بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی برخی از خواص انرژی فاصله گراف‌ها

نگارنده: زهره اسبومحلی

استاد راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف

بهمن ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (3) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم زهره اسبومحلی با شماره دانشجویی 9401894 رشته ریاضی کاربردی گرایش گراف و ترکیبیات تحت عنوان بررسی برخی از خواص انرژی فاصله گراف‌ها که در تاریخ 1396/11/09 با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: عالی) ☒ **مردود** ☐

نوع تحقیق: نظری ■ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
1- استادراهنمای اول	دکتر صادق رحیمی شعرباف	استادیار	
2- استادراهنمای دوم	-		
3- استاد مشاور	-		
4- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهرداد غزنوی	استادیار	غزنوی
5- استاد ممتحن اول	دکتر نادر جعفری‌راد	دانشیار	
6- استاد ممتحن دوم	دکتر عبدالله آل‌هوز	استادیار	A.A

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده : دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

تقدیم به آنان که وجودم جز هدیه وجودشان نیست

پدر و مادر مهربانم

و پشتوانه همیشگی‌ام برادر عزیزم

سپاس

خدای را که هر چه دارم از اوست

به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم.

سپاس گذارم از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند و همچنین والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چرا که این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.

زهره اسبومحلی

بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **زهره اسبومحلی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی برخی از خواص انرژی فاصله گراف‌ها** ، تحت راهنمایی **صادق رحیمی شعرباف** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهره اسبومحلی

بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه برخی از خواص انرژی فاصله مورد مطالعه وبررسی قرار می‌گیرد. ابتدا موضوع انرژی گراف و بعضی از کران‌هایی برای انرژی گراف و انرژی لاپلاسین و مروری بر کران‌های انرژی لاپلاسین داریم، سپس کران‌هایی برای انرژی فاصله تعیین می‌گردد. در ادامه انرژی پوشش کمینه فاصله و کران‌هایی برای آن و انرژی پوشش کمینه فاصله تعدادی از گراف‌های استاندارد مانند: گراف کامل، تاج، ستاره و دوبخشی ارائه می‌شود و هم‌چنین انرژی غالب کمینه فاصله و کران بالا و پایین برای آن و انرژی غالب کمینه فاصله تعدادی از گراف‌های استاندارد مانند: گراف کامل، تاج و ستاره مورد برسی قرار می‌گیرد. انتهای پایان نامه مربوط به انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین می‌باشد که کرانی برای آن و انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین گراف کامل و ستاره را بدست آورده‌ایم که به صورت ابتکاری تدوین شده‌است.

کلمات کلیدی: انرژی فاصله، مجموعه پوششی، انرژی پوشش کمینه فاصله، انرژی غالب کمینه فاصله، انرژی پوشش کمینه لاپلاسین فاصله.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. زهره اسبومحلی، " انرژی لاپلاسین پوشش فاصله‌ای حداقل "، **دهمین کنفرانس نظریه گراف و ترکیبیات جبری**، دانشگاه یزد،۲۷ الی ۲۸ دی ماه ۱۳۹۶.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

تاریخچه وتعریف

۱.۱ تاریخچه

نظریه گراف ابزار بسیار مناسبی برای تحقیق در زمینه‌های گوناگون مانند نظریه کدگذاری، تحقیق در عملیات، آمار، شبکه‌های الکتریکی، علوم رایانه ، شیمی و ... است. در سال ۱۹۴۰ کولسن [۱] فرمول انتگرالی برای انرژی یک گراف ارائه داد. پس از آن گاتمن [۲] در سال ۱۹۷۸ مفهوم انرژی گراف را برای گراف‌های ساده تعمیم داد. مطالعه انرژی گراف به جز در رشته ریاضی، در شیمی نیز بخش فعالی را تشکیل می‌دهد و از آن برای تخمین انرژی π-الکترون مولکول‌ها استفاده می‌شود. از سوی دیگر نیز انواع دیگر از انرژی توسط اشخاص متفاوت مطرح شد که هر کدام در علوم مختلط نقش بهینه دارند. موضوع انرژی فاصله اولین بار توسط گاتمن و همکاران در سال ۲۰۰۸ مورد مطالعه قرار گرفت.گاتمن و ژو[۳] در [۱۸] انرژی لاپلاسین گراف G را در سال ۲۰۰۶ تعریف کرده‌اند. اخیراً آدیا [۴] و همکارانش در [۲۲] انرژی حداقل پوشش گراف G را و همچنین راجاش[۵] [۲۱] در سال ۲۰۱۳ انرژی پوشش فاصله‌ای حداقل گراف G را مطرح کرده‌اند.

---

[۱] Colson
[۲] Gutman
[۳] Zhou
[۴] Adiga
[۵] Rajesh

۲.۱ تعاریف پایه

بعضی از تعاریف زیر از منبع [۱] آورده شده است.

تعریف ۱.۲.۱. گراف G یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ متشکل از مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ رأس‌ها و مجموعه‌ی $E(G)$ یال‌ها و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G، یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های G را نسبت می‌دهد. اگر e یک یال و u و v رأس‌هایی باشند، به قسمی که $\psi_G(e) = uv$، آنگاه می‌گویند e، u را به v وصل می‌کند، رأس‌های u و v را دو سر یال e می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. یک گراف با n رأس و m یال را یک $(n,m)-$**گراف** می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۱. یک **گشت** از گراف G دنباله‌ی ناتهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ است، که جمله‌های آن متناوباً رأس‌ها و یال‌ها هستند، به طوری که برای $1 \leq i \leq k$، دو انتهای e_i، v_i و v_{i-1} هستند. W گشتی از v_0 به v_k یا گشت (v_0, v_k)، است. رأس‌های v_0 و v_k را به ترتیب مبدأ و انتهای W و $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ رأس‌های داخلی W می‌نامند. عدد صحیح k طول W است .

تعریف ۴.۲.۱. اگر یال‌های $e_1, e_2, \dots, e_k$ گشت مجزا در W باشند، W را **گذر** می‌نامند، علاوه بر یال‌ها، رأس‌های $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ مجزا باشند، W را **مسیر** می‌نامند.

تعریف ۵.۲.۱. گراف G **همبند** است اگر برای هر جفت u و v از رئوس G، u به v متصل باشد، به عبارت دیگر برای هر جفت از رأس‌های u و v یک $uv-$ مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۶.۲.۱. یک مسیر بسته، **دور** نامیده می‌شود. یا به عبارت دیگر دور مسیری است که ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند.

تعریف ۷.۲.۱. گراف G از مرتبه n را که هر دو رأس آن مجاور باشند، گراف **کامل** می‌نامند و با نماد K_n نمایش داده می‌شود. یک گراف کامل از مرتبه n، $(n-1)$ـ منظم است و $m = \frac{n(n-1)}{2}$ یال دارد.

تعریف ۸.۲.۱. گراف دو بخشی گرافی است که مجموعه رأس‌ها را بتوان به دو زیر مجموعه‌ی X و Y به طوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. چنین افراز (X,Y) را دوبخشی کردن گراف می‌نامند.

تعریف ۹.۲.۱. گراف دو بخشی کامل، یک دو بخشی ساده با افراز (X,Y) است که در آن هر رأس X به هر رأس Y متصل است. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$، چنین گرافی را به وسیله‌ی $K_{m,n}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۰.۲.۱. درجه رأس v در G تعداد یال‌های G است که v بر آن‌ها واقع است. و آن را با $d_G(v)$، نشان می دهند.

تعریف ۱۱.۲.۱. ماتریس $n \times n$ که درایه‌های روی قطر اصلی آن درجه هر رأس می‌باشد **ماتریس قطری درجه‌ای** می‌نامند. که با $deg(G)$ نشان می‌دهند.

$$deg(G) = diag(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$$

تعریف ۱.۲.۱۲. گراف G را که به ازای هر $v \in V$ داریم $d(v) = r$ گراف $r-$**منتظم** می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۱۳. هر گراف همبند و بدون دور را **درخت** می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۱۴. گراف همبند G با n رأس و m یال بطوریکه $m = n$، را که شامل فقط یک دور است را گراف **تک دور** می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۱۵. اگر u، v دو رأس دلخواه در یک گراف G باشند، **فاصله** بین u، v، برابر طول کوتاهترین مسیر موجود آن دو رأس می‌باشد که آن را با $d(u,v)$ یا $d_G(u,v)$ نشان می‌دهند. اگر G دارای چنین مسیری نباشد آنگاه $d(u,v) = \infty$ است.

تعریف ۱.۲.۱۶. [۱۰] **ماتریس مجاورت** گراف G با n رأس، یک ماتریس مربعی $n \times n$ است که با $A = A(G) = a_{ij}$ نشان داده می‌شود به طوریکه:

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & v_i \textbf{مجاور} v_j \\ ۰ & \textbf{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

تعریف ۱.۲.۱۷. [۱۳] **ماتریس فاصله** گراف G با n رأس، یک ماتریس مربعی $n \times n$ است که آن را با $D = D(G) = [d_{ij}]$ نشان می‌دهند به طوریکه d_{ij} (درآیه‌های ماتریس فاصله) فاصله بین رأس v_i و v_j در گراف G می‌باشد. یعنی

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j) & i \neq j \\ ۰ & i = j \end{cases}$$

ملاحظه ۱.۲.۱. ماتریس فاصله درخت را با $D(T)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۱۸. طول کوتاهترین دور در یک گراف را **کمر**[۶] گراف می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۱۹. بیشترین فاصله بین هر دو رأس از گراف G را قطر[۷] می‌نامند، یعنی:

$$daim(G) = \max_{u,v \in V(G)} \{d(u,v)\}$$

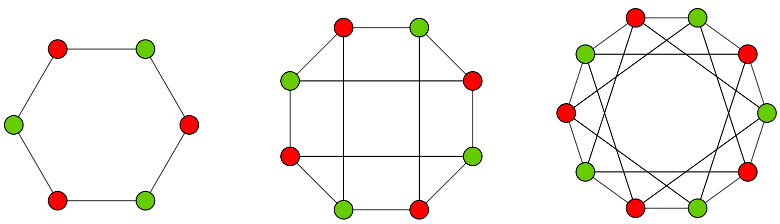
تعریف ۱.۲.۲۰. [۲] مجموعه مقادیر ویژه ماتریس گراف G همراه با مرتبه تکرار هر یک از این مقادیر ویژه را **طیف گراف**[۸] می‌نامند. اگر مقادیر ویژه را با $\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n$ و مرتبه تکرار هر یک را با $m(\lambda_۱), m(\lambda_۲), \ldots, m(\lambda_n)$، به ترتیب نشان دهند آنگاه طیف گراف G را به شکل

$$Spec(G) = \begin{pmatrix} \lambda_۱ & \lambda_۲ & \ldots & \lambda_n \\ m(\lambda_۱) & m(\lambda_۲) & \ldots & m(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

[۶] girth
[۷] diam
[۸] spectrum

تعریف ۲۱.۲.۱. [۳] زیر مجموعه C از V یک **مجموعه پوششی**[۹] از گراف G می‌نامیم اگر هر یال G حداقل یک رأس در C داشته باشد. هر مجموعه پوشش با کمترین تعداد عضو **پوشش رأسی کمینه**[۱۰] نامیده می شود.

تعریف ۲۲.۲.۱. **گراف تاج**[۱۱] را بصورت S_n° نشان می‌دهیم که برای $n \geq ۲$ با مجموعه رئوس $\{u_۱, u_۲, \dots, u_n, v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های $\{u_i v_j : ۱ \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر S_n° یک نوع گراف کامل دو بخشی $K_{n,n}$ می‌باشد، که یال‌های $u_i v_j : i = j$ آن حذف شده است.



شکل ۱.۱:

تعریف ۲۳.۲.۱. یک زیر مجموعه D از V **مجموعه غالب**[۱۲] از G نامیده می‌شود اگر هر رأس از $V \setminus D$ با حداقل یک رأس از D مجاور باشد.

تعریف ۲۴.۲.۱. مجموع فاصله بین تمام جفت رأس‌های گراف G را **اندیس وینر**[۱۳] می‌نامند:

$$W(G) = \sum_{i<j} d(v_i, v_j)$$

[۹] covering set
[۱۰] minimum covering set
[۱۱] Crown graph
[۱۲] dominating set
[۱۳] Wiener index

فصل ۲

انرژی گراف ها

۱.۲ انرژی گراف و بعضی از کران‌های آن

در این فصل گراف‌های مورد بررسی ساده و بدون جهت می‌باشند.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G از مرتبه n باشد، دترمینان مرتبط با ماتریس A بصورت $det(\lambda I - A)$، یک چندجمله‌ای از درجه n با متغیر λ می‌باشد. چند جمله‌ای شامل $det(\lambda I - A) = ۰$ را **معادله مشخصه** A نامیده می‌شود. با استفاده از قضیه اساسی جبر این معادله دارای n ریشه است. این ریشه ها را **مقادیر ویژه** A می‌نامند.

از آنجایی که ماتریس مجاورت یک ماتریس متقارن حقیقی می‌باشد، پس مقادیر ویژه آن همگی حقیقی می‌باشند. مقادیر ویژه λ_i را بصورت نزولی مرتب می‌کنیم $\lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_۲ \leq \lambda_۱$. بعضی از این ریشه‌ها می‌توانند تکراری باشند.

تعریف ۲.۱.۲. [۴] مجموع قدر مطلق مقادیر ویژه ماتریس مجاورت را **انرژی گراف** [۱] می‌نامند. و آن را بصورت رابطه زیر نشان می‌دهند:

$$E(G) = \sum_{i=۱}^{n} |\lambda_i|. \qquad (۱.۲)$$

[۱] Graph energy

اگر A ماتریس محاورت گراف G از مرتبه n و λ_i مقادیر ویژه ماتریس باشند با توجه به خواص مقادیر ویژه روابط زیر برقرار است.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2m. \tag{2.2}$$

بعضی از خواص مربوط به کران‌های بالا و پایین برای انرژی گراف در ادامه آورده شده است.

نتیجه ۱.۱.۲. [۲۸] فرض کنید G یک گراف از مرتبه n، و $\bar{G}$ مکمل آن باشد، آنگاه:

$$E(G) + E(\bar{G}) \geq 2(n-1).$$

و برابری زمانی می‌باشد که $G = K_n$ یا $G = \bar{K_n}$.

نتیجه ۲.۱.۲. [۲۸] فرض کنید B گراف دوبخشی باشد که مجموعه رأس‌های آن X و Y بطوری که $|X| = m$، $|Y| = n$ و $\bar{B}$ مکمل آن باشد آنگاه:

$$E(B) + E(\bar{B}) \geq 2\sqrt{mn}. \tag{3.2}$$

برابری زمانی می‌باشد که $B \cong K_{n,m}$.

نتیجه ۳.۱.۲. [۲۸] فرض کنید $G - e$ زیر گرافی باشد که از حذف یال e از گراف G باشد، آنگاه:

$$E(G) \leq E(G-e) + 2. \tag{4.2}$$

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید G یک (n,m) گراف همبند باشد و A ماتریس مجاورت آن باشد آنگاه داریم :

$$\sqrt{2m + n(n-1)|detA|^{\frac{2}{n}}} \leq E(G) \leq \sqrt{2mn}. \tag{5.2}$$

برهان. [۲] بنابر معادله ۲.۲ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2m$$

لذا

$$E(G)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |, \lambda_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + 2\sum_{i<j} |\lambda_i||\lambda_j|,$$
$$= 2m + n(n-1)AM\{|\lambda_i||\lambda_j|\},$$

که درآن $AM\{|\lambda_i||\lambda_j|\}$ نشان‌دهنده میانگین حسابی $\frac{n^2-n}{n}$ جمله مجزا $|\lambda_i||\lambda_j|$ است $(i<j)$. میانگین هندسی این جملات عبارت است از:

$$GM\{|\lambda_i||\lambda_j|\} = (\Pi_{i<j}|\lambda_i||\lambda_j|)^{\frac{۲}{n^۲-n}} = \left(\Pi_{i=۱}^{n}|\lambda_i|^{n-۱}\right)^{\frac{۲}{n^۲-n}},$$
$$= \left(\Pi_{i=۱}^{n}|\lambda_i|\right)^{\frac{۲}{n}} = |detA|^{\frac{۲}{n}}.$$

کران پایین یک دنباله است که در واقع میانگین هندسی اعداد مثبت همواره از میانگین حسابی تجاوز نمی‌کند.
واریانس اعداد $|\lambda_i|$ نیز برابر است با:

$$Var\{|\lambda_i|\} = AM\{|\lambda_i|^۲\} - [AM\{|\lambda_i|\}]^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}|\lambda_i|^۲ - \left(\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}|\lambda_i|\right)^۲,$$
$$= \frac{۲m}{n} - (\frac{E(G)}{n})^۲.$$

و چون واریانس اعداد غیرمنفی همواره بزرگتر یا مساوی صفر است لذا نتیجه حاصل می‌شود.

□

ملاحظه ۱.۱.۲. کران بالا در قضیه فوق برابر است اگر و تنها اگر G یک گراف پوچ ($m=۰$ بعنوان مثال $G=\bar{K_n}$) یا $K_۲$ باشد.

نتیجه ۴.۱.۲. [۲] فرض کنید گراف G دارای m یال باشد آنگاه:

$$۲\sqrt{m} \leq E(G) \leq ۲m. \tag{۶.۲}$$

برهان. با توجه به معادله ۲.۲ داریم:

$$\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j = -m,$$

پس

$$E(G)^۲ = ۲m + ۲\sum_{i<j}|\lambda_i||\lambda_j| \geq ۲m + ۲\left|\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j\right| = ۲m + ۲|-m| = ۴m,$$

و این نتیجه می‌دهد که:

$$E(G) \geq ۲\sqrt{m}.$$

اگر G دارای رأس تنها باشد آنگاه هر رأس، یک مقدار ویژه صفر را نتیجه می‌دهد. ولی این رئوس تنها، نه E و نه m را تغییر نمی‌دهند. پس ما گراف G ای را در نظر می‌گیریم که رأس تنها نداشته باشد و دارای m یال نیز باشد. برای هر گراف داریم $n < ۲m$. درنتیجه:

$$\sqrt{۲mn} \leq \sqrt{۲m(۲m)} = ۲m,$$

که ترکیب آن با کران بالا در قضیه قبل نتیجه می‌دهد که

$$E(G) \leq ۲m.$$

□

$E(G) = ۲\sqrt{m}$ برابری زمانی اتفاق می‌افتد که G یک گراف دو بخشی $k_{a,b}$ که $a.b = m$

ملاحظه ۲.۱.۲. [۱۸] فرض کنید G یک (n, m)-گراف باشد:

۱. $E(G) \geq ۰$، $E(G) = ۰$ اگر وتنها اگر $m = ۰$ باشد.

۲. اگر گراف G شامل دو مؤلفه، $G_۱$ و $G_۲$ باشد آنگاه $E(G) = E(G_۱) + E(G_۲)$.

۳. اگر گراف G شامل چند مؤلفه،که یک مؤلفه ی آن را $G_۱$ بنامیم و بقیه مؤلفه‌های آن رأس تنها باشند آنگاه $E(G) = E(G_۱)$.

اخیراً کولن[۲] و مولتن[۳] قضیه زیر را اثبات کرده‌اند.

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنید G یک (n, m) گراف همبند باشد آنگاه:

$$E(G) \leq \frac{۲m}{n} + \sqrt{(n-۱)\left[۲m - \frac{۴m^۲}{n^۲}\right]}.$$

برهان. [۲۵] فرض کنید $\lambda_n \ldots \geq \lambda_۲ \geq \lambda_۱$ مقادیر ویژه از G باشند آنگاه داریم:

$$\lambda_۱ \geq \frac{۲m}{n},$$

از معادله داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^۲ = ۲m,$$

بنابراین

$$\sum_{i=۲}^{n} \lambda_i^۲ = ۲m - \lambda_۱^۲,$$

با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز و دو $(n-۱)$ بردار $(۱, ۱, \ldots, ۱)$ و $(|\lambda_۲|, |\lambda_۳|, \ldots, |\lambda_n|),$ نابرابری زیر را دریافت می‌کنیم:

$$\sum_{i=۲}^{n} |\lambda_i| \leq \sqrt{(n-۱)(۲m - \lambda_۱^۲)},$$

داریم:

$$E(G) \leq \lambda_۱ + \sqrt{(n-۱)\left(۲m - \lambda_۱^۲\right)}, \tag{۷.۲}$$

حال تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = x + \sqrt{(n-۱)\left(۲m - x^۲\right)},$$

[۲] Koolen
[۳] Moulton

تابع در فاصله زیرکاهشی می‌باشد:

$$\sqrt{\frac{2m}{n}} \leq x \leq \sqrt{2m},$$

با توجه به این که $2m \geq n$ داریم:

$$\sqrt{\frac{2m}{n}} \leq \frac{2m}{n} \leq \lambda_1,$$

بنابراین: $f(\lambda_1) \leq f(\frac{2m}{n})$ از بالا و نامساوی ۷.۲ حکم اثبات می‌شود. □

۲.۲ گراف منتظم

قضایای این بخش از [۱۷]، [۲۵] و [۲۷] آورده شده است.

فرض کنید گراف G دارای n رأس و از درجه r باشد.(درجه هر یک از رأس‌های آن r باشد.) آنگاه G دارای $m = \frac{1}{2}nr$ یال می‌باشد.

اگر $r = 0$ آنگاه همه مقادیر ویژه گراف G برابر صفر است در نتیجه $E(G) = 0$ بنابراین فرض می‌کنیم $r > 0$ باشد. یک کران بالای انرژی گراف منتظم به راحتی از نابرابری مککلند[۴] از $E(G) \leq \sqrt{2mn}$ داریم:

$$E(G) \leq n\sqrt{r}.$$

بدیهی است که کران بالای بهتری از برابری کولن‌ومولتن رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E(G) \leq \left(\frac{2m}{n}\right) + \sqrt{(n-1)\left(2m - \frac{4m^2}{n^2}\right)}.$$

در نتیجه:

$$E(G) \leq r + \sqrt{(n-1)(2m - r^2)}.$$

برابری زمانی اتفاق می‌افتد که G یک گراف r منتظم از درجه $0, 1$ یا $n-1$ باشد.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید G یک گراف منتظم با n رأس و از درجه r باشد آنگاه:

$$E(G) \geq n.$$

برهان. اگر λ_1 بزرگترین مقدار ویژه باشد آنگاه $\lambda_1|\lambda_i| \geq \lambda_i^2$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$ برقرار است. با جمع‌بندی روی همه iها، $E(G) \geq \frac{2m}{\lambda_1}$ بدست می‌آید. برای گراف منتظم از درجه r داریم: $\lambda_1 = r$ و $2m = nr$، با جایگذاری نتیجه حاصل می‌شود. □

[۴] Mcclelland

۳.۲ انرژی لاپلاسین

[۵] این بخش از [۱۸] گرفته شده است.

تعریف ۱.۳.۲. ماتریس لاپلاسین [۶] یک ماتریس مربعی $n \times n$ می‌باشد که را بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(G) = deg(G) - A(G).$$

که در اینجا $deg(G)$ ماتریس قطری درجه‌ای گراف G و $A(G)$ ماتریس مجاورت گراف G می‌باشد.

اگر فرض شود که $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_n$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین باشد که از تعریف معادله مشخصه بدست می‌آیند، آنگاه معمولاً این مقادیر ویژه را بصورت زیر نمایش می‌دهند.

$$\mu_۱ \geq \mu_۲ \geq \ldots \geq \mu_n \tag{۸.۲}$$

برای مقادیر ویژه لاپلاسین نیز رابطه (۹.۲) برقرار است، از معادله (۲.۲) و خواص مقادیر ویژه داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} \mu_i = ۲m.$$

$$\sum_{i=۱}^{n} \mu_i^۲ = ۲m + \sum_{i=۱}^{n} d_i. \tag{۹.۲}$$

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنید G یک (n, m) گراف باشد انرژی لاپلاسین [۷] G را با $LE(G)$ نشان می‌دهیم که برابراست با:

$$LE(G) = \sum_{i=۱}^{n} \left| \mu_i - \frac{۲m}{n} \right|. \tag{۱۰.۲}$$

به طوری که $\frac{۲m}{n}$ را میانگین درجه رأسی می‌نامند.

از قضیه‌های ۱.۱.۲، ۲.۱.۲ و نتیجه ۴.۱.۲ کران‌های زیر را داریم:

$$LE(G) \leq \sqrt{۲Mn}.$$

$$LE(G) \leq \frac{۲m}{n} + \sqrt{(n-۱)\left[۲M - (\frac{۲m}{n})^۲\right]}. \tag{۱۱.۲}$$

$$۲\sqrt{M} \leq LE(G) \leq ۲M.$$

که

$$M = m + \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{n} \left(d_i + \frac{۲m}{n}\right)^۲.$$

[۵] lLaplacian energy
[۶] Laplacian matrix
[۷] Laplacian energy

حدس ۱.۳.۲. در [۱۶] بررسی شده است که انرژی گراف کوچکتر مساوی انرژی لاپلاسین می‌باشد.

$$E(G) \leq LE(G).$$

لم ۱.۳.۲. اگر G یک گراف منتظم باشد آنگاه

$$LE(G) = E(G).$$

برهان. فرض کنید G یک (n,m) گراف منتظم از درجه r باشد پس $r = \frac{۲m}{n}$ و [۲۸] داریم:

$$\mu_i - \frac{۲m}{n} = -\lambda_{n-i+۱}, i = ۱,۲,\ldots,n$$

با جایگذاری در (۱۰.۲) به تعریف انرژی گراف می‌رسیم. □

در ملاحظه ۲.۱.۲ سه ویژگی ابتدایی انرژی گراف‌ها نشان داده شده است. از آن‌ها تنها ویژگی ۱ شباهت مستقیم با انرژی لاپلاسین دارد، در واقع از تعریف انرژی لاپلاسین (۱۰.۲) واضح است که $LE(G) \geq ۰$ و می‌دانیم که اگر $m = ۰$ همه مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین صفر می‌باشد آنگاه $M = LE(G) = ۰$، اگر G دارای حداقل یک یال باشد آنگاه $\mu_۱ > \frac{۲m}{n}$ در نتیجه $LE(G) > ۰$. با توجه به قسمت دوم ملاحظه ۲.۱.۲ لم زیر را داریم:

لم ۲.۳.۲. اگر گراف G شامل دو مؤلفه $G_۱$ و $G_۲$ باشد و $G_۱$ و $G_۲$ دارای میانگین درجه رأسی برابر باشند آنگاه:

$$LE(G) = LE(G_۱) + LE(G_۲).$$

برهان. فرض کنید G، $G_۱$ و $G_۲$ به‌ترتیب $(n,m)-$، $(n_۱,m_۱)-$ و $(n_۲,m_۲)-$ گراف‌ها باشند آنگاه از $\frac{۲m_۱}{n_۱} = \frac{۲m_۲}{n_۲}$ داریم:

$$\frac{۲m}{n} = \frac{۲m_i}{n_i}, \qquad i = ۱,۲$$

درنتیجه:

$$LE(G) = \sum_{i=۱}^{n_۱+n_۲} \left|\mu_i - \frac{۲m}{n}\right| = \sum_{i=۱}^{n_۱} \left|\mu_i - \frac{۲m_۱}{n_۱}\right| + \sum_{i=n_۱+۱}^{n_۱+n_۲} \left|\mu_i - \frac{۲m_۲}{n_۲}\right|,$$
$$= LE(G_۱) + LE(G_۲).$$

□

با توجه به ملاحظه ۲.۱.۲ لم زیر بدست می‌آید:

لم ۳.۳.۲. اگر $n_۲$ به اندازه کافی بزرگ باشد،آنگاه:

$$LE(G) = ۴m\frac{p+n_۲}{n_۱+n_۲} < ۴m. \tag{۱۲.۲}$$

بنابراین در این مورد انرژی لاپلاسین مستقل از هر ویژگی ساختاری گراف G می‌باشد. علاوه‌براین داریم:

$$\lim_{n_۲ \longrightarrow \infty} LE(G) = ۴m.$$

برهان. برای $i = ۱, \ldots, n_۱ - p$، و $n_۲$ به اندازه کافی بزرگ

$$\mu_i > \frac{۲m}{n_۱ + n_۲},$$

و درنتیجه:

$$LE(G) = \sum_{i=۱}^{n_۱ - p} \left(\mu_i - \frac{۲m}{n_۱ + n_۲} \right) + (p + n_۲) \frac{۲m}{n_۱ + n_۲},$$

با توجه به رابطه زیر:

$$\sum_{i=۱}^{n_۱ - p} \mu_i = ۲m,$$

با قرار دادن این عبارت در معادله فوق نتیجه مورد نظر ما حاصل شد. □

آنچه که در دیدگاه فوق "به اندازه کافی بزرگ است" یک مشکل باز است که در آینده باید حل شود.

فصل ۳

کران‌های انرژی فاصله گراف

کران بالا برای انرژی فاصله هر (n,m) گراف همبند با توجه به تعداد رئوس و دترمینان آن مشخص می‌شود. کران‌های بالای برای انرژی فاصله گراف همبند با قطر دو و تعداد رئوس داده شده از رئوس، درخت‌ها و گراف‌های تک‌دور با کمر فرد بررسی می‌شود. یک کران پایین برای انرژی فاصله از گراف‌های تک‌دور با کمر فرد ارائه می‌شود.

