

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

روش گالرکین ناپیوسته مرتبه بالا برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی ایتو

نگارنده: مسعود خورشیدیان میانایی

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

استاد مشاور

دکتر مهدی قوتمند

بهمن ۹۶

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مسعود خورشیدیان میانایی با شماره دانشجویی ۹۴۰۷۰۱۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان روش گالرکین ناپیوسته مرتبه بالا برای معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی ایتو که در تاریخ ۹۶/۱۱/۰۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: ذیلی خوب.....) مردود

نوع تحقیق: نظری عملی

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استادیار	دکتر علی مس فروش	۱- استاد راهنمای اول
---	---	---	۲- استاد راهنمای دوم
	استادیار	دکتر مهدی قوتمند	۳- استاد مشاور
	استادیار	دکتر سمیه مفاری	۴- نماینده تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر حجت احسنی طهرانی	۵- استاد ممتحن اول
	دانشیار	دکتر علیرضا ناظمی	۶- استاد ممتحن دوم



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی علوم، تحصیلات و فناوری

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع

مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که بودند نشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است
بر بودنم چرا که در سختی ها و دشواری های زندگی، همواره یاور می دلسوز، خداکار و پشتیبانی
محکم و مطمئن برایم بوده اند.

همسرم که نشانه لطف الهی در زندگی من است و با قلبی آکنده از عشق در تمام
محطات پناه خستگی و رفیق راه بود.

سپاس‌گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود آدمی را زیور عقل آراست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام برسانم، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر علی مس‌فروش قدردانی نمایم که نحوه صحیح پژوهش کردن را به بنده آموخت و نگارش این پایان‌نامه جز با راهنمایی‌های ارزنده و حمایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود. همچنین از جناب آقای دکتر مهدی قوتمند که با پیشنهاد سازنده خود، سهم به‌سزایی در بهتر شدن این پایان‌نامه داشتند، سپاس‌گزاری می‌نمایم.

در پایان از خانواده‌ام، به‌ویژه همسرم که در تمام لحظات زندگی همواره مشوق بنده بودند و بی‌شک حمایت ایشان باعث تحقق این مهم گردید، نهایت سپاس و قدردانی را دارم.

مسعود خورشیدیان میانایی

بهمن ۹۶

تعهد نامه

اینجانب مسعود خورشیدیان میانایی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **روش گالرکین ناپیوسته مرتبه بالا برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی ایتو**، تحت راهنمایی علی مس فروش متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مسعود خورشیدیان میانایی

بهمن ۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه روش گالرکین ناپیوسته مرتبه بالا را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی ایتو بررسی می‌کنیم. به کمک قضیه وانگ زاکای تقریبی از معادله دیفرانسیل معمولی قطعی با یک ضریب تصادفی روی هر عنصر ایجاد می‌کنیم. معادله دیفرانسیل معمولی حاصل به جواب معادله دیفرانسیل معمولی تصادفی استراتنویچ متناظر با آن همگرا است لذا با تغییر جمله رانش، معادله دیفرانسیل معمولی قطعی را که به جواب معادله دیفرانسیل معمولی تصادفی اصلی همگرا است، بدست می‌آوریم. معادله اصلاح شده را به کمک روش گالرکین ناپیوسته استاندارد مرتبه بالا برای معادلات دیفرانسیل معمولی قطعی گسسته سازی می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی مرتبه بالا معادل با روش رانگ کوتا تصادفی ضمنی است. همچنین پایداری عددی روش گالرکین ناپیوسته تصادفی مرتبه بالا را برای معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی خطی با نویز جمعی بررسی می‌کنیم. روش گالرکین ناپیوسته تصادفی به طور میانگین دارای پایداری عددی است. در نتیجه برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی سخت مناسب است. علاوه بر این ثابت می‌کنیم که این روش در میانگین مربعات همگرا است.

کلمات کلیدی: روش گالرکین ناپیوسته، حرکت براونی، فرآیند وینر، انتگرال تصادفی، فرمول ایتو، معادلات دیفرانسیل تصادفی

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر
ف	فهرست جداول
۱	۱ حسابان تصادفی
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ مقدمه‌ای بر نظریه اندازه و احتمال
۴	۳.۱ مفاهیم فرآیند تصادفی
۸	۴.۱ همگرایی فرآیندهای تصادفی
۹	۵.۱ فضای تابعی
۱۲	۶.۱ فرآیند وینر و فرآیند نويز سفید
۱۲	۱.۶.۱ فرآیند وینر
۱۳	۲.۶.۱ خواص اساسی فرآیند وینر
۱۵	۳.۶.۱ فرآیند نويز سفید
۱۷	۲ معادلات دیفرانسیل تصادفی
۱۷	۱.۲ مقدمه
۱۷	۲.۲ معادلات دیفرانسیل تصادفی
۱۹	۱.۲.۲ انتگرال ایتو
۲۶	۲.۲.۲ فرمول ایتو
۲۸	۳.۲ جواب معادله دیفرانسیل تصادفی و یکتایی جواب
۲۸	۱.۳.۲ معنی جواب یک معادله دیفرانسیل تصادفی
۲۹	۲.۳.۲ جواب‌های قوی و ضعیف
۲۹	۳.۳.۲ قضیه وجود و یکتایی جواب
۳۷	۳ روش گالرکین
۳۷	۱.۳ روش گالرکین

۳۸	روش گالرکین با چندجمله‌ای‌ها	۱.۱.۳
۴۰	روش گالرکین با چندجمله‌ای‌های تکه‌ای	۲.۱.۳
۴۳	روش عناصر متناهی گالرکین	۲.۳
۴۳	روش گالرکین ناپیوسته	۱.۲.۳
۴۵		روش گالرکین ناپیوسته مرتبه بالا برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتو	۴
۴۵	مقدمه	۱.۴
۴۵	شرح مسأله	۲.۴
۴۷	قضیه تقریب وانگ زاکای	۳.۴
۴۹	روش گالرکین ناپیوسته تصادفی	۴.۴
۵۰	روش گالرکین ناپیوسته تصادفی	۱.۴.۴
۵۱	پیاده سازی	۲.۴.۴
۵۲	روش گالرکین ناپیوسته تصادفی یک روش رانگ کوتاه است	۳.۴.۴
۵۵	تحلیل پایداری خطی روش گالرکین ناپیوسته تصادفی	۴.۴.۴
۵۹	تحلیل همگرایی	۵.۴
۶۰	نظم $\hat{X}(t)$	۱.۵.۴
۶۶	همگرایی در میانگین مربعات	۲.۵.۴
۷۳	مرتبه همگرایی	۳.۵.۴
۷۴	حالت چند بعدی	۴.۵.۴
۷۷		مثال عددی	۵
۹۰	نتایج ملاحظات	۱.۵
۹۱		مراجع	

فهرست تصاویر

۱.۵	جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط
۷۸	چین) با $p = 1$ و $h = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۱.۰.۵ . . .
۲.۵	جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط
۸۰	چین) با $p = 1, 2, 3$ و $N = 4$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۲.۰.۵
۳.۵	جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط
۸۱	چین) با $p = 1$ و $N = 4, 8, 16$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۳.۰.۵
۴.۵	جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط
۸۲	چین) با $p = 1$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۴.۰.۵ . . .
۵.۵	جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط
۸۲	چین) با $p = 2$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۴.۰.۵ . . .
۶.۵	جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط
۸۳	چین) با $p = 3$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۴.۰.۵ . . .
۷.۵	جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط
۸۳	چین) با $p = 4$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۴.۰.۵ . . .
۸.۵	جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط
۸۵	چین) با $p = 2$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۵.۰.۵ . . .
۹.۵	جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط
۸۶	چین) با $p = 3$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۶.۰.۵ . . .
۱۰.۵	جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط
	چین) از مسیر نمونه‌ای در مثال ۷.۰.۵ با استفاده از $p = 1$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$.
۸۷

فهرست جداول

۱.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $T = 1$ از مثال ۱.۰.۵ روی
۷۹	مش یکنواخت 10° ، $n = 1, 2, \dots$ ، $N = 4n$
۲.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 0 - 4$ و $M = 10000$ و $T = 1$ از مثال ۲.۰.۵ روی
۸۰	مش یکنواخت 10° ، $n = 1, 2, \dots$ ، $N = 4n$
۳.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = \pi$ از مثال ۳.۰.۵ روی
۸۱	مش یکنواخت 10° ، $n = 1, 2, \dots$ ، $N = 2^n$
۴.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 1000$ و $t = 1$ از مثال ۴.۰.۵ روی مش
۸۳	یکنواخت 10° ، $n = 2, \dots$ ، $N = 2^n$
۵.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = 1$ از مثال ۴.۰.۵ روی
۸۴	مش یکنواخت 10° ، $n = 2, \dots$ ، $N = 2^n$
۶.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 100000$ و $t = 1$ از مثال ۴.۰.۵ روی
۸۴	مش یکنواخت 10° ، $n = 2, \dots$ ، $N = 2^n$
۷.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = 1$ از مثال ۵.۰.۵ روی
۸۵	مش یکنواخت 10° ، $n = 2, \dots$ ، $N = 2^n$
۸.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = 1$ از مثال ۶.۰.۵ روی
۸۶	مش یکنواخت 10° ، $n = 2, \dots$ ، $N = 2^n$
۹.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = 1$ از مثال ۷.۰.۵ روی
۸۷	مش یکنواخت 10° ، $n = 2, \dots$ ، $N = 2^n$
۱۰.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}_k$ و $\hat{\alpha}_k$ با $k = 1, 2$ برای $p = 1 - 2$ و $M = 10000$ و $t = 1$ از مثال
۸۸	۸.۰.۵ روی مش یکنواخت 10° ، $n = 2, \dots$ ، $N = 2^n$
۱۱.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = \frac{2025}{2048}$ از مثال ۱.۰.۵ روی
۸۹	مش یکنواخت 10° ، $n = 2, \dots$ ، $N = 2^n$
۱۲.۵	مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = \frac{2025}{2048}\pi$ از مثال ۳.۰.۵
۹۰	روی مش یکنواخت 10° ، $n = 2, \dots$ ، $N = 2^n$

فصل ۱

حسابان تصادفی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به طور خلاصه به بیان برخی مفاهیم و اصطلاحات اولیه می‌پردازیم. به این منظور به مروری بر تعاریف اساسی و نتایج اصلی مربوط به حسابان تصادفی که شامل نظریه احتمال، مباحث نظریه اندازه و فرآیندهای تصادفی است می‌پردازیم. مطالب ارائه شده در این فصل به جزء مواردی که به روشنی مشخص شده است، از مراجع [۱] و [۵۳] گرفته شده‌اند.

۲.۱ مقدمه‌ای بر نظریه اندازه و احتمال

موضوع اساسی در نظریه احتمال، مطالعه در مقوله شانس و تصادف است. هر آزمایشی که نتیجه آن را نتوان پیش‌بینی کرد ولی مجموعه نتایج آن قابل پیش‌بینی باشد، آزمایش تصادفی می‌گوییم. معمولاً فضای نمونه‌ای را با حرف Ω نشان می‌دهند و به هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه یک پیشامد می‌گوییم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و \mathcal{F} گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد. \mathcal{F} یک σ -میدان^۱ روی Ω است هرگاه در شرایط زیر صدق کند،

^۱ σ -field

۱. $\Omega \in \mathcal{F}$ ،

۲. اگر $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A^c = \{\omega \in \Omega: \omega \notin A\} \in \mathcal{F}$ ،

۳. اگر $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $\Omega = \mathbb{R}^n$ (یا \mathbb{R}) و \mathcal{F} گردایه تمام بازه‌ها باشد. σ -میدان \mathcal{F} را σ -میدان بورل^۲ می‌نامیم و با \mathcal{B} نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید \mathcal{F} یک σ -میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی Ω باشد. تابع $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ را یک اندازه^۳ گوییم هرگاه،

۱. برای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ ،

۲. اگر دنباله‌ای از اعضای دوبه‌دو جدا از هم \mathcal{F} باشند به طوری که $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ ، آنگاه داریم،

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و \mathcal{F} ، σ -میدانی از زیرمجموعه‌های آن باشد. زوج مرتب (Ω, \mathcal{F}) را یک فضای اندازه‌پذیر^۴ گویند. اگر μ اندازه‌ای روی \mathcal{F} باشد آنگاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ را فضای اندازه^۵ می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید \mathcal{F} یک σ -میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی Ω باشد. تابع $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ را یک اندازه احتمال^۶ گوییم هرگاه،

۱. $P(\emptyset) = 0$ و $P(\Omega) = 1$ ،

۲. اگر دنباله‌ای از اعضای دوبه‌دو جدا از هم در \mathcal{F} باشند به طوری که $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ ، آنگاه،

$$P \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} P(A_n).$$

سه‌تایی (Ω, \mathcal{F}, P) را فضای احتمال کامل^۷ گوییم.

^۲ Borel

^۳ Measure

^۴ Measurable space

^۵ Measure space

^۶ Probability measure

^۷ Complete probability space

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. تابع اندازه‌پذیر $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ را \mathcal{L}^2 -انتگرال‌پذیر یا **انتگرال‌پذیر مربعی**^۸ می‌نامیم هرگاه،

$$\int_{\Omega} |f|^2 d\mu < \infty.$$

تعریف ۷.۲.۱. هر گردایه صعودی از σ -میدان‌ها را یک **فیلتر**^۹ گویند و با نماد $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ نشان می‌دهند که در آن I مجموعه اندیس‌گذار است که می‌تواند شمارش‌پذیر یا شمارش‌ناپذیر باشد. اگر \mathcal{F} شامل تمام مجموعه‌های با اندازه صفر باشد و فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ از راست پیوسته باشد یعنی،

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} (\mathcal{F}_s), \quad \forall s \in [0, \infty],$$

آنگاه فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ را استاندارد گوئیم.

تعریف ۸.۲.۱. فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) مجهز به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ را یک **فضای احتمال فیلتر** شده^{۱۰} می‌نامند و با $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم (Ω, \mathcal{F}) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. **اندازه دیراک**^{۱۱} مربوط به نقطه $x \in E$ برای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. تابع حقیقی مقدار $f: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ را **اندازه‌پذیر**^{۱۲} گوئیم هرگاه برای هر B از σ -میدان \mathcal{B} داشته باشیم،

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega: f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. زیرمجموعه $A \in \Omega$ را \mathcal{F} -اندازه‌پذیر گوئیم هرگاه $A \in \mathcal{F}$.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. در این صورت تابع مشخصه A در X ، یعنی $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ را برای هر $x \in X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in X - A. \end{cases}$$

البته انتخاب مجموعه $\{0, 1\}$ هر چند معمول‌تر است ولی الزامی نیست و می‌توان هر مجموعه دو عضوی دیگر را نیز انتخاب کرد. این تابع به هر عضو مجموعه A مقدار یک و به هر عضو $X - A$ مقدار صفر را نسبت می‌دهد.

^۸Square integrable

^۹Filter

^{۱۰} Filtered probability measure

^{۱۱}Dirac measure

^{۱۲}Measurable function

۳.۱ مفاهیم فرآیند تصادفی

تعریف ۱.۳.۱. هر تابع اندازه‌پذیر از فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) به فضای اندازه‌پذیر $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ را یک متغیر تصادفی^{۱۳} گوییم.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد. σ -میدان تولید شده توسط X که با نماد $\mathcal{F}(X)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{F}(X) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}\}.$$

تعریف ۳.۳.۱. هر خانواده (شمارا یا ناشمارا) از متغیرهای تصادفی، **فرآیند تصادفی** نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $\{X_t\}_{t \geq 0}$ فرآیند تصادفی روی (Ω, \mathcal{F}) باشد. برای هر $\omega \in \Omega$ ، مسیر $X(\omega): t \rightarrow X_t(\omega)$ تابعی از زمان را تعریف می‌کند که **مسیر** فرآیند نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۳.۱. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ را تحت فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_t$ **سازگار**^{۱۴} گوییم اگر برای هر $X_t, t \geq 0$ نسبت به \mathcal{F}_t اندازه‌پذیر باشد. فیلتر طبیعی، کوچکترین فیلتری است که فرآیند تصادفی X نسبت به آن سازگار است.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید (Ω, \mathcal{F}) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. متغیر تصادفی T روی (Ω, \mathcal{F}) که مقادیر خود را در $[0, \infty]$ اختیار می‌کند، یک **زمان توقف**^{۱۵} نسبت به $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $t \geq 0$ داشته باشیم $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید $\{X_t\}$ یک فرآیند تصادفی باشد و برای هر $n \geq 1$ T_n نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ زمان توقف شده با T_n را با نماد $X^{T_n}(t)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$X^{T_n}(\omega) = X_{T_n \wedge t}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

تعریف ۸.۳.۱. اگر X یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشد **امید ریاضی**^{۱۶} یا **مقدار میانگین**^{۱۷} X به صورت

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP,$$

^{۱۳} Random variable

^{۱۴} Adapted to the filtration

^{۱۵} Stopping time

^{۱۶} Expectation

^{۱۷} Mean value

تعریف می‌شود و برای متغیر تصادفی پیوسته روی \mathbb{R} به صورت

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

می‌باشد که در آن $f(x)$ تابع چگالی احتمال^{۱۸} متغیر تصادفی پیوسته است.

تعریف ۹.۳.۱. گشتاور^{۱۹} مرتبه k -ام یک متغیر تصادفی پیوسته به صورت

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx,$$

تعریف می‌شود و گشتاور مرکزی مرتبه k -ام به صورت

$$E[(X - \mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x) dx,$$

است که در آن $\mu = E(X)$ می‌باشد.

تعریف ۱۰.۳.۱. واریانس^{۲۰} متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - E^2(X),$$

که در آن $\mu = E(X)$ و **انحراف معیار**^{۲۱} به صورت $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ است.

لم ۱.۳.۱. [۱] اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند آنگاه،

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y),$$

که در آن a و b ثابت‌اند. همچنین اگر $X = Y$ آنگاه، $E(X) = E(Y)$.

لم ۲.۳.۱. [۱] اگر X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل روی فضای احتمال مشترک (Ω, \mathcal{F}, P) باشند آنگاه،

$$E \left[\prod_{j=1}^n X_j \right] = \prod_{j=1}^n E|X_j|,$$

$$\text{Var} \left[\sum_{j=1}^n X_j \right] = \sum_{j=1}^n \text{Var}|X_j|.$$

لم ۳.۳.۱. دو بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)^T$ و $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ داده شده‌اند در این صورت

^{۱۸}Probability density function

^{۱۹}Moment

^{۲۰}Variance

^{۲۱}Standard deviation

۱. به ازای هر $p \geq 1$ ، $E\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|^p \leq 2^{p-1}(E\|\mathbf{X}\|^p + E\|\mathbf{Y}\|^p)$ ،
۲. (نامساوی مینکوفسکی) به ازای هر $p \geq 1$ ، $(E\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (E\|\mathbf{X}\|^p)^{\frac{1}{p}} + (E\|\mathbf{Y}\|^p)^{\frac{1}{p}}$ ،
۳. (نامساوی هولدر) اگر p و q دو عدد حقیقی باشند به طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، آنگاه،

$$E\|\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}\| \leq (E\|\mathbf{X}\|^p)^{\frac{1}{p}} (E\|\mathbf{Y}\|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

تعریف ۱۱.۳.۱. متغیر تصادفی X دارای **توزیع نرمال**^{۲۲} (**گوسی**^{۲۳}) است هرگاه دارای تابع چگالی زیر باشد،

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

که در آن μ میانگین و σ^2 واریانس توزیع نرمال هستند. اگر $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ آنگاه توزیع X به عنوان توزیع گوسی استاندارد شناخته می شود و به اختصار با نماد $X \sim N(0, 1)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱۲.۳.۱. تابع **توزیع توأم**^{۲۴} احتمال متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n روی فضای احتمال مشترک (Ω, \mathcal{F}, P) ، تابع $F_{X_1, \dots, X_n}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ است که به صورت زیر تعریف می شود،

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(\{\omega \in \Omega: X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}).$$

اگر $F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1) \dots F(x_n)$ ، آنگاه متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n **مستقل** نامیده می شوند.

تعریف ۱۳.۳.۱. تابع **چگالی توأم**^{۲۵} احتمال متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n به صورت زیر است،

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

اگر X_1, \dots, X_n مستقل باشند آنگاه،

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \dots f(x_n).$$

تعریف ۱۴.۳.۱. **کوواریانس**^{۲۶} متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به صورت

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2),$$

تعریف می شود که $\mu_1 = E(X_1)$ و $\mu_2 = E(X_2)$ می باشد.

^{۲۲} Normal-distribution

^{۲۳} Gaussian

^{۲۴} Joint distribution

^{۲۵} Joint density

^{۲۶} Covariance

تعریف ۱۵.۳.۱. دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_n\}_{n \geq 1}$ هم‌توزیع^{۲۷} می‌باشند هرگاه،

$$F_{X_1}(x) = \dots = F_{X_n}(x) = \dots = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

تعریف ۱۶.۳.۱. فرآیند تصادفی $X(t)$ که برای $t \in T$ ، $E(|X(t)|^2) < \infty$ می‌باشد، فرآیند به‌طور اکید مانا^{۲۸} نامیده می‌شود هرگاه توزیع آن تحت تغییرات زمانی پایا باشد،

$$F_{X_1, \dots, X_n}(t_1 + h, \dots, t_n + h) = F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n).$$

تعریف ۱۷.۳.۱. فرآیند تصادفی $X(t)$ ، ضعیف مانا گفته می‌شود اگر نسبت به گشتاور اول و دومش مانا باشد. در این حالت ثابت C وجود دارد که برای $t \in T$ داریم، $E(X(t)) = C$ و همچنین تابع $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر $t_1, t_2 \in T$ و $t_1 \neq t_2$ داریم،

$$\text{Var}(X(t)) = c(0), \quad \text{Cov}(t_1, t_2) = c(t_2 - t_1).$$

تعریف ۱۸.۳.۱. فرض کنید $X(t)$ و $Y(t)$ دو فرآیند تصادفی روی فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشند. فرآیند تصادفی $X(t)$ یک نسخه یا یک اصلاح از فرآیند تصادفی $Y(t)$ نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $t \in T$ داشته باشیم،

$$P\{\omega \in \Omega: X(t, \omega) = Y(t, \omega)\} = 1.$$

تعریف ۱۹.۳.۱. تابع حقیقی $\|\cdot\|$ در فضای برداری X را نرم^{۲۹} می‌نامیم اگر در سه خاصیت زیر صدق نماید،

۱. به ازای هر $x \in X$ ، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ ،

۲. به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ،

۳. به ازای هر $x, y \in X$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ،

تعریف ۲۰.۳.۱. فضای $C^{n,m}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ عبارت است از خانواده همه توابع حقیقی روی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ به‌طوری که n بار نسبت به t و m بار نسبت به x مشتق پذیرند.

تعریف ۲۱.۳.۱. فضای برداری \mathbb{R}^n با نرم $\|x\| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2}$ به ازای هر $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ یک فضای باناخ^{۳۰} است که آن را نرم اقلیدسی^{۳۱} می‌نامیم.

^{۲۷}Identically distributed

^{۲۸}Stationary

^{۲۹}Norm

^{۳۰}Banach space

^{۳۱}Euclidean norm

تعریف ۲۲.۳.۱. فرض کنید X یک فضای ناتهی بوده و $B(X)$ فضای برداری همه توابع کراندار روی X باشد. در این صورت به ازای هر $f \in B(X)$ ، $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$ ، **نرم سوپریمم**^{۳۲} f روی X است.

تعریف ۲۳.۳.۱. فرض کنید $0 < p < \infty$ ، در این صورت گردایه تمام توابع اندازه‌پذیر f که $|f|^p$ انتگرال‌پذیر است با $L_p(\mu)$ نمایش داده می‌شود (μ اندازه می‌باشد).

۴.۱ همگرایی فرآیندهای تصادفی

فرض کنید $\{X_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشد. چند نوع همگرایی برای این دنباله می‌توان تعریف کرد که در زیر بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱ (همگرایی در L^p). برای $p \geq 1$ گوئیم X_n در L^p به X همگراست اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^p] = 0.$$

تعریف ۲.۴.۱ (همگرایی تقریباً همه جا (a.e)). گوئیم X_n تقریباً همه جا به X همگراست اگر

$$P\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

تعریف ۳.۴.۱ (همگرایی در احتمال^{۳۳}). گوئیم X_n به X در احتمال همگراست اگر برای هر $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega \in \Omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\} = 0.$$

تعریف ۴.۴.۱ (همگرایی ضعیف^{۳۴}). دنباله $\{x_n\}$ در یک فضای نرم‌دار به‌طور ضعیف همگرا به عضوی مانند x است هرگاه به ازای هر تابع خطی پیوسته‌ی f ، $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ برقرار باشد.

تعریف ۵.۴.۱ (همگرایی قوی^{۳۵}). دنباله‌ی $\{x_n\} \subset X$ در یک فضای نرم‌دار به‌طور قوی همگرا به $x \in X$ است اگر برای $n \rightarrow \infty$ ، $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنید $\{X_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال یکسان (Ω, \mathcal{F}, P) باشد که $E(X^2) < \infty$ و به ازای هر n ، $E(X_n^2) < \infty$ ، در این صورت $X_n(\omega)$ در میانگین مربعات^{۳۶} به $X(\omega)$ همگراست اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n(\omega) - X(\omega)|^2) = 0.$$

^{۳۲} Supremum norm

^{۳۳} Convergence in probability

^{۳۴} Weak convergence

^{۳۵} Strong convergence

^{۳۶} Mean Square

ملاحظه ۱.۴.۱. همگرایی تقریباً همه جا و همگرایی در میانگین مربعات، همگرایی در احتمال را نتیجه می‌دهند ولی از همگرایی در احتمال نمی‌توان به همگرایی در میانگین مربعات و همگرایی تقریباً همه جا رسید. همچنین رابطه‌ای بین همگرایی در میانگین مربعات و همگرایی تقریباً همه جا وجود ندارد. همگرایی در L^p معادل با همگرایی در احتمال است.

۵.۱ فضای تابعی

برای تحلیل جواب تقریبی نسبت به جواب دقیق لازم است به بیان مفاهیمی از آنالیز تابعی، همانند برخی فضاها بپردازیم.

تعریف ۱.۵.۱ (فضای هیلبرت^{۳۷}). فرض کنید X فضای برداری حقیقی و $(\cdot, \cdot) = X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ضرب داخلی روی این فضا باشد. با ضرب داخلی معرفی شده، نرم روی این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in X,$$

فضای هیلبرت، فضای برداری مجهز به یک ضرب داخلی است که تحت این ضرب داخلی تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۵.۱ (فضای $L^p(\Omega)$). فرض کنید $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که با $\int_{\Omega} f(x) dx$ اندازه‌پذیر باشد. برای $1 \leq p < \infty$ تعریف می‌کنیم،

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

و برای $p = \infty$ ،

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}\{|f(x)|: x \in \Omega\},$$

در این صورت فضای $L^p(\Omega)$ به صورت

$$L^p(\Omega) = \{f: \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\},$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۵.۱ (فضای سوبولف^{۳۸}). فرض کنید (a, b) بازه‌ای کراندار از اعداد حقیقی بوده و $m \geq 0$ عددی صحیح باشد. فضای سوبولف $H^m(a, b)$ ، فضای برداری تمام توابع $v \in L^2(a, b)$ را شامل می‌شود به طوری که مشتقات v از مرتبه‌ی m موجود بوده و متعلق به همین فضا می‌باشد. به عبارت دیگر داریم،

$$H^m(a, b) = \left\{ v \in L^2(a, b): \forall 0 \leq k \leq m, \frac{d^k v}{dx^k} \in L^2(a, b) \right\}.$$

^{۳۷}Hilbert space

^{۳۸}Sobolev space

تعریف ۴.۵.۱ (فضای برداری از چندجمله‌ای‌ها). فرض کنید $P^q(a, b)$ مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه q ، $p(x) = \sum_{i=0}^q c_i x^i$ روی (a, b) باشد که $c_i \in \mathbb{R}$ ضریب $p(x)$ است. مجموعه تک جمله‌ای‌های $\{1, x, x^2, \dots, x^q\}$ پایه‌ای برای فضای $P^q(a, b)$ می‌باشد. پایه دیگری برای $P^q(a, b)$ ، پایه لاگرانژ $\{\lambda_i\}_{i=0}^q$ با $q+1$ نقطه متمایز $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_q$ در (a, b) است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\lambda_i(\xi_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

بیان صریح از تابع پایه λ_i به صورت زیر است،

$$\begin{aligned} \lambda_i(x) &= \frac{(x - \xi_0)(x - \xi_1) \dots (x - \xi_{i-1})(x - \xi_{i+1}) \dots (x - \xi_q)}{(\xi_i - \xi_0)(\xi_i - \xi_1) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_q)} \\ &= \prod_{i \neq j} \frac{x - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}. \end{aligned}$$

اگر $p \in P^q(a, b)$ در نقاط گره‌ای $\xi_i, i = 0, 1, \dots, q$ مقادیری به شکل $p(\xi_i) = p_i$ داشته باشد آنگاه می‌توانیم p را به صورت ترکیب خطی از عناصر پایه‌ای لاگرانژ به صورت زیر نوشت،

$$p(x) = p_0 \lambda_0(x) + p_1 \lambda_1(x) + \dots + p_q \lambda_q(x).$$

تعریف ۵.۵.۱ (فضای برداری چندجمله‌ای‌های تکه‌ای). برای جلوگیری از افزایش مرتبه چندجمله‌ای‌ها در بازه‌ها می‌توانیم از تقریب چندجمله‌ای‌های تکه‌ای روی افزایش از بازه استفاده کنیم.

فرض کنید $I = (a, b)$ و $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1} = b$ افزایش از (a, b) به زیربازه $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ با طول $h_i = x_i - x_{i-1}$ باشد. تابع مش را با $h(x)$ نشان می‌دهیم و برای $x \in I_i$ به صورت $h(x) = h_i$ تعریف می‌کنیم و به کمک $\tau_h = \{I_i\}$ مجموعه‌ای از زیربازه‌ها و یا مش را نشان می‌دهیم.

در این بخش دو فضای برداری از توابع تکه‌ای درجه q روی مش τ_h در نظر می‌گیریم. ابتدا فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای ناپیوسته از درجه q روی (a, b) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$W_h^{(q)} = \{v: v|_{I_i} \in P^q(I_i), i = 1, \dots, m+1\},$$

که $v|_{I_i}$ تحدید v روی بازه I_i است. سپس مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های تکه‌ای پیوسته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$V_h^{(q)} = \{v \in W_h^{(q)}: v \text{ روی } I \text{ پیوسته است}\}.$$

پایه‌ای از $W_h^{(q)}$ به این صورت است که برای نقاط $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ به طوری که $i = 1, \dots, m+1$ می‌باشد، مجموعه‌ای از توابعی را که با تابع پایه $P^q(I_i)$ معادل هستند، در نظر می‌گیریم و در

سایر نقاط صفر می‌گذاریم. به‌عنوان مثال برای ساختن یک پایه از $W_h^{(1)}$ ، توابع پایه موضعی برای $P^1(I_i)$ را به‌صورت زیر انتخاب می‌کنیم،

$$\lambda_{i,0}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}, \quad \lambda_{i,1}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},$$

حال تابع پایه‌ای از $W_h^{(1)}$ برای $i = 1, \dots, m+1$ و $j = 0, 1$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\varphi_{i,j}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_{i-1}, x_i], \\ \lambda_{i,j}(x), & x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{cases}$$

ساختن یک پایه برای فضای $V_h^{(q)}$ از چندجمله‌ای‌های تکه‌ای پیوسته کمی دشوار است زیرا تابع پایه‌ای موضعی لاگرانژ در هر زیربازه باید مرتب شود تا توابع پایه‌ای حاصل روی (a, b) پیوسته شوند. در حالت $q = 1$ تابع هت یا تابع پایه گره‌ای $\{\varphi_i\}$ برای $V_h^{(1)}$ بدست می‌آوریم. تعریف صوری به‌صورت زیر است،

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \end{cases}$$

توابع مربوط به گره‌های مرزی x_0 و x_{m+1} نیم‌هت هستند. $\varphi_i(x)$ عضو $V_h^{(1)}$ می‌باشد و

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

توجه کنید که توابع هت در بازه (a, b) تعریف شده‌اند ولی در خارج این بازه صفر هستند. مجموعه‌ای از توابع هت $\{\varphi_i\}_{i=0}^{m+1}$ یک پایه برای $V_h^{(1)}$ هستند و تشکیل یک پایه گره‌ای می‌دهند زیرا ضرایب $v \in V_h^{(1)}$ مقادیر گره‌ای v هستند یعنی هر $v \in V_h^{(1)}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت،

$$v(x) = \sum_{i=0}^{m+1} v(x_i) \varphi_i(x).$$

تعریف ۶.۵.۱ (چندجمله‌ای لژاندر^{۴۰}). چندجمله‌ای‌هایی که روی بازه $[-1, 1]$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ متعامد هستند را چندجمله‌ای لژاندر می‌نامند. این چندجمله‌ای‌ها در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند،

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x), \quad k \geq 1,$$

به‌طوری‌که

$$P_0(x) = 1, P_1 = x.$$

^{۳۹}Hat

^{۴۰}Legendre polynomials

تعریف ۷.۵.۱ (دنباله پیکارد^{۴۱}). مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید،

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0.$$

فرض کنید $f(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ توابع پیوسته در $\mathcal{R} = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ باشند که شامل نقطه (x_0, y_0) است. بنابراین مسأله مقدار اولیه فوق در بازه $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ که $h > 0$ است، جواب یکتا دارد. علاوه بر این دنباله پیکارد که با

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt,$$

تعریف می شود یک دنباله از توابع $\{y_n(t)\}$ تولید می کند که در I به طور یکنواخت به جواب همگرا است.

۶.۱ فرآیند وینر و فرآیند نويز سفید

در سال ۱۹۱۸ میلادی نوربرت وینر ریاضی دان آمریکائی، الگوی حرکت براونی را به طور کامل بررسی کرد. وی در سال ۱۹۲۳ میلادی فرآیند مطلوب حرکت براونی^{۴۲} را که امروزه فرآیند وینر نیز گفته می شود را به فرم ریاضی ساخت.

متغیر تصادفی حقیقی مقدار را می توان خانواده ای از $X_t = \{W(t), t \geq 0\}$ در نظر گرفت که $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ و بر روی فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) تعریف شده است. به زبان ریاضی می توان گفت که حرکت براونی $\{W(t) | t \in \mathbb{R}^+\}$ خانواده ای از متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار است که با مجموعه اعداد حقیقی نامنفی اندیس گذاری می شود.

۱.۶.۱ فرآیند وینر

تعریف ۱.۶.۱. فرآیند تصادفی $\{W(t): t \geq 0\}$ را فرآیند وینر^{۴۳} یا حرکت براونی استاندارد نامند هرگاه،

$$P(W(0) = 0) = 1 \quad ۱.$$

۲. برای $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ، نموهای $W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ مستقل و با توزیع یکسان باشند.

۳. به ازای هر $t > 0$ و $h > 0$ دارای توزیع گاوسی با میانگین صفر و واریانس h باشند.

^{۴۱} Picard iterations

^{۴۲} Brownian motion

^{۴۳} Wiener process

به طور خلاصه فرآیند وینر استاندارد به ازای هر $0 \leq s \leq t \leq T$ دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد،

$$P(W(0) = 0) = 1, \quad E(W(t)) = 0, \quad \text{Var}(W(t) - W(s)) = t - s.$$

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنید (Ω, \mathcal{F}, P) یک فضای احتمال باشد که حرکت براونی $W_t, t \geq 0$ روی آن تعریف شده است. فیلتری برای حرکت براونی، یک مجموعه‌ای از σ -میدان‌های $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ است که در شرایط زیر صدق کند،

۱. برای $0 \leq s < t$ ، هر مجموعه عضو \mathcal{F}_s در \mathcal{F}_t نیز هست. به عبارت دیگر در هر زمان اطلاعاتی که در اختیار داریم قطعاً شامل اطلاعات موجود در زمان‌های قبلی است.
۲. برای هر $t \geq 0$ حرکت براونی W_t در زمان t -اندازه‌پذیر است. به عبارت دیگر اطلاعات قابل دسترس در زمان t برای محاسبه حرکت براونی W_t در آن زمان کافی است.
۳. برای $0 \leq t < u$ ، نمو $W(u) - W(t)$ از \mathcal{F}_t مستقل است. به عبارت دیگر هر نمو از حرکت براونی بعد از زمان t مستقل از اطلاعات موجود در زمان t است.

تعریف ۳.۶.۱. فرآیند تصادفی $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))^T$ برای $t \geq 0$ در \mathbb{R}^m یک فرآیند وینر استاندارد m -بعدی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $j = 1, \dots, m$ ، مولفه‌های $W_j(t)$ فرآیندهای وینر مستقل از هم باشند.

قضیه ۱.۶.۱ (قضیه پیوستگی کلموگرف^{۴۴}). [۱] اگر به ازای هر $T \geq 0$ ، ثابت‌های مثبت α, β, D وجود داشته باشند به طوری که فرآیند تصادفی $X(t)$ در شرط،

$$E(|X(t) - X(s)|^\alpha) \leq D|t - s|^{\beta+1},$$

به ازای هر $t, s \in [0, T]$ صدق کند، آنگاه فرآیند تصادفی $X(t)$ دارای یک نسخه پیوسته خواهد بود.

چون برای فرآیند وینر $W(t)$ ، به ازای هر $t, s \in T$ $E(|W(t) - W(s)|^4) = 3(t - s)^2$ است بنابراین فرآیند وینر $W(t)$ در شرط کولموگرف فوق با انتخاب $\alpha = 4, \beta = 1, D = 3$ صدق می‌کند و در نتیجه فرآیند وینر $W(t)$ دارای یک نسخه پیوسته خواهد بود.

۲.۶.۱ خواص اساسی فرآیند وینر

۱. فرآیند وینر دارای مسیرهای نمونه‌ای پیوسته است [۱].

^{۴۴}Kolmogorov's continuity theorem

برهان. برای اینکه نشان دهیم $W = \{W(t): t \geq 0\}$ پیوسته است کافی است نشان دهیم،

$$\lim_{h \rightarrow 0} [W(t+h) - W(t)] = 0.$$

چون $W(t+h) - W(t)$ دارای میانگین صفر و واریانس h است لذا زمانی که $h \rightarrow 0$ ، دارای میانگین و واریانس صفر بوده، لذا $W(t)$ با احتمال یک پیوسته است. \square

۲. فرآیند وینر تقریباً در هیچ نقطه‌ای از مسیر مشتق ندارد.

برهان. برای اینکه نشان دهیم $W(t)$ مشتق پذیر نمی‌باشد، باید نشان دهیم حاصل کسر $\frac{1}{h}(W(t+h) - W(t))$ وقتی $h \rightarrow 0$ موجود نمی‌باشد. این کسر دارای میانگین صفر و واریانس $\frac{1}{h}$ است پس وقتی $h \rightarrow 0$ واریانس این نسبت به بی‌نهایت میل می‌کند بنابراین این نسبت همگرا نمی‌باشد. \square

وایراشتراس^{۴۵} نشان داد که چنین توابعی وجود دارند. به‌عنوان نمونه می‌توان به تابع $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ که در آن a فرد، $ab > 1 + \frac{3}{4}\pi$ و $b \in (0, 1)$ اشاره کرد که در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نمی‌باشد.

۳. تقریباً هر مسیر نمونه‌ای از یک فرآیند وینر دارای تغییرات نامتناهی روی هر بازه متناهی است.

برهان. اگر مسیر فرآیند وینر روی I دارای تغییرات متناهی باشد، آنگاه مشتق آن باید تقریباً همه جا روی I وجود داشته باشد که این تناقض است. \square

از آنجایی که هر تابع با تغییرات کراندار تقریباً همه‌جا مشتق پذیر است و فرآیند وینر تقریباً در هیچ نقطه‌ای از مسیر مشتق ندارد لذا مسیر فرآیند وینر با تغییرات کراندار نمی‌باشد و در نتیجه تقریباً هر مسیر فرآیند وینر دارای طول متناهی نیست.

۴. گزینه حرکت براونی نیز یک حرکت براونی است.

۵. با فرض $s < t$ و با توجه به خواص فرآیند وینر (استقلال نموها و $W(t+h) - W(t)$ دارای میانگین صفر و واریانس h) داریم،

$$\begin{aligned} E[W(t)W(s)] &= E[(W(t) - W(s) + W(s))W(s)] \\ &= E[W(t) - W(s)]E[W(s)] + E[W(s)^2] = 0 + s = s. \end{aligned}$$

^{۴۵}Weierstrass

پس در حالت کلی،

$$E[W(t)W(s)] = \min(s, t) = \frac{1}{2}(|t| - |t - s| + |s|) = s \wedge t.$$

اگر $W = \{W(t): t \geq 0\}$ یک حرکت براونی n -بعدی باشد آنگاه،

$$E[W_k(t)W_l(s)] = (s \wedge t)\delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n,$$

$$E[(W_k(t) - W_k(s))(W_l(t) - W_l(s))] = (s - t)\delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq s \leq t,$$

۶. مسیر براونی در هیچ بازه‌ای یکنوا نمی‌باشد.

۳.۶.۱ فرآیند نویز سفید

تعریف ۴.۶.۱ (مفهوم نویز). به هر نوسان و تغییر غیر عمدی که بر روی سیگنال‌های مورد اندازه‌گیری ظاهر می‌شود، نویز^{۴۶} گفته می‌شود.

به بیان ساده، هر سیگنال ناخواسته‌ای که با سیگنال اطلاعات ما جمع شود را نویز گوییم. بنابراین سیگنال کل عبارت است از،

$$X(t) = N(t) + X_s(t),$$

که در آن $N(t)$ نویز و $X_s(t)$ سیگنال اطلاعات است.

به‌عنوان مثال در ارتباط رادیویی به هر سیگنال الکتریکی که باعث مختل شدن ارتباط می‌شود، نویز گفته می‌شود. مانند نویزی که در گوشی‌ها می‌شنویم.

تعریف ۵.۶.۱. فرآیند گاوسی مانای ضعیف $\{\xi(t): -\infty < t < +\infty\}$ با میانگین صفر و چگالی طیفی ثابت ناصفر $s(v)$ ، یک فرآیند نویز سفید گاوسی^{۴۷} نامیده می‌شود که چگالی طیفی آن به ازای هر $v \in \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$s(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(t) \exp(-2\pi vt) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} C(t) \cos(2\pi vt) dt = s_0,$$

که در آن s_0 ثابتی ناصفر است.

لذا چنین فرآیندی دارای طیفی است که همه فرکانس‌ها با شدت یکسان حضور دارند و این دلیلی برای انتخاب نام نویز سفید است. این چنین فرآیندی، تابع کواریانس آن در شرط $C(t) = s_0 \delta(t)$ ، به ازای هر t صدق می‌کند که در آن $\delta(t)$ تابع دلتای دیراک است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{h} & -\frac{h}{2} \leq t \leq \frac{h}{2}, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

^{۴۶}Noise

^{۴۷}Gaussian white noise process

یا به طور نمادین،

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0, \\ 0 & t \neq 0, \end{cases}$$

در حالت خاص داریم:

$$C(0) = E(\xi^2(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(v)dv = \infty.$$

چون به ازای هر $C(t) = 0, t \neq 0$ در نتیجه مقدار $\xi(s)$ و $\xi(t+s)$ ، برای مقادیر کوچک دلخواه t ناهمبسته‌اند و لذا اغتشاش سفید یک فرآیند تصادفی در مفهوم متداول نخواهد بود. در حقیقت فرآیند اغتشاش سفید را می‌توان به‌عنوان مشتق فرآیند وینر اما فقط در مفهوم توابع تعمیم یافته‌ای نظیر تابع دلتای دیراک در نظر گرفت (چون مسیرهای نمونه‌ای از فرآیند وینر مشتق‌پذیر نیستند).

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل تصادفی

۱.۲ مقدمه

در این بخش ابتدا معادله دیفرانسیل تصادفی را معرفی می‌کنیم و به کمک روش گسسته‌سازی توسط افراز روی بازه‌ی زمانی و همچنین به کمک فرمول زنجیره‌ای تصادفی، حاصل انتگرال تصادفی را بدست می‌آوریم و سپس به بررسی جواب معادله دیفرانسیل تصادفی می‌پردازیم.

۲.۲ معادلات دیفرانسیل تصادفی

معادله‌ی دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر بگیرید،

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X), \quad X(t_0) = X_0 \quad (1.2)$$

با اضافه کردن عبارت تصادفی یا نویز به معادله (۱.۲)، معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را خواهیم داشت،

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X) + \sigma(t, X) \text{ "noise" }, \quad X_0 = x \quad (2.2)$$

که در آن b و σ توابع دلخواه هستند. اکنون به بررسی تعبیر ریاضی معقول برای جمله‌ی نویز می‌پردازیم. برای این منظور نویز یک بعدی را در نظر می‌گیریم. معقول است که به دنبال

فرآیند تصادفی W_t بگردیم که جمله نویز را نشان دهد، طوری که داشته باشیم،

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X) + \sigma(t, X)W_t, \quad X_0 = x. \quad (3.2)$$

شواهد نشان می‌دهد که W_t باید دست کم به طور تقریبی در ویژگی‌های زیر صدق کند،

۱. برای $t_1 \neq t_2$ ، W_{t_1} و W_{t_2} مستقل باشند،

۲. توزیع توام متغیرهای تصادفی $W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t}$ به t بستگی نداشته باشد،

۳. برای هر t ، $E[W_t] = 0$.

اما هیچ فرآیند تصادفی معقولی که در شرایط ۱ و ۲ صدق کند وجود ندارد. چنین نمی‌تواند مسیرهای پیوسته داشته باشد. علی‌رغم این مطلب می‌توان W_t را به صورت فرآیند تصادفی تعمیم یافته‌ای به نام نویز سفید نشان داد. اما به جای این کار به گسسته سازی و مش بندی معادله (۳.۲) می‌پردازیم.

فرض کنید $t \in [0, T]$ و $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ افرازی از $[0, T]$ باشد. صورت گسسته معادله (۳.۲) برحسب این افراز عبارت است از،

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k)W_k\Delta t_k,$$

که در آن

$$X_k = X_{t_k}, \quad W_k = W_{t_k}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k$$

و Δt_k بسیار کوچک می‌باشد.

به ازای یک فرآیند تصادفی مناسب $\{V_t\}_{t \geq 0}$ ، می‌توان گفت $\Delta V_k = V_{k+1} - V_k = W_k\Delta t_k$. فرض‌های ۱ تا ۳ حاکی از آنند که V_t ها نمو‌های مستقل مانا و میانگین صفر دارند. تنها فرآیندی با این ویژگی‌ها که دارای مسیرهای پیوسته است، حرکت براونی B_t است. لذا داریم،

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j. \quad (4.2)$$

اگر حد سمت راست (۴.۲) وقتی $\Delta t_j \rightarrow 0$ ، موجود باشد آنگاه با انتگرال گیری داریم،

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad (5.2)$$

که در آن انتگرال اول، انتگرال معمولی و انتگرال دوم، انتگرال تصادفی ایتو می‌باشد. معادله (۵.۲) را می‌توان به فرم معادله دیفرانسیل تصادفی زیر نوشت،

$$dX(t) = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X(0) = x.$$

برای حل این نوع معادلات به تعریف انتگرال‌هایی به صورت زیر می‌پردازیم،

$$\int_0^t f(s, \omega)dB_s(\omega),$$

که در آن $B_t(\omega)$ یک حرکت براونی ۱-بعدی است که در لحظه $t = 0$ آغاز می‌شود و

$$f: [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

۱.۲.۲ انتگرال ایتو

فرض کنید $0 \leq S < T$ و $f(t, \omega)$ داده شده باشد. می‌خواهیم انتگرال ایتو زیر را تعریف کنیم،

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega). \quad (۶.۲)$$

طبیعی است که ابتدا این انتگرال را برای رده‌ای از توابع ساده تعریف کنیم و آنگاه توابع کلی‌تر را از طریق تقریب آن‌ها با توابع ساده بررسی کنیم. بنابراین فرض کنید f به صورت زیر باشد،

$$\varphi(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \chi_{[j \cdot 2^{-n}, (j+1) \cdot 2^{-n})}(t), \quad (۷.۲)$$

که در آن χ تابع مشخصه و n یک عدد طبیعی است. برای چنین توابعی تعریف می‌کنیم،

$$\int_S^T \varphi(t, \omega) dB_t = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega), \quad (۸.۲)$$

که

$$t_k = t_k^{(n)} = \begin{cases} k \cdot 2^{-n}, & S \leq k \cdot 2^{-n} \leq T, \\ S, & k \cdot 2^{-n} < S, \\ T, & k \cdot 2^{-n} > T, \end{cases}$$

با این حال بدون هیچ پیش‌فرض بیشتری روی توابع $e_j(\omega)$ به مشکلاتی برمی‌خوریم که در مثال زیر آمده است.

مثال ۱.۲.۲. توابع زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\varphi_1(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} B_{j \cdot 2^{-n}}(\omega) \cdot \chi_{[j \cdot 2^{-n}, (j+1) \cdot 2^{-n})}(t),$$

$$\varphi_2(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} B_{(j+1) \cdot 2^{-n}}(\omega) \cdot \chi_{[j \cdot 2^{-n}, (j+1) \cdot 2^{-n})}(t),$$

چون $\{B_t\}$ نمو مستقل دارد لذا

$$E \left[\int_0^T \varphi_1(t, \omega) dB_t(\omega) \right] = \sum_{j \geq 0} E[B_{t_j} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] = 0,$$

9

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^T \varphi_2(t, \omega) dB_t(\omega) \right] &= \sum_{j \geq 0} E[B_{t_{j+1}} \cdot (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\ &= \sum_{j \geq 0} E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = T. \end{aligned}$$

بنابراین با وجود اینکه $\varphi_1(t, \omega)$ و $\varphi_2(t, \omega)$ هر دو تقریب‌های مناسبی برای $f(t, \omega) = B_t(\omega)$ هستند، اما طبق تعریف انتگرال ایتو (۸.۲)، انتگرال آنها به هم نزدیک نیست (هر اندازه n را بزرگ انتخاب کنیم این فاصله تغییر نمی‌کند). دلیلش این است که تغییرات مسیر B_t خیلی زیاد است یعنی با تغییر کراندار نیست و لذا نمی‌توان یک انتگرال ریمان اشتیلیس برای آن تعریف کرد. در واقع می‌توان نشان داد که مسیرهای $t \rightarrow B_t$ از حرکت براونی تقریباً همه جا مشتق‌پذیر نیست. به‌ویژه تغییرات کل مسیر B_t نامحدود است.

به‌طور کلی طبیعی است که تابع مفروض $f(t, \omega)$ را با تابع

$$\sum_{j=0}^n f(t_j^*, \omega) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

تقریب بزنیم که در آن $t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$ است و به دنبال آن انتگرال

$$\int_s^T f(t_j, \omega) dB_t(\omega),$$

را حد مجموع

$$\sum_{j=0}^n f(t_j^*, \omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega),$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ تعریف کنیم. اما همان‌طور که در مثال بالا نشان داده شده است، برخلاف انتگرال ریمان اشتیلیس، انتخاب t_j^* ‌های متفاوت به مقادیر مختلف برای انتگرال منتهی می‌گردد. دو انتخاب زیر مفیدترین هستند:

۱. یعنی نقطه انتهایی چپ بازه که منجر به انتگرال ایتو می‌شود و ما از این پس آن را با

$$\int_s^T f(t, \omega) dB_t(\omega),$$

نشان می‌دهیم.

۲. یعنی نقطه میانی بازه که منجر به انتگرال استراتنویچ می‌گردد و آن را با

$$\int_s^T f(t, \omega) \circ dB_t(\omega),$$

نشان می‌دهیم.

در هر صورت باید خود را به کلاس خاصی از توابع $f(t, \omega)$ در (۶.۲) محدود کرد. همچنین اگر $f(t, \omega)$ فرم خاص (۷.۲) را داشته باشد، برای بدست آوردن تعریفی معقول از انتگرال ایتو، گزینه $t_j^* = t_j$ را در نظر می‌گیریم.

اگر f دارای خصوصیتی باشد که هر تابع $f(t_j, \omega) \rightarrow \omega$ تنها به رفتار $B_s(\omega)$ تا زمان t_j وابسته باشد در این صورت روش تقریبی که در بالا ذکر شد موفقیت‌آمیز خواهد بود. حال می‌خواهیم برای خانواده خاصی از توابع، انتگرال ایتو را تعریف کنیم. به این منظور ابتدا مفاهیم زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. فرض $B_t(\omega)$ حرکت براونی n -بعدی باشد لذا $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$ را برای σ -میدان‌های تولید شده با متغیر تصادفی $B_s(\cdot)$ که $s \leq t$ است، تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر \mathcal{F}_t کوچکترین σ -میدانی است که شامل همه مجموعه‌های به صورت

$$\{\omega: B_{t_1}(\omega) \in F_1, \dots, B_{t_k}(\omega) \in F_k\},$$

است که $t_j \leq t$ و $F_j \subset \mathbb{R}^n; j \leq k = 1, 2, \dots$ مجموعه بورل است (فرض می‌کنیم که همه مجموعه‌های با اندازه صفر در \mathcal{F}_t هستند).

بتوان \mathcal{F}_t را به عنوان گذشته B_s تا زمان t در نظر گرفت. تابع $h(\omega), \mathcal{F}_t$ -اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر h را به صورت نقطه به نقطه به فرم حد مجموع توابع $g_1(B_{t_1}), g_2(B_{t_2}), \dots, g_k(B_{t_k})$ نوشت که توابع g_1, g_2, \dots, g_k پیوسته و کراندار هستند و برای $j \leq k = 1, 2, \dots$ داریم $t_j \leq t$. برای مثال $h_1(\omega) = B_{\frac{t}{2}}(\omega), \mathcal{F}_t$ -اندازه‌پذیر است در حالی که $h_2(\omega) = B_{\frac{t}{2}}(\omega), \mathcal{F}_t$ -اندازه‌پذیر نیست.

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ خانواده‌ای صعودی از سیگما میدان زیرمجموعه‌های Ω باشد. فرآیند

$$g(t, \omega) = [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

را \mathcal{F}_t -سازگار (تطبیقی) گوئیم اگر برای هر $t \geq 0$ تابع $g(t, \omega) \rightarrow \omega$ نسبت به \mathcal{F}_t اندازه‌پذیر باشد. برای مثال $h(t, \omega) = W_{\frac{t}{2}}(\omega)$ نسبت به \mathcal{F}_t سازگار است در حالی که $h(t, \omega) = W_{\frac{t}{2}}(\omega)$ نسبت به \mathcal{F}_t سازگار نمی‌باشد.

تعریف ۳.۲.۲. فرض $V = V(S, T)$ خانواده‌ای از توابع $f(t, \omega) = [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ باشد که در ویژگی‌های زیر صدق کند،

۱. تابع $f(t, \omega) \rightarrow (t, \omega) \in B \times \mathcal{F}$ -اندازه‌پذیر باشد که B سیگما میدانی در $[0, \infty)$ است،

۲. به ازای هر t ، تابع $f(t, \omega), \mathcal{F}_t$ -سازگار باشد،

$$3. E \left(\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right) < \infty.$$

حال برای تابع $f \in V$ ، انتگرال ایتو $I[f]_{(\omega)}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم،

$$I[f]_{(\omega)} = \int_S^T f(t, \omega) dB_t,$$

که B_t حرکت براونی یک بعدی است.

برای محاسبه $I[f]_{(\omega)}$ ابتدا $I[\varphi]$ را برای یک کلاس ساده از توابع φ تعریف می‌نماییم. سپس نشان می‌دهیم که هر تابع $f \in V$ را می‌توان تقریبی از φ ها در نظر گرفت و با استفاده از خاصیت حدگیری از آنجایی که $f \rightarrow \varphi$ ، پس می‌توان $\int f dW$ را با کمک $\int \varphi dW$ تعریف نمود.

تابع $\varphi \in V$ را تابع ساده می‌نامیم اگر بتوانیم آن را به فرم زیر بنویسیم،

$$\varphi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t).$$

توجه داریم که از آنجایی که $\varphi \in V$ ، هر تابع e_j باید \mathcal{F}_{t_j} -اندازه‌پذیر باشد. مثلاً تابع،

$$\varphi_1(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} B_{\frac{j}{n}}(\omega) \chi_{[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})}(t),$$

تابع ساده است ولی

$$\varphi_2(t, \omega) = \sum_{j \geq 0} B_{\frac{j+1}{n}}(\omega) \chi_{[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})}(t),$$

تابع ساده نمی‌باشد.

برای توابع ساده $\varphi(t, \omega)$ انتگرال را به صورت زیر تعریف می‌نماییم،

$$\int_S^T \varphi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega).$$

حال لم مهم زیر را ثابت می‌کنیم. این لم مبنای کارهای بعدی ما در تعریف انتگرال ایتو خواهد بود.

لم ۱.۲.۲ (ایزومتري ایتو). [۱] اگر $\varphi(t, \omega)$ تابع کراندار و ساده باشد آنگاه،

$$E \left[\left(\int_S^T \varphi(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T \varphi(t, \omega)^2 dt \right]. \quad (9.2)$$

برهان. فرض کنید $\Delta B_j = B(t_{j+1}) - B(t_j)$. در این صورت،

$$E(e_i(\omega)e_j(\omega)\Delta B_i\Delta B_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ E(e_j^2)(t_{j+1} - t_j), & i = j \end{cases}$$

که از خاصیت استقلال $e_i(\omega)e_j(\omega)\Delta B_i$ و ΔB_j به ازای $i < j$ استفاده نمودیم. بنابراین:

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_S^T \varphi dB \right)^2 \right] &= \sum_{i,j} E[e_i(\omega)e_j(\omega)\Delta B_i\Delta B_j] \\ &= \sum_j E(e_j^2)(t_{j+1} - t_j) \\ &= E \left[\int_S^T \varphi^2 dt \right]. \end{aligned}$$

□

برای تعمیم دادن فرمول ایزومتري (۹.۲) به تابع دلخواه $f \in V$ باید سه گام زیر را عملی

کنیم:

۱. فرض کنید $g \in V$ یک تابع کراندار باشد و $g(\cdot, \omega)$ برای هر $\omega \in \Omega$ ، تابعی پیوسته باشد. آنگاه دنباله توابع ساده $\varphi_n \in V$ موجود است به طوری که،

$$E \left[\int_S^T (g - \varphi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

برهان. تابع φ_n را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\varphi_n(t, \omega) = \sum_j g(t_j, \omega) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1})}(t).$$

φ_n ها توابع ساده هستند و برای هر $\omega \in \Omega$

$$\int_S^T (g - \varphi_n)^2 dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

حال چون $g(\cdot, \omega)$ برای هر ω پیوسته است، بنابر قضیه همگرایی کراندار

$$E \left(\int_S^T (g - \varphi_n)^2 dt \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

۲. فرض کنید $h \in V$ کراندار باشد. دنباله توابع کراندار $g_n \in V$ موجود است به طوری که $g_n(\cdot, \omega)$ برای هر ω و n ، پیوسته است و

$$E \left[\int_S^T (h - g_n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

برهان. فرض کنید M کران تابع h باشد یعنی برای هر (t, ω) داشته باشیم،

$$|h(t, \omega)| \leq M.$$

برای هر n ، تابع پیوسته و نامنفی ψ_n را روی \mathbb{R} به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\bullet \text{ برای } x \geq 0 \text{ و } x \leq -\frac{1}{n} \text{، } \psi_n(x) = 0$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) dx = 1.$$

حال قرار می دهیم،

$$g_n(t, \omega) = \int_0^t \psi_n(s-t) h(s, \omega) ds.$$

آنگاه به ازای هر $\omega \in \Omega$ تابع $g_n(\cdot, \omega)$ پیوسته است و $|g_n(t, \omega)| \leq M$. چون $h \in V$ لذا برای هر t ، تابع $g_n(t, \cdot)$ -اندازه پذیر است. علاوه بر این برای هر ω ،

$$\int_S^T (g_n(s, \omega) - h(s, \omega))^2 ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

بنابراین طبق قضیه همگرایی کراندار داریم،

$$E \left[\int_S^T (h(t, \omega) - g_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

۳. فرض کنید $f \in V$ باشد. دنباله توابع $\{h_n\} \subset V$ وجود دارد به طوری که برای هر n ، h_n تابعی کراندار است و

$$E \left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

برهان. قرار می‌دهیم

$$h_n(t, \omega) = \begin{cases} -n, & f(t, \omega) < -n, \\ f(t, \omega), & -n \leq f(t, \omega) \leq n, \\ n, & f(t, \omega) > n. \end{cases}$$

چون

$$E \left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right] < \infty,$$

□

لذا طبق قضیه همگرایی تسلطی لبگ حکم برقرار است.

حال آماده‌ایم تا انتگرال ایتو یعنی،

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega),$$

را برای $f \in V$ تعریف کنیم. اگر $f \in V$ باشد طبق گام‌های اول تا سوم، دنباله توابع ساده $\varphi_n \in V$ موجود است به طوری که،

$$E \left[\int_S^T |f - \varphi_n|^2 dt \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

حال تابع $I[f]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$I[f](\omega) := \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB_t(\omega).$$

این حد به عنوان عضوی از $\mathcal{L}^2(\Omega, P)$ وجود دارد زیرا طبق لم ایزومتري ایتو دنباله

$$\int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB_t(\omega),$$

یک دنباله کوشی در $\mathcal{L}^2(\Omega, P)$ است. به صورت خلاصه می‌توان تعریف زیر را ارائه نمود.

تعریف ۴.۲.۲ (انتگرال ایتو). فرض کنید $f \in V(S, T)$ باشد. انتگرال ایتو از S تا T به صورت زیر تعریف می شود،

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB_t(\omega), \quad (10.2)$$

که حد فوق در $\mathcal{L}^2(\Omega, P)$ موجود است و $\{\varphi_n\}$ یک دنباله از توابع ساده است که در شرط زیر صدق می کند،

$$E \left[\int_S^T (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (11.2)$$

توجه کنید که دنباله φ_n که در (۱۱.۲) صدق می کند، در گام های اول تا سوم صادق است. علاوه بر این طبق (۹.۲)، حد در (۱۰.۲) موجود است و تا زمانی که (۱۱.۲) برقرار باشد به انتخاب φ_n بستگی ندارد. طبق (۹.۲) و (۱۰.۲) می توان نتیجه زیر را گرفت.

نتیجه ۱.۲.۲ (ایزومتري ایتو). برای هر $f \in V(S, T)$ داریم،

$$E \left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right]. \quad (12.2)$$

نتیجه ۲.۲.۲. اگر $f(t, \omega) \in V(S, T)$ و برای $n = 1, 2, \dots$ داشته باشیم $f_n(t, \omega) \in V(S, T)$ و

$$E \left[\int_S^T (f_n(t, \omega) - f(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

بنابراین در $\mathcal{L}^2(\Omega, P)$ برای $n \rightarrow \infty$ داریم،

$$\int_S^T f_n(t, \omega) dB_t(\omega) \rightarrow \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega).$$

مثال ۲.۲.۲. فرض کنید $B_0 = 0$ باشد. پس

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

برهان. قرار می دهیم $\varphi_n(s, \omega) = \sum B_j(\omega) \cdot \chi_{[t_j, t_{j+1})}(s)$ که در آن $B_j = B_{t_j}$ است. بنابراین برای $\Delta t_j \rightarrow 0$ داریم،

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^t (\varphi_n - B_s)^2 ds \right] &= E \left[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds \right] \\ &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds = \sum_j \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

لذا طبق نتیجه ۲.۲.۲ داریم،

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_0^t \varphi_n dB_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_j B_j \Delta B_j.$$

حال داریم،

$$\begin{aligned}\Delta(B_j^\vee) &= B_{j+1}^\vee - B_j^\vee = (B_{j+1} - B_j)^\vee + 2B_j(B_{j+1} - B_j) \\ &= (\Delta B_j)^\vee + 2B_j\Delta B_j,\end{aligned}$$

چون $B_0 = 0$ است لذا داریم،

$$B_t^\vee = \sum_j \Delta(B_j^\vee) = \sum_j (\Delta B_j)^\vee + 2 \sum_j B_j \Delta B_j$$

یا

$$\sum_j B_j \Delta B_j = \frac{1}{2} B_t^\vee - \frac{1}{2} (\Delta B_j)^\vee.$$

از آنجایی که در $\mathcal{L}^2(\Omega, P)$ زمانی که $\Delta t_j \rightarrow 0$ داریم، $\sum_j (\Delta B_j)^\vee \rightarrow t$ لذا نتیجه حاصل می‌شود.

□

جمله اضافی $-\frac{1}{2}t$ نشان می‌دهد که انتگرال تصادفی ایتو مشابه با انتگرال‌های معمولی رفتار نمی‌کند.

قضیه ۱.۲.۲ (خواص انتگرال ایتو). [۱] فرض کنید $f, g \in V(0, T)$ و $0 \leq S \leq U \leq T$ و c عدد ثابت باشد در این صورت،

$$1. \int_S^T f dW_t = \int_S^U f dW_t + \int_U^T f dW_t$$

$$2. \int_S^T (cf + g) dW_t = c \int_S^T f dW_t + \int_S^T g dW_t$$

$$3. E(\int_S^T f dW_t) = 0$$

$$4. \int_S^T f dW_t \text{ نسبت به } \mathcal{F}_T \text{ اندازه‌پذیر است.}$$

برهان. این روابط برای توابع ساده برقرار است. با حد گرفتن برای تمام توابع $f, g \in V(0, T)$ نیز برقرار خواهد بود.

□

۲.۲.۲ فرمول ایتو

با توجه به توضیحات بخش قبل در می‌یابیم که تعریف بنیادی از انتگرال ایتو برای محاسبه یک انتگرال ایتو خیلی سودمند نخواهد بود. این حالت، مشابه انتگرال ریمان معمولی است که در آن از تعریف بنیادی استفاده نمی‌کنیم، بلکه از قضیه اساسی حسابان و هم‌چنین قاعده‌ی زنجیره‌ای برای محاسبات استفاده می‌کنیم. در مقایسه با قاعده‌ی زنجیره‌ای در حسابان معمولی، قاعده زنجیره‌ای در حسابان تصادفی وجود دارد که فرمول ایتو یا لم ایتو نامیده می‌شود. این فرمول برای محاسبه‌ی انتگرال‌های ایتو مفید است.

فرض کنید $\{\mathcal{F}_t: 0 \leq t \leq T\}$ یک خانواده از سیگما میدان‌های صعودی \mathcal{F} روی فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) باشد و $g_0(t, \omega)$ ، $g_1(t, \omega)$ دو تابع تصادفی باشند که در شرط‌های زیر صدق کنند،

۱. توابع g_0 و g_1 روی $[0, T] \times \Omega$ اندازه‌پذیر باشند،

۲. متغیرهای تصادفی $g_0(t, \cdot)$ و $g_1(t, \cdot)$ به ازای هر $t \in [0, T]$ ، نسبت به \mathcal{F}_t اندازه‌پذیر باشند

و

$$P\left(\int_0^t |g_0(s, \omega)| ds < \infty\right) = 1 \quad \bullet$$

$$P\left(\int_0^t g_1^2(s, \omega) ds < \infty\right) = 1 \quad \bullet$$

آنگاه فرآیند تصادفی،

$$X(t) = X(0) + \int_0^t g_0(s, \omega) ds + \int_0^t g_1(s, \omega) dB(s), \quad (13.2)$$

به ازای $t \in [0, T]$ ، دارای مسیرهای نمونه‌ای پیوسته با احتمال یک می‌باشد. اگر $X(t)$ یک فرآیند تصادفی به شکل (۱۳.۲) باشد، آنگاه معادله (۱۳.۲) را می‌توان به شکل دیفرانسیلی زیر نوشت،

$$dX(t) = g_0(t, \omega)dt + g_1(t, \omega)dB(t). \quad (14.2)$$

قضیه ۲.۲.۲ (فرمول ایتو). [۱] فرض کنید $X(t)$ دارای دیفرانسیل تصادفی به صورت (۱۴.۲) باشد. اگر $f(t, x)$ یک تابع قطعی با مقدار حقیقی باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ و $t \in [0, T]$ تعریف شده باشد و مشتق‌های جزئی $\frac{\partial f}{\partial t}$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ پیوسته باشند، آنگاه فرآیند $f(t, X(t))$ روی بازه $[0, T]$ دارای دیفرانسیل تصادفی زیر می‌باشد،

$$df(t, X(t)) = \tilde{g}_0(t, X(t))dt + \tilde{g}_1(t, X(t))dW(t), \quad (15.2)$$

که توابع \tilde{g}_0 و \tilde{g}_1 به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\tilde{g}_0(t, X(t)) = \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} g_0(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial x^2},$$

$$\tilde{g}_1(t, X(t)) = \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} g_1(t).$$

رابطه (۱۵.۲) به فرمول ایتو یا قاعده‌ی زنجیره‌ای ایتو معروف است پس،

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} (dX_t)^2,$$

که در اینجا

$$(dB)^2 = dt, \quad dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = 0$$

است.

