بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی در گراف‌ها

نگارنده: پگاه دالوند

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

استاد مشاور

دکتر مهدی‌رضا خورسندی

آبان ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (3) صورت جلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسي ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسي ارشد خانم **پگاه دالوند** با شماره دانشجویی **۹۴۰۷۱۴۴** رشته ریاضی کاربردی گرایش **گراف و ترکیبیات** تحت عنوان **احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی در گراف‌ها** که در تاریخ **۱۵/ ۸/ ۹۶** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتي شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: .....عالی‌ خوب.......) ☒ **مردود** ☐

نوع تحقیق: **نظري** ■ **عملي** ☐

عضو هیأت داوران	**نام ونام خانوادگي**	**مرتبهٔ علمي**	**امضاء**
1ـ استادراهنمای اول	دکتر نادر جعفری راد	دانشیار	
2- استادراهنمای دوم	–	–	
3- استاد مشاور	دکتر مهدی‌رضا خورسندی	استادیار	
4- نماینده تحصیلات تکمیلي	دکتر جعفر فتحعلی	دانشیار	
5- استاد ممتحن اول	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
6ـ استاد ممتحن دوم	دکتر صادق رحیمی شعرباف	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از 4 ماه برگزار شود)

تقدیم به بهترین حامیان زندگی ام ،
پدر و مادر عزیزم و خواهران زیبایم ،
تقدیم به برادران مهربانم ،
تقدیم به آموزگارانم و به همه آنان که از صمیم قلب دوستشان می دارم .

سپاس گزاری

سپاس و ستایش مر خدای جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درخشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

سپاسگذار کسانی هستم که سرآغاز تولد من هستند. از یکی زاده می‌شوم و از دیگری جاودانه. استادی که سپیدی را برتخته سیاه زندگیم نگاشت و مادری که تار مویی از او بپای من سیاه نماد.

بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای دلسوز و دانشمندم **جناب آقای دکتر نادر جعفری راد** و استاد مشاور بزرگوارم **جناب آقای مهدی‌رضا خورسندی** برای کمک‌ها و راهنمایی‌هایشان که در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه به من عرضه داشته‌اند تشکر کنم و همچنین از **جناب آقای دکتر میثم علیشاهی** و **جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف** که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را بر عهده گرفته‌اند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم و برایشان همواره سرافرازی و سربلندی را از خداوند متعال خواستارم. در پایان از اساتید مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد خود نظیر دکتر نادر حبیبی، که چراغ علم و معرفتشان روشنی راه و مسیر زندگی من بوده تشکر می کنم.

پگاه دالوند
آبان ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **پگاه دالوند** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی در گراف‌ها** ، تحت راهنمایی دکتر **نادر جعفری راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

پگاه دالوند
آبان ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

گراف $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید. یک زیرمجموعه D از رئوس گراف G را احاطه‌گر نامیم هرگاه هر رأس از $V-D$ مجاور با حداقل یک رأس از D باشد. مجموعه احاطه‌گر D را یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده نامیم، هرگاه زیرگراف القایی $\langle V-D\rangle$ ناهمبند باشد. کوچکترین اندازه چنین مجموعه‌ای را در صورت وجود عدد احاطه‌گری شکافنده G گوییم و با نماد $\gamma_s(G)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه احاطه‌گر D را یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی نامیم، هرگاه زیرگراف القایی $\langle V-D\rangle$ با حداقل دو رأس تهی (پوچ) باشد. کوچکترین اندازه چنین مجموعه‌ای را در صورت وجود عدد احاطه‌گری شکافنده قوی G گوییم و با نماد $\gamma_{ss}(G)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه احاطه‌گر D را یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی نامیم هرگاه $|V-D|\geq ۱$ و ماکزیمم درجه هر رأس از زیرگراف القایی $\langle V-D\rangle$ حداکثر یک باشد. کوچکترین اندازه چنین مجموعه‌ای را در صورت وجود عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی G گوییم و با نماد $\gamma_{sss}(G)$ نمایش می‌دهیم. در این پایان‌نامه ابتدا برخی از نتایج مرتبط با $\gamma_s(G)$ شرح داده شده و سپس به بررسی $\gamma_{ss}(G)$ پرداخته می‌شود. در پایان مفهوم احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی در گراف‌ها معرفی و تعدادی قضیه مرتبط با آن اثبات می شود.

کلمات کلیدی: مجموعه احاطه‌گر، مجموعه احاطه‌گر شکافنده، مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی، مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی

فهرست مطالب

فهرست تصاویر ..... **ک**

فهرست نمادها ..... **م**

پیشگفتار ..... **س**

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه **۱**

۱.۱ مقدمات و تعریفات ۱

۲.۱ احاطه‌گری ۱۱

۲ احاطه‌گری شکافنده در گراف‌ها **۱۳**

۱.۲ مقدمه ۱۳

۲.۲ عدد احاطه‌گری شکافنده ۱۴

۱.۲.۲ بررسی خواص SDS های G ۱۴

۳.۲ کران‌هایی برای γ_s ۱۷

۱.۳.۲ کران بر حسب عدد پوشش رأسی ۱۷

۲.۳.۲ کران‌هایی بر حسب عدد احاطه‌گری و عدد همبندی ۱۷

۳.۳.۲ کران بر حسب مرتبه و درجه ۱۸

۴.۲ γ_s برای خانواده متعارف از گراف‌ها ۱۹

۱.۴.۲ γ_s برای گراف دور ۱۹

۲.۴.۲ γ_s برای گراف چرخ ۲۰

۳.۴.۲ γ_s برای گراف دوبخشی کامل ۲۰

۵.۲ بررسی γ_s- مجموعه برای گراف G شامل رأس برشی و بلوک ۲۱

۶.۲ رابطه γ_s با سایر پارامترها ۲۲

۳ احاطه‌گری شکافنده قوی در گراف‌ها **۲۳**

۱.۳ مقدمه ۲۳

۲.۳ عدد احاطه‌گری شکافنده قوی ۲۳
۳.۳ نتایج پایه‌ای مرتبط با γ_{ss} ۲۵
۴.۳ γ_{ss} برای خانواده متعارف از گراف‌ها ۲۶
۱.۴.۳ γ_{ss} برای گراف دوبخشی کامل ۲۶
۲.۴.۳ γ_{ss} برای دور C_n ۲۷
۳.۴.۳ γ_{ss} برای مسیر P_n ۲۷
۴.۴.۳ γ_{ss} برای چرخ W_n ۲۷
۵.۳ بررسی γ_{ss} برای درخت T ۲۸
۶.۳ کران γ_{ss} برحسب قطر G و زیرگراف فراگیر G ۲۹
۷.۳ نتایجی مرتبط با $SSDS$ های خاص ۲۹
۸.۳ کران γ_{ss} برحسب $\Delta(G)$ و دیگر نتایج مرتبط با آن ۳۰

۴ احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی در گراف‌ها ۳۳

۱.۴ مقدمه ۳۳
۲.۴ عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی ۳۳
۳.۴ γ_{sss} برای خانواده متعارف از گراف‌ها ۳۵
۴.۴ بررسی مقادیر γ_{sss} بر اساس پارامترهای مختلف از G ۳۸
۵.۴ مقادیر γ_{sss} برای درختT ۴۳
۶.۴ ویژگی‌های $SSSDS$ های مینیمال از G ۴۵
۷.۴ نتایجی در رابطه با $\gamma_{sss}(G) + \gamma(G)$ ۴۶
۸.۴ کرانی از γ_{sss} بر حسب Δ ۴۷
۹.۴ کران بالای γ_{sss} بر حسب $\alpha_0(G)$، $\beta_0(G)$ و $\mu(G)$ ۴۸
۱۰.۴ تعیین γ_{sss} برای رده خاصی از گراف‌ها ۴۹
۱.۱۰.۴ γ_{sss} برای گراف حاصل از پیوند دو گراف G_1 و G_2 . . . . ۵۰
۲.۱۰.۴ γ_{sss} برای گراف تاج $G_1 \circ G_2$ ۵۱
۳.۱۰.۴ γ_{sss} برای گراف دو ستونی $T_k(G)$ ۵۳
۴.۱۰.۴ γ_{sss} برای گراف شکافته شده ۵۴
۱۱.۴ نتیجه گیری و طرح نهایی ۵۶

مراجع ۵۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۱

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۶۳

فهرست تصاویر

۱.۱ گراف پترسن ۳
۲.۱ (الف) گراف G، (ب) زیرگراف القایی $\langle H\rangle$ و (ج) زیرگراف فراگیر S ۴
۳.۱ گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$ و پیوند دو گراف $G_۱ \vee G_۲$ ۵
۴.۱ بلوک‌های گراف G ۶
۵.۱ (الف) گراف G و (ب) گراف $\bar{G}$ ۷
۶.۱ (الف) گراف $K_{۳,۳}$ و(ب) گراف $k_{۲,۲,۲}$ ۸
۷.۱ دو گراف یکریخت ۸
۸.۱ شکل (۱) نمودار عنکبوت زخمی و شکل (۲) نمودار عنکبوت سالم می‌باشد. ۱۰
۹.۱ (الف) گراف H و (ب) گراف H^+ ۱۰
۱۰.۱ $\gamma(G) = ۳$ ۱۱

۱.۲ $\gamma_s(G) = ۲$ ۱۴
۲.۲ $\gamma(G) = ۳$ و $|S| = ۵$ ۱۶

۱.۳ $\gamma_{ss}(G) = ۴$ ۲۴

۱.۴ $\gamma_{sss}(G) = ۴$ ۳۴
۲.۴ $\gamma_{sss}(G) = ۴$ ۳۵
۳.۴ گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$ و گراف تاج $G_۱ \circ G_۲$ ۵۱
۴.۴ گراف G، گراف دوستونی $T_۱(G)$ و $T_۲(G)$ ۵۳
۵.۴ گراف شکافته شده ۵۴

فهرست نمادها

نمادهای نظریه گراف

C_n	دور به طول n	V	مجموعه رأس‌ها
$d_G(v)$	درجه رأس v از G	W_n	چرخ از مرتبه n
$d_G(u,v)$	فاصله u از v در گراف G	α_0	عدد پوشش رأسی
$diam(G)$	قطر گراف G	β_0	عدد استقلال
E	مجموعه یال‌ها	μ	ماکزیمم تطابق
$End(G)$	مجموعه رئوس پایانی G	δ	مینیمم درجه
G	گراف	Δ	ماکزیمم درج
$\langle S\rangle$	زیرگراف القایی S	γ	عدد احاطه‌گری
$\lfloor x\rfloor$	بزرگترین عدد صحیح $\geq x$	γ_s	عدد احاطه‌گری شکافنده
$\lceil x\rceil$	کوچکترین عدد صحیح $\leq x$	γ_{ss}	عدد احاطه‌گری شکافنده قوی
$k(G)$	عدد همبندی G	γ_{sss}	عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی
K_n	گراف کامل	γ_c	عدد احاطه‌گری همبند
$K_{m,n}$	گراف دوبخشی کامل	γ_i	عدد احاطه‌گری مستقل
$K_{1,k}$	ستاره	$\bar{G}$	مکمل G
$K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}$	گراف چندبخشی کامل	$G-v$	حذف v
m	اندازه گراف	$G-e$	حذف e
$N_G(v)$	مجموعه همسایه‌های vدرG	$\cong$	یکریختی
n	مرتبه گراف	$\equiv$	همنهشتی
P_n	مسیر از مرتبه n	mod	پیمانه همنهشتی
$S(G)$	ساقه G یا مجموعه رئوس پشتیبان	$G_1\circ G_2$	گراف تاج
$T_k(G)$	گراف دوستونی	$G_1\vee G_2$	پیوند G_1 و G_2

پیشگفتار

نظریه احاطه‌گری، مهم و به علاوه سریع‌ترین زمینه در حال رشد در نظریه گراف است. این نظریه کاربرهای زیادی در علوم کامپیوتر، الکترونیک، مخابرات و ... دارد. از جمله کاربردهای احاطه‌گری انتخاب بهترین مکان برای احداث بیمارستان، استقرار نیروهای انتظامی و ... است. مفهوم احاطه‌گری نخستین بار توسط دوجیکنیش [۱] در سال ۱۹۸۳ در مورد صفحه‌ی شطرنج مطرح شد. مسئله احاطه‌گری در دهه‌های گذشته در بیش از ۸۰ نوع شاخه تقسیم بندی شده و گسترش فراوانی داشته است.
در فصل اول این پایان‌نامه تعاریف اولیه و قضیه‌هایی از نظریه گراف که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز است بیان می‌شود که از مرجع [۴] و [۲۰] گرفته شده‌اند.
در فصل دوم برخی از نتایج مقدماتی در خصوص عدد احاطه‌گری شکافنده یا γ_s معرفی و همچنین ارتباط γ_s با سایر پارامترهای شناخته شده در گراف بررسی می‌شود. مفهوم احاطه‌گری شکافنده نخستین بار توسط کولی [۲] و جاناکیرام [۳] در سال ۱۹۹۷ معرفی شد.
در فصل سوم به بررسی عدد احاطه‌گری شکافنده قوی یا γ_{ss} پرداخته و مقدار دقیق γ_{ss} برای هر گراف مشخص شده و همچنین تعدادی نامساوی در ارتباط با γ_{ss} اثبات می‌شود. مفهوم احاطه‌گری شکافنده قوی نیز نخستین بار توسط کولی و جاناکیرام در سال ۲۰۰۶ مطرح شد.
در فصل آخر مقدار دقیق عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی یا γ_{sss} برای خانواده متعارفی از گراف‌ها از قبیل دورها، مسیرها، چرخ‌ها و ... تعیین شده و سپس کران‌هایی از γ_{sss} بر حسب پارامترهای مختلف از گراف به دست می‌آید. همچنین کران‌هایی برای درخت‌ها تعیین می‌شود. در آخر نتیجه‌گیری و برخی مسائل باز مرتبط با این پارامتر مطرح می‌شود. مفهوم احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی نخستین بار توسط انوار الوردی [۴]، کرم عبادی [۵]، مارتین مانریکه [۶] و نانداپا سونر [۷] در سال ۲۰۱۴ مطرح شد. مطالب این پایان‌نامه برگرفته از مراجع [۲]، [۱۵] و [۱۶] هستند.

---

[۱] Do Jacnish
[۲] Kulli
[۳] Janakiram
[۴] Anwar alwardi
[۵] Karam ebadi
[۶] Martin manrique
[۷] Nandappa soner

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل برخی از تعاریف اولیه و همچنین قضیه‌هایی از نظریه گراف که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم بیان می‌شود. قابل توجه است که گراف‌های مورد بحث در سراسر این پایان‌نامه، گراف‌های ساده ، متناهی و غیربدیهی هستند که در ادامه به طور دقیق تعریف می‌شوند. تمام اصطلاحات و تعاریف نظریه گراف در این پایان نامه از مرجع [۴] و مرجع [۲۰] هستند.

۱.۱ مقدمات و تعریفات

تعریف ۱.۱.۱. منظور از یک **گراف** [۱] یک سه‌تایی $(V(G), E(G), \psi(G))$ است که در آن $(V(G))$ یک مجموعه ناتهی از عناصر به نام رئوس و $E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها و $\psi(G)$ تابع وقوع است که به هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های G را متناظر می‌کند.
اگر e یک یال و $v_۱$ و $v_۲$ رأس‌های آن باشند به قسمی که $\psi_G(e) = v_۱v_۲$ آن‌گاه گوییم e، $v_۱$ را به $v_۲$ وصل می‌کند و این دو رأس را دو انتهای e می‌نامیم. از این پس گراف را به طور خلاصه به صورت $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. دو رأس u و v را **مجاور** [۲] گوییم هرگاه بین آن‌ها یالی موجود باشد.

[۱] Graph
[۲] Adjacent

تعریف ۳.۱.۱. طوقه [۳] در یک گراف یالی است که دو رأس انتهایی‌اش برهم منطبق باشند.

تعریف ۴.۱.۱. اگر در یک گراف بین دو رأس دلخواه u و v دویال یا بیشتر از دو یال وجود داشته باشد آن‌گاه آن‌ها را **یال‌های چندگانه** [۴] نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. گرافی را که هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد را **گراف ساده** [۵] می‌نامیم.

در این پایان نامه منظور از گراف G گراف ساده است.

تعریف ۶.۱.۱. مرتبه [۶] یک گراف که G با $n(G)$ یا n نمایش می‌دهیم، تعداد رأس‌ها در G است. همچنین تعداد یال‌های گراف G را **اندازه گراف** [۷] و با $m(G)$ یا m نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. درجه [۸] رأس v در گراف G تعداد یال‌های گراف G می‌باشد که v بر آن‌ها واقع است و آن را با $\deg_G(v)$ نمایش می‌دهیم. در هر گراف تعداد رأس‌های از درجه فرد عددی زوج است.

تعریف ۸.۱.۱. یک رأس **تنها** [۹] دارای درجه ۰ است. مجموعه رئوس تنها از گراف G را با $isol(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. ماکزیمم درجه رئوس را با $\Delta(G)$ و **مینیمم درجه** رئوس را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. گراف G را **منتظم** [۱۰] گوییم هرگاه $\Delta(G) = \delta(G)$ باشد و kـ منتظم است هرگاه $\Delta(G) = \delta(G) = k$.

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر گراف G، یک گراف ۳ـ منتظم باشد آن را **گراف مکعبی** [۱۱] نامیم.

---

[۳] Loop

[۴] Multiple edges

[۵] Simple graph

[۶] Order

[۷] Size graph

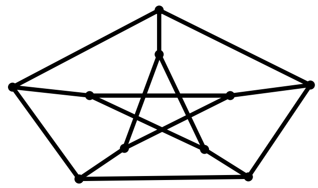
[۸] Degree

[۹] Single

[۱۰] Regular graph

[۱۱] Qubic graph

تعریف ۱.۱.۱۲. **گراف پترسن** [۱۲] یک گراف مکعبی ساده با ۱۰ رأس و ۱۵ یال است. (شکل ۱.۱)



شکل ۱.۱: گراف پترسن

تعریف ۱.۱.۱۳. مجموعه رأس‌هایی از G که با رأس v از گراف G مجاور باشند را **همسایگی باز** [۱۳] رأس v نامیده و با $N(v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۴. $N(v) \cup \{v\}$ را **همسایگی بسته** [۱۴] رأس v نامیده و با $N[v]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. اگر $X \subseteq V$ و $v \in X$ باشد، آن‌گاه رأس u را **همسایه اختصاصی** [۱۵] رأس v روی X گوییم هرگاه $N(u) \cap X = \{v\}$

تعریف ۱.۱.۱۶. گرافی شامل $n \geq 1$ رأس، که مجموعه یال‌های آن تهی باشد را **تهی (پوچ)** [۱۶]نامیم.

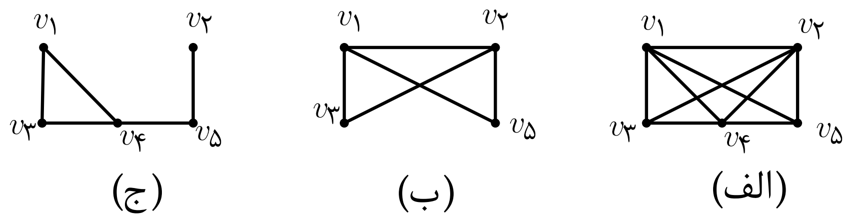
تعریف ۱.۱.۱۷. اگر مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های یک گراف، **متناهی** [۱۷] گراف را متناهی می‌نامیم در غیر این صورت گراف **نامتناهی** [۱۸] است.

تعریف ۱.۱.۱۸. یک **زیرگراف** [۱۹] از G، گرافی مانند H است به طوری که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$.

تعریف ۱.۱.۱۹. H را **زیرگراف القایی** G [۲۰] نامیده و با نماد $\langle H \rangle$ نمایش می‌دهیم، هرگاه H زیرگرافی از G باشد و برای هر دو رأس x و y متعلق به H، اگر $xy \in E(G)$ آن‌گاه $xy \in E(H)$.

[۱۲] Peterson graph
[۱۳] Open neighbourhood
[۱۴] Closed neighbourhood
[۱۵] Private neighbourhood
[۱۶] Empty graph
[۱۷] Finite graph
[۱۸] Infinite graph
[۱۹] Subgraph
[۲۰] Induced subgraph

تعریف ۲۰.۱.۱. زیرگراف S از G یک **زیرگراف فراگیر** [21] است اگر $V(S)=V(G)$ باشد.



شکل ۲.۱: (الف) گراف G، (ب) زیرگراف القایی $\langle H\rangle$ و (ج) زیرگراف فراگیر S

تعریف ۲۱.۱.۱. یک **گشت** [22] به طول k در گراف G یک دنباله متناوب $v_0, e_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌هاست به طوری که به ازای هر $i=1,2,\ldots,k$، $e_i=v_{i-1}v_i$ یک یال باشد. یک **گذر** [23] گشتی است که هیچ یال تکراری نداشته باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱. یک **مسیر** [24] گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر n رأسی را با P_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۱.۱. مسیری به طول حداقل یک که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی برهم منطبق هستند و هیچ رأس تکراری ندارد را یک **دور** [25] می‌نامیم. یک دور n رأسی را با C_n نمایش می‌دهیم.

تعداد یال‌های موجود در یک گشت، گذر، مسیر یا دور را طول آن می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱. طوقه دوری به طول یک است.

تعریف ۲۵.۱.۱. اگر همه رئوس C_{n-1} را به یک رأس جدید متصل کنیم آن را **چرخ** [26] نامیده و با W_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v را **فاصله** [27] آن دو رأس گوییم و با $d_G(u,v)$ نمایش می‌دهیم. اگر هیچ مسیری بین u و v وجود نداشته باشد، تعریف می‌کنیم $d(u,v)=\infty$.

[21] Spanning subgraph
[22] Walk
[23] Trail
[24] Path
[25] Cycle
[26] Wheel
[27] Distance

تعریف ۲۷.۱.۱. کمیت d تعریف شده در فوق یک تابع از $V(G) \times V(G)$، به مجموعه اعداد صحیحی نامنفی است. در واقع **تابع فاصله** [۲۸] در گراف G یک متر روی این گراف تعریف می‌کند. یعنی d نگاشتی است که در شرایط زیر صدق می‌کند. اگر G یک گراف باشد آن‌گاه:

(الف) تابع فاصله نامنفی است. یعنی $d(u,v) \geq 0$

(ب) $d(u,v) = 0$ اگر و تنها اگر $u = v$.

(ج) تابع فاصله متقارن است. یعنی برای هر دو رأس u و v از G $d(u,v) = d(v,u)$

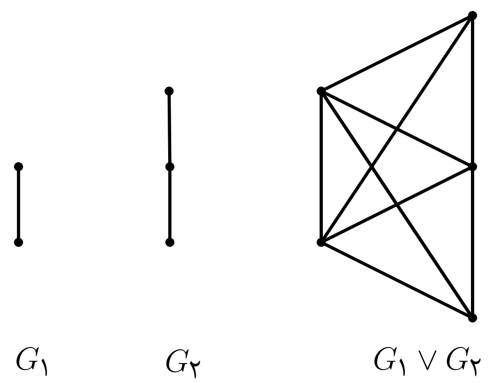
(د) هر سه رأس u، v و w از G نامساوی مثلثی زیر صدق می‌کند:

$$d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$$

فاصله یک رابطه هم‌ارزی است.

تعریف ۲۸.۱.۱. در بین کوتاه‌ترین مسیرها بین هر دو رأس، طول بزرگترین مسیر را **قطر** [۲۹] گراف G می‌نامیم و با نماد $diam(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف به ترتیب از مرتبه n_1 و n_2 باشند ، به طوری که $V(G_1) \cap V(G_2) = \phi$ باشد. **پیوند دو گراف** [۳۰] G_1 و G_2 گراف $G = G_1 \vee G_2$ است، به صورتی که $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ و $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ می‌باشد.



شکل ۳.۱: گراف‌های G_1 و G_2 و پیوند دو گراف $G_1 \vee G_2$

[۲۸] Distance function
[۲۹] Diameter
[۳۰] Join two graphs

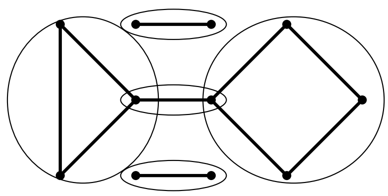
تعریف ۳۰.۱.۱. گرافی که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد را **گراف همبند** [۳۱] می‌نامیم. گرافی که همبند نباشد را **ناهمبند** [۳۲] می‌نامیم. **مؤلفه** [۳۳] یک گراف G زیرگراف همبند ماکسیمال از G است. بنابراین گراف G ناهمبند است اگر و تنها اگر بتوان مجموعه V را به دو مجموعه V_1 و V_2 چنان افراز کرد که هیچ یالی در E به صورت $\{xy\}$ که $x \in V_1$ و $y \in V_2$ وجود نداشته باشد. گراف همبند است اگر و تنها اگر فقط یک مؤلفه داشته باشد.

تعریف ۳۱.۱.۱. گرافی که یک رأس داشته باشد را **بدیهی** [۳۴] گوییم. یک مؤلفه (یاگراف) **غیربدیهی** [۳۵] است اگر شامل یک یال باشد.

تعریف ۳۲.۱.۱. یک **رأس برشی** [۳۶] از یک گراف، رأسی است که حذف آن تعداد مؤلفه‌های گراف را افزایش دهد. نماد به کار رفته برای زیرگراف به دست آمده از حذف یک رأس $v \in V(G)$، $G - v$ می‌باشد.

تعریف ۳۳.۱.۱. یک **یال برشی** [۳۷] از یک گراف، یالی است که حذف آن تعداد مؤلفه‌های گراف را افزایش دهد. نماد به کار رفته برای زیرگراف به دست آمده از حذف یک یال $e \in E(G)$، $G - e$ می‌باشد.

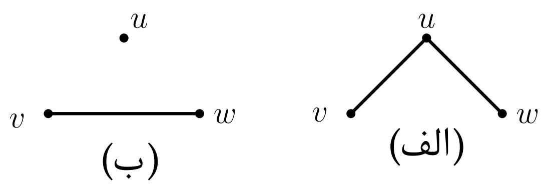
تعریف ۳۴.۱.۱. یک **بلوک** [۳۸] از یک گراف G یک زیرگراف همبند ماکسیمال است که فاقد رأس برشی است (مؤلفه‌هایی که دور آن‌ها خط کشیده شده در شکل ۴.۱ بلوک هستند). اگر G همبند و فاقد رأس برشی باشد خود یک بلوک است. یک یال از یک دور بلوک است اگر و تنها اگر یال برشی از Gباشد.



شکل ۴.۱: بلوک‌های گراف G

[۳۱] Connected graph
[۳۲] Disconnected graph
[۳۳] Component
[۳۴] Trivial graph
[۳۵] Nontrivial graph
[۳۶] Cut vertex
[۳۷] Cut edge
[۳۸] Block

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنید گراف G گرافی n رأسی باشد. **مکمل** [۳۹] (متمم) گراف G را با $\bar{G}$ نشان می‌دهیم و بدین صورت تعریف می‌کنیم $V(G) = V(\bar{G})$ و هر دو رأس مانند u و vدر $\bar{G}$ مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند(شکل ۵.۱). توجه کنید مکمل گراف کامل گراف تهی و مکمل گراف کامل دوبخشی، اجتماع دو گراف است.



شکل ۵.۱: (الف) گراف G و (ب) گراف $\bar{G}$

تعریف ۳۶.۱.۱. یک **مجموعه جداساز یا برش رأسی** [۴۰] از یک گراف G عبارت است از مجموعه $D \subset V(G)$ به طوری که $G - D$ دارای بیش از یک مؤلفه باشد. یک گراف G، k**ـ همبند** [۴۱] است هرگاه هر برش رأسی از G دارای حداقل k رأس باشد.

تعریف ۳۷.۱.۱. **همبندی** [۴۲] گراف G که به صورت $k(G)$ نوشته می‌شود، کوچکترین اندازه برش رأسی D است به طوری که $G - D$ ناهمبند یا بدیهی شود. یک گراف دارای همبندی صفر است اگر و تنها اگر ناهمبند باشد.

تعریف ۳۸.۱.۱. یک **گراف کامل** [۴۳] یک گراف ساده است که در آن هر جفت از رأس‌ها یک یال تشکیل می‌دهند. یک گراف کامل n رأسی را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۹.۱.۱. یک **خوشه** [۴۴] از گراف G یک زیرگراف کامل از G است. مرتبه بزرگترین خوشه در گراف را عدد خوشه‌ای می‌نامیم و با نماد $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۰.۱.۱. **گراف دوبخشی** [۴۵] گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. به عبارتی گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر فاقد دور فرد باشد.

[۳۹] Complementary
[۴۰] Vertex cut set
[۴۱] K-connected
[۴۲] Connectivity
[۴۳] Complete graph
[۴۴] Clique
[۴۵] Bipartite graph

تعریف ۴۱.۱.۱. یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y، که در آن هررأس X به هر رأس Y وصل شده باشد، **گراف دوبخشی کامل** [۴۶] نامیده می‌شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$، آن‌گاه گراف دوبخشی کامل را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

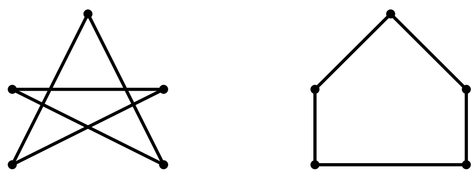
تعریف ۴۲.۱.۱. گراف G را **گراف چندبخشی کامل** [۴۷] نامیم و با $K_{n_۱,n_۲...,n_t}$ نمایش می‌دهیم، هرگاه بتوان رأس‌هایش را به مجموعه‌هایی افراز کرد به طوری که uv یک یال باشد اگر و تنها اگر، u و v به مجموعه های متفاوت متعلق باشند. به طور هم ارز، G یک گراف چندبخشی کامل است اگر و تنها اگر، هر مؤلفه از $\bar{G}$ یک گراف کامل باشد.

(الف) (ب)

شکل ۶.۱: (الف) گراف $K_{۳,۳}$ و(ب) گراف $k_{۲,۲,۲}$

تعریف ۴۳.۱.۱. دو گراف $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$ را **یکریخت** [۴۸] گوییم هرگاه تابع یک به یک و پوشای $f : V(G_۱) \to V(G_۲)$ موجود باشد که اگر $uv \in E(G_۱)$ آن‌گاه $f(u)f(v) \in E(G_۲)$ دو گراف یکریخت $G_۱$ و $G_۲$ را با نماد $G_۱ \cong G_۲$ نشان می‌دهیم. برای مثال گراف‌های شکل زیر یکریخت هستند.

تعریف ۴۴.۱.۱. یک **خودریختی** [۴۹] گراف G یک یکریختی از G به خودش است.



شکل ۷.۱: دو گراف یکریخت

[۴۶] Complete bipartite graph
[۴۷] Complete multibipartite graph
[۴۸] Isomorphis
[۴۹] Automorfism

تعریف ۴۵.۱.۱. یک گراف فاقد دور را **جنگل** [۵۰] گوییم.

تعریف ۴۶.۱.۱. یک جنگل همبند را یک **درخت** [۵۱] می‌نامیم. به عبارت دیگر یک گراف همبند فاقد دور را درخت گوییم. بنابراین هر درخت یک گراف دوبخشی است.

تعریف ۴۷.۱.۱. یک رأس درجه یک در یک درخت را **برگ** [۵۲] یا رأس آویزان نامیم.

تعریف ۴۸.۱.۱. همچنین رأسی که در همسایگی یک برگ قرار داشته باشد، **پشتیبان** [۵۳] نام دارد و مجموعه رئوس پشتیبان درخت T را با نماد $S(T)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۹.۱.۱. برای هر $k \geq 1$، درخت یکریخت با یک گراف دوبخشی $K_{1,k}$ را **ستاره** [۵۴] می‌نامیم و با نماد $S_{1,k}$ یا همان نماد $K_{1,k}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵۰.۱.۱. یالی که بر یک رأس درجه یک واقع است را **یال آویزان** [۵۵] می‌نامیم.

تعریف ۵۱.۱.۱. رأسی از درجه یک در گراف G را **رأس پایانی** [۵۶] نامیم و مجموعه رئوس پایانی از گراف G را با نماد $End(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵۲.۱.۱. رأسی که مجاور رأس پایانی باشد، **ساقه** [۵۷] نامیده می‌شود. مجموعه ساقه‌های گراف G را با نماد $Stem(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵۳.۱.۱. **زیرتقسیم** [۵۸] یک یال uv از گراف G عبارت است از عمل حذف uv و افزودن یک مسیر u، w و v از میان یک رأس جدید w. هر یال در یک گراف حداکثر یک بار زیر تقسیم می‌شود.

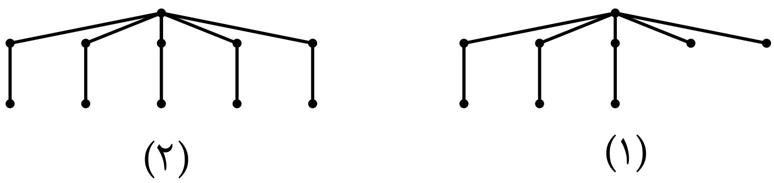
تعریف ۵۴.۱.۱. یک **عنکبوت** [۵۹] درختی است شامل یک رأس از درجه حداقل ۳ و باقی رئوس از درجه حداکثر ۲ باشد.

تعریف ۵۵.۱.۱. درختی که با زیر تقسیم کردن تمام یال‌های ستاره به دست می‌آید، **عنکبوت سالم** [۶۰] نامیده می‌شود.

---

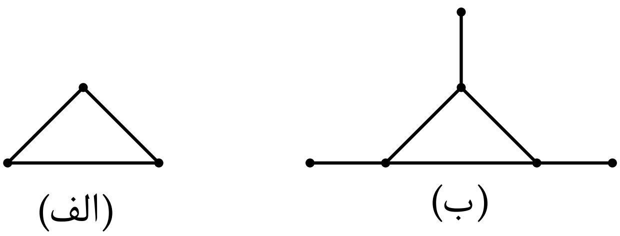
[۵۰] Forest
[۵۱] Tree
[۵۲] Leaf
[۵۳] Supporter
[۵۴] Star
[۵۵] Pendant edge
[۵۶] End-vertex
[۵۷] Stem
[۵۸] Subdivision
[۵۹] Spider
[۶۰] Healthy spider

تعریف ۵۶.۱.۱. عنکبوت زخمی [۶۱] یک ستاره $K_{1,t}$ با حداکثر $t-1$ یال زیرتقسیم شده است.



شکل ۸.۱: شکل (۱) نمودار عنکبوت زخمی و شکل (۲) نمودار عنکبوت سالم می‌باشد.

تعریف ۵۷.۱.۱. تاج [۶۲] در یک گراف مانند H که با H^+ یا $cor(H)$ نمایش داده می‌شود، گرافی از مرتبه $2|V(H)|$ است که با اضافه کردن یک یال آویزان به هر رأس از گراف H به دست می‌آید.



شکل ۹.۱: (الف) گراف H و (ب) گراف H^+

تعریف ۵۸.۱.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک **پوشش رأسی** [۶۳] می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از نقاط پایانی هر یال G در S باشد. کوچکترین اندازه یک پوشش رأسی در G را عدد پوشش رأسی G می‌نامیم و با نماد $\alpha_0(G)$ نمایش می‌دهیم.

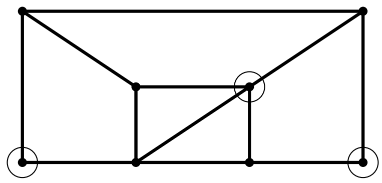
تعریف ۵۹.۱.۱. زیرمجموعه M از یال‌های گراف G را یک **تطابق** [۶۴] گوییم هرگاه هیچ دو یالی در M رأس مشترک نداشته باشند. اگر M یک تطابق در G باشد و x رأسی روی یکی از یال‌های M باشد آن‌گاه گوییم M، x را اشباع می‌کند. اگر هر رأس از گراف G توسط یک تطابق M اشباع شود، آن‌گاه M را یک **تطابق کامل** می‌نامیم. بزرگترین اندازه یک تطابق در G را عدد تطابقی G نامیم و با $\mu(G)$ نمایش می‌دهیم. یک تطابق از اندازه $\mu(G)$ را تطابق ماکزیمم یا $\mu(G)$ـ مجموعه نامیم. به وضوح هر تطابق کامل، یک تطابق ماکزیمم یا $\mu(G)$ است.

[۶۱] Wounded spider
[۶۲] Corona
[۶۳] Vertex covering
[۶۴] Matching

تعریف ۶۰.۱.۱. یک **مجموعه مستقل** [۶۵] در گراف G، مجموعه‌ای از رئوس می‌باشد که هیچ دو رأس از آن مجاور نباشند. بزرگترین اندازه یک مجموعه مستقل در گراف G را عدد استقلال گراف G نامیده و با نماد $\beta_0(G)$ نمایش می‌دهیم. یک مجموعه مستقل ماکزیمم را یک $\beta_0(G)$ـ مجموعه می‌نامیم. مجموعه مستقل S را یک **مجموعه مستقل ماکسیمال** [۶۶] می‌نامیم هرگاه نتوان هیچ رأس جدیدی مانند v را به S اضافه کرد به طوری که $S \cup \{v\}$ نیز مستقل باشد.

۲.۱ احاطه‌گری

تعریف ۱.۲.۱. یک مجموعه $D \subseteq V$ از رئوس گراف $G = (V, E)$ را **مجموعه احاطه‌گر** [۶۷] می‌نامیم، هرگاه هر رأس در $V - D$ مجاور با حداقل یک رأس در D باشد و یا به عبارتی $N[D] = V(G)$. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه‌گری G می‌نامیم و با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه $\gamma(G)$ را یک $\gamma(G)$ـ مجموعه از G می‌نامیم. اگر رأس v از گراف G متعلق به برخی از γـ مجموعه‌ها باشد، آن‌گاه v را یک $\gamma(G)$ ـ رأس خوب می‌نامیم.



شکل ۱۰.۱: $\gamma(G) = ۳$

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه احاطه‌گر D را یک **مجموعه احاطه‌گر مستقل** [۶۸] نامیم، هرگاه هیچ دو رأسی از D مجاور نباشند. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر مستقل در گراف G را عدد احاطه‌گری مستقل G می‌نامیم و با نماد $i(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه احاطه‌گر D را یک **مجموعه احاطه‌گرهمبند** [۶۹] نامیم، هرگاه $\langle D \rangle$ همبند باشد. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر همبند در گراف G را عدد احاطه‌گری همبند G می‌نامیم و با نماد $\gamma_c(G)$ نشان می‌دهیم.

در ادامه تعدادی قضیه بیان می‌شود که در فصل‌های بعد از آن‌ها استفاده می‌کنیم.

---

[۶۵] Independent set

[۶۶] Maximal independent set

[۶۷] Dominating set

[۶۸] Independent dominating set

[۶۹] Connected dominating set

گزاره ۱.۲.۱. [۹] برای هر گراف G از مرتبه n داریم: $۱ \leq \gamma(G) \leq n$. همچنین $\gamma(G) = ۱$ است اگر و تنها اگر G دارای رأسی از درجه $n-۱$ باشد و $\gamma(G) = n$ است اگر و تنها اگر $G = \bar{K_n}$ باشد.

قضیه ۱.۲.۱. [۹] اگر یک گراف G از مرتبه n هیچ رأس تنهایی نداشته باشد، آن‌گاه داریم: $\gamma(G) \leq \frac{n}{۲}$.

قضیه ۲.۲.۱. [۹] برای هر گراف G فاقد رأس تنها داریم: $\lceil \frac{n}{\Delta(G)+۱} \rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

قضیه ۳.۲.۱. [۶] و [۱۸] گراف همبند G از مرتبه n را در نظر بگیرید. آن‌گاه $\gamma(G) = \frac{n(G)}{۲}$ است، اگر و تنها اگر G یکریخت با دور $C_۴$ باشد یا تاج H^+ (از هر گراف همبند H).

فصل ۲

احاطه‌گری شکافنده در گراف‌ها

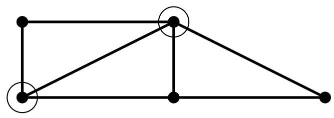
۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا مفهوم احاطه‌گری شکافنده در گراف‌ها بیان و سپس کران‌هایی از عدد احاطه‌گری شکافنده یا $\gamma_s(G)$ بر حسب عدد پوشش رأسی، عدد احاطه‌گری و عدد همبندی، مرتبه و درجه گراف به دست می‌آید. در ادامه مقدار دقیق این عدد برای خانواده متعارف از گراف‌ها از قبیل دور، چرخ و گراف دوبخشی کامل تعیین شده و مجموعه احاطه‌گر شکافنده برای گراف شامل رأس برشی و بلوک بررسی می‌شود. به طور کلی در این فصل برخی نتایج مقدماتی مرتبط با عدد احاطه‌گری شکافنده بیان می‌شود. تمام قضایا و تعاریف این فصل از مرجع [۱۵] هستند.

ملاحظه ۱.۱.۲. گراف‌هایی که در این پایان‌نامه در نظر می‌گیریم ساده، از مرتبه n و اندازه m هستند.

۲.۲ عدد احاطه‌گری شکافنده

تعریف ۱.۲.۲. مجموعه احاطه‌گر $D \subseteq V$ از گراف G را یک **مجموعه احاطه‌گر شکافنده** [۱] یا SDS نامیم اگر و تنها اگر زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ ناهمبند باشد. کوچکترین اندازه‌ی یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده از G را در صورت وجود عدد احاطه‌گری شکافنده G نامیم و با نماد $\gamma_s(G)$ نمایش می‌دهیم (شکل۱.۲). یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده D از گراف G که $|D| = \gamma_s(G)$ باشد را یک $\gamma_s(G)$_ مجموعه می‌نامیم.



شکل ۱.۲: $\gamma_s(G) = ۲$

۱.۲.۲ بررسی خواص SDS های G

لم ۱.۲.۲. گراف G شامل یک γ_s_ مجموعه است اگروتنهااگر کامل نباشد و شامل یک مؤلفه‌ی غیرکامل یا حداقل دو مؤلفه‌ی غیربدیهی باشد.

برهان. فرض کنید G شامل یک γ_s_ مجموعه D باشد، از این‌رو زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ ناهمبند است و حداقل دو رأس غیر مجاور دارد پس $G \neq K_n$. حال به خلف فرض کنید: برای $s \geq ۰$ و $n \geq ۱$، $G = K_n \cup sK_۱$. لذا به ازای هر مجموعه‌ی احاطه‌گر D از G، زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ همبند است. بنابراین فرض خلف باطل و G شامل یک مؤلفه غیر کامل یا حداقل دو مؤلفه غیربدیهی است. .
برعکس: فرض کنید G کامل نباشد و شامل یک مؤلفه غیر کامل یا حداقل دو مؤلفه غیربدیهی باشد. از این‌رو دو رأس u و v از G وجود دارند که نه مجاورند و نه رأس تنها هستند به طوری که تشکیل یک مجموعه‌ی مستقل در G می‌دهند. پس $G - \{u, v\}$ یک SDS از G است. □

لم ۲.۲.۲. نشان دهید در هر گراف ناهمبند G فاقد رأس تنها شامل یک γ_s_مجموعه، هر γ_مجموعه یک γ_s_مجموعه است.

برهان. باید نشان دهیم: $\gamma(G) = \gamma_s(G)$. هر مجموعه احاطه‌گر شکافنده یک مجموعه احاطه‌گر است پس $\gamma(G) \leq \gamma_s(G)$. حال فرض کنید D یک γ_ مجموعه از G باشد. چون G ناهمبند است پس شامل حداقل دو مؤلفه غیربدیهی است. دو مؤلفه غیر بدیهی $G_۱$ و $G_۲$ از

[۱] Split dominating set

G را در نظر بگیرید. فرض کنید رأس $u \in G_1 - D$ و رأس $v \in G_2 - D$ باشد. زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ شامل هیچ $u - v$ مسیر نیست. چون در غیر این صورت با ناهمبندی G در تناقض است. بنابراین مجموعه D یک SDS از G است و لذا $\gamma(G) \geq \gamma_s(G)$. $\square$

ملاحظه ۱.۲.۲. برای راحتی کار از این به بعد فرض کنید گراف G شامل یک γ_sـ مجموعه است. همچنین گراف‌های این فصل همبند ناکامل هستند.

نتیجه ی سرراست زیر مجموعه‌های احاطه‌گری از گراف G، که احاطه‌گر شکافنده نیز هستند را مشخص می‌کند.

لم ۳.۲.۲. مجموعه احاطه‌گر D از گراف G یک مجموعه‌ی احاطه‌گر شکافنده است اگر و تنها اگر دو رأس w_1 و w_2 در زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ موجود باشند، به طوری که هر مسیر از رأس w_1 به رأس w_2 شامل یک رأس از D باشد.

برهان. فرض کنید مجموعه احاطه‌گر D از G یک SDS باشد، از این‌رو زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ ناهمبند است. بنابراین دو رأس w_1 و w_2 در $\langle V - D \rangle$ موجودند به طوری که هیچ مسیری بین آن‌ها وجود ندارد . چون G همبند است و هر کدام از این دو رأس با تعدادی رأس در مجموعه احاطه‌گر D مجاورند پس هر مسیر از رأس w_1 به رأس w_2 از مجموعه احاطه‌گر D می‌گذرد.
برعکس:فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر از G باشد. دو رأس w_1 و w_2 از $\langle V - D \rangle$ را در نظر بگیرید، به طوری که هر مسیر از رأس w_1 به رأس w_2 شامل یک رأس از D باشد. پس بین دو رأس w_1 و w_2 در خارج از D هیچ مسیری وجود ندارد و این یعنی زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ ناهمبند است. لذا D یک SDS از G است. $\square$

حال مجموعه‌های احاطه‌گر شکافنده از گراف G که مینیمال هستند را مشخص می‌شوند. اما قبل از آن نیاز است دو نتیجه پایه‌ای از مرجع [۹] را در این جا بیان شود.

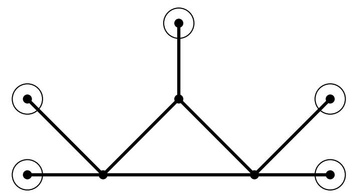
تذکر ۱.۲.۲. مجموعه احاطه‌گر D از گراف G مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر رأس $v \in D$ یکی از شروط زیر برقرار باشد.

(الف) رأس v در D تنها است.

(ب) رأس $u \in V - D$ وجود دارد به طوری که فقط با رأس v مجاور است یا به عبارتی $N(u) \cap D = \{v\}$.

نکته ۱.۲.۲. توجه کنید هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال، نمی‌تواند مینیمم هم باشد .

مثال ۱.۲.۲. در گراف شکل (۲.۲)رئوسی که با دایره محدود شده‌اند تشکیل یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال S از G را می‌دهند به طوری که S یک γـ مجموعه از G نیست.



شکل ۲.۲: $\gamma(G) = ۳$ و $|S| = ۵$

قضیه ۱.۲.۲. مجموعه احاطه‌گر شکافنده D از گراف G مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر رأس $v \in D$ یکی از شروط زیر برقرار باشد:

(الف) رأس u در زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ موجود است به طوری که $N(u) \cap D = \{v\}$، یا به عبارت دیگر رأس u فقط با رأس v درD مجاور است.

(ب) رأس v در مجموعه احاطه‌گر D تنها است.

(ج) $\langle V - D \rangle \cup \{v\}$ همبند است.

برهان. فرض کنید مجموعه احاطه‌گر شکافنده D از G مینیمال باشد. حال به خلف فرض کنید رأس $v \in D$ موجود است، به طوری که در هیچ کدام از سه شرط بالا صدق نمی‌کند. پس طبق شرط (الف) و (ب) مجموعه $D' = D - \{v\}$ احاطه‌گر است. از طرفی

$$V - D' = V - (D - \{v\}) = \langle V - D \rangle \cup \{v\}$$

پس طبق شرط (ج) مجموعه احاطه‌گر D' شکافنده نیز می‌باشد. بنابراین مجموعه $D' \subseteq D$ احاطه‌گر شکافنده است و این تناقض با مینیمال بودن D دارد. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.
برعکس: فرض کنید به ازای هر رأس $v \in D$ یکی از سه شرط بالا برقرار باشد. به خلف فرض کنید مجموعه احاطه‌گر $D' = D - \{v\}$ وجود دارد به طوری که احاطه‌گر شکافنده است

۱. اگر شرط (الف) برقرار باشد آن‌گاه D' احاطه‌گر نیست.

۲. اگر شرط (ب) برقرار باشد مشابه حالت قبل D' احاطه‌گر نیست.

۳. اگر شرط (ج) برقرار باشد آن‌گاه $V - D'$ ناهمبند نیست از این‌رو D' شکافنده نیست. پس فرض خلف باطل و مجموعه احاطه‌گر شکافنده D یک مجموعه مینیمال است.

□

۳.۲ کران‌هایی برای γ_s

در ادامه کران‌هایی برای γ_s ارائه می‌شود.

۱.۳.۲ کران بر حسب عدد پوشش رأسی

برای اثبات این قضیه نیاز است از یک لم و قضیه استفاده شود که برگرفته از مرجع [۲۰] می‌باشد.

لم ۱.۳.۲. یک زیرمجموعه S از V مستقل است اگر و تنها اگر $V - S$ یک پوشش رأسی از G باشد.

قضیه ۱.۳.۲. [۲۰] برای هر گراف G از مرتبه n: $\alpha_\circ(G) + \beta_\circ(G) = n$.

قضیه ۲.۳.۲. در هر گراف G، $\gamma_s(G) \leq \alpha_\circ(G)$.

برهان. فرض کنید که D ماکزیمم مجموعه‌ی مستقل رئوس از G باشد. بنابراین $D = \beta_\circ(G)$. پس D شامل حداقل دو رأس غیر مجاور است و چون G همبند است پس هر کدام از این دو رأس با تعدادی رأس از $D' = V - D$ مجاور هستند. لذا D' یک SDS از G است و طبق قضیه‌ی ۱.۳.۲، $\alpha_\circ(G) = D'$. پس در هر گراف G، $\gamma_s(G) \leq \alpha_\circ(G)$. □

۲.۳.۲ کران‌هایی بر حسب عدد احاطه‌گری و عدد همبندی

قضیه ۳.۳.۲. برای هر گراف G:

(الف) $\gamma(G) \leq \gamma_s(G)$

(ب) $k(G) \leq \gamma_s(G)$

برهان. (الف) از تعریف مجموعه احاطه‌گر و احاطه‌گر شکافنده نتیجه می‌شود هر SDS یک مجموعه احاطه‌گر است و از کوچکترین مجموعه احاطه‌گر از G بزرگتر یا مساوی است.

(ب) فرض کنید D یک γ_sـ مجموعه از G باشد. فرض کنید S کوچکترین مجموعه برش رأسی از G با اندازه $k(G)$ باشد. اگر $|D \cap S| < k(G)$، آن‌گاه زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ همبند است. که این تناقض با فرض SDS بودن D دارد. لذا $|D \cap S| \geq k(G)$. از این‌رو $|D| \geq k(G)$. در نتیجه $k(G) \leq \gamma_s(G)$.

□

ملاحظه ۱.۳.۲. بنابر قضیه قبل $k(G) \leq \alpha_\circ(G)$.

۳.۳.۲ کران بر حسب مرتبه و درجه

در این جا ابتدا کران‌هایی برای γ_s بر حسب مرتبه و درجه رئوس گراف ارائه شده و سپس کران بالایی برای مجموع $\gamma_s(G)$ و $\gamma_s(\bar{G})$ تعیین می‌شود.

تذکر ۱.۳.۲. برای هر گراف G، $1 \leq \gamma_s(G) \leq n-2$.

قضیه ۴.۳.۲. برای هر گراف G از مرتبه n ، $\gamma_s(G) \leq \frac{n.\Delta(G)}{(\Delta(G)+1)}$.

برهان. فرض کنید مجموعه D یک γ_sـ مجموعه از G باشد. لذا طبق قضیه قبل D مینیمال است. پس برای هر رأس $v \in D$ یکی از سه شرط قضیه ۱.۲.۲، برقرار است. طبق شرط (الف) برای هر رأس $v \in D$ رأس $u \in \langle V-D \rangle$ وجود دارد که فقط با رأس v در D مجاور است. طبق شرط (ب) و (ج) چون G همبند است، پس هر رأس از D در $\langle V-D \rangle$ همسایه دارد. بنابراین مجموعه $V-D$ احاطه‌گر است. لذا

$$\gamma(G) \leq |V-D| \leq n-\gamma_s(G). \qquad (۱.۲)$$

از این‌رو بر اساس قضیه ۲.۲.۱، $\gamma_s(G) \geq \gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$ و طبق رابطه۲.۱، $\gamma_s(G) \leq n-\gamma(G)$. در نتیجه: $\gamma_s(G) \leq \frac{n.\Delta(G)}{(\Delta(G)+1)}$. □

قضیه ۵.۳.۲. برای هر گراف G با قطر ۲، $\gamma_s(G) \leq \delta(G)$.

برهان. فرض کنید v یک رأس با درجه مینیمم از G باشد، پس $N(v)=\delta(G)$. چون قطر G برابر۲ است، لذا دو رأس غیر مجاور در G وجود دارد. این دو رأس را u و v می‌نامیم. از طرفی چون G همبند است، پس یک $u-v$ـ مسیر در G وجود دارد. بنابراین $N(v)$ یک SDS از G است. از این‌رو $\gamma_s(G) \leq \delta(G)$ می‌باشد. □

نکته ۱.۳.۲. برای هر گراف G از مرتبه n و اندازه m داریم: $2m \leq n^2-n$.

قضیه ۶.۳.۲. اگر گراف G و مکملش $\bar{G}$ هر دو همبند باشند، آن‌گاه $\gamma_s(G)+\gamma_s(\bar{G}) \leq n(n-3)$. تساوی هنگامی رخ می‌دهد که G مسیر P_4 باشد.

برهان. بر اساس قضیه ۲.۳.۲، $\gamma_s(G) \leq \alpha_0(G)$. از طرفی چون G و $\bar{G}$ هر دو همبند هستند، پس $\Delta(\bar{G}) \leq n-1$ و $\Delta(G)$. زیرا اگر G شامل رأسی از درجه $n-1$ باشد، آن‌گاه $\bar{G}$ ناهمبند و دارای رأس تنها است. لذا $\beta_0(\bar{G}) \geq 2$ و $\beta_0(G)$. از آن جا که هر دو G و $\bar{G}$ همبند هستند، پس بین هر دو رأس از G و هر دو رأس از $\bar{G}$ یک مسیر از اندازه $n-1$ وجود دارد. لذا: $\bar{m} \geq n-1$ و m. چون $\gamma_s(G) \leq \alpha_0(G)$، پس $\gamma_s(G) \leq \alpha_0(G)=n-\beta_0(G) \leq n-2 \leq 2(n-1)-n \leq 2m-n$. به طور مشابه $\gamma_s(\bar{G}) \leq 2\bar{m}-n$. از آن‌جا که $m+\bar{m}=\frac{n(n-1)}{2}$، پس $\gamma_s(G)+\gamma_s(\bar{G}) \leq 2(m+\bar{m})-2n \leq n(n-1)-2n \leq n(n-3)$.

حال فرض کنید $\gamma_s(G)+\gamma_s(\bar{G})=n\,(n-3)$. بنابراین $\gamma_s(G)=2m-n$ و $\gamma_s(\bar{G})=2\bar{m}-n$.

می‌دانیم که $\gamma_s(G) \leq n-۲$، بنابراین $۲n - m \leq n - ۲$، پس $m \leq n-۱$ و $\bar{m}$. و در نتیجه $m \leq n$ و $\bar{m}$. لذا $m = n-۱$ و $\bar{m}$. بنابراین G و $\bar{G}$ درخت هستند، زیرا هر درخت از مرتبه n، $n-۱$ یال دارد. گراف‌های $P_۴$ و $k_{۱,۳}$ در فروض قضیه صدق می‌کنند ولی $\overline{K_{۱,۳}}$ همبند نیست، در نتیجه مسیر $P_۴$ همان گراف مورد نظراست.

برعکس: به‌وضوح برقرار است. □

۴.۲ γ_s برای خانواده متعارف از گراف‌ها

حال عدد احاطه‌گری شکافنده را برای خانواده‌ای متعارف از گراف‌ها نظیر گراف دور، چرخ و گراف دوبخشی کامل ارائه می‌دهیم. در اثبات دو گزاره زیر نیاز به استفاده از گزاره زیر از مرجع [۲۰] داریم.

گزاره ۱.۴.۲. برای هر دور C_n و مسیر P_n از مرتبه $n \geq ۳$، $\gamma(C_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

۱.۴.۲ γ_s برای گراف دور

گزاره ۲.۴.۲. برای هر دور C_n از مرتبه $n \geq ۴$، $\gamma_s(C_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

برهان. دور $C_n = (v_۱, v_۲, \ldots, v_n, v_۱)$ از مرتبه $n \geq ۴$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $n = ۴$. مجموعه $S = \{v_۱, v_۳\}$ احاطه‌گراست. زیرا $N[S] = V(C_۴)$. از طرفی زیرگراف $V - S$ ناهمبند است. پس S احاطه‌گر شکافنده است و $\gamma_s(C_۴) \leq ۲$. فرض کنید S هر SDS از $C_۴$ باشد. پس به وضوح S یک مجموعه مستقل ماکزیمم از $C_۴$ است، لذا $|S| = ۲$. از این‌رو $\gamma_s(C_۴) = ۲$. حال فرض کنید $n \geq ۵$، بر اساس گزاره ۱.۴.۲، $\gamma_s(C_n) \geq \frac{n}{۳}$. پس کافیست نشان دهیم $\gamma_s(C_n) \leq \frac{n}{۳}$. سه حالت زیر را داریم:

(۱) اگر $n \equiv ۰ (\mod ۳)$. آن‌گاه مجموعه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{n-۳}{۳}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از C_n است. زیرا برای هر رأس از C_n یکی از سه حالت زیر رخ می‌دهد:

- اگر $i = ۳k$، آن‌گاه $v_{i+۱} = v_{۳k+۱}$. پس رأس v_i توسط رأس $v_{i+۱}$ احاطه می‌شود.
- اگر $i = ۳k + ۱$، باشد آن‌گاه $v_i = v_{۳i+۱}$ خود عضو S است.
- اگر $i = ۳k+۲$، باشد آن‌گاه $v_{i-۱} = v_{۳k+۱}$. پس رأس v_i توسط رأس $v_{i-۱}$ احاطه می‌شود. لذا هر رأس v_i که $۱ \leq i \leq n$، از C_n توسط دقیقاً یکی از رأس‌های n احاطه می‌شود. از طرفی $\langle V - S \rangle = (\frac{n}{۳})K_۲$. بنابراین مجموعه S احاطه‌گر شکافنده است. لذا $\gamma_s(C_n) \leq \frac{n}{۳}$، و در نتیجه $\gamma_s(C_n) = \frac{n}{۳}$.

(۲) اگر $n \equiv ۱ (\mod ۳)$. آن‌گاه مجموعه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{n-۱}{۳}\}$ مشابه استدلال قبل یک مجموعه احاطه‌گر از C_n است. از طرفی $\langle V - S\rangle = (\frac{n-۱}{۳})K_۲$. لذا S یک SDS از C_n است. بنابراین $\gamma_s(C_n) \leq \frac{n}{۳}$، در نتیجه $\gamma_s(C_n) = \frac{n}{۳}$.

(۳) اگر $n \equiv ۲ (\mod ۳)$. آن‌گاه مجموعه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{n-۲}{۳}\}$ مشابه استدلال قبل یک مجموعه احاطه‌گر از C_n است. از طرفی $\langle V - S\rangle = (\frac{n-۲}{۳})K_۲ \cup K_۱$. پس S یک SDS از C_n است. از این‌رو $\gamma_s(C_n) \leq \frac{n}{۳}$، و در نتیجه: $\gamma_s(C_n) = \frac{n}{۳}$. □

۲.۴.۲ γ_s برای گراف چرخ

گزاره ۳.۴.۲. برای هر گراف چرخ W_n از مرتبه $n \geq ۵$، $\gamma_s(W_n) = ۳$

برهان. گراف چرخ W_n را در نظر بگیرید. W_n شامل یک رأس از درجه $n - ۱$ و $n - ۱$ رأس از درجه ۳ است. فرض کنید رأس u از W_n از درجه $n - ۱$ باشد. مجموعه $D = \{u, v_۱, v_۳\}$ احاطه‌گر است. زیرا $N[u] = V(W_n)$. از طرفی D شکافنده نیز می‌باشد، زیرا دو رأس $v_۲$ و $v_۴$ از زیرگراف القایی $\langle V - D\rangle$ موجودند به طوری که هر مسیر بین این دو رأس شامل یک رأس از D است. از این‌رو $\gamma_s(W_n) \leq |D| = ۳$. نشان می‌دهیم $\gamma_s(W_n) \geq ۳$. فرض کنید مجموعه D هر SDS از W_n باشد. اگر $|D| = ۱$، آن‌گاه $D = \{u\}$ و زیرگراف القایی $\langle V - D\rangle = C_{n-۱}$.
اگر $|D| = ۲$ باشد، آن‌گاه دو حالت داریم:
(الف) مجموعه احاطه‌گر D شامل رأس u و یک رأس دیگر است، از این‌رو زیرگراف القایی $\langle V - D\rangle$ یک مسیر است و همبند می‌باشد.
(ب) رأس u متعلق به مجموعه احاطه‌گر D نباشد، لذا چون u از درجه $n-۱$ است پس $\langle V - D\rangle$ همبند است.
پس در دو حالت به تناقض با شکافنده بودن مجموعه احاطه‌گر D می‌رسیم. در این صورت $|D| \geq ۳$، و در نتیجه $\gamma_s(W_n) = ۳$. □

۳.۴.۲ γ_s برای گراف دوبخشی کامل

گزاره ۴.۴.۲. برای هر گراف دوبخشی کامل $K_{m,n}$ با بخش‌های $۲ \leq m \leq n$، $\gamma_s(K_{m,n}) = m$.

برهان. گراف $K_{m,n}$ با بخش‌های A و B به طوری که $|A| = m$ و $|B| = n$، را در نظر بگیرید. مجموعه A یک پوشش رأسی از $K_{m,n}$ از مینیمم اندازه است. فرض کنید این گونه نباشد، پس مجموعه $A' = A - \{v\}$ وجود دارد به طوری که یک پوشش رأسی است. مجموعه A یک مجموعه مستقل است و هر رأس $v \in A$ یک رأس تنها در A است. لذا v هیچ همسایه‌ای در A ندارد و این یعنی رأس v بر یالی واقع است که هیچ سر آن در A' نیست و این با پوشش رأسی بودن A' متناقض است. از این‌رو $|A| = \alpha_۰(K_{m,n}) = m$. مجموعه A یک مجموعه احاطه‌گر از $K_{m,n}$ است. از طرفی $V(K_{m,n}) - V(A) = B = \beta_۰(G)$. پس مجموعه A یک SDS از G

می‌باشد، از این‌رو $\gamma_s(K_{m,n}) \le \alpha_\circ(K_{m,n}) = m$.
فرض کنید D هر SDS از $K_{m,n}$ باشد. فرض کنید $|D \cap A| < \alpha_\circ(K_{m,n}) = m$. پس یال $e \in \langle V - D \rangle$ وجود دارد که هیچ سر آن در $\alpha_\circ(K_{m,n})$ نیست. که این با تعریف پوشش رأسی $\alpha_\circ(K_{m,n})$ متناقض است. از طرفی چون گراف دو بخش کامل است، یک سر این یال با تمام رئوس $\langle V - D \rangle$ مجاور است که این با SDS بودن D متناقض است. پس $|D \cap A| = m$، و لذا $|D| \ge m$. از این‌رو $\gamma_s(K_{m,n}) \ge m$، و در نتیجه $\gamma_s(K_{m,n}) = m$. □

۵.۲ بررسی γ_sـ مجموعه برای گراف G شامل رأس برشی و بلوک

قضیه بعد شرایط کافی را برای این که یک رأس برشی در هر γ_sـ مجموعه از گراف G باشد، را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۵.۲. اگر گراف G شامل یک رأس برشی v و حداقل دو بلوک H_1 وH_2 باشد، به طوری که v با تمام رئوس H_1 و H_2 مجاورباشد. آن‌گاه v در هر γ_sـ مجموعه از G وجود دارد.

برهان. فرض کنید مجموعه D یک γ_sـ مجموعه از G باشد. به خلف فرض کنید رأس v متعلق به زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ باشد، پس حداقل یک رأس از هر بلوک H_1 و H_2 نظیر رئوس u و w در مجموعه D وجود دارند. لذا وجود دارد مجموعه $D' = D - \{u, w\} \cup \{v\}$ که احاطه‌گر شکافنده است. زیرا v با تمام رئوس بلوک‌های G مجاور است و یک رأس برشی از G است. بنابراین با حذف v تعداد مؤلفه‌های گراف افزایش می‌یابد. پس به تناقض با γ_sـ مجموعه بودن D از G می‌رسیم. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است.
□

قضیه ۲.۵.۲. فرض کنید رأس v یک رأس برشی از گراف G باشد. اگر بلوک H از G موجود باشد، به طوری که v تنها رأس برشی H و با تمام رئوس آن مجاور باشد، آن‌گاه یک γ_sـ مجموعه در G شامل رأس v موجود است.

برهان. اگر حداقل دو بلوک از G موجود باشد، به طوری که در شرایط قضیه صدق کند آن‌گاه طبق قضیه قبل v در هر γ_sـ مجموعه موجود است.
فرض کنید G فقط شامل بلوک H باشد که در شرایط قضیه صدق می‌کند. فرض کنید D یک γ_sـ مجموعه از G باشد. اگر v متعلق به زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ باشد، چون برخی از رئوس H مانند u در D وجود دارند، پس $\{u\} \subset D$ است. بنابراین مجموعه D' موجود است به طوری که $D' = D - \{u\} \cup \{v\}$ و D' یک γ_sـ مجموعه است. زیرا v با تمام رئوس H مجاور و یک رأس برشی است. پس D' یک γ_sـ مجموعه از G شامل v است. □

۶.۲ رابطه γ_s با سایر پارامترها

در این جا ما به بررسی روابط بین پارامتر γ_s و برخی پارامترهای دیگر می‌پردازیم.

ملاحظه ۱.۶.۲. در قضیه ۳.۳.۲، ملاحظه کردید که برای هر گراف G، $\gamma(G) \leq \gamma_s(G)$. به علاوه تفاوت بین پارامتر γ_s و γ می‌تواند قابل ذکر باشد، مانند گراف کامل که برای آن γ_sـ مجموعه تهی است و $\gamma_s(K_n) = ۰$ ولی $\gamma(K_n) = ۱$.

قضیه ۱.۶.۲. برای هر گراف G شامل رأس پایانی، $\gamma(G) = \gamma_s(G)$. بنابراین یک γ_sـ مجموعه از گراف G شامل همه رأس‌های مجاور با رأس‌های پایانی وجود دارد.

برهان. فرض کنید رأس v یک رأس پایانی از G باشد. بنابراین رأس برشی w مجاور با v وجود دارد. فرض کنید D یک γـ مجموعه از G باشد. اگر $w \in D$، آن‌گاه D یک γ_sـ مجموعه از G است. فرض کنید w متعلق به $V - D$ باشد، آن‌گاه $v \in D$ و بنابراین $D - \{v\} \cup \{w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده است.
با تکرار این روند برای هر رأس برشی مجاور با رأس‌های پایانی یک γ_sـ مجموعه شامل تمام رئوس برشی مجاور با رأس پایانی به دست می‌آید. □

ملاحظه ۲.۶.۲. در قضیه ۱.۶.۲، شرط کافی برای برقراری تساوی $\gamma(G) = \gamma_s(G)$ وجود رأس پایانی در گراف G می‌باشد.

قضیه ۲.۶.۲. اگر $\gamma_s(G) < \gamma_c(G)$ باشد، آن‌گاه برای هر γ_sـ مجموعه D از گراف G، زیرگراف القایی $\langle V - D\rangle$ یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده است.

برهان. فرض کنید $\gamma_s(G) < \gamma_c(G)$ باشد. لذا چون مجموعه احاطه‌گر D مینیمال است، پس طبق قضیه ۱.۲.۲، زیرگراف القایی $\langle V - D\rangle$ احاطه‌گر است. حال به خلف فرض کنید $\langle V - D\rangle$ شکافنده نباشد. پس مجموعه احاطه‌گر D از اندازه $\gamma_s(G)$ همبند است، بنابراین $|D| = \gamma_s(G) > \gamma_c(G)$ که این تناقض با فرض دارد. پس مجموعه $\langle V - D\rangle$ احاطه‌گر شکافنده است. □

فصل ۳

احاطه‌گری شکافنده قوی در گراف‌ها

۱.۳ مقدمه

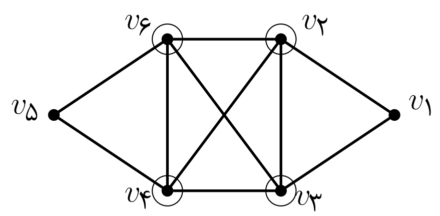
گراف‌هایی ین فصل متناهی، بدون جهت، فاقد طوقه و یال چندگانه هستند و شامل یک مؤلفه‌ی غیرکامل یا حداقل دو مؤلفه‌ی غیربدیهی می‌باشند. در این فصل مقدار دقیق عدد احاطه‌گری شکافنده قوی برای هر گراف تعیین شده و سپس تعدادی نامساوی مرتبط با این عدد اثبات می‌شوند. تمام قضایا و تعاریف این فصل از مرجع [۱۶] هستند.

۲.۳ عدد احاطه‌گری شکافنده قوی

تعریف ۱.۲.۳. مجموعه احاطه‌گر $D \subseteq V$ از گراف G را یک **مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی** $SSDS$ [۱] می‌نامیم اگر و تنها اگر زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ با حداقل دو رأس تهی (یا پوچ) باشد. کوچکترین اندازه‌ی یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی را عدد احاطه‌گری شکافنده قوی می‌نامیم و با نماد $\gamma_{ss}(G)$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱.۲.۳).
یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی D از گراف G که $|D| = \gamma_{ss}(G)$ باشد را یک $\gamma_{ss}(G)-$ مجموعه می‌نامیم. از این پس برای اختصار هر مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی را با نماد $SSDS$ نمایش می‌دهیم. درگراف (شکل۱.۲.۳) مجموعه‌های $A = \{v_1, v_5\}$ یک $\gamma-$ مجموعه،

[۱] Strong split dominating set

$B = \{v_۲, v_۴, v_۶\}$ یک γ_sــ مجموعه و $C = \{v_۲, v_۳, v_۴, v_۶\}$ یک γ_{ss}ــ مجموعه می‌باشند.



شکل ۱.۳: $\gamma_{ss}(G) = ۴$

لم ۱.۲.۳. گراف G شامل γ_{ss}ــ مجموعه است اگر و تنها اگر گراف G کامل نباشد و شامل یک مؤلفه غیر کامل یا حداقل دو مؤلفه غیربدیهی باشد. اثبات مشابه اثبات لم ۱.۲.۲، می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۳. برای هر گراف G نامساوی زیر برقرار است: $\gamma(G) \leq \gamma_s(G) \leq \gamma_{ss}(G)$

برهان. اثبات به راحتی از تعریف نتیجه می‌شود. هر مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی از G یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده است و هر مجموعه احاطه‌گر شکافنده یک مجموعه احاطه‌گر است. □

لم ۲.۲.۳. مجموعه‌ی احاطه‌گر D از گراف G یک $SSDS$ است، اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:

(الف) زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ حداقل دو رأس داشته باشد.

(ب) برای هر دو رأس $u, v \in V - D$ هر $u - v$ مسیر از G شامل یک رأس از D باشد.

برهان. فرض کنید مجموعه‌ی احاطه‌گر D از G یک $SSDS$ باشد. بنابراین $|V - D| \geq ۲$ و درجه هر رأس از زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ صفر است. پس D هر دو شرط را داراست.
برعکس: مجموعه احاطه‌گر D از G را در نظر بگیرید و فرض کنید شرط (الف) و (ب) برقرار است. حال به خلف فرض کنید D یک $SSDS$ از G نباشد. پس دو رأس $u, v \in V - D$ وجود دارد به طوری که $\langle V - D \rangle$ دارای یک $u - v$ مسیر است که این با فرض تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و D یک $SSDS$ از G می‌باشد. □

قضیه ۲.۲.۳. مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی D از G مینیمال است اگر و تنها اگر به ازای هر رأس $v \in D$ یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

(الف) رأس $u \in V - D$ وجود دارد به طوری که رأس u فقط با رأس v در D مجاور است. یا به عبارت دیگر $N(u) \cap D = \{v\}$ باشد.

(ب) رأس v در D تنها است.

برهان. فرض کنید مجموعه D یک $SSDS$ از G و مینیمال باشد. پس D دارای زیر مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی نیست. حال به خلف فرض کنید رأس $v \in D$ موجود باشد که در هیچ کدام از دو شرط بالا صدق نمی‌کند. پس مجموعه $D' = D - \{v\}$ وجود دارد که احاطه‌گر است. از طرفی چون D یک $SSDS$ است بنابراین زیرگراف القایی $\langle V - D\rangle$ با حداقل دو رأس تهی است، از این‌رو $\langle V - D\rangle \cup \{v\}$ ناهمبند است. پس مجموعه D' یک $SSDS$ از G است و این با مینیمال بودن D تناقض دارد پس فرض خلف باطل است.
برعکس: فرض کنید مجموعه D یک $SSDS$ از G باشد و به ازای هر $v \in D$ یکی از دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد. به خلف فرض کنید مجموعه $D' = D - \{v\}$ وجود دارد که یک $SSDS$ از G است. اگر شرط (الف) برقرار باشد آن‌گاه D' احاطه‌گر نیست. اگر شرط (ب) برقرارباشد مشابه حالت قبل D' احاطه‌گر نیست. پس فرض خلف باطل و D زیرمجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی ندارد پس مینیمال است. □

۳.۳ نتایج پایه‌ای مرتبط با γ_{ss}

در گزاره بعد کران پایینی برای $\gamma_{ss}(G)$ ارائه می‌شود.

گزاره ۱.۳.۳. فرض کنید گراف G از مرتبه n و اندازه m فاقد رأس تنها [۲] باشد. در این صورت:
$n - \lceil \frac{m}{\delta(G)} \rceil \leq \gamma_{ss}(G)$

برهان. فرض کنید D یک $\gamma_{ss}(G)$ـ مجموعه از G باشد. پس هر رأس در $V - D$ مجاور با حداقل $\delta(G)$ رأس در D است. فرض کنید این چنین نباشد، آن‌گاه رأس u از درجه بزرگتر یا مساوی $\delta(G)$ در $V - D$ وجود دارد به گونه‌ای که $|D \cap N(u)| < \delta(G)$ از این‌رو رأس u حداقل یک همسایه در $V - D$ دارد که این تناقض است. بنابراین $m \geq |V - D|\delta(G)$ و $|V - D| = n - \gamma_{ss}(G)$ پس با توجه به این که $\frac{m}{\delta(G)} \leq \lceil \frac{m}{\delta(G)} \rceil$ حکم قضیه برقرار است. □

در ادامه نتایجی بیان می‌شود که به کمک آنها می‌توان مقدار دقیق $\gamma_{ss}(G)$ را برای خانواده ی متعارفی از گراف‌ها بدست آورد.

قضیه ۱.۳.۳. برای هر گراف G، $\gamma_{ss}(G) = \alpha_0(G) + p_0$ به طوری که p_0 تعداد رئوس تنها می‌باشد.

برهان. فرض کنید D یک مجموعه مستقل ماکزیمم یا یک $\beta_0(G)$ـ مجموعه از رئوس G باشد و $D' \subset D$ مجموعه همه رئوس تنها از G با اندازه‌ی $|D'| = p_0$. مجموعه $S = V - D \cup D'$ یک مجموعه احاطه‌گر است زیرا شامل تمام رئوس تنها است و از طرفی چون $G \neq sK_1$، برای

[۲] Single

$s \geq 0$. پس هر رأس در $\beta_0(G)$ حداقل یک همسایه در S دارد. بنابراین مجموعه S یک $SSDS$ از G می‌باشد. مجموعه S یک $SSDS$ مینیمال از G است. پس برای هر رأس $v \in S$، یا v در $\langle S \rangle$ تنها است، یا رأس $u \in (D - D')$ وجود دارد به طوری که u فقط با v مجاور است. پس طبق قضیه ۲.۲.۳، مجموعه‌ی $V - D \cup D'$ مینیمال است. از جایی که مجموعه مستقل $D \cup D'$ ماکزیمم است، بر اساس قضیه ۱.۳.۲، مجموعه‌ی $V - D$ یک پوشش رأسی از اندازه $\alpha_0(G)$. از این‌رو $\alpha_0(G) = |V - D|$. پس $\gamma_{ss}(G) = \alpha_0(G) + p_0$ □

نتیجه ۱.۳.۳. برای هر گراف G از مرتبه n و اندازه m داریم، $\gamma_{ss}(G) \leq m + p_0$

برهان. از قضیه ۱.۳.۳، و قضیه ۱.۳.۲، $\gamma_{ss}(G) = \alpha_0(G) + p_0 = n - \beta_0(G) + p_0$. حال فرض کنید مجموعه D هر $\beta_0(G)$ـ مجموعه از G باشد، پس $|D| = \beta_0(G)$. از این‌رو مجموعه D احاطه‌گر است، زیرا اگر احاطه‌گر نباشد رأس $u \in V - D$ وجود دارد که هیچ همسایه‌ای در D ندارد. لذا می‌توان این رأس را به D اضافه کرد که این با ماکزیمم بودن D متناقض است. از طرفی $n - m$ اندازه مجموعه رئوس تنها در G است که زیرمجموعه ای از D است. بنابراین $\beta_0(G) \geq \gamma(G) \geq n - m$، لذا $m \geq n - \beta_0(G)$. در نتیجه $\gamma_{ss}(G) \leq m + p_0$.

□

۴.۳ γ_{ss} برای خانواده متعارف از گراف‌ها

در ادامه مقدار دقیق عدد احاطه‌گری شکافنده برای خانواده متعارفی از گراف‌ها ارائه می‌شود.

۱.۴.۳ γ_{ss} برای گراف دوبخشی کامل

گزاره ۱.۴.۳. برای هر گراف دوبخشی کامل $K_{m,n}$ با بخش‌های $2 \leq m \leq n$، $\gamma_{ss}(K_{m,n}) = m$

برهان. اثبات کاملاً مشابه اثبات گزاره ۳.۴.۲، از فصل ۲ می‌باشد. □

برای اثبات گزاره زیر نیاز به نتایج پایه‌ای داریم که از مرجع [۲۰] گرفته شده‌اند.

تذکر ۱.۴.۳. فرض کنید گراف G از مرتبه n یک گراف منتظم باشد، در این صورت $\beta_0(G) \leq \frac{n}{2}$.

تذکر ۲.۴.۳. یک گراف n رأسی همبند دقیقاً دارای یک دور است اگر و تنها اگر دقیقاً دارای n یال باشد. اگر G چنین گرافی با دور C باشد آن‌گاه $\beta_0(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

نتیجه ۱.۴.۳. در هر دور C_n، $\beta_0(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ می‌باشد.

برهان. با استفاده از تذکر ۱.۴.۳، چون دور C_n، ۲ـ منتظم است لذا داریم: $\beta_0(C_n) \leq \frac{n}{2}$ و با توجه به تذکر ۲.۴.۳، چون C_n، n یال دارد و دقیقاً دارای یک دور است. از این‌رو $\beta_0(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$، پس $\beta_0(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. □

۲.۴.۳ γ_{ss} برای دور C_n

گزاره ۲.۴.۳. برای هر دور C_n از مرتبه $n \geq ۴$، $\gamma_{ss}(C_n) = \lceil \frac{n}{۲} \rceil$.

برهان. بر اساس نتیجه ۱.۴.۳ و قضیه‌های ۱.۳.۲ و ۱.۳.۳ $\gamma_{ss}(C_n) = \alpha_{\circ}(C_n) = \lceil \frac{n}{۲} \rceil$ □

حال نتیجه‌ای از مرجع [۲۰] بیان می‌شود که در ادامه از آن استفاده خواهد شد.

تذکر ۳.۴.۳. فرض کنید G یک درخت باشد. در این صورت $\beta_{\circ}(G) \geq \frac{n(G)}{۲}$.

نتیجه ۲.۴.۳. از آن جا که مسیرهای P_n درخت هستند پس داریم: $\beta_{\circ}(P_n) \geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil$ و از این‌رو طبق قضیه ۱.۳.۲، $\alpha_{\circ}(P_n) \leq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$.

۳.۴.۳ γ_{ss} برای مسیر P_n

گزاره ۳.۴.۳. برای هر مسیر P_n از مرتبه $n \geq ۳$، $\gamma_{ss}(P_n) = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$.

برهان. مسیر $P_n = (v_۱, v_۲, \ldots, v_n)$ از مرتبه $n \geq ۳$ را در نظر بگیرید. طبق نتیجه ۲.۴.۳ و قضیه ۱.۳.۳، $\gamma_{ss}(P_n) \leq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ می‌باشد.
فرض کنید مجموعه S کوچکترین پوشش رأسی از P_n باشد، پس $|S| \leq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$. فرض کنید D هر $SSDS$ از مسیر P_n باشد. فرض کنید $|D \cap S| < \frac{n}{۲}$ باشد. در این صورت رأس $x \in V - D$ وجود دارد به طوری که درجه x حداقل یک است و این با $SSDS$، بودن D تناقض دارد. از این‌رو $|D| \geq \frac{n}{۲}$ است. پس $\gamma_{ss}(P_n) = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$. □

۴.۴.۳ γ_{ss} برای چرخ W_n

گزاره ۴.۴.۳. برای هر چرخ W_n از مرتبه $n \geq ۵$، $\gamma_{ss}(W_n) = \lceil \frac{n+۱}{۲} \rceil$.

برهان. چرخ $W_n = K_۱ + C_{n-۱}$ از مرتبه n را در نظر بگیرید. فرض کنید رأس $u \in V(W_n)$ از درجه $n - ۱$ باشد. فرض کنید $p = n - ۱$. حالات زیر را داریم:

(۱) اگر $p \equiv \circ (\mod ۲)$. آن‌گاه مجموعه $S = \{v_{۲i+۱} : \circ \leq i \leq \frac{p-۲}{۲}\}$ احاطه‌گر و مینیمم پوشش رأسی از دور $C_{n-۱}$ است. پس $V(W_n) - (V(S) \cup \{u\})$ با حداقل دو رأس هیچ یالی ندارد. از این‌رو مجموعه $D = S \cup \{u\}$ یک $SSDS$ از W_n است و $|D| = ۱ + \lceil \frac{n-۱}{۲} \rceil$، لذا $\gamma_{ss}(W_n) \leq |D| = \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱$.

(۲) اگر $n \equiv ۱ (\mod ۲)$. آن‌گاه مجموعه $S = \{v_{۲i+۱} : \circ \leq i \leq \frac{p-۳}{۲}\}$ احاطه‌گر و مینیمم پوشش رأسی از دور $C_{n-۱}$ است. پس مشابه فوق داریم: $|D| = ۱ + \lceil \frac{n-۱}{۲} \rceil$، و $\gamma_{ss}(W_n) \leq |D| = \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱$.

فرض کنید مجموعه D هر $SSDS$ از W_n باشد. فرض کنید رأس $u \in D$ و $|D \cap S| < \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. بنابراین رأس $u \in V - D$ وجود دارد، به طوری که با حداقل یک رأس از $\langle V - D \rangle$ مجاور است. که این تناقض است. بنابراین $|D| \geq 1 + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. حال فرض کنید $u \in V - D$، پس $|D \cap V(C_{n-1})| = n - 1$. زیرا هر رأس از C_{n-1} با رأس u مجاور است، پس هیچ رأسی از C_{n-1} در $\langle V - D \rangle$ قرار ندارد در غیر این صورت با $SSDS$ بودن D متناقض است. از این‌رو $|D| = n - 1 \geq 1 + \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. بنابراین $\gamma_{ss}(W_n) \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$، در نتیجه $\gamma_{ss}(W_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. □

۵.۳ بررسی γ_{ss} برای درخت T

در ادامه شرایط کافی برای این که حالت تساوی قضیه ۱.۲.۳، برای یک درخت T رخ دهد بیان می‌شود.

قضیه ۱.۵.۳. درخت T را در نظر بگیرید به طوری که برای هر دو رأس برشی مجاور u و v از T حداقل یکی از u و v با یک رأس پایانی از T مجاور باشد. آن‌گاه $\gamma(T) = \gamma_s(T) = \gamma_{ss}(T)$.

برهان. در واقع باید نشان دهیم اگر درخت T شرایط قضیه را دارا باشد آن‌گاه هر γ مجموعه از T یک γ_s و یک γ_{ss} مجموعه است. طبق قضیه ۱.۲.۳، $\gamma(T) \leq \gamma_s(T) \leq \gamma_{ss}(T)$. کافیست نشان دهیم که: $\gamma(T) \geq \gamma_s(T) \geq \gamma_{ss}(T)$. برای این منظور فرض کنید مجموعه D یک γـ مجموعه از درخت T باشد. آن‌گاه دو حالت داریم:

(الف) حداقل یکی از دو رأس برشی مجاور u و v متعلق به مجموعه احاطه‌گر D باشد. از این‌رو $|V - D| \geq 2$ و هر رأس از زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ یک رأس تنهاست. اگر این چنین نباشد آن‌گاه حداقل دو رأس در $V - D$ وجود دارد که با هم مجاورند. دو حالت برای این دو رأس وجود دارد، یا یکی از این ۲ رأس پایانی و دیگری رأس برشی مجاور با آن است یا هر دو، رأس برشی مجاور هستند. اگر هر یک از دو حالت فوق رخ دهد آن‌گاه D احاطه‌گر نیست، که این تناقض است. پس D یک $SSDS$ است و از این‌رو $\gamma(T) \geq \gamma_s(T) \geq \gamma_{ss}(T)$.

(ب) u و v هر دو متعلق به $V - D$ باشند. لذا چون D احاطه‌گر است رأس پایانی w مجاور با u یا v وجود دارد، به طوری که $w \in D$ است. بنابراین $D' = D - \{w\} \cup \{u\}$ یک γ مجموعه از T است. و طبق استدلال بالا یک γ_{ss} و γ_s مجموعه نیز می باشد. در نتیجه $\gamma(T) = \gamma_s(T) = \gamma_{ss}(T)$.

□

قضیه ۲.۵.۳. درخت T را در نظر بگیرید. فرض کنید u و v دو رأس برشی مجار از T باشند که در یکی از شرایط زیر صدق می‌کنند:

برای هر γ_{ss}ـ مجموعه D از $T - \{u, v\}$،

(الف) u و v با هیچ کدام از رئوس مجموعه D مجاور نیستند.

(ب) u و v با هیچ کدام از رئوس مجموعه $V-D$ مجاور نیستند.

آن‌گاه $\gamma(T) < \gamma_{ss}(T)$

برهان. فرض کنید u و v در شرط (الف) صدق کنند. پس u و v فقط با رئوس $V-D$ مجاورند و چون D یک γ_{ss}ـ مجموعه از $T-\{u,v\}$ است، بنابراین: $D\cup\{v\}$ یا $D\cup\{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از T است و $D\cup\{u,v\}$ یک γ_{ss}ـ مجموعه از T است. لذا $\gamma(T) < \gamