بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عدد رنگی دوری ابرگراف‌ها

نگارنده: حامد قدیمی حسین‌آباد

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

استاد مشاور

دکتر مهدی رضا خورسندی

شهریور ۹۶

تقدیم به پدر عزیزم، اول استادم، بزرگواری که الفبای زندگی را از او آموختم.

مادرم، بلند تکیه‌گاهم، که دامان پر مهرش یگانه پناهم است.

تشکر و قدردانی

بی کران‌ترین سپاس‌ها را تقدیم می‌کنم به خانواده خوبم به ویژه پدر و مادر عزیزم که در طی این مدت محیطی سرشار از امنیت و آرامش برایم فراهم کردند تا بتوانم با آرامش طی مسیر کنم.
زلال‌ترین سپاس را تقدیم می‌کنم به استاد راهنمای بزرگوارم جناب دکتر میثم علیشاهی که آموختن درس علم و اخلاق در مکتب ایشان را مایه افتخار و مباهات خویش می‌دانم.
صمیمانه‌ترین سپاس را تقدیم می‌کنم به استاد مشاورم جناب دکتر مهدی رضا خورسندی که پشتوانه علمی و اخلاقی خوبی برایم بودند.
از اساتید بزرگوارم جناب دکتر نادر جعفری راد و جناب دکتر آل‌هوز که بازخوانی و داوری این پایان‌نامه توسط این اساتید ارجمند مایه افتخار اینجانب است، تشکر می‌کنم.

حامد قدیمی حسین‌آباد
شهریور ۹۶

تعهد نامه

اینجانب **حامد قدیمی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **گراف و ترکیبیات علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **عدد رنگی دوری ابرگراف‌ها**، تحت راهنمایی **میثم علیشاهی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حامد قدیمی حسین‌آباد

شهریور ۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه عدد رنگی دوری گراف‌ها را به ابرگراف‌ها تعمیم می‌دهیم و نتایجی را در این رابطه مورد مطالعه قرار می‌دهیم.
در این خصوص شرایطی کافی برای برابری عدد رنگی دوری و عدد رنگی ابرگراف‌ها ارائه داده می‌شود. در انتها تعریفی معادل برای عدد رنگی دوری ابرگراف‌ها به کمک عدد عدم تعادل ابرگراف‌ها ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: عدد رنگی،عدد رنگی دوری،عدد رنگی کسری ،عدد رنگی ستاره‌ای،رنگ‌آمیزی بازه ای،رنگ‌آمیزی کمانی،عدم تعادل.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

تاریخچه و تعاریف اولیه

۱.۱ مقدمه

در ابتدای این فصل تعریف گراف و در ادامه عدد رنگی دوری و کسری گراف‌ها را بررسی خواهیم کرد و در انتهای این فصل با تعریف ابرگراف و تعاریف اولیه در رابطه با ابرگراف‌ها این فصل را به پایان میرسانیم.

۲.۱ تعاریف اولیه در رابطه با گراف‌ها

تعریف ۱.۲.۱. یک گراف ساده G با n راس و m یال متشکل از مجموعه راس‌های $V(G) = \{v_۱, ..., v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{e_۱, ..., e_m\}$ است. که در آن هر یال یک جفت نامرتب از راس‌ها است. به جای یال $\{u, v\}$ می‌نویسیم uv. اگر $uv \in E(G)$، آن‌گاه u و v مجاور هستند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید که x یک راس در گراف G باشد. منظور از گراف $G - \{x\}$، یعنی گراف حاصل از حذف x و تمام یال‌های گذرانده از x.

عدد طبیعی m را در نظر بگیرید. در سراسر این پایان‌نامه مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, m\}$ را با $[m]$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه همه زیرمجموعه‌های n-عضوی از $[n]$ را با $\binom{[m]}{n}$ نشان می‌دهیم. گراف‌های مورد بحث همواره ساده و متناهی در نظر گرفته خواهند شد مگر آنکه غیر از این ذکر شود. فرض کنید G یک گراف و $U \subseteq V(G)$ است. زیرگراف القایی روی راس‌های $U \subseteq V(G)$ را با $G[U]$ نشان می‌دهیم.

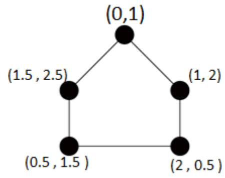
مجموعه $S \subseteq V(G)$ را مستقل می‌نامیم، هرگاه زیرگراف $G[S]$ فاقد یال باشد. اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل G را عدد استقلال گراف G می‌نامیم و با $\alpha(H)$ نمایش می‌دهیم. گراف کامل n راسی، که با K_n نشان داده می‌شود، دارای مجموعه راس‌های $[n]$ است و برای هر دو راس متفاوت $i, j \in [n]$، این دو راس به یکدیگر متصل هستند. مرتبه بزرگ‌ترین زیرگراف کامل از گراف G را عدد خوشه‌ای گراف G می‌نامیم و با $w(G)$ نشان می‌دهیم. فاصله بین دو راس گراف همبند G، کم‌ترین تعداد یال‌های ممکن در بین تمام مسیرهای بین این دو راس است. کمر گراف G که با $g(G)$ نشان داده می‌شود برابر است با مرتبه کوچک‌ترین دور موجود در G. قطر گراف G، $diam(G)$، برابر است با بیشترین فاصله ممکن بین هر دو راس از G. یک k-رنگ‌آمیزی مجاز از گراف G یک نگاشت $c : V(G) \longrightarrow [k]$ است که برای هر یال uv در گراف G، $c(u) \neq c(v)$. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را که گراف G یک k-رنگ‌آمیزی مجاز داشته باشد عدد رنگی G می‌نامیم با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم. در سراسر این پایان‌نامه منظور از یک رنگ‌آمیزی برای گراف G یک رنگ‌آمیزی مجاز است. در واقع یک k-رنگ‌آمیزی مجاز از G افرازی از مجموعه راس‌های G به k زیرمجموعه $V_۱, V_۲, \ldots, V_k$ است که برای هر $۱ \leq i \leq k$، مجموعه V_i مجموعه مستقلی از G باشد. یک همریختی از یک گراف G به یک گراف H عبارت است از یک نگاشت $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ با این خاصیت که برای هر $uv \in E(G)$ داریم $f(u)f(v) \in E(H)$. اگر f یک همریختی از گراف G به گراف H باشد، آن‌گاه آن را با $f : G \longrightarrow H$ نشان می‌دهیم. از نماد $G \longrightarrow H$ برای وجود همریختی از گراف G به گراف H استفاده می‌کنیم. دو گراف G و H را هم‌ارز می‌نامیم هرگاه همریختی‌هایی چون $f : G \longrightarrow H$ و $g : H \longrightarrow G$ وجود داشته باشند. توجه کنید که یک k-رنگ‌آمیزی برای گراف G در واقع یک همریختی از G به K_k است. بنابراین همریختی بین گراف‌ها را می‌توان تعمیمی از رنگ‌آمیزی گراف‌ها قلمداد کرد و با تغییر گراف K_k می‌توان انواع متفاوتی از رنگ‌آمیزی‌ها را تعریف کرد.

۳.۱ عدد رنگی دوری گراف‌ها

یک تقاطع از جاده‌ها را در نظر بگیرید، هر مسیر ممکن برای حرکت خودروها متناظر با یک چراغ راهنما است که سبز بودن آن نشانگر اجازه عبور و قرمز بودن آن به معنی ممنوعیت تردد در آن مسیر است. هدف پیدا کردن الگویی است که با آن به هر چراغ یک بازه زمانی به طول یک(واحد زمان همچون دقیقه) نسبت داده شود و برای دو مسیری که امکان تردد همزمان در آن وجود ندارد، بازه‌های نسبت داده شده به چراغ‌های متناظرشان اشتراک نداشته باشند. با فرض وجود، این الگو می‌تواند برای همیشه تکرار شود و تردد براساس آن برقرار گردد. واضح است که یافتن کوتاه‌ترین زمان ممکن از یک دوره زمانی که با آن بتوان چنین الگویی را یافت اهمیت دارد.

یک روش برای مدل کردن این مساله مدل کردن گراف‌ها است. برای این منظور به هر چراغ راهنما یک راس متناظر می‌کنیم و دو راس را به یکدیگر اتصال می‌دهیم اگر تردد همزمان در مسیرهای متناظرشان ممکن نباشد. فرض کنید $G_۰$ گراف متناظر با این مساله و $V_۱, V_۲, \ldots, V_{\chi(G_۰)}$ یک $\chi(G_۰)$-رنگ‌آمیزی برای $G_۰$ باشد.

اکنون به هر راس واقع در V_i بازه $(i-۱, i)$ را نسبت دهید. واضح است که این انتساب الگویی مناسب



شکل ۱.۱: رنگ‌آمیزی دوری C_5

است و این الگو در فاصله زمانی به طول $\chi(G.)$ پیاده‌سازی می‌شود. در ادامه می‌بینیم که عدد رنگی $G.$ ممکن است کوتاه‌ترین زمان ممکن از یک دوره زمانی مناسب نباشد.
یک روش دیگر این است که دوره زمانی را به صورت یک دایره C درنظر بگیریم و به هر راس یک کمان به طول یک واحد از محیط این دایره را به گونه‌ای نسبت دهیم که برای هر دو راس متصل این کمان‌ها اشتراک نداشته باشند. این کمان نشان دهنده زمان سبز بودن چراغ مربوط است. اکنون هدف پیدا کردن کمترین محیط ممکن از دایره‌ای است که با استفاده از آن این کار امکان‌پذیر باشد.
فرض کنید تقاطع به گونه‌ای است که $G. = C_5$. می‌دانیم عدد رنگی C_5 برابر ۳ است. در شکل بالا به هر راس از $G.$ کمانی به طول یک واحد از دایره‌ای به محیط ۲□۵ نسبت داده شده است. دقت کنید که طول دوره زمانی حاصل از اجتماع این بازه‌ها برابر با ۲□۵ است درحالی که $\chi(G.) = ۳$.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید C دایره‌ای به محیط r است. یک r-رنگ‌آمیزی دوری از گراف G یک نگاشت c از راس‌های G به کمان‌های باز به طول یک روی دایره C است به طوریکه برای هر یال uv از گراف G، $c(u) \cap c(v) = \emptyset$. گراف G را r-رنگ‌پذیری دوری می‌گوییم هرگاه G دارای یک r-رنگ‌آمیزی دوری باشد. عدد رنگی دوری گراف G که با $\chi_c(G)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_c(G) = \inf\{r : \text{گراف } G \text{ } r\text{-رنگ‌پذیر دوری است}\}$$

به سادگی می‌توان دید که اگر گراف G یک r-رنگ‌آمیزی دوری داشته باشد، آن‌گاه برای هر $r' \geq r$ این گراف r'-رنگ‌آمیزی دوری نیز هست. همچنین بدیهی است که اگر H یک زیر گراف G باشد آن‌گاه $\chi_c(H) \leq \chi_c(G)$. با توجه به تعریف همریختی می‌توان دید که اگر $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی باشد، آن‌گاه $\chi_c(G) \leq \chi_c(H)$.
فرض کنید c یک رنگ‌آمیزی دوری برای گراف G است. نگاشت c' از مجموعه راس‌های G به نقاط روی دایره را به گونه‌ای درنظر بگیرید که به هر راس $v \in V(G)$ نقطه ابتدایی کمان $c(v)$ را نسبت می‌دهد. حال اگر دایره C را از یک نقطه دلخواه برش بدهیم، آن‌گاه c' یک تابع از $V(G)$ به بازه $[۰, r)$ است که برای هر یال $uv \in E(G)$، $۱ \leq |c'(u) - c'(v)| \leq r - ۱$. همچنین با داشتن تابعی مانند c' به راحتی می‌توان تابعی مانند c را ساخت. لذا وجود یک r-رنگ‌آمیزی دوری برای گراف G معادل وجود نگاشت $c' : V(G) \longrightarrow [۰, r)$ است به گونه‌ای که برای هر یال uv از G $۱ \leq |c'(u) - c'(v)| \leq r - ۱$.

تعریف ۲.۳.۱. یک r-رنگ‌آمیزی بازه‌ای از گراف G، به نگاشتی همچون f از مجموعه راس‌های G به زیر

بازه‌های به طول یک از بازه $[۰, r]$ گفته می‌شود که هر دو راس متصل در G تحت نگاشت f تصویرهای مجزا داشته باشند و یا به عبارت دیگر برای هر $uv \in E(G)$ داشته باشیم $f(u) \cap f(v) = \emptyset$. در [۱۴] نشان داده شده است کوچک‌ترین عدد حقیقی r که گراف G یک r-رنگ‌آمیزی بازه‌ای داشته باشد برابر با عدد رنگی G است. توجه کنید که برای هر r-رنگ‌آمیزی بازه‌ای از G با یکی کردن دو سر بازه $[۰, r]$ یک r-رنگ‌آمیزی دوری حاصل می‌شود و بنابراین همواره $\chi_c(G) \leq \chi(G)$. از طرف دیگر برای هر r-رنگ‌آمیزی دوری $c : V(G) \longrightarrow [۰, r)$ قرار دهید $f(v) = (c(v), c(v) + ۱)$. بدیهی است f یک $(s + ۱)$-رنگ‌آمیزی بازه‌ای برای G است که در آن $s = \max\{c(v) : v \in V(G)\}$. دقت کنید که $s < r$ و لذا $\chi(G) \leq s + ۱ < r + ۱$ و به عبارت دیگر $\chi(G) - ۱ < \chi_c(G)$.

از بحث مطرح شده در بالا می‌توان نتیجه گرفت که عدد رنگی دوری در مقایسه با عدد رنگی معمولی اطلاعات بیشتر از گراف را در بر دارد. در واقع با دانستن عدد رنگی دوری یک گراف عدد رنگی آن گراف مشخص می‌شود، اما ممکن است دو گراف با عدد رنگی یکسان عدد رنگی دوری متفاوت داشته باشند. عدد رنگی گراف را می‌توان تقریبی از عدد رنگی دوری آن دانست. برای مثال در شکل یک رنگ‌آمیزی دوری برای گراف $C_۵$ ارائه شده است و بنا بر همان رنگ‌آمیزی $\chi_c(C_۵) \leq ۲□۵ < \chi(C_۵) = ۳$. اما به سادگی می‌توان دید که $\chi_c(K_۳) = \chi(K_۳) = ۳$. لذا دانستن عدد رنگی این دو گراف تفاوت آن‌ها را مشخص نمی‌سازد اما عدد رنگی دوری می‌تواند این دو گراف را از یکدیگر متمایز سازد.

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنید c یک r-رنگ‌آمیزی دوری از G است گراف جهت‌دار $D_c(G)$ را با مجموعه راس‌های $V(G)$ و یال‌های

$$\{(u, v) : \text{نقطه انتهای کمان } c(u) \text{ و ابتدای کمان } c(v) \text{ یکسان هستند، } uv \in E(G)\}$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که کمان‌ها را در جهت عقربه‌های ساعت درنظر گرفته‌ایم.

یک صورت معادل از لم زیر در [۱۵] به اثبات رسیده است.

لم ۱.۳.۱. فرض کنید c یک r-رنگ‌آمیزی دوری از G است. اگر $D_c(G)$ فاقد دور جهت‌دار باشد، آن‌گاه یک r'-رنگ‌آمیزی دوری c' برای G وجود دارد که $r' < r$ و گراف $D_{c'}(G)$ دور جهت‌دار دارد.

فرض کنید c یک r-رنگ‌آمیزی دوری از G است و همچنین فرض کنید که $D_c(G)$ دارای دور جهت‌دار $(x_۰, x_۱, \ldots, x_{p-۱}, x_۰)$ است. با توجه به تعریف $D_c(G)$ نتیجه می‌شود که عدد طبیعی q چنان وجود دارد که $c(x_۰), c(x_۱), \ldots, c(x_{p-۱})$ دقیقا q دور در جهت عقربه‌های ساعت دور دایره C می‌چرخد. لذا مجموع طول همه این کمان‌ها برابر با qr است. از طرف دیگر طول هرکدام از کمان‌ها برابر ۱ است و لذا مجموع این طول‌ها p است. درنتیجه $qr = p$ و r گویا است. دقت کنید که همواره q از اندازه بزرگ‌ترین دور موجود در G کوچک‌تر یا مساوی است و لذا همواره $q \leq |V(G)|$. همچنین توجه کنید که هر راس $v \in V(G)$ در یک مجموعه مستقل با اندازه q قرار دارد و این به این دلیل است که اگر کمان $c(v)$ را درنظر بگیریم برای بار اول که $c(x_۰), c(x_۱), \ldots, c(x_{p-۱})$ محیط دایره را طی می‌کند یک راس $v_۱$ چنان وجود دارد که بازه متناظر آن $c(v_۱)$ با بازه $c(v)$ اشتراک ناتهی دارد. همچنین برای بار دوم که $c(x_۰), c(x_۱), \ldots, c(x_{p-۱})$

محیط دایره را طی می‌کند نیز راس $v_۲$ چنان یافت می‌شود که $c(v_۲)$ با $c(v)\cap c(v_۱)$ دارای اشتراک ناتهی است. با ادامه این فرآیند راس‌های $v_۱, v_۲, \ldots, v_q$ وجود دارند که $c(v)\cap c(v_۱)\cap c(v_۲)\ldots c(v_q)\neq\emptyset$.
در نتیجه مجموعه $\{v\}\cup\{v_۱, v_۲, \ldots, v_t\}$ یک مجموعه مستقل شامل v و دارای حداقل q راس است.
با توجه به توضیحات بالا اگر گراف G دارای یک r-رنگ‌آمیزی دوری باشد، آن‌گاه $\frac{p}{q}\leq r$ چنان وجود دارد که G دارای یک $\frac{p}{q}$-رنگ‌آمیزی دوری نیز هست و همچنین $p\leq |V(G)|$ و $q\leq\alpha(G)$. لذا برای پیدا کردن عدد رنگی دوری گراف G تنها کافی است برای تعداد متناهی عدد گویای $\frac{p}{q}$ که $p\leq |V(G)|$ و $q\leq\alpha(G)$ وجود $\frac{p}{q}$-رنگ‌آمیزی دوری برای G را بررسی کنیم و کمترین مقدار ممکن را که برابر $\chi_c(G)$ است بدست آوریم. به عبارت دیگر

$$\chi_c(G)=\min\{\frac{p}{q} : \text{است دوری رنگ‌آمیزی-}\frac{p}{q}\text{ یک دارای } G \text{ و } p\leq |V(G)| \text{، } q\leq\alpha(G)\}$$

ارتباط بین عدد رنگی و عدد رنگی دوری گراف‌ها در مقاله‌های بسیاری از جمله مقاله [۱۵] بررسی شده است.

۴.۱ تعاریف معادل برای عدد رنگی دوری گراف‌ها

عدد رنگی دوری گراف G اول بار توسط وینس [۱] [۱۰] در سال ۱۹۸۰ و با نام عدد رنگی ستاره‌ای معرفی شد. در واقع تعریف ارائه شده در بخش قبل با تعریفی که وینس ارائه داد متفاوت است. معادل بودن تعریف ارائه شده توسط وینس و تعریف ۱.۲.۲ در [۱۲] نشان داده شده است. تعریف زیر توسط وینس در [۱۰] بیان شده است.

تعریف ۱.۴.۱. [۱۰] گراف G را درنظر بگیرید. فرض کنید n و d دو عدد طبیعی هستند که $n\geq d\geq ۱$. یک (n,d)-رنگ‌آمیزی از گراف G به نگاشتی چون $c: V(G)\longrightarrow [n]$ گفته می‌شود که برای هر یال uv در گراف G داشته باشیم

$$d\leq |c(u)-c(v)|\leq n-d.$$

همچنین عدد رنگی دوری G که با $\chi_c(G)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_c(G)=\inf\{\frac{n}{d} : \text{دارد وجود } G \text{ برای رنگ‌آمیزی-}(n,d)\text{ یک}\}$$

دقت کنید که هر $(n,۱)$-رنگ‌آمیزی از یک گراف در واقع یک n-رنگ‌آمیزی معمولی از آن است. بنابراین (n,d)-رنگ‌آمیزی یک تعمیم از رنگ‌آمیزی گراف‌ها است.
فرض کنید c یک (n,d)-رنگ‌آمیزی از گراف G است. نگاشت $c': V(G)\longrightarrow [۰,\frac{n}{d})$ را که $c'(v)=\frac{c(x)}{d}$ در نظر بگیرید. به وضوح برای هر یال uv از G رابطه $۱\leq |c'(u)-c'(v)|\leq\frac{n}{d}-۱$ را داریم. لذا بنابر توضیحات بعد از تعریف ۱.۲.۲ برای هر (n,d)-رنگ‌آمیزی از G یک $\frac{n}{d}$-رنگ‌آمیزی دوری از G نیز داریم.
حال فرض کنید که c' یک $\frac{n}{d}$-رنگ‌آمیزی از G است. با توجه به توضیحات بعد از تعریف ۱.۲.۲ نگاشت

[۱] Vince

$f: V(G) \longrightarrow [0, \frac{n}{d})$ چنان وجود دارد که برای هر یال $uv \in E(G)$ رابطه $1 \leq |f(u) - f(v)| \leq \frac{n}{d} - 1$ را داریم. حال نگاشت $c : V(G) \longrightarrow [n]$ را که $c(u) = \lfloor f(u)d \rfloor$ درنظر بگیرید. به سادگی می‌توان دید که c یک (n, d)-رنگ‌آمیزی برای G است. در نتیجه تعریف ارائه شده توسط وینس و تعریف ۱.۲.۲ معادل هستند.

در بخش ۱.۱ دیدیم که وجود یک k-رنگ‌آمیزی برای گراف G معادل است با وجود همریختی از گراف G به گراف کامل K_k. لذا بررسی k-رنگ‌پذیر بودن یک گراف ارتباط نزدیکی با مسئله وجود یا عدم وجود همریختی بین گراف‌ها دارد.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید n و d اعدادی طبیعی هستند و $d \leq n$. گراف کامل دوری $K_{n,d}$ دارای مجموعه راس‌های $[n]$ و مجموعه یال‌های $\{ij : d \leq |i - j| \leq n - d\}$ است.

اگر قرار دهیم $d = 1$، آن‌گاه واضح است که $K_{n,1} = K_n$ و لذا گراف‌های کامل دوری تعمیمی از گراف‌های کامل هستند. اما نکته جالب این است که این گراف‌ها برای (n, d)-رنگ‌آمیزی گراف‌ها دقیقا نقش گراف کامل را در رنگ‌آمیزی معمولی گراف‌ها ایفا می‌کنند. به عبارت دیگر هر (n, d)-رنگ‌آمیزی از گراف G معادل است با وجود همریختی از G به $K_{n,d}$. در نتیجه هر شرط لازم برای وجود همریختی از یک گراف به گراف‌های کامل دوری در تعیین عدد رنگی دوری گراف‌ها کاربرد دارد.
در [۳] نشان داده شده است که $\chi_c(K_{n,d}) = \frac{n}{d}$. همچنین در همین مقاله اثبات شده است که

$$K_{n,d} \longrightarrow K_{n',d'} \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \frac{n}{d} \leq \frac{n'}{d'}.$$

ژو [۲] [۱۲] نشان داد که اگر $\chi_c(G) = \frac{n}{d}$ و $gcd(n, d) = 1$، آن‌گاه هر همریختی از G به $K_{n,d}$ پوشای راسی است. در واقع ژو قضیه زیر را اثبات کرد.

قضیه ۱.۴.۱. [۱۲] دو عدد طبیعی n و d را که $n \geq 2d$ و $gcd(n, d) = 1$ در نظر بگیرید. اگر n' و d' دو عدد طبیعی و یکتایی باشند که $n'd - nd' = 1$، آن‌گاه برای هر راس x از $K_{n,d}$ گراف $K_{n,d} - x$ هم‌ارز با گراف $K_{n',d'}$ است. لذا عدد رنگی دوری $K_{n,d} - x$ برابر $\frac{n'}{d'}$ است.

توجه کنید که $\alpha(K_{n,d}) = d$ و لذا با توجه به قضیه بالا تعریف معادل زیر را برای عدد رنگی دوری گراف G داریم.

$$\chi_c(G) = \min\{\frac{n}{d} : n \leq |V(G)|, d \leq \alpha(G) \quad \text{and} \quad G \longrightarrow K_{n,d}\}.$$

۵.۱ عدد رنگی کسری گراف‌ها

یکی دیگر از تعمیم‌های عدد رنگی گراف‌ها عدد رنگی کسری است. چندین تعریف معادل برای عدد رنگی کسری گراف‌ها وجود دارد که در این پایان‌نامه ما تنها به یکی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. گراف کنسر [۳]

[۲] Zhu

[۳] Kneser

$KG(m,n)$ گرافی است با مجموعه راس‌های $\binom{[m]}{n}$ و دو راس A و B به یکدیگر متصل هستند اگر $A \cap B = \emptyset$. عدد رنگی کسری گراف G که با $\chi_f(G)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

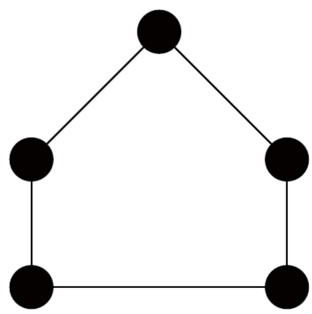
$$\chi_f(G) = \inf\{\frac{m}{n} : G \longrightarrow KG(m,n)\}.$$

در [۱۶] نشان داده شده است که اینفیمم در تعریف بالا مقدار خود را کسب می‌کند و لذا می‌توان به جای آن مینیمم به کار برد. از آن‌جا که $KG(m,۱) = K_m$ لذا $\chi_f(G) \leq \chi(G)$. همچنین در [۱۶] نشان داده شده است که $\frac{\chi(G)}{\chi_f(G)}$ به هر اندازه می‌تواند بزرگ باشد. با توجه به اینکه عدد رنگی کسری نیز همانند عدد رنگی و عدد رنگی دوری به کمک همریختی قابل تعریف است لذا شرط لازم برای وجود همریختی بین گراف‌ها در تعیین عدد رنگی کسری می‌تواند دارای اهمیت باشد.

حال برای درک بهتر از یک (n,d)-رنگ‌آمیزی مثالی ارائه می‌دهیم.

فرض کنید که $d = ۲$ و $n = ۵$. برای گراف G داریم که:

$$c : V(G) \longrightarrow \{۰,۱,۲,۳,۴\}$$



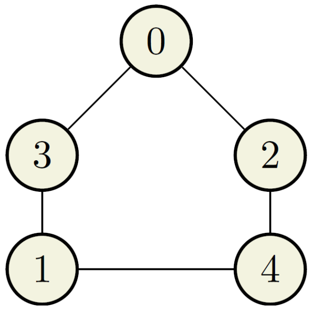
حال برای اینکه $xy \in E(G)$ باشد، آن‌گاه باید $d \leq |c(x) - c(y)| \leq n - d$.

$$\Rightarrow \qquad ۲ \leq |c(x) - c(y)| \leq ۳$$

$\Rightarrow$ $(۵,۲)$-رنگ‌آمیزی به صورت زیر می‌شود.

تعریف ۱.۵.۱. G_d^n، نشان دهنده گرافی است با مجموعه رئوس $V(G_d^n) = \{۰,۱,\ldots,n-۱\}$ که در آن $\{i,j\}$ عضو مجموعه یال‌ها است اگر و فقط اگر

$$d \leq |i - j| \leq n - d.$$



۶.۱ تاریخچه و تعاریف اولیه برای ابرگراف‌ها

ابرگراف [۴]، تعمیمی از گراف است که هر یال در آن می‌تواند به تعداد دلخواه از راس‌ها، متصل باشد. همان‌طور که می‌دانیم گراف کاربرد وسیعی در علوم مختلف دارد، بنابراین پژوهشگران به گسترش و تعمیم گراف‌ها پرداختند و ایده ابرگراف شکل گرفت، ایده ابرگراف حدود سال ۱۹۶۰، در خانواده‌ای از مجموعه‌ها پدیدار شد و به طور عمیق‌تر و وسیع‌تر در دهه ۷۰ و ۸۰ میلادی توسط شخصی به نام برژه [۵] مورد مطالعه قرار گرفت. از سرشناس‌ترین افرادی که آغازگر مبحث ابرگراف‌ها هستند، می‌توان به برژه، بولوباش [۶]، توته [۷] اشاره کرد. ابرگراف خانواده‌ای از مجموعه‌ها است که، هر مجموعه در آن یک یال تعمیم یافته است. ابرگراف‌ها ابزار بسیار مفیدی در نمایش مدل‌های مفهومی و ساختاری برای موزه‌های علوم کامپیوتر و ریاضیات گسسته هستند.

تعریف ۱.۶.۱. ابرگراف H، زوج مرتب (V, E) است که در آن V یک مجموعه متناهی و ناتهی است و E مجموعه شامل بعضی از زیرمجموعه‌های ناتهی V است.
اگر هر عضو از E دارای اندازه ۲ باشد، آن‌گاه H گراف است.
ابرگراف H را متناهی می‌نامیم اگر مجموعه رئوس آن متناهی باشد.

تعریف ۲.۶.۱. دو راس را مجاور گوییم هرگاه ابریالی موجود باشد که شامل هر دو راس باشد.

تعریف ۳.۶.۱. دو یال را مجزا گوییم هرگاه اشتراکشان تهی باشد.

تعریف ۴.۶.۱. ابرگراف H' را زیر ابرگرافی از H گوییم، هرگاه $V(H') \subseteq V(H)$ و $E(H') \subseteq E(H)$.

تعریف ۵.۶.۱. ابرگراف $H = (V, E)$ را k-یکنواخت گویند، هرگاه برای هر یال e از E داشته باشیم $|e| = k$.

تعریف ۶.۶.۱. در ابرگراف k-یکنواخت H، راس v را عمومی گوییم هرگاه هر زیرمجموعه k-عضوی از $V(H)$ که شامل v است، یک یال در H باشد.

[۴] Hypergraph
[۵] Berge
[۶] Bollobas
[۷] Tutte

تعریف ۷.۶.۱. ابرگراف k-یکنواخت H را کامل نامیم هرگاه هر زیر مجموعه k-عضوی از $V(H)$، عضوی از $E(H)$ باشد.

تعریف ۸.۶.۱. برای ابرگراف H، مجموعه $S \subset V(H)$ را مستقل گوییم هرگاه زیرابرگراف $H[S]$ فاقد یال باشد. اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل H را عدد استقلال ابرگراف H می‌نامیم و با $\alpha(H)$ نمایش می‌دهیم.

قابل ذکر است که کامل بودن برای ابرگراف‌ها به دو صورت تعریف خواهد شد، برای ابرگراف‌های معمولی و ابرگراف‌های k-یکنواخت، که در این پایان‌نامه ابرگراف‌های k-یکنواخت کامل مورد بحث خواهند بود.

تعریف ۹.۶.۱. $H_d^n(k)$ نشان دهنده یک ابرگراف k-یکنواخت با مجموعه رئوس $\{۰, ۱, \ldots, n-۱\}$ است و زیرمجموعه k-عضوی $\{x_۱, \ldots, x_k\}$ از $V(H)$ یک یال از $H_d^n(k)$ است اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $۱ \leq i, j \leq k$، بطوریکه

$$d \leq |x_i - x_j| \leq n - d.$$

۷.۱ یکریختی و همریختی ابرگراف‌ها

تعریف ۱.۷.۱. برای ابرگراف‌های $H_۲$ و $H_۱$، یکریختی از $H_۱$ به $H_۲$، تابع یک به یک و پوشای $f : V(H_۱) \longrightarrow V(H_۲)$ است بطوریکه $e \in E(H_۱)$ اگر و فقط اگر $f(e) \in E(H_۲)$. اگر f تابع یکریختی از $H_۱$ به $H_۲$ باشد، آن‌گاه معکوس تابع، تابع یکریختی از $H_۲$ به $H_۱$ است، در نتیجه می‌گوییم که $H_۱$ و $H_۲$ یکریخت هستند.

تعریف ۲.۷.۱. برای ابرگراف‌های $H_۲$ و $H_۱$، نگاشت $f : V(H_۱) \longrightarrow V(H_۲)$ را همریختی می‌نامیم هرگاه برای هر یال e از $H_۱$، وجود داشته باشد یک یال e' در $H_۲$، بطوریکه $e' \subseteq f(e)$. گوییم $H_۱$ همریخت در $H_۲$ است اگر یک همریختی از $H_۱$ به $H_۲$ وجود داشته باشد.

تعریف ۳.۷.۱. ابرگراف H را با رئوس ترایا خوانیم، هرگاه برای هر دو راس x و y، یکریختی $f : H \longrightarrow H$ وجود داشته باشد، بطوریکه $f(x) = y$.

۸.۱ رنگ‌آمیزی ابرگراف‌ها

تعریف ۱.۸.۱. رنگ‌آمیزی یک ابرگراف، به این معنی است که به هر راس ابرگراف یک عدد اختصاص دهیم به طوریکه در هر یال آن، حداقل دو عدد متفاوت ظاهر شود. در واقع k-رنگ‌آمیزی یک ابرگراف معادل است با افراز راس‌های ابرگراف به k دسته، به طوریکه در هیچ دسته‌ای یالی نباشد.

تعریف ۲.۸.۱. به کمترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی رئوس ابرگراف H، عدد رنگی راسی ابرگراف گفته می‌شود به طوریکه هیچ یال e_i از H که $|e_i| > ۱$، وجود نداشته باشد که همه رئوس آن دارای رنگ یکسان باشند.

تعریف ۳.۸.۱. کمترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی یال‌های H، به طوریکه هر کلاس رنگی به شکل یک تطابق باشد را عدد رنگی یالی H گوییم. به عبارت دیگر در رنگ‌آمیزی یالی ابرگراف‌ها هیچ دو یال متقاطع، رنگ یکسان ندارند.

۹.۱ رنگ‌آمیزی دوری ابرگراف‌ها

تعریف ۱.۹.۱. برای ابرگراف $H = (V, E)$، یک (n, d)-رنگ‌آمیزی $(n \geq ۲d)$ از H، نگاشت $c : V \longrightarrow \{۰, ۱, ..., n - ۱\}$ است، بطوریکه برای هر یال $e \in E$ وجود داشته باشند رئوس x و y در e با این شرط که

$$d \leq |c(x) - c(y)| \leq n - d.$$

عدد رنگی دوری گراف H را با $\chi_c(H)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_c(H) = \inf\{\frac{n}{d} \mid \text{یک } (n,d)\text{-رنگ‌آمیزی از } H \text{ وجود داشته باشد}\}$$

مشابه گراف‌ها ثابت می‌شود که اینفیمم [۸] موجود در تعریف را، می‌توان با مینیمم [۹] جایگزین کرد.

۱۰.۱ رنگ‌آمیزی کسری ابرگراف‌ها

تعریف ۱.۱۰.۱. نگاشت c، از مجموعه S(شامل همه زیر مجموعه‌های مستقل یک ابرگراف) به بازه $[۰, ۱]$، یک رنگ‌آمیزی کسری از ابرگراف H است. اگر برای هر راس x از H، داشته باشیم:

$$\sum_{\substack{s \in S \\ x \in s}} c(s) = ۱.$$

مقدار رنگ‌آمیزی کسری c، $\sum_{s \in S} c(s)$ است.

عدد رنگی کسری ابرگراف H را با $\chi_f(H)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_f(H) = \inf\{\sum_{s \in S} |c(s)| \quad \underset{\text{یک رنگ‌آمیزی کسری از } H \text{ باشد}}{c : S \longrightarrow [۰, ۱]} \quad\}$$

[۸]infimum
[۹]minimum

فصل ۲

۱.۲ مقدمه

در این فصل قضیه‌هایی در باب رنگ‌آمیزی دوری ابرگراف‌ها و رابطه عدد رنگی دوری با عدد رنگی کسری ابرگراف‌ها را بررسی خواهیم کرد و در انتها به تعریف صفحه فانو می‌پردازیم و عدد رنگی دوری آن را محاسبه می‌کنیم.

۲.۲ قضیه‌هایی در باب رنگ‌آمیزی دوری ابرگراف‌ها

گزاره ۱.۲.۲. [۵] اگر H ابرگراف باشد آن‌گاه:

$$\chi_c(H) = \min\{\frac{n}{d} | \text{وجود دارد } f : H \longrightarrow G_d^n \text{ همریختی}\}$$

برهان. فرض کنید c یک (n,d)-رنگ‌آمیزی از H باشد، آن‌گاه نگاشت f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} f : V(H) \longrightarrow V(G_d^n) \\ f(x) = c(x) \end{cases}$$

که یک همریختی است و درنتیجه اثبات کامل است. $\square$

قضیه ۱.۲.۲. [۵]: اگر H و K دو ابرگراف باشند و H یک همریختی در K باشد آن‌گاه:

۱. $\chi(H) \leq \chi(K)$.

۲. $\chi_c(H) \leq \chi_c(K)$.

قضیه ۲.۲.۲. [۵] : اگر H ابرگراف k-یکنواخت فرض شود و $\chi_c(H) = \frac{n}{d}$، آن‌گاه:

۱. $\chi(H) - ۱ < \chi_c(H) \leq \chi(H)$.

۲. اگر $c : V(H) \longrightarrow \{۰, ۱, ..., n-۱\}$ یک (n,d)-رنگ‌آمیزی از H باشد، آن‌گاه c پوشا است.

۳. اگر $\frac{n}{d} \leq \frac{n'}{d'}$، آن‌گاه H یک (n',d')-رنگ‌آمیزی است.

۱: از آنجایی که هر $\chi(H)$-رنگ‌آمیزی از H یک $(\chi(H), ۱)$-رنگ‌آمیزی از H است، آن‌گاه $\chi_c(H) \leq \chi(H)$ (بنا به تعریف $\chi_c(H)$). از طرفی دیگر اگر فرض کنیم $\chi_c(H) \leq \chi(H) - ۱$ و c یک (n,d)-رنگ‌آمیزی از H باشد، آن‌گاه نگاشت c' که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} V(H) \longrightarrow \{۱, ..., \lceil \frac{n}{d} \rceil\} \\ c'(x) = \lceil \frac{c(x)}{d} \rceil, \end{cases}$$

یک $\lceil \frac{n}{d} \rceil$-رنگ‌آمیزی از H است، بنابراین $\chi(H) \leq \lceil \frac{n}{d} \rceil$ و این یک تناقض است و در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

۲: بنابر برهان گزاره ۱.۲.۲ همریختی $f : H \longrightarrow G_d^n$ وجود دارد به طوریکه $f(x) = c(x)$. بنابر برهان خلف فرض کنید که f پوشا نباشد، آن‌گاه راس v از G_d^n وجود دارد بطوریکه f یک همریختی از H به $G_d^n - v$ است، از آنجایی که $\chi_c(G_d^n - v) < \frac{n}{d}$ و بنابر قضیه ۲.۲.۲ داریم که $\chi_c(H) < \frac{n}{d}$ و این تناقض است و در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

۳: فرض کنید $c : V \longrightarrow Z_n$، یک (n,d)-رنگ‌آمیزی از $H = (V,E)$ باشد. نگاشت c' را، $c' : V \longrightarrow Z_n$ به وسیله $c'(v) = \lfloor \frac{d'}{d} c(v) \rfloor$ برای همه $v \in V$ تعریف می‌کنیم. یال uv را در نظر بگیرید و فرض کنید $c(u) > c(v)$. از آنجایی که c یک (n,d)-رنگ‌آمیزی از H است،

$$d \leq c(u) - c(v) \leq n - d.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} c'(v) + d' = \lfloor \frac{d'}{d}(c(v) + d) \rfloor \leq \lfloor c'(u) \rfloor \leq \lfloor \frac{d'}{d}(c(v) + n - d) \rfloor \\ \leq \lfloor \frac{d'}{d} c(v) + \frac{nd'}{d} - d' \rfloor \leq c'(v) + n' - d' \end{aligned}$$

و

$$d' \leq c'(u) - c'(v) \leq n' - d'.$$

بنابراین c' یک (n',d')-رنگ‌آمیزی از H است. □

نتیجه ۲.۲.۱. [۹]: اگر H دارای یک (n,d)-رنگ‌آمیزی باشد، آن‌گاه دارای یک (n',d')-رنگ‌آمیزی با $\frac{n'}{d'} \leq \frac{n}{d}$, $(n',d') = ۱$ ب.م.م نیز خواهد بود.