قضیه ۳.۲.۲ (فرمول ایتو - بعدی). [۱] فرض کنید $F(t, x_1, \dots, x_n)$ یک تابع قطعی با مقدار حقیقی باشد به طوری که به ازای هر $t \in [a, b]$ و $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده باشد و مشتق‌های جزئی $\frac{\partial F}{\partial t}$ ، $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ و $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ به ازای $i, j = 1, \dots, n$ پیوسته باشند. آنگاه

$$\begin{aligned} dF(t, X_1(t), \dots, X_n(t)) &= \left(\frac{\partial F(t, X_1(t), \dots, X_n(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(t, X_1(t), \dots, X_n(t))}{\partial x_i} g_0^{(i)}(t) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 F(t, X_1(t), \dots, X_n(t))}{\partial x_i \partial x_j} g_1^{(ik)}(t) g_1^{(jk)}(t) \right) dt \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(t, X_1(t), \dots, X_n(t))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^m g_1^{(ij)}(t) dW_j(t). \end{aligned}$$

نتیجه ۳.۲.۲. اگر فرآیند $Y(t)$ جواب معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو زیر باشد،

$$dY(t) = g_0(t, Y(t))dt + g_1(t, Y(t))dW(t), \quad (۱۶.۲)$$

آنگاه (۱۶.۲) جواب معادله دیفرانسیل تصادفی استراتنویچ زیر خواهد بود،

$$dY(t) = g_0(t, Y(t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_1(t, Y(t))}{\partial y} g_1(t, Y(t))dt + g_1(t, Y(t))dW(t). \quad (۱۷.۲)$$

لذا با توجه به نتیجه فوق، دو معادله دیفرانسیل تصادفی (۱۶.۲) و (۱۷.۲) تحت قوانین محاسباتی جواب یکسانی دارند.

۳.۲ جواب معادله دیفرانسیل تصادفی و یکتایی جواب

در مورد معادله دیفرانسیل تصادفی، سوالی که مطرح است این است که آیا این معادله دارای جواب است یا خیر، و اگر جواب دارد آیا یکتاست یا غیریکتا. واقعیت این است که وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل تصادفی یک مسئله سخت است به طوری که فقط در حالت خاص می‌توان آن را ثابت کرد. در این زیربخش به این مباحث خواهیم پرداخت.

۱.۳.۲ معنی جواب یک معادله دیفرانسیل تصادفی

معادله دیفرانسیل تصادفی

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = \text{یک متغیر تصادفی داده شده} \end{cases} \quad (۱۸.۲)$$

را در نظر می‌گیریم. منظور از W_t موجود در معادله یک حرکت براونی خاص نیست، چون حرکت براونی نسخه‌های بسیار متنوعی دارد و در این جا فیلتریشن را تعیین نکردیم. بنابراین

یک جواب از این معادله یعنی اینکه اولاً یک فضای احتمال به صورت $(\Omega, \{\mathcal{F}\}_{t \geq 0}, P)$ تعیین کنیم و یک حرکت براونی مانند $\{W_t\}_{t \geq 0}$ و یک فرآیند $\{X_t\}_{t \geq 0}$ روی این فضا بسازیم که در معادله مذکور صدق کند. به عبارت دیگر دارای شرایط زیر باشد،

۱. $\{W_t\}_{t \geq 0}$ نسبت به $\{X_t\}_{t \geq 0}$ یک حرکت براونی باشد،

۲. X_t در معادله (۱۸.۲) صدق کند. یعنی،

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s).$$

توجه کنید که X_t باید نسبت به $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ سازگار باشد.

۲.۳.۲ جواب‌های قوی و ضعیف

جواب قوی: اگر یک فضای احتمال مانند $(\Omega, \{\mathcal{F}\}_{t \geq 0}, P)$ و یک حرکت براونی روی این فضای احتمال را به ما بدهند و از ما بخواهند که فرآیند $\{X_t\}_{t \geq 0}$ را پیدا کنیم که در معادله دیفرانسیل تصادفی صدق کند، هدف یافتن جواب قوی است.

جواب ضعیف: جواب ضعیف یعنی اینکه فقط صورت معادله دیفرانسیل را به ما می‌دهند و ما خود حق داریم فضای احتمال و حرکت براونی را بسازیم.

۳.۳.۲ قضیه وجود و یکتایی جواب

فرض کنید (Ω, \mathcal{F}, P) یک فضای احتمال کامل باشد و $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ فیلتری روی این فضا باشد و برای $t \geq 0$ ، $B(t) = (B_1(t), \dots, B_m(t))^T$ حرکت براونی m -بعدی روی این فضا باشد و $0 \leq t_0 < T < \infty$ و x_0 متغیر تصادفی \mathcal{F}_{t_0} -اندازه‌پذیر باشد به طوری که، $E|x_0|^2 < \infty$. فرض کنید توابع $f: [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ و $g: [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ توابعی اندازه‌پذیر بورل باشند. معادله دیفرانسیل ایتو d -بعدی زیر را در نظر می‌گیریم،

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t), \quad t \in [t_0, T], x(t_0) = x_0, \quad (19.2)$$

که معادله انتگرال تصادفی آن به صورت زیر است،

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds + \int_{t_0}^t g(x(s), s)dB(s), \quad t \in [t_0, T], x(t_0) = x_0. \quad (20.2)$$

قضیه ۱.۳.۲ (قضیه وجود و یکتایی جواب). [۴] فرض کنید که ثابت‌های $L > 0$ و $K > 0$ وجود دارند به طوری که در شرایط لیپشیتز^۱ و رشد خطی^۲ زیر صدق کنند،

$$|f(x, t) - f(y, t)|^2 + |g(x, t) - g(y, t)|^2 \leq L|x - y|^2, \quad \forall t \in [t_0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (21.2)$$

$$|f(x, t)| + |g(x, t)| \leq K(1 + |x|^2), \quad \forall (x, t) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d, \quad (22.2)$$

^۱Lipschitz

^۲linear growth

در این صورت معادله دیفرانسیل (۱۹.۲) دارای جواب (قوی) یکتای $x(t)$ است. که این جواب عضو $\mathcal{M}^2([t_0, T], \mathbb{R}^d)$ است.

برای اثبات این قضیه ابتدا قضیه و لم‌های زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۲. [۴] فرض کنید $p \geq 2$ و $g \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times m})$ به طوری که

$$E \int_0^T |g(s)|^p ds < \infty,$$

بنابراین:

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g(s) dB(s) \right|^p \right) \leq \left(\frac{p^3}{2(p-1)} \right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} E \int_0^T |g(s)|^p ds.$$

لم ۱.۳.۲ (بورل – کانتل^۳). [۴]

۱. اگر $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ و $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$ باشد بنابراین،

$$P \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k \right) = 0.$$

۲. اگر دنباله $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ مستقل باشد و $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$ داریم،

$$P \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k \right) = 1.$$

لم ۲.۳.۲ (نامساوی گرانوال^۴). [۴] فرض کنید $c \geq 0$ ، $T > 0$ ، تابع نامنفی کراندار بورل اندازه‌پذیر روی $[0, T]$ باشد و $v(\cdot)$ یک تابع انتگرال‌پذیر نامنفی روی $[0, T]$ باشد. اگر

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad (23.2)$$

بنابراین

$$u(t) \leq c \exp \left(\int_0^t v(s)ds \right), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (24.2)$$

لم ۳.۳.۲. [۴] فرض کنید شرایط رشد خطی (۲۲.۲) برقرار باشد. اگر $x(t)$ یک جواب از معادله (۱۹.۲) باشد، بنابراین

$$E \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)|^2 \right) \leq (1 + 3E|x_0|^2) e^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)}, \quad (25.2)$$

به‌ویژه $x(t)$ متعلق به $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$ است.

^۳Borel–Cantelli’s

^۴Gronwall inequality

برهان. برای هر $n \geq 1$ ، زمان توقف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\tau_n = T \wedge \inf\{t \in [0, T]: |x(t)| \geq n\},$$

که $\tau_n \uparrow T$ تقریباً همه جا برقرار است. مجموعه $x_n(t) = x(t \wedge \tau_n)$ را برای $t \in [0, T]$ در نظر می‌گیریم. بنابراین $x_n(t)$ در معادله زیر صدق می‌کند،

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_n(s), s) I_{[[t_0, \tau_n]]}(s) ds + \int_{t_0}^t g(x_n(s), s) I_{[[t_0, \tau_n]]}(s) dB(s).$$

با استفاده از نامساوی $|a+b+c|^2 \leq 3(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$ و نامساوی هولدر و شرط رشد خطی (۲۲.۲) داریم،

$$\begin{aligned} |x_n(t)|^2 &\leq 3|x_0|^2 + 3K(t-t_0) \int_{t_0}^t (1 + |x_n(s)|^2) ds \\ &\quad + 3 \left| \int_{t_0}^t g(x_n(s), s) I_{[[t_0, \tau_n]]}(s) dB(s) \right|^2. \end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه ۲.۳.۲ و شرط (۲۲.۲) داریم،

$$\begin{aligned} E \left(\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x_n(s)|^2 \right) &\leq 3E|x_0|^2 + 3K(T-t_0) \int_{t_0}^t (1 + E|x_n(s)|^2) ds \\ &\quad + 12E \int_{t_0}^t |g(x_n(s), s)|^2 I_{[[t_0, \tau_n]]}(s) ds \\ &\leq 3E|x_0|^2 + 3K(T-t_0 + 4) \int_{t_0}^t (1 + E|x_n(s)|^2) ds. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} 1 + E \left(\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x_n(s)|^2 \right) &\leq 1 + 3E|x_0|^2 + 3K(T-t_0 + 4) \int_{t_0}^t \left[1 + E \left(\sup_{t_0 \leq r \leq s} |x_n(r)|^2 \right) \right] ds. \end{aligned}$$

حال به کمک نامساوی گرانوال داریم،

$$1 + E \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_n(t)|^2 \right) \leq (1 + 3E|x_0|^2) e^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)}.$$

لذا

$$E \left(\sup_{t_0 \leq t \leq \tau_n} |x(t)|^2 \right) \leq (1 + 3E|x_0|^2) e^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)}.$$

بنابراین نامساوی (۲۵.۲) وقتی $n \rightarrow \infty$ برقرار است. \square

از نامساوی (۲۵.۲) نتیجه می‌گیریم که $E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^2 \right] < \infty$. اکنون به اثبات یکتایی جواب در شرط لیپشیتز و رشد خطی می‌پردازیم.

برهان. فرض $x(t)$ و $\bar{x}(t)$ دو جواب از معادله (۱۹.۲) باشند. طبق لم ۳.۳.۲ هر دو جواب عضو $\mathcal{M}([t_0, T], \mathbb{R}^d)$ هستند و

$$x(t) - \bar{x}(t) = \int_{t_0}^t [f(x(s), s) - f(\bar{x}(s), s)] ds + \int_{t_0}^t [g(x(s), s) - g(\bar{x}(s), s)] dB(s).$$

به کمک نامساوی هولدر، قضیه ۲.۳.۲ و شرط لیپشیتز (۲۱.۲) ابتدا به روش اثبات لم ۳.۳.۲ می‌توان نشان داد که،

$$E \left(\sup_{t_0 \leq s \leq t} |x(s) - \bar{x}(s)|^2 \right) \leq 2L(T+1) \int_{t_0}^t E \left(\sup_{t_0 \leq r \leq s} |x(r) - \bar{x}(r)|^2 \right) ds.$$

حال طبق نامساوی گرانوال داریم،

$$E \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t) - \bar{x}(t)|^2 \right) = 0.$$

بنابراین برای همه $t_0 \leq t \leq T$ تقریباً همه‌جا داریم، $x(t) = \bar{x}(t)$. لذا اثبات منحصر به فرد بودن برقرار است. \square

حال به اثبات وجود جواب می‌پردازیم.

برهان. مجموعه $x_0(t) \equiv x_0$ را در نظر می‌گیریم و برای $n = 1, 2, \dots$ و $t \in [t_0, T]$ تکرار پیکارد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_{n-1}(s), s) ds + \int_{t_0}^t g(x_{n-1}(s), s) dB(s). \quad (26.2)$$

که $x_0(\cdot) \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$ علاوه بر این به کمک استقرا داریم، $x_n(\cdot) \in \mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$ از (۲۶.۲) داریم،

$$E|x_n(t)|^2 \leq c_1 + 3K(T+1) \int_{t_0}^t E|x_{n-1}(s)|^2 ds, \quad (27.2)$$

که در آن $c_1 = 3E|x_0|^2 + 3KT(T+1)$ است. همچنین از (۲۷.۲) برای هر $k \geq 1$ داریم،

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq k} E|x_n(t)|^2 &\leq c_1 + 3K(T+1) \int_{t_0}^t \max_{1 \leq n \leq k} E|x_{n-1}(s)|^2 ds \\ &\leq c_1 + 3K(T+1) \int_{t_0}^t \left(E|x_0|^2 + \max_{1 \leq n \leq k} E|x_n(s)|^2 \right) ds \\ &\leq c_2 + 3K(T+1) \int_{t_0}^t \max_{1 \leq n \leq k} E|x_n(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

که در آن $c_2 = c_1 + 3KT(T+1)E|x_0|^2$ است. از نامساوی گرانوال نتیجه می‌گیریم،

$$\max_{1 \leq n \leq k} E|x_n(t)|^2 \leq c_2 e^{3KT(T+1)}.$$

چون k دلخواه بود لذا داریم،

$$E|x_n(t)|^2 \leq c_T e^{KT(T+1)}, \quad \forall t_0 \leq t \leq T, n \geq 1. \quad (28.2)$$

از طرفی

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0(t)|^2 &= |x_1(t) - x_0(t)|^2 \\ &\leq 2 \left| \int_{t_0}^t f(x_0, s) ds \right|^2 + 2 \left| \int_{t_0}^t g(x_0, s) dB(s) \right|^2. \end{aligned}$$

با امید ریاضی گرفتن و به کمک (22.2) داریم،

$$\begin{aligned} E|x_1(t) - x_0(t)|^2 \\ \leq 2K(t - t_0)^2(1 + E|x_0|^2) + 2K(t - t_0)(1 + E|x_0|^2) \leq C, \end{aligned} \quad (29.2)$$

که در آن $C = 2K(T - t_0 + 1)(T - t_0)(1 + E|x_0|^2)$. در حال حاضر ادعا می‌کنیم که برای $n \geq 0$ داریم،

$$E|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 \leq \frac{C[M(t - t_0)]^n}{n!}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (30.2)$$

که در آن $M = 2L(T - t_0 + 1)$. حال به کمک استقرا این را نشان می‌دهیم. با توجه به (29.2) و با در نظر گرفتن $n = 0$ ، (30.2) برقرار است. طبق فرض استقرا، (30.2) برای $n \geq 0$ برقرار است لذا نشان می‌دهیم که (30.2) برای $n + 1$ برقرار است. توجه کنید که

$$\begin{aligned} |x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)|^2 &\leq 2 \left| \int_{t_0}^t [f(x_{n+1}(s), s) - f(x_n(s), s)] ds \right|^2 \\ &\quad + 2 \left| \int_{t_0}^t [g(x_{n+1}(s), s) - g(x_n(s), s)] dB(s) \right|^2. \end{aligned} \quad (31.2)$$

با امید ریاضی گرفتن و با استفاده از (21.2) و همچنین فرض استقرا بدست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} E|x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)|^2 &\leq 2L(t - t_0 + 1)E \int_{t_0}^t |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 ds \\ &\leq M \int_{t_0}^t E|x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 ds \\ &\leq M \int_{t_0}^t \frac{C[M(s - t_0)]^n}{n!} ds = \frac{C[M(t - t_0)]^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

یعنی (30.2) برای $n + 1$ برقرار است. بنابراین به کمک استقرا (30.2) برای هر $n \geq 0$ برقرار است. بعلاوه با جایگذاری n با $n - 1$ در (31.2) داریم،

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 &\leq 2L(T - t_0) \int_{t_0}^T |x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2 ds \\ &\quad + 2 \sup_{t_0 \leq t \leq T} \left| \int_{t_0}^T [g(x_n(s), s) - g(x_{n-1}(s), s)] dB(s) \right|^2. \end{aligned}$$

با امید ریاضی گرفتن و به کمک قضیه ۲.۳.۲ و (۳۰.۲) داریم،

$$\begin{aligned} E \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 \right) &\leq 2L(T - t_0 + 4) \int_{t_0}^T E|x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2 ds \\ &\leq 4M \int_{t_0}^T \frac{C[M(s - t_0)]^{n-1}}{(n-1)!} ds = \frac{4C[M(T - t_0)]^n}{n!}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| > \frac{1}{2^n} \right\} \leq \frac{4C[4M(T - t_0)]^n}{n!}.$$

چون $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4C[4M(T - t_0)]^n}{n!} < \infty$ طبق لم ۱.۳.۲ تقریبا برای همه $\omega \in \Omega$ عدد مثبت طبیعی $n_0 = n_0(\omega)$ وجود دارد به طوری که،

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \geq n_0.$$

لذا مجموع جزئی

$$x_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} [x_{i+1}(t) - x_i(t)] = x_n(t),$$

در $t \in [t_0, T]$ با احتمال یک به طور یکنواخت همگراست. این حد را با $x(t)$ نشان می‌دهیم که $x(t)$ پیوسته و \mathcal{F}_t -سازگار است. از سوی دیگر از (۳۰.۲) برای هر t ، دنباله کوشی $\{x_n(t)\}_{n \geq 1}$ در L^2 است. بنابراین $x_n(t) \rightarrow x(t)$ با فرض $n \rightarrow \infty$ در (۲۸.۲) داریم،

$$E|x(t)|^2 \leq c_7 e^{3KT(T+1)}, \quad \forall t_0 \leq t \leq T.$$

بنابراین $x(\cdot) \in M^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$. نشان می‌دهیم که $x(t)$ در (۲۰.۲) صدق می‌کند. توجه کنید که

$$\begin{aligned} &E \left| \int_{t_0}^t f(x_n(s), s) ds - \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds \right|^2 \\ &+ E \left| \int_{t_0}^t g(x_n(s), s) dB(s) - \int_{t_0}^t g(x(s), s) dB(s) \right|^2 \\ &\leq L(T - t_0 + 1) \int_{t_0}^T E|x_n(s) - x(s)|^2 ds \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

بنابراین با فرض $n \rightarrow \infty$ در (۲۶.۲) داریم:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds + \int_{t_0}^t g(x(s), s) dB(s), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

□

اکنون اثبات کامل است.

جواب معادله دیفرانسیل تصادفی و یکتایی جواب ۳۵

در اثبات بالا نشان دادیم که دنباله پیکارد $x_n(t)$ به جواب یکتای $x(t)$ از معادله (۱۹.۲) همگرا است.

توجه داشته باشید که اگر $a(t, \circ)$ و $b(t, \circ)$ روی $[\circ, T]$ در (۲۲.۲) کراندار باشند می توان گفت که (۲۲.۲) از (۲۱.۲) بدست می آید زیرا:

$$\begin{aligned} |a(t, x)| + |b(t, x)| &= |a(t, x)| + |b(t, x)| + |a(t, \circ)| - |a(t, \circ)| + |b(t, \circ)| - |b(t, \circ)| \\ &\leq |a(t, \circ)| + |b(t, \circ)| + |a(t, x) - a(t, \circ)| + |b(t, x) - b(t, \circ)| \\ &\leq \max_{t \in [\circ, T]} |a(t, \circ)| + \max_{t \in [\circ, T]} |b(t, \circ)| + L|x - \circ| \\ &\leq K(1 + |x|). \end{aligned}$$

فصل ۳

روش گالرکین

۱.۳ روش گالرکین

در این بخش روش گالرکین را برای حل معادله دیفرانسیل معمولی تعریف می‌کنیم که براساس یافتن تقریبی برای جواب در یک فضای متناهی استوار است به‌گونه‌ای که به سادگی بتوان از آن مشتق و یا انتگرال گرفت و توسط مجموعه‌ای از توابع پایه‌ای متعامد با بعد متناهی تولید گردد. روش گالرکین به کمک تعداد متناهی از توابع پایه‌ای به یک دستگاه معادلات با تعداد متناهی مجهول تبدیل می‌شود که به سادگی می‌توان آن را حل کرد و یک جواب تقریبی بدست آورد. با افزایش تعداد توابع پایه‌ای می‌توان جواب تقریبی را بهبود بخشید به‌طوری که در حد امکان جواب دقیق به صورت یک سری متناهی بیان شود. توابع پایه‌ای ممکن است چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌های تکه‌ای، چندجمله‌ای‌های مثلثاتی و یا سایر توابع باشند. روش عناصر متناهی به صورت پایه‌ای از روش گالرکین با تقریب چندجمله‌ای‌های تکه‌ای است. در این بخش روش گالرکین را برای دو نمونه از توابع پایه‌ای بکار می‌بریم. نمونه اول مسأله مقدار اولیه‌ای است که رشد جمعیت را مدل می‌کند و از تقریب چندجمله‌ای‌های جامع استفاده می‌کند و نمونه دوم مسأله مقدار مرزی است که جریان گرما را در یک سیستم مدل می‌کند، که از تقریب چندجمله‌ای‌های تکه‌ای و یا به‌طور دقیق‌تر تقریب تکه‌ای خطی استفاده می‌کند. مطالب آورده شده در این فصل از [۵۴] گرفته شده است.

۱.۱.۳ روش گالرکین با چند جمله‌ای‌ها

مدل جمعیت

اگر $u(t)$ جمعیت را در زمان t نشان دهد پس معادله دیفرانسیل مدل جمعیت به صورت $\dot{u}(t) = \lambda u(t)$ است که در آن λ ثابت حقیقی مثبت و $\dot{u}(t) = \frac{du}{dt}$ می‌باشد. این معادله دارای شرط اولیه $u(0) = u_0$ است که به صورت مسأله مقدار اولیه زیر مطرح می‌شود،

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \lambda u(t), & 0 < t \leq 1, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

جواب معادله (۱.۳) به صورت $u(t) = u_0 \exp(\lambda t)$ می‌باشد که برای $\lambda > 0$ تابعی هموار و صعودی است.

روش گالرکین

اکنون به کمک روش گالرکین، تقریب چند جمله‌ای U از u را در مجموعه‌ای از چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه q ، $V^{(q)} = P^q(0, 1)$ روی $[0, 1]$ بدست می‌آوریم. می‌دانیم تقریب مناسبی از u را می‌توان به کمک به طور مثال چند جمله‌ای تیلور و چند جمله‌ای‌های درونیاب بدست آورد اما این امر به مشتقات u در نقاط خاصی از $[0, 1]$ نیاز دارد. در این زیربخش هدف این است که تقریب چند جمله‌ای از u را تنها با استفاده از این اطلاعات که u در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند و در یک نقطه مقدار مشخص دارد، محاسبه کرد. که این همان روش گالرکین است. از آنجایی که جواب تحلیلی از این مدل را می‌دانیم، لذا می‌توانیم از این دانش برای ارزیابی جواب تقریبی استفاده کنیم.

از آنجایی که $\{t^j\}_{j=0}^q$ پایه‌ای برای $V^{(q)}$ می‌باشد لذا $U(t) = \sum_{j=0}^q \xi_j t^j$ که $\xi_j \in \mathbb{R}$ ضریب U است. طبیعی است که $U(0) = u_0$ یعنی $\xi_0 = u_0$ می‌باشد. بنابراین داریم،

$$U(t) = u_0 + \sum_{j=1}^q \xi_j t^j,$$

که قسمت مجهول U یعنی $\sum_{j=1}^q \xi_j t^j$ در زیر فضای $V_0^{(q)}$ از $V^{(q)}$ قرار دارد که شامل توابعی در $V^{(q)}$ است که در $t = 0$ ، صفر می‌باشد یعنی،

$$V_0^{(q)} = \{v: v \in V^{(q)}, v(0) = 0\}.$$

حال U را در معادله دیفرانسیل (۱.۳) جایگزین می‌کنیم تا ضرایب ξ_j ‌ها را بدست آوریم. از آنجایی که U جواب دقیق چند جمله‌ای نیست لذا در هر نقطه در معادله دیفرانسیل صدق نمی‌کند.

حال خطای باقی مانده از تابع v را برای معادله (۱.۳) به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$R(v(t)) = \dot{v}(t) - \lambda v(t).$$

خطای باقی مانده $R(v(t))$ وقتی که v معین باشد یک تابع از t است. $R(v(t))$ بیان می کند که چطور v در زمان t در معادله دیفرانسیل صدق می کند. اگر باقی مانده صفر باشد یعنی برای هر $0 \leq t \leq 1$ ، $R(v(t)) = 0$ باشد لذا معادله برقرار است و v جواب معادله می باشد. از آنجایی که جواب دقیق u چندجمله ای نمی باشد لذا خطای باقی مانده از یک تابع در $V^{(q)}$ که در شرایط اولیه صادق است، هرگز در تمام نقاط صفر نیست، هر چند می تواند در نقاط متمایز صفر باشد. تقریب گالرکین U تابعی در $V^{(q)}$ با $U(0) = u_0$ است به طوری که خطای باقی مانده $R(U(t))$ با تمام توابع در $V_0^{(q)}$ متعامد است یعنی برای هر $v \in V_0^{(q)}$ ،

$$\int_0^1 R(U(t))v(t)dt = \int_0^1 (\dot{U}(t) - \lambda U(t))v(t)dt = 0. \quad (2.3)$$

این خاصیت تعامد گالرکین از U و یا نسبتاً از باقی مانده $R(U(t))$ می باشد. از آنجایی که ضرایب U (ξ_j ها) طبق توابع پایه ای ۱ برای $V^{(q)}$ مشخص هستند ($u_0 = \xi_0$)، لذا کافی است معادله (۲.۳) تنها برای توابع $v \in V_0^{(q)}$ برقرار باشد. توجه کنید که جواب واقعی در یک شرط تعامد قوی تری صادق است یعنی برای هر تابع v ،

$$\int_0^1 (\dot{u} - \lambda u)v dt = 0. \quad (3.3)$$

حال مجموعه ای از توابعی را در نظر می گیریم تا جواب گالرکین U را بدست بیاوریم. در این حالت فضای $V^{(q)}$ از چندجمله ای های ω که $\omega(0) = u_0$ می باشد را فضای آزمون و فضایی از توابعی که در شرط متعامد بودن صدق می کنند، که $V_0^{(q)}$ است را فضای تست در نظر می گیریم. در این حالت از آنجایی که شرط اولیه غیرهمگن $\omega(0) = u_0$ (فرض $u_0 \neq 0$) در تابع آزمون صدق می کند و شرط مرزی همگن $v(0) = 0$ در تابع تست $v \in V_0^{(q)}$ صادق است، لذا فضای تست و آزمون متفاوت هستند. به طور کلی روش های مختلفی برای انتخاب تابع تست و آزمون وجود دارد.

دستگاه گسسته از معادلات

حال نشان می دهیم که (۲.۳) یک دستگاه معکوس پذیر از معادلات جبری خطی برای ضرایب U را نتیجه می دهد. با جایگذاری بسط U در (۲.۳) برای هر $v \in V_0^{(q)}$ داریم،

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^q j \xi_j t^{j-1} - \lambda u_0 - \lambda \sum_{j=1}^q \xi_j t^j \right) v(t) dt = 0. \quad (4.3)$$

کافی است نشان دهیم که معادله (۴.۳) برای هر تابع پایه‌ای در $V_0^{(q)}$ برقرار است. مجموعه معادلات زیر را داریم:

$$\sum_{j=1}^q j \xi_j \int_0^1 t^{j+i-1} dt - \lambda \sum_{j=1}^q \xi_j \int_0^1 t^{j+i} dt = \lambda u_0 \int_0^1 t^i dt, \quad i = 1, \dots, q$$

جملاتی که شامل اطلاعات اولیه هستند را به سمت راست معادله انتقال می‌دهیم و سپس از طرفین انتگرال می‌گیریم لذا داریم،

$$\sum_{j=1}^q \left(\frac{j}{j+i} - \frac{\lambda}{j+i+1} \right) \xi_j = \frac{\lambda}{i+1} u_0, \quad i = 1, \dots, q. \quad (5.3)$$

معادله (۵.۳) یک دستگاه $q \times q$ از معادلات است. اگر ماتریس $A = (a_{ij})$ با

$$a_{ij} = \frac{j}{j+i} - \frac{\lambda}{j+i+1}, \quad i, j = 1, \dots, q$$

معکوس‌پذیر باشد آنگاه دستگاه (۵.۳) جواب یکتا دارد.

۲.۱.۳ روش گالرکین با چند جمله‌ای‌های تکه‌ای

در این زیربخش به کمک معادله انتقال گرما روش عناصر متناهی را برپایه‌ی تقریب تکه‌ای خطی بیان می‌کنیم.

معادله انتقال گرما زیر را در بازه $(0, 1)$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -(au')' = f, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

برای یافتن جواب عددی، از روش عناصر متناهی گالرکین استفاده می‌کنیم.

روش عناصر متناهی گالرکین

مساله (۶.۳) را برای $a \equiv 1$ در بازه $(0, 1)$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -u'' = f, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (7.3)$$

روش عناصر متناهی را برای معادله (۷.۳) براساس تقریب تکه‌ای خطی پیوسته به صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم:

فرض کنید $1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{M+1} = 1$ یک افراز از بازه‌ی $I = (0, 1)$ به زیربازه‌ی $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ باشد و $h_j = x_j - x_{j-1}$ طول افراز و $V_h = V_h^{(1)}$ مجموعه‌ای از توابع تکه‌ای خطی پیوسته روی τ_h باشد که در $x = 0, 1$ صفر است و V_h یک فضای برداری با بعد متناهی

M و با یک پایه شامل توابع هت $\{\varphi\}_{j=1}^M$ باشد. مختصات تابع $v \in V_h$ در این پایه در نقاط داخلی $x_j; j = 1, \dots, M$ مقدار $v(x_j)$ می‌باشد و تابع $v \in V_h$ را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$v(x) = \sum_{j=1}^M v(x_j) \varphi_j(x).$$

از آنجایی که $v \in V_h$ در \circ و 1 ، صفر است لذا φ_{M+1} و φ_{\circ} را در مجموعه‌ی توابع پایه‌ای برای V_h در نظر نمی‌گیریم.

روش گالرکین برای معادله دیفرانسیل $-u'' = f$ برای تمام توابع v به صورت زیر است،

$$\int_{\circ}^1 (-u'' - f)v dx = \circ. \quad (8.3)$$

متناظر با معادله (۳.۳) باقی‌مانده $-u'' - f$ با تابع تست v و cf متعامد است. با این وجود چون توابع در V_h مشتق دوم ندارند لذا به سادگی نمی‌توانیم تقریبی از U را به طور مستقیم در فضای V_h بدست آوریم. برای برطرف کردن این مشکل از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم. فرض کنید v مشتق‌پذیر باشد و طبق شرایط مرزی $v(\circ) = v(1) = \circ$ داریم،

$$-\int_{\circ}^1 u'' v dx = -u'(1)v(1) + u'(\circ)v(\circ) + \int_{\circ}^1 u' v' dx = \int_{\circ}^1 u' v' dx.$$

به این ترتیب فرمول تغییر یافته معادله (۷.۳) به صورت زیر می‌باشد:

تابع u را با $u(\circ) = u(1) = \circ$ برای تمام توابع v با $v(\circ) = v(1) = \circ$ طوری بیابید که،

$$\int_{\circ}^1 u' v' dx = \int_{\circ}^1 f v dx. \quad (9.3)$$

معادله (۹.۳) را به عنوان شکل ضعیف از معادله (۸.۳) در نظر می‌گیریم.

روش عناصر متناهی گالرکین برای (۷.۳) مشابه (۹.۳) با بعد متناهی می‌باشد که به صورت

زیر بیان می‌شود:

$U \in V_h$ را طوری بیابید که برای هر $v \in V_h$ داشته باشیم،

$$\int_{\circ}^1 U' v' dx = \int_{\circ}^1 f v dx. \quad (10.3)$$

توجه کنید که مشتق U' و v' از توابع U و $v \in V_h$ ، توابع ثابت تکه‌ای اند که در نقطه‌ی x_i تعریف نشده‌اند. با این حال انتگرال در سمت چپ معادله (۱۰.۳) به صورت یکتا به عنوان مجموعی از انتگرال‌ها در تمام زیربازه‌ها تعریف می‌شود. زیرا انتگرال دو تابع برابر به جزء در تعداد محدودی از نقاط، یکسان هستند. به این ترتیب مقدار U' و v' در نقاط گره‌ای متمایز x_i روی مقدار $\int_{\circ}^1 U' v' dx$ تاثیر نمی‌گذارد. با توجه به معادله (۸.۳) می‌توان گفت که خطای باقی‌مانده $-u'' - f$ از جواب دقیق با همه توابع تست v متعامد است و (۹.۳) یک اصلاح از شکل ضعیف است. به همین ترتیب (۱۰.۳) روشی برای بدست آوردن شکل ضعیف خطای باقی‌مانده از جواب عناصر متناهی U متعامد با یک مجموعه با بعد متناهی از تابع تست $v \in V_h$ است.

گسسته سازی دستگاه معادلات

با استفاده از پایه توابع هت $\{\varphi\}_{j=1}^M$ داریم،

$$U(x) = \sum_{j=1}^M \xi_j \varphi_j(x).$$

مقدار گره $x_j^i = U(x_j)$ را به کمک تعامد گالرکین (۱۰.۳) بدست می‌آوریم. برای تمام $v \in V_h$ داریم،

$$\sum_{j=1}^M \xi_j \int_0^1 \varphi_j' v' dx = \int_0^1 f v dx. \quad (11.3)$$

برای یافتن ضرایب مجهول $\{\xi_j\}$ کافی است معادله (۱۱.۳) را برای توابع پایه‌ای $\{\varphi\}_{j=1}^M$ ، که یک دستگاه خطی $M \times M$ از معادلات به شکل زیر می‌دهد حل کرد،

$$\sum_{j=1}^M \xi_j \int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' dx = \int_0^1 f \varphi_i dx, \quad i = 1, \dots, M. \quad (12.3)$$

فرض می‌کنیم $\xi = (\xi_j)$ برداری از ضرایب مجهول باشد و ماتریس سختی $A = (a_{ij})$ با ضرایب $a_{ij} = \int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' dx$ و بردار $b = b_i$ را با $b_i = \int_0^1 f \varphi_i dx$ تعریف می‌کنیم. با استفاده از این نمادها معادله (۱۲.۳) معادل با دستگاه خطی زیر است،

$$A\xi = b. \quad (13.3)$$

به عبارت دیگر برای یافتن ضرایب U ابتدا باید ماتریس A و بردار b را حساب کنیم. برای ماتریس سختی باید توجه کنیم که $a_{ij} = 0$ است مگر در حالت‌های $i = j - 1$ و $i = j + 1$. زیرا در غیراین صورت φ_i' یا φ_j' روی هر زیربازه در انتگرال‌گیری صفر هستند. به کمک تعریف $\varphi_i(x)$ ،

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

و از آنجایی که در (x_{i-1}, x_i) داریم، $\varphi_i' = \frac{1}{h_i}$ و در (x_i, x_{i+1}) داریم، $\varphi_i' = -\frac{1}{h_{i+1}}$ و روی بقیه زیربازه‌ها صفر است. لذا داریم،

$$a_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h_{i+1}}\right)^2 dx = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}.$$

و به‌طور مشابه:

$$a_{ii+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1}} dx = -\frac{1}{h_{i+1}},$$

$$b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \frac{x-x_{i-1}}{h_i} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}} dx, \quad i = 1, \dots, M.$$

ماتریس A یک ماتریس تنک است زیرا بیشتر درایه‌های آن صفر می‌باشد. در این حالت A یک ماتریس کراندار است که درایه‌های غیرصفر آن در قطر و بالا و پایین قطر قرار دارند. علاوه بر این A یک ماتریس قطری شدنی است زیرا $\int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' dx = \int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' dx$. از آنجایی که $\sum_{i,j=1}^M \eta_i a_{ij} \eta_j > 0$ به غیر از $\eta_i = 0$ لذا A معین مثبت است بنابراین A معکوس پذیر است و معادله (۱۳.۳) جواب یکتا دارد.

۲.۳ روش عناصر متناهی گالرکین

روش عناصر متناهی گالرکین را برای معادله زیر برپایه‌ی تقریب چندجمله‌ای تکه‌ای در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + a(t)u(t) = f(t), & 0 \leq t < T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (14.3)$$

به کمک تابع آزمون گسسته و تابع تست از درجه صفر روش گالرکین ناپیوسته مرتبه صفر را تعریف می‌کنیم و سپس این روش را می‌توان برای تقریب چندجمله‌ای تکه‌ای از درجه q گسترش دهیم تا روش گالرکین ناپیوسته مرتبه q حاصل گردد. به کمک روش‌های گفته شده برای (۱۴.۳) داریم:

$U \in P^q(0, T)$ را که $U(0) = u_0$ است طوری بیابید که برای هر $v \in P^q(0, T)$ با $v(0) = v_0$ داشته باشیم،

$$\int_0^T (\dot{U} + aU)v dt = \int_0^T f v dt. \quad (15.3)$$

به عبارت دیگر باقی‌مانده $R = \dot{U} + aU - f$ با تمام چندجمله‌ای‌های عضو $P^q(0, T)$ با $v(0) = v_0$ متعامد است. این روش را روش گالرکین کلی در نظر می‌گیریم چون بازه $[0, T]$ به صورت کلی در نظر گرفته شده است. روش گالرکین ناپیوسته مرتبه q با چندجمله‌ای تکه‌ای با استفاده از تغییراتی روی زیربازه $I_n = (x_{n-1}, x_n)$ از افراز $\tau_k: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ساخته می‌شود.

۱.۲.۳ روش گالرکین ناپیوسته

روش گالرکین ناپیوسته مرتبه q بر پایه تغییراتی روی روش گالرکین کلی به صورت زیر است: $U \in P^q(0, T)$ را طوری بیابید که برای هر $v \in P^q(0, T)$ داشته باشیم،

$$\int_0^T (\dot{U} + aU)v dt + (U(0) - u(0))v(0) = \int_0^T f v dt. \quad (16.3)$$

در این روش فضای تست و آزمون را یکسان در نظر می‌گیریم تا پایداری را بهبود ببخشیم. به این منظور کافی است U دقیقاً در شرایط اولیه صدق کند زیرا در غیراین صورت باید ضرایب U را تعیین کنیم.

می‌توانیم معادله (۱۶.۳) را به صورت زیر گسترش دهیم: $U \in P^q(\circ, T)$ را طوری بیابید که برای هر $v \in P^q(\circ, T)$ داشته باشیم،

$$\int_{\circ}^T (\dot{U} + aU)v dt + \alpha(U(\circ) - u(\circ))v(\circ) = \int_{\circ}^T f v dt.$$

که α ضریبی است که اهمیت نسبی خطای باقی‌مانده $U(\circ) - u(\circ)$ در زمان اولیه را در برابر خطای باقی‌مانده $\dot{U} + aU - f$ در حل معادله دیفرانسیل بیان می‌کند. در معادله (۱۶.۳) $\alpha = 1$ در نظر گرفته شده است که پایداری را بهبود می‌بخشد.

روش گالرکین ناپیوسته مرتبه q را با بکارگیری متوالی روش (۱۶.۳) در بازه $I_n = (t_{n-1}, t_n)$ از افزاز τ_k بدست می‌آوریم. بنابراین جواب U از روش گالرکین ناپیوسته مرتبه q را در فضای $W_k^{(q)}$ که فضایی از چندجمله‌ای‌های ناپیوسته تکه‌ای از درجه q است، روی τ_k حساب می‌کنیم. برای توابع ناپیوسته تکه‌ای در $W_k^{(q)}$ در نقطه t_n نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$v_n^+ = \lim_{s \rightarrow \circ^+} v(t_n + s), \quad v_n^- = \lim_{s \rightarrow \circ^+} v(t_n - s), \quad [v_n] = v_n^+ - v_n^-.$$

یعنی v_n^+ ، حد بالا و v_n^- ، حد پایین و $[v_n]$ پرش در $v(t)$ در زمان t_n است. روش گالرکین ناپیوسته مرتبه q را به صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم: برای همه توابع

$v \in P^q(t_{n-1}, t_n)$ و برای $n = 1, \dots, N$ $U \in P^q(t_{n-1}, t_n)$ را طوری بیابید که،

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\dot{U} + aU)v dt + U_{n-1}^+ v_{n-1}^+ = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f v dt + U_{n-1}^- v_{n-1}^+. \quad (17.3)$$

با در نظر گرفتن $q = \circ$ و $v = 1$ داریم،

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} aU dt + U_{n-1}^+ = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f dt + U_{n-1}^-. \quad (18.3)$$

چون $v \in W_k^{(\circ)}$ در هر زیربازه ثابت است، طبیعی است که مقدار v ‌ها را در بازه‌ی I_n با v_n نشان دهیم به طوری که $v_n = v_n^- = v_{n-1}^+$. با استفاده از این نمادگذاری روش گالرکین ناپیوسته مرتبه صفر در (۱۸.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} aU_n dt + U_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f dt + U_{n-1}, \quad (19.3)$$

که $U_{\circ} = u_{\circ}$ می‌باشد.

به طور معادل می‌توانیم (۱۷.۳) را برای حالت کلی به فرم زیر بنویسیم: $U \in W_k^{(q)}$ را طوری بیابید که برای همه توابع $v \in W_k^{(q)}$ داشته باشیم،

$$\sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\dot{U} + aU)v dt + \sum_{n=1}^N [U_{n-1}]v_{n-1}^+ = \int_{\circ}^{t_N} f v dt, \quad (20.3)$$

که $U_{\circ}^- = u_{\circ}$ و $[U_{\circ}] = U_{\circ}^+ - U_{\circ}^-$ است.

فصل ۴

روش گالرکین ناپیوسته مرتبه بالا برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتو

۱.۴ مقدمه

در این فصل ابتدا در بخش اول معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو و جواب آن را بررسی خواهیم کرد و در بخش دوم قضیه وانگ زاکای را ارائه می‌دهیم. در بخش سوم روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را برای حل معادله (۱.۴) ارائه می‌دهیم و پایداری و همگرایی آن را بررسی می‌کنیم.

۲.۴ شرح مسأله

فرض کنید (Ω, \mathcal{F}, P) فضای احتمال کامل باشد که مجموعه دلخواه Ω فضای نمونه، P اندازه احتمال و سیگما میدان \mathcal{F} زیرمجموعه‌ای از Ω است که پیشامد نام دارد و همچنین (Ω, \mathcal{F}, P) دارای فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ می‌باشد که در شرایط معمولی (پیوستگی راست دارد و خانواده‌ای صعودی از زیر σ -میدان‌های \mathcal{F} است که \mathcal{F}_0 شامل همه‌ی مجموعه‌های پوچ توان در \mathcal{F} می‌باشد) صدق کند. فرض کنید $W = \{W(t): 0 \leq t \leq T\}$ یک حرکت براونی روی این فضای احتمال باشد.

هدف از این پایان نامه ارائه‌ی روش گالرکین ناپیوسته تصادفی^۱ برای یافتن جواب دقیق مسأله مقدار اولیه یک بعدی^۲

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t), \quad t \in [0, T], X(0) = X_0, \quad (1.4)$$

است که از نوع معادله دیفرانسیل معمولی تصادفی ایتو است و به وسیله‌ی حرکت براونی بدست می‌آید که در آن شرط اولیه X_0 متغیر تصادفی حقیقی و $X = \{X(t): t \in [0, T]\}$ فرآیند تصادفی (فرآیند ایتو) می‌باشد همچنین $a: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ضریب رانش و $b: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ضریب انتشار و $W(t)$ فرآیند وینر استاندارد یک بعدی حقیقی مقدار (یا حرکت براونی) را نشان می‌دهد و $\Delta W = W(t+h) - W(t)$ یک متغیر تصادفی گاوسی^۳ $N(0, h)$ است که در آن h طول گام ثابت در نظر گرفته می‌شود. می‌توان گفت مشتق $W(t)$ فرآیند نویز سفید گاوسی است (به طوری که $W(t)$ مشتق پذیر نیست). اگر $b(t, x)$ به x وابسته نباشد، نویز را نویز جمعی نامند در غیر این صورت نویز را ضربی گویند.

در واقع معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) تنها یک نماد برای نمایش معادله انتگرال تصادفی ایتو

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s), \quad t \in [0, T] \quad (2.4)$$

است که انتگرال اول، انتگرال مسیر ریمان^۴ قطعی است و انتگرال دوم، انتگرال تصادفی ایتو نسبت به فرآیند وینر $W(t)$ است. انتگرال دوم را نمی‌توان روی مسیر به عنوان انتگرال ریمان-اشتیلیس^۵ قطعی تعریف کرد زیرا مسیر نمونه‌ای از فرآیند وینر اگرچه پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست و تقریباً همه جا با تغییر کراندار نیست.

فرض کنید مقدار اولیه X_0 متغیر تصادفی \mathcal{F}_0 -اندازه پذیر در \mathbb{R} باشد که مستقل از فرآیند وینر $W(t)$ است به طوری که $t \in [0, T]$ می‌باشد و $E[|X_0|^2] < \infty$ ، که امید ریاضی را نشان می‌دهد. منظور از جواب معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) فرآیند \mathcal{F}_t -سازگار پیوسته $X(t)$ است که $t \in [0, T]$ می‌باشد و در (۱.۴) با احتمال ۱ صدق می‌کند. در این پایان نامه فرض می‌شود که توابع رانش و انتشار دارای مشتق مرتبه بالا هستند که وجود و یکتایی یک جواب کلی و دقیق را برای (۱.۴) تضمین می‌کنند. به ویژه کافی است که توابع پیوسته a و b در شرایط کلی لپ‌شیتز^۶ و شرایط رشد خطی^۷ صدق کنند یعنی:

۱. ثابت مثبت L وجود داشته باشد به طوری که،

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

^۱ Stochastic discontinuous Galerkin

^۲ One dimensional initial-value problem

^۳ Gaussian random variable

^۴ Riemann integral

^۵ Riemann-Stieltjes

^۶ Lipschitz

^۷ Linear growth

۲. برای هر $t \geq 0$ و $x \in \mathbb{R}$ ، ثابت $K > 0$ وجود دارد به طوری که رشد خطی زیر کراندار است،

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq K(1 + |x|). \quad (۴.۴)$$

طبق فرضیات بیان شده، (۱.۴) یک جواب دقیق و یکتا دارد. برای اینکه روش گالرکین ناپیوسته تصادفی مرتبه بالا را برای جواب (۱.۴) بررسی کنیم، در بخش بعد با استفاده از قضیه تقریب وانگ زاکای تقریبی از معادله دیفرانسیل معمولی قطعی با یک ضریب تصادفی روی هر عنصر ایجاد می‌کنیم. تقریب معادله دیفرانسیل معمولی به جواب معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) همگرا نیست اما به جواب متناظر معادله دیفرانسیل تصادفی استراتنویچ همگرا است. به این ترتیب تغییری به جمله رانش اعمال می‌کنیم تا یک معادله دیفرانسیل معمولی قطعی بدست آید که به جواب معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) همگرا باشد.

۳.۴ قضیه تقریب وانگ زاکای

در سال ۱۹۶۵ وانگ و زاکای رابطه‌ای ساده بین معادلات دیفرانسیل تصادفی و معادلات دیفرانسیل معمولی قطعی را پیدا کردند [۲۳، ۲۴]. در این بخش قضیه تقریب وانگ زاکای را برای معادلات دیفرانسیل تصادفی حاصل از فرآیند وینر بیان می‌کنیم تا بتوانیم روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را گسترش دهیم. به طور کلی تحقیقات وانگ زاکای نشان می‌دهد که جواب معادله دیفرانسیل معمولی که از معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) با جایگذاری $W(t)$ با $\hat{W}(t)$ بدست می‌آید به میانگین جواب معادله دیفرانسیل تصادفی دیگری همگرا می‌شود که در آن $\hat{W}(t)$ یک تقریب تکه‌ای خطی پیوسته برای $W(t)$ است و هرگاه ماکزیمم اندازه یک بازه از افزایش به صفر میل کند در این صورت $\hat{W}(t)$ به $W(t)$ همگرا می‌شود.

فرض کنید $X(t)$ جواب یکتای مسأله مقدار اولیه تصادفی (۱.۴) باشد که $W(t)$ فرآیند حرکت براونی و توابع a و b در شرایط معمولی تضمین شده‌ی وجود و یکتایی جواب $X(t)$ صدق کنند [۲۳، ۲۴]. فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ یک افزایش از بازه $[0, T]$ باشد. طول هر بازه $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ را که $n = 0, 1, \dots, N-1$ است، با $h_n = t_{n+1} - t_n$ نشان می‌دهیم و $h = \max_{n=0, \dots, N-1} (t_{n+1} - t_n)$ را طول بزرگترین بازه در نظر می‌گیریم. فرآیند وینر $W(t)$ را در نقاط t_n و t_{n+1} به وسیله چندجمله‌ای خطی زیر درونیابی می‌کنیم،

$$W_n(t) = W(t_n) + \frac{W(t_{n+1}) - W(t_n)}{t_{n+1} - t_n}(t - t_n), \quad t \in I_n. \quad (۵.۴)$$

بنابراین فرآیند وینر $W(t)$ را به وسیله فرآیند تصادفی تکه‌ای خطی زیر تقریب می‌زنیم،

$$\hat{W}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n(t) W_n(t), \quad t \in [0, T] \quad (۶.۴)$$

که $\chi_n(t)$ تابع مشخصه است.

فرآیند وینر $W(t)$ را با $\hat{W}(t)$ که با تغییر کران پیوسته و مشتق تکه‌ای پیوسته روی $[0, T]$ دارد جایگزین می‌کنیم. فرض کنید $\hat{X}(t)$ یک جواب هموار از مسأله مقدار اولیه،

$$d\hat{X} = a(t, \hat{X}(t))dt + b(t, \hat{X}(t))d\hat{W}(t), \quad t \in [0, T], \quad \hat{X}(0) = X_0. \quad (7.4)$$

باشد. با استفاده از $dW_n(t) = \frac{\Delta W_n}{h_n}$ که $h_n = t_{n+1} - t_n$ و $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$ است، معادله (7.4) به صورت معادله دیفرانسیل معمولی قطعی (با ضرایب تصادفی) زیر بدست می‌آید،

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = a(t, \hat{X}(t)) + b(t, \hat{X}(t)) \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n(t) \frac{\Delta W_n}{h_n}, \quad t \in [0, T], \quad \hat{X}(0) = X_0. \quad (8.4)$$

وانگ و زاکای نشان دادند که دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $\hat{X}(t)$ به جواب $X(t)$ از معادله دیفرانسیل تصادفی (1.4) همگرا نیست اما به میانگین جواب معادله دیفرانسیل تصادفی استراتنویچ،

$$dY(t) = a(t, Y(t))dt + b(t, Y(t)) \circ dW(t), \quad t \in [0, T], \quad Y(0) = X_0, \quad (9.4)$$

همگرا است. یا به طور معادل، برای معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو اصلاح شده داریم،

$$dY(t) = \left(a(t, Y(t)) + \frac{1}{2} b(t, Y(t)) b_x(t, Y(t)) \right) dt + b(t, Y(t)) dW(t), \quad (10.4)$$

به طوری که $t \in [0, T]$ و $Y(0) = X_0$. جمله دوم از سمت راست (10.4) جمله اصلاح شده وانگ زاکای است. علت تفاوت بین فرآیندهای $X(t)$ و $Y(t)$ استفاده از رابطه تقریبی $dW(t) \approx \sqrt{h}$ می‌باشد [23]. وانگ و زاکای [23] نشان دادند که اگر $a(t, x)$, $b(t, x)$, $b_x(t, x)$ و $b(t, x)b_x(t, x)$ در $D = [0, T] \times \mathbb{R}$ توابع پیوسته باشند و در x روی D در شرایط لپشیتز صدق کنند پس (10.4) جواب یکتا و پیوسته دارد. در حال حاضر نسخه یک بعدی از قضیه وانگ زاکای را ارائه می‌دهیم.

قضیه 1.3.4. [24] فرض کنید $X(t)$, $\hat{X}(t)$ و $Y(t)$ به ترتیب در معادلات (1.4)، (7.4) و (10.4) صدق کنند که X_0 متغیر تصادفی مستقل از $W(t)$ که $t \in [0, T]$ است، باشد. اگر

$$1. \quad a(t, x), b(t, x) \text{ و } b_x(t, x) \text{ توابع پیوسته روی } D = [0, T] \times \mathbb{R} \text{ باشند،}$$

$$2. \quad a(t, x), b(t, x) \text{ و } b(t, x)b_x(t, x) \text{ در شرط لپشیتز (3.4) با یک ثابت } L > 0 \text{ مستقل از } X, X_0 \text{ و } X \text{ صدق کنند،}$$

$$3. \quad b(t, x) \geq \beta > 0 \text{ (یا } -b(t, x) \geq \beta > 0 \text{) و } |b_t(t, x)| \leq kb^2(t, x)$$

سپس دنباله جواب $\hat{X}(t)$ وقتی $N \rightarrow \infty$ باشد تقریباً همه جا به $Y(t)$ همگرا است. یعنی برای

$$\sup_{t \in [0, T]} |Y(t) - \hat{X}(t)| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$

تعمیم زیادی از قضیه فوق برای حالت چند متغیره مطرح شده است که چند مورد آن در [۲۸-۳۱] ذکر شده است. به ویژه ما از نتیجه [۲۹] پیروی می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۴. [۲۹] فرض کنید $X(t), \hat{X}(t)$ و $Y(t)$ به ترتیب در معادلات (۱.۴)، (۷.۴) و (۱۰.۴) صدق کنند و X_0 متغیر تصادفی مستقل از $W(t)$ باشد به طوری که $t \in [0, T]$ و همچنین فرض کنید $a(t, x)$ و $b(t, x)$ توابع هموار کراندار روی $[0, T] \times \mathbb{R}$ باشند. به عبارت دقیق‌تر $a(t, x) \in C_b^1([0, T] \times \mathbb{R})$ و $b(t, x) \in C_b^1([0, T] \times \mathbb{R})$ شرط‌های کافی هستند که $C_b^m([0, T] \times \mathbb{R})$ مجموعه‌ای از توابع حقیقی m -مرتبه به طور پیوسته مشتق پذیر که تا مشتق مرتبه m کراندار می‌باشند. پس برای هر $T > 0$ داریم:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\sup_{t \in [0, T]} |Y(t) - \hat{X}(t)|^2 \right] = 0.$$

۴.۴ روش گالرکین ناپیوسته تصادفی

در این بخش نشان می‌دهیم که اگر جمله اصلاح شده مناسب را از معادله دیفرانسیل معمولی (۸.۴) کم کنیم، پس ممکن است که جواب حاصل همگرا به جواب معادله اصلی (۱.۴) باشد. به‌طور دقیق‌تر برای رسیدن به همگرایی جوابی از مسأله مقدار اولیه تصادفی (۱.۴)، تغییری در جمله رانش اعمال می‌کنیم و تقریب وانگ زاکای اصلاح شده زیر را با تابع رانش تغییر یافته در نظر می‌گیریم،

$$d\hat{X}(t) = \left(a(t, \hat{X}(t)) - \frac{1}{\gamma} b(t, \hat{X}(t)) b_x(t, \hat{X}(t)) \right) dt + b(t, \hat{X}(t)) d\hat{W}(t), \quad (11.4)$$

که در آن $\hat{X}(0) = X_0$ است. معادله (۱۱.۴) معادل با،

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = \hat{a}(t, \hat{X}(t)), \quad t \in [0, T], \hat{X}(0) = X_0, \quad (12.4)$$

است که در آن

$$\begin{aligned} \hat{a}(t, \hat{X}(t)) &= a(t, \hat{X}(t)) - \frac{1}{\gamma} b(t, \hat{X}(t)) b_x(t, \hat{X}(t)) \\ &+ b(t, \hat{X}(t)) \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n(t) \frac{\Delta W_n}{h_n}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

اگر $a(t, x)$ ، $b(t, x)$ و $b(t, x) b_x(t, x)$ روی $[0, T] \times \mathbb{R}$ پیوسته باشند و در شرط لیب‌شیتز صدق کنند پس طبق قضیه وانگ زاکای ۲.۳.۴، معادله (۱۱.۴) جواب یکتای $\hat{X}(t)$ روی $[0, T]$ دارد و تقریب مسأله مقدار اولیه (۱۱.۴) به مسأله مقدار اولیه اصلی (۱.۴) همگرا است.

قضیه ۱.۴.۴. [۲۹] فرض کنید مفروضات قضیه ۲.۳.۴ برقرار باشد و همچنین $X(t)$ جواب (۱.۴) و $\hat{X}(t)$ جوابی از (۱۱.۴) باشد لذا برای هر $T > 0$ داریم:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\sup_{t \in [0, T]} |X(t) - \hat{X}(t)|^2 \right] = 0. \quad (14.4)$$

ملاحظه ۱.۴.۴. توجه کنید که با حذف وابستگی فرآیند وینر به مشتق، یک معادله دیفرانسیل معمولی حاصل می‌شود که می‌توانیم روش استاندارد گالرکین ناپیوسته را برای معادلات دیفرانسیل معمولی قطعی بکار ببریم. علت عمده‌ی استفاده از نوع هموار معادله دیفرانسیل تصادفی غیرخطی (۱۱.۴) آن است که جواب $\hat{X}(t)$ هموارتر از جواب $X(t)$ از معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) است. چون حرکت براونی استاندارد $W(t)$ هیچ جا با احتمال ۱ مشتق پذیر نیست و $\hat{W}(t)$ قریب به یقین مشتق تک‌های پیوسته دارد. در نتیجه روش عددی استاندارد را می‌توان برای محاسبه جواب تقریبی به کار برد.

۱.۴.۴ روش گالرکین ناپیوسته تصادفی

از آنجایی که جواب صریح و روشن برای معادله دیفرانسیل معمولی قطعی غیرخطی (۱۲.۴) با ضریب تصادفی به ندرت در دسترس است، روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را برای جواب تقریبی ارائه می‌دهیم. لذا از روش گالرکین ناپیوسته استاندارد استفاده می‌کنیم. به این منظور بازه $[0, T]$ را به N زیر بازه $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ که $n = 0, 1, \dots, N-1$ و $0 = t_0 < \dots < t_N = T$ است، افراز می‌کنیم و مش یکنواخت زیر را در نظر می‌گیریم،

$$h \leq kh_{\min}, \quad (15.4)$$

که $k \geq 1$ یک ثابت (مستقل از h) برای افراز مش است. در سراسر این پایان نامه $v(t_n^+)$ و $v(t_n^-)$ را به ترتیب حد چپ و راست تابع v در نقطه ناپیوسته t_n تعریف می‌کنیم یعنی،

$$v(t_n^\pm) = \lim_{s \rightarrow 0^\pm} v(t_n + s).$$

فرض کنید (۱۲.۴) را در یک تابع تست هموار v ضرب کنیم و روی بازه دلخواه I_n انتگرال بگیریم حال با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء فرمول ضعیف

$$\int_{I_n} \hat{X} v' dt + \int_{I_n} \hat{a}(t, \hat{X}) v dt - \hat{X}(t_{n+1})v(t_{n+1}) + \hat{X}(t_n)v(t_n) = 0, \quad (16.4)$$

را بدست می‌آوریم. فضای چندجمله‌ای تک‌های V_h^p را به عنوان فضای چندجمله‌ای از درجه حداکثر p در هر زیربازه I_n تعریف می‌کنیم یعنی،

$$V_h^p = \{v: v|_{I_n} \in P^p(I_n), n = 0, \dots, N-1\},$$

که در آن $P^p(I_n)$ فضای چندجمله‌ای حداکثر از درجه p روی I_n است. توجه کنید که چندجمله‌ای‌ها در فضای V_h^p روی مرز می‌توانند ناپیوسته باشند. پس جواب دقیق $\hat{X}(t)$ را به وسیله‌ی چندجمله‌ای‌های تک‌های $\hat{X}_h(t) \in V_h^p$ تقریب می‌زنیم. فرمول گسسته شامل یافتن $\hat{X}_h \in V_h^p$ است به طوری که برای هر $v \in V_h^p$ و $n = 0, 1, \dots, N-1$ داشته باشیم،

$$\int_{I_n} v' \hat{X}_h dt + \int_{I_n} \hat{a}(t, \hat{X}_h) v dt - \hat{X}_h(t_{n+1})v(t_{n+1}^-) + \hat{X}_h(t_n)v(t_n^+) = 0, \quad (17.4)$$

که در آن

$$\hat{a}(t, \hat{X}_h(t)) = a(t, \hat{X}_h(t)) - \frac{1}{\tau} b(t, \hat{X}_h(t)) b_x(t, \hat{X}_h(t)) + b(t, \hat{X}_h(t)) \frac{\Delta W_n}{h_n}, \quad (18.4)$$

و $t \in I_n$ است و شار عددی $\tilde{X}_h(t_n)$ تقریب گسسته $\hat{X}(t_n)$ می‌باشد. به منظور کامل کردن روش گالرکین ناپیوسته باید \tilde{X}_h را روی مرز I_n انتخاب کنیم. در این پایان نامه از شار عددی کلاسیک

$$\tilde{X}_h(t_0) = X_0, \quad \tilde{X}_h(t_n) = \hat{X}_h(t_n^-), \quad n = 1, \dots, N \quad (19.4)$$

استفاده شده است. با انتگرال گیری جزء به جزء داریم،

$$\left(\hat{X}_h(t_n^+) - \hat{X}_h(t_n^-) \right) v(t_n^+) + \int_{I_n} \left(\hat{X}_h' - \hat{a}(t, \hat{X}_h) \right) v dt = 0, \quad (20.4)$$

که در آن $\hat{X}_h(t_0^-) = X_0$. لذا (۲۰.۴) را به عنوان روش گالرکین ناپیوسته تصادفی در نظر می‌گیریم.

۲.۴.۴ پیاده سازی

توجه داشته باشید که جواب تقریبی $\hat{X}_h(t)$ را می‌توان به طور موثر از روش عنصر به عنصر محاسبه کرد. به طور مشخص می‌توانیم جواب $\hat{X}_h(t)$ از گالرکین ناپیوسته تصادفی را به ترتیب زیر بدست بیاوریم: ابتدا می‌توانیم $\hat{X}_h(t)$ را در I_0 با استفاده از (۱۷.۴)، (۱۸.۴) و (۱۹.۴) با $n = 0$ و چون $\hat{X}_h(t_0^-) = X_0$ داده شده است، بدست بیاوریم. حال چون $\hat{X}_h(t)$ را در I_0 بدست آوردیم لذا $\hat{X}_h(t)$ را در I_1 بدست می‌آوریم. این فرآیند را می‌توان برای به دست آوردن $\hat{X}_h(t)$ در I_2, \dots, I_{N-1} تکرار کرد.

عملاً می‌توانیم $\hat{X}_h(t)$ را به صورت موضعی برای هر I_n به صورت زیر بدست بیاوریم:

۱. $\hat{X}_h(t)$ را به عنوان یک ترکیب خطی از پایه متعامد $L_{k,n}(t)$ به طوری که $k = 0, \dots, p$ در نظر می‌گیریم که $L_{k,n}$ نشان دهنده چند جمله‌ای لژاندر^۸ درجه k ام روی I_n است یعنی،

$$\hat{X}_h(t) = \sum_{k=0}^p C_{k,n} L_{k,n}(t), \quad t \in I_n, n = 0, \dots, N-1.$$

۲. تابع تست $v = L_{j,n}(t)$ که $j = 0, \dots, p$ است را برای بدست آوردن یک سیستم کوچک از معادلات جبری غیرخطی روی هر I_n انتخاب می‌کنیم. سیستم حاصل را می‌توان برای بدست آوردن ضرایب مجهول $C_{0,n}, \dots, C_{p,n}$ با استفاده از به طور مثال روش کلاسیک نیوتن رافسون^۹ حل کرد. توجه داشته باشید که $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$ را می‌توان

^۸Legendre polynomial

^۹Newton-Raphson

با استفاده از $\sqrt{h_n}Z$ که $Z \sim N(0, 1)$ است، شبیه سازی کرد. همین که ما جواب گالرکین ناپیوسته را روی هر عنصر I_n که $n = 0, \dots, N-1$ است را محاسبه کنیم ما جواب تقریبی (توابع چند جمله‌ای تکه‌ای ناپیوسته از درجه کمتر یا مساوی p) گالرکین ناپیوسته تصادفی (۱.۴) را بدست می‌آوریم.

۳.۴.۴ روش گالرکین ناپیوسته تصادفی یک روش رانگ کوتاه است

روش گالرکین ناپیوسته برای معادلات دیفرانسیل معمولی قطعی معادل با روش رانگ کوتاه ضمنی است [۳۴]. به‌طور مشابه روش گالرکین ناپیوسته تصادفی (۲۰.۴) معادل با روش رانگ کوتاه تصادفی ضمنی است. اثبات حالت تصادفی مشابه حالت قطعی است.

برای این منظور ابتدا فرض می‌کنیم $L_p(\xi)$ چندجمله‌ای لژاندر از درجه p روی $[0, 1]$ باشد. نقاط انتگرال‌گیری $\{\xi_i\}_{i=0}^p$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،
 $\xi_0 = 0$ و ξ_1, \dots, ξ_p ریشه‌های چندجمله‌ای درجه p رادو $10 \frac{L_{p+1}(\xi) + L_p(\xi)}{\xi}$ در نظر می‌گیریم
 به‌طوری که $\xi \in [0, 1]$ است. وزن w_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$w_0 = \frac{1}{(p+1)^2}, \quad w_i = \frac{1 - \xi_i}{2(p+1)^2 (L_p(\xi_i))^2} = \frac{2}{(1 - \xi_i)(L_p(\xi_i))^2}, \quad i = 1, \dots, p.$$

قاعده انتگرال‌گیری گاوس رادو ^{۱۱} [۳۵]،

$$\int_0^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=0}^p w_i f(\xi_i) = w_0 f(0) + \sum_{i=1}^p w_i f(\xi_i),$$

برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه $2p$ دقیق است زیرا جمله خطا به‌صورت زیر است،

$$E = \frac{(p+1)(p!)^4}{((2p+1)!)^3} f^{(2p+1)}(\bar{\xi}), \quad \bar{\xi} \in (0, 1).$$

چون انتگرال در (۲۰.۴) را در عمل نمی‌توان به‌طور تحلیلی بدست آورد، لذا آن را با قانون انتگرال‌گیری گاوس رادو

$$\int_{I_n} (\hat{X}_h' - \hat{a}(t, \hat{X}_h)) v dt = h_n \sum_{i=0}^p w_i (\hat{X}_h'(t_{n,i}) - \hat{a}(t_{n,i}, \hat{X}_h(t_{n,i}))) v(t_{n,i}) + \mathcal{O}(h^{2p+1}),$$

با $p+1$ نقطه $t_{n,i} = h_n \xi_i + t_n$ به‌طوری که $i = 0, \dots, p$ تقریب می‌زنیم. با استفاده از قانون انتگرال‌گیری فوق، معادله (۲۰.۴) را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم،

$$\begin{aligned} & (\hat{X}_h(t_{n,0}^+) - \hat{X}_h(t_{n,0}^-)) v(t_{n,0}^+) \\ & + h_n \sum_{i=0}^p w_i (\hat{X}_h'(t_{n,i}) - \hat{a}(t_{n,i}, \hat{X}_h(t_{n,i}))) v(t_{n,i}) = 0, \end{aligned} \quad (21.4)$$

^{۱۰}Radau

^{۱۱}Gauss–Radau

که در آن $\hat{X}_h(t_0^-) = X_0$ و $t_n = t_{n,0}$ است. حال برای سادگی تعریف می‌کنیم،

$$\hat{X}_n = \hat{X}_h(t_n^-), \quad \hat{X}_{n,0} = \hat{X}_h(t_{n,0}^+), \quad \hat{X}_{n,i} = \hat{X}_h(t_{n,i}), \quad i = 0, \dots, p. \quad (22.4)$$

توجه داشته باشید که چندجمله‌ای $\hat{X}_h(t)$ که $t \in I_n$ است به وسیله $\hat{X}_h(t) = \sum_{i=0}^p \hat{X}_{n,i} l_i(t)$ بدست می‌آید که در آن تابع $l_i(t)$ ضریب i ام چندجمله‌ای لاگرانژ^{۱۲} است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$l_i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^p \frac{t - t_{n,j}}{t_{n,i} - t_{n,j}}.$$

حال نشان می‌دهیم که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی (۲۱.۴) معادل با روش رانگ کوتا ضمنی است.

