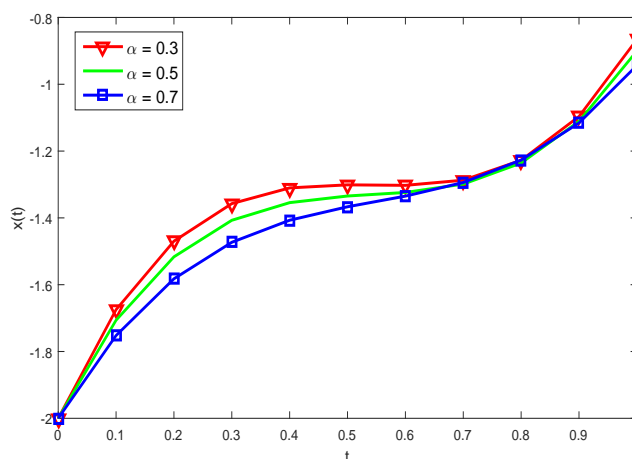
$$x_N(t) = -2 + tN(t)$$

با جایگزین کردن جواب تقریبی بالا در رابطه (۱۶.۳) و تقسیم بازه‌ی  $[0, 1]$  به  $M = 10$  به مساله بهینه سازی زیر می‌رسیم:

$$\min \sum_{i=1}^{10} \left[ ({}^C D_t^\alpha x_N)(t_i) - (x_N(t_i))^2 + \frac{2}{(x_N(t_i) + 1)^2} \right]^2 \quad (17.3)$$

که برای تقریب  $({}^C D_t^\alpha x_N)(t_i)$  از رابطه (۳.۳) استفاده می‌کنیم و در نهایت رابطه (۱۷.۳) با دستور بهینه سازی حل می‌شود.

نمودار جواب تقریبی مساله به ازای  $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$  در شکل ۱۲.۳ نشان داده شده است.



شکل ۱۲.۳: نمودار جواب تقریبی مساله (۱۶.۳) به ازای  $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$

مثال ۲۰.۳. معادله دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید.

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = -x(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad t \in [0, 1] \quad (18.3)$$

که شرط دوم برای  $\alpha > 1$  ذکر شده است. جواب تقریبی مساله (۱۸.۳) به صورت زیر است:

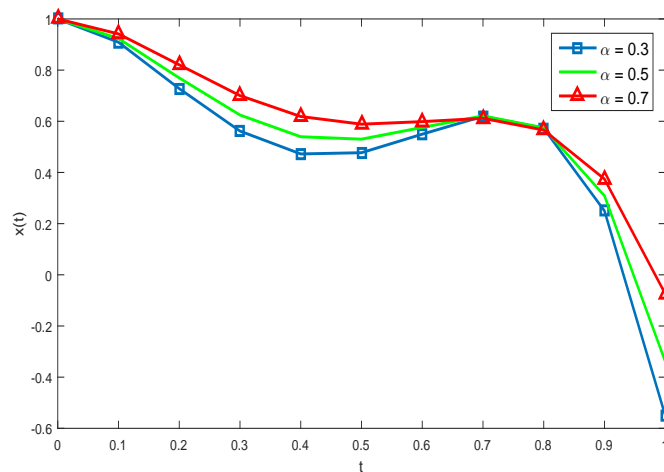
$$x_N(t) = 1 + t^2 N(t).$$

همانند مثال قبل با جایگزین کردن جواب تقریبی در معادله‌ی اصلی و همچنین گسسته سازی بازه  $[0, 1]$  به مساله بهینه سازی زیر میرسیم:

$$\min \sum_{i=1}^{10} \left[ ({}_{t_0}^{CF} D_t^\alpha x_N)(t_i) + (x_N(t_i)) \right]^2 \quad (19.3)$$

که در نهایت برای تقریب  $({}_{t_0}^{CF} D_t^\alpha x_N)(t_i)$  از رابطه (۳.۳) استفاده می‌کنیم و رابطه (۱۹.۳) با دستور بهینه سازی `fminsearch` حل می‌شود.

نمودار جواب تقریبی مساله به ازای  $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$  در شکل ۱۳.۳ نشان داده شده است.



شکل ۱۳.۳: نمودار جواب تقریبی مساله (۱۸.۳) به ازای  $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$

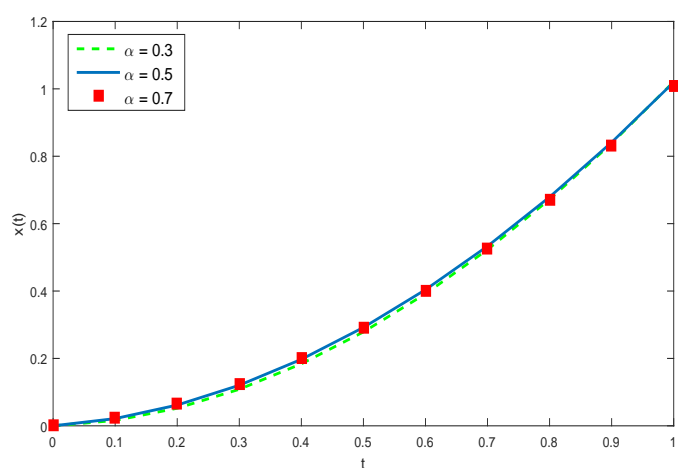
مثال ۳.۶.۳. معادله دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید.

$$({}_0^{CF} D_t^\alpha x)(t) = -x(t) + t^2 + \frac{2t^{(2-\alpha)}}{\Gamma(3-\alpha)}, \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 1] \quad (20.3)$$

جواب تقریبی مساله فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$x_N(t) = tN(t).$$

مشابه روند مثال‌های قبل نمودار جواب تقریبی مساله به ازای  $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$  در شکل ۱۴.۳ نشان داده شده است.



شکل ۱۴.۳: نمودار جواب تقریبی مساله (۲۰.۳) به ازای  $\alpha = 0/3, 0/5, 0/7$

## فصل ۴

# حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه عصبی و چندجمله‌ای‌های کسری

### ۱.۴ مقدمه

در فصل قبل با استفاده از مشتق کاپوتو- فابریسیو و شبکه عصبی با پایه چندجمله‌ای‌های تیلور و لژاندر، رده‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری را مورد بررسی قرار دادیم و ملاحظه کردیم که چند جمله‌ای‌های لژاندر در مقایسه با چندجمله‌ای‌های تیلور، خطای مساله را به‌طور قابل توجهی کاهش می‌دهد. در این فصل قصد داریم چندجمله‌ای‌های لژاندر کسری را به عنوان پایه در نظر بگیریم تا با استفاده از مشتق کسری جواب تقریبی رده‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری را بدست آوریم.

## ۲.۴ حل معادلات کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های کسری

چندجمله‌ای‌های کلاسیک همچون لژاندر، چبیشف<sup>۱</sup> و لاگرانژ<sup>۲</sup> نقش بسیار مهمی در حل مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل کلاسیک ایفا کرده‌اند. این چندجمله‌ای‌ها دارای توان‌های صحیح هستند. مشتق کسری از این چندجمله‌ای‌ها، توابعی با توان‌های کسری هستند. این ویژگی باعث می‌شود که با افزایش تعداد چندجمله‌ای‌ها، خطا با نرخ بسیار کمی کاهش پیدا کند. یکی از روش‌های موثر برای حل مسائل مربوط به حسابان کسری استفاده از توابع پایه به صورت  $\Phi_n = \sum_{i=0}^n c_i x^{i\alpha}$  است. مشتق کسری از این چندجمله‌ای‌ها توابعی با توان‌های کسری است که باعث می‌شود نرخ همگرایی این چندجمله‌ای‌ها نسبت به توابع پایه کلاسیک سریعتر باشد. در ادامه پس از معرفی کوتاهی از برخی چندجمله‌ای‌های مهم کسری، به معرفی چندجمله‌ای‌های لژاندر کسری و بیان روش پیشنهادی می‌پردازیم.