قضیه ۲.۲.۳. [۹]: اگر فرض شود H ابرگرافی با n راس و دارای (n,d)-رنگ‌آمیزی باشد بطوریکه در Z_n پوشا نباشد، آن‌گاه H دارای یک (n',d')-رنگ‌آمیزی با $n' \leq n$ و $\frac{n'}{d'} \leq \frac{n}{d}$ است.

ملاحظه ۲.۲.۱. مطالب بالا بیان‌گر این موضوع هستند که اگر $(n,d) = ۱$، آن‌گاه همه رنگ‌ها در رنگ‌آمیزی مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

نتیجه ۲.۲.۲. [۹]: اگر ابرگراف H دارای یک (n,d)-رنگ‌آمیزی $c : V \longrightarrow Z_n$ باشد، آن‌گاه می‌توان فرض کرد که c پوشا است.

نتیجه بالا بیان‌گر این موضوع است که عدد رنگی دوری از یک ابرگراف، گویا است.
همانند گراف‌ها ثابت می‌شود که اینفیمم[۱] موجود در تعریف را می‌توان با مینیمم[۲] جایگزین کرد، گزاره زیر بیان‌گر این موضوع است.

گزاره ۲.۲.۲. برای ابرگراف H با n راس داریم:

$$\chi_c(H) = \min\{\frac{k}{d} :\ k \leq n, \text{دارای یک } (k,d)\text{-رنگ‌آمیزی است } H\}.$$

برهان. بنابر قضیه ۲.۲.۳ و نتیجه ۲.۲.۲، اگر H دارای یک (k,d)-رنگ‌آمیزی باشد، آن‌گاه دارای یک (k',d')-رنگ‌آمیزی با $k' \leq k$ و $\frac{k'}{d'} \leq \frac{k}{d}$ است، بنابراین:

$$\chi_c(H) = \min\{\frac{k}{d} :\ k \leq n, \text{دارای یک } (k,d)\text{-رنگ‌آمیزی است } H\}.$$

از آنجایی که این مجموعه متناهی است، می‌توان مینیمم را جایگزین اینفیمم کرد. □

در ادامه نشان می‌دهیم که عدد رنگی دوری H_d^n، $\frac{n}{d}$ است، از این‌رو برای هر عدد گویا $\frac{n}{d} \geq ۲$ ، یک ابرگراف با عدد رنگی دوری $\frac{n}{d}$ وجود دارد. برای این مهم به لم زیر نیاز داریم.

لم ۲.۲.۱. [۹]:اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در ابرگراف H_d^n، d است.

برهان. واضح است مجموعه $\{۰, ۱, ..., d - ۱\}$ مستقل است، بنابراین بیشترین اندازه از یک مجموعه مستقل در ابرگراف H_d^n حداقل d است. فرض کنید که X یک زیرمجموعه $(d + ۱)$ عضوی از $V(H_d^n)$ باشد، ادعا می‌کنیم که X مستقل نیست. با برهان خلف، بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم $d \in X$، اگر X شامل راس y باشد، به طوریکه عضو مجموعه $\{۱, ۲, ..., ۲d - ۱\}$ نباشد، آن‌گاه $|dy|_n \geq d$ که با مستقل بودن مجموعه X در تناقض است. بنابراین $X \subseteq \{۱, ۲, ..., ۲d - ۱\}$. از آنجایی که $|X| = d + ۱$، بنابر اصل لانه کبوتری دو عنصر $a, b \in X$ به پیمانه d وجود دارند که $|a - b|_n = d$.
بنابراین X یک مجموعه مستقل نیست و این اثبات را کامل خواهد کرد. □

---
[۱] infimum
[۲] minimum

گزاره ۳.۲.۲. [۹]: ابرگراف H_q^p دارای عدد رنگی $\frac{p}{q}$ است.

برهان. فرض کنید $c : H_q^p \longrightarrow H_d^k$ یک همریختی باشد. بنابر لم قبل، اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در ابرگراف H_q^p، q است و تصویر معکوس از یک مجموعه مستقل در H_d^k یک مجموعه مستقل در H_q^p است، از این‌رو برای هر عدد $i \in Z_k$ داریم:

$$\sum_{j=i}^{|i+d-۱|_k} |c^{-۱}(j)| \leq q$$

از آنجایی که:

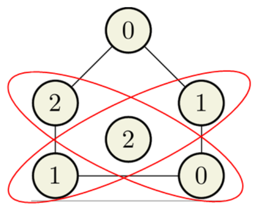
$$pd = \sum_{i=۰}^{k-۱} \sum_{j=i}^{|i+d-۱|_k} |c^{-۱}(j)| \leq kq \Rightarrow \frac{p}{q} \leq \frac{k}{d}$$

□

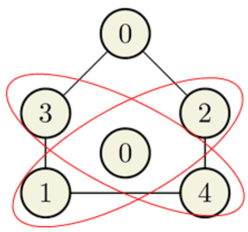
بنابر رابطه بین عدد رنگی و عدد رنگی دوری، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۳.۲.۲. [۹]: برای ابرگراف H داریم: $\chi(H) = \lceil \chi_c(H) \rceil$.

در ادامه ابرگراف H با $\chi_c(H) = ۲□۵$ و $\chi(H) = ۳$ به عنوان مثالی از این نتیجه آورده شده است.



شکل ۱.۲: ابرگراف H با $\chi(H) = ۳$



شکل ۲.۲: $\chi_c(H) = ۲.\frac{۱}{۲}$

۳.۲ شرایط برابری عدد رنگی و عدد رنگی دوری ابرگراف‌ها

مطالب زیر بیان‌گر این موضوع هستند که وجود راس عمومی در ابرگراف برابری عدد رنگی و عدد رنگی دوری را ایجاب می‌کند.

قضیه ۱.۳.۲. [۵]: اگر H ابرگراف k-یکنواخت و v راس عمومی از H باشد، آن‌گاه :

۱: برای هر زیرمجموعه A از $V(H)-\{v\}$، با این شرط که $|A| \leq ۲k-۴$، داریم:

$$\chi(H-v-A)=\chi(H-v) \Rightarrow \chi_c(H)=\chi(H).$$

۲: اگر $\chi(H-v)=\chi(H)$، برای هر زیرمجموعه A از $V(H)$ با $|A| \leq ۲k-۴$ داریم:

$$\chi(H-A-v) \geq \chi(H)-۱ \Rightarrow \chi_c(H)=\chi(H).$$

۱: فرض کنید $\chi(H-v)=n$، اگر $\chi(H)=n$ آن‌گاه هر n-رنگ‌آمیزی از H، کلاس رنگی A که شامل راس v باشد، حداکثر $k-۱$ راس دارد و $\chi(H-A-v)=n-۱$ و این تناقض است، بنابراین $\chi(H)=n+۱$. فرض کنید $\chi_c(H)=\frac{p}{q}<n+۱$ ، c یک (p,q)-رنگ‌آمیزی از H باشد و $c(v)=۰$. اگر $q>k-۱$ ، با توجه به قضیه‌ای که قبلا بیان کردیم، c پوشا است، بنابراین راس‌های $\{x_۱,...,x_{k-۱}\}$ از H وجود دارند به طوریکه برای هر $۱ \leq i \leq k-۱$، $c(x_i)=i$ با توجه به اینکه یال $\{v,x_۱,...,x_{k-۱}\}$ در (p,q)-رنگ‌آمیزی از H قرار نمی‌گیرد، $q \leq k-۱$
. حال فرض کنید به ازای $۰ \leq i \leq q-۱$، $C_۱=c^{-۱}(i)$ و برای هر $p-q+۱ \leq i \leq q-۱$، $C_۲=c^{-۱}(i)$ و $C=C_۱ \cup C_۲$ داریم که $|C_۱|=k-۱$ و $|C_۲|=k-۱$. در غیر این صورت $C_۱$ یا $C_۲ \cup \{v\}$ یالی است که در (p,q)-رنگ‌آمیزی از H قرار نمی‌گیرد. رنگ‌آمیزی c' که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{cases} c': V(H-v-C) \longrightarrow \{۰,۱,...,n-۳\} \\ \qquad c'(x)=\frac{c(x)-q}{q}, \end{cases}$$

یک $(n,۲)$-رنگ‌آمیزی از $H-v-C$ است و این تناقض است. بنابراین $\chi_c(H)=\chi(H)$. □

۲: مشابه قسمت ۱ است. □

قضیه ۲.۳.۲. [۹]: اگر ابرگراف H، دارای راس عمومی v باشد، آن‌گاه $\chi_c(H)=\chi(H)$.

برهان. فرض کنید $\chi_c(H)=\frac{n}{d}$ و $c:H \longrightarrow H_d^n$ یک (n,d)-رنگ‌آمیزی از H باشد. آن‌گاه برای هر یال $e \in E$، راس‌های $x,y \in e$ وجود دارند بطوریکه $d \leq |c(x)-c(y)|_n \leq n-d$. از آنجایی که v راس عمومی است، برای هر راس $x \in V-\{v\}$، $\{v,x\} \in E$ است. بدون از دست دادن کلیت مساله داریم $c(v)=n-d$. بنابراین:

$$c(x) \in \{۰,۱,...,n-۲d\} \quad , \forall x \in V-\{v\}$$

حال رنگ‌آمیزی $c' : V \longrightarrow \{۰, ۱, ..., \lfloor \frac{n}{d} \rfloor - ۱\}$ را براساس رنگ‌آمیزی c، به صورت $c'(w) = \lfloor \frac{c(w)}{d} \rfloor$ تعریف می‌کنیم. چون c یک (n,d)-رنگ‌آمیزی از H است، برای هر یال $e \in E$ راس‌های $x, y \in e$ وجود دارند به طوریکه $c'(x) \neq c'(y)$. بنابراین:

$$\chi(H) \leq \lfloor \frac{n}{d} \rfloor = \lfloor \chi_c(H) \rfloor \leq \chi(H).$$

که این نتیجه می‌دهد: $\chi(H) = \chi_c(H)$. □

۴.۲ رابطه عدد رنگی دوری و عدد رنگی کسری ابرگراف‌ها

قضیه ۱.۴.۲. [۵]: اگر H ابرگراف k-یکنواخت باشد، آن‌گاه:

۱. $\chi_f(H) \leq \chi_c(H)$.

۲. اگر H راس ترایا باشد، $\chi_f(H) = \frac{V(H)}{\alpha(H)}$.

۱: فرض کنید که $\chi_c(H) = \frac{n}{d}$ و c یک (n,d)-رنگ‌آمیزی از H باشد، مجموعه‌ی مستقل $S_i = \bigcup_{j=i}^{i+d-۱} c^{-۱}(j)$ را در نظر بگیرید. نگاشت f به هر S_i مقدار $\frac{۱}{q}$ و به مجموعه‌های مستقل دیگر مقدار صفر را اختصاص می‌دهد. S_iها کلاس‌های زیر را تشکیل می‌دهند:

$$S_i : \quad \underbrace{c^{-۱}(۱) \cup ... \cup c^{-۱}(d)}_{\text{همه آن‌هایی را که رنگ ۱ تا } d \text{ گرفته‌اند، در یک کلاس رنگی قرار داده و مقدار } \frac{۱}{d} \text{ را به آن‌ها اختصاص می‌دهیم.}}$$

$$\cdots \quad \underbrace{c^{-۱}(i) \cup c^{-۱}(i+۱) \cup ... \cup c^{-۱}(i+d-۱)}_{\text{همه آن‌هایی که رنگ } i \text{ تا } i+d-۱ \text{ گرفته‌اند را در یک کلاس رنگی قرار داده و مقدار } \frac{۱}{d} \text{ را به آن‌ها اختصاص می‌دهیم.}}$$

حال اگر رئوس را روی یک دایره داشته باشیم، واضح است که d مجموعه مستقل داریم. در نتیجه $d \times (\frac{۱}{d}) = ۱$ و رنگ‌آمیزی ارائه شده، یک رنگ‌آمیزی کسری است. به این دلیل که در مجموع n مجموعه مستقل داریم، خواهیم داشت:

$$n \times (\frac{۱}{d}) = \frac{n}{d}.$$

و بنابر تعریف عدد رنگی دوری داریم:

$$\chi_f(H) \leq \frac{n}{d} = \chi_c(H).$$

□

۲: فرض کنید f یک رنگ‌آمیزی کسری از H با مقدار $\chi_f(H)$ است. داریم:

$$\underbrace{|V(H)| = \sum_{s \in S} |s| f(s)}_{*} \leq \alpha(H) \chi_f(H).$$

اثبات*:

$$\sum_{s\in S}|s|f(s)=|V(H)|$$

می‌دانیم که

$$\sum_{s\in S}f(s)=1 \xrightarrow{\sum_{x\in V(H)}} \sum_{x\in V(H)}\sum_{s\in S}f(s)=\sum_{x\in V(H)}1=|V(H)|.$$

از طرف دیگر،

$$|V(H)|=\sum_{s\in S}\sum_{\substack{x\in S\\ x\in V(H)}}f(s)=\sum_{s\in S}|s|f(s)$$

$$\Rightarrow |V(H)|=\sum_{s\in S}|s|f(s)\leq \alpha(H)\chi_f(H)$$

چون $|s|$ حداکثر $\alpha(H)$ است، در نتیجه:

$$\chi_f(H)\geq \frac{|V(H)|}{|\alpha(H)|}. \tag{۱.۲}$$

حال فرض کنید که $v_1,...,v_n$ همه مجموعه‌های مستقل از اندازه $\alpha(H)$ باشند. هر راس در L تعداد از این v_iها آمده است (چون راس ترایا است). پس به هر کدام از این v_iها، $\frac{1}{L}$ و به مابقی مقدار صفر نسبت می‌دهیم. در نتیجه برای $v_1,...,v_n$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}|v_i|=n|\alpha(H)|=L|V(H)|\Rightarrow \frac{n}{L}=\frac{|V(H)|}{|\alpha(H)|}$$

در نتیجه داریم:

$$\chi_f(H)\leq \frac{|V(H)|}{|\alpha(H)|} \tag{۲.۲}$$

$$\xrightarrow{(1.2),(2.2)} \chi_f(H)=\frac{|V(H)|}{|\alpha(H)|}.$$

□

قسمت ۱ قضیه بالا بیان‌گر رابطه عدد رنگی دوری و عدد رنگی کسری ابرگراف‌ها است.