تعریف ۳.۰.۱. [۱۹] فرض کنید D یک ماتریس فاصله گراف G از مرتبه n باشد،دترمینان مرتبط با ماتریس D بصورت $det(\rho I - D)$، یک چندجمله‌ای است که ρ متغیری از درجه n است معادله چند جمله‌ای مشخصه $det(\rho I - D) = ۰$ **معادله مشخصه** D نامیده می‌شود. با استفاده از قضیه اساسی جبر این معادله دارای n ریشه است. این ریشه ها را **مقادیر ویژه** D می‌نامند.

از آنجایی که ماتریس فاصله ، یک ماتریس متقارن و حقیقی می‌باشد، پس مقادیر ویژه آن همگی حقیقی می‌باشند. مقادیر ویژه ρ_i را بصورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$\rho_۱ \geq \rho_۲ \geq \ldots \geq \rho_n.$$

تعریف ۳.۰.۲. مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس فاصله را **انرژی فاصله**[1] می‌نامند.بصورت رابطه (۳.۱) نشان می‌دهند.

$$E_D(G) = \sum_{i=۱}^{n} |\rho_i|. \tag{۳.۱}$$

[1] Distance energy

نتیجه ۱.۰.۳. [۲۹] انرژی گراف کامل K_n و انرژی فاصله گراف کامل K_n با هم برابر است.

$$E(G) = E_D(G) = ۲(n-۱)$$

برهان. فرض کنید G یک گراف کامل باشد.در گراف کامل ماتریس مجاورت و ماتریس فاصله با هم برابرند $A(K_n) = D(K_n)$ پس چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه آن ها هم مشابه می‌باشد. طیف گراف کامل بصورت زیر است:

$$Spec(k_n) = \begin{pmatrix} n-۱ & -۱ \\ ۱ & n-۱ \end{pmatrix}$$

$$E(G) = E_D(G) = |-۱|(n-۱) + |n-۱| = ۲n-۲.$$

□

به منظور بدست آوردن کران برای انرژی فاصله گراف‌ها به تعدادی لم نیاز می‌باشد. [۹] [۲۹]

۱.۳ بعضی از خواص انرژی فاصله گراف‌ها

لم ۱.۱.۳. فرض کنید G یک گراف همبند با n رأس باشد و $\rho_۱, \rho_۲, \ldots, \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس فاصله باشد آنگاه:

$$\sum_{i=۱}^{n} \rho_i = ۰.$$

$$\sum_{i=۱}^{n} \rho_i^۲ = ۲\sum_{i<j} (d_{ij})^۲. \qquad (۲.۳)$$

برهان. فرض کنید G یک (n,m) گراف همبند باشد و $\rho_۱, \rho_۲, \ldots, \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس فاصله باشد آنگاه:

$$\sum_{i=۱}^{n} \rho_i = trace[D(G)] = \sum_{i=۱}^{n} d_{ii} = ۰.$$

برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، (i,i) در $[D(G)]^۲$ برابر است با:

$$\sum_{j=۱}^{n} d_{ij}d_{ji} = \sum_{j=۱}^{n} (d_{ij})^۲,$$

بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{n} \rho_i^۲ = trace[D(G)]^۲ = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} (d_{ij})^۲ = ۲ \sum_{۱\le i\le j\le n} (d_{ij})^۲.$$

□

لم ۲.۱.۳. اگر $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ همگی اعداد حقیقی مثبت باشند، آنگاه:

$$n\left[\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} a_i - \left(\Pi_{i=۱}^{n} a_i\right)^{\frac{۱}{n}}\right] \le n\sum_{i=۱}^{n} a_i - \left(\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{a_i}\right)^۲$$
$$\le n(n-۱)\left[\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} a_i - \left(\Pi_{i=۱}^{n} a_i\right)^{\frac{۱}{n}}\right] \qquad (۳.۳)$$

قضیه ۱.۱.۳. اگر G یک (n,m) گراف همبند باشد، آنگاه:

$$\sqrt{2\sum_{1\le i\le j\le n}(d_{ij})^2}\le E_D(G)\le\sqrt{2n\sum_{1\le i\le j\le n}(d_{ij})^2}.$$

برهان. با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right),$$

حال قرار می‌دهیم $b_i=|\rho_i|$، $a_i=1$ داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\rho_i|\right)^2\le n\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2,$$

در نتیجه:

$$E_D(G)^2\le 2n\sum_{1\le i\le j\le n}(d_{ij})^2,$$

این منجر به کران بالا برای $E_D(G)$ می‌شود. حال:

$$E_D(G)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\rho_i|\right)^2\ge\sum_{i=1}^{n}|\rho_i|^2=2\sum_{1\le i\le j\le n}(d_{ij})^2.$$

که مستقیماً منجر به کران پایین برای $E_D(G)$ می‌شود. □

نتیجه ۱.۱.۳. [۲۹] اگر G یک (n,m) گراف همبند باشد، آنگاه:

$$E_D(G)\ge\sqrt{n(n-1)}.$$

برهان. از آنجایی که $d_{ij}\ge 1$ و $i\neq j$ وجود دارد $\frac{n(n-1)}{2}$ جفت رئوس در G از کران پایین در ۱.۱.۳ داریم:

$$E_D(G)\ge\sqrt{2\sum_{1\le i\le j\le n}(d_{ij})^2}\ge\sqrt{2\frac{n(n-1)}{2}}=\sqrt{n(n-1)}.$$

□

می‌دانیم حاصلضرب مقادیر ویژه هر ماتریس برابر با قدر مطلق دترمینان آن ماتریس می‌باشد.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنید G یک (n,m) -گراف همبند و Δ قدرمطلق دترمینان ماتریس فاصله $D(G)$ باشد، آنگاه:

$$\sqrt{2\sum_{1\le i\le j\le n}(d_{ij})^2+n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}}}\le E_D(G)\le\sqrt{2n\sum_{1\le i\le j\le n}(d_{ij})^2}. \quad (۴.۳)$$

برهان. با توجه به قضیه ۴.۳ نیاز داریم که صحت کران پایین را ثابت کنیم،از تعریف فاصله انرژی و معادله ۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned} E_D(G)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|\rho_i|\right)^2 &= 2\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 + 2\sum_{1\le i\le j\le n}|\rho_i||\rho_j|, \\ &= 2\sum_{1\le i\le j\le n}(d_{ij})^2 + 2\sum_{1\le i\le j\le n}|\rho_i||\rho_j|, \qquad (5.3)\\ &= 2\sum_{1\le i\le j\le n}(d_{ij})^2 + \sum_{i\neq j}|\rho_i||\rho_j|, \end{aligned}$$

از آنجایی که میانگین حسابی اعداد مثبت بزرگ‌تر از میانگین هندسی می‌باشد در نتیجه:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}|\rho_i||\rho_j| &\ge (\Pi_{i\neq j}|\rho_i||\rho_j|)^{\frac{1}{n(n-1)}}, \\ &= \left(\Pi_{i=1}^{n}|\rho_i|^{2(n-1)}\right), \\ &= \Pi_{i=1}^{n}|\rho_i|^{\frac{2}{n}} = \Delta^{\frac{2}{n}}. \qquad (6.3) \end{aligned}$$

از معادلات ۵.۳ و ۶.۳ به کران پایین می‌رسیم. □

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنید G یک (n,m) گراف همبند و Δ قدرمطلق دترمینان ماتریس فاصله $D(G)$ باشد، آنگاه:

$$\sqrt{2\sum_{1\le i\le j\le n}(d_{ij})^2 + n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}}} \le E_D(G) \le \sqrt{2(n-1)\sum_{i\le j}(d_{ij})^2 + n\Delta^{\frac{2}{n}}}. \qquad (7.3)$$

برهان. فرض کنید $a_i = \rho_i^2$ برای $i = 1,2,\dots,n$ و بنابر لم‌های ۱.۱.۳ و ۲.۱.۳ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} K = n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2 - \left(\Pi_{i=1}^{n}\rho_i^2\right)^{\frac{1}{n}}\right] &= n\left[\frac{2}{n}\sum_{i<j}(d_{ij})^2 - \left(\Pi_{i=1}^{n}|\rho_i|\right)^{\frac{2}{n}}\right], \\ &= 2\sum_{i<j}(d_{ij})^2 - n\Delta^{\frac{2}{n}}, \end{aligned}$$

داریم:

$$K \le n\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}|\rho_i|\right)^2 \le (n-1)K,$$

در نتیجه:

$$K \le 2n\sum_{i<j}(d_{ij})^2 - E_D(G) \le (n-1)K.$$

حکم ثابت شد. □

در قسمت به مقایسه کران های دو قضیه اخیر می‌پردازیم.

ملاحظه ۱.۱.۳. کران پایین در ۷.۳ شامل کران پایین در ۴.۳ است.همیشه کران بالا در ۷.۳ بهتر از کران بالا در ۴.۳ است. با استفاده از نامساوی هندسی داریم:

$$2\sum_{i<j}(d_{ij})^2 \ge n\Delta^{\frac{2}{n}},$$

ملاحظه می‌شود که:

$$E_D(G) \leq \sqrt{2n \sum_{i<j} (d_{ij})^2}.$$

که این کران بالا در ۴.۳ است.

قضیه ۴.۱.۳. [۲۹] فرض کنید G یک (n,m)-گراف همبند باشد، آنگاه:

$$E_D(G) \leq \frac{2}{n} \sum_{i<j} (d_{ij})^2 + \sqrt{(n-1) \left[2 \sum_{i<j} (d_{ij})^2 - \left(\frac{2}{n} \sum_{i<j} (d_{ij})^2 \right)^2 \right]}. \qquad (۸.۳)$$

برهان. اثبات ما به پیروی از ایده‌های کولن و مولتن [۲۵] و [۲۶] می‌باشد. که مشابه کران بالا انرژی گراف معمولی $E(G)$ است.

با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز و دو $(n-1)$ بردار $(1,1,\dots,1)$ و $(|\rho_2|,|\rho_3|,\dots,|\rho_n|)$ داریم:

$$\left(\sum_{i=2}^{n} |\rho_i| \right)^2 \leq (n-1) \left(\sum_{i=2}^{n} \rho_i^2 \right),$$

$$(E_D(G) - \rho_1)^2 \leq (n-1) \left(2 \sum_{i<j} (d_{ij})^2 - \rho_1^2 \right),$$

$$E_D(G) \leq \rho_1 + \sqrt{(n-1) \left(2 \sum_{i<j} (d_{ij})^2 - \rho_1^2 \right)},$$

تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = x + \sqrt{(n-1) \left(2 \sum_{i<j} (d_{ij})^2 - x^2 \right)},$$

قرار می‌دهیم $x = \rho_1$ و می‌دانیم که $\rho_1 \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 = 2 \sum_{i<j} (d_{ij})^2,$$

داریم:

$$x^2 = \rho_1^2 \leq 2 \sum_{i<j} (d_{ij})^2,$$

$$x \leq \sqrt{2 \sum_{i<j} (d_{ij})^2},$$

حال $f'(x) = 0$

$$x = \sqrt{\frac{2}{n} \sum_{i<j} (d_{ij})^2},$$

بنابراین: $f(x)$ یک تابع کاهشی است.

$$\sqrt{\frac{۲}{n}\sum_{i<j}(d_{ij})^{۲}} \leq x \leq ۲\sqrt{\sum_{i<j}(d_{ij})^{۲}},$$

و

$$\sqrt{\frac{۲}{n}\sum_{i<j}(d_{ij})^{۲}} \leq \frac{۲}{n}\sum_{i<j}(d_{ij})^{۲} \leq \rho_{۱},$$

بنابراین:

$$f(\rho_{۱}) \leq f(\frac{۲}{n}\sum_{i<j}(d_{ij})^{۲}).$$

درنتیجه حکم ثابت شد. □

نتیجه ۲.۱.۳. [۲۰] فرض کنید G یک (n,m) گراف همبند با $daim(G) \leq ۲$ باشد آنگاه:

$$\sum_{i=۱}^{n}\mu_i^{۲} = ۲(۲n^{۲}+۲n-۳m).$$

برهان. در ماتریس فاصله D از گراف G، $۲m$ عنصر از فاصله یک و $n(n-۱)-۲m$ عنصر از فاصله دو وجود دارد، بنابراین:

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n}\mu_i^{۲} &= \sum_{i=۱}^{n}(D^{۲})_{ii} = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}d_{ij}d_{ji} = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(d_{ij})^{۲},\\ &= (۲m)\times ۱^{۲} + (n^{۲}-n-۲m)\times ۲^{۲},\\ &= ۲m + ۴n^{۲} - ۴n - ۸m,\\ &= ۲(۲n^{۲}+۲n-۳m).\end{aligned}$$

□

با استفاده از لم ۱.۱.۳ و نتیجه ۲.۱.۳ و قضایایی ۱.۱.۳و ۴.۱.۳ نتایج زیر را داریم:

نتیجه ۳.۱.۳. فرض کنید G یک (n,m) گراف همبند با $daim(G) \leq ۲$ باشد آنگاه:

$$E_D(G) \leq \frac{۴n^{۲}-۴n-۶m}{n} + \sqrt{(n-۱)\left[۴n(n-۱)-۶m-\left(\frac{۴n(n-۱)-۶m}{n}\right)^{۲}\right]}.$$

نتیجه ۴.۱.۳. فرض کنید G یک (n,m) گراف همبند با $daim(G) \leq ۲$ باشد آنگاه:

$$\sqrt{۴n(n-۱)-۶m+n(n-۱)\Delta^{\frac{۲}{n}}} \leq E_D(G) \leq \sqrt{۲n(۲n^{۲}-۲n-۳m)}. \qquad (۹.۳)$$

نتیجه ۵.۱.۳. فرض کنید G یک (n,m) گراف همبند با $daim(G) \leq ۲$ باشد آنگاه:

$$E_D(G) \leq \sqrt{۲(n-۱)(۲n^{۲}-۲n-۳m)+n\Delta^{\frac{۲}{n}}}. \qquad (۱۰.۳)$$

کران بالا در ۱۰.۳ همیشه بهتر از کران بالا در ۹.۳ است.

۲.۳ کران‌های انرژی فاصله درخت‌ها و گراف‌های تک‌دور با کمر فرد

فرض کنید $T = (V, E)$ یک درخت با مجموعه رئوس $V = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{e_۱, e_۲, \dots, e_n\}$ باشد، بطوریکه $m = n - ۱$، ماتریس فاصله درخت T با $D = D(T)$ نشان داده می شود. برای هر درخت T با n رأس از [۸] و [۱۱] داریم:

$$detD(T) = (-۱)^{n-۱}(n-۱)۲^{n-۲} \tag{۱۱.۳}$$

نتیجه ۱.۲.۳. [۲۹] برای هر درخت T با n رأس داریم:

$$\sqrt{۲\sum_{i<j}(d_{ij})^۲ + n\left[(n-۱)^{n+۲}۴^{n-۲}\right]} \leq E_D(T) \leq \sqrt{۲n\sum_{i<j}(d_{ij})^۲} \tag{۱۲.۳}$$

برهان. با توجه به اثبات قضیه ۲.۱.۳ و تعریف $detD(T)$ با جای گذاری معادله ۱۱.۳ بجای Δ به کران‌های ۱۲.۳ می‌رسیم.