لم ۱.۴.۴. [۳۴] روش گالرکین ناپیوسته تصادفی (۲۱.۴) معادل با روش رانگ کوتا تصادفی ضمنی زیر است.

$$\hat{X}_{n,i} = \hat{X}_n + h_n \sum_{j=0}^p a_{i,j} \hat{a}(t_{n,j}, \hat{X}_{n,j}), \quad i = 0, \dots, p \quad (23.4)$$

$$\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n + h_n \sum_{j=0}^p w_j \hat{a}(t_{n,j}, \hat{X}_{n,j}), \quad (24.4)$$

که در آن

$$a_{i,0} = w_0, \quad a_{i,j} = \int_0^{\xi_i} \hat{l}_j(\xi) d\xi - w_0 \hat{l}_j(\xi_0), \quad i = 0, \dots, p, j = 1, \dots, p \quad (25.4)$$

با

$$\hat{l}_i(\xi) = \prod_{j=1, j \neq i}^p \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}.$$

برهان. فرض کنید پایه $\{v_i\}_{0 \leq i \leq p}$ را از فضای P^k را به صورت

$$v_i(t_{n,j}) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq p$$

تعریف کنیم. با جایگذاری v با v_i در (۲۱.۴) داریم،

$$\begin{cases} \hat{X}_h(t_n^+) - \hat{X}_h(t_n^-) + h_n \omega_0 (\hat{X}'_h(t_{n,0}) - \hat{a}(t_{n,0}, \hat{X}_h(t_{n,0}))) = 0, \\ \hat{X}'_h(t_{n,i}) - \hat{a}(t_{n,i}, \hat{X}_h(t_{n,i})) = 0, \quad 1 \leq i \leq p \end{cases} \quad (26.4)$$

در زیربازه‌ی $[t_n, t_{n+1}]$ برای $\hat{X}'_h \in P^{k-1}$ داریم،

$$\hat{X}'_h(t) = \sum_{j=0}^p \hat{l}_j\left(\frac{t - t_n}{h_n}\right) \hat{X}'_h(t_{n,j}).$$

^{۱۲}Lagrange

طبق (۲۶.۴) داریم،

$$\hat{X}'_h(t) = \sum_{j=0}^p \hat{l}_j\left(\frac{t-t_n}{h_n}\right) \hat{a}(t_{n,j}, \hat{X}_h(t_{n,j})). \quad (27.4)$$

با در نظر گرفتن $t = t_n = t_{n,0}$ در (۲۷.۴) و جایگذاری آن در معادله‌ی اول (۲۶.۴) و با استفاده از (۲۲.۴) داریم،

$$\hat{X}_{n,0} = \hat{X}_n + h_n \omega_0 \left[\hat{a}(t_{n,0}, \hat{X}_{n,0}) - \sum_{j=0}^p \hat{l}_j(\xi_0) \hat{a}(t_{n,j}, \hat{X}_{n,j}) \right]. \quad (28.4)$$

از سوی دیگر برای $0 \leq i \leq p$ داریم،

$$\hat{X}_h(t_{n,i}) = \hat{X}_h(t_{n,0}) + \int_{t_{n,0}}^{t_{n,i}} \hat{X}'_h(t) dt.$$

حال با استفاده از (۲۲.۴)، (۲۷.۴) و (۲۸.۴) داریم،

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n,i} = \hat{X}_n + h_n & \left[\omega_0 \hat{a}(t_{n,0}, \hat{X}_{n,0}) \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^p \left(\int_0^{\xi_i} \hat{l}_j(t) dt - \omega_0 \hat{l}_j(\xi_0) \right) \hat{a}(t_{n,j}, \hat{X}_{n,j}) \right]. \end{aligned} \quad (29.4)$$

به‌طور مشابه داریم،

$$\hat{X}_h(t_{n+1}^-) = \hat{X}_h(t_{n,0}) + \int_{t_n}^{t_{n+1}^-} \hat{X}'(t) dt,$$

و سپس

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n + h_n & \left[\omega_0 \hat{a}(t_{n,0}, \hat{X}_{n,0}) \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^p \left(\int_0^1 \hat{l}_j(t) dt - \omega_0 \hat{l}_j(\xi_0) \right) \hat{a}(t_{n,j}, \hat{X}_{n,j}) \right]. \end{aligned}$$

با توجه به

$$\int_0^1 \hat{l}_j(t) dt = \sum_{i=0}^p \omega_i \hat{l}_j(\xi_i) = \omega_0 \hat{l}_j(\xi_0) + \omega_j,$$

داریم:

$$\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n + h_n \sum_{j=0}^p \omega_j \hat{a}(t_{n,j}, \hat{X}_{n,j}). \quad (30.4)$$

□

در ساختن یک الگوریتم جدید همیشه بررسی ویژگی‌های پایداری، خطای گسسته سازی و تخمین سرعت همگرایی مهم است. این مفاهیم در زیر بحث می‌شوند. به این منظور ابتدا با ویژگی پایداری خطی روش گالرکین ناپیوسته تصادفی آغاز می‌کنیم.

۴.۴.۴ تحلیل پایداری خطی روش گالرکین ناپیوسته تصادفی

آشکار است اگر به دنبال شبیه سازی جواب معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) برای مدت زمان طولانی باشیم باید از روش پایداری استفاده کنیم. در این زیربخش در مورد خواص پایداری روش گالرکین ناپیوسته تصادفی برای حالت خطی را بررسی می‌کنیم. در حالت قطعی تجزیه و تحلیل پایداری روش عددی برای معادلات دیفرانسیل معمولی توسط جرمنند دالکوست^{۱۳} در سال ۱۹۶۳ معرفی شد [۳۶]. او مفهوم A -پایدار را بر اساس پایداری مجانبی از جواب صفر روش، وقتی که معادله تست خطی با مقادیر مختلط

$$X' = \lambda X, \quad t \in [0, T], \quad X(0) = X_0. \quad (31.4)$$

بکار برده شد را معرفی کرد، که λ عدد مختلط است. معادله (۳۱.۴) به صورت

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda X(t) \implies \frac{dX(t)}{X(t)} = \lambda dt \implies X(t) = X_0 e^{\lambda t},$$

حل می‌شود که $X(t) = X_0 e^{\lambda t}$ برای $Re(\lambda) < 0$ به‌طور مجانبی پایدار است. با استفاده از روش رانگ کوتا بر پایه گسسته سازی یکنواخت زمان برای (۳۱.۴) داریم،

$$X_{n+1} = R(z)X_n, \quad n = 0, \dots, N$$

که $X_n \approx X(t_n)$ و $z = \lambda h$ با $h = T/N$ و $R(z)$ تابع مختلط مقدار است که فاکتور رشد یا تابع پایدار روش نامیده می‌شود. روش رانگ کوتا برای معادلات دیفرانسیل معمولی، A -پایدار است اگر $|R(z)| < 1$ باشد [۳۸]. مجموعه $S_h = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| < 1\}$ ناحیه پایداری مطلق روش نامیده می‌شود. حال به‌نظر می‌رسد که ناپایداری برای $|R(z)| \geq 1$ با $z \in \mathbb{C}$ است. ساده‌ترین معادله تست خطی که تعمیمی از (۳۱.۴) برای حالت تصادفی می‌باشد معادله دیفرانسیل تصادفی با نویز جمعی [۳۸]

$$dX = \lambda X dt + \mu dW, \quad t \in [0, T], \quad X(0) = X_0. \quad (32.4)$$

است که $Re(\lambda) < 0$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ و $X_0 \neq 0$ مقدار اولیه فرآیند در لحظه $t = 0$ است. برای یافتن جوابی از معادله (۳۲.۴)، ابتدا طرفین معادله فوق را در $e^{-\lambda t}$ ضرب می‌کنیم که حاصل به‌صورت

$$d(e^{-\lambda t} X_t) = \mu e^{-\lambda t} dW_t,$$

است. چون طرف چپ معادله فوق دیفرانسیل کامل است لذا با انتگرال‌گیری از طرفین معادله فوق در بازه $[0, t]$ داریم،

$$e^{-\lambda t} X_t = X_0 + \mu \int_0^t e^{-\lambda s} dW_s,$$

^{۱۳}Germund Dahlquist

معادله آخر را در $e^{\lambda t}$ ضرب می‌کنیم لذا داریم:

$$X(t) = X_0 e^{\lambda t} + \mu e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} dW(s), \quad t \in [0, T].$$

فرآیند تصادفی $X(t)$ که در بالا تعریف شد معروف به فرآیند ارنستین النبک^{۱۴} است. با امید ریاضی گرفتن از جواب معادله (۳۲.۴) داریم،

$$E[X(t)] = E \left[X_0 e^{\lambda t} + \int_0^t \mu e^{\lambda(t-s)} dW(s) \right] = E[X_0 e^{\lambda t}] + E \left[\int_0^t \mu e^{\lambda(t-s)} dW(s) \right],$$

طبق خاصیت امید ریاضی چون $E \left[\int_0^t \mu e^{\lambda(t-s)} dW(s) \right] = 0$ است لذا داریم،

$$E[X(t)] = E[X_0] e^{\lambda t}.$$

حال اگر جواب معادله (۳۲.۴) را به توان ۲ برسانیم و از طرفین آن امید ریاضی بگیریم و از خاصیت امید ریاضی و از خاصیت ایزومتری ایتو استفاده کنیم داریم،

$$E[|X(t)|^2] = E[|X_0|^2] e^{2\operatorname{Re}(\lambda)t} - \frac{|\mu|^2}{2\operatorname{Re}(\lambda)} (1 - e^{2\operatorname{Re}(\lambda)t}).$$

بنابراین اگر $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ پس وقتی که $t \rightarrow \infty$ داریم:

$$E[X(t)] \rightarrow 0, \quad E[|X(t)|^2] \rightarrow -\frac{|\mu|^2}{2\operatorname{Re}(\lambda)}.$$

حال فرض می‌کنیم که $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. در این صورت طبیعی است که بررسی کنیم برای چه بردی از h جواب گالرکین ناپیوسته تصادفی در مفهوم مشابه پایدار است.

مشابه با حالت قطعی پایداری روش گالرکین ناپیوسته تصادفی (۲۰.۴) را با استفاده از معادله تست خطی (۳۲.۴) بررسی می‌کنیم. برای این معادله تست معادله زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\hat{a}(t, \hat{X}_h(t)) = \lambda \hat{X}_h(t) + \mu \frac{\Delta W_n}{h_n}, \quad t \in I_n.$$

بنابراین روش گالرکین ناپیوسته تصادفی (۲۰.۴) را برای (۳۲.۴) بکار می‌بریم لذا داریم،

$$\left(\hat{X}_h(t_n^+) - \hat{X}_h(t_n^-) \right) v(t_n^+) + \int_{I_n} \left(\hat{X}_h' - \lambda \hat{X}_h - \mu \frac{\Delta W_n}{h_n} \right) v dt = 0, \quad (33.4)$$

به طوری که $n = 0, 1, \dots, N-1$ و $\hat{X}_h(t_0^-) = X_0$. از آنجایی که $(\hat{X}_h' - \lambda \hat{X}_h - \mu \frac{\Delta W_n}{h_n})v$ چند جمله‌ای حداکثر از درجه $2p$ است لذا می‌توانیم انتگرال در (۳۳.۴) را با قانون انتگرال‌گیری گاوس رادو با $p+1$ گره $t_{n,i} = h_n \xi_i + t_n$ که $i = 0, \dots, p$ است برای بدست آوردن روش گالرکین ناپیوسته تصادفی معادل

$$\begin{aligned} & \left(\hat{X}_h(t_{n,0}^+) - \hat{X}_h(t_{n,0}^-) \right) v(t_{n,0}^+) \\ & + h_n \sum_{i=0}^p w_i \left(\hat{X}_h'(t_{n,i}) - \lambda \hat{X}_h(t_{n,i}) - \mu \frac{\Delta W_n}{h_n} \right) v(t_{n,i}) = 0, \end{aligned} \quad (34.4)$$

^{۱۴}Ornstein-Uhlenbecks

جایگزین کنیم. با استفاده از لم ۱.۴.۴ روش گالرکین ناپیوسته تصادفی (۳۴.۴) معادل با روش رانگ کوتا تصادفی ضمنی زیر است،

$$\hat{X}_{n,i} = \hat{X}_n + \lambda h_n \sum_{j=0}^p a_{i,j} \hat{X}_{n,j} + \mu \Delta W_n \sum_{j=0}^p a_{i,j}, \quad i = 0, \dots, p \quad (35.4)$$

$$\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n + \lambda h_n \sum_{j=0}^p w_j \hat{X}_{n,j} + \mu \Delta W_n \sum_{j=0}^p w_j, \quad (36.4)$$

که $a_{i,j}$ به طوری که $i, j = 0, \dots, p$ در (۲۵.۴) تعریف شده‌اند. روش (۳۶.۴) ضمنی است زیرا دارای ضریب ناصفر $a_{i,j}$ با $i \leq j$ است.

با استفاده از لم ۱.۴.۴ برای $X' = 1, X(0) = 0$ به طوری که $X(t) = t$ داریم، $\sum_{j=0}^p a_{i,j} = \xi_i$ و

$$\sum_{j=0}^p w_j = 1. \quad \text{در نتیجه (۳۵.۴) و (۳۶.۴) معادل با،}$$

$$\hat{X}_{n,i} = \hat{X}_n + \lambda h_n \sum_{j=0}^p a_{i,j} \hat{X}_{n,j} + \mu \xi_i \Delta W_n, \quad i = 0, \dots, p \quad (37.4)$$

$$\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n + \lambda h_n \sum_{j=0}^p w_j \hat{X}_{n,j} + \mu \Delta W_n, \quad (38.4)$$

هستند. اگر فرض کنیم $z_n = \lambda h_n$ پس می‌توانیم (۳۷.۴) و (۳۸.۴) را به فرم ماتریسی زیر بنویسیم،

$$(I - z_n A) \mathbf{u}_n = \hat{X}_n \mathbf{v} + \mu \Delta W_n \boldsymbol{\xi}, \quad \hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n + z_n \mathbf{w}^t \mathbf{u}_n + \mu \Delta W_n, \quad (39.4)$$

که I یک ماتریس همانی $(p+1) \times (p+1)$ و A ماتریس $(p+1) \times (p+1)$ با درایه‌های $a_{i,j}$ و $\mathbf{u}_n = [\hat{X}_{n,0}, \dots, \hat{X}_{n,p}]^t$ و $\mathbf{w} = [w_0, \dots, w_p]^t$ و $\boldsymbol{\xi} = [\xi_0, \dots, \xi_p]^t$ و $\mathbf{v} = [1, \dots, 1]^t$ با استفاده از معادله اول (۳۹.۴) داریم،

$$\mathbf{u}_n = \hat{X}_n (I - z_n A)^{-1} \mathbf{v} + \mu \Delta W_n (I - z_n A)^{-1} \boldsymbol{\xi}. \quad (40.4)$$

با جایگذاری (۴۰.۴) در معادله دوم (۳۹.۴) معادله تفاضلی

$$\hat{X}_{n+1} = R(z_n) \hat{X}_n + \mu S(z_n) \Delta W_n, \quad (41.4)$$

بدست می‌آید که $\hat{X}(0) = X_0$ و $R(z)$ و $S(z)$ به صورت زیر داده شده‌اند،

$$R(z) = 1 + z \mathbf{w}^t (I - zA)^{-1} \mathbf{v}, \quad S(z) = 1 + z \mathbf{w}^t (I - zA)^{-1} \boldsymbol{\xi}. \quad (42.4)$$

با امید ریاضی گرفتن از طرفین (۴۱.۴) داریم،

$$E[\hat{X}_{n+1}] = R(z_n) E[\hat{X}_n] + \mu S(z_n) E[\Delta W_n],$$

چون $E[\Delta W_n] = 0$ لذا داریم،

$$E[\hat{X}_{n+1}] = R(z_n)E[\hat{X}_n],$$

سپس طرفین (۴۱.۴) را به توان ۲ می‌رسانیم و با امیدریاضی گرفتن از طرفین آن داریم،

$$E[|\hat{X}_{n+1}|^2] = |R(z_n)|^2 E[|\hat{X}_n|^2] + |\mu|^2 h_n |S(z_n)|^2.$$

چون $\hat{X}_n = \hat{X}_h(t_n^-)$ و ΔW_n مستقل از متغیر تصادفی است، می‌توان گفت \hat{X}_n تابعی از $(\Delta W_{n-1}, \dots, \Delta W_0, X_0)$ است ولی نه در ΔW_n . فرض کنید افزای از بازه $[0, T]$ با طول گام $h = T/N$ را در نظر بگیریم پس با استفاده از فرمول (۴۱.۴) داریم،

$$\hat{X}_n = R^n(z)X_0 + \mu S(z) \sum_{i=0}^{n-1} R^{n-i-1}(z)\Delta W_i, \quad z = \lambda h. \quad (۴۳.۴)$$

محاسبه نشان می‌دهد که،

$$E[\hat{X}_n] = R^n(z)E[\hat{X}_0],$$

$$E[|\hat{X}_n|^2] = |R(z)|^{2n} E[|\hat{X}_0|^2] + |\mu|^2 h |S(z)|^2 \frac{|R(z)|^{2n} - 1}{|R(z)|^2 - 1},$$

واضح است که $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{X}_n]$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} E[|\hat{X}_n|^2]$ وجود دارند اگر و تنها اگر $|R(z)| < 1$. توجه داشته باشید که تحت شرایط $|R(z)| < 1$ داریم،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{X}_n] = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E[|\hat{X}_n|^2] = |\mu|^2 h \frac{|S(z)|^2}{1 - |R(z)|^2}. \quad (۴۴.۴)$$

در ادامه پایداری عددی را برای روش عددی (۳۵.۴) و (۳۶.۴) [۳۸] بکار می‌بریم.

تعریف ۱.۴.۴. روش رانگ کوتا (۳۵.۴) و A - پایدار است اگر برای هر z مختلط با $Re(z) < 0$ داشته باشیم $|R(z)| < 1$ که در (۴۲.۴) تعریف شده است.

در حال حاضر می‌توانیم قضیه زیر را اثبات کنیم.

قضیه ۲.۴.۴. [۳۴] روش گالرکین ناپیوسته تصادفی A - پایدار است.

برهان. برای اثبات A - پایداری نشان می‌دهیم که برای هر z مختلط با $Re(z) < 0$ ، $|R(z)| < 1$ است. اثبات دقیقاً از استدلال در [۳۴] پیروی می‌کند.

در مطالب قبلی بیان شد که فاکتور رشد $R(z)$ به جمله انتشار در معادله تست (۳۲.۴) بستگی ندارد. بنابراین $R(z)$ مشابه روش گالرکین ناپیوسته تصادفی (۲۰.۴) برای معادله تست خطی با مقادیر مختلط

$$X'(t) = \lambda X(t), \quad t \in [0, T], \quad X(0) = X_0. \quad (۴۵.۴)$$

بدست می آید. با استفاده از (۲۰.۴) برای (۴۵.۴) روش یک مرحله‌ای $\hat{X}_{n+1} = R(z)\hat{X}_n$ را نتیجه می‌دهد که در آن همانند (۴۱.۴) داریم، $R(z) = 1 + z\mathbf{w}^t(I - zA)^{-1}\mathbf{v}$. در [۳۴] نشان داده شده است که $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ خارج قسمت دو چندجمله‌ای $P(z)$ و $Q(z)$ به ترتیب از درجه p و $p+1$ است. طبق [۳۴، ۳۹] می‌بینیم که تابع پایدار $R(z)$ تقریب منطقی پدی^{۱۵} زیرقطری $(p+1, p)$ از e^z است. که توسط اکسلسون^{۱۶} در [۴۰] اثبات شد به طوری که تقریب پدی در شرط $|R(z)| < 1$ برای هر z مختلط با $Re(z) < 0$ صدق می‌کند. ما نشان دادیم که طرح گالرکین ناپیوسته تصادفی A -پایدار است. \square

ملاحظه ۲.۴.۴. بیان کردیم که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی A -پایدار است اگر و تنها اگر مولفه‌های قطعی آن پایدار باشند. علاوه بر این چون $|R(z)| < 1$ است از (۴۴.۴) داریم، $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{X}_n] = 0$ بنابراین روش عددی ما به لحاظ عددی پایدار است. توجه داشته باشید که روش پیشنهاد شده A -پایدار است و بنابراین برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی سخت مناسب است.

ملاحظه ۳.۴.۴. مساله بررسی پایداری عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی با نویز ضربی باقی می‌ماند. معمولاً معادله تست خطی عددی به صورت،

$$dX = \lambda X dt + \mu X dW, \quad t \in [0, T], X(0) = X_0,$$

در نظر می‌گیریم که در آن $\lambda, \mu, X_0 \in \mathbb{C}$ با $X_0 \neq 0$ می‌باشد.

۵.۴ تحلیل همگرایی

در این بخش نشان می‌دهیم که جواب \hat{X}_n از گالرکین ناپیوسته تصادفی همگرا به جواب دقیق X است. متأسفانه شرایط نظم مورد نیاز برای تقریب خطای استاندارد از روش گالرکین ناپیوسته تصادفی در (۱.۴) صدق نمی‌کند. با این حال برای اثبات همگرایی روش گالرکین ناپیوسته تصادفی، فرآیند وینر W را به وسیله فرآیند تصادفی تکه‌ای خطی \hat{W} تقریب می‌زنیم. به عبارت دیگر تقریبی از فرآیند وینر را برای بهبود نظم جواب تقریبی مسأله (۱۱.۴) در نظر می‌گیریم تا روش‌های تجزیه و تحلیل استاندارد در روش گالرکین ناپیوسته استفاده شود. به نظر می‌رسد که جواب $\hat{X}(t)$ از تقریب مسأله مقدار اولیه (۱۱.۴) نظم خاصی دارد که اجازه می‌دهد تا خطا را برآورد کنیم.

حال نرم‌هایی را که در سراسر این بخش نیاز است تعریف می‌کنیم. نرم استاندارد L^2 از تابع انتگرال‌پذیر $u = u(t)$ را روی بازه $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ به صورت، $\|u\|_{0, I_n} = (\int_{I_n} u^2(t) dt)^{\frac{1}{2}}$ ، تعریف می‌کنیم. فرض کنید $H^s(I_n)$ که $s = 0, 1, \dots$ فضای استاندارد سوبولوف از توابع مربع

^{۱۵}Pade

^{۱۶} Axelsson

انتگرال پذیر روی I_n را نشان دهد که با تمام مشتقات $u^{(k)}, k = 0, \dots, s$ روی I_n مربع انتگرال پذیر است و به نرم $\|u\|_{s, I_n} = \left(\sum_{k=0}^s \|u^{(k)}\|_{\circ, I_n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ مجهز باشد. همچنین نرم‌ها را روی دامنه $\Omega = [0, T]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\|u\|_{\circ, \Omega} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u\|_{\circ, I_n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{s, \Omega} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u\|_{s, I_n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

برای سادگی به ترتیب از $\|u\|_s$ و $\|u\|_{\circ}$ برای نشان دادن $\|u\|_{s, \Omega}$ و $\|u\|_{\circ, \Omega}$ استفاده می‌کنیم. اکنون خواص معکوس فضای عناصر متناهی V_h^p را به صورت زیر بیان می‌کنیم [۴۱]، برای هر $v \in I_n$ ثابت مثبت C مستقل از v, h و n وجود دارد به طوری که،

$$\|v'\|_{\circ, I_n} \leq Ch^{-1} \|v\|_{\circ, I_n}, \quad |v(t_n^+)| + |v(t_n^-)| \leq Ch^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{\circ, I_n}.$$

۱.۵.۴ نظم $\hat{X}(t)$

در این زیربخش نظمی از $\hat{X}(t)$ مورد نیاز است تا روش‌های تحلیل استاندارد را در روش گالرکین ناپیوسته بکار ببریم. به ویژه نیاز به جواب $\hat{X}(t) \in H^1([0, T])$ داریم.

لم زیر برخی از ویژگی‌های مهم فرآیند تقریب $\hat{W}(t)$ را بیان می‌کند و همچنین یک کران برای $E[\|\hat{X}\|_1^2]$ ارائه می‌دهد.

لم ۱.۵.۴. فرآیند تصادفی تکه‌ای خطی $\hat{W}(t)$ که در (۶.۴) تعریف شده است در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند: مسیری از $\frac{d\hat{W}}{dt}$ عضو $L^2([0, T])$ است و

$$E \left[\left\| \frac{d\hat{W}}{dt} \right\|^2 \right] = N, \quad E \left[\left(\int_0^T d\hat{W}(t) \right)^2 \right] = T. \quad (۴۶.۴)$$

علاوه بر این اگر انتگرالده قطعی $f(t) \in L^2([0, T])$ باشد پس

$$E \left[\left(\int_0^T f(t) d\hat{W}(t) \right)^2 \right] \leq \|f\|^2, \quad (۴۷.۴)$$

سرانجام اگر تابع غیرتصادفی $f(t)$ در شرایط لپ‌شیتز روی $[0, T]$ با ثابت $L \geq 0$ صدق کند یعنی، $|f(t_1) - f(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in [0, T]$ پس داریم:

$$E \left[\left(\int_0^T f(t) dW(t) - \int_0^T f(t) d\hat{W}(t) \right)^2 \right] \leq TL^2 h^2. \quad (۴۸.۴)$$

برهان. چون $\hat{W}(t)$ فرآیند تصادفی تکه‌ای خطی است، تابع ثابت تکه‌ای است. بنابراین مسیری از $\frac{d\hat{W}}{dt}$ در $L^2[0, T]$ است. حال با استفاده از (۶.۴) داریم $\frac{d\hat{W}}{dt} = \frac{\Delta W_n}{h_n}$

چون $E[(\Delta W_n)^2] = h_n$ داریم،

$$\begin{aligned} E \left[\left\| \frac{d\hat{W}}{dt} \right\|^2 \right] &= E \left[\sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} \left(\frac{\Delta W_n}{h_n} \right)^2 dt \right] = E \left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\Delta W_n)^2}{h_n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{E[(\Delta W_n)^2]}{h_n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h_n}{h_n} = N. \end{aligned}$$

از طرفی $E[(W(T) - W(0))^2] = T$ پس داریم،

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^T d\hat{W}(t) \right)^2 \right] &= E \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} \frac{\Delta W_n}{h_n} dt \right)^2 \right] = E \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta W_n \right)^2 \right] \\ &= E[(W(T) - W(0))^2] = T. \end{aligned}$$

طبق اثبات (۴۹.۴) و چون $f(t)$ قطعی است لذا داریم،

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^T f(t) d\hat{W}(t) \right)^2 \right] &= E \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} \frac{\Delta W_n}{h_n} f(t) dt \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Delta W_n}{h_n} \int_{I_n} f(t) dt \right)^2 \right] \\ &= E \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\Delta W_n}{h_n} \int_{I_n} f(t) dt \right)^2 + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{N-1} \frac{\Delta W_n}{h_n} \frac{\Delta W_m}{h_m} \int_{I_n} f(t) dt \int_{I_m} f(t) dt \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} E \left[\left(\frac{\Delta W_n}{h_n} \int_{I_n} f(t) dt \right)^2 \right] + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{N-1} E \left[\frac{\Delta W_n}{h_n} \frac{\Delta W_m}{h_m} \int_{I_n} f(t) dt \int_{I_m} f(t) dt \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} E \left[\left(\frac{\Delta W_n}{h_n} \right)^2 \right] \left(\int_{I_n} f(t) dt \right)^2 + \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{N-1} E \left[\frac{\Delta W_n}{h_n} \frac{\Delta W_m}{h_m} \right] \int_{I_n} f(t) dt \int_{I_m} f(t) dt. \end{aligned}$$

با استفاده از مستقل بودن ΔW_m و ΔW_n برای $n \neq m$ داریم، $E[\Delta W_n] = 0$ ، $E[(\Delta W_n)^2] = h_n$ و طبق نامساوی کشی شوارتز نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^T f(t) d\hat{W}(t) \right)^2 \right] &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h_n} \left(\int_{I_n} f(t) dt \right)^2 \leq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h_n} \left(h_n \int_{I_n} f^2(t) dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} f^2(t) dt = \|f\|^2, \end{aligned}$$

که اثبات کاملی از ویژگی (۴۹.۴) است.

حال (۴۸.۴) را اثبات می‌کنیم. با استفاده از تعریف \hat{W} و $\frac{\Delta W_n}{h_n} = \frac{1}{h_n} \int_{I_n} dW(t)$ داریم،

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) dW(t) - \int_0^T f(t) d\hat{W}(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} f(t) dW(t) \\ &\quad - \int_0^T \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n(s) \frac{\Delta W_n}{h_n} f(s) ds \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{I_n} f(t) dW(t) - \int_0^T \chi_n(s) \frac{\Delta W_n}{h_n} f(s) ds \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{I_n} f(t) dW(t) - \int_{I_n} \frac{\Delta W_n}{h_n} f(s) ds \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} \left(f(t) - \frac{1}{h_n} \int_{I_n} f(s) ds \right) dW(t), \end{aligned}$$

طرفین را به توان دو می‌رسانیم و امید ریاضی می‌گیریم و با استفاده از ویژگی ایزومتري ایتو،

$$E \left[\left(\int_0^T g(t) dW(t) \right)^2 \right] = \int_0^T E[g^2(t)] dt = \int_0^T g^2(t) dt,$$

با $g(t) = f(t) - \frac{1}{h_n} \int_{I_n} f(s) ds$ داریم،

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^T f(t) dW(t) - \int_0^T f(t) d\hat{W}(t) \right)^2 \right] &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} \left(f(t) - \frac{1}{h_n} \int_{I_n} f(s) ds \right)^2 dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} \left(\frac{1}{h_n} \int_{I_n} (f(t) - f(s)) ds \right)^2 dt. \end{aligned}$$

لذا با استفاده از شرط لیپشیتز، برای $t, s \in I_n$ و $t, s \in I_n$ داریم $|t - s| \leq h_n$ و $\sum_{n=0}^{N-1} h_n = T$ داریم،

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^T f(t) dW(t) - \int_0^T f(t) d\hat{W}(t) \right)^2 \right] &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} \left(\frac{1}{h_n} \int_{I_n} L|t - s| ds \right)^2 dt \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} (Lh_n)^2 dt \\ &\leq L^2 \sum_{n=0}^{N-1} h_n^2 \leq L^2 h^2 \sum_{n=0}^{N-1} h_n = TL^2 h^2. \end{aligned}$$

□

بنابراین اثبات لم کامل شد.

از این پس C را یک ثابت مثبت کلی مستقل از h در نظر می‌گیریم که مقدار متفاوتی در جاهای مختلف دارد. در قضیه بعد تقریب‌های مهمی را ارائه می‌دهیم که در تحلیل خطای همگرایی مورد نیاز است.

قضیه ۱.۵.۴. فرض کنید مفروضات قضیه ۲.۳.۴ برقرار باشد و همچنین $\hat{X}(t)$ جوابی از (۱۲.۴) و (۱۳.۴) باشد. پس ثابت مثبت C مستقل از \hat{W} و h وجود دارد به طوری که،

$$E \left[\sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}(t)|^2 \right] \leq C, \quad E \left[\|\hat{X}\|^2 \right] \leq C, \quad (۴۹.۴)$$

$$E \left[\left(\int_0^T b(t, \hat{X}(t)) d\hat{W}(t) \right)^2 \right] \leq C, \quad (۵۰.۴)$$

علاوه بر این $\hat{X}(t) \in H^1([0, T])$ و یک ثابت مثبت C مستقل از \hat{W} و h وجود دارد به طوری که،

$$E \left[\left\| \frac{d\hat{X}}{dt} \right\|^2 \right] \leq \frac{C}{h}, \quad E \left[\|\hat{X}\|_1^2 \right] \leq \frac{C}{h}. \quad (۵۱.۴)$$

برهان. ابتدا (۴۹.۴) را اثبات می‌کنیم. تحت مفروضات قضیه ۲.۳.۴ داریم،

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^2 \right] < \infty.$$

از طرف دیگر به وسیله قضیه وانگ زاکای ۱.۴.۴ داریم،

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\sup_{t \in [0, T]} |X(t) - \hat{X}(t)|^2 \right] = 0.$$

چون دنباله $\left\{ E \left[\sup_{t \in [0, T]} |X(t) - \hat{X}(t)|^2 \right] \right\}$ همگرا است پس کراندار است لذا با استفاده از نامساوی مثلثی و نامساوی $a^2 + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ داریم،

$$|\hat{X}(t)|^2 \leq (|X(t)| + |X(t) - \hat{X}(t)|)^2 \leq 2|X(t)|^2 + 2|X(t) - \hat{X}(t)|^2.$$

با سوپریمم‌گیری و امیدریاضی از دو طرف داریم،

$$E \left[\sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}(t)|^2 \right] \leq 2E \left[\sup_{t \in [0, T]} |X(t)|^2 \right] + 2E \left[\sup_{t \in [0, T]} |X(t) - \hat{X}(t)|^2 \right].$$

چون سمت راست کراندار است لذا معادله اول در (۴۹.۴) را بدست می‌آوریم. حال $E \left[\|\hat{X}\|^2 \right]$ را بدست می‌آوریم. برای این منظور داریم،

$$\begin{aligned} E \left[\|\hat{X}\|^2 \right] &= E \left[\int_0^T |\hat{X}(t)|^2 dt \right] = \int_0^T E \left[|\hat{X}(t)|^2 \right] dt \leq \int_0^T E \left[\sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}(t)|^2 \right] dt \\ &= TE \left[\sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}(t)|^2 \right] \leq TC_1 = C, \end{aligned}$$

که برهان (۴۹.۴) کامل می‌شود.