### ۱.۲.۴ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه کسری

فرض کنید  $\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$  نقاط درونیابی مفروض در بازه  $[0, 1]$  باشند. در این صورت زامین چندجمله‌ای لاگرانژ  $G_j(t)$  از مرتبه  $N-1$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$$G_j(t) = \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \frac{t - t_i}{t_j - t_i}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

با استفاده از تغییر متغیر  $t = \tau^\alpha$ ، زامین چندجمله‌ای لاگرانژ کسری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_j(t)(\tau)^\alpha = \prod_{i=0, i \neq j}^{N-1} \frac{\tau^\alpha - t_i}{t_j - t_i}, \quad 2 < j < N.$$

که در آن  $t_i = \tau_i^\alpha$ . مشابه چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، ویژگی زیر برای چندجمله‌ای لاگرانژ کسری نیز برقرار است:

$$G_j(t)^\alpha(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = \tau_j, \\ 0, & \tau \neq \tau_j. \end{cases} \quad (1.4)$$

زائر نوری<sup>۳</sup> و همکاران [۶۵] روشی دیگر برای محاسبه این چندجمله‌ای‌ها ارائه داده‌اند. در

<sup>۱</sup>Chebyshev

<sup>۲</sup>Lagrang

<sup>۳</sup>Zayernouri

این مقاله چندجمله‌ای‌های لژاندر کسری از درجه  $N + \alpha - 1$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h_j^\alpha(t) = \prod_{k=0, k \neq j}^N \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

برای مطالعه بیشتر در مورد این چندجمله‌ای‌ها، مراجع [۱۲، ۶۵] را ملاحظه کنید.

## ۲.۲.۴ چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری

با جایگزینی مشتق کسری با مشتق معمولی در فرمول رودریگز که در ۱.۳.۳ عنوان شد، تعمیمی از چندجمله‌ای‌های لژاندر از مرتبه کسری بدست می‌آید [۵۰]. پیچیدگی این چندجمله‌ای‌ها امکان استفاده از آن‌ها را در مسائل کاربردی دشوار ساخته است از این رو در مرجع [۲۷] با استفاده از تغییر متغیر  $t = x^\alpha$  در فرم بازگشتی (۳.۳) چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری انتقال یافته در بازه  $[0, 1]$  را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری مورد مطالعه قرار داده‌اند.

اگر  $FL_m^\alpha$  چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری از درجه  $m$  باشد آن‌گاه

$$FL_{m+1}^\alpha(x) = \frac{\Upsilon m + 1}{m + 1} (\Upsilon x^\alpha - 1) FL_m^\alpha(x) - \frac{m}{m + 1} FL_{m-1}^\alpha(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

که  $FL_1^\alpha(x) = \Upsilon x^\alpha - 1$  و  $FL_0^\alpha(x) = 1$  می‌باشد.

فرم تحلیلی این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است:

$$FL_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} x^{k\alpha}.$$

این چندجمله‌ای‌ها با توجه به تابع وزن  $w(x) = x^{\alpha-1}$  در بازه  $[0, 1]$  متعامد هستند.

$$\int_0^1 FL_m^\alpha(x) FL_n^\alpha(x) w(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{(\Upsilon n + 1)^\alpha}, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

تابع دلخواه  $f$  متعلق به بازه  $[0, 1]$  قابل تقریب با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری به صورت زیر است:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n FL_n^\alpha(t), \quad c_n = \alpha (\Upsilon n + 1) \int_0^1 f(t) FL_n^\alpha(t) w(t) dt.$$

## ۳.۲.۴ چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری

چندجمله‌ای‌های چبیشف در بازه  $[0, 1]$  تعریف می‌شوند و از فرمول بازگشتی زیر قابل محاسبه می‌باشند [۲۹]:

$$T_{i+1}(x) = \Upsilon x T_i(x) - T_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

## ۵۲ حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه عصبی و چندجمله‌ای‌های کسری

که  $T_0(x) = 1$  و  $T_1(x) = x_0$ . رابطه تعامد برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

با استفاده از تغییر متغیر  $x = \frac{\sqrt{t}}{L}$  چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته  $T_m^*(t)$  از مرتبه  $m$  در بازه  $[0, L]$  به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$T_m^*(t) = T_m\left(\frac{\sqrt{t}}{L} - 1\right),$$

که  $T_0(x) = 1$  و  $T_1(x) = \frac{\sqrt{t}}{L} - 1$ . فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته  $T_m^*(t)$  از مرتبه  $m$  در بازه  $[0, L]$  به صورت زیر است:

$$T_m^*(t) = n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{(n+k-1)! 2^{2k}}{(n-k)! (2k)! L^k} t^k.$$

مشابه چندجمله‌ای‌ها لژاندر مرتبه کسری می‌توان با تغییر متغیر  $t = x^\alpha$  چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری به صورت زیر را تعریف کرد [۲۱].

$$FT_n^\alpha(x) = n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{(n+k-1)! 2^{2k}}{(n-k)! (2k)! L^k} x^{k\alpha}.$$

خاصیت تعامد برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است:

$$\int_0^L FT_m^\alpha(x) FT_n^\alpha(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{Lx^\alpha - x^{2\alpha}}} dx = \delta_{mn} h_n,$$

که  $h_n = \frac{b_n}{\alpha}$  با  $b = 0$  و  $n \geq 1$  و  $b_n = 1$ . تابع دلخواه  $f$  متعلق به بازه  $[0, L]$  قابل تقریب با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری به صورت زیر است:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n FT_n^\alpha(t),$$

و ضرایب  $c_n$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$C_n = \frac{1}{h_n} \int_0^L f(t) FT_n^\alpha(t) w(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

از آنجا که هدف ما پیدا کردن جواب تقریبی با استفاده از مشتق کسری کاپوتو و بکارگیری شبکه عصبی با چندجمله‌ای کسری لژاندر می‌باشد، بنابراین به همین تعاریف بسنده می‌کنیم. خواننده علاقه‌مند می‌تواند چندجمله‌ای‌های کسری دیگر را در مراجع [۵۵، ۵۲، ۴، ۱۳] مطالعه نماید.



## ۳.۴ مشتق کسری کاپوتو

در طول دهه‌های اخیر به دلیل کاربردهای فراوان معادلات دیفرانسیل کسری در زمینه‌های مختلف علمی تلاش‌های فراوانی در زمینه حل معادلات دیفرانسیل کسری انجام شده است. در اینجا از معادلات دیفرانسیل کسری از نوع کاپوتو استفاده خواهیم کرد.

**تعریف ۱.۳.۴.** اگر  $\alpha > 0$  و  $\alpha \notin \mathbb{N}$  و  $n = [\alpha]$  و  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، آنگاه

$${}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (2.4)$$

معادله دیفرانسیل کسری از نوع کاپوتو نامیده می‌شود. برای این معادله شرایط اولیه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D^k x(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

در این فصل ما با مفاهیمی سر و کار داریم که در دیفرانسیل کسری بیشترین کاربرد را دارند و توسط کاپوتو معرفی شده‌اند.

**تعریف ۲.۳.۴.** فرض کنید  $x(t)$  یک تابع پیوسته مشتق پذیر تا مرتبه  $n$ ام بر روی دامنه محدود  $[a, b]$  باشد. مشتق کسری کاپوتو  $({}^C D_t^\alpha x)(t)$  از درجه  $\alpha > 0$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = \begin{cases} \frac{d^n x(t)}{dt^n}, & \alpha = n \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau, & n-1 < \alpha \leq n. \end{cases} \quad (3.4)$$

یادآوری می‌شود که در تعریف کاپوتو مشتق یک عدد ثابت صفر است. به همین ترتیب مشتق کاپوتو برای چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^C D_t^\alpha x^k = \begin{cases} 0, & k < n, \quad k \in \{0, 1, \dots\} \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{(k-\alpha)}, & k \geq n, \quad k \in \{0, 1, \dots\} \\ \text{or} & k > n-1, \quad k \notin \{0, 1, \dots\}. \end{cases} \quad (4.4)$$

## ۴.۴ پیاده سازی روش

معادله دیفرانسیل کسری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = f(t, x(t)); \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (5.4)$$

هدف ما در این بخش کاربرد شبکه عصبی برای تقریب زدن جواب‌های رده‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری با مقدار اولیه بر روی یک دامنه محدود است.

## ۵۴ حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه عصبی و چندجمله‌ای‌های کسری

روش پیشنهادی در این بخش از چند جمله‌ای‌های کسری لژاندر برای تقریب جواب مساله استفاده می‌کند و معادله دیفرانسیل اصلی را به یک مساله بهینه‌سازی تبدیل می‌کند و سپس مساله مینیمم‌سازی بوسیله‌ی یک شبکه عصبی کسری لژاندر حل می‌شود تا پارامترها را با دقت بالا محاسبه نماید.

در این روش تابع فعال ساز را چندجمله‌ای‌های لژاندر کسری در نظر می‌گیریم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} N(t) &= \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(\xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i FL^{(i-1)(\alpha)}(\xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i FL^{(i-1)(\alpha)}(w_i t + b_i) \end{aligned} \quad (6.4)$$

با تعریف مدل شبکه، جواب تقریبی  $x_N(t)$  مسئله با توجه به شرایط اولیه، طبق حالت‌های ذکر شده در ۱.۳.۳ بدست می‌آید و هم‌چنین برای مشتق‌گیری کسری از مشتق کسری کاپوتو که در بخش ۳.۳.۱ عنوان شد استفاده می‌کنیم و جواب مشتق به ازای  $\alpha$  داده شده در مسئله حاصل می‌شود.

در این روش پیشنهادی چندجمله‌ای لژاندر کسری که به عنوان توابع فعال ساز برای تعیین جواب تقریبی به کار می‌بریم، معادله دیفرانسیل کسری (۵.۴) را با استفاده از حداقل میانگین مربعات به مساله بهینه‌سازی زیر تبدیل می‌کند:

$$\min \sum_{i=1}^m \left[ ({}^C D_t^\alpha x_N)(t_i) - f(t_i, x_N(t_i)) \right]^2 \quad (7.4)$$

سپس مسئله مینیمم‌سازی با استفاده از دستور بهینه‌سازی و شبکه عصبی مورد نظر حل می‌شود. در ادامه مثال‌های عددی را برای نشان دادن کارایی روش در نرم افزار متلب مشاهده خواهیم کرد.

## ۵.۴ مثال‌های عددی

در این بخش به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی مثال‌های عددی خطی و غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم. در مثال‌های زیر تعداد نرون‌ها را ۵ در نظر گرفتیم.

به منظور بدست آوردن دقت بالاتر (بخصوص در موارد غیرخطی) می‌توان پارامترهای ANN (از جمله نقاط آزمایشی، تعداد نرون‌ها و...) را تغییر داد.

محاسبه‌ی جواب‌های عددی برای مثال‌های زیر در نرم افزار متلب قابل دسترسی است.

مثال ۱.۵.۴. معادله دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید.

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = -x(t) + t^2 + \frac{2t^{(2-\alpha)}}{\Gamma(3-\alpha)}, \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 1] \quad (8.4)$$

جواب دقیق معادله دیفرانسیل مذکور به ازای هر  $\alpha$ ،  $x(t) = t^2$  می‌باشد. همچنین جواب تقریبی مساله (۸.۴) طبق حالت‌های ذکر شده در ۱.۴.۳ به صورت زیر بدست می‌آید:

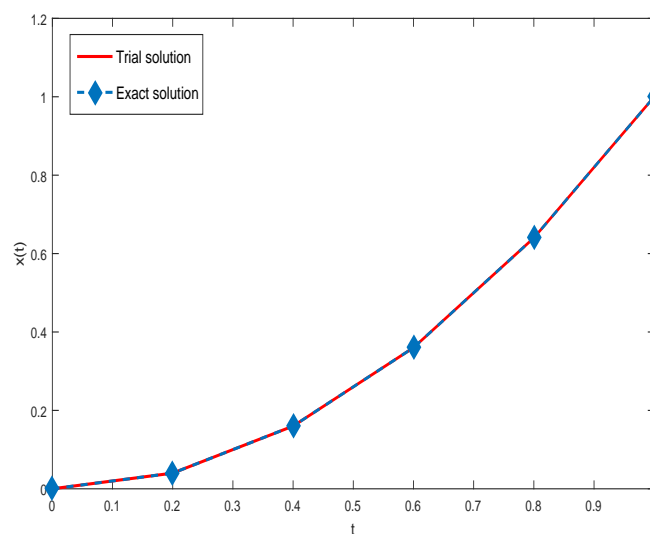
$$x_N(t) = tN(t),$$

با جایگزین کردن جواب تقریبی بالا در رابطه (۸.۴) و تقسیم بازه  $[0, 1]$  به  $M = 10$  و همچنین  $N = 5$  به مساله بهینه سازی زیر می‌رسیم:

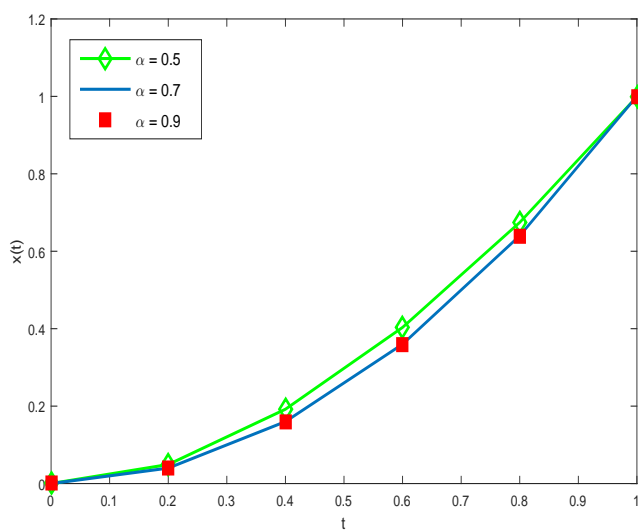
$$\min \sum_{i=1}^{10} \left[ ({}^C D_t^\alpha x_N)(t_i) + x_N(t_i) - (x_N(t_i))^2 - \frac{2x_N(t_i)^{(2-\alpha)}}{\Gamma(3-\alpha)} \right]^2, \quad (9.4)$$

که برای تقریب  $({}^C D_t^\alpha x_N)(t_i)$  از رابطه (۱.۴) استفاده می‌کنیم و در نهایت رابطه (۹.۴) با دستور بهینه سازی `fminsearch` حل می‌شود.

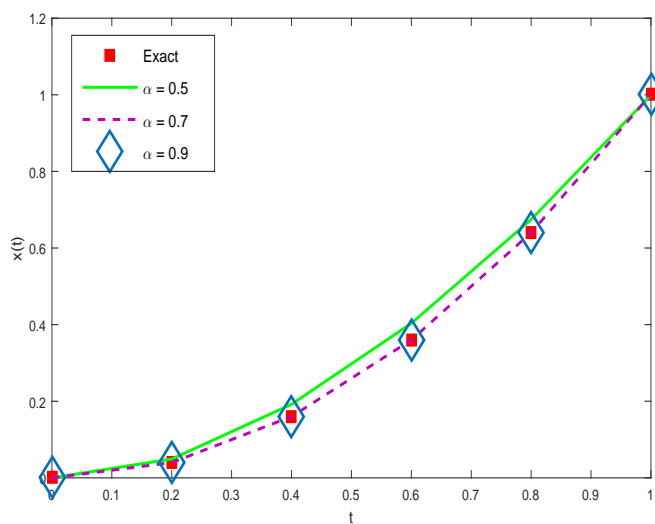
نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی مساله به ازای  $\alpha = 1$  در شکل ۸.۴ و نمودار جواب تقریبی مساله به ازای  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$  در شکل ۲.۴ نشان داده شده است. همچنین خطای جواب تقریبی و جواب دقیق مساله در شکل ۴.۴ نشان داده شده است. مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی به ازای  $\alpha$  های مختلف در شکل ۳.۴ آورده شده است.



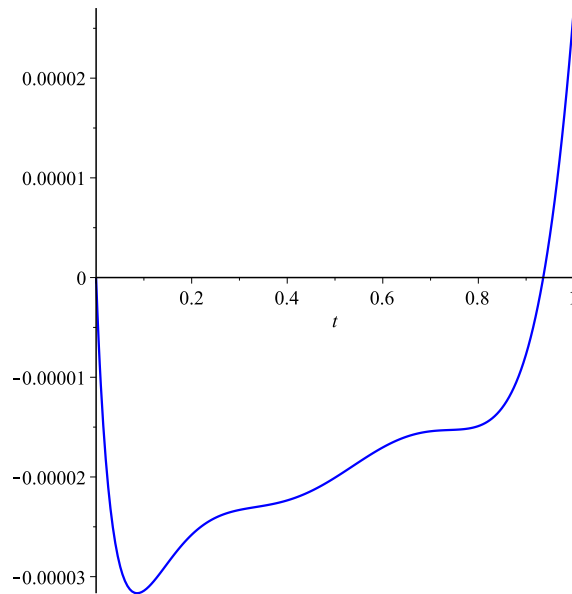
شکل ۱.۴: نمودار جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای  $\alpha = 1$



شکل ۲.۴: نمودار جواب تقریبی مساله (۸.۴) به ازای  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$



شکل ۳.۴: نمودار مربوط به جواب دقیق و جواب تقریبی با  $\alpha$  های مختلف



شکل ۴.۴: نمودار مربوط به خطای جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای  $\alpha = 1$

**مثال ۲.۵.۴.** معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = x^2(t) - \frac{2}{(t+1)^2}, \quad x(0) = -2, \quad t \in [0, 1] \quad (10.4)$$

جواب دقیق معادله دیفرانسیل مذکور به ازای  $\alpha = 1$  به صورت زیر است:

$$x(t) = \frac{-2}{t+1}.$$

جواب تقریبی مساله‌ی فوق بر اساس روش پیشنهادی ANN که شرایط اولیه را حفظ می‌کند به صورت زیر است:

$$x_N(t) = -2 + tN(t).$$

همانند مثال قبل و با استفاده از روش معرفی شده در این فصل و با در نظر گرفتن  $M = 10$  و  $N = 5$  نتایج حل معادله دیفرانسیل (۱۰.۴) بر روی بازه  $[0, 1]$  در نمودارهای مربوطه قابل ملاحظه است.

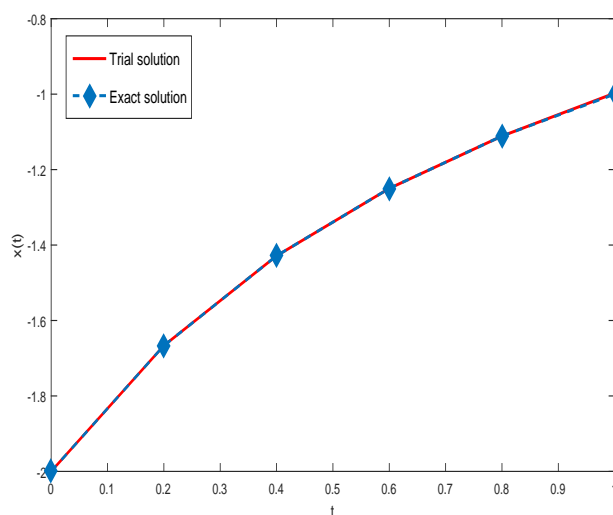
با جایگزین کردن جواب تقریبی در معادله‌ی اصلی و همچنین گسسته سازی بازه  $[0, 1]$  به مساله بهینه سازی زیر می‌رسیم:

$$\min \sum_{i=1}^{10} \left[ ({}^C D_t^\alpha x_N)(t_i) - (x_N(t_i))^2 + \frac{2}{(x_N(t_i) + 1)^2} \right]^2, \quad (11.4)$$

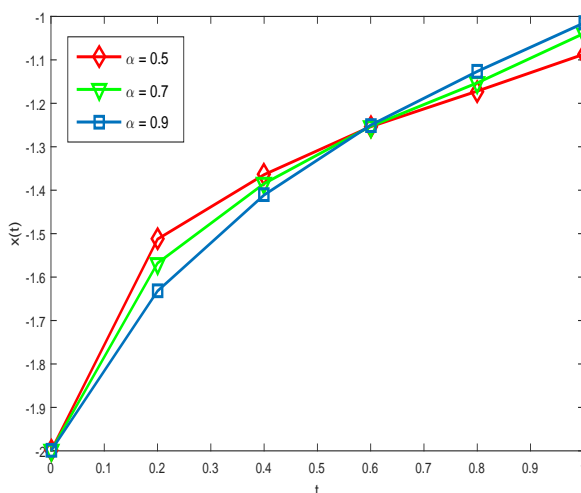
که در نهایت برای تقریب  $({}^C D_t^\alpha x_N)(t_i)$  از رابطه (۱.۴) استفاده می‌کنیم رابطه (۱۱.۴) با دستور بهینه سازی `fminsearch` حل می‌کنیم.

## ۵۸ حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه عصبی و چندجمله‌ای‌های کسری

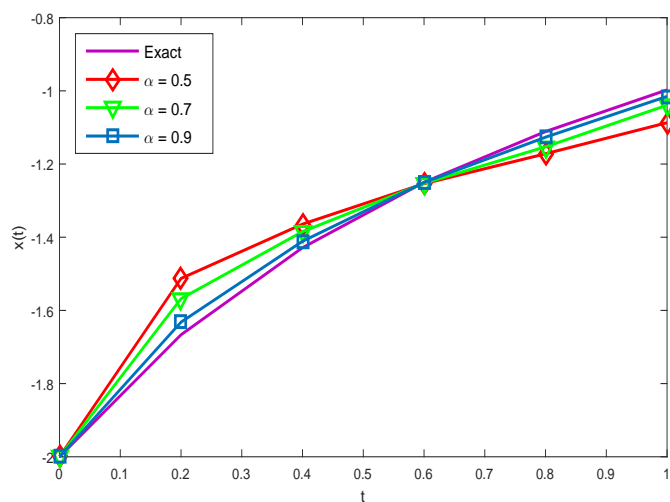
نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی مساله (۱۰.۴) به ازای  $\alpha = 1$  در شکل ۵.۴ و نمودار جواب تقریبی مساله به ازای  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$  در شکل ۶.۴ نشان داده شده است. همچنین خطای جواب تقریبی و جواب دقیق مساله در شکل ۸.۴ نشان داده شده است. مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی به ازای  $\alpha$  های مختلف در شکل ۷.۴ آورده شده است.