□

نتیجه ۲.۲.۳. برای هر درخت T با n رأس داریم:

$$E_D(T) \leq \sqrt{۲(n-۱)\sum_{i<j}(d_{ij})^۲ + n\left[(n-۱)^۲۴^{n-۲}\right]^{\frac{۱}{n}}} \tag{۱۳.۳}$$

کران بالا در ۱۳.۳ همیشه بهتر از کران بالا در ۱۲.۳ است.

برای هر درخت T با حداقل دو رأس داریم: [۳۴] $\mu_۱ > ۰$ و $\mu_۲ < ۰$، بنابراین برای هر درخت T، $E_D(T) = ۲\mu_۱$.

فرض کنید U یک گراف n رأسی تک‌دور با کمر r باشد: [۶]

۱. اگر r فرد باشد آنگاه:

$$detD(U) = (-۲)^{n-r-۲}(۲rn - r^۲ - ۱) \tag{۱۴.۳}$$

۲. اگر r زوج باشد آنگاه:

$$detD(U) = ۰$$

با استفاده از ۱۴.۳ و قضیه ۳.۱.۳ نتیجه زیر بدست می‌آید:

نتیجه ۳.۲.۳. [۹] اگر U یک گراف n رأسی تک‌دور با کمر فرد r باشد آنگاه:

$$\begin{aligned} &\sqrt{۲\sum_{i<j}(d_{ij})^۲ + n(n-۱)\left[۴^{n-r-۲}(۲rn - r^۲ - ۱)^۲\right]^{\frac{۱}{n}}} \\ &\leq E_D(G) \\ &\leq \sqrt{۲(n-۱)\sum_{i<j}(d_{ij})^۲ + n)\left[۴^{n-r-۲}(۲rn - r^۲ - ۱)^۲\right]^{\frac{۱}{n}}} \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

فصل ۴

انرژی پوشش کمینه فاصله گراف

در این فصل انرژی پوشش کمینه فاصله گراف‌ها تعریف می‌شود و انرژی پوشش کمینه فاصله برخی از گراف ها مانند گراف ستاره، گراف کامل، گراف تاج و گراف دوبخشی بدست آورده شده است. مطالب این فصل از مقاله [۲۱] گرفته شده است.

تعریف ۴.۰.۱. فرض کنید G یک گراف ساده از مرتبه n با مجموعه رئوس $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ ومجموعه یال E باشد، و C مجموعه پوشش رأسی کمینه گراف G باشد **ماتریس پوشش کمینه فاصله**[1] از G یک ماتریس مربعی $n\times n$ می‌باشد که بصورت $A_{Cd}(G):=(d_{ij})$ تعریف می‌کنیم :

$$d_{ij}=\begin{cases} 1 & v_i=v_j, v_i\in C \\ d(v_i,v_j) & o.w \end{cases}$$

چند جمله‌ای مشخصه $A_{Cd}(G)$ را تعریف می‌کنیم $f_n(G,\rho)=det(\rho I-A_{Cd}(G))$ این حداقل مقادیر ویژه از گراف G مقادیر ویژه $A_{Cd}(G)$ هستند. چون $A_{Cd}(G)$ یک ماتریس حقیقی متقارن است پس مقادیر ویژه آن همگی اعداد حقیقی می‌باشند، نمایش نزولی مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله بصورت زیر است:

$$\rho_1\geq\rho_2\geq\ldots\geq\rho_n$$

[1] minimum covering distance matrix

تعریف ۲.۰.۴. انرژی پوشش کمینه فاصله گراف [۲] از گراف G را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_{Cd}(G) = \sum_{i=1}^{n} |\rho_i|$$

ملاحظه می‌شود که مجموع عناصر روی قطر اصلی برابر است با:

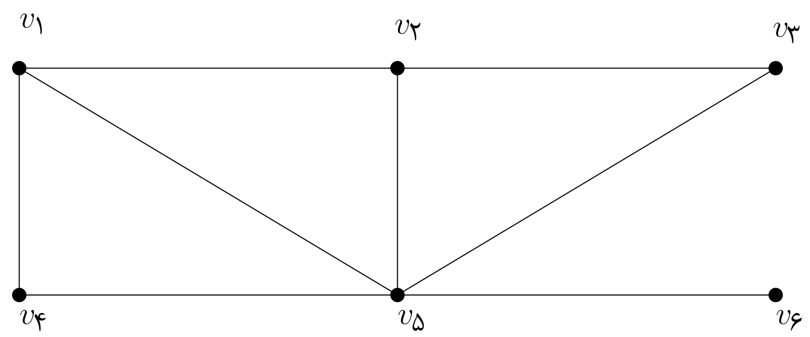
$$A_{Cd}(G) = |c|$$

مثال ۱.۰.۴. سه مجموعه پوشش کمینه برای گراف زیر را درنظر بگیرید:

۱. $C_1 = \{v_1, v_2, v_5\}$

۲. $C_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$

۳. $C_3 = \{v_1, v_3, v_5\}$



شکل ۱.۴:

$$1.A_{Cd_1}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[۲] minimum covering distance energy

چند جمله‌ای مشخصه آن بصورت زیر می‌باشد:

$$\rho^{6} - 3\rho^{5} - 33\rho^{4} - 50\rho^{3} + 5\rho^{2} + 21\rho - 5 = 0$$

مقادیر ویژه پوشش کمینه فاصله برابر است با:

$$\rho_1 \approx -2/4142, \rho_2 \approx -2/2203, \rho_3 \approx -1/0000,$$
$$\rho_4 \approx 0/2837, \rho_5 \approx 0/4142, \rho_6 \approx 7/9366.$$

در نتیجه انرژی پوشش کمینه فاصله برابر است با:

$$E_{Cd_1}(G) \approx 14/2691.$$

$$2.A_{Cd_2}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصه آن بصورت زیر می‌باشد:

$$\rho^{6} - 3\rho^{5} - 33\rho^{4} - 53\rho^{3} - 6\rho^{2} + 13\rho - 1 = 0$$

مقادیر ویژه پوشش کمینه فاصله برابر است با:

$$\rho_1 \approx -2/3348, \rho_2 \approx -2/2587, \rho_3 \approx -0/8188$$
$$\rho_4 \approx 0/0825, \rho_5 \approx 0/3520 \rho_6 \approx 7/9778$$

$$E_{Cd_2}(G) \approx 13/8246.$$

از مثال نتیجه می‌گیریم که انرژی پوشش کمینه فاصله وابسته به مجموعه پوششی کمینه کمینه می‌باشد .

۱.۴ انرژی پوشش کمینه فاصله تعدادی از گراف‌های استاندارد

قضیه ۱.۱.۴. انرژی پوشش کمینه فاصله گراف ستاره برای $n \geq 3$ برابر است با $4n - 7$.

برهان. گراف ستاره با مجموعه رئوس $V = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ در نظر می‌گیریم. و $C = \{v_0\}$ مجموعه پوششی کمینه کمینه می‌باشد، آنگاه :

$$A_{cd}(k_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

چند جمله‌ای مشخصه ماتریس $A_{cd}(k_{1,n-1})$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f(K_{1,n-1}) = \begin{vmatrix} \rho-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \rho & -2 & \dots & -2 \\ -1 & -2 & \rho & \dots & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & \dots & \rho \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$(\rho+2)^{n-2}[\rho^2-(2n-3)\rho+(n-3)] = 0$$

مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله متناظر است با:

$$Spec(K_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{(2n-3)+\sqrt{4n^2-16n+21}}{2} & \frac{(2n-3)-\sqrt{4n^2-16n+21}}{2} \\ n-2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

انرژی پوشش کمینه فاصله برابر است :

$$\begin{aligned} E_{Cd}(K_{1,n-1}) &= |-2|(n-2) + |\frac{(2n-3)+\sqrt{4n^2-16n+21}}{2}| \\ &+ |\frac{(2n-3)-\sqrt{4n^2-16n+21}}{2}| \\ &= 4n-7. \end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۱.۴. انرژی پوشش کمینه فاصله گراف تاج برابر است با :

$$\begin{cases} \sqrt{5}, & n=2 \\ \sqrt{101}+2\sqrt{17}, & n=3 \\ (4n-3)+(n-1)\sqrt{17}, & n>3. \end{cases}$$

برهان. فرض کنید گراف تاج با مجموعه رئوس $V = \{u_۱, u_۲, \dots, u_n, v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ و مجموعه پوششی کمینه کمینه کمینه $C = \{u_۱, u_۲, \dots, u_n\}$ باشد ، آنگاه :

$$A_{Cd}(S_n^\circ) = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & \dots & ۲ & ۳ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ & \dots & ۲ & ۱ & ۳ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ & \dots & ۲ & ۱ & ۱ & ۳ & \dots & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۲ & ۲ & ۲ & \dots & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ & ۰ & ۲ & ۲ & \dots & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ & \dots & ۱ & ۲ & ۰ & ۲ & \dots & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۳ & \dots & ۱ & ۲ & ۲ & ۰ & \dots & ۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۳ & ۲ & ۲ & ۲ & \dots & ۰ \end{pmatrix}_{(۲n \times ۲n)}$$

۱. چند جمله‌ای مشخصه برای $n = ۲$ برابر است با : $(\rho^۲ - \rho - ۱)^۲ = ۰$
مقادیر ویژه پوشش کمینه فاصله برای $n = ۲$ برابر است با :

$$Spec(S_۲^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} & \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

در نتیجه $E_{Cd}(S_n^\circ) = \sqrt{۵}$.

۲. چند جمله‌ای مشخصه برای $n > ۳$ برابراست با :
$[\rho^۲ - (۴n-۳)\rho + (۳n^۲ - ۱۰n - ۲)](\rho^۲ + ۳\rho - ۲)^{n-۱} = ۰$
مقادیر ویژه پوشش کمینه فاصله برای $n > ۳$ برابراست با :

$$Spec(S_n^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{(۴n-۳)+\sqrt{۴n^۲+۱۶n+۱۷}}{۲} & \frac{(۴n-۳)-\sqrt{۴n^۲+۱۶n+۱۷}}{۲} & \frac{-۳+\sqrt{۱۷}}{۲} & \frac{-۳-\sqrt{۱۷}}{۲} \\ ۱ & ۱ & n-۱ & n-۱ \end{pmatrix}$$

انرژی پوشش کمینه فاصله برای $n > ۳$

$$E_{Cd}(S_n^\circ) = \left|\frac{(۴n-۳)+\sqrt{۴n^۲+۱۶n+۱۷}}{۲}\right| + \left|\frac{(۴n-۳)-\sqrt{۴n^۲+۱۶n+۱۷}}{۲}\right| + \left|\frac{-۳+\sqrt{۱۷}}{۲}\right|(n-۱) + \left|\frac{-۳-\sqrt{۱۷}}{۲}\right|(n-۱).$$

با جای گذاری $n = ۳$ حکم ثابت می‌شود . □

قضیه ۳.۱.۴. انرژی پوشش کمینه فاصله گراف دو بخشی کامل برای $m \leq n$ برابر است با :

$$E_{Cd}(K_{m,n}) = ۳m + ۴n - ۶.$$

برهان. فرض کنید گراف دو بخشی کامل برای $m \leq n$ با مجموعه رئوس $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ و مجموعه پوششی کمینه کمینه کمینه $C = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ باشد، آنگاه :

$$A_{Cd}(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \ldots & 2 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \ldots & 2 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 & 0 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 & 2 & 0 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{(m+n,m+n)}$$

چند جمله‌ای مشخصه برابر است :

$$(\rho+1)^{m+1}(\rho+2)^{n-1}[\rho^2 - (2m+2n-3) - (3mn-4m-2n+2)] = 0$$

مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله برابر است با :

$$Spec(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \frac{(2m+2n-3)+\sqrt{B}}{2} & \frac{(2m+2n-3)-\sqrt{B}}{2} \\ m-1 & n-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

بطوری که:

$$B = (4mn)^2 - 4mn + 4m + 4n^2 - 4n + 1$$

انرژی پوشش کمینه فاصله گراف برابر است با:

$$\begin{aligned} E_{Cd}(K_{m,n}) &= |-1|(m-1) + |-2|(n-1) \\ &+ \left|\frac{(2m+2n-3) + \sqrt{(4mn)^2 - 4mn + 4m + 4n^2 - 4n + 1}}{2}\right| \\ &+ \left|\frac{(2m+2n-3) - \sqrt{(4mn)^2 - 4mn + 4m + 4n^2 - 4n + 1}}{2}\right| \\ &= (m-1) + (2n-2) + (2m+2n-3) \\ &= 3m + 4n - 6. \end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۱.۴. انرژی پوشش کمینه فاصله گراف کامل برای $n \geq 2$ برابراست با :

$$E_{Cd}(K_n) = \sqrt{(n+3)(n-1)}.$$

برهان. فرض کنید K_n یک گراف کامل با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $C = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ مجموعه پوشش کمینه باشد آنگاه:

$$E_{Cd}(K_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(n\times n)}$$

چند جمله‌ای مربوط به آن بصورت زیر است:

$$f_n(K_n, \rho) = \begin{vmatrix} \rho-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \rho-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \rho-1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \rho-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & \rho \end{vmatrix}_{(n\times n)}$$

$$= \begin{vmatrix} \rho-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \rho-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \rho-1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \rho-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho & \rho+1 \end{vmatrix}_{(n\times n)}$$

با اعمال ستونی مقدماتی برروی ماتریس بالا به ماتریس پایین مثلثی می‌رسیم:

$$= \begin{vmatrix} \frac{\rho^2-n\rho+\rho-n+1}{\rho+1} & -\rho & \dots & -\rho & -\rho \\ 0 & \rho & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \rho+1 \end{vmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس پایین مثلثی برابر با حاصلضرب روی قطر اصلی آن می‌باشد پس داریم:

$$\rho^{n-2}[\rho^2 - (n-1)\rho - (n-1)] = 0$$

و طیف گراف به شکل زیر می‌باشد:

$$Spec(K_n) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(n-1)+\sqrt{(n+3)(n-1)}}{2} & \frac{(n-1)-\sqrt{(n+3)(n-1)}}{2} \\ n-2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه انرژی پوشش کمینه فاصله گراف کامل :

$$E_{Cd}(K_n) = \sqrt{(n+۳)(n-۱)}.$$

حکم ثابت شد. $\square$

۲.۴ کران‌هایی برای انرژی پوشش کمینه فاصله گراف‌ها

قضیه زیر قضیه‌ای برای خواص مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رئوس $v = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های E و $C = \{u_۱, u_۲, \dots, u_n\}$ یک مجموعه پوششی کمینه باشد، اگر $\rho_۱, \rho_۲, \dots, \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله باشد آنگاه :

۱.

$$\sum_{i=۱}^{n} \rho_i = |C|.$$

۲.

$$\sum_{i=۱}^{n} \rho_i^۲ = ۲m + ۲M + |c|.$$

بطوری‌که

$$M = \sum_{i<j, d_(v_i, v_j) \neq ۱} d(v_i, v_j)^۲.$$

برهان. ۱. از قبل می‌دانیم که مجموع مقادیر ویژه $A_{Cd}(G)$ برابر با مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $A_{Cd}(G)$ می‌باشد در نتیجه :

$$\sum_{i=۱}^{n} \rho_i = \sum_{i=۱}^{n} d_{ii} = |C|.$$

۲. بطور مشابه مجموع مربعات مقادیر ویژه $A_{Cd}(G)$ برابرمجموع درایه‌های روی قطر اصلی $[A_{Cd}(G)]^۲$ می‌باشد در نتیجه :

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n} \rho_i^۲ &= \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} d_i d_j = \sum_{i=۱}^{n} d_{ii}^۲ + \sum_{i \neq j} d_{ij} d_{ji}, \\ &= \sum_{i=۱}^{n} d_{ii}^۲ + ۲\sum_{i<j} (d_{ij})^۲ = |C| + ۲\sum_{i<j} d(v_i, v_j)^۲, \\ &= \sum_{i=۱}^{n} \rho_i^۲ = ۲m + ۲M + |c|.\end{aligned}$$

بطوری‌که

$$M = \sum_{i<j, d_(v_i, v_j) \neq ۱} d(v_i, v_j)^۲.$$

$\square$

نتیجه ۱.۲.۴. فرض کنید G یک $(n,m)-$ گراف همبند با قطر دو باشد و اگر $C=\{u_۱,u_۲,\dots,u_n\}$ یک مجموعه پوششی کمینه و $\rho_۱,\rho_۲,\dots,\rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله باشد، آنگاه :

$$\sum_{i=۱}^{n}\rho_i^۲=|C|+۲(۲n^۲-۲n-۳m).$$

برهان. می‌دانیم که در $A_{Cd}(G)$ $۲m$ عنصر از فاصله یک و $n(n-۱)-۲m$ عنصر از فاصله دو وجود دارد با توجه به قضیه ۱.۲.۴ ثابت می‌شود . □

قضیه ۲.۲.۴. فرض کنید G یک $(n,m)-$ گراف باشد اگر C مجموعه پوششی کمینه باشد و $P=|detA_{Cd}(G)|$ آنگاه :

$$\sqrt{(۲m+۲M+|C|)+n(n-۱)P^{\frac{۲}{n}}}\leq E_{Cd}(G)\leq\sqrt{n(۲m+۲M+|C|)}.$$

برهان. با استفاده از نامساوی کوشی ـ شوارتز داریم :

$$\left(\sum_{i=۱}^{n}a_ib_i\right)^۲\leq\left(\sum_{i=۱}^{n}a_i^۲\right)\left(\sum_{i=۱}^{n}b_i^۲\right),$$

قرار می‌دهیم $a_i=۱$ و $b_i=|\rho_i|$ آنگاه :

$$\left(\sum_{i=۱}^{n}|\rho_i|\right)^۲\leq\left(\sum_{i=۱}^{n}۱\right)\left(\sum_{i=۱}^{n}\rho_i^۲\right),$$
$$[E_{Cd}(G)]^۲\leq\sqrt{n(۲m+۲M+|C|)}\Longrightarrow E_{Cd}(G)\leq\sqrt{n((۲m+۲M+|C|)},$$

می‌دانیم نامساوی حسابی بزرگتر از نامساوی هندسی است پس داریم :

$$\begin{aligned}\frac{۱}{n(n-۱)}|\rho_i||\rho_j| &\geq\left[\prod_{i\neq j}|\rho_i||\rho_j|\right]^{\frac{۱}{n(n-۱)}},\\ &=\left[\prod_{i=۱}^{n}|\rho_i|^{۲(n-۱)}\right]^{\frac{۱}{n(n-۱)}},\\ &=\left[\prod_{i=۱}^{n}|\rho_i|\right]^{\frac{۲}{n}}=\left|\prod_{i=۱}^{n}\rho_i\right|^{\frac{۲}{n}},\\ &=|detA_{Cd}(G)|^{\frac{۲}{n}}=P^{\frac{۲}{n}},\\ \therefore\sum_{i\neq j}|\rho_i||\rho_j| &\geq n(n-۱)P^{\frac{۲}{n}}, \end{aligned}\tag{۱.۴}$$

حال در نظر می‌گیریم :

$$\begin{aligned}
[E_{Cd}(G)]^{۲} &= \left(\sum_{i=۱}^{n}|\rho_i|\right)^{۲}, \\
&= \sum_{i=۱}^{n}|\rho_i|^{۲} + \sum_{i<j}|\rho_i||\rho_j|, \\
&\therefore [E_{Cd}(G)]^{۲} \geq (۲m + ۲M + |C|) + n(n-۱)P^{\frac{۲}{n}}, \\
E_{Cd}(G) &\geq \sqrt{(۲m + ۲M + |C|) + n(n-۱)P^{\frac{۲}{n}}}.
\end{aligned}$$

$\square$

قضیه ۳.۲.۴. اگر $\rho_۱(G)$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله باشد، آنگاه :

$$\rho_۱(G) \geq \frac{۲W(G) + |C|}{n}.$$

برهان. فرض کنید X بردار غیر صفر باشد ، بنا بر [۵] داریم :

$$\begin{aligned}
\rho_۱(A_{Cd}) &= \max_{\|X\|=۱}\left\{X'A_{Cd}X\right\} = \rho_۱(A_{Cd}) = \max_{X\neq ۰}\left\{\frac{X'A_{Cd}X}{X'X}\right\}, \\
&\therefore \rho_۱(A_{Cd}) \geq \frac{J'A_{Cd}J}{J'J} = \frac{۲\sum_{i<j}d(v_i,v_j) + |C|}{n} = \frac{۲W(G) + |C|}{n}.
\end{aligned}$$

که J ماتریس واحد است. $\square$

لم ۱.۲.۴. فرض کنید G یک $(n,m)-$ گراف با قطر دو و $\rho_۱(G)$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله باشد، آنگاه :

$$\rho_۱(G) \geq \frac{۲n^{۲} - ۲m - ۲n + |C|}{n}.$$

برهان. فرض کنید G یک گراف همبند با قطر دو و d_i نشان دهنده درجه رأس v_i باشد:

$$\begin{aligned}
\rho_۱(A_{Cd}) &\geq \frac{J'A_{Cd}J}{J'J} = \frac{\sum_{i=۱}^{n}[d_i \times ۱ + (n - d_i - ۱)۲] + |C|}{n}, \\
&= \frac{\sum_{i=۱}^{n}[۲n - d_i - ۲] + |C|}{n} = \frac{۲n^{۲} - ۲m - ۲n + |C|}{n}.
\end{aligned}$$

$\square$

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنید G یک $(n,m)-$ گراف همبند با قطر دو و $۱ \geq \frac{|C|+۲n^{۲}-۲n-۲m}{n}$ باشد، آنگاه :

$$\begin{aligned}
E_{Cd}(G) \leq\ & \frac{|C| + ۲n^{۲} - ۲n - ۲m}{n} \\
&+ \sqrt{(n-۱)[|C| + ۴n^{۲} - ۴n - ۶m - (\frac{|C| + ۲n^{۲} - ۲n - ۲m}{n})^{۲}]}.
\end{aligned}$$

برهان. با استفاده از نامساوی کوشی ـ شوارتز داریم :

$$\left(\sum_{i=2}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=2}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=2}^{n} b_i^2\right),$$

قرار می‌دهیم $a_i = 1$ و $b_i = |\rho_i|$ آنگاه :

$$\left(\sum_{i=2}^{n} |\rho_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=2}^{n} 1\right)\left(\sum_{i=2}^{n} \rho_i^2\right),$$

$$\Longrightarrow [E_{Cd}(G) - \rho_1]^2 \leq (n-1)(|C| + 4n^2 - 4n - 6m - \rho_1^2),$$

$$E_{Cd}(G) \leq \rho_1 + \sqrt{(n-1)(|C| + 4n^2 - 4n - 6m - \rho_1^2)},$$

فرض کنید:

$$f(x) = x + \sqrt{(n-1)(|C| + 4n^2 - 4n - 6m - x^2)},$$

برای تابع کاهشی داریم: $f'(x) \leq 0$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{x(n-1)}{\sqrt{(n-1)(|C| + 4n^2 - 4n - 6m - x^2)}} \leq 0$$

$$\Longrightarrow x \geq \sqrt{\frac{|C| + 4n^2 - 4n - 6m}{n}},$$

تابع $f(x)$ در بازه زیر کاهشی می‌باشد:

$$\left[\sqrt{\frac{|C| + 4n^2 - 4n - 6m}{n}}, \sqrt{|C| + 4n^2 - 4n - 6m}\right],$$

به وضوح داریم:

$$\sqrt{\frac{|C| + 2n^2 - 2n - 2m}{n}} \in \left[\sqrt{\frac{|C| + 4n^2 - 4n - 6m}{n}}, \sqrt{|C| + 4n^2 - 4n - 6m}\right],$$

از فرض داریم :

$$\frac{|C| + 2n^2 - 2n - 2m}{n} \geq 1,$$

بنابراین :

$$\sqrt{\frac{|C| + 2n^2 - 2n - 2m}{n}} \leq \frac{|C| + 2n^2 - 2n - 2m}{n} \leq \rho_1,$$

$$\therefore f(\rho_۱) \leq f\left(\frac{|C| + ۲n^۲ - ۲n - ۲m}{n}\right),$$

$$E_{Cd}(G) \leq f(\rho_۱) \leq f\left(\frac{|C| + ۲n^۲ - ۲n - ۲m}{n}\right),$$

$$E_{Cd}(G) \leq f\left(\frac{|C| + ۲n^۲ - ۲n - ۲m}{n}\right),$$

$$E_{Cd}(G) \leq \frac{|C| + ۲n^۲ - ۲n - ۲m}{n},$$

$$+\sqrt{(n-۱)[|C| + ۴n^۲ - ۴n - ۶m - (\frac{|C| + ۲n^۲ - ۲n - ۲m}{n})^۲]}.$$

□

فصل ۵

انرژی غالب کمینه فاصله گراف‌ها

در این فصل به معرفی انرژی غالب کمینه فاصله گراف‌ها پرداخته شده است. انرژی غالب کمینه فاصله برخی از گراف‌ها مانند گراف ستاره، گراف کامل، گراف تاج و گراف دوبخشی بررسی می‌شود. تعاریف و قضایایی این فصل مربوط به مقاله [۲۳] و [۲۴] می‌باشد.

تعریف ۵.۰.۱. فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد، و D مجموعه غالب کمینه گراف G باشد **ماتریس غالب کمینه فاصله**[۱] از گراف G یک ماتریس مربعی $n \times n$ می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود: $A_{Dd}(G) = (d_{ij})$ که:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, v_i \in D \\ d(v_i, v_j) & o.w \end{cases}$$

چند جمله ای مشخصه و مقادیر ویژه آن مانند چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس فاصله حداقل پوشش می‌باشند داریم:

تعریف ۵.۰.۲. **انرژی غالب کمینه فاصله**[۲] را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_{Dd}(G) = \sum_{i=1}^{n} |\rho_i|.$$

[۱] minimum dominating distance matrix
[۲] minimum dominating distance energy

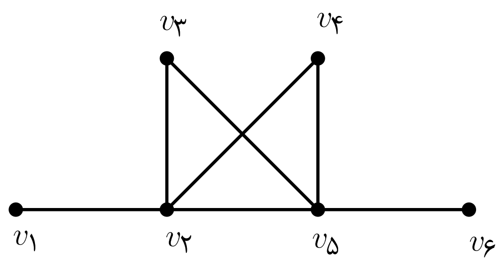
از تعریف ۱.۰.۵ داریم، مجموعه روی قطر اصلی ماتریس غالب کمینه فاصله برابر تعداد اعضای مجموعه غالب کمینه می‌باشد که این تعداد را برابر عدد k در نظر می‌گیریم.

مثال ۱.۰.۵. مجموعه غالب کمینه ممکن برای گراف G زیر به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

۱. $D_۱ = \{v_۱, v_۵\}$

۲. $D_۲ = \{v_۲, v_۵\}$

۳. $D_۳ = \{v_۲, v_۶\}$



شکل ۱.۵:

$$A_{Dd_۱}(G) = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۲ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۲ & ۲ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصه ماتریس فوق برابراست با:

$$\rho^۶ - ۲\rho^۵ - ۴۳\rho^۴ - ۱۱۴\rho^۳ - ۹۴\rho^۲ - ۸\rho + ۸ = ۰$$

مقادیر ویژه ماتریس $A_{Dd_۱}(G)$ بصورت زیر است:

$$\rho_۱ \approx -۳/۰۲۵۷, \rho_۲ \approx -۲, \rho_۳ \approx -۱/۳۳۸۶$$
$$\rho_۴ \approx -۰/۵۰۶۷, \rho_۵ \approx ۰/۲۲۵۵, \rho_۶ \approx ۸/۶۴۵۶$$

در نتیجه:

$$E_{Dd_۱}(G) = ۱۵/۷۴۲۰.$$

$$A_{Dd_۲}(G) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۲ & ۲ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۲ & ۲ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصه ماتریس فوق برابر است:

$$\rho^۶ - ۲\rho^۵ - ۴۳\rho^۴ - ۱۰۰\rho^۳ - ۴۱\rho^۲ + ۳۶\rho - ۴ = ۰$$

مقادیر ویژه ماتریس $A_{Dd_۲}(G)$ بصورت زیر است:

$$\rho_۱ \approx -۳/۳۰۲۸, \rho_۲ \approx -۲, \rho_۳ \approx -۱/۶۴۴۵$$
$$\rho_۴ \approx ۰/۱۴۳۱, \rho_۵ \approx ۰/۳۰۲۸, \rho_۶ ۸/۵۰۱۵$$

در نتیجه:

$$E_{Dd_۲}(G) \approx ۱۵/۸۹۴۶.$$

بنابراین انرژی غالب کمینه فاصله بستگی به مجموعه غالب کمینه دارد.

۱.۵ انرژی غالب کمینه فاصله برخی از گراف‌های استاندارد

قضیه ۱.۱.۵. انرژی غالب کمینه فاصله گراف ستاره برای $n \geq ۳$ برابر است با $۴n - ۷$.

برهان. در گراف ستاره ماتریس پوشش کمینه فاصله و ماتریس غالب کمینه فاصله با هم برابرند لذا حکم برقرار است. □

قضیه ۲.۱.۵. انرژی غالب کمینه فاصله گراف تاج S_n° برابر است با :

$$E_{Dd}(S_n^\circ) = ۷(n-۱)\sqrt{n^۲ - ۲n + ۵}.$$

برهان. برای گراف تاج با مجموعه رئوس $\{u_۱, u_۲, \ldots, u_n, v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ مجموعه غالب کمینه آن $D =$

$\{u_1, v_1\}$ می‌باشد پس داریم:

$$A_{Dd}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 2 & 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 3 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 2 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 2 & 2 & 0 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 3 & 2 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{(2n \times 2n)}$$

معادله مشخصه آن برابر است:

$$\rho^{n-2}(\rho+40)^{n-2}[\rho^2 + (7-n)\rho + (11-3n)][\rho^2 - (3n+1)\rho(3n-3)] = 0$$

مقادیر ویژه غالب کمینه از معادله بالا بصورت زیر است:

$$Spec(S_n^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & \frac{(n-7)+\sqrt{A}}{2} & \frac{(n-7)-\sqrt{A}}{2} & \frac{(3n+1)+\sqrt{B}}{2} & \frac{(3n+1)-\sqrt{B}}{2} \\ n-2 & n-2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

که

$$A = n^2 - 2n + 5, B = 9n^2 - 6n + 13$$

بنابراین:

$$E_{Dd}(S_n^\circ) = 7(n-1) + \sqrt{n^2 - 2n + 5}.$$

□

قضیه ۳.۱.۵. برای هر عدد صحیح $n \geqslant 2$، انرژی غالب کمینه فاصله از گراف کامل K_n برابر است با:

$$E_{Dd}(K_n) = (n-2) + \sqrt{n^2 - 2n + 5}.$$

برهان. برای گراف‌های کامل ماتریس غالب کمینه فاصله و ماتریس غلبه کمینه با هم برابر است بنابراین انرژی غالب کمینه فاصله برابر انرژی غالب کمینه می‌باشد از [۲۴] داریم:

برای گراف کامل با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ و مجموعه غالب $D = \{v_1\}$ ماتریس غالب کمینه

فاصله گراف K_n بصورت زیر است:

$$A_D(K_n) = A_{Dd}(K_n) = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & \dots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & \dots & ۱ & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ & ۰ \end{pmatrix}_{n \times n}$$

معادله مشخصه آن برابر است با:

$$(\rho + ۱)^{(n-۲)}(\rho^۲ - (n-۱)\rho - ۱) = ۰$$

مقادیر ویژه آن برابر است:

$$Spec(K_n) = \begin{pmatrix} -۱ & \frac{(n-۱)+\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲} & \frac{(n-۱)-\sqrt{n^۲-۲n+۵}}{۲} \\ n-۲ & -۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

حکم ثابت می‌شود.

□

۲.۵ کران‌هایی برای انرژی غالب کمینه فاصله

قضیه زیر خصوصیات مقادیر ویژه ماتریس غالب کمینه فاصله بیان می‌شود.

قضیه ۱.۲.۵. فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$، مجموعه یال‌های E و $D = \{u_۱, u_۲, \dots, u_n\}$ مجموعه غالب کمینه باشد. اگر $\rho_۱, \rho_۲, \dots, \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس غالب کمینه فاصله $A_{Dd}(G)$ باشند آنگاه:

۱.

$$\sum_{i=۱}^{n} \rho_i = |D|.$$

۲.

$$\sum_{i=۱}^{n} \rho_i^۲ = ۲m + ۲M + |D|.$$

که

$$M = \sum_{i<j, d_(v_i,v_j) \neq ۱} d(v_i, v_j)^۲ \text{ و } m = |E|$$

برهان. ۱.می‌دانیم که مجموع مقادیر ویژه $A_{Dd}(G)$ برابراست با مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $A_{Dd}(G)$ پس داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i=\sum_{i=1}^{n}d_{ii}=|D|=k.$$

۲.بطور مشابه، مجموع مربعات مقادیر ویژه $A_{Dd}(G)$ برابر با مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $[A_{Dd}(G)]^2$ می‌باشد بنابراین:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}d_{ij}=\sum_{i=1}^{n}d_{ii}^2+\sum_{i\neq j}d_{ij}d_{ji},\\&=\sum_{i=1}^{n}d_{ii}^2+2\sum_{i<j}(d_{ij})^2=|D|+2\sum_{i<j}d(v_i,v_j)^2,\\&=|D|+2m+2M.\end{aligned}$$

□

نتیجه ۱.۲.۵. فرض کنید G یک (n,m) گراف همبند با قطر ۲ و $D=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ مجموعه غالب کمینه باشد. اگر $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس غالب کمینه فاصله $A_{Dd}(G)$ باشند آنگاه:

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2=k+2(2n^2-2n-3m).$$

برهان. از نتیجه ۲.۱.۳ می‌دانیم که در $A_{Dd}(G)$ $2m$ عنصر از فاصله یک و $n(n-1)-2m$ عنصر از فاصله دو وجود دارد از اینرو نتیجه حاصل از قضیه فوق است. □

مشابه [۲۷] مک‌کلند کران‌هایی برای انرژی یک گراف، کران‌های برای $E_{Dd}(G)$ در قضیه زیر نشان داده می‌شود.

قضیه ۲.۲.۵. فرض کنید G یک $(n,m)-$ گراف باشد اگر D مجموعه غالب کمینه باشد و $P=|detA_{Dd}(G)|$ آنگاه :

$$\sqrt{(2m+2M+k)+n(n-1)P^{\frac{2}{n}}}\leq E_{Dd}(G)\leq\sqrt{n(2m+2M+k)}.$$

برهان. با استفاده از نامساوی کوشی ـ شوارتز داریم :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right),$$

قرار می‌دهیم : $a_i=1$ و $b_i=|\rho_i|$ آنگاه :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}|\rho_i|\right)^2&\leq\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2\right),\\ [E_{Dd}(G)]^2&\leq\sqrt{n(2m+2M+k)}\mathbf{1.2.5},\\ \Longrightarrow E_{Cd}(G)&\leq\sqrt{n((2m+2M+k)},\end{aligned}$$

می‌دانیم نامساوی حسابی بزرگتر از نامساوی هندسی است پس داریم :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n-1)}|\rho_i||\rho_j| &\geq \left[\prod_{i\neq j}|\rho_i||\rho_j|\right]^{\frac{1}{n(n-1)}}, \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n}|\rho_i|^{2(n-1)}\right]^{\frac{1}{n(n-1)}}, \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n}|\rho_i|\right]^{\frac{2}{n}} = \left|\prod_{i=1}^{n}\rho_i\right|^{\frac{2}{n}}, \\
&= |detA_{Dd}(G)|^{\frac{2}{n}} = P^{\frac{2}{n}}, \\
&\therefore \sum_{i\neq j}|\rho_i||\rho_j| \geq n(n-1)P^{\frac{2}{n}}, \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

حال در نظر می‌گیریم :

$$\begin{aligned}
[E_{Dd}(G)]^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n}|\rho_i|\right)^2, \\
&= \sum_{i=1}^{n}|\rho_i|^2 + \sum_{i<j}|\rho_i||\rho_j|, \\
&\therefore [E_{Dd}(G)]^2 \geq (2m+2M+k) + n(n-1)P^{\frac{2}{n}} \text{ (1.5)از}, \\
E_{Dd}(G) &\geq \sqrt{(2m+2M+k) + n(n-1)P^{\frac{2}{n}}}.
\end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۲.۵. اگر $\rho_1(G)$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس غالب کمینه فاصله باشد، آنگاه :

$$\rho_1(G) \geq \frac{2W(G)+k}{n}.$$

که $W(G)$ اندیس وینر گراف G و k تعداد غالب است.

برهان. فرض کنید X بردار غیر صفر باشد ، بنا بر [۵] داریم :

$$\rho_1(A_{Dd}) = \max_{X\neq 0}\left\{\frac{X'A_{Dd}X}{X'X}\right\},$$

$$\therefore \rho_1(A_{Dd}) \geq \frac{J'A_{Dd}J}{J'J} = \frac{2\sum_{i<j}d(v_i,v_j)+k}{n} = \frac{2W(G)+k}{n}.$$

که J ماتریس واحد است. □

لم ۱.۲.۵. فرض کنید G یک $(n,m)-$ گراف با قطر دو و $\rho_1(G)$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس غالب کمینه فاصله باشد ، آنگاه :

$$\rho_1(G) \geq \frac{2n^2-2m-2n+k}{n}.$$

برهان. فرض کنید G یک گراف همبند با قطر دو و d_i نشان دهنده درجه رأس v_i باشد، واضح است که سطر i ام از ماتریس A_{dd} شامل یک d_i و دو می‌باشد. $n - d_i - ۱$ با استفاده از اصل ریلی، برای $J = [۱, ۱, ۱, \ldots, ۱]$ داریم:

$$\rho_۱(A_{Dd}) \geq \frac{J' A_{Dd} J}{J' J} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} [d_i \times ۱ + (n - d_i - ۱)۲] + k}{n},$$
$$= \frac{\sum_{i=۱}^{n} [۲n - d_i - ۲] + k}{n} = \frac{۲n^۲ - ۲m - ۲n + k}{n}.$$

□

مشابه کران بالای انرژی یک گراف در [۲۵] کران بالا برای $E_{Dd}(G)$ در قضیه زیر داده شده است.

قضیه ۴.۲.۵. فرض کنید G یک $(n, m)-$ گراف همبند با قطر دو و $\frac{k+۲n^۲-۲n-۲m}{n} \geq ۱$ باشد، آنگاه :

$$E_{Dd}(G) \leq \frac{k + ۲n^۲ - ۲n - ۲m}{n} + \sqrt{(n-۱)[k + ۴n^۲ - ۴n - ۶m - (\frac{k + ۲n^۲ - ۲n - ۲m}{n})^۲]}.$$

برهان. با استفاده از نامساوی کوشی ـ شوارتز داریم :

$$\left(\sum_{i=۲}^{n} a_i b_i\right)^۲ \leq \left(\sum_{i=۲}^{n} a_i^۲\right)\left(\sum_{i=۲}^{n} b_i^۲\right),$$

قرار می‌دهیم $a_i = ۱$ و $b_i = |\rho_i|$ آنگاه :

$$\left(\sum_{i=۲}^{n} |\rho_i|\right)^۲ \leq \left(\sum_{i=۲}^{n} ۱\right)\left(\sum_{i=۲}^{n} \rho_i^۲\right),$$
$$\Longrightarrow [E_{Dd}(G) - \rho_۱]^۲ \leq (n-۱)(k + ۴n^۲ - ۴n - ۶m - \rho_۱^۲),$$
$$E_{Dd}(G) \leq \rho_۱ + \sqrt{(n-۱)(k + ۴n^۲ - ۴n - ۶m - \rho_۱^۲)},$$

فرض کنید:

$$f(x) = x + \sqrt{(n-۱)(k + ۴n^۲ - ۴n - ۶m - x^۲)},$$

برای تابع کاهشی داریم $f'(x) \leq ۰$ داریم:

$$\Longrightarrow ۱ - \frac{x(n-۱)}{\sqrt{(n-۱)(k + ۴n^۲ - ۴n - ۶m - x^۲)}} \leq ۰,$$

$$\Longrightarrow x \geq \sqrt{\frac{k + ۴n^۲ - ۴n - ۶m}{n}},$$

تابع $f(x)$ در بازه زیر کاهشی می‌باشد

$$\left[\sqrt{\frac{k + ۴n^۲ - ۴n - ۶m}{n}}, \sqrt{k + ۴n^۲ - ۴n - ۶m}\right],$$

به وضوح داریم:

$$\sqrt{\frac{k+۲n^{۲}-۲n-۲m}{n}} \in \left[\sqrt{\frac{k+۴n^{۲}-۴n-۶m}{n}}, \sqrt{k+۴n^{۲}-۴n-۶m}\right],$$

از فرض داریم :

$$\frac{k+۲n^{۲}-۲n-۲m}{n} \geq ۱,$$

بنابراین :

$$\sqrt{\frac{k+۲n^{۲}-۲n-۲m}{n}} \leq \frac{k+۲n^{۲}-۲n-۲m}{n} \leq \rho_{۱}۱.۲.۵,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore f(\rho_{۱}) \leq f\left(\frac{k+۲n^{۲}-۲n-۲m}{n}\right),\\
&E_{Dd}(G) \leq f(\rho_{۱}) \leq f\left(\frac{k+۲n^{۲}-۲n-۲m}{n}\right),\\
&E_{Dd}(G) \leq f\left(\frac{k+۲n^{۲}-۲n-۲m}{n}\right),\\
&E_{Dd}(G) \leq \frac{k+۲n^{۲}-۲n-۲m}{n},\\
&\qquad + \sqrt{(n-۱)[k+۴n^{۲}-۴n-۶m-(\frac{k+۲n^{۲}-۲n-۲m}{n})^{۲}]}.
\end{aligned}$$

□

باپت[۳] و اس‌پتی[۴] در [۷] ثابت کردند که اگر انرژی گراف عدد گویا باشد پس یک عدد صحیح حقیقی است. نتیجه مشابه برای حداقل انرژی غالب در قضیه زیر آمده است.

لم ۲.۲.۵. فرض کنید G یک گراف با مجموعه غالب D باشد. اگر انرژی غالب کمینه فاصله $E_{Dd}(G)$ یک عدد گویا باشد آنگاه:

$$E_{Dd}(G) \equiv |D| (mod ۲)$$

برهان. فرض کنید $\rho_{۱}, \rho_{۲}, \ldots, \rho_{n}$ مقادیر ویژه ماتریس غالب کمینه فاصله گراف G باشند که $\rho_{۱}, \rho_{۲}, \ldots, \rho_{r}$ مقادیر

[۳] Bapat

[۴] S. Pati

ویژه مثبت و بقیه منفی می‌باشند، آنگاه:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|\rho_i| &= (\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_r)-(\rho_{r+1}+\ldots+\rho_n)\,,\\
&= 2\,(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_r)-(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n)\,,\\
E_{Dd}(G) &= 2\,(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_r)-\sum_{i=1}^{n}\rho_i,\\
E_{Dd}(G) &= 2\,(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_r)-|D|,\\
E_{Dd}(G) &\equiv |D|\,(mod 2)\,.
\end{aligned}$$

□

فصل ۶

انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین

در این فصل بصورت ابتکاری به تعریف انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین و کران‌های برای آن می‌پردازیم. و انرژی پوشش کمینه لاپلاسین فاصله دو گراف کامل و ستاره را محاسبه می‌کنیم. فرض شود $G = (V, E)$ یک گراف ساده با مجموعه رئوس $V(G) = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{e_۱, e_۲, \ldots, e_n\}$ باشد. و $A(G)$ ماتریس مجاورت گراف G و $deg(G)$ ماتریس درجه‌ای گراف G باشد. ماتریس لاپلاسین G، یک ماتریس مربعی $n \times n$ است که بصورت زیر تعریف می‌شود: [۱۸]

$$L(G) = deg(G) - A(G). \tag{۱.۶}$$

فرض شود $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_n$ مقادیر ویژه ماتریس $L(G)$ باشد بصورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$\mu_۱ \geq \mu_۲ \geq \ldots \geq \mu_n$$

انرژی لاپلاسین گراف G بصورت زیر تعریف می‌شود: [۱۸]

$$LE(G) = \sum_{i=۱}^{n} \left| \mu_i - \frac{۲m}{n} \right|. \tag{۲.۶}$$

۱.۶ انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین

قبل از تعریف و قضایای اصلی مرور بر تعریف انرژی پوشش کمینه لاپلاسین و خواص مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه لاپلاسین داریم که تعاریف و قضایای زیر از مراجع [۱۸]و [۲۲] گردآوری شده است. ماتریس پوشش کمینه لاپلاسین

به صورت

$$L_C(G) = deg(G) - A_C(G).$$

تعریف می‌شود. اگر $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_n$ مقادیر ویژه از $L_C(G)$ باشند بصورت نزولی مرتب شده است:

$$\mu_۱ \geq \mu_۲ \geq \ldots \geq \mu_n.$$

می‌توان انرژی پوشش کمینه لاپلاسین را بصورت زیر تعریف کرد:

$$LE_C(G) = \sum_{i=۱}^{n} |\mu_i - \frac{۲m}{n}|.$$

قضیه ۱.۱.۶. فرض کنید G یک گراف ساده و C مجموعه پوشش کمینه باشد، اگر $\mu_۱, \mu_۲, \ldots, \mu_n$ مقادیر ویژهماتریس پوشش کمینه لاپلاسین باشد، آنگاه:

.۱

$$\sum_{i=۱}^{n} \mu_i = ۲|E| - |C|.$$

.۲

$$\sum_{i=۱}^{n} \mu_i^۲ = ۲|E| + \sum_{i=۱}^{n} (d_i - c_i)^۲.$$

که

$$c_i = \begin{cases} ۱ & v_i \in C \\ ۰ & v_i \notin C \end{cases}$$

قضیه ۲.۱.۶. فرض کنید G یک گراف ساده و C مجموعه پوشش کمینه باشد، اگر مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه لاپلاسین عدد گویا باشد، آنگاه:

$$\sum_{i=۱}^{n} |\mu_i| \equiv |C| \, (mod ۲).$$

قضیه ۳.۱.۶. فرض کنید G یک گراف ساده و C مجموعه پوشش کمینه باشد، اگر مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه لاپلاسین عدد گویا باشد، آنگاه:

$$LE_C(G) \in (|C| + ۲t - ۲m, |C| + ۲t + ۲m),$$

که

$$\sum_{i=۱}^{n} |\mu_i| \equiv |C| \, (mod ۲).$$

یک عدد صحیح می‌باشد.

در این بخش ما به پیروی از تعریف ماتریس پوشش کمینه لاپلاسین و انرژی پوشش کمینه لاپلاسین به تعریف انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین و کران‌های برای آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۶. ماتریس فاصله لاپلاسین [1] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_D(G) = deg(G) - D(G).$$

که $deg(G)$ ماتریس قطری درجه‌ای و $D(G)$ ماتریس فاصله می‌باشد. مقادیر ویژه ماتریس فاصله لاپلاسین به صورت زیرمی‌باشد:

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_n.$$

تعریف ۲.۱.۶. انرژی فاصله لاپلاسین [2] را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$LE_D(G) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i - \frac{2m}{n}|.$$

تعریف ۳.۱.۶. فرض می‌شود که $deg(G)$ ماتریس درجه‌ای گراف G و $A_{Cd}(G)$ ماتریس پوشش کمینه فاصله باشد **ماتریس پوشش کمینه فاصله لاپلاسین** [3] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_{Cd}(G) = deg(G) - A_{Cd}(G).$$

فرض کنید $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ مقادیر ویژه از $L_{Cd}(G)$ باشند که به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq ... \geq \gamma_n.$$

انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین [4] را مجموعه قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله لاپلاسین تعریف می‌کنیم:

$$LE_{Cd}(G) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i - \frac{2m}{n}|.$$

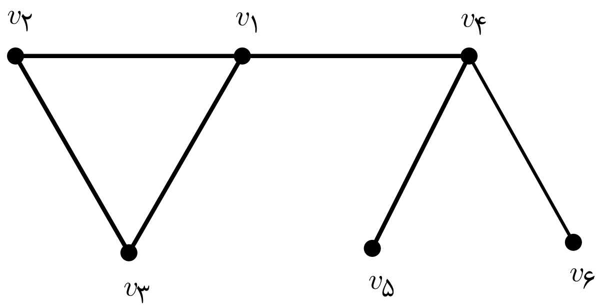
چون برای هر گراف چند مجموعه پوشش کمینه وجود دارد انرژی پوشش کینه فاصله و انرژی پوشش کمینه لاپلاسین بستگی به مجموعه پوشش کمینه دارد بنابراین انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین هم وابسته به مجموعه پوششی می‌باشد.

مثال ۱.۱.۶. سه مجموعه پوشش کمینه برای گراف زیر داریم:

۱. $C_1 = \{v_1, v_2, v_4\}$

۲. $C_2 = \{v_1, v_3, v_4\}$

[1] Laplacian distance matrix
[2] Laplacian distance Energy
[3] Laplacian minimum covering distance matrix
[4] Laplacian minimum covering distance Energy



ماتریس پوشش کمینه فاصله مربوط به $C_۱$ و $C_۲$ به صورت زیر می‌باشد و میانگین درجه رأسی گراف برابر است با : ۶

$$A_{C_۱d}(G)=\begin{pmatrix} ۱&۱&۱&۱&۲&۲\\ ۱&۱&۱&۲&۳&۳\\ ۱&۱&۰&۲&۳&۳\\ ۱&۲&۲&۱&۱&۱\\ ۲&۳&۳&۱&۰&۲\\ ۲&۳&۳&۱&۲&۰ \end{pmatrix} \text{و} deg(G)=\begin{pmatrix} ۳&۰&۰&۰&۰&۰\\ ۰&۲&۰&۰&۰&۰\\ ۰&۰&۲&۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰&۳&۰&۰\\ ۰&۰&۰&۰&۱&۰\\ ۰&۰&۰&۰&۰&۱ \end{pmatrix}$$

$$L_{C_۱d}=\begin{pmatrix} ۲&-۱&-۱&-۱&-۲&-۲\\ -۱&۱&-۱&-۲&-۳&-۳\\ -۱&-۱&۲&-۲&-۳&-۳\\ -۱&-۲&-۲&۲&-۱&-۱\\ -۲&-۳&-۳&-۱&۱&-۲\\ -۲&-۳&-۳&-۱&-۲&۱ \end{pmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصه $L_{C_۱d}$ برابر است با:

$$\gamma^۶-۹\gamma^۵-۲۹\gamma^۴+۵۷۵\gamma^۳-۲۴۰۷\gamma^۲+۴۲۳۶\gamma-۲۷۶۳=۰$$

ومقادیر ویژه آن برابر است:

$$\gamma_۱=-۸/۲۴۷۶,\gamma_۲=۲/۲۹۵۵, \qquad \gamma_۳=۲/۵۲۱۷$$
$$\gamma_۴=۳,\gamma_۵=۳, \qquad \gamma_۶=۶/۴۳۰۳$$

$$LE_{C_۱d}(G)=۲۸/۱۵۷۱$$

$$A_{C_\text{۲}d}(G)=\begin{pmatrix} ۱&۱&۱&۱&۲&۲\\ ۱&۰&۱&۲&۳&۳\\ ۱&۱&۱&۲&۳&۳\\ ۱&۲&۲&۱&۱&۱\\ ۲&۳&۳&۱&۰&۲\\ ۲&۳&۳&۱&۲&۰ \end{pmatrix} deg(G)-A_{C_\text{۲}d}=L_{C_\text{۲}d}=\begin{pmatrix} ۲&-۱&-۱&-۱&-۲&-۲\\ -۱&۱&-۱&-۲&-۳&-۳\\ -۱&-۱&۲&-۲&-۳&-۳\\ -۱&-۲&-۲&۲&-۱&-۱\\ -۲&-۳&-۳&-۱&۱&-۲\\ -۲&-۳&-۳&-۱&-۲&۱ \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{۶}-۸\gamma^{۵}-۳۶\gamma^{۴}+۵۴۳\gamma^{۳}-۲۰۳۳\gamma^{۲}+۳۲۰۵\gamma-۱۸۴۸=۰$$

$$\gamma_۱=-۸/۳۳۹۲,\gamma_۲=۱/۶۴۷۷,\qquad \gamma_۳=۲/۴۰۵۰$$

$$\gamma_۴=۲/۹۳۴۶,\gamma_۵=۳,\qquad \gamma_۶=۶/۳۵۱۹$$

$$LE_{C_\text{۲}d}=۲۸/۷۰۳۸$$

۲.۶ کران‌های برای انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین

قضیه زیر مربوط به خواص مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله لاپلاسین می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۶. فرض کنید G یک گراف ساده و C مجمعه پوشش کمینه باشد، اگر $\gamma_۱,\gamma_۲,\dots,\gamma_n$ مقادیر ویژه ماتریس پوشش کمینه فاصله لاپلاسین باشد، آنگاه:

.۱

$$\sum_{i=۱}^{n}\gamma_i=۲|E|-|C|.$$

.۲

$$\sum_{i=۱}^{n}\gamma_i^{۲}=۲|E|+۲\sum_{i<j,d(v_i,v_j)\neq ۱}d(v_i,v_j)^{۲}+\sum_{i=۱}^{n}(d_i-c_i)^{۲}.$$

که

$$c_i=\begin{cases} ۱ & v_i\in C\\ ۰ & v_i\notin C\end{cases}$$

برهان. ۱. با توجه به تعریف $L_{Cd}(G)$ مجموع عناصر روی قطر اصلی این ماتریس برابر است با:

$$\sum_{i=۱}^{n}d_i=۲E-|C|,$$

همچنین می‌دانیم که مجموع مقادیر ویژه ماتریس $L_{Cd}(G)$ برابر است با مجموع درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس پس:

$$\sum_{i=۱}^{n}\gamma_i=۲E-|C|.$$

۲. مجموع مربعات مقادیر ویژه $L_{Cd}(G)$ برابر با مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $[L_{Cd}(G)]^{۲}$ است در نتیجه:

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n}\gamma_i^{۲} &= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\left(l_{ij}\right)\left(l_{ji}\right),\\ &= ۲\sum_{i<j}\left(l_{ij}\right)^{۲}+\sum_{i=۱}^{n}\left(l_{ii}\right)^{۲},\\ &= ۲\left(|E|+M\right)+\sum_{i=۱}^{n}\left(d_i-C_i\right).\end{aligned}$$

که

$$M=\sum_{i<j,d(v_i,v_j)\neq ۱} d\left(v_i,v_j\right)^{۲}.$$

□

قضیه ۲.۲.۶. اگر G یک گراف با n رأس و m یال و C مجموعه پوشش کمینه ماتریس $L_{Cd}(G)$ باشد آنگاه:

$$LE_{Cd}(G)\leq\sqrt{۲n(m+M)+\sum_{i=۱}^{n}\left(d_i-c_i\right)}+۲m.$$

برهان. بنابر نامساوی کوشی-شوارتز

$$\left(\sum_{i=۱}^{n}a_ib_i\right)^{۲}\leq\left(\sum_{i=۱}^{n}a_i^{۲}\right)\left(\sum_{i=۱}^{n}b_i^{۲}\right),$$

قرار می‌دهیم $b_i=|\gamma_i|$، $a_i=۱$ پس

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=۱}^{n}|\gamma_i|\right)^{۲} &\leq \sum_{i=۱}^{n}۱\sum_{i=۱}^{n}|\gamma_i|^{۲},\\ \left(\sum_{i=۱}^{n}|\gamma_i|\right)^{۲} &\leq n۲\left(m+M\right)+\sum_{i=۱}^{n}\left(d_i-c_i\right),\\ \sum_{i=۱}^{n}|\gamma_i| &\leq \sqrt{۲n(m+M)+\sum_{i=۱}^{n}\left(d_i-c_i\right)},\end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\begin{aligned}\left|\gamma_i-\frac{۲m}{n}\right| &\leq|\gamma_i|+\left|\frac{۲m}{n}\right|, && \forall_i=۱,۲,\ldots,n\\ \left|\gamma_i-\frac{۲m}{n}\right| &\leq|\gamma_i|+\frac{۲m}{n}, && \forall_i=۱,۲,\cdots,n\\ \sum_{i=۱}^{n}\left|\gamma_i-\frac{۲m}{n}\right| &\leq \sum_{i=۱}^{n}|\gamma_i|+\sum_{i=۱}^{n}\frac{۲m}{n},\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$LE_{Cd}(G) \leq \sqrt{۲n(m+M) + \sum_{i=۱}^{n}(d_i - c_i) + ۲m}.$$

□

قضیه ۳.۲.۶. فرض کنید G یک گراف با n رأس و m یال و C مجموعه پوشش کمینه ماتریس $L_{Cd}(G)$ و $P = |detL_{Cd}(G)|$ باشد آنگاه:

$$\sqrt{۲(m+M) + \sum_{i=۱}^{n}(d_i - c_i) + n(n-۱)P^{\frac{۲}{n}} - ۲m} \leq LE_{Cd}(G)$$
$$\leq \sqrt{\left[n\left(۲(m+M) + \sum_{i=۱}^{n}(d_i - c_i)\right) + ۴m(|C| - m)\right]}.$$

برهان. ازنامساوی کوشی-شوارتز داریم:

$$\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i\right)^۲ \leq \left(\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲\right),$$

قرار می‌دهیم $b_i = \left|\gamma_i - \frac{۲m}{n}\right|$، $a_i = ۱$

$$\left(\sum_{i=۱}^{n}\left|\gamma_i - \frac{۲m}{n}\right|\right)^۲ \leq \sum_{i=۱}^{n} ۱ \left(\sum_{i=۱}^{n}\left|\gamma_i - \frac{۲m}{n}\right|^۲\right),$$
$$[LE_{Cd}(G)]^۲ \leq n\left[\sum_{i=۱}^{n}\gamma_i^۲ + \sum_{i=۱}^{n}\frac{۴m^۲}{n^۲} - \sum_{i=۱}^{n}\frac{۴m}{n}\gamma_i\right],$$
$$[LE_{Cd}(G)]^۲ \leq n\left[۲(m+M) + \sum_{i=۱}^{n}(d_i - c_i) + \frac{۴m^۲}{n^۲}\cdot n - \frac{۴m}{n}(۲m - |C|)\right],$$
$$[LE_{Cd}(G)]^۲ \leq \left[n\left(۲(m+M) + \sum_{i=۱}^{n}(d_i - c_i)\right) + ۴m(|C| - m)\right],$$
$$LE_{Cd}(G) \leq \sqrt{\left[n\left(۲(m+M) + \sum_{i=۱}^{n}(d_i - c_i)\right) + ۴m(|C| - m)\right]},$$

می‌دانیم نامساوی حسابی بزرگتر از نامساوی هندسی است پس داریم :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i||\gamma_j| &\geq \left[\prod_{i\neq j}|\gamma_i||\gamma_j|\right]^{\frac{1}{n(n-1)}},\\ &\geq \left[\prod_{i=1}^{n}|\gamma_i|^{2(n-1)}\right]^{\frac{1}{n(n-1)}},\\ &\geq \left[\prod_{i=1}^{n}|\gamma_i|\right]^{\frac{2}{n}} = \left|\prod_{i=1}^{n}\gamma_i\right|^{\frac{2}{n}},\\ &\geq |detL_{Cd}(G)|^{\frac{2}{n}} = P^{\frac{2}{n}},\\ &\therefore \sum_{i\neq j}|\gamma_i||\gamma_j| \geq n(n-1)P^{\frac{2}{n}},\end{aligned} \tag{3.6}$$

داریم:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j|\right),\\ \left(\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|^2 + \sum_{i\neq j}|\gamma_i|\,|\gamma_j|,\end{aligned} \tag{4.6}$$

از معادله ۳.۶ و ۴.۶ داریم:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|\right)^2 &\geq 2(m+M) + \sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i) + n(n-1)P^{\frac{2}{n}},\\ \sum_{i=1}^{n}|\gamma_i| &\geq \sqrt{2(m+M) + \sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i) + n(n-1)P^{\frac{2}{n}}},\end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\begin{aligned}\left|\gamma_i - \frac{2m}{n}\right| &\geq |\gamma_i| - \left|\frac{2m}{n}\right|, \forall_i = 1,2,\ldots,n\\ &\geq |\gamma_i| - \frac{2m}{n}, \forall_i = 1,2,\ldots,n\\ \sum_{i=1}^{n}\left|\gamma_i - \frac{2m}{n}\right| &\geq \sum_{i=1}^{n}|\gamma_i| - \sum_{i=1}^{n}\frac{2m}{n},\\ LE_{Cd}(G) &\geq \sqrt{2(m+M) + \sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i) + n(n-1)P^{\frac{2}{n}}} - 2m.\end{aligned}$$

□

۳.۶ انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین دو گراف استاندارد

قضیه ۱.۳.۶. انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین گراف کامل برای $n \geq ۲$ برابراست با :

$$LE_{Cd}(K_n) = \sqrt{(n+۳)(n-۱)}.$$

برهان. فرض کنید K_n یک گراف کامل با مجموعه رئوس $V = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ و $C = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_{n-۱}\}$ مجموعه پوشش کمینه باشد آنگاه:

چند جمله‌ای مربوط به $L_{Cd}(K_n)$ بصورت زیر است:

$$deg(k_n) = \begin{pmatrix} n-۱ & ۰ & ۰ & \ldots & ۰ \\ ۰ & n-۱ & ۰ & \ldots & ۰ \\ ۰ & ۰ & n-۱ & \ldots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \ldots & n-۱ \end{pmatrix}_{(n\times n)}$$

$$A_{Cd}(K_n) = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۰ \end{pmatrix}_{(n\times n)}$$

$$f_n(L_{Cd}(K_n), \gamma) = \begin{vmatrix} \gamma_(n-۲) & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ ۱ & \gamma_(n-۲) & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & \gamma_(n-۲) & \ldots & ۱ & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & \gamma-(n-۲) & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & \gamma - n \end{vmatrix}_{(n\times n)}$$

$$f_n(L_{Cd}(K_n), \gamma) = \left[\gamma_(n-۱)\right]^{n-۲} + [\gamma^۲ - (n-۱)\gamma - (n-۱)],$$

که مقادیر ویژه آن برابراست:

$$Spec(K_n) = \begin{pmatrix} n-۱ & \frac{(n-۱)+\sqrt{(n+۳)(n-۱)}}{۲} & \frac{(n-۱)-\sqrt{(n+۳)(n-۱)}}{۲} \\ n-۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

گراف K_n دارای n رأس و $\frac{n(n-1)}{2}$ یال می‌باشد پس میانگین درجه‌ای آن برابراست با $(n-1)$ در نتیجه

$$LE_{Cd}(K_n) = |(n-1)-(n-1)| \times (n-2) + \left|\frac{(n-1)+\sqrt{(n+3)(n-1)}}{2}\right| + \left|\frac{(n-1)-\sqrt{(n+3)(n-1)}}{2}\right|$$

بنابر این:

$$LE_{Cd}(K_n) = \sqrt{(n+3)(n-1)}.$$

□

قضیه ۶.۳.۲. انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین گراف ستاره برای $n \geq 3$ برابر است با:

$$LE_{Cd}(K_{1,n}) = \frac{n^2-4}{n} + \sqrt{17n^2-22n+54}.$$

برهان. گراف ستاره با مجموعه رئوس $V = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ در نظر می‌گیریم . و $C = \{v_0\}$ مجموعه پوشش کمینه می‌باشد، آنگاه :

$$deg(k_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(n\times n)}$$

$$A_{cd}(k_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

چند جمله‌ای مشخصه $L_{Cd}(K_{1,n-1})$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f(K_{1,n-1}) = \begin{vmatrix} \gamma-(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \gamma-1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & \gamma-1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & \gamma-1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$f(K_{1,n-1}) = (\gamma-3)^{n-2}\left[\gamma^2+(n-3)\gamma+(-4n^2+4n-9)\right]$$

$$Spec(K_{۱,n-۱}) = \begin{pmatrix} ۳ & \frac{-(n-۳)+\sqrt{۱۷n^۲-۲۲n+۵۴}}{۲} & \frac{-(n-۳)-\sqrt{۱۷n^۲-۲۲n+۵۴}}{۲} \\ n-۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

میانگین درجه‌ای گراف ستاره $K_{۱,n-۱}$ برابراست با $\frac{۲(n-۱)}{n}$ پس :

$$\begin{aligned} LE_{Cd}(K_{۱,n-۱}) &= \left|۳ - \frac{۲(n-۱)}{n}\right| \times (n-۲) \\ &+ \left|\frac{-(n-۳)-\sqrt{۱۷n^۲-۲۲n+۵۴}}{۲} - \frac{۲(n-۱)}{n}\right| \\ &+ \left|\frac{-(n-۳)+\sqrt{۱۷n^۲-۲۲n+۵۴}}{۲} - \frac{۲(n-۱)}{n}\right| \\ &= \frac{n^۲-۴}{n} + \sqrt{۱۷n^۲-۲۲n+۵۴} \end{aligned}$$

$\square$

مراجع

[۱] باندی، مورتی،(۱۳۷۸)، "**نظریه گراف‌ها و کاربردهای آن**" جلد اول، چاپ ششم، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، صفحه ۹۵۴.

[۲] افضل شهیدی ب، (۱۳۸۸)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد: "یک دسته بندی از انرژی گراف"، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[3] C. Adiga, , A. Bayad, I. Gutman, S. A. Srinivas. The minimum covering energy of a graph, *Kragujevac J. Sci*, 34(2012), 39-56.

[4] R. Balakrishnan, The energy of a graph, *Lin Algebra Appl*. 387 (2004), 287-295.

[5] R. B. Bapat, *Graphs and Matrices*, Hindustan Book Agency, (2011), 145-165.

[6] R. Bapat, S. J. Kirkland, M. Neumann, On distance matrices and Laplacians, *Linear algebra and its applications*, 401(2005), 193-209.

[7] R. B. Bapat, S. Pati, *Energy of a graph is never an odd integer*, (2004)

[8] F. Buckley, F. Harary, *Distance in Graphs*, Addison Wesley, Redwood, 1990.

[9] S. B. Bozkurt, A. D. Güngör, B. Zhou, Note on the distance energy of graphs, MATCH Commun. *Math. Comput. Chem,* 64(2010), 129-134.

[10] D. M. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[11] M. Edelberg, M. R. Garey, R. L. Graham, On the distance matrix of a tree, *Discrete Math*. 14 (1976), 23-39.

[12] I. Gopalapillai, I. Gutman, A. Vijayakumar, *On Distance Energy of Graphs*, (2007).

[13] R. L. Graham, L. Lovasz, Distance matrix polynomial of trees, *Adv. Math.* 29 (1978), 60-88.

[14] R. L. Graham, H. O. Pollak, On the addressing problem for loop switching, *Bell System Tech. J.* 50 (1971), 2495-2519.

[15] I. Gutman, The energy of a graph, *Ber. Math. Stat. Sekt. Forschungsz. Graz* 103 (1978), 1-22.

[16] I. Gutman, N. M. De Abreu, C. T. Vinagre, A. S. Bonifacio, S. Radenkovic, Relation between energy and Laplacian energy,*MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 59(2008), 343-354.

[17] I. Gutman, S. Zare Firoozabadi, J. A. de la Pe na, J. Rada, On the energy of regular graphs, MATCH Commun. *Math. Comput. Chem.* 57 (2007), 435-442.

[18] I. Gutman, B. Zhou, Laplacian energy of a graph. *Linear Algebra and its applications.* 414 (2006), 29-37.

[19] H. Hosoya, M. Murakami, M. Gotoh, Distance polynomial and characterization of a graph, Natur. *Sci. Rept. Ochanumizu Univ.* 24 (1973), 27-34.

[20] G. Indulal, I. Gutman, A. Vijaykumar, On the distance energy of a graph, MATCH Commun. *Math. Comput. Chem.* 60 (2008), 461-472.

[21] M. R. Kanna, B. N. Dharmendra, R. P. Kumar, Minimum covering distance energy of a graph,*Applied Mathematical Sciences.* 7 (2013), 5525-5536.

[22] M.R. Rajesh Kanna, B.N. Dharmendra and G. Sridhara, Laplacian mimimum covering energy of a graph, *Advances and Applications in Discrete Mathematics.* 13(2)(2014), 85

[23] M. R. Kanna, B. N. Dharmendra, G. Sridhara,*Minimum Dominating Distance Energy of a Graph*, (1978)

[24] M. R. Kanna,B. N. Dharmendra, G. Sridhara,The minimum dominating energy of a graph,*International Journal of Pure and Applied Mathematics.* 85 (2005), 707-718.

[25] J. Koolen, V. Moulton, Maximal energy graphs, *Adv. Appl. Math.* 26 (2001), 47-52.

[26] J. Koolen, V. Moulton, Maximal energy bipartite graphs, *Graph. Combin.* 19 (2003), 131-135.

[27] B. J. McClelland, Properties of the latent roots of a matrix: The estimation of π -electron energies,*J. Chem. Phys.* 54 (1971), 640-643.

[28] So. W. Robbiano, M. de. Abreu NM. I. Gutman, Applications of a theorem by Ky Fan in the theory of graph energy, *Linear Algebra and its Applications*, 432(9),(2010), 2163-2169.

[29] H. S. Ramane, D. S. Revankar,I. Gutman, S. B. Rao, B. D. Acharya, H. B. Walikar, Bounds for the distance energy of a graph,*Kragujevac Journal of Mathematics,* 31 (2008), 59-68.

[30] H. S. Ramane, H. B. Walikar, Construction of equienergetic graphs, MATCH Commun, *Math. Comput. Chem.* 57 (2007), 203-210.

[31] D. Stevanovic, Energy and NEPS of graphs, *Linear Multilinear Algebra*, 53 (2005) 67–74.

[32] A. Yu, M. Lu, F. Tian, New upper bound for the energy of graphs, MATCH Commun. *Math. Comput. Chem*, 53 (2005), 441-448.

[33] B. Zhou, Energy of a graph, MATCH Commun, *Math. Comput. Chem*, 51 (2004), 111-118.

[34] B. Zhou, On the largest eigenvalue of the distance matrix of a tree, MATCH Commun, *Math. Comput. Chem*, 58 (2007), 657-662.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

انرژی فاصله	distance energy
انرژی فاصله لاپلاسین	distance Laplacian energy
انرژی لاپلاسین	Laplacian energy
انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین	distance Laplacian minimum covering energy
انرژی پوشش کمینه فاصله	minimum covering distance energy
تک دور	unicyclic
درخت	tree
فاصله	distance
قطر	diameter
کمر	girth
گراف تاج	crown graph
گراف ستاره	star graph
گراف کامل	complete graph
گراف منتظم	regular graph
ماتریس فاصله	distance matrix
ماتریس غالب کمینه فاصله	minimum dominating distance matrix
ماتریس فاصله لاپلاسین	Laplacian distance matrix
ماتریس لاپلاسین	Laplacian matrix
ماتریس پوشش کمینه فاصله لاپلاسین	distance Laplacian minimum covering matrix
ماتریس مجاورت	adjacency matrix
متقارن	symmetric
مجموعه پوششی	covering set
مجموعه غالب	domination set
معادله مشخصه	characteristic equation
مقادیر ویژه	eigenvalues
همبند	connected

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

adjacency matrix .... ماتریس مجاورت
characteristic equation .... معادله مشخصه
complete graph .... گراف کامل
connected .... همبند
covering set .... مجموعه پوششی
crown graph .... گراف تاج
diameter .... قطر
distance .... فاصله
distance energy .... انرژی فاصله
distance Laplacian energy .... انرژی فاصله لاپلاسین
distance Laplacian matrix .... ماتریس فاصله لاپلاسین
distance Laplacian minimum covering energy .... انرژی پوشش کمینه فاصله لاپلاسین
distance matrix .... ماتریس فاصله
domination set .... مجموعه غالب
eigenvalues .... مقادیر ویژه
girth .... کمر
Laplacian matrix .... ماتریس لاپلاسین
distance Laplacian minimum covering matrix .... ماتریس پوشش کمینه فاصله لاپلاسین
minimum covering distance energy .... انرژی پوشش کمینه فاصله
minimum dominating distance matrix .... ماتریس غالب کمینه فاصله
minimum dominating distance energy .... انرژی غالب کمینه فاصله
regular graph .... گراف منتظم
star graph .... گراف ستاره
symmetric .... متقارن
tree .... درخت
unicycle .... تک دور

Abstract

In this thesis, we will study some properties of distance energy of a graph G. frist, we have graph energy and some of graph energy of bounds, also we have Laplacian energy then we will review bounds of Laplacian energy, Second bounds of distance energy will be detected. In the following, we will survey minimum covering distance energy and it's bounds then, we will comput minimum covering distance energy of some of standard graphs such as complete graph, crown graph, star graph and biparite graph, Also we will review minimum dominating distance energy and upper and lower bound's, we will comput minimum dominating distance energy of a few standard graphs like complete graph, crown graph, star graph. Finally, the end of thesis is related to distance Laplacian minimum covering energy that we could catch a bound for it and distance Laplacian minimum covering energy complete graph and star graph which is developed in an innovative way.

Keywords distance energy, covering set, minimum covering distance energy, minimum dominating distance energy, Laplacian minimum covering distance energy.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and Combinatorics

Some Properties of the Distance Energy of Graphs

By: Zohreh Esbomahalli

Supervisor

Sadegh Rahimi Sharbaf

Jan. 2018