اکنون (۵۰.۴) را اثبات می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که فرم انتگرال (۱۱.۴) به صورت زیر است،

$$\hat{X}(t) = X_0 + \int_0^t \left(a(s, \hat{X}(s)) - \frac{1}{\sqrt{t}} b(s, \hat{X}(s)) b_x(s, \hat{X}(s)) \right) ds + \int_0^t b(s, \hat{X}(s)) d\hat{W}(s). \quad t \in [0, T].$$

برای محاسبه جمله دوم، طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و طبق نامساوی مثلثی داریم،

$$\left| \int_0^t b(s, \hat{X}(s)) d\hat{W}(s) \right|^2 \leq \left(|X_0| + |\hat{X}(t)| + \int_0^t |a(s, \hat{X}(s))| ds + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t |b(s, \hat{X}(s)) b_x(s, \hat{X}(s))| ds \right)^2. \quad (52.4)$$

با استفاده از نابرابری $(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ که از $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ نتیجه می‌شود داریم،

$$\left| \int_0^t b(s, \hat{X}(s)) d\hat{W}(s) \right|^2 \leq 4|X_0|^2 + 4|\hat{X}(t)|^2 + 4 \left(\int_0^t |a(s, \hat{X}(s))| ds \right)^2 + \left(\int_0^t |b(s, \hat{X}(s)) b_x(s, \hat{X}(s))| ds \right)^2.$$

با استفاده از نامساوی کشی شوارتز برای $t \in [0, T]$ داریم،

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t b(s, \hat{X}(s)) d\hat{W}(s) \right|^2 &\leq 4|X_0|^2 + 4|\hat{X}(t)|^2 + 4t \int_0^t |a(s, \hat{X}(s))|^2 ds \\ &+ t \int_0^t |b(s, \hat{X}(s)) b_x(s, \hat{X}(s))|^2 ds \leq 4|X_0|^2 + 4|\hat{X}(t)|^2 \\ &+ 4T \int_0^t |a(s, \hat{X}(s))|^2 ds + T \int_0^t |b(s, \hat{X}(s)) b_x(s, \hat{X}(s))|^2 ds. \end{aligned} \quad (53.4)$$

فرض کنید توابع $a(t, x), b(t, x)$ و $b(t, x) b_x(t, x)$ پیوسته هستند و در شرایط لیب شیتز روی D با ثابت $L > 0$ صدق می‌کنند، $a(t, x), b(t, x)$ و $b(t, x) b_x(t, x)$ را در شرایط رشد خطی کراندار صدق می‌دهیم داریم،

$$\begin{aligned} |f(t, x)| &\leq |f(t, 0)| + |f(t, x) - f(t, 0)| \leq \max_{t \in [0, T]} |f(t, 0)| + L|x - 0| \\ &\leq K(1 + |x|). \end{aligned} \quad (54.4)$$

که $k = \max(L, \max_{t \in [0, T]} |f(t, 0)|)$ و $f(t, x)$ نشان دهنده هر یک از کمیت های $a(t, x), b(t, x)$ و $b(t, x) b_x(t, x)$ است.

با استفاده از رشد خطی کراندار (۵۴.۴) و (۵۳.۴) داریم،

$$\left| \int_0^t b(s, \hat{X}(s)) d\hat{W}(s) \right|^2 \leq 4|X_0|^2 + 4|\hat{X}(t)|^2 + 5K^2 T \int_0^t (1 + |\hat{X}(s)|)^2 ds.$$

با استفاده از نامساوی $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ برای $\forall t \in [0, T]$ بدست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t b(s, \hat{X}(s)) d\hat{W}(s) \right|^2 &\leq 4|X_0|^2 + 4|\hat{X}(t)|^2 + 10K^2 T^2 + 10K^2 T \int_0^t |\hat{X}(s)|^2 ds \\ &\leq 4|X_0|^2 + 4 \sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}(t)|^2 + 10K^2 T^2 + 10K^2 T \int_0^t |\hat{X}(s)|^2 ds \\ &= 4|X_0|^2 + 4 \sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}(t)|^2 + 10K^2 T^2 + 10K^2 T \|\hat{X}\|^2. \end{aligned}$$

از دوطرف امید ریاضی می‌گیریم و با استفاده از $|X_0|^2 < \infty$ و (۴۹.۴) داریم،

$$\begin{aligned} \left[\left| \int_0^t b(s, \hat{X}(s)) d\hat{W}(s) \right|^2 \right] &\leq 4E[|X_0|^2] + 4E \left[\sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}(t)|^2 \right] \\ + 10K^2 T^2 + 10K^2 TE \left[\|\hat{X}\|^2 \right] &\leq 4C_1 + 4C_2 + 10K^2 T^2 + 10K^2 TC_3 = C. \end{aligned}$$

بنابراین اثبات (۵۰.۴) کامل است.

حال $E \left[\left\| \frac{d\hat{X}}{dt} \right\|^2 \right]$ را محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که (۱۱.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = a(t, \hat{X}(t)) - \frac{1}{\gamma} b(t, \hat{X}(t)) b_x(t, \hat{X}(t)) + b(t, \hat{X}(t)) \frac{d\hat{W}(t)}{dt}.$$

چون سمت راست فرآیند تصادفی پیوسته تکه‌ای است، باید مسیر $\frac{d\hat{X}(t)}{dt}$ را عضوی از $L^2[0, T]$ در نظر بگیریم. بنابراین مسیر $\hat{X}(t)$ در $H^1([0, T])$ قرار دارد و

$$\left\| \frac{d\hat{X}}{dt} \right\|^2 = \int_0^T \left| a(t, \hat{X}(t)) - \frac{1}{\gamma} b(t, \hat{X}(t)) b_x(t, \hat{X}(t)) + b(t, \hat{X}(t)) \frac{d\hat{W}(t)}{dt} \right|^2 dt.$$

با استفاده از نامساوی $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ، نامساوی کشی شوارتز، استفاده از رشد خطی کراندار (۵۴.۴) و استفاده از فرض $|b(t, x)| \leq B < \infty$ (چون فرض کردیم b کراندار است) داریم:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\hat{X}}{dt} \right\|^2 &\leq 3 \int_0^T |a(t, \hat{X}(t))|^2 dt + \frac{3}{\gamma^2} \int_0^T |b(t, \hat{X}(t)) b_x(t, \hat{X}(t))|^2 dt \\ &\quad + 3 \int_0^T \left| b(t, \hat{X}(t)) \frac{d\hat{W}(t)}{dt} \right|^2 dt \\ &\leq 3K^2 \int_0^T (1 + |\hat{X}(t)|)^2 dt + \frac{3}{\gamma^2} K^2 \int_0^T (1 + |\hat{X}(t)|)^2 dt + 3B^2 \left\| \frac{d\hat{W}(t)}{dt} \right\|^2 \\ &\leq \frac{15}{\gamma^2} K^2 \int_0^T (1 + |\hat{X}(t)|)^2 dt + 3B^2 \left\| \frac{d\hat{W}(t)}{dt} \right\|^2. \end{aligned}$$

و با استفاده از نامساوی $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ داریم،

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\hat{X}}{dt} \right\|^2 &\leq \frac{15}{4} K^2 \int_0^T (1 + |\hat{X}(t)|^2) dt + 3B^2 \left\| \frac{d\hat{W}(t)}{dt} \right\|^2 \\ &= \frac{15}{4} K^2 T + \frac{15}{4} K^2 \int_0^T |\hat{X}(t)|^2 dt + 3B^2 \left\| \frac{d\hat{W}(t)}{dt} \right\|^2. \end{aligned}$$

از طرفین امید ریاضی می‌گیریم و با استفاده از (۴۶.۴) و (۴۹.۴) داریم،

$$\begin{aligned} E \left[\left\| \frac{d\hat{X}}{dt} \right\|^2 \right] &\leq \frac{15}{4} K^2 T + \frac{15}{4} K^2 E \left[\|\hat{X}\|^2 \right] + 3B^2 E \left[\left\| \frac{d\hat{W}}{dt} \right\|^2 \right] \\ &\leq \frac{15}{4} K^2 T + \frac{15}{4} K^2 C_1 + 3B^2 N \leq \left(\frac{15}{4} K^2 T + \frac{15}{4} K^2 C_1 + 3B^2 \right) N \\ &\leq C_2 N, \end{aligned}$$

که در آن $N \geq 1$ و $C_2 = \frac{15}{4} K^2 T + \frac{15}{4} K^2 C_1 + 3B^2$ ثابتی مستقل از h و N است. با استفاده از $N \leq \frac{T}{h_{\min}} \leq \frac{TK}{h}$ داریم،

$$E \left[\left\| \frac{d\hat{X}}{dt} \right\|^2 \right] \leq C_2 \frac{TK}{h} = \frac{C}{h}, \quad C = C_2 TK.$$

سرانجام توجه داریم که تقریب دوم در (۵۱.۴) به صورت زیر است،

$$\begin{aligned} E \left[\|\hat{X}\|_1^2 \right] &= E \left[\|\hat{X}\|^2 + \left\| \frac{d\hat{X}}{dt} \right\|^2 \right] \leq C_1 + \frac{C_2}{h} \\ &= \frac{C_1 h + C_2}{h} \leq \frac{C_1 T + C_2}{h} = \frac{C}{h}, \end{aligned} \quad (55.4)$$

که در آن $h \leq T$ و $C = C_1 T + C_2$ است. این اثبات را کامل می‌کند. \square

۲.۵.۴ همگرایی در میانگین مربعات

قبل از این که همگرایی \hat{X}_h را به \hat{X} نشان دهیم ابتدا تصاویر یک بعدی گاوس رادو P_h^\pm را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ بازه دلخواه و $P^p(I_n)$ فضای چندجمله‌ای‌های از درجه p کمتر از p روی I_n باشد. برای هر تابع $u(t) \in L^2([0, T])$ ، $u(t) \in V_h^p$ و $P_h^\pm u$ روی I_n چندجمله‌ای یکتا در $P^p(I_n)$ است که در شرط زیر صدق می‌کند،

$$\begin{aligned} \int_{I_n} (P_h^\pm u - u) v dt &= 0, \quad \forall v \in P^{n-1}(I_n), \quad (56.4) \\ (P_h^- u - u)(t_{n+1}^-) &= 0, (P_h^+ u - u)(t_n^+) = 0. \end{aligned}$$

برای $p = 0$ از $P^{-1}(I_n) = \{0\}$ استفاده می‌کنیم. این طرح به‌ویژه در برآورد خطا از روش گالرکین ناپیوسته برای بدست آوردن کران بهینه خطای L^2 مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴۲].

در تجزیه و تحلیل مان به نتیجه معروف زیر نیاز داریم که اثبات آن در [۴۳] وجود دارد. برای $u \in H^1([0, T])$ ثابت مثبت C مستقل از اندازه مش وجود دارد به طوری که،

$$\|u - P_h^\pm u\| + h\|(u - P_h^\pm u)_x\| \leq C\|u\|_1 h. \quad (57.4)$$

فرض کنید $e(t) = \hat{X}(t) - \hat{X}_h(t)$ خطای بین جواب دقیق (۱۲.۴) و جواب گالرکین ناپیوسته تصادفی تعریف شده در (۱۷.۴) باشد. فرض کنید تصویر خطا به صورت $\epsilon = \hat{X} - P_h^- \hat{X}$ تعریف شود و خطای بین جواب عددی و تصویری از جواب دقیق به صورت $\bar{e} = P_h^- \hat{X} - \hat{X}_h$ باشد. توجه داشته باشید که خطا را می توان به صورت زیر نوشت،

$$e = (\hat{X} - P_h^- \hat{X}) + (P_h^- \hat{X} - \hat{X}_h) = \bar{e} + \epsilon. \quad (58.4)$$

طبق قضیه ۱.۵.۴ معادله (۱۱.۴) دارای جواب یکتا $\hat{X}(t) \in H^1([0, T])$ است. حال چون جواب $\hat{X}(t) \in H^1([0, T])$ است می توانیم نتیجه تصویر (۵۷.۴) را با $u(t) = \hat{X}(t)$ بکار ببریم. در قضیه بعد یک کران برای $E \left[\left| \hat{X}(T) - \hat{X}_h(T) \right|^2 \right]$ ایجاد می کنیم تا نشان دهیم جواب $\hat{X}_h(T)$ از گالرکین ناپیوسته تصادفی در میانگین مربعات به $\hat{X}(T)$ وقتی که $h \rightarrow 0$ باشد، همگرا است.

قضیه ۲.۵.۴. فرض کنید مفروضات قضیه ۱.۵.۴ برقرار باشد و ضرایب انتشار مستقل از X باشند یعنی $b(t, x) = b(t)$ که $b(t)$ تابع پیوسته روی $[0, T]$ است. فرض کنید $p \geq 0$ و $\hat{X}(t)$ جوابی از (۱۲.۴) و $\hat{X}_h(t)$ جواب گالرکین ناپیوسته تصادفی تعریف شده در (۱۷.۴) باشد. پس ثابت مثبت C مستقل از h وجود دارد به طوری که،

$$E \left[|e(t_k^-)|^2 \right] \leq Ch, \quad k = 1, \dots, N \quad (59.4)$$

$$E \left[\|e\|^2 \right] \leq Ch. \quad (60.4)$$

برهان. با کم کردن (۱۷.۴) از (۱۶.۴) معادله خطای زیر را بدست می آوریم،

$$\int_{I_n} e v' dt + \int_{I_n} (a(t, \hat{X}) - a(t, \hat{X}_h)) v dt - e(t_{n+1}^-) v(t_{n+1}^-) e(t_n^-) v(t_n^+) = 0. \quad (61.4)$$

طبق ویژگی تصویر P_h^- در (۵۶.۴) داریم،

$$\int_{I_n} \epsilon v' dt = 0, \quad \forall v \in P^p(I_n), \epsilon(t_{n+1}^-) = 0, n = 0, \dots, N-1 \quad (62.4)$$

چون v چندجمله ای حداکثر از درجه p است پس v' چندجمله ای حداکثر از درجه $(p-1)$ است. با جایگذاری رابطه (۵۸.۴) در (۶۱.۴) و با استفاده از (۶۲.۴) داریم،

$$\int_{I_n} \bar{e} v' dt + \int_{I_n} (a(t, \hat{X}) - a(t, \hat{X}_h)) v dt - \bar{e}(t_{n+1}^-) v(t_{n+1}^-) + \bar{e}(t_n^-) v(t_n^+) = 0. \quad (63.4)$$

با در نظر گرفتن $v = \bar{e} \in P^p(I_n)$ در (۶۳.۴) داریم،

$$\frac{1}{2} \bar{e}^2(t_{n+1}^-) - \frac{1}{2} \bar{e}^2(t_n^+) + \int_{I_n} (a(t, \hat{X}) - a(t, \hat{X}_h)) \bar{e} dt - \bar{e}^2(t_{n+1}^-) + \bar{e}(t_n^-) \bar{e}(t_n^+) = 0,$$

که معادل است با،

$$\frac{1}{\nu} (\bar{e}(t_n^+) - \bar{e}(t_n^-))^2 - \frac{1}{\nu} |\bar{e}(t_n^-)|^2 + \frac{1}{\nu} |\bar{e}(t_{n+1}^-)|^2 = \int_{I_n} (a(t, \hat{X}) - a(t, \hat{X}_h)) \bar{e} dt.$$

در نتیجه،

$$|\bar{e}(t_{n+1}^-)|^2 \leq |\bar{e}(t_n^-)|^2 + 2 \int_{I_n} (a(t, \hat{X}) - a(t, \hat{X}_h)) \bar{e} dt. \quad n = 0, \dots, N-1$$

چون a در شرط لیپشیتز در متغیر x روی $D = [0, T] \times \mathbb{R}$ با ثابت لیپشیتز L صدق می‌کند داریم،

$$|\bar{e}(t_{n+1}^-)|^2 \leq |\bar{e}(t_n^-)|^2 + 2L \int_{I_n} |\hat{X} - \hat{X}_h| |\bar{e}| dt = |\bar{e}(t_n^-)|^2 + 2L \int_{I_n} |\epsilon| |\bar{e}| dt.$$

با استفاده از (۵۸.۴) و نامساوی $2ab \leq a^2 + b^2$ داریم،

$$\begin{aligned} |\bar{e}(t_{n+1}^-)|^2 &\leq |\bar{e}(t_n^-)|^2 + 2L \left(\int_{I_n} |\epsilon| |\bar{e}| dt + \int_{I_n} |\bar{e}|^2 dt \right) \\ &\leq |\bar{e}(t_n^-)|^2 + L \int_{I_n} |\epsilon|^2 dt + 3L \int_{I_n} |\bar{e}|^2 dt. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن تمام عناصر I_n که $n = 0, \dots, k-1$ با $k = 1, \dots, N$ و با استفاده از (۵۷.۴) داریم،

$$\begin{aligned} |\bar{e}(t_k^-)|^2 &\leq |\bar{e}(t_0^-)|^2 + L \int_0^{t_k} |\epsilon|^2 dt + 3L \int_0^{t_k} |\bar{e}|^2 dt = L \int_0^{t_k} |\epsilon|^2 dt + 3L \int_0^{t_k} |\bar{e}|^2 dt \\ &\leq L \int_0^T |\epsilon|^2 dt + 3L \int_0^{t_k} |\bar{e}|^2 dt \leq CLh^2 \|\hat{X}\|_1^2 + 3L \int_0^{t_k} |\bar{e}|^2 dt. \end{aligned} \quad (64.4)$$

از طرف دیگر با استفاده از فرمول تیلور با باقی‌مانده انتگرال و نامساوی کشی شوارتز برای هر $t \in I_n$ داریم،

$$\begin{aligned} |\bar{e}(t)| &= \left| \bar{e}(t_{n+1}^-) + \int_{t_{n+1}^-}^t \bar{e}'(s) ds \right| \leq |\bar{e}(t_{n+1}^-)| + \int_{I_n} |\bar{e}'(t)| dt \\ &\leq |\bar{e}(t_{n+1}^-)| + h_n^{\frac{1}{\nu}} \left(\int_{I_n} |\bar{e}'(t)|^{\nu} dt \right)^{\frac{1}{\nu}} \\ &\leq |\bar{e}(t_{n+1}^-)| + h^{\frac{1}{\nu}} \left(\int_{I_n} |\bar{e}'(t)|^{\nu} dt \right)^{\frac{1}{\nu}}. \end{aligned}$$

طرفین را به توان دو می‌رسانیم و با استفاده از انتگرال گیری روی I_n و استفاده از نامساوی $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ داریم،

$$\int_{I_n} |\bar{e}|^2 dt \leq 2h_n |\bar{e}(t_{n+1}^-)|^2 + 2hh_n \int_{I_n} |\bar{e}'|^2 dt \leq 2h |\bar{e}(t_{n+1}^-)|^2 + 2h^2 \int_{I_n} |\bar{e}'|^2 dt.$$

حال با در نظر گرفتن همه عناصر I_n که $n = 0, \dots, k-1$ با $k = 1, \dots, N$ داریم،

$$\int_0^{t_k} |\bar{e}|^2 dt \leq 2h \sum_{n=0}^{k-1} |\bar{e}(t_{n+1}^-)|^2 + 2h^2 \int_0^{t_k} |\bar{e}'|^2 dt \leq 2h \sum_{n=1}^k |\bar{e}(t_n^-)|^2 + 2h^2 \|\bar{e}'\|^2. \quad (65.4)$$

و با ترکیب کردن (64.4) و (65.4) بدست می‌آوریم،

$$|\bar{e}(t_k^-)|^2 \leq CLh^2 \|\hat{X}\|_1^2 + 6Lh^2 \|\bar{e}'\|^2 + 6Lh \sum_{n=1}^k |\bar{e}(t_n^-)|^2.$$

از طرفین امید ریاضی می‌گیریم و با استفاده از (51.4) داریم،

$$\begin{aligned} E \left[|\bar{e}(t_k^-)|^2 \right] &\leq CLh^2 E \left[\|\hat{X}\|_1^2 \right] + 6Lh^2 E \left[\|\bar{e}'\|^2 \right] + 6Lh \sum_{n=1}^k E \left[|\bar{e}(t_n^-)|^2 \right] \\ &\leq C_1 Lh + 6Lh^2 E \left[\|\bar{e}'\|^2 \right] + 6Lh \sum_{n=1}^k E \left[|\bar{e}(t_n^-)|^2 \right]. \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی گرانووال گسسته [44، 45] نتیجه می‌گیریم که برای h به اندازه کافی کوچک ($6Lh < 1$) داریم،

$$\begin{aligned} E \left[|\bar{e}(t_k^-)|^2 \right] &\leq \left(C_1 Lh + 6Lh^2 E \left[\|\bar{e}'\|^2 \right] \right) e^{6LKh} \\ &\leq \left(C_1 Lh + 6Lh^2 E \left[\|\bar{e}'\|^2 \right] \right) e^{6LT} \\ &\leq C_2 h + C_3 h^2 E \left[\|\bar{e}'\|^2 \right], \end{aligned} \quad (66.4)$$

که C_2 و C_3 مستقل از h هستند. حال باید $E \left[\|\bar{e}'\|^2 \right]$ را محاسبه کنیم. با استفاده از رابطه $\bar{e} = e - \epsilon = \hat{X} - \hat{X}_h - \epsilon$ و نامعادله $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ داریم،

$$\|\bar{e}'\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} (\hat{X}' - \hat{X}'_h - \epsilon')^2 dt \leq 3 \|\hat{X}'\|^2 + 3 \|\hat{X}'_h\|^2 + 3 \|\epsilon'\|^2.$$

از دو طرف امید ریاضی می‌گیریم و با استفاده از (51.4) و (57.4) با $u = \hat{X}$ خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} E \left[\|\bar{e}'\|^2 \right] &\leq 3E \left[\|\hat{X}'\|^2 \right] + 3E \left[\|\hat{X}'_h\|^2 \right] + 3E \left[\|\epsilon'\|^2 \right] \\ &\leq \frac{3C}{h} + 3E \left[\|\hat{X}'_h\|^2 \right] + 3C_4 E \left[\|\hat{X}'\|^2 \right] \\ &\leq \frac{C_1}{h} + 3E \left[\|\hat{X}'_h\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (67.4)$$

سپس $E \left[\|\hat{X}'_h\|^2 \right]$ را بدست می‌آوریم. فرض کنید $\tilde{L}_p(\xi)$ چندجمله‌ای لژاندر از درجه p روی $[-1, 1]$ باشد. پس ویژگی زیر را داریم [46]،

$$\tilde{L}_p(1) = 1, \quad \tilde{L}_p(-1) = (-1)^p,$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{L}_p(\xi) \tilde{L}_q(\xi) d\xi = \frac{2}{\sqrt{p+1}} \delta_{pq}, \quad (68.4)$$

که δ_{pq} نماد کرونکر است.

نگاشت فیزیکی عناصر I_n به داخل عناصر $[-1, 1]$ به وسیله نگاشت استاندارد آفین زیر انجام می‌گیرد،

$$t = \frac{t_{n+1} + t_n}{2} + \frac{h_n}{2} \xi. \quad (69.4)$$

چندجمله‌ای انتقال لژاندر درجه p را روی I_n به صورت $L_{p,n}(t) = \tilde{L}_p\left(\frac{2t - t_n - t_{n+1}}{h_n}\right)$ بدست می‌آوریم. حال با استفاده از نگاشت (69.4) و رابطه متعامد در (68.4) داریم،

$$\begin{aligned} \|L_{p,n}\|_{\circ, I_n}^2 &= \int_{I_n} L_{p,n}^2(t) dt = \frac{h_n}{2} \int_{-1}^1 \tilde{L}_p^2(\xi) d\xi \\ &= \frac{h_n}{2} \frac{2}{\sqrt{p+1}} = \frac{h_n}{\sqrt{p+1}} \leq Ch_n. \end{aligned} \quad (70.4)$$

حال $v(t) = \hat{X}'_h(t) - (-1)^p \hat{X}'_h(t_n^+) L_{p,n}(t) \in P^p(I_n)$ را در (7.4) در نظر می‌گیریم و با استفاده از (68.4) و $v(t_n^+) = 0$ و $\int_{I_n} \hat{X}'_h(t) L_{p,n}(t) dt = 0$ داریم،

$$\|\hat{X}_h\|_{\circ, I_n}^2 = \int_{I_n} \hat{a}(t, \hat{X}_h(t)) \hat{X}'_h(t) dt - (-1)^p \hat{X}'_h(t_n^+) \int_{I_n} \hat{a}(t, \hat{X}_h(t)) L_{p,n}(t) dt.$$

با استفاده از تعریف \hat{a} در (18.4) و فرض $b(t, x) = b(t)$ خواهیم داشت،

$$\hat{a}(t, \hat{X}_h(t)) = a(t, \hat{X}_h(t)) + b(t) \frac{\Delta W_n}{h_n}.$$

بنابراین،

$$\|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n}^2 = T_1 + T_2,$$

که

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{I_n} a(t, \hat{X}_h(t)) \hat{X}'_h(t) dt - (-1)^p \hat{X}'_h(t_n^+) \int_{I_n} a(t, \hat{X}_h(t)) L_{p,n}(t) dt, \\ T_2 &= \frac{\Delta W_n}{h_n} \left(\int_{I_n} b(t) \hat{X}'_h(t) dt - (-1)^p \hat{X}'_h(t_n^+) \int_{I_n} b(t) L_{p,n}(t) dt \right). \end{aligned}$$

حال T_1 و T_2 را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم.

برای محاسبه T_1 ، با فرض این که ضریب رانش کراندار است داریم،

$$T_1 \leq C \int_{I_n} |\hat{X}'_h(t)| dt + C |\hat{X}'_h(t_n^+)| \int_{I_n} |L_{p,n}(t)| dt,$$

که با استفاده از نامساوی کشی شوارتز، نامساوی معکوس و تقریب (70.4) داریم،

$$\begin{aligned} T_1 &\leq Ch_n^{\frac{1}{2}} \|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n} + C_2 h_n^{-\frac{1}{2}} \|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n} h_n^{\frac{1}{2}} \|L_{p,n}\|_{\circ, I_n} \\ &\leq Ch_n^{\frac{1}{2}} \|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n} + C_3 h_n^{\frac{1}{2}} \|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n} \\ &\leq C_1 h_n^{\frac{1}{2}} \|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n}. \end{aligned}$$

برای محاسبه T_2 ، چون $b(t)$ کراندار است، روند محاسبه T_1 را دوباره تکرار می‌کنیم تا بدست بیاوریم،

$$T_2 \leq \frac{|\Delta W_n|}{h_n} \left(C_2 h_n^{\frac{1}{2}} \|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n} \right) = C_2 \frac{|\Delta W_n|}{h_n^{\frac{1}{2}}} \|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n}.$$

بنابراین داریم،

$$\|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n}^2 = T_1 + T_2 \leq C_1 h_n^{\frac{1}{2}} \|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n} + C_2 \frac{|\Delta W_n|}{h_n^{\frac{1}{2}}} \|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n},$$

نتیجه می‌شود،

$$\|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n} \leq C_1 h_n^{\frac{1}{2}} + C_2 \frac{|\Delta W_n|}{h_n^{\frac{1}{2}}} \leq C h^{\frac{1}{2}} + C \frac{|\Delta W_n|}{h^{\frac{1}{2}}},$$

که از (۱۵.۴) استفاده کردیم.

طرفین را به توان دو می‌رسانیم و با استفاده از $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ و با امیدریاضی گرفتن از طرفین داریم،

$$\begin{aligned} E \left[\|\hat{X}'_h\|_{\circ}^2 \right] &= E \left[\sum_{n=0}^{N-1} \|\hat{X}'_h\|_{\circ, I_n}^2 \right] \leq E \left[\sum_{n=0}^{N-1} 2C^2 h \right] + E \left[\sum_{n=0}^{N-1} 2C^2 \frac{|\Delta W_n|^2}{h} \right] \\ &\leq 2C^2 h N + 2C^2 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{E[|\Delta W_n|^2]}{h} \\ &= 2C^2 h N + 2C^2 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h_n}{h} \\ &\leq C_1 + \frac{C_2}{h} \leq \frac{C_2}{h}. \end{aligned} \quad (71.4)$$

سرانجام با ترکیب کردن (۶۶.۴)، (۶۷.۴) و (۷۱.۴) داریم،

$$\begin{aligned} E \left[|\bar{e}(t_k^-)|^2 \right] &\leq C_2 h + C_2 h^2 \left(\frac{C_1}{h} + 3E \left[\|\hat{X}'_h\|_{\circ}^2 \right] \right) \\ &\leq C_2 h + C_2 h^2 \left(\frac{C_1}{h} + C_3 \frac{C_2}{h} \right) \\ &\leq Ch. \end{aligned}$$

که اثبات تقریب (۵۹.۴) کامل می‌شود.

تقریب (۶۵.۴) با $k = N$ را با (۵۹.۴)، (۶۷.۴) و (۷۱.۴) ترکیب می‌کنیم که نتیجه می‌شود $E \left[\|\bar{e}\|^2 \right] \leq Ch$. سرانجام با استفاده از (۵۸.۴) و نامعادله $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ و تقریب (۵۷.۴) با $u = \hat{X}$ و (۵۱.۴) بدست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} E \left[\|e\|^2 \right] &= E \left[\|\bar{e} + \epsilon\|^2 \right] \leq 2E \left[\|\bar{e}\|^2 \right] + 2E \left[\|\epsilon\|^2 \right] \\ &\leq C_1 h + 2C^2 h^2 E \left[\|\hat{X}\|_{\circ}^2 \right] \\ &\leq C_1 h + 2C_2 = Ch. \end{aligned}$$

□ که اثبات قضیه کامل می‌شود.

ملاحظه ۱.۵.۴. فرض کنید که مفروضات قضیه ۲.۵.۴ برقرار باشد و همچنین $X(t)$ جوابی از (۱.۴) باشد و $\hat{X}_h(t)$ جواب گالرکین ناپیوسته تصادفی در (۱۷.۴) باشد. پس برای $k = 1, \dots, N$ در میانگین مربعات به $X(t_k)$ همگرا است یعنی برای هر $k = 1, \dots, N$ وقتی که $N \rightarrow \infty$ داریم، $E \left[|X(t_k) - \hat{X}_h(t_k^-)|^2 \right] \rightarrow 0$.

برهان. با استفاده از نامعادله $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ داریم،

$$\begin{aligned} |X(t_k) - \hat{X}_h(t_k^-)|^2 &= |(X(t_k^-) - \hat{X}(t_k)) + (\hat{X}(t_k) - \hat{X}_h(t_k^-))|^2 \\ &\leq 2|X(t_k) - \hat{X}(t_k)|^2 + 2|\hat{X}(t_k) - \hat{X}_h(t_k^-)|^2. \end{aligned}$$

با امید ریاضی گرفتن از دو طرف بدست می‌آوریم،

$$E \left[|X(t_k) - \hat{X}_h(t_k^-)|^2 \right] \leq 2E \left[|X(t_k) - \hat{X}(t_k)|^2 \right] + 2E \left[|\hat{X}(t_k) - \hat{X}_h(t_k^-)|^2 \right].$$

طبق قضیه وانگ زاکای ۱.۴.۴ جواب $\hat{X}(t_k)$ از (۱۱.۴) به جواب $X(t_k)$ از مسأله مقدار اولیه اصلی (۱.۴) در میانگین مربعات همگرا است. با استفاده از قضیه ۲.۵.۴ جواب $\hat{X}_h(t_k^-)$ از گالرکین ناپیوسته تصادفی (۱۶.۴) به جواب $\hat{X}(t)$ در میانگین مربعات همگرا است. بنابراین اثبات کامل شد. □

ملاحظه ۲.۵.۴. تحلیل مان از معادلات دیفرانسیل تصادفی با نویز جمعی برقرار است. در غیر این صورت تبدیل لمپارتی^{۱۷} می‌تواند برای حذف وابستگی ضریب انتشار از حالت فرآیند مورد استفاده قرار گیرد. به‌ویژه در حالت نویز ضربی می‌توانیم روش لمپارتی را برای تبدیل معادله دیفرانسیل تصادفی در (۱.۴) به یک معادله دیفرانسیل تصادفی با ضریب انتشار یکه بکار ببریم و سپس با آن مشابه حالت نویز جمعی رفتار کنیم. تبدیل لمپارتی [۴۷، ۴۸] به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$Z(t) = \psi(t, X(t)) = \int_z^{X(t)} \frac{1}{b(t, x(t))} dx,$$

که z مقدار دلخواهی در فضای حالت X است. پس فرآیند Z جواب معادله دیفرانسیل تصادفی با ضریب انتشار یکه زیر است،

$$dZ = \left(\psi_t(t, \psi^{-1}(t, Z)) + \frac{a(t, \psi^{-1}(t, Z))}{b(t, \psi^{-1}(t, Z))} - \frac{1}{2} b_x(t, \psi^{-1}(t, Z)) \right) dt + dW. \quad (۷۲.۴)$$

بنابراین تجزیه تحلیل بیان شده برای معادله دیفرانسیل تصادفی را می‌توانیم برای Z نیز بکار ببریم زیرا فرآیند وینر به حالت فرآیند بستگی ندارد. حال تأکید می‌کنیم که اگر b به X وابسته باشد پس روش انتقال لمپارتی ترجیح داده می‌شود زیرا بی‌ثباتی در فرآیند شبیه‌سازی

^{۱۷}Lamperti

کاهش می‌یابد (یادآوری می‌کنیم که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی که برای معادله دیفرانسیل تصادفی با نویز جمعی (۳۲.۴) بکار برده شده است A – پایدار است). در واقع می‌توان مسیر $Z = \psi(t, X)$ را شبیه سازی کرد و سپس با استفاده از تبدیل معکوس $\psi^{-1}(t, Z)$ مسیر X ها را بدست آوریم. با این حال تبدیل معکوس $\psi^{-1}(t, Z)$ همیشه در دسترس نیست (در حالت کلی X نمی‌تواند به‌عنوان یک تابع صریح و روشن از Z نوشته شود). سرانجام نتیجه می‌گیریم که معادلات دیفرانسیل تصادفی با جمله رانش دوبار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نسبت به x و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نسبت به t هستند در حالی که با جمله انتشار تنها به x وابسته هستند و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیرند و می‌توانند به وسیله تبدیل لمپارتی به ضریب انتشار یکه تبدیل شوند [۴۷].

۳.۵.۴ مرتبه همگرایی

در آنالیز عددی تصادفی مرتبه همگرایی نقش حیاتی را در طراحی الگوریتم‌های عددی بازی می‌کند. بدیهی است که مرتبه همگرایی بالا از یک روش عددی طرح کارآمدی است. برخلاف حالت قطعی دو نوع عمده از همگرایی متغیر تصادفی در آنالیز عددی تصادفی وجود دارد، همگرایی قوی و همگرایی ضعیف. همگرایی قوی به همگرایی مسیر مورد انتظار از حل عددی اشاره دارد در حالی که همگرایی ضعیف اشاره به همگرایی از لحظه‌های یک فرآیند دارد. به‌طور دقیق‌تر گفته می‌شود تقریب \hat{X} در لحظه T به X همگرایی قوی با مرتبه $p > 0$ دارد اگر ثابت مثبت C مستقل از h و $h_0 \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که،

$$E[|X(T) - \hat{X}(T)|] \leq Ch^p, \quad \forall h \in (0, h_0), \quad (73.4)$$

و تقریب \hat{X} همگرایی ضعیف از مرتبه p (همگرایی با مرتبه ضعیف p) به X در لحظه T دارد اگر برای هر چند جمله‌ای g ، ثابت مثبت C_g و $h_0 \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که،

$$|E[g(X(T))] - E[g(\hat{X}(T))]| \leq C_g h^p, \quad \forall h \in (0, h_0). \quad (74.4)$$

توجه داشته باشید که وقتی در حالت قطعی ضریب انتشار صفر می‌شود ($b = 0$) هر دو حالت به حالت مرتبه همگرایی قطعی کاهش می‌یابند. در این پایان‌نامه عمدتاً با همگرایی قوی در میانگین مربعات از روش گالرکین ناپیوسته تصادفی سروکار داریم.

برای معادلات دیفرانسیل معمولی قطعی روش گالرکین ناپیوسته، سرعت همگرایی بهینه $O(h^{p+1})$ در نرم L^2 وقتی که از چند جمله‌ای‌های تکه ای درجه p استفاده می‌کنیم را نشان می‌دهد [۳۴]. علاوه‌براین بسیاری از محققان کشف کردند که در شرایط خاص ممکن است نقاطی با همگرایی بالا در دامنه وجود داشته باشند که سرعت همگرایی گالرکین ناپیوسته از $O(h^{p+1})$ بالاتر شود. برای مثال روش گالرکین ناپیوسته از لساین^{۱۸} و راورت^{۱۹} [۳۴] که روی

^{۱۸}Lesaint

^{۱۹}Raviart

مسأله مقدار اولیه مرتبه اول اعمال شد جواب ناپیوسته دارد که $O(h^{p+1})$ سرعت همگرایی در نرم L^2 و $O(h^{2p+1})$ سرعت همگرایی بالا را برای مرحله آخر نشان می‌دهد. ویژگی همگرایی بالا برای روش‌های عناصر متناهی و گالرکین ناپیوسته برای معادلات دیفرانسیل معمولی قطعی در [۳۲، ۳۴، ۴۹-۵۱] بررسی می‌شود.

سرعت همگرایی بهینه $O(h^{p+1})$ تحت مفروضات نظم خاص ثابت شده است. به‌ویژه جواب دقیق از معادلات دیفرانسیل معمولی قطعی باید متعلق به فضای سوبولوف $H^{p+1}([0, T])$ باشد یعنی فضایی از توابعی که $p+1$ مشتق توزیع احتمال آن تابعی مربع انتگرال پذیر باشند. در معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتو چنین فرضی به‌طور کلی برقرار نیست (حداقل برای p بزرگتر از صفر) زیرا حرکت براونی استاندارد $W(t)$ هیچ جا با احتمال ۱ مشتق پذیر نیست. علاوه‌براین از آنجایی که حرکت براونی برای هر بازه زمانی کراندار نیست، فرآیند X صادق در (۱.۴) نیز کراندار نیست.

آزمایش‌های عددی برای مسائل خطی و غیرخطی نشان می‌دهد که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی با نویز جمعی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی وقتی که از چند جمله‌ای تکه‌ای درجه p استفاده می‌کنیم همگرایی قوی از مرتبه $2p+1$ دارد. با این حال هنگامی که برای معادلات دیفرانسیل تصادفی با نویز ضربی بکار می‌بریم تنها دارای همگرایی قوی از مرتبه p است.

۴.۵.۴ حالت چند بعدی

روش بیان شده را می‌توان به‌صورت زیر به معادلات دیفرانسیل تصادفی d -بعدی با نویز ضربی گسترش داد،

$$dX_i(t) = a_i(t, X(t))dt + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t, X(t))dW^j(t), \quad t \in [0, T] \quad (۷۵.۴)$$

که $X = [X_1, \dots, X_d]^t: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ و $X_i(0) = X_{0,i}, i = 1, \dots, d$ و ضرایب رانش به‌صورت $a = [a_1, \dots, a_d]^t: [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ و ضریب انتشار برای $j = 1, \dots, m$ به‌صورت $b_j = [b_{1,j}, \dots, b_{d,j}]^t: [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ می‌باشد. $W = [W^1, \dots, W^m]^t: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ فرآیند وینر m -بعدی با مولفه‌های W^j که $j = 1, \dots, m$ است و مستقل از فرآیند وینر اسکالر تعریف شده روی فضای احتمال کامل (Ω, \mathcal{F}, P) با یک فیلتر $\{\mathcal{F}_t: 0 \leq t \leq T\} \subset \mathcal{F}$ صادق در شرایط معمولی (صعودی است و پیوستگی راست دارد به‌طوری که \mathcal{F} شامل همه مجموعه p جزئی در \mathcal{F} است) می‌باشد. فرض می‌کنیم که مقدار اولیه X_0 مستقل از فرآیند وینر است و $E[|X_0|^2] < \infty$. بنابراین a_i و b_{ij} را توابع اندازه پذیر و صادق در شرایط لیپ‌شیتز و رشد خطی کراندار در x در نظر می‌گیریم یعنی،

$$|a_i(t, x) - a_i(t, y)| + |b_{ij}(t, x) - b_{ij}(t, y)| \leq K|x - y|,$$

$$\forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, m$$

و برای همه $t \geq 0$ و $x \in \mathbb{R}^d$ ثابت $C > 0$ وجود دارد به طوری که،

$$|a_i(t, x)| + |b_{ij}(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, m. \quad (۷۶.۴)$$

این شرایط وجود و یکتایی جواب (۷۵.۴) را تضمین می کنند [۲]. مشابه حالت خطی یک بعدی روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را برای حالت چند بعدی (۷۵.۴) می سازیم. به این منظور

$$\hat{X}_h = [\hat{X}_{1,h}, \dots, \hat{X}_{d,h}]^t \in V_h^p = \{v: v|_{I_n} \in (P^p(I_n))^d, n = 0, \dots, N-1\},$$

را که $\forall v \in V_h^p$ و $n = 0, \dots, N-1$ است به گونه ای پیدا می کنیم که برای $i = 1, \dots, d$ داشته باشیم،

$$\int_{I_n} v' \hat{X}_{i,h} dt + \int_{I_n} v \hat{a}_i(t, \hat{X}_h) dt - v(t_{n+1}^-) \hat{X}_{i,h}(t_{n+1}^-) + v(t_n^+) \hat{X}_{i,h}(t_n^-) = 0, \quad (۷۷.۴)$$

که

$$\begin{aligned} \hat{a}_i(t, \hat{X}_h(t)) = & a_i(t, \hat{X}_h(t)) - \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d b_{kj}(t, \hat{X}_h(t)) \frac{\partial b_{ij}(t, \hat{X}_h(t))}{\partial x_k} \\ & + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t, \hat{X}_h(t)) \frac{\Delta W_n^j}{h_n} \end{aligned} \quad (۷۸.۴)$$

به طوری که $t \in I_n$ است. جمله دوم سمت راست (۷۸.۴) جمله اصلاح شده است.

فصل ۵

مثال عددی

در این بخش چندین مثال عددی را مطرح می‌کنیم تا همگرایی روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را نشان دهیم. فرض کنید $X^{(j)}(T)$ و $\hat{X}_h^{(j)}(T)$ به ترتیب جواب دقیق و جواب تقریبی در نقطه $t_N = T$ در زامین شبیه سازی باشند. خطای کلی زامین شبیه سازی از جواب دقیق و جواب تقریبی در لحظه T به صورت $\epsilon_j = |X^{(j)}(T) - \hat{X}_h^{(j)}(T)|$ است. در تمام آزمایشات عددی میانگین خطای مطلق $\hat{\epsilon}$ را به صورت $\hat{\epsilon} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \epsilon_j$ تعریف می‌کنیم که برای تخمین خطای روش گالرکین ناپیوسته تصادفی مورد استفاده قرار می‌گیرد به طوری که در آن M تعداد کل شبیه سازی‌های تصادفی را نشان می‌دهد. توجه کنید که $\hat{\epsilon}$ تقریبی از خطای میانگین $E[|X(T) - \hat{X}_h(T)|]$ است. مرتبه همگرایی $\hat{\alpha}$ را با $\hat{\alpha} = \frac{\ln(\hat{\epsilon}^{N_1}/\hat{\epsilon}^{N_2})}{\ln(N_1/N_2)}$ تعریف می‌کنیم که $\hat{\epsilon}^N$ میانگین خطای مطلق N عنصر است که برای اندازه‌گیری خواص همگرایی روش گالرکین ناپیوسته تصادفی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در عمل از مقادیر مختلف h استفاده شده است. برای هر طول گام h ، M با نویزهای مختلف اجرا می‌شود. در تمام آزمایشات از یک مولد عدد تصادفی برای تولید اعداد شبه تصادفی مستقل از توزیع $N(0, 1)$ استفاده می‌کنیم.

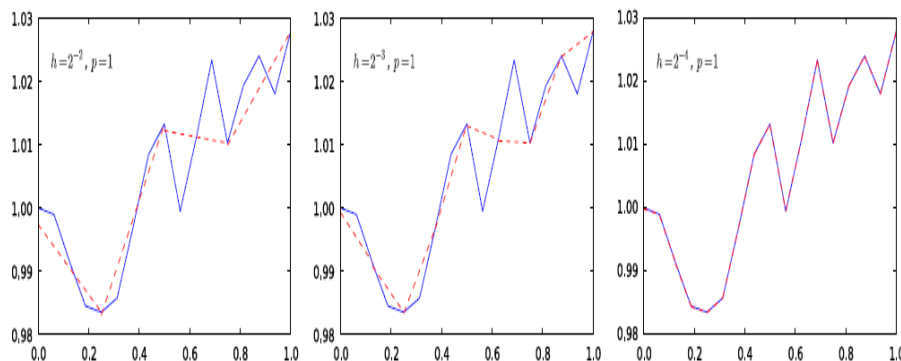
مثال ۱.۰.۵. روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را برای معادله دیفرانسیل تصادفی زیر با نویز جمعی در نظر می‌گیریم،

$$dX(t) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{1+t}} - \frac{1}{2(1+t)} X(t) \right) dt + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1+t}} dW(t), t \in [0, T], X(0) = 1. \quad (1.5)$$

جواب دقیق مسأله مقدار اولیه (۱.۵) به صورت زیر است،

$$X(t) = \frac{X(\circ)}{\sqrt{1+t}} + \frac{\beta}{\sqrt{1+t}}(t + \alpha W(t)).$$

معادله (۱.۵) را با $\alpha = 0.1$ و $\beta = 0.5$ در نظر می‌گیریم. توجه کنید که توابع رانش و انتشار در فرضیات قضیه ۲.۵.۴ صدق می‌کنند. معادله (۱.۵) را برای $n = 4$ یکنواخت $N = 4n$ به طوری که $n = 1, \dots, 10$ حل می‌کنیم. جواب روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را در فضای P^p به طوری که $p = 1-4$ حساب می‌کنیم. در شکل ۱.۵ جواب دقیق و جواب روش گالرکین ناپیوسته تصادفی از مسیر نمونه‌ای را با $N = 4, 8, 16$ و $P = 1$ و $T = 1$ ارائه دادیم. در جدول ۱.۵، 10000 مسیر نمونه‌ای را شبیه سازی می‌کنیم تا با استفاده از $T = 1$ خطای ϵ و مرتبه همگرایی را نشان دهیم. این نتیجه نشان می‌دهد که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی همگرایی قوی با مرتبه $2P + 1$ دارد. علامت * نشان دهنده این است که مرتبه خطا همراه با خطای گرد کردن است. همانند حالت قطعی، روش گالرکین ناپیوسته تصادفی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی با نویز جمعی در پایان هر مرحله جواب ناپیوسته با مرتبه همگرایی $\mathcal{O}(h^{2p+1})$ نتیجه می‌دهد.



شکل ۱.۵: جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط چین) با $p = 1$ و $h = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۱.۰.۵.

مثال ۲.۰.۵. روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را برای معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتو خطی زیر بکار می‌بریم،

$$dX(t) = -\frac{\alpha}{1+t}X(t)dt + \frac{1}{(1+t)^\alpha}dW(t), \quad t \in [0, 1], X(\circ) = X_\circ. \quad (2.5)$$

جواب دقیق به صورت زیر است،

$$X(t) = \frac{X_\circ + W(t)}{(1+t)^\alpha}.$$

جدول ۱.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $T = 1$ از مثال ۱.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 4n; n = 1, 2, \dots, 10$.

N	p=1		p=2		p=3		p=4	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
4	1.4809e-4	NA	1.0300e-5	NA	5.3539e-7	NA	2.7821e-8	NA
8	3.4358e-5	2.1077	7.3376e-7	3.8112	1.4068e-8	5.2501	2.8040e-10	6.6326
12	1.2187e-5	2.5561	1.2608e-7	4.3439	1.2456e-9	5.9789	1.3067e-11	7.5619
16	5.5593e-6	2.7285	3.3681e-8	4.5883	2.0120e-10	6.3373	1.2940e-12	8.0379
20	2.9714e-6	2.8074	1.1768e-8	4.7124	4.6838e-11	6.5321	2.0272e-13	8.3070
24	1.7652e-6	2.8564	4.9141e-9	4.7898	1.3919e-11	6.6556	4.3262e-14	8.4716
28	1.1297e-6	2.8951	2.3283e-9	4.8457	4.9229e-12	6.7424	1.1579e-14	8.5508
32	7.6632e-7	2.9066	1.2148e-9	4.8717	1.9879e-12	6.7912	3.7361e-15	8.4709*
36	5.4252e-7	2.9323	6.8163e-10	4.9064	8.8791e-13	6.8426	1.4399e-15	8.0953*
40	3.9838e-7	2.9310	4.0637e-10	4.9090	4.3132e-13	6.8528	8.1237e-16	5.4323*

معادله (۲.۵) را با $\alpha = 5$ و $X_0 = 10$ در نظر می‌گیریم. توجه کنید که توابع رانش و انتشار در فرضیات قضیه ۲.۵.۴ صدق می‌کنند. مسأله (۲.۵) را با استفاده از پارامترها و مش مشابه با مثال ۱.۰.۵ حل می‌کنیم. جواب روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را در فضای P^p به طوری که $p = 0 - 4$ حساب می‌کنیم. در شکل ۲.۵ جواب دقیق و جواب روش گالرکین ناپیوسته تصادفی از مسیر نمونه‌ای را با $N = 4, 8, 16$ و $P = 1$ و $T = 1$ ارائه می‌دهیم. در جدول ۲.۵، 10000 مسیر نمونه‌ای را شبیه سازی می‌کنیم تا با استفاده از $T = 1$ خطای $\hat{\epsilon}$ و مرتبه همگرایی را نشان دهیم. این نتایج نشان می‌دهند که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی همگرایی قوی از مرتبه $2p+1$ دارد. علامت * نشان دهنده‌ی این است که مرتبه خطا همراه با خطای گرد کردن است. در مثال قبل تنها معادلات دیفرانسیل تصادفی با نویز جمعی را در نظر گرفتیم. مشابه حالت قطعی به نظر می‌رسد زمانی که از چند جمله‌ای‌های تکه‌ای از درجه‌ی p استفاده می‌کنیم، مرتبه همگرایی $2p+1$ باشد. در مثال بعد معادله دیفرانسیل تصادفی با نویز ضربی را در نظر می‌گیریم. اگر چه توابع رانش و انتشار در فرضیات قضیه ۲.۵.۴ صدق نمی‌کنند اما مشاهده می‌کنیم که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی با نویز ضربی در پایان هر مرحله جواب ناپیوسته با مرتبه همگرایی $O(h^p)$ را نتیجه می‌دهد.

مثال ۳.۰.۵. روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را برای مسأله زیر بکار می‌بریم،

$$dX(t) = \frac{1}{4} \sin(2X(t))dt + \sin(X(t))dW(t), \quad t \in [0, \pi], X(0) = X_0. \quad (3.5)$$

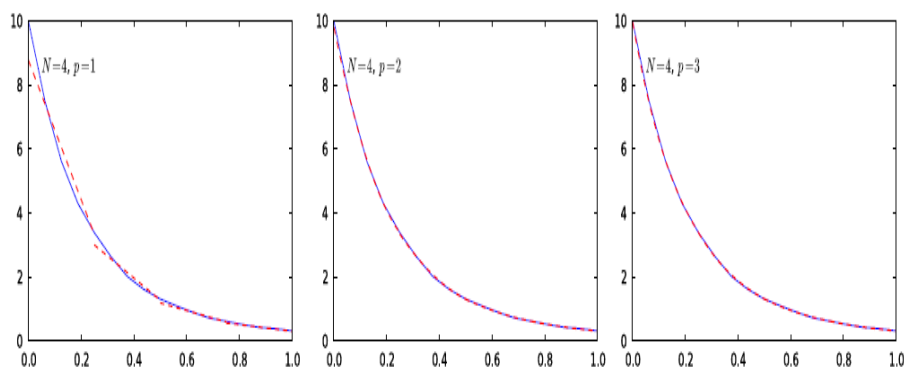
جواب دقیق این مسأله مقدار اولیه به صورت زیر است،

$$X(t) = 2 \arctan \left(\tan\left(\frac{X_0}{2}\right) e^{W(t)} \right).$$

که $X_0 = 1$ در نظر می‌گیریم. مسأله (۳.۵) را با استفاده از روش گالرکین ناپیوسته تصادفی از معادله (۱۷.۴) برای مش یکنواخت $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$ و فضای $V_h^p; p = 1 - 4$ حل

جدول ۲.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 0 - 4$ و $M = 10000$ و $T = 1$ از مثال ۲.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 4n; n = 1, 2, \dots, 10$.

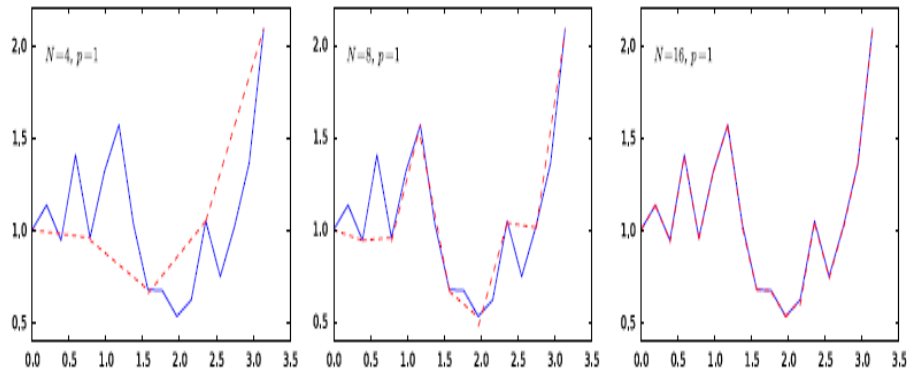
N	p=0		p=1		p=2		p=3		p=4	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
4	5.2466e-1	NA	9.5847e-3	NA	8.6135e-5	NA	3.1414e-7	NA	4.0565e-10	NA
8	2.5724e-1	1.0283	1.3160e-3	2.8646	2.9514e-6	4.8671	2.7656e-9	6.8276	9.3196e-13	8.7658
12	1.6932e-1	1.0314	4.0460e-4	2.9088	4.0084e-7	4.9239	1.6736e-10	6.9177	2.5245e-14	8.9001
16	1.2598e-1	1.0278	1.7407e-4	2.9319	9.6603e-8	4.9463	2.2687e-11	6.9463	1.9350e-15	8.9282
20	1.0025e-1	1.0240	9.0211e-5	2.9456	3.1948e-8	4.9587	4.7994e-12	6.9611	2.7758e-16	8.702*
24	8.3223e-2	1.0210	5.2637e-5	2.9548	1.2917e-8	4.9666	1.3468e-12	6.9699	1.6712e-16	2.783*
28	7.1129e-2	1.0187	3.3346e-5	2.9613	6.0028e-9	4.9715	4.5960e-13	6.9744	1.7920e-16	-0.453*
32	6.2097e-2	1.0169	2.2440e-5	2.9662	3.0891e-9	4.9753	1.8101e-13	6.9783	1.8324e-16	-0.167*
36	5.5100e-2	1.0150	1.5816e-5	2.9700	1.7186e-9	4.9785	7.9542e-14	6.9812	1.9239e-16	-0.414*
40	4.9517e-2	1.0139	1.1563e-5	2.9730	1.0169e-9	4.9806	3.8110e-14	6.9837	1.9721e-16	-0.235*



شکل ۲.۵: جواب دقیق (خطهای یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط چین) با $p = 1, 2, 3$ و $N = 4$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۲.۰.۵.

می‌کنیم. در شکل ۲.۵ جواب دقیق از مسیر نمونه‌ای تصادفی را در مقابل تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی متناظر با آن رسم کردیم تا وقتی که h کاهش می‌یابد و $p = 1$ است نشان دهیم جواب گالرکین ناپیوسته تصادفی به جواب دقیق همگرا است. واضح است که تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی برای این مسأله همگرا است. در جدول ۲.۵ خطای $\hat{\epsilon}$ و مرتبه همگرایی را در $t = \pi$ براساس 10000 مسیر نمونه‌ای نشان دادیم. این نتایج نشان می‌دهند که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی زمانی که از چند جمله‌ای‌های تکه‌ای از درجه p استفاده می‌کنیم همگرایی قوی با مرتبه p دارد. علامت * نشان دهنده این است که مرتبه خطا همراه با خطای گرد کردن است.

مثال ۲.۰.۵. روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را برای معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) با



شکل ۳.۵: جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط چین) با $p = 1$ و $N = 4, 8, 16$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۳.۰.۵.

جدول ۳.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = \pi$ از مثال ۳.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 2^n; n = 1, 2, \dots, 10$.

N	p=1		p=2		p=3		p=4	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
2^2	2.1864e-2	NA	4.0279e-4	NA	2.5105e-5	NA	4.9610e-7	NA
2^3	1.1736e-2	8.9761e-1	1.1471e-4	1.8121	4.2838e-6	2.5510	4.5737e-8	3.4392
2^4	5.9687e-3	9.7542e-1	2.8944e-5	1.9866	6.2946e-7	2.7667	3.8138e-9	3.5840
2^5	3.0102e-3	9.8755e-1	7.1833e-6	2.0106	8.7902e-8	2.8402	3.0303e-10	3.6537
2^6	1.4959e-3	1.0088	1.6659e-6	2.1084	1.1157e-8	2.9780	1.8639e-11	4.0231
2^7	7.3949e-4	1.0164	3.8947e-7	2.0967	1.3350e-9	3.0630	1.1083e-12	4.0719
2^8	3.6527e-4	1.0176	9.2612e-8	2.0722	1.5674e-10	3.0903	6.5841e-14	4.0732
2^9	1.8297e-4	9.9734e-1	2.2271e-8	2.0560	1.8716e-11	3.0660	6.3800e-15	3.3673*
2^{10}	9.1449e-5	1.0006	5.4196e-9	2.0389	2.2383e-12	3.0638	6.4196e-15	-8.9184e-3*

ضرایب رانش و انتشار خطی زیر بکار می‌بریم،

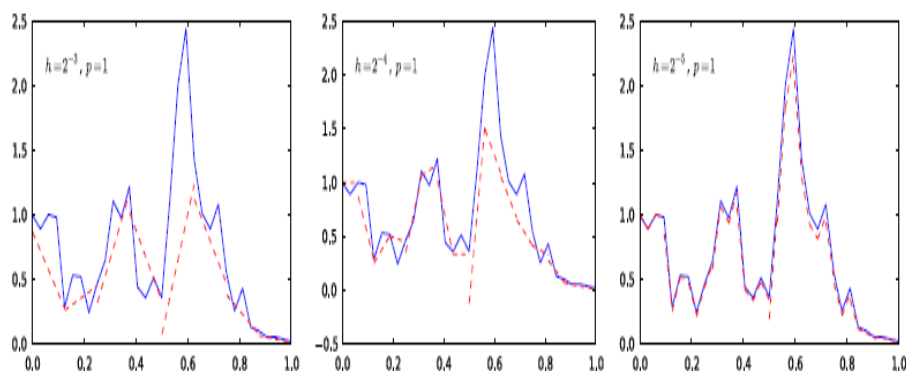
$$dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dW(t), \quad t \in [0, 1], X(0) = X_0. \quad (4.5)$$

جواب دقیق از مسأله مقدار اولیه (۴.۵) به صورت زیر است،

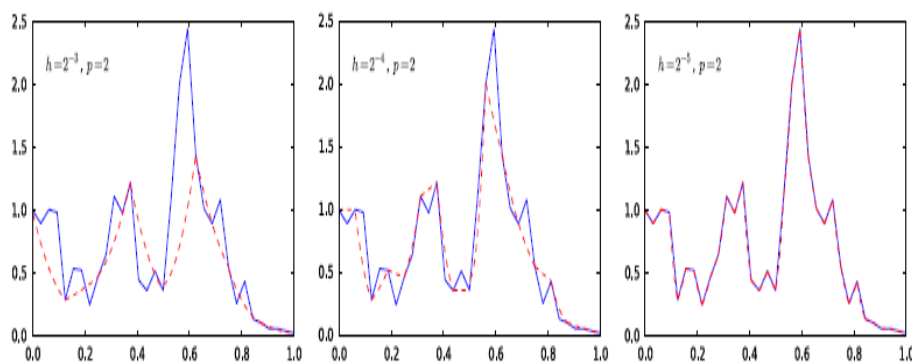
$$X(t) = X_0 \exp \left(\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + bW(t) \right).$$

که $a = 1$ ، $b = 3$ و $X_0 = 1$ را در (۴.۵) در نظر می‌گیریم. مسأله (۴.۵) را با استفاده از روش گالرکین ناپیوسته تصادفی از معادله (۱۷.۴) برای مش یکنواخت $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$ و فضای $P^p; p = 1, \dots, 4$ حل می‌کنیم. در شکل‌های ۴.۵ تا ۷.۵ جواب دقیق از مسیر نمونه‌ای تصادفی را در مقابل تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی متناظر با آن رسم کردیم تا وقتی که h کاهش می‌یابد و $p = 1, \dots, 4$ است نشان دهیم جواب گالرکین ناپیوسته تصادفی به جواب

دقیق همگرا است. واضح است که تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی برای این مسأله همگرا است. در جدول‌های ۴.۵ تا ۶.۵ میانگین خطای مطلق $\hat{\epsilon}$ و مرتبه همگرایی را با استفاده از $M = 1000$ ، $M = 10000$ و $M = 100000$ مسیر نمونه‌ای تصادفی را نشان دادیم. این نتایج نشان می‌دهند که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی زمانی که از چند جمله‌ای‌های تکه‌ای از درجه p استفاده می‌کنیم همگرایی قوی با مرتبه p دارد. به همین ترتیب می‌توان نتیجه مشابهی برای پارامترهای دیگر گرفت.

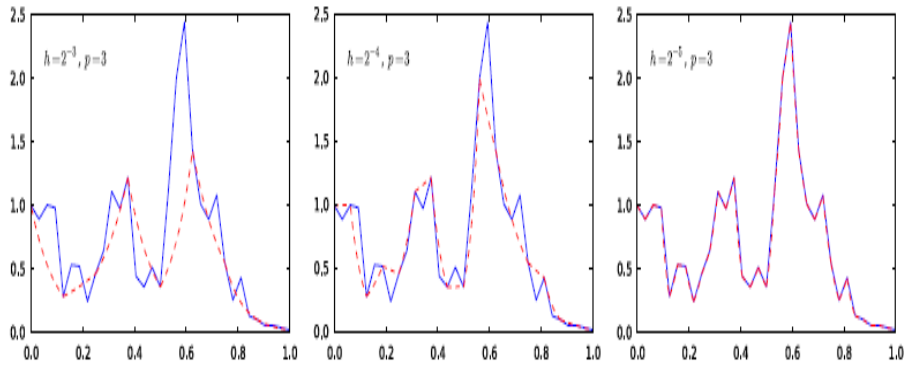


شکل ۴.۵: جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط چین) با $p = 1$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۴.۰.۵.

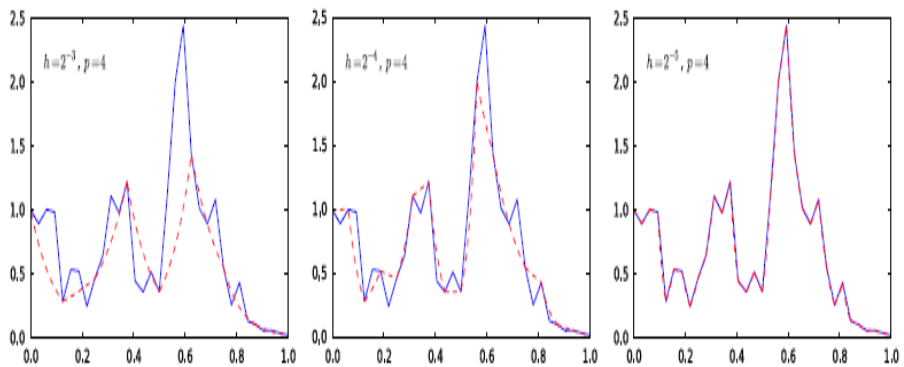


شکل ۵.۵: جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط چین) با $p = 2$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۴.۰.۵.

ملاحظه ۱.۰.۵. همانطور که در مثال قبل مشاهده کردید حتی اگر توابع رانش و انتشار در فرضیات قضیه ۲.۵.۴ صدق نکنند (به عنوان مثال $b(t, X) = 3X(t)$ کراندار نیست) می‌بینیم که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی با نویز ضربی در پایان هر مرحله جواب ناپیوسته با مرتبه همگرایی $\mathcal{O}(h^p)$ نتیجه می‌دهد.



شکل ۶.۵: جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط چین) با $p = 3$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۴.۰.۵.



شکل ۷.۵: جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط چین) با $p = 4$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۴.۰.۵.

جدول ۴.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 1000$ و $t = 1$ از مثال ۴.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$.

N	$p=1$		$p=2$		$p=3$		$p=4$	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
2^2	6.8607e-1	NA	2.7596	NA	1.0364e-2	NA	3.6532e-4	NA
2^3	5.9619e-1	0.2026	6.1199e-2	5.4948	1.5120e-3	2.7770	2.9514e-5	3.6297
2^4	3.5140e-1	0.7627	1.0628e-2	2.5257	1.5830e-4	3.2557	1.7054e-6	4.1132
2^5	1.6835e-1	1.0616	2.4530e-3	2.1152	2.3727e-5	2.7381	1.7339e-7	3.2981
2^6	9.0416e-2	0.8968	6.4370e-4	1.9301	3.0566e-6	2.9565	1.0712e-8	4.0167
2^7	3.9785e-2	1.1844	1.3355e-4	2.2691	3.0254e-7	3.3368	5.0638e-10	4.4029
2^8	2.1080e-2	0.9163	4.1029e-5	1.7026	5.8628e-8	2.3674	6.4841e-11	2.9653
2^9	9.7367e-3	1.1144	8.6746e-6	2.2418	5.4949e-9	3.4154	2.6488e-12	4.6135
2^{10}	4.8927e-3	0.9928	2.1565e-6	2.0081	6.6035e-10	3.0568	1.5150e-13	4.1279

جدول ۵.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = 1$ از مثال ۴.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$.

N	p = 1		p = 2		p = 3		p = 4	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
2 ²	1.3705	NA	2.1398	NA	5.9216e-2	NA	6.5866e-3	NA
2 ³	9.8980e-1	0.4695	1.8002e-1	3.5712	3.5695e-3	4.0522	8.3209e-5	6.3067
2 ⁴	5.9202e-1	0.7415	2.4108e-2	2.9006	4.3188e-4	3.0470	6.0821e-6	3.7741
2 ⁵	3.0726e-1	0.9462	5.7002e-3	2.0804	6.6017e-5	2.7097	5.8803e-7	3.3706
2 ⁶	1.3537e-1	1.1826	9.9734e-4	2.5149	4.9597e-6	3.7345	1.8610e-8	4.9817
2 ⁷	6.1535e-2	1.1374	2.1326e-4	2.2255	5.0376e-7	3.2994	8.9244e-10	4.3822
2 ⁸	2.9601e-2	1.0558	5.2902e-5	2.0112	6.6851e-8	2.9137	6.4850e-11	3.7826
2 ⁹	1.4460e-2	1.0336	1.3141e-5	2.0092	8.7501e-9	2.9336	4.6658e-12	3.7969
2 ¹⁰	7.0858e-3	1.0290	3.1734e-6	2.0500	1.0326e-9	3.0830	2.6973e-13	4.1126

جدول ۶.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 100000$ و $t = 1$ از مثال ۴.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$.

N	p = 1		p = 2		p = 3		p = 4	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
2 ²	1.6539	NA	4.9745	NA	8.1428e-2	NA	2.6114e-2	NA
2 ³	1.2188	0.4404	4.8266e-1	3.3655	8.0544e-3	3.3377	2.4184e-4	6.7546
2 ⁴	6.8551e-1	0.8302	2.7920e-2	4.1116	4.9519e-4	4.0237	7.0316e-6	5.1041
2 ⁵	3.3787e-1	1.0207	5.3801e-3	2.3756	5.2283e-5	3.2436	3.7997e-7	4.2099
2 ⁶	1.4973e-1	1.1741	1.0798e-3	2.3169	5.2971e-6	3.3031	1.9818e-8	4.2610
2 ⁷	6.9233e-2	1.1129	2.4690e-4	2.1288	6.2144e-7	3.0915	1.2220e-9	4.0195
2 ⁸	3.2745e-2	1.0802	5.7753e-5	2.0960	7.2459e-8	3.1004	7.0155e-11	4.1226
2 ⁹	1.6173e-2	1.0177	1.4407e-5	2.0031	9.1385e-9	2.9871	4.4770e-12	3.9700
2 ¹⁰	7.9632e-3	1.0222	3.5071e-6	2.0384	1.1011e-9	3.0530	2.6924e-13	4.0556

مثال ۵.۰.۵. مسأله مقدار اولیه تصادفی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید،

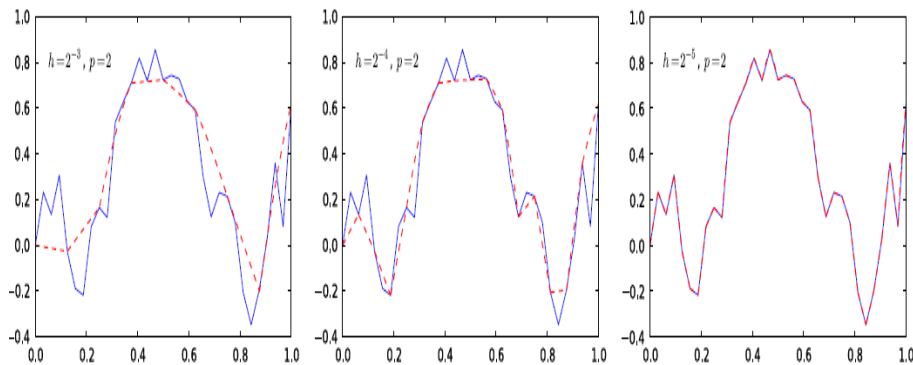
$$dX(t) = -a^\gamma X(t)(1 - X^\gamma(t))dt + a(1 - X^\gamma(t))dW(t), \quad t \in [0, 1], X(0) = X_0. \quad (5.5)$$

جواب دقیق از مسأله مقدار اولیه (۵.۵) به صورت زیر است،

$$X(t) = \tanh(aW(t) + \arctanh(X_0)),$$

که $a = 1/5$ و $X(0) = 0$ را در (۵.۵) در نظر می گیریم. مسأله (۵.۵) را با استفاده از پارامترها و مش مشابه مثال ۴.۰.۵ و 10000 مسیر نمونه ای حل می کنیم. در شکل ۸.۵ جواب دقیق از مسیر نمونه ای تصادفی را در مقابل تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی متناظر با آن رسم کردیم تا وقتی که h کاهش می یابد نشان دهیم جواب گالرکین ناپیوسته تصادفی به جواب دقیق همگرا است. واضح است که تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی برای این مسأله همگرا است. در جدول

۷.۵ خطای $\hat{\epsilon}$ و مرتبه همگرایی را در $t = 1$ نشان دادیم. این نتایج مرتبه همگرایی $\mathcal{O}(h^p)$ را نشان می‌دهند.



شکل ۸.۵: جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط چین) با $p = 2$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۵.۰.۵.

جدول ۷.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = 1$ از مثال ۵.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$.

N	p=1		p=2		p=3		p=4	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
2^2	7.9920e-2	NA	1.5312e-2	NA	3.0730e-4	NA	1.4403e-5	NA
2^3	3.4367e-2	1.2175	8.6589e-4	4.1443	3.5307e-5	3.1216	9.3964e-7	3.9381
2^4	1.4413e-2	1.2537	1.7837e-4	2.2793	5.1898e-6	2.7662	7.8919e-8	3.5737
2^5	6.8971e-3	1.0633	4.6032e-5	1.9542	6.7979e-7	2.9325	5.8427e-9	3.7557
2^6	3.2701e-3	1.0766	1.0620e-5	2.1158	8.0533e-8	3.0774	3.2079e-10	4.1869
2^7	1.5839e-3	1.0458	2.4959e-6	2.0892	9.3311e-9	3.1095	1.9096e-11	4.0703
2^8	7.8628e-4	1.0104	6.2035e-7	2.0084	1.1075e-9	3.0747	1.3401e-12	3.8329
2^9	3.8851e-4	1.0171	1.4896e-7	2.0582	1.2581e-10	3.1380	7.2377e-14	4.2106
2^{10}	1.9361e-4	1.0048	3.6762e-8	2.0186	1.4824e-11	3.0853	6.2527e-15	3.5330

مثال ۶.۰.۵. مسأله مقدار اولیه تصادفی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید،

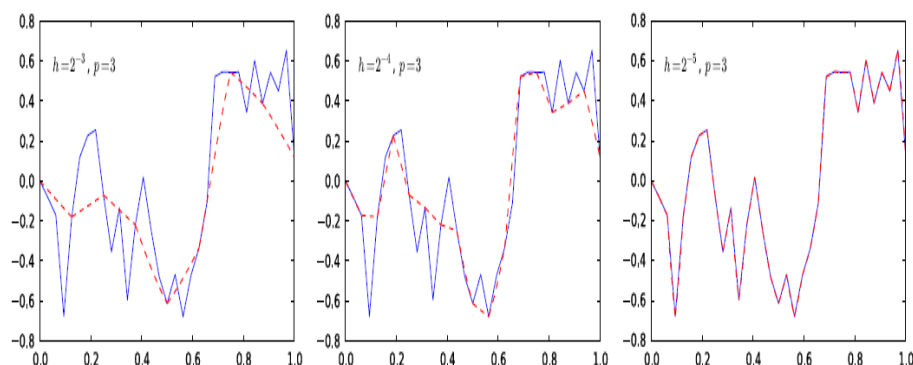
$$dX(t) = -(a+b^2 X(t))(1-X^2(t))dt + b(1-X^2(t))dW(t), \quad t \in [0, 1], X(0) = X_0. \quad (6.5)$$

جواب دقیق از مسأله مقدار اولیه (۶.۵) به صورت زیر است،

$$X(t) = \frac{(1 + X_0) \exp(-2at + 2bW(t)) + X_0 - 1}{(1 + X_0) \exp(-2at + 2bW(t)) + 1 - X_0}.$$

که $a = 1$ ، $b = 2$ و $X(0) = 0$ را در (۶.۵) در نظر می‌گیریم. مسأله (۶.۵) را با استفاده از پارامترها و مش مشابه مثال ۴.۰.۵ و 10000 مسیر نمونه‌ای حل می‌کنیم. در شکل ۹.۵ جواب

دقیق از مسیر نمونه‌ای تصادفی را در مقابل تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی متناظر با آن رسم کردیم تا وقتی که h کاهش می‌یابد نشان دهیم جواب گالرکین ناپیوسته تصادفی به جواب دقیق همگرا است. در جدول ۸.۵ خطای $\hat{\epsilon}$ و مرتبه همگرایی را در $t = 1$ نشان دادیم. این نتایج مرتبه همگرایی $O(h^p)$ را نشان می‌دهند.



شکل ۹.۵: جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط چین) با $p = 3$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ برای مسیر نمونه‌ای مثال ۶.۰.۵.

جدول ۸.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = 1$ از مثال ۶.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$.

N	p = 1		p = 2		p = 3		p = 4	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
2^2	3.3303e-1	NA	8.7071e-2	NA	8.2656e-3	NA	4.3144e-4	NA
2^3	1.5824e-1	1.0735	6.1879e-2	0.4927	4.6146e-4	4.1628	1.9302e-5	4.4824
2^4	5.6072e-2	1.4968	4.1606e-3	3.8946	4.4449e-5	3.3760	1.2721e-6	3.9234
2^5	1.9865e-2	1.4971	2.5913e-4	4.0050	5.1166e-6	3.1189	7.3800e-8	4.1075
2^6	9.1618e-3	1.1165	6.2432e-5	2.0533	5.9821e-7	3.0965	4.2412e-9	4.1211
2^7	4.4150e-3	1.0532	1.5491e-5	2.0109	7.3380e-8	3.0272	2.8078e-10	3.9170
2^8	2.1691e-3	1.0253	3.7994e-6	2.0276	8.0821e-9	3.1826	1.6835e-11	4.0599
2^9	1.0667e-3	1.0239	9.4603e-7	2.0058	9.5111e-10	3.0871	1.0007e-12	4.0724
2^{10}	5.2765e-4	1.0156	2.3100e-7	2.0340	1.0517e-10	3.1768	5.9815e-14	4.0643

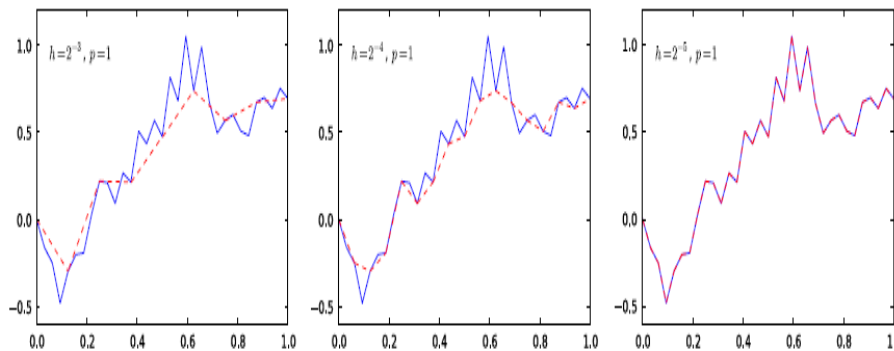
مثال ۷.۰.۵. مسأله مقدار اولیه تصادفی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید،
(۷.۵)

$$dX(t) = \left(\frac{1}{4} X(t) + \sqrt{X^2(t) + 1} \right) dt + \sqrt{X^2(t) + 1} dW(t), \quad t \in [0, 1], X(0) = X_0.$$

جواب دقیق از مسأله مقدار اولیه (۷.۵) به صورت زیر است،

$$X(t) = \sinh(t + W(t)).$$

مسأله (۷.۵) را با استفاده از پارامترها و مش مشابه مثال ۴.۰.۵ حل می‌کنیم. در شکل ۱۰.۵ جواب دقیق از مسیر نمونه‌ای تصادفی را در مقابل تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی متناظر با آن رسم کردیم تا وقتی که h کاهش می‌یابد نشان دهیم جواب گالرکین ناپیوسته تصادفی به جواب دقیق همگرا است. در جدول ۹.۵ از ۱۰۰۰۰ مسیر نمونه‌ای را شبیه سازی کردیم تا خطای $\hat{\epsilon}$ و مرتبه همگرایی را در $t = 1$ با استفاده از $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$ نشان دهیم. آزمایش فوق را برای $p = 1 - 4$ تکرار می‌کنیم. این نتایج نشان می‌دهند که روش گالرکین ناپیوسته همگرایی قوی از مرتبه p دارد.



شکل ۱۰.۵: جواب دقیق (خط‌های یکنواخت) و تقریب گالرکین ناپیوسته تصادفی (خط چین) از مسیر نمونه‌ای در مثال ۷.۰.۵ با استفاده از $p = 1$ و $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$.

جدول ۹.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = 1$ از مثال ۷.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$.

N	p=1		p=2		p=3		p=4	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
2^2	3.4908e-2	NA	1.3816e-3	NA	3.0266e-5	NA	7.3986e-7	NA
2^3	9.9339e-3	1.8131	1.6468e-4	3.0687	1.4974e-6	4.3372	2.5902e-8	4.8361
2^4	3.1122e-3	1.6744	2.6476e-5	2.6369	9.9697e-8	3.9087	8.5112e-10	4.9275
2^5	1.1413e-3	1.4473	4.6463e-6	2.5105	7.9568e-9	3.6473	3.7413e-11	4.5077
2^6	4.9535e-4	1.2041	1.0068e-6	2.2063	7.9698e-10	3.3196	1.9899e-12	4.2328
2^7	2.2563e-4	1.1345	2.2006e-7	2.1938	8.0070e-11	3.3152	1.0649e-13	4.2240
2^8	1.0660e-4	1.0817	5.0882e-8	2.1127	8.7989e-12	3.1859	8.0655e-15	3.7227
2^9	5.2192e-5	1.0303	1.1985e-8	2.0859	1.0290e-12	3.0961	5.5781e-15	0.5320
2^{10}	2.5800e-5	1.0164	2.9141e-9	2.0401	1.2694e-13	3.0191	8.9257e-15	-0.6782

مثال ۸.۰.۵. روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را برای دستگاه خطی سخت دوبردی زیر بکار می‌بریم،

$$dX(t) = AX(t)dt + BX(t)dW(t), \quad t \in [0, 1], X(0) = X_0 = [1, 2]^t. \quad (۸.۵)$$

که در آن

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

جواب دقیق از مسأله (۸.۵) به صورت زیر است،

$$X(t) = p \begin{pmatrix} \exp(\rho^+(t)) & 0 \\ 0 & \exp(\rho^-(t)) \end{pmatrix} p^{-1} X_0, \quad p = p^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

که

$$\rho^{(\pm)}(t) = (a - \frac{1}{2}b^2 \pm a)t + bW(t),$$

است. برای مولفه‌های قطعی اگر a بزرگ باشد آنگاه معادله سخت است. پارامترها را به صورت $a = 100$ و $b = 0.5$ انتخاب می‌کنیم و روش گالرکین ناپیوسته تصادفی (۷۷.۴) استفاده می‌کنیم تا معادله (۸.۵) را حل کنیم. در جدول ۱۰.۵، $M = 10000$ مسیر نمونه‌ای را شبیه سازی کردیم و تقریب خطای $k = 1, 2$ $\hat{\epsilon}_k = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |X_k^{(j)}(T) - X_{k,h}^{(j)}(T)|$ و مرتبه همگرایی $\hat{\alpha}_k = \frac{\ln(\hat{\epsilon}_k^{N_1}/\hat{\epsilon}_k^{N_2})}{\ln(N_1/N_2)}$ را در $t = 1$ با استفاده از $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$ نشان دادیم. این نتایج نشان می‌دهند که روش گالرکین ناپیوسته همگرایی قوی از مرتبه p دارد. این مثال نشان می‌دهد که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی برای حل دستگاه سخت از معادلات دیفرانسیل تصادفی مناسب است.

جدول ۱۰.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}_k$ و $\hat{\alpha}_k$ با $k = 1, 2$ برای $p = 1 - 2$ و $M = 10000$ و $t = 1$ از مثال ۸.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$.

N	p=1		p=2		p=1		p=2	
	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\epsilon}_2$	$\hat{\alpha}_2$
2 ²	1.1222e-3	NA	3.6681e-6	NA	1.1208e-3	NA	5.1256e-6	NA
2 ³	5.2711e-4	1.0902	8.4022e-7	2.1262	5.2711e-4	1.0883	8.4039e-7	2.6086
2 ⁴	2.5951e-4	1.0223	2.0497e-7	2.0354	2.5951e-4	1.0223	2.0497e-7	2.0356
2 ⁵	1.2621e-4	1.0399	4.9934e-8	2.0373	1.2621e-4	1.0399	4.9934e-8	2.0373
2 ⁶	6.3011e-5	1.0022	1.2528e-8	1.9949	6.3011e-5	1.0022	1.2528e-8	1.9949
2 ⁷	3.1174e-5	1.0153	3.0474e-9	2.0395	3.1174e-5	1.0153	3.0474e-9	2.0395
2 ⁸	1.5497e-5	1.0084	7.5430e-10	2.0144	1.5497e-5	1.0084	7.5430e-10	2.0144
2 ⁹	7.7453e-6	1.0005	1.8918e-10	1.9954	7.7453e-6	1.0005	1.8918e-10	1.9954
2 ¹⁰	3.8801e-6	0.9972	4.6298e-11	2.0307	3.8801e-6	0.9972	4.6298e-11	2.0307

ملاحظه ۲.۰.۵. تقریب $\hat{X}_h(t)$ از جواب $X(t)$ معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) در دو مرحله زیر بدست می‌آید:

۱. تقریبی از $X(t)$ را به وسیله تقریب وانگ‌زاکای $\hat{X}(t)$ ، که جواب معادله (۱۱.۴) است، می‌یابیم.

۲. تقریبی از $\hat{X}(t)$ را به وسیله تقریب گالرکین ناپیوسته $\hat{X}_h(t)$ ، که به p وابسته است، می‌یابیم.

طبق قضیه وانگ‌زاکای، در میانگین مربعات به $X(T)$ همگرا است و جواب $\hat{X}_h(T)$ از گالرکین ناپیوسته تصادفی به $\hat{X}(T)$ در میانگین مربعات همگرا است. بنابراین $\hat{X}_h(T)$ به $X(T)$ همگرا است.

بعلاوه مرتبه همگرایی در تمام نقاط $t_k; k = 1, \dots, N$ از مش، یکسان است. سرانجام چون $W(t_k) = \hat{W}(t_k)$ است لذا برای هر $k = 1, \dots, N$ داریم، $X(t_k) = \hat{X}(t_k)$. به ویژه برای مثال‌های عددی گفته شده، $X(T) = \hat{X}(T)$ برقرار است. در نتیجه خطای تقریب وانگ‌زاکای را در نظر نمی‌گیریم زیرا $X(t_k) - \hat{X}_h(t_k^-) = \hat{X}(t_k) - \hat{X}_h(t_k^-)$ است. با این حال برای $t \neq t_k$ داریم، $X(t) \neq \hat{X}(t)$ زیرا در حالت کلی در نقاط میانی $W(t) = \hat{W}(t)$ است. در این حالت سرعت همگرایی کم است و با افزایش p افزایش نمی‌یابد زیرا خطای تقریب وانگ‌زاکای زیاد است. توجه کنید که سرعت همگرایی جواب وانگ‌زاکای کندتر از تقریب اوپلر است.

برای بررسی سرعت همگرایی جواب روش گالرکین ناپیوسته تصادفی در نقاط میانی، مثال ۱۰.۵ را برای پارامترها و مش یکسان تکرار می‌کنیم. در جدول ۱۱.۵ خطای $\hat{\epsilon}$ و مرتبه همگرایی را در نقطه $t = \frac{2.025}{3.048} = 0.98876953125$ نشان می‌دهیم که نقطه میانی نیست. این نتایج نشان می‌دهند که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی همگرا است اما سرعت همگرایی آن کم است زیرا سرعت همگرایی تقریب وانگ‌زاکای $\hat{X}(t)$ از جواب اصلی $X(t)$ کم است.

مثال ۳.۰.۵ را تکرار می‌کنیم. در جدول ۱۲.۵ خطای $\hat{\epsilon}$ و مرتبه همگرایی را در $t = \frac{2.025}{3.048} \pi \approx 3.10631109546$ نشان می‌دهیم. این نتایج نشان می‌دهند که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی همگرا است اما سرعت همگرایی آن کم است زیرا سرعت همگرایی تقریب وانگ‌زاکای $\hat{X}(t)$ از جواب اصلی $X(t)$ کم است.

جدول ۱۱.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = \frac{2.025}{3.048}$ از مثال ۱۰.۵ روی مش یکنواخت $10, \dots, 1024$.

N	p=1		p=2		p=3		p=4	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
4	2.8385e-3	NA	2.8382e-3	NA	2.8382e-3	NA	2.8382e-3	NA
8	2.7855e-3	2.7195e-2	2.7853e-3	2.7124e-2	2.7853e-3	2.7135e-2	2.7853e-3	2.7134e-2
16	2.6294e-3	8.3228e-2	2.6293e-3	8.3167e-2	2.6293e-3	8.3167e-2	2.6293e-3	8.3167e-2
32	2.3237e-3	1.7830e-1	2.3236e-3	1.7834e-1	2.3236e-3	1.7834e-1	2.3236e-3	1.7834e-1
64	1.5574e-3	5.7724e-1	1.5575e-3	5.7715e-1	1.5575e-3	5.7715e-1	1.5575e-3	5.7715e-1
128	1.2705e-3	2.9382e-1	1.2705e-3	2.9384e-1	1.2705e-3	2.9384e-1	1.2705e-3	2.9384e-1
256	5.9239e-4	1.1007	5.9239e-4	1.1007	5.9239e-4	1.1007	5.9239e-4	1.1007
512	5.4693e-4	1.1520e-1	5.4692e-4	1.1520e-1	5.4692e-4	1.1520e-1	5.4692e-4	1.1520e-1
1024	4.4670e-4	2.9205e-1	4.4670e-4	2.9204e-1	4.4670e-4	2.9204e-1	4.4670e-4	2.9204e-1

جدول ۱۲.۵: مقادیر $\hat{\epsilon}$ و $\hat{\alpha}$ برای $p = 1 - 4$ و $M = 10000$ و $t = \frac{2025}{3048}\pi$ از مثال ۳.۰.۵ روی مش یکنواخت $N = 2^n; n = 2, \dots, 10$.

N	p=1		p=2		p=3		p=4	
	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\epsilon}$	$\hat{\alpha}$
4	8.6270e-2	NA	8.0827e-2	NA	8.0770e-2	NA	8.0759e-2	NA
8	7.8227e-2	1.4119e-1	7.7458e-2	6.1419e-2	7.7478e-2	6.0034e-2	7.7471e-2	5.9978e-2
16	7.3826e-2	8.3534e-2	7.3534e-2	7.4999e-2	7.3545e-2	7.5159e-2	7.3544e-2	7.5037e-2
32	6.4704e-2	1.9027e-1	6.4585e-2	1.8722e-1	6.4585e-2	1.8741e-1	6.4584e-2	1.8743e-1
64	4.3128e-2	5.8524e-1	4.3101e-2	5.8349e-1	4.3095e-2	5.8367e-1	4.3095e-2	5.8366e-1
128	3.1332e-2	4.6099e-1	3.1371e-2	4.5828e-1	3.1370e-2	4.5814e-1	3.1370e-2	4.5813e-1
256	1.5259e-2	1.0380	1.5256e-2	1.0401	1.5256e-2	1.0400	1.5256e-2	1.0400
512	1.4579e-2	6.5795e-2	1.4573e-2	6.6089e-2	1.4573e-2	6.6088e-2	1.4573e-2	6.6088e-2
1024	1.1682e-2	3.1960e-1	1.1680e-2	3.1918e-1	1.1680e-2	3.1917e-1	1.1680e-2	3.1917e-1

۱.۵ نتایج ملاحظات

در این پایان نامه به حل معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتو با استفاده از روش گالرکین ناپیوسته مرتبه بالا پرداخته شد. برای این منظور ابتدا به کمک تقریب فرآیند وینر برای معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتو به یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضریب تصادفی رسیدیم و سپس به کمک قضیه وانگ زاکای نشان دادیم که جواب معادله فوق به جواب معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو همگرا نیست و سپس تغییری به جمله رانش معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب تصادفی اعمال کردیم و به کمک قضیه وانگ زاکای نشان دادیم که جواب معادله دیفرانسیل با جمله رانش تغییر یافته به جواب معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو همگرا است. از آنجایی که از تقریب فرآیند وینر در معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو استفاده کردیم و وابستگی فرآیند وینر را به مشتق از بین بردیم، می توانیم روش گالرکین ناپیوسته را روی معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو با جمله رانش تغییر یافته اعمال کنیم. به این ترتیب می توانیم روش گالرکین ناپیوسته تصادفی را بیان کنیم. روش گالرکین ناپیوسته تصادفی A - پایدار است که می تواند برای تقریب معادلات دیفرانسیل تصادفی سخت مناسب باشد. بعلاوه این روش در میانگین مربعات همگرا است. مثال های عددی مطرح شده نشان می دهند که روش گالرکین ناپیوسته تصادفی که برای معادله دیفرانسیل تصادفی با نویز ضربی بکار بردیم زمانی که از چند جمله ای های تکه ای از درجه p استفاده می کنیم مرتبه همگرایی بالاتری از p دارد و زمانی که معادلات دیفرانسیل تصادفی را با نویز جمعی بکار می بریم روش گالرکین ناپیوسته تصادفی مشابه حالت قطعی، همگرایی قوی با مرتبه $1 + 2p$ دارد. ویژگی همگرایی برای حالت خطی و غیرخطی به صورت مشابه نشان داده شده است. لذا می توان گفت که روش گالرکین ناپیوسته به ویژه برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی ایتو مناسب است.

مراجع

- [1] B. Øksendal, Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer, 2010.
- [2] P. Kloeden, E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, in: Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [3] E. Platen, An introduction to numerical methods for stochastic differential equations, Acta Numer. 8 (1999) 197–246.
- [4] X. Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, Horwood Pub., Chichester, 2008.
- [5] D.J. Higham, An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations, SIAM Rev. 43 (2001) 525–546.
- [6] D.J. Higham, X. Mao, A.M. Stuart, Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations, SIAM J. Numer. Anal. 40 (2002) 1041–1063.
- [7] G.N. Milstein, M.V. Tretyakov, Stochastic Numerics for Mathematical Physics, Springer Berlin, Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [8] K. Burrage, P. Burrage, High strong order explicit Runge–Kutta methods for stochastic ordinary differential equations, Appl. Numer. Math. 22 (1996) 81–101.
- [9] M. Hutzenthaler, A. Jentzen, M. Noll, Strong convergence rates and temporal regularity for Cox–Ingersoll–Ross processes and Bessel processes with accessible boundaries, 2014. Preprint. <http://arxiv.org/abs/1403.6385>.
- [10] N. Hofmann, T. Müller-Gronbach, K. Ritter, Optimal approximation of stochastic differential equations by adaptive step-size control, Math. Comp. 69 (231) (2000) 1017–1034.

- [11] N. Hofmann, T. Müller-Gronbach, K. Ritter, The optimal discretization of stochastic differential equations, *J. Complexity* 17 (1) (2001) 117–153.
- [12] A. Jentzen, A. Neuenkirch, A random Euler scheme for Carathéodory differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* 224 (1) (2009) 346–359.
- [13] A. Kohatsu-Higa, A.L. Kazuhiro Yasuda, Weak approximation errors for stochastic differential equations with non-regular drift, 2015. Preprint. <http://hal.inria.fr/hal-00840211v2>.
- [14] T. Müller-Gronbach, Optimal pointwise approximation of SDEs based on Brownian motion at discrete points, *Ann. Appl. Probab.* 14 (4) (2004) 1605–1642.
- [15] T. Müller-Gronbach, Strong approximation of systems of stochastic differential equations, in: *Habilitationsschrift, Technische Universität Darmstadt*, 2002.
- [16] H.-L. Ngo, D. Taguchi, Strong rate of convergence for the Euler–Maruyama approximation of stochastic differential equations with irregular coefficients, *Math. Comp.* (2015) <http://dx.doi.org/10.1090/mcom3042>.
- [17] P. Przybyłowicz, P. Morkisz, Strong approximation of solutions of stochastic differential equations with time-irregular coefficients via randomized Euler algorithm, *Appl. Numer. Math.* 78 (2014) 80–94.
- [18] P. Przybyłowicz, Minimal asymptotic error for one-point approximation of SDEs with time-irregular coefficients, *J. Comput. Appl. Math.* 282 (2015) 98–110.
- [19] P. Przybyłowicz, Optimal global approximation of SDEs with time-irregular coefficients in asymptotic setting, *Appl. Math. Comput.* 270 (2015) 441–457.
- [20] W.H. Reed, T.R. Hill, Triangular mesh methods for the neutron transport equation, *Tech. Rep. LA-UR-73-479*, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, 1973.
- [21] B. Cockburn, G.E. Karniadakis, C.W. Shu, Discontinuous Galerkin Methods Theory, Computation and Applications, in: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 11, Springer, Berlin, 2000.
- [22] C.-W. Shu, Discontinuous Galerkin method for time-dependent problems: Survey and recent developments, in: X. Feng, O. Karakashian, Y. Xing (Eds.), *Recent Developments in Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Partial Differential Equations*, in: *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, vol. 157, Springer International Publishing, 2014, pp. 25–62.

- [23] E. Wong, M. Zakai, On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals, *Ann. Math. Statist.* (1965) 1560–1564.
- [24] E. Wong, M. Zakai, On the relation between ordinary and stochastic differential equations, *Internat. J. Engrg. Sci.* 3 (2) (1965) 213–229.
- [25] W. Rümelin, Numerical treatment of stochastic differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 19 (3) (1982) 604–613.
- [26] G.N. Milstein, Approximate integration of stochastic differential equations, *Theory Probab. Appl.* 19 (3) (1975) 557–562.
- [27] G.N. Milstein, A method of second-order accuracy integration of stochastic differential equations, *Theory Probab. Appl.* 23 (2) (1979) 396–401.
- [28] N. Ikeda, S. Nakao, Y. Yamato, A class of approximations of Brownian motion, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 13 (1977) 285–300.
- [29] S. Watanabe, N. Ikeda, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, in: North-Holland Mathematical Library, Elsevier Science, 1981.
- [30] E.J. McShane, Stochastic differential equations and models of random processes, in: *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 3: Probability Theory*, University of California Press, Berkeley, Calif., 1972.
- [31] D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan, On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle, in: *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 3: Probability Theory*, University of California Press, Berkeley, Calif., 1972.
- [32] M. Delfour, W. Hager, F. Trochu, Discontinuous Galerkin methods for ordinary differential equation, *Math. Comp.* 154 (1981) 455–473.
- [33] C. Johnson, Error estimates and adaptive time-step control for a class of one-step methods for stiff ordinary differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 25 (1988) 908–926.
- [34] P. Lesaint, P. Raviart, On a finite element method for solving the neutron transport equations, in: C. de Boor (Ed.), *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1974.

-
- [35] G. Dahlquist, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2008.
- [36] G.G. Dahlquist, A special stability problem for linear multistep methods, *BIT* 3 (1) (1963) 27–43.
- [37] K. Dekker, J. Verwer, *Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*, in: *CWI Monograph*, North-Holland, 1984.
- [38] D. Hernandez, R. Spigler, A-stability of Runge–Kutta methods for systems with additive noise, *BIT* 32 (4) (1992) 620–633.
- [39] E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. II. Stiff and Differential–Algebraic Problems*, in: *Springer Series in Computational Mathematics*, Springer, Heidelberg, New York, 2010.
- [40] O. Axelsson, A class of A -stable methods, *BIT* 9 (3) (1969) 185–199.
- [41] X. Meng, C.-W. Shu, Q. Zhang, B. Wu, Superconvergence of discontinuous Galerkin methods for scalar nonlinear conservation laws in one space dimension, *SIAM J. Numer. Anal.* 50 (5) (2012) 2336–2356.
- [42] Y. Cheng, C.-W. Shu, Superconvergence of discontinuous Galerkin and local discontinuous Galerkin schemes for linear hyperbolic and convection–diffusion equations in one space dimension, *SIAM J. Numer. Anal.* 47 (2010) 4044–4072.
- [43] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1978.
- [44] X. Mao, *Stability of Stochastic Differential Equations with Respect to Semimartingales*, Longman Scientific Technical Wiley, Harlow, Essex, England, New York, 1991.
- [45] X. Mao, *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching*, Imperial College Press, London, 2006.
- [46] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.
- [47] S. Iacus, *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations with R Examples*, Springer, New York, NY, 2008.

- [48] J. Møller, H. Madsen, From state dependent diffusion to constant diffusion in stochastic differential equations by the lamperti transform, IMMTechnical Report-2010-16, Technical University of Denmark, DTU Informatics, Building 321, 2010.
- [49] S. Adjerid, K.D. Devine, J.E. Flaherty, L. Krivodonova, A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin solutions of hyperbolic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (2002) 1097–1112.
- [50] S. Adjerid, H. Temimi, A discontinuous Galerkin method for higher-order ordinary differential equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197 (2007) 202–218.
- [51] Z. Xionga, C. Chenb, Superconvergence of rectangular finite element with interpolated coefficients for semilinear elliptic problem, *Appl. Math. Comput.* 181 (2006) 1577–1584.
- [52] Gard, T. C.,(1988), *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Dekker.
- [53] Apostol T. M. ,(1974) "Mathematical analysis," Vol. ٢ Reading, MA: Addison-Wesley.
- [54] *Computational Differential. Equations.* K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo and C. Johnson. February 23, 2009.

Abstract

In this paper, we develop a high-order discontinuous Galerkin method for solution of Itô stochastic ordinary differential equations. We first construct an approximate deterministic ordinary differential equations with a random coefficient on each element using the well-known Wong–Zakai approximation theorem. Since the resulting ordinary differential equations converges to the solution of the corresponding Stratonovich stochastic differential equations, we apply a transformation to the drift term to obtain a deterministic ordinary differential equation which converges to the solution of the original stochastic differential equations. The corrected equation is then discretized using the standard high-order discontinuous Galerkin method for deterministic ordinary differential equations. We prove that the proposed stochastic discontinuous Galerkin method is equivalent to an implicit stochastic Runge–Kutta method. Then, we study the numerical stability of the stochastic high-order discontinuous Galerkin scheme applied to linear stochastic ordinary differential equations with an additive noise term. The method is shown to be numerically stable in the mean sense. As a result, it is suitable for solving stiff stochastic differential equations. Moreover, the method is proved to be convergent in the mean-square sense.

keywords: Discontinuous Galerkin method, Brownian motion, Wiener process, Stochastic integral, Itô formula, Stochastic differential equations



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Numerical analysis

**A high-order discontinuous Galerkin method
for Ito stochastic ordinary differential
equations**

By: Masoud Khorshidian miyanaei

Supervisor

Dr Ali Mesforush

Advisor

Dr Mehdi Ghovatmand

January 2018