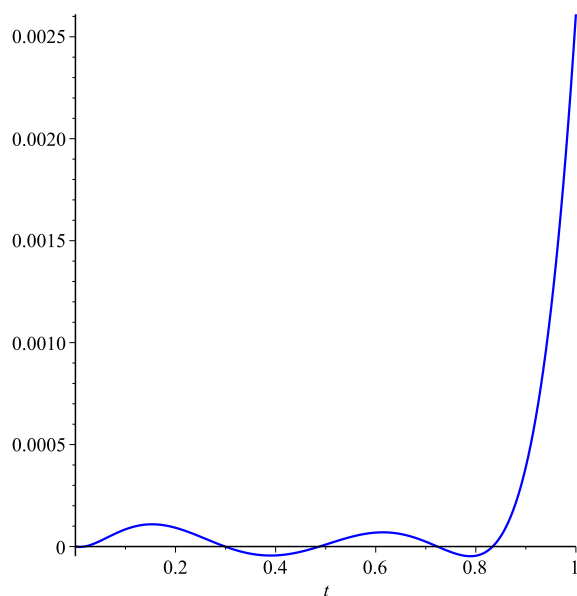
شکل ۵.۴: نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی به ازای  $\alpha = 1$



شکل ۶.۴: نمودار مربوط به جواب تقریبی به ازای  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$



شکل ۷.۴: نمودار مربوط به جواب دقیق و جواب تقریبی با  $\alpha$  های مختلف



شکل ۸.۴: نمودار مربوط به خطای جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای  $\alpha = 1$

مثال ۳.۵.۴. معادله دیفرانسیل خطی کسری زیر را در نظر بگیرید.

$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = t^2 + 2t - x(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 1] \quad (12.4)$$

جواب معادله دیفرانسیل مذکور به ازای  $\alpha = 1$  به صورت زیر است:

$$x(t) = t^2$$

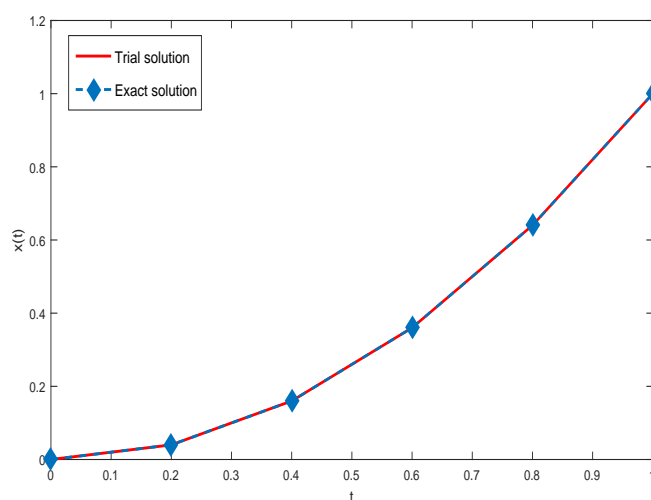
## ۶۰ حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه عصبی و چندجمله‌ای‌های کسری

بنابر آنچه در این بخش گفته شد ابتدا جواب تقریبی را بدست می‌آوریم که به صورت زیر است:

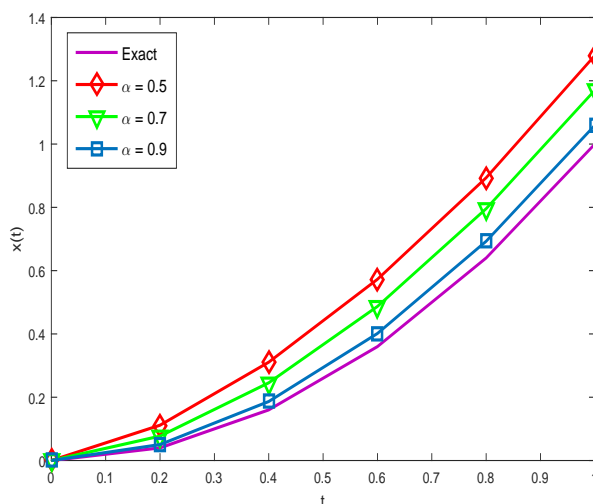
$$x_N(t) = tN(t)$$

همانند مثال‌های قبل و طبق روش معرفی شده و با در نظر گرفتن  $M = 10$  و  $N = 5$  نتایج عددی معادله دیفرانسیل مذکور در نمودارهای زیر قابل ملاحظه است.

نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی مساله به ازای  $\alpha = 1$  در شکل ۹.۴ و نمودار جواب تقریبی مساله به ازای  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$  در شکل ۱۰.۴ نشان داده شده است. همچنین خطای جواب تقریبی و جواب دقیق مساله در شکل ۱۲.۴ نشان داده شده است. مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی به ازای  $\alpha$  های مختلف در شکل ۱۱.۴ آورده شده است.

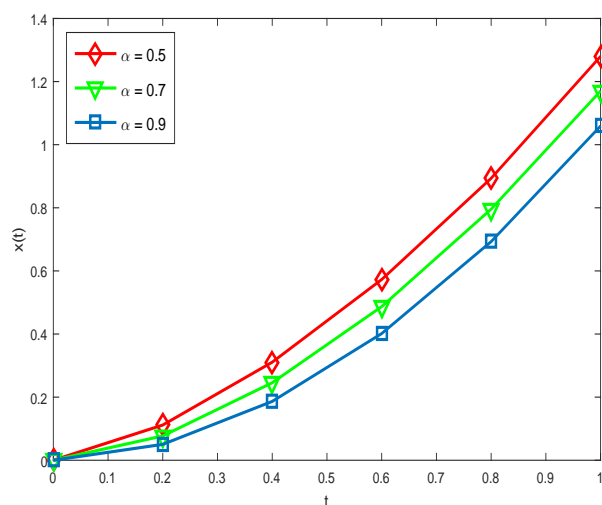


شکل ۹.۴: نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی به ازای  $\alpha = 1$

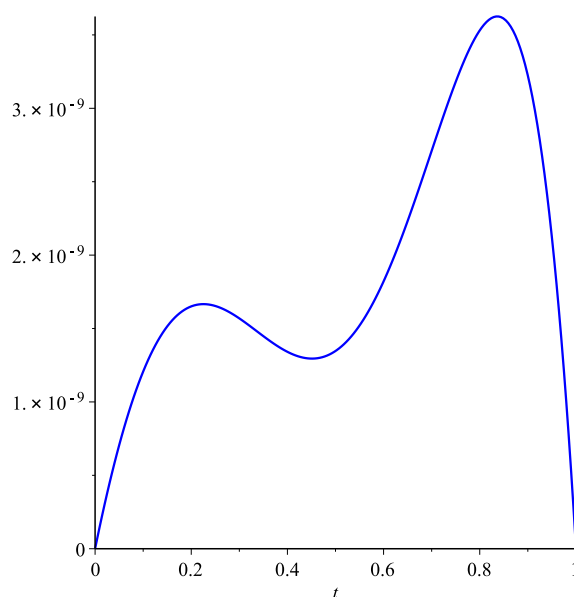


شکل ۱۱.۴: نمودار مربوط به جواب دقیق و جواب تقریبی با  $\alpha$  های مختلف





شکل ۱۰.۴: نمودار جواب تقریبی مساله (۱۲.۴) به ازای  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$



شکل ۱۲.۴: نمودار مربوط به خطای جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای  $\alpha = 1$

مثال ۴.۵.۴. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه کسری وابسته به زمان با شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید:

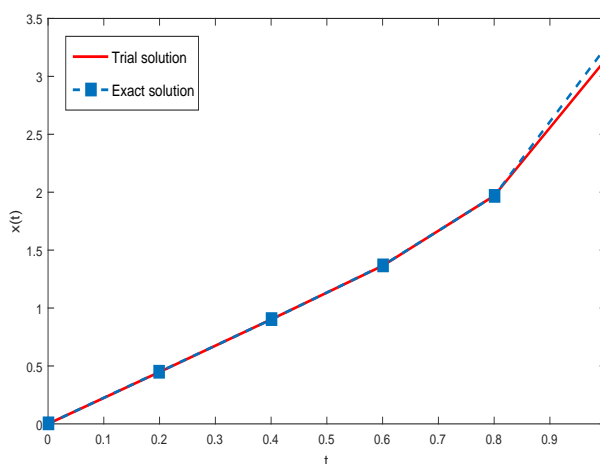
$$({}^C D_t^\alpha x)(t) = \frac{\Gamma(9)}{\Gamma(9-\alpha)} t^{8-\alpha} + t^8 + \frac{9}{4} t^\alpha + \frac{9}{4} \Gamma(\alpha+1) - x(t), \quad x(0) = 0 \quad (13.4)$$

جواب معادله دیفرانسیل مذکور به ازای  $\alpha = 1$  بصورت زیر است:

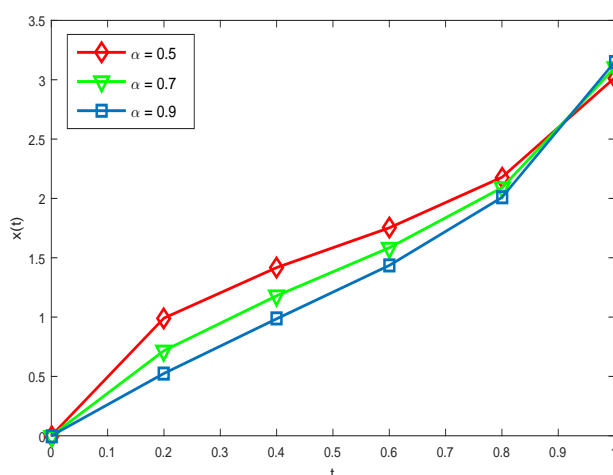
$$x(t) = t^8 + \frac{9}{4} t.$$

## ۶۲ حل معادلات دیفرانسیل کسری با شبکه عصبی و چندجمله‌ای‌های کسری

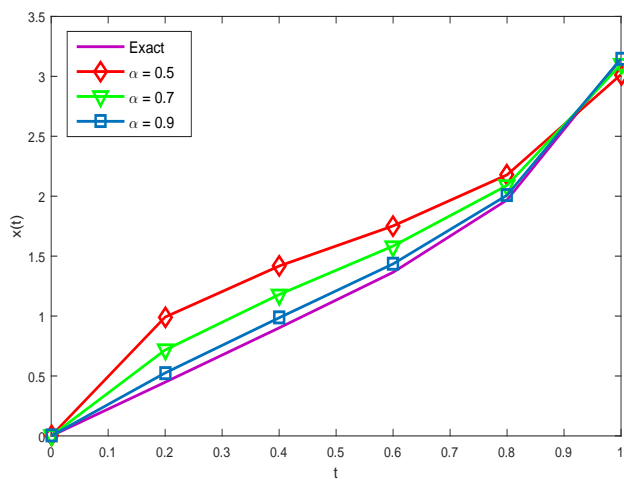
همانند مثال‌های قبل و با استفاده از روش معرفی شده در این بخش، با در نظر گرفتن  $M = 10$  نتایج در شکل‌های زیر قابل مشاهده می‌باشد. نمودار جواب دقیق مساله (۱۳.۴) در شکل ۱۳.۴ و نمودار جواب تقریبی مساله به ازای  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$  در شکل ۱۴.۴ نشان داده شده است. همچنین خطای جواب تقریبی و جواب دقیق مساله در شکل ۱۶.۴ نشان داده شده است. مقایسه جواب دقیق و جواب تقریبی به ازای  $\alpha$  های مختلف در شکل ۱۵.۴ آورده شده است.



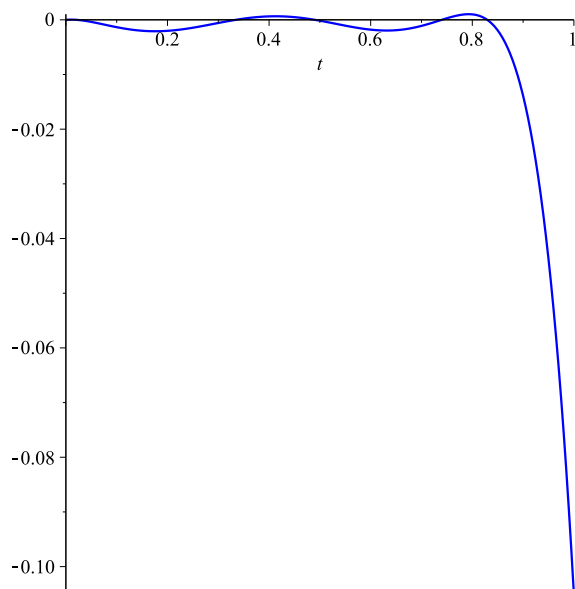
شکل ۱۳.۴: نمودار جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای  $\alpha = 1$



شکل ۱۴.۴: نمودار مساله (۱۳.۴) به ازای  $\alpha = 0.5, 0.7, 0.9$



شکل ۱۵.۴: نمودار مربوط به جواب دقیق و جواب تقریبی با  $\alpha$  های مختلف



شکل ۱۶.۴: نمودار مربوط به خطای جواب تقریبی و جواب دقیق به ازای  $\alpha = 1$

## ۶.۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه به ارائه دو روش عددی برای حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری به کمک شبکه عصبی پرداختیم به طوری که در مشتق‌گیری از مشتقات کسری کاپوتو و کاپوتو-فابریسیو استفاده کردیم. ملاحظه کردیم که استفاده از توابع پایه همچون چند جمله‌ای‌های لژاندر با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد، خطا را بطور قابل توجهی کاهش می‌دهد. نتایج بدست آمده از این روش در مقایسه با چند جمله‌ای‌های تیلور نشان از کارایی این توابع در حل معادلات دیفرانسیل کسری دارد. همچنین استفاده از مشتق کاپوتو-فابریسیو در مشتق‌گیری از معادلات دیفرانسیل کسری در بیشتر توابع بخصوص توابع نمایی و توابع مثلثاتی قابل توجه است.

همچنین استفاده از توابع پایه کسری همچون چند جمله‌ای‌های لژاندر مرتبه کسری در شبکه عصبی با مشتق کاپوتو را در این پایان نامه بررسی کردیم و نتایج را مشاهده نمودیم. با توجه به وجود چند جمله‌ای‌های جدید با خواص جالب و متفاوت، به عنوان پیشنهاد برای کارهای آتی می‌توان از چند جمله‌ای‌های مرتبه کسری همچون مونتس-لژاندر<sup>۴</sup>، برنشتاین و لاگر<sup>۵</sup> کسری به عنوان پایه در شبکه عصبی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری استفاده کرد و همچنین می‌توان مشتق‌های کسری جدید از جمله ژومقی و همدیس پذیر<sup>۶</sup> را در این مسائل مورد استفاده قرار داد.

---

<sup>۴</sup> Muntz-Legendre

<sup>۵</sup> Laguerre

<sup>۶</sup> Comformable

# مراجع

- [۱] ضمیری آ، (۱۳۸۷)، پایان نامه کارشناسی ارشد: ”شبکه‌های عصبی مصنوعی و بهینه‌سازی”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۲] مقدس م، عفتی س و اسحاق نژاد م، ششمین کنفرانس بین المللی، یک شبکه عصبی برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی نامحدب.
- [3] Agarwal, R. P. (1953).” A propos d’une note de M. Pierre Humbert”.**CR Acad. Sci. Paris**, 236(21), 2031-2032.
- [4] Alshbool, M. H. T., Bataineh, A. S., Hashim, I., Isik, O. R. (2017). ”Solution of fractional-order differential equations based on the operational matrices of new fractional Bernstein functions” **Journal of King Saud University-Science**, 29(1), 1-18.
- [5] Bouzerdoum. A. and Pattison. T. R. (1993). ”Neural network for quadratic optimization with bound constraints” **IEEE transactions on neural networks**, 4(2), 293-304.
- [6] Caputo, M., Fabrizio, M. (2015). ”A new definition of fractional derivative without singular kernel” **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, 1(2), 1-13.
- [7] Diethelm, K., Ford, J. M., Ford, N. J., Weilbeer, M. (2006).” Pitfalls in fast numerical solvers for fractional differential equations” **Journal of computational and applied mathematics**, 186(2), 482-503.
- [8] Diethelm, K. (2010). ”**The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type**”. Springer.
- [9] Effati, S., Baymani, M. (2005). ”A new nonlinear neural network for solving convex nonlinear programming problems” **Applied mathematics and computation**, 168(2), 1370-1379.
- [10] Effati, S., Ghomashi, A., Abbasi, M. (2011). ” A Novel Recurrent Neural Network for Solving MLCPs and its Application to Linear and Quadratic Programming Problems” **Asia-Pacific Journal of Operational Research**, 28(04), 523-541.

- [11] Effati, S., Ghomashi, A., Nazemi, A. R. (2007). "Application of projection neural network in solving convex programming problems" **Applied Mathematics and Computation**, 188(2), 1103-1114.
- [12] Ejlali, N., Hosseini, S. M. (2017). "A pseudospectral method for fractional optimal control problems" **Journal of Optimization Theory and Applications**, 174(1), 83-107.
- [13] El-Sayed, A. M. (2000), "Laguerre polynomials of arbitrary (fractional) orders" **Applied Mathematics and Computation**, 109(1), .1-9
- [14] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. G. (1953). "Higher transcendental functions, vol I" **I (New York, 1953)**.
- [15] Haykin, S. (1994). "**Neural networks: a comprehensive foundation**" Prentice Hall PTR.
- [16] Hebb, D. O. (2005). "**The organization of behavior: A neuropsychological theory**" Psychology Press.
- [17] Hewitt, E., Stromberg, K. (2013). "**Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable**". Springer-Verlag.
- [18] Hopfield, J. J. (1987). "**Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities**". In Spin Glass Theory and Beyond: An Introduction to the Replica Method and Its Applications (pp. 411-415).
- [19] Hopfield, J. J., Tank, D. W. (1985). " "Neural" computation of decisions in optimization problems" **Biological cybernetics**, 52(3), 141-152.
- [20] Hornik, K., Stinchcombe, M., White, H. (1989). " Multilayer feedforward networks are universal approximators" **Neural networks**, 2(5), 359-366.
- [21] Hosseinpour, S., Nazemi, A., Yavari, M. (2016). " A numerical method based on fractional-order Chebyshev polynomials for solving delay fractional optimal control problems", 9th International Iranian Operation Research conference, Shiraz, Iran, .
- [22] I.M. Gel'fand and G.E. Shilov, **Generalized Functions 1–5**, Academic Press, 1968.
- [23] Jafarian, A., Mokhtarpour, M. and Baleanu, D. (2017). "Artificial neural network approach for a class of fractional ordinary differential equation" **Neural Computing and Applications**, 28(4), 765-773.

- [24] J.J. Mckeown, F. Stella, G. Hall, **Some numerical aspects of the training problem for feed-forward neural nets**, *Neural Networks* 10 (8) (1997) 1455–1463.
- [25] J. Stanley,(1990). *Introduction to Neural Networks* third ed., Sierra Madre.
- [26] Jumarie, G. (2008).” Modeling fractional stochastic systems as non-random fractional dynamics driven by Brownian motions” **Applied Mathematical Modelling**, 32(5), 836-859.
- [27] Kazem, S., Abbasbandy, S., Kumar, S. (2013). ”Fractional-order Legendre functions for solving fractional-order differential equations” **Applied Mathematical Modelling**, 37(7), 5498-5510.
- [28] Kennedy, M. P., Chua, L. O. (1988). ”Neural networks for nonlinear programming” **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 35(5), 554-562.
- [29] Khader, M. M., Hendy, A. S. (2012).” An efficient numerical scheme for solving fractional optimal control problems” **International Journal of Nonlinear Science**, 14(3), 287-296.
- [30] Khanna, T. (1990). ”Foundations of neural networks” **Reading: Addison Wesley, 1990**.
- [31] Kilbas A. A.,Srivastava H. M., J. Trujillo.(2006) ” **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**”, Elsevier Science B. V, Amsterdam.
- [32] Lapedes, A. S. and Farber, R. M. (1988), ”How neural nets work”. In **Neural information processing systems** (pp. 442-456).
- [33] Lippmann, R. (1987). ”An introduction to computing with neural nets” **IEEE Assp magazine**, 4(2), 4-22.
- [34] Liu, B., Jammes, B. (1999, June). ”**Solving ordinary differential equations by neural networks**” In *Proceeding of 13th European Simulation Multi-Conference Modelling and Simulation: A Tool for the Next Millennium*, Warsaw, Poland (Vol. 14).
- [35] Maa, C. Y., Schanblatt, M. A. (1992). ”A two-phase optimization neural network” **IEEE Transactions on Neural Networks**, 3(6), .1003-1009
- [36] Malek, A. and Beidokhti, R. S. (2006), ”Numerical solution for high order differential equations using a hybrid neural network—optimization method” **Applied Mathematics and Computation**, 183(1), 260-271.
- [37] McCulloch, W. S., Pitts, W. (1943). ”A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity” **The bulletin of mathematical biophysics**, 5(4), 115-133.

- [38] Miller, K. S., Ross, B. (1993). "An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations".
- [39] Minsky, M., Papert, S. A., Bottou, L. (2017). "**Perceptrons: An introduction to computational geometry**". MIT press.
- [40] Minsky, M., Papert, S. (1969). "Perceptrons".
- [41] Mittag-Leffler, G. M. (1903). " Sur la nouvelle fonction  $E_\alpha(x)$ " **CR Acad. Sci. Paris**, 137(2), 554-558.
- [42] Mittag-Leffler, G. (1905). " Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogene" **Acta mathematica**, 29(1), 101-181.
- [43] Moghaddas, M., Effati, S. (2013) " A novel recurrent neural network based on ncp function for solving convex nonlinear optimization problems" in The 5 th Iranian Conference on Applied Mathematics, Hamadan, Iran, Bu-Ali Sina University.
- [44] Moghaddas, M., Effati, S. (2013). "A Recurrent neural network for solving nonconvex nonlinear optimization problem" In The 44 th Annual Iranian Mathematics Conference Ferdowsi University of Mashhad, 27-30 August 201.
- [45] Podlubny, I. (1999). "Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, vol. 198" of **athematics in Science and Engineering**.
- [46] P. Picton,(2000). Neural Networks, second ed. Palgrave, Great Britain.
- [47] Rodriguez-Vazquez, A., Dominguez-Castro, R., Rueda, A., Huertas, J. L., and Sanchez-Sinencio, E. (1990). "Nonlinear switched capacitor'neural'networks for optimization problems" **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 37(3), 384-398.
- [48] Rosenblatt, F. (1961). "**Principles of neurodynamics. perceptrons and the theory of brain mechanisms**" (No. VG-1196-G-8). CORNELL AERONAUTICAL LAB INC BUFFALO NY.
- [49] Rosenblatt, F. (1958). "The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain" **Psychological review**, 65(6), 386.
- [50] Rida, S., Yousef, A. M. (2011). " On the fractional order Rodrigues formula for the Legendre polynomials" **Advances and Applications in Mathematical Sciences**, 10(5), 509-517.



- [51] Rumelhart, D. E., Hinton, G. E. and Williams, R. J. (1986). "Learning representations by back-propagating errors". **nature**, 323(6088), 533.
- [52] Safaie, E., Farahi, M. (2014). "An approximation method for numerical solution of multi-dimensional feedback delay fractional optimal control problems by Bernstein polynomials" **Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization**, 4(1), 77-94.
- [53] Schalkoff, R. J. (1997). " **Artificial neural networks** " (Vol. 1) New York: McGraw-Hill.
- [54] Tank, D., Hopfield, J. J. (1986). "Simple 'neural' optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit" **IEEE transactions on Circuits and Systems**, 33(5), 533-541.
- [55] Taslakyian, A. K. (1984). "Some properties of Legendre quasi-polynomials with respect to a Müntz system". **Mathematics**, 2, 179-189.
- [56] Werbos, P. J. (1974). "New tools for prediction and analysis in the behavioral science" Ph. D. Dissertation, Harvard University.
- [57] Widrow, B. (1962). "Generalization and information storage in network of adaline 'neurons'" **Self-organizing systems-1962**, .435-462
- [58] Widrow, B., Hoff, M. E. (1960). "Adaptive switching circuits" (No. TR-1553-1). STANFORD UNIV CA STANFORD ELECTRONICS LABS.
- [59] Widrow, B., Lehr, M. A. (1990). "30 years of adaptive neural networks: perceptron, madaline, and backpropagation" **Proceedings of the IEEE**, 78(9), 1415-1442.
- [60] Widrow, B., Winter, R. (1988). "Neural nets for adaptive filtering and adaptive pattern recognition" **Computer**, 21(3), 25-39.
- [61] Xia, Y., Feng, G., Wang, J. (2008). "A novel recurrent neural network for solving nonlinear optimization problems with inequality constraints" **IEEE Transactions on Neural Networks**, 19(8), 1340-1353.
- [62] Xia, Y., Leung, H., Wang, J. (2002). "A projection neural network and its application to constrained optimization problems" **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, 49(4), 447-458.
- [63] Xia, Y., Wang, J. (2004). "A recurrent neural network for nonlinear convex optimization subject to nonlinear inequality constraints" **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, 51(7), .1385-1394

- [64] Xia, Y., Wang, J. (2005). "A recurrent neural network for solving nonlinear convex programs subject to linear constraints" **IEEE Transactions on Neural Networks**, 16(2), 379-386.
- [65] Zayernouri, M., Karniadakis, G. E. (2014). "Fractional spectral collocation method" **SIAM Journal on Scientific Computing**, 36(1), A40-A62.
- [66] Zhang, S., Constantinides, A. G. (1992). "Lagrange programming neural networks" **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing**, 39(7), 441-452.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Fractional Integral	انتگرال کسری
Cauchy's Integral	انتگرال کوشی
Betta Function	تابع بتا
Analytic Function	تابع تحلیلی
Activation Function	تابع فعال ساز
Gamma Function	تابع گاما
Mittage-Leffler Function	تابع میتاژ- لفلر
Normal function	تابع نرمال
Laplace Transform	تبدیل لاپلاس
Numerical Techniques	تکنیک‌های عددی
Fractional Calculus	حسابان کسری
Absolute Error	خطای مطلق
Net	شبکه
Legendre Neural Network	شبکه عصبی لژاندر
Artificial Neural Network	شبکه عصبی مصنوعی
Numerical Simulation	شبیه سازی عددی
Orthogonal Polynomial	چند جمله‌ای متعامد
Initial Condition	شرط اولیه
Leibnitz rule	قاعده لایپ‌نیتز
Fractional Derivative	مشتق کسری
Left fractional derivative	مشتق کسری چپ
Right fractional derivative	مشتق کسری راست
Fractional Differential Equations	معادلات دیفرانسیل کسری
Numerical result	نتایج عددی
Singular point	نقطه تکین
Kernel	هسته



# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Approximate Solution . . . . .	جواب تقریبی
Approximation . . . . .	تقریب
Caputo-Fabrizio Derivative . . . . .	مشتق کاپوتو- فابریسیو
Caputo Derivative . . . . .	مشتق کاپوتو
Equation . . . . .	معادله
Exact Solution . . . . .	جواب دقیق
Feedback Neural Network . . . . .	شبکه عصبی بازگشتی
Feed-forward Neural Network . . . . .	شبکه عصبی فیدفوروارد
Fractional Calculus . . . . .	حساب کسری
Fractional Derivative . . . . .	مشتق کسری
Fractional Integral . . . . .	انتگرال کسری
Fractional Integration . . . . .	انتگرال گیری جزءبه‌جزء
Fractional Polynomials . . . . .	چندجمله ای‌های کسری
Legendre Polynomial . . . . .	چندجمله ای لژاندر
Legendre Fractional Polynomial . . . . .	چندجمله ای لژاندر کسری
Travelling Salesman . . . . .	فروشنده دوره گرد
Trial Solution . . . . .	جواب آزمایشی
Weight Function . . . . .	تابع وزن

## Abstract

The purpose of this thesis is to introduce a new method using artificial neural networks for some of the approximation solutions of fractional differential equations with the use of fractional polynomials and fractional derivatives. Classical polynomials such as Legendre, Lagrange and Chebyshev have played a very important role in solving the problems of classical differential equations. These polynomials have correct powers. The fractional derivative of these polynomials is a function of fractional powers. This feature will reduce the error by increasing the number of polynomials. One of the effective methods for solving the problems of fractional calculus is the use of base functions as  $\Phi_n = \sum_{i=0}^n c_i x^{i\alpha}$ . For this purpose, in this thesis, polynomials are based on the approximation of the fractional differential equations with the artificial neural networks. First, we use classical polynomials as the base with a Caputo-Fabrizio derivative and then use fractional polynomials for the base with a Caputo derivative artificial neural networks. Finally, the numerical simulation of the efficiency of the method is shown.

Keywords: Artificial Neural Network, Fractional Differential Equations, Fractional Polynomial, Caputo Derivative, Caputo-Fabrizio Derivative.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

**MSc Thesis in: Numerical Analysis**

**Solving a class of fractional differential equations using optimization technique based on artificial neural network training**

**By: Elham Shokri**

**Supervisor**

**Dr. Mehdi Ghovatmand**

**Advisor**

**Dr. Hojjat Ahsani tehrani**

**January 2018**