ملاحظه ۱.۴.۲. برای هر ابرگراف k-یکنواخت کامل H که راس ترایا باشد و $\alpha(H)=k-1$، بنابر قضیه قبل $\chi_f(H)=\frac{|V(H)|}{k-1}$. واضح است که H دارای یک $(V(H),k-1)$-رنگ‌آمیزی است. بنابراین:

$$\chi_c(H)=\frac{|V(H)|}{k-1}.$$

قضیه ۲.۴.۲. [۹]: اگر $H=(V,E)$ ابرگراف کامل k-یکنواخت با n راس باشد، آن‌گاه

$$\chi_c(H)=\frac{n}{(k-1)} \quad , \quad \chi(H)=\lceil\frac{n}{(k-1)}\rceil.$$

برهان. فرض کنید $c: H \longrightarrow H_q^p$ به طوری که $p \geq n$ همریختی باشد. از آنجایی که هر زیر مجموعه k عضوی از V یک یال است، اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در H، $k-۱$ است و تصویر معکوس از یک مجموعه مستقل در H_q^p، مستقل است، برای هر عدد صحیح $i \in Z_p$،

$$\sum_{j=i}^{|i+q-۱|_p} |c^{-۱}(j)| \leq p(k-۱).$$

از این‌رو

$$q_n = \sum_{i=۰}^{p-۱} \sum_{j=۱}^{|i+q-۱|} |c^{-۱}(j)| \leq p(k-۱).$$

بنابراین $\frac{n}{(k-۱)} \leq \frac{p}{q}$. ادعا می‌کنیم که تابع $\begin{cases} c': V \longrightarrow H_{k-۱}^n \\ c'(x) = x \end{cases}$، $(n, k-۱)$-رنگ‌آمیزی از H است. فرض کنید X یک مجموعه k عضوی از V باشد. به طور مشابه بدون از دست دادن کلیت مساله می‌توان در نظر گرفت که $k-۱ \in X$. اگر X شامل راس y باشد، به طوریکه راس y عضو مجموعه $\{۱, ۲, ..., ۲(k-۱)-۱\}$ نباشد، آن‌گاه $|(k-۱)-y|_n \geq k-۱$. اگر $X \subseteq \{۱, ۲, ..., ۲(k-۱)-۱\}$، از آنجایی که $|X| = k$، بنابر اصل لانه کبوتری، $a, b \in X$ متجانس به پیمانه n، وجود دارند. بنابراین $|a-b|_n = k-۱$ از این‌رو، هر مجموعه k عضوی شامل یک جفت راس x, y است بطوریکه $|c'(x)-c'(y)|_n \geq k-۱$. این اثبات ادعایی است که در ابتدای قضیه بیان شد. بنابراین

$$\chi_c(H) = \frac{n}{k-۱},$$

و با توجه به نتیجه‌ای که قبلا بیان کردیم، داریم:

$$\chi(H) = \lceil \frac{n}{(k-۱)} \rceil.$$

□

قضیه ۳.۴.۲. [۵]: برای هر q, p و k با شرط $۲q \leq p$، ابرگراف k-یکنواخت H وجود دارد به طوریکه $\chi_c(H) = \frac{p}{q}$.

برهان. فرض کنید $k \geq rq$. ابرگراف $H_{qr}^{pr}(k)$ را در نظر بگیرید. واضح است که $H_{qr}^{pr}(k)$ راس ترایا است و $\alpha(H_{qr}^{pr}(k)) = qr = k-۱$. بنابراین با استفاده از قضیه ۲.۴.۲ داریم:

$$\chi_f(H_{qr}^{pr}(k)) = \frac{V(H_{qr}^{pr}(k))}{\alpha(H_{qr}^{pr}(k)) = k-۱} = \frac{pr}{qr} = \frac{p}{q} \tag{۳.۲}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} \leq \chi_c(H_{qr}^{pr}(k)). \tag{۴.۲}$$

اما نگاشت $\begin{cases} f: H_{qr}^{pr}(k) \longrightarrow G_{qr}^{pr} \\ f(x) = x \end{cases}$ یک همریختی است. بنابر قضیه‌ای که قبلا بیان شد، اگر نگاشت f همریخت باشد خواهیم داشت:

$$\chi_c(H_{qr}^{pr}(k)) \leq \chi_c(G_{qr}^{pr}) = \frac{pr}{qr} \tag{۵.۲}$$

$$\xrightarrow{(۵.۲),(۳.۲)} \quad \chi_c(H_{qr}^{pr}(k)) = \frac{p}{q}.$$

□

۵.۲ صفحه فانو

یک (v,k,λ)-طرح، یک گراف k-یکنواخت با v راس است به طوریکه هرجفت از راس‌های متمایز آن در دقیقا λ تا از یال‌های آن قرار گرفته‌اند.

یک صفحه فانو در واقع یک $(۷,۳,۱)$-طرح $F=(V,E)$ است که در آن مجموعه راس‌ها به صورت $V=Z_۷$ و مجموعه یال‌ها به صورت $E=\{۰+i,۱+i,۳+i\}_{i=۱,...,۶}$ هستند. نشان می‌دهیم که صفحه فانو دارای عدد رنگی دوری $\frac{۷}{۳}$ است. می‌دانیم که عدد رنگی دوری صفحه فانو در حالتی $k\le ۷$ ، $۲\le\frac{k}{d}$ باشد برابر $\frac{k}{d}$ است. لذا،

$$\chi_c(F)\in\{۲,۳,۴,۵,\frac{۵}{۲},۶,۷,\frac{۷}{۲},\frac{۷}{۳}\}.$$

از طرفی هر یال از F دارای یک جفت راس x,y است که $۳\le|x-y|\le ۷-۳$. نگاشت $c:F\longrightarrow H_۳^۷$،که $c(x)=x$ یک $(۷,۳)$-رنگ‌آمیزی از F است. لذا $\chi_c(F)\in\{۲,\frac{۷}{۳}\}$.

حال فرض کنید که $\chi_c(F)=۲$. فرض کنید F با دو رنگ به صورت مجاز رنگ‌آمیزی شده است که در آن X مجموعه راس‌های با رنگ ۱ ، Y مجموعه راس‌ها با رنگ ۲ است.

توجه کنید که هر جفت نامرتب از اعضای متمایز X به صورت یکتایی یک یال را مشخص می‌کنند (در آن یال قرار دارند) از طرفی در هر یال حداقل یک راس به رنگ ۲ وجود دارد، لذا این یال‌ها دو به دو متمایز هستند. بنابراین تعداد $\binom{|X|}{۲}$ یال وجود دارند که هرکدام دارای ۲ راس در X و تنها یک راس در Y هستند.

با استدلال مشابه، $\binom{|Y|}{۲}=\binom{۷-|X|}{۲}$ یال وجود دارند که هر کدام ۲ راس در Y و تنها یک راس در X دارند. لذا، $۷=|E|\ge\binom{|X|}{۲}+\binom{۷-|X|}{۲}$.

ولی می‌توان بررسی کرد که کمترین مقدار عبارت سمت راست نامساوی بالا برابر ۹ است که این تناقض است. بنابراین $\chi_c(F)=\frac{۷}{۳}$. یک مجموعه (v,k,λ)-تفاضلی، یک زیر مجموعه k-عضوی D از Z_v است، به طوریکه خانواده همه $k(k-۱)$ تفاضل‌های ممکن از اعضای D، هرعضو نا صفر Z_v را دقیقا λ بار شامل شود. می‌دانیم که اگر D یک مجموعه (v,k,λ)-تفاضلی باشد، آن‌گاه مجموعه $E=\{\{d+i: d\in D\}: i=۰,...,v-۱\}$ مجموعه یال‌های یک (v,k,λ)-طرح است. این طرح را با نام طرح توسعه یافته از D می‌شناسیم. برای هر عدد اول $p\overset{۴}{\equiv}۳$، می‌دانیم که مجموعه همه مربعات اعضای ناصفر Z_p تشکیل یک مجموعه $(p,\frac{p-۱}{۲},\frac{p-۳}{۴})$-تفاضل می‌دهند. همچنین طرح توسعه یافته از این مجموعه تفاضلی، یک پی لی [۳] طرح نامیده می‌شود.

[۳] Payley Design

برای مثال، $D=\{۰,۱,۳\}$ یک مجموعه $(۷,۳,۱)$-تفاضلی است. طرح توسعه یافته از این مجموعه تفاضل همان صفحه فانو است.

قضیه ۲.۵.۱. [۹]: فرض کنید D یک (v,k,λ)-مجموعه متمایز و H طرح توسعه یافته از D باشد، آن‌گاه $\chi_c(H)\leq ۲+\frac{۱}{\lfloor(\frac{v}{۲})\rfloor}$.

برهان. بنابر تعریف یک مجموعه متمایز، هر یال از H، شامل یک جفت از رئوس x,y است بطوریکه $|x-y|=|\frac{v}{۲}|$. از آنجایی که $|\frac{v}{۲}|\leq v-\lfloor\frac{v}{۲}\rfloor$ ، تابع f

$$\begin{cases} f:V\longrightarrow Z_k, \quad f(x)=x \end{cases}$$

یک $\frac{v}{\lfloor\frac{v}{۲}\rfloor}$-رنگ‌آمیزی دوری از H است و در نهایت حکم مورد نظر ثابت می‌شود. □

نتیجه ۲.۵.۱. [۹]: اگر D یک (v,k,λ)-مجموعه متمایز باشد و H طرح توسعه یافته از D، آن‌گاه $\chi(H)\leq\lceil ۲+\frac{۱}{\lfloor\frac{v}{۲}\rfloor}\rceil=۳$.

فصل ۳

۱.۳ مقدمه

در این فصل Z_k-رنگ‌آمیزی از ابرگراف‌ها را معرفی و همچنین برخی از ویژگی‌های آن‌ها را بررسی خواهیم کرد. این روند به طور طبیعی منجر به تعریف عدد رنگی ستاره‌ای می‌شود. در ادامه نشان خواهیم داد عدد رنگی ستاره‌ای تعریفی معادل برای عدد رنگی دوری است و در نهایت تاثیر حذف یک راس در مقدار عدد رنگی دوری را بررسی خواهیم کرد.
مرجع اصلی این فصل مقاله [۱۰] است.

۲.۳ k-عدد رنگی

تعریف ۱.۲.۳. برای هر عدد حقیقی x، $|x|_k$، نشان دهنده $\min\{x, k-x\}$ است.

برای مثال داریم:

$$|۲|_۵ = |x|_k = \min\{x, k-x\} = \min\{۲, ۵-۲\} = ۲,$$
$$|۳|_۵ = \min\{۳, ۵-۳\} = ۲.$$

یک Z_k-رنگ‌آمیزی از ابرگراف $H = (V, E)$، نگاشت $c : V \longrightarrow Z_k$ است، که Z_k مجموعه‌ای از اعداد صحیح به پیمانه k است. برای یک Z_k-رنگ‌آمیزی c از ابرگراف H، تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{c,k}(H) = \min_{e \in E} \max_{\{u,v\} \subseteq e} \{|c(u) - c(v)|_k\}$$

و $\psi_H(c)=\frac{k}{\mu_{c,k}(H)}$. توجه شود که اگر $\mu_{c,k}(H)=۰$ باشد، $\psi_H(c)$ بی نهایت است. اگر ابرگراف H دارای n راس باشد، برای یک Z_k-رنگ‌آمیزی c از H به طوریکه راس‌های متفاوت رنگ‌های متفاوت بگیرند، داریم:

$$\psi_H(c)=\frac{n}{\mu_{c,n}(H)}\leq\frac{n}{۱}=n.$$

بنابراین برای هر ابرگراف H، یک مقدار از k و یک Z_k-رنگ‌آمیزی c وجود دارد به طوریکه $\psi_c(H)$ متناهی است. نکته قابل تامل این است که:

$$\psi_H(c)\geq\frac{k}{\lfloor\frac{k}{۲}\rfloor}\geq ۲\quad,\quad \mu_{c,k}(H)\leq\lfloor\frac{k}{۲}\rfloor.$$

$C_k=C_k(H)$ مجموعه تام Z_k-رنگ‌آمیزی‌های ابرگراف H است.

تعریف ۲.۲.۳. k-عدد رنگی از H را با $\chi_k(H)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\chi_k(H)=\min_{c\in C_k}\psi_H(c)=\frac{k}{\max\limits_{c\in C_k}\mu_{c,k}(H)}$$

قضیه ۱.۲.۳. [۹]: برای ابرگراف $H=(V,E)$، اگر $\chi(H)=k$، آن‌گاه $\chi_k(H)=\chi(H)$ و اگر $\chi(H)>k$، آن‌گاه $\chi_k(H)=\infty$.

برهان. فرض کنید $\chi(H)=k$. رنگ‌آمیزی مجاز $c:V\longrightarrow Z_k$ به طوریکه برای هر یال $e\in E$، یک جفت راس v,u با شرط $c(v)\neq c(u)$ وجود دارد. بنابراین $\mu_{c,k}(H)\geq ۱$, $\chi_k(H)\leq k=\chi(H)$. حال برای نشان دادن برابری فرض می‌کنیم $\chi_k(H)\geq k$. برای Z_k-رنگ‌آمیزی c، $\mu_{c,k}(H)\geq ۲$. $Z_{k-۱}$-رنگ‌آمیزی c' را درنظر بگیرید، که:

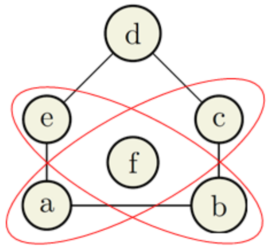
$$c'(u)=\begin{cases}c(u) & ;c(u)\neq ۰ \text{ اگر}\\ ۱ & ;c(u)=۰ \text{ اگر}\end{cases}$$

هر یال به شرطی که شامل راس y باشد، شامل راس x است به طوریکه $c(x)=۰$، با این ویژگی $c(y)\geq ۲$. در غیر اینصورت $\mu_{c,k}(H)=۱$. بنابراین c' یک $(k-۱)$-رنگ‌آمیزی مجاز از H است. این متناقض با $\chi(H)=k$ است، بنابراین $\chi_k(H)=k=\chi(H)$.

در نهایت اگر $\chi(H)>k$، برای هر رنگ‌آمیزی $c:V\longrightarrow Z_k$ یک یال e از H وجود دارد بطوریکه هر راس از e، همان رنگ‌ها را دریافت می‌کند، از این‌رو $\mu_{c,k}(H)=۰$ و $\chi_k(H)=\infty$. □

نتیجه ۱.۲.۳. برای ابرگراف H و عدد صحیح و مثبت k، اگر $\chi_k(H)$ متناهی باشد، آن‌گاه: $\chi(H)\leq k$.

فرض کنید H ابرگراف نشان داده شده در شکل ۲.۳ باشد و H' زیر ابرگرافی از H باشد که یال‌های آن از اندازه ۲ است. از آنجایی که در هر $Z_۱,Z_۲$-رنگ‌آمیزی از H'، برخی از یال‌های آن هم رنگ هستند، $\chi_۱(H)=\chi_۲(H)=\infty$. شکل ۲.۲ یک ۳-رنگ‌آمیزی از H است. بنابراین $\chi(H)=۳$ و بنابر قضیه‌ای که قبلا بیان شده، داریم $\chi_۳(H)=۳$. حال نشان می‌دهیم $\chi_۴(H)=۴$. فرض کنید رنگ‌آمیزی c وجود دارد



شکل ۱.۳: $\chi_{۱}(H)=\infty, \chi_{۲}(H)=\infty, \chi_{۳}(H)=۳, \chi_{۴}(H)=۴, \chi_{۵}(H)=۲.\frac{۱}{۲}$

به طوریکه $\mu_{c,۴}(H)=۲$. بدون از دست دادن کلیت $c(a)=۱$, $c(b)=۳$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین $c(c)=۱$و$c(d)=۳$. در نتیجه راهی برای رنگ کردن راس پنجم بطوریکه هر دو یال $\{b,d,f\},\{a,c,f\}$ دارای دو رنگ متفاوت باشند، وجود ندارد. بنابراین $\mu_{c,k}(H)\leq ۱$ و از هر Z_k-رنگ‌آمیزی مجاز از H، $\chi_{۴}(H)=۴$ حاصل می‌شود. در نهایت برای هر رنگ‌آمیزی $c\in C_{۵}$، داریم:

$$\psi_H(c)\geq \frac{۵}{\lfloor\frac{۵}{۲}\rfloor}=۲.\frac{۱}{۲}.$$

قضیه ۲.۲.۳. [۹]: برای ابرگراف $H=(V,E)$، داریم:

$$\chi_{k+۱}(H)\leq \chi_k(H)+۱.$$

برهان. اگر $\chi(H)>k$، آن‌گاه $\chi_k(H)=\infty$ و نتیجه بدست می‌آید.
فرض کنیم که $\chi(H)\leq k$، آن‌گاه $\chi_k(H)$ متناهی است. $c\in C_k$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\psi_H(c)=\chi(H)$. به ازای هر $u\in V$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} c':V\longrightarrow Z_{k+۱} \\ s.t: c'(u)=c(u). \end{cases}$$

آن‌گاه $\mu_{c,k}(H)\geq\mu_{c,k}(H)\geq ۱$.

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\chi_k(H) = \psi_H(c) &= \frac{k}{\mu_{c,k}(H)} \geq \frac{k}{\mu_{c',k+1}(H)} \\
\chi_k(H) + 1 &= \frac{k}{\mu_{c,k}(H)} + 1 \\
&\geq \frac{k}{\mu_{c',k+1}(H)} + 1 \\
&= \frac{k + \mu_{c',k+1}(H)}{\mu_{c',k+1}(H)} \\
&\geq \frac{k+1}{\mu_{c',k+1}(H)} = \psi_H(c') \\
&\geq \min_{c' \in C_{k+1}} \psi_H(c') \\
&= \chi_{k+1}(H) \Rightarrow \chi_k(H) + 1 \geq \chi_{k+1}(H).
\end{aligned}$$

□

۳.۳ عدد رنگی ستاره‌ای

تعریف ۱.۳.۳. عدد رنگی ستاره‌ای را با $\chi^*(H)$ نشان می‌دهیم، که کمترین مقدار Z_k-عدد رنگی است. اگر H ابرگرافی با n راس باشد، عدد رنگی ستاره‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi^*(H) = \min_{1 \leq k \leq n} \chi_k(H).$$

قضیه ۱.۳.۳. [۹]: برای هر زیر ابرگراف H' از ابرگراف H برای همه $k \in Z^+$ داریم:

$$\chi_k(H) \geq \chi_k(H') \quad , \ \chi^*(H) \geq \chi^*(H').$$

برهان. هر Z_k-رنگ‌آمیزی c، $c : V(H) \longrightarrow Z_k$ را می‌توان به یک Z_k-رنگ‌آمیزی از H' محدود کرد. بنابراین $\mu_{c,k}(H') \geq \mu_{c,k}(H)$.

از آنجایی که $\chi_k(H) = \frac{k}{\max\limits_{c \in C_k} \mu_{c,k}(H)}$ داریم: $\chi_k(H) \geq \chi_k(H')$ و بنابراین $\chi^*(H) \geq \chi^*(H')$.

اکنون نشان می‌دهیم، عدد رنگی دوری ابرگراف H، همان عدد رنگی ستاره‌ای آن است، یا به عبارت دیگر عدد رنگی ستاره‌ای تعریف معادلی برای عدد رنگی دوری است. □

قضیه ۲.۳.۳. [۹]: برای هر ابرگراف $H = (V, E)$، $\chi^*(H) = \chi_c(H)$.

برهان. فرض کنید $\chi_c(H) = \frac{k}{d}$، بنابراین یک همریختی $c : V \longrightarrow H_d^k$ وجود دارد، توجه کنید که d مقداری است که برای هر یال از H، حداقل دو راس آن دارای رنگ‌های یکسان هستند که اختلاف آن‌ها حداقل d و حداکثر $(n-d)$ است. از آنجایی که c یک Z_k-رنگ‌آمیزی مجاز نیز هست و همچنین $\mu_{c,k}(H) = d \in Z^+$، لذا $c : V \longrightarrow H_{\mu_{c,k}}^k$. از طرفی برای هر $k \in Z^+$، k-عدد رنگی H برابر است با:

$$\chi_k(H) = \min_{e \in E} \max_{\{u,v\} \subseteq e} \{\frac{k}{\mu_{c,k}(H)} : H \longrightarrow H_{\mu_{c,k}}^k\},$$

و همچنین

$$\chi^*(H) = \min_{1 \le k \le n} \chi_k(H).$$

لذا

$$\chi^*(H) = \chi_c(H).$$

□

۴.۳ تاثیر حذف یک راس در عدد رنگی دوری

این نکته را می‌دانیم که برای هر زیر ابرگراف H' از ابرگراف k-یکنواخت H، رابطه $\chi_c(H') = \chi_c(H)$ برقرار است. بنابراین برای هر راس v از H، $\chi_c(H) \ge \chi_c(H - v)$. سوال مطرح شده این است که حذف یک راس چه مقدار در عدد رنگی دوری آن تاثیر دارد؟

با توجه به رابطه بین عدد رنگی و عدد رنگی دوری در ابرگراف‌ها ($\chi(H) - 1 < \chi_c(H) \le \chi(H)$) داریم:

$$\chi_c(H) - \chi_c(H - v) < 2.$$

با توجه به نکته‌ای که گفته شد، قضیه‌ی زیر بیان می‌کند که این مقدار به عدد ۲ نزدیک است.

قضیه ۱.۴.۳. [۵]: برای هر عدد k و هر عدد حقیقی $\epsilon > 0$، ابرگراف k-یکنواخت H و راس v از H وجود دارد بطوریکه:

$$\chi_c(H) - \chi_c(H - v) > 2 - \epsilon$$

برهان. $n \in \mathbb{N}$ را طوری در نظر بگیرید که $\frac{1}{n} < \epsilon$ باشد. فرض کنید که $H' = H_n^{nr+1}(k)$ و $H_1, H_2, ..., H_{2k-3}$، $2k - 3$ ابرگراف مشابه مجزا از H' باشند، فرض کنید H ابرگراف k-یکنواخت و $v \in V(H)$ راس عمومی باشد بطوریکه $V(H - v) = \bigcup_{1 \le i \le 2k-3} V(H_i)$ و $E(H - v) = \bigcup_{1 \le i \le 2k-3} E(H_i)$ باشد. بنابراین $\chi_c(H - v) = \frac{1}{n} + r$ و از آنجایی که $\chi_c(H) = \chi(H) = 2 + r$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\chi_c(H) = \chi_c(H - v) = 2 - \frac{1}{n} > 2 - \epsilon.$$

□

فصل ۴

۱.۴ مقدمه

در ابتدای این فصل با تعریف عدد رنگی بازه‌ای نشان خواهیم داد که عدد رنگی بازه‌ای تعریفی معادل برای عدد رنگی است و در ادامه با تعریف عدد رنگی کمانی و بررسی برخی از ویژگی‌های آن نشان خواهیم داد که عدد رنگی کمانی تعریفی معادل عدد رنگی بازه‌ای است.
مرجع این فصل مقاله [۹] است.

۲.۴ عدد رنگی بازه‌ای

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید که $r \geq ۱$ و I_r مجموعه‌ای از زیر بازه‌هایی به طول واحد از $(۰, r)$ باشد. یک r-رنگ‌آمیزی بازه‌ای از ابرگراف $H = (V, E)$، تابع $f : V \longrightarrow I_r$ است بطوریکه برای هر $e \in E$، راس‌های $x, y \in E$ که $f(x) \cap f(y) = \emptyset$ وجود داشته باشند. ابرگراف H را r-رنگ‌پذیر بازه‌ای گوییم اگر دارای یک r-رنگ‌آمیزی بازه‌ای باشد. عدد رنگی بازه‌ای H را با $\chi_I(H)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_I(H) = \inf\{r : \text{است بازه‌ای} \ r\text{-رنگ‌پذیری یک} \ H\}.$$

گزاره زیر بیان‌گر این موضوع است که عدد رنگی بازه‌ای تعریفی معادل از عدد رنگی است یا به عبارت دیگر عدد رنگی ابرگراف H برابر با عدد رنگی بازه‌ای آن است.

گزاره ۱.۲.۴. برای هر ابرگراف $H = (V, E)$، داریم:

$$\chi_I(H) = \chi(H) = \inf\{r : \text{است بازه‌ای} \ r\text{-رنگ‌پذیری} \ H\}.$$

برهان. فرض کنید $c : V \longrightarrow \{۰, ۱, ..., r - ۱\}$ یک r-رنگ‌آمیزی از H باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} c' : V \longrightarrow I_r, \\ c'(w) = (c(w), c(w) + ۱). \end{cases}$$

هر یالی از H، شامل یک جفت از رئوس x, y است، به طوری که $c(x) \neq c(y)$ و همچنین $c'(x) \cap c'(y) = \emptyset$. بنابراین c' یک r-رنگ‌آمیزی بازه‌ای از H است که نتیجه می‌دهد:

$$\chi_I(H) \leq \chi(H). \qquad (۱.۴)$$

از طرف دیگر فرض کنید c' یک r-رنگ‌آمیزی بازه‌ای از H باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} c : V \longrightarrow \{۰, ۱, ..., r - ۱\}, \\ c(w) = \lfloor w_۱ \rfloor, \end{cases}$$

که $c'(w) = (w_۱, w_۱ + ۱)$. هر یال از H شامل یک جفت راس x, y است به طوریکه $c'(x) \cap c'(y) = \emptyset$ و $c(x) \neq c(y)$. بنابراین c یک r-رنگ‌آمیزی از H است و در نتیجه:

$$\chi_I(H) \geq \chi(H) \qquad (۲.۴)$$

و با توجه به (۱.۴) و (۲.۴) تساوی حاصل می‌شود. $\square$

ملاحظه ۱.۲.۴. ثابت می‌شود که اینفیمم[۱] موجود در تعریف را با مینیمم[۲] می‌توان جایگزین کرد.

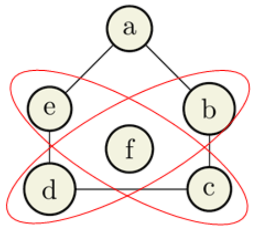
شکل زیر نشان‌دهنده ابرگرافی با $\frac{۵}{۲}$-رنگ‌آمیزی بازه‌ای است.

$$c(a) = c(f) = (۰, ۱),$$
$$c(b) = (۱, ۲),$$
$$c(c) = (۲, \frac{۱}{۲}),$$
$$c(d) = (\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}),$$
$$c(e) = (\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}).$$

۳.۴ رنگ‌آمیزی کمانی

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید که c یک دایره با محیط r باشد و A_r مجموعه‌ای از کمان‌هایی به طول واحد از c باشند (توجه کنید که چرخش c در جهت عقربه‌های ساعت است). یک r-رنگ‌آمیزی کمانی از

[۱] infimum
[۲] minimum



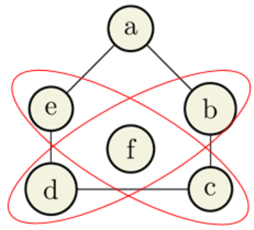
شکل ۱.۴: $\frac{۵}{۲}$-رنگ‌آمیزی c از گراف H

ابرگراف $H=(V,E)$، یک تابع $c: V \longrightarrow A_r$ است به طوریکه برای هر یال $e \in E$، یک جفت از رئوس u,v با ویژگی $c(u) \cap c(v) = \emptyset$ وجود داشته باشد. H را r-رنگ‌پذیر کمانی گوییم هرگاه H دارای یک r-رنگ‌آمیزی کمانی باشد. عدد رنگی کمانی از H، را با $\chi_A(H)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_A(H) = \inf\{r : \text{رنگ‌پذیر کمانی است } H\}.$$

شکل زیر مثالی از یک $\frac{۵}{۲}$-رنگ‌آمیزی کمانی از ابرگراف H است.

$$c(a) = c(f) = (۰, ۱),$$
$$c(b) = (۱, ۲),$$
$$c(c) = (۲, \frac{۱}{۲}),$$
$$c(d) = (\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}),$$
$$c(e) = (\frac{۳}{۲}, ۰).$$



شکل ۲.۴: $\frac{5}{2}$-رنگ‌آمیزی کمانی از گراف H

حال نشان خواهیم داد اگر عدد رنگی کمانی از ابرگراف H را داشته باشیم، برای $r \geq \chi_A(H)$ همواره یک r-رنگ‌آمیزی کمانی از H وجود دارد.

گزاره ۱.۳.۴. برای ابرگراف $H = (V, E)$، اگر $\chi_A(H) = r$، آن‌گاه برای هر $r' \geq r$ یک r'-رنگ‌آمیزی کمانی از H وجود دارد.

برهان. فرض کنید که $\chi_A(H) = r$، آن‌گاه دایره c با محیط r و تابع $c : V \longrightarrow A_r$ وجود دارد به طوریکه هر یال، شامل یک جفت راس x, y با شرط $c(x) \cap c(y) = \emptyset$ باشد. فرض کنید که:

$$\begin{cases} c' : A_r \longrightarrow A_{r'}, \\ c'((x, x+1)) = (x, x+1). \end{cases}$$

ادعا می‌کنیم که $c'oc$، یک r-رنگ‌آمیزی کمانی است. فرض کنید که $e \in E$، آن‌گاه رئوس $v, w \in e$ با شرط $c(v) \cap c(w) = \emptyset$ وجود دارند. آن‌گاه بنابر تعریف داریم $c'(v) \cap c'(w) = \emptyset$ و این اثباتی برای ادعای ماست. $\square$

فرض کنید $H = (V, E)$ یک ابرگراف باشد به طوریکه $\chi_I(H) = r$، آن‌گاه دایره‌ای با محیط r و تابع $c : V \longrightarrow A_r$ وجود دارد به طوریکه هر یال $e \in E$ شامل راس‌های $x, y \in e$ با شرط $c(x) \cap c(y) = \emptyset$، باشد. اگر $H' = (V', E')$ زیر ابرگرافی از H باشد، آن‌گاه c محدود شده به V'، یک r-رنگ‌آمیزی کمانی از H' است.

گزاره ۲.۳.۴. فرض کنید $H' = (V', E')$ زیر ابرگرافی از ابرگراف H باشد، آن‌گاه

$$\chi_A(H') \leq \chi_A(H)$$

ملاحظه ۱.۳.۴. بنابر گزاره ۱.۲.۴، یک r-رنگ‌آمیزی بازه‌ای از ابرگراف H به صورت زیر است:

$$\chi_I(H) = \min\{r : \text{یک } r\text{-رنگ‌پذیر بازه‌ای است } H\}$$

در هر r-رنگ‌آمیزی بازه‌ای از ابرگراف القایی H، اگر ابتدا و انتهای بازه‌ها را برای ساختن دایره‌ای با محیط r، به یکدیگر متصل کنیم، یک r-رنگ‌آمیزی کمانی از H به وجود می‌آید.

گزاره ۳.۳.۴. فرض کنید $H=(V,E)$، ابرگراف و r. یک عدد حقیقی باشد. اگر H r-رنگ‌آمیزی کمانی باشد، آن‌گاه H یک $(r+۱)$-رنگ‌آمیزی بازه‌ای است.

برهان. فرض کنید که c، r-رنگ‌آمیزی کمانی از ابرگراف H باشد. دایره c را در نقطه‌ای دلخواه که آن را صفر می‌نامیم، قطع می‌کنیم. برای تعیین بازه‌ای به طول r که آن را بازه $(۰,r)$ می‌نامیم، c' را چنین تعریف می‌کنیم: $\begin{cases} c' : V \longrightarrow (۰,r) \\ c'(x)=y \end{cases}$ که $c'(x)=(y,y+۱)\in A_r$. از آن‌جایی که هر دو بازه حداکثر به اندازه $r-۱$ در جهت عقربه‌های ساعت از هم مجزا هستند، c نگاشتی از V به $(۰,r)$ است بطوریکه هر یال e شامل یک جفت راس x,y است که در جهت عقربه‌های ساعت، فاصله $c'(x)$ و $c'(y)$ برابر d است.$(۱\leq d\leq r-۱)$

با این روند c' از c بدست می‌آید. فرض کنید که $s=\max\{c'(x), x\in V\}$. با گسترش دادن هر $c'(x)$ به بازه‌ای با طول واحد، c' را می‌توانیم به عنوان $(s+۱)$-رنگ‌آمیزی بازه‌ای از H نشان دهیم، که $s\leq r$.

بنابراین هر r-رنگ‌آمیزی کمانی از H، مطابق با یک $(r+۱)$-رنگ‌آمیزی بازه‌ای از H است.

فرض کنید که c دایره‌ای از محیط r و همچنین، یک r-رنگ‌آمیزی کمانی از ابرگراف $H=(V,E)$ باشد. برای $\{v_۱,v_۲,...,v_n\}$، c را، $c(v_i)=(x_i,x_{i+۱})$ تعریف می‌کنیم و همچنین برای هر یال $e\in E$ و راس‌های $v_i,v_j\in e$، تعریف می‌کنیم:

$$d_e(v_i,v_j)=\begin{cases} |x_j-(x_i-۱)|_r & ;\ c(v_i)\cap c(v_j)=\emptyset \text{ اگر} \\ \infty & ;\ \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و فرض کنید که:

$$d_e=\min_{\{v_i,v_j\}\subseteq e} d(v_i,v_j).$$

و همچنین

$$X=\{(v_i,v_j); d_e=d_e(v_i,v_j)\}.$$

□

تعریف ۲.۳.۴. $D=D_c(H)$، گرافی جهت‌دار با مجموعه رئوس $V(D)$ و مجموعه یال‌های $E(D)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(D)=\{v\ ;(v,z)\in X\ ,\exists z\in V(H)\},$$

$$E(D)=\{(v_i,v_j)\quad ; d_e(v_i,v_j)=۰\}.$$

نشان می‌دهیم که برای ابرگراف متناهی، می‌توان اینفیمم موجود در تعریف عدد رنگی کمانی را با مینیمم جایگزین کرد و اینکه عدد کمانی همیشه گویا است.

برای نشان دادن این موضوع به لم زیر نیازمندیم.

لم ۱.۳.۴. [۹] فرض کنید H یک ابرگراف و c، r-رنگ‌آمیزی کمانی از H باشد. اگر $D_c(H)$ بدون دور باشد، آن‌گاه یک r'-رنگ‌آمیزی کمانی c' از H وجود دارد بطوریکه $r' < r$ و $D_{c'}(H)$، شامل دور جهت‌دار است.

برهان. فرض کنید که c، r-رنگ‌آمیزی کمانی از H و C دایره‌ای متناظر از محیط r باشد و همچنین $D_c(H) = D$ غیر مدور باشد. یک مسیر جهت‌دار مانند $P = v_۱, v_۲, ..., v_k$ در D انتخاب کنید. بطوریکه $\alpha = d(v_۱, v_k)$ فاصله تعیین شده در جهت عقربه‌های ساعت بین سمت راست نقطه پایان از $c(v_k)$ و سمت چپ نقطه پایان از $c(v_۱)$، مینیمم باشد. $s = ۱ + \frac{\alpha}{k}$ را درنظر بگیرید و هر بازه $c(v_i) = (x_i, x_{i+۱})$ را با بازه $(sx_i, s(x_i + ۱))$ جایگزین کنید که با نسبت نرم دایره‌ای افزایش می‌یابد. جایگزین کردن بازه‌ها از این خاصیت که هر یال از H، یک جفت رئوس آن وجود دارد، بطوریکه بازه‌های مجزا متناظر هستند، حفظ خواهد کرد. حال بطور یکنواخت در دایره C هر کمان با طول واحد، به اندازه s کاهش می‌یابد و $r' = (\frac{r}{s})$-رنگ‌آمیزی کمانی c' از H بدست می‌آید بطوریکه $D_{c'}(H)$ حاوی دور جهت‌دار $C' = P, v_۱, v_k$ است. □

قضیه ۱.۳.۴. [۹] فرض کنید که H یک ابرگراف باشد. اگر $\chi_A(H) = r$، آن‌گاه $r = \frac{k}{d}$ که $k, d \in Z^+$.

برهان. فرض کنید که c، r-رنگ‌آمیزی کمانی از H باشد، بنابر لم قبل می‌توان $D_c(H) = D$ را طوری در نظر گرفت که شامل دور جهت‌دار باشد.
فرض کنید دور $Q = x_۱, e_۱, x_۲, ..., e_k, x_۱$ دارای بیشترین طول باشد. از آنجایی که دایره C دارای محیط r است و Q یک دور جهت‌دار از طول k در D است، نتیجه می‌شود که بازه‌هایی به طول واحد $c(x_۱), c(x_۲), ..., c(x_k)$ در اطراف C دقیقا $d = \frac{k}{r}$ می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت $r = \frac{k}{d}$. □

نتیجه ۱.۳.۴. فرض کنید H ابرگراف و همچنین p, c به ترتیب طول طولانی‌ترین مسیر و طولانی‌ترین دور در H باشند. اگر $\chi_A(H) = \frac{k}{d}$، آن‌گاه $k \leq \max\{p, c\}$ و d اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در H است.

گزاره زیر بیان‌گر این موضوع است که اینفیمم موجود در تعریف عدد رنگی کمانی را می‌توان با مینیمم جایگزین کرد.

گزاره ۴.۳.۴. [۹] اگر H یک ابرگراف باشد، آن‌گاه:

$$\chi_A(H) = \min\{r : \text{است}\ \text{رنگ‌پذیر کمانی}\text{-}r\ \text{یک}\ H\}$$

قضیه ۲.۳.۴. [۹] برای هر ابرگراف H، $\chi_c(H) = \chi_A(H)$.

برهان. ابرگراف H_d^k را درنظر بگیرید، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} c : V(H_d^k) \longrightarrow A_{\frac{k}{d}}, \\ c(x) = (\frac{x}{d}, \frac{x}{d} + ۱). \end{cases}$$

هر یال از H_d^k شامل x,y است بطوریکه $d \leq |x-y| \leq k-d$.
برای x,y داریم:

$$۱ \leq |\frac{x}{d} - \frac{y}{d}| \leq \frac{(k-d)}{d} = \frac{k}{d} - ۱.$$

بنابراین، $c(x) \cap c(y) = \emptyset$. اگر $\chi_c(H) = \frac{k}{d}$، آن‌گاه یک هم‌ریختی $h : V(H) \longrightarrow V(H_d^k)$ وجود دارد.
از این رو coh، $(\frac{k}{d})$-رنگ‌آمیزی کمانی از H است. در نتیجه:

$$\chi_A(H) \leq \frac{k}{d} = \chi_c(H). \tag{۳.۴}$$

از طرف دیگر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} f : A_{\frac{k}{d}} \longrightarrow V(H_d^k), \\ f(x, x+۱) = \lfloor xd \rfloor. \end{cases}$$

فرض کنید که $(x, x+۱) \cap (y, y+۱)$. آن‌گاه:

$$۱ \leq |x-y|_{\frac{k}{d}} \leq \frac{k}{d} - ۱.$$

بنابراین $d \leq |f((x,x+۱)) - f((y,y+۱))|_k \leq k-d$.
اگر $\chi_A(H) = \frac{k}{d}$، آن‌گاه r-رنگ‌آمیزی کمانی $c : V(H) \longrightarrow A_{\frac{k}{d}}$ وجود دارد. بنابراین foc یک هم‌ریختی است و

$$\chi_c(H) \leq \frac{k}{d} = \chi_A(H). \tag{۴.۴}$$

از ۳.۴ و ۴.۴ نتیجه می‌شود که:

$$\chi_c(H) = \chi_A(H).$$

□

فصل ۵

۱.۵ مقدمه

در این فصل ابرگراف‌های جهت‌دار و همچنین عدم تعادل از یک دور جهت‌دار را معرفی خواهیم کرد و در نهایت رابطه میان عدم تعادل و عدد رنگی دوری و همچنین عدد رنگی ابرگراف‌ها را بررسی خواهیم کرد.

۲.۵ عدم تعادل

در ابتدا به توضیح یک نتیجه کلاسیک از مینتی[1] می‌پردازیم. اگر G' یک جهت‌گذاری از گراف G باشد و C' یک دور در G' باشد (نه لزوما جهت‌دار). با در نظر گرفتن یک جهت ثابت از C' به عنوان مرجع، یک یال xy از C' را به جلو گوییم هرگاه هم‌راستا با این جهت باشد و رو به عقب گوییم هرگاه این یال در خلاف این جهت باشد.
عدم تعادل دور C' به صورت $\max\{\frac{C^+}{C^-}, \frac{C^-}{C^+}\}$ تعریف می‌شود که در آن C^+ و C^- به ترتیب تعداد یال‌های رو به جلو و رو به عقب در C' هستند. در صورتی که C' خود یک دور جهت‌دار باشد، این مقدار را بی‌نهایت تعریف می‌کنیم. عدم تعادل گراف جهت‌دار G' را برابر با ماکسیمم مقدار عدم تعادل دورهای C' در بین همه دورهای C' از G' در نظر می‌گیریم.
در نهایت عدم تعادل G را با $imbal(G)$ نمایش می‌دهیم و برابر با مینیمم عدم تعادل همه جهت‌گذاری‌های G تعریف می‌کنیم.

[1] minty

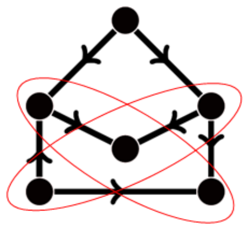
قضیه ۱.۲.۵. [۹] اگر G یک گراف باشد، آن‌گاه:

$$\chi(G) = ۱ + \lceil imbal(G) \rceil.$$

فرض کنید H یک ابرگراف و H' یک جهت‌گذاری از H باشد، یک دور جهت‌دار ضعیف در H' همان دور ضعیف در H است.
فرض کنید $C = v_۱ e_۱ v_۲ e_۲ ... v_k e_k v_۱$ یک دور ضعیف در H' باشد. اگر برای $i \in \{۱, ..., k\}$ داشته باشیم $v_i v_{i+۱} \in e'_i$، آن‌گاه $v_i v_{i+۱}$ یک زیرکمان رو به جلو از C است و اگر $v_{i+۱} v_i \in e'_i$، آن‌گاه $v_{i+۱} v_i$ یک زیرکمان رو به عقب از C است. توجه کنید که ممکن است که $v_i v_{i+۱} \notin e'_i$ و $v_{i+۱} v_i \notin e'_i$ رخ دهند.
جریان مثبت دور C را با C^+ نشان می‌دهیم که برابر با تعداد زیرکمان‌های رو به جلو دور C تعریف می‌شود.
به طور مشابه جریان منفی دور C را با C' نشان می‌دهیم و برابر با تعداد زیرکمان‌های رو به عقب در دور C تعریف می‌شود. حال عدم تعادل C در H' را با $imbal_{H'}(C)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$imbal_{H'}(C) = \begin{cases} \max\{\frac{C^+}{C^-}, \frac{C^-}{C^+}\}, v_i v_{i+۱} \in e'_i \text{یا} v_{i+۱} v_i \in e'_i & ۱ \leq i \leq k \\ ۱ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

توجه کنید که اگر C^+ و C^- برابر صفر شود، آن‌گاه $imbal_{H'}(C) = \infty$ است. عدم تعادل H' را با $imbal(H')$ نشان داده و برابر با $\max\limits_{C}\{imbal_{H'}(C)\}$ قرار می‌دهیم که در آن ماکسیمم روی همه دورهای ضعیف در H گرفته می‌شود.
در شکل زیر یک نمونه از ابرگراف جهت‌دار با عدم تعادل $\frac{۳}{۲}$ را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱.۵: یک ابرگراف H با عدم تعادل: $imbal(H) = \frac{۳}{۲}$

تعریف ۱.۲.۵. اگر H' یک جهت‌گذاری از ابرگراف H باشد، $K(H')$ را به یک ابرگراف جهت‌دار با مجموعه رئوس $V(K(H')) = V$ و مجموعه یال‌های به شرح زیر تعریف می‌کنیم:
کمان uv در $E(K(H'))$ است اگر و فقط اگر uv یک زیر کمان از H' باشد.

گزاره ۱.۲.۵. [۹] فرض کنید که H' یک جهت‌گذاری از ابرگراف H باشد، آن‌گاه عدم تعادل از H' با عدم تعادل از $K(H')$ برابر است.

برهان. با توجه به ساختار $K(H')$، یک رابطه یک به یک میان دورهای جهت‌دار در H' و دورهای جهت‌دار در $K(H')$ وجود دارد. از این رو، عدم تعادل آن‌ها نیز برابر است. □

حال نشان می‌دهیم اگر H' یک جهت‌گذاری از ابرگراف H و عدم تعادل از H' برابر $\frac{p}{q}$ باشد، آن‌گاه H دارای یک $(p+q,q)$ رنگ‌آمیزی است. برای این منظور به قضیه زیر که توسط بروستر و هل[۲] بررسی شده است، نیاز داریم.

قضیه ۲.۲.۵. [۲] فرض کنید که D گرافی جهت‌دار باشد، اگر عدم تعادل از D برابر با $\frac{p}{q}$ باشد، آن‌گاه $D \longrightarrow G_q^{p+q}$.

گزاره ۲.۲.۵. [۹] فرض کنید H' یک جهت‌گذاری از ابرگراف H باشد. اگر عدم تعادل از H' برابر با $\frac{p}{q}$ باشد، آن‌گاه H دارای یک $(p+q,q)$-رنگ‌آمیزی است.

برهان. بنابر گزاره ۲.۵، اگر عدم تعادل از H' برابر با $\frac{p}{q}$ باشد، آن‌گاه عدم تعادل $K(H')$ برابر با $\frac{p}{q}$ است. همچنین بنابر قضیه قبل یک همریختی $f : K(H') \longrightarrow G_q^{p+q}$ وجود دارد که این یک $(p+q,q)$-رنگ‌آمیزی از $K(H')$ است. حال برای هر یال از H، حداقل یک جفت از رئوس آن، در یکی از یال‌های $K(H')$ وجود دارد. از این رو، f یک $(p+q,q)$-رنگ‌آمیزی از H است. □

نتیجه ۱.۲.۵. برای هر ابرگراف H، داریم: $\chi_c(H) \leq imbal(H) + ۱$.

برهان. بنابر گزاره ۲.۵، اگر $imbal(H) = \frac{p}{q}$، آن‌گاه H دارای یک $(p+q,q)$-رنگ‌آمیزی است. همچنین از آنجایی که:

$$\chi_c(H) = \min\{\frac{p}{q} : \text{است}\ \text{رنگ‌آمیزی}\text{-}(p+q,q)\ ،H\},$$

و $\chi_c(H) \leq \frac{p}{q} + ۱$،آن‌گاه:

$$\chi_c(H) \leq \frac{p}{q} + ۱ = imbal(H) + ۱.$$

□

قضیه ۳.۲.۵. [۲] اگر D یک گراف جهت‌دار و همچنین دارای یک $(p+q,q)$-رنگ‌آمیزی باشد، آن‌گاه عدم تعادل از D کمتر یا برابر با $\frac{p}{q}$ است.

قضیه ۴.۲.۵. برای ابرگراف $H = (V,E)$، اگر $\chi_c(H) = \frac{p}{q} + ۱$، یک جهت‌گذاری از H با عدم تعادل کمتر یا مساوی با $\chi_c(H) - ۱$ وجود دارد.

از قضیه ۴.۲.۵ و نتیجه ۱.۲.۵، نتایج زیر بدست می‌آید که بیانگر رابطه عدد رنگی و عدد رنگی دوری ابرگراف‌ها با عدم تعادل ابرگراف است.

---
[۲] Brewster and Hell

نتیجه ۲.۲.۵. [۹] برای هر ابرگراف H، داریم:

$$\chi_c(H) = ۱ + imbal(H).$$

نتیجه ۳.۲.۵. [۹] برای هر ابرگراف H داریم:

$$\chi(H) = ۱ + \lceil imbal(H) \rceil.$$

مراجع

[1] M. O. Albertson and K. Collins, Homomorphisms of 3-chromatic graphs ,Discrete Mathematics 54(1985), 127-132.

[2] R. Brewster and P. Hell, Homomorphisms to powers of digraphs , Discrete Mathematics, 244 (2002), 557-569.

[3] J.A. Bondy and P. Hell , A Note on the Star Chromatic Number , J. Graph Theory, 14(1998) , 479-482.

[4] W. Deuber and X. Zhu (1996) , Circular coloring of weighted graphs , J. Graph Theory 23(1996), 365-376.

[5] C. Eslahchi and A. Rafiey, Circular Chromatic Number of Hypergraphs , (2004), 239-246.

[6] C. Eslahchi and A. Rafiey, G-Perfect K-Uniform Hypergraphs , To appear in Ars Combinatoria.

[7] L. Goddyn, M. Tarsi, and C. Q. Zhang, On (k,d)-colorings and fractional nowhere-zero flows , J . Graph Theory 28(1998), 155-161.

[8] A. Minty, A Theorem on n-colouring the points of a linear graphs , American Math Monthly, 69(1962), 623-624.

[9] R. c.Brewster, G. MacGillivray, and L. Shepherd, Circular Chromatic Number of Hypergraphs ,309(2009), 5757-5765.

[10] A. Vince , Star chromatic number , J. Graph Theory, (1988), 551-559.

[11] D. B. West, Introduction to Graph Theory , Prentice Hall, New Jersey, 1996.

[12] X. Zhu , Star chromatic numbers and products graphs , J. Graph Theory, (1992), 557-569.

[13] X. Zhu , Circular chromatic number, a survey, Discrete Math, 229(2001), 371-410.

[14] M. C. Golumbic, Algroithmic gragh theory and perfect graphs, Academic press, (1980)

[15] D. R. Guichard, Acyclic graph coloring and the complexity of the star chromatic number, J. Graph theory, (1993),129-134.

[16] E. R. Scheinerman and D. H. Ullman, fractional graph theory, Wiley Interscience series in Discrete mathematics and optimization. johnwily sonsIac, (1997).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

عدد رنگی . . . . . $\chi(H)$
عدد رنگی دوری . . . . . $\chi_c(H)$
عدد رنگی ستاره‌ای . . . . . $\chi^*(H)$
عدد رنگی بازه‌ای . . . . . $\chi_I(H)$
عدد رنگی کمانی . . . . . $\chi_A(H)$
عدم تعادل ابرگراف H . . . . . $imbal(H)$

Abstract

In this work, we generalize the concept of circular coloring of graphs to the case of hypergraphs and investigate some elementary result concerning this matter. In this regard, we present some sufficient conditions for the equality of circular chromatic number and chromatic number of hypergraphs. furthermore, by use of imbalance number of hypergraphs, we give an equivalent definition for the circular chromatic number of hypergraphs.

keywords: chromatic number, circular chromatic number, star chromatic number, arc chromatic, interval chromatic number, imbalance.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graphs and Combinatory

The Circular Chromatic Number of Hypergraphs

By: Hamed Ghadimi Hosein Abad.

Supervisor

Meysam Alishahi

Advisor

Mahdi Reza Khorsandi

september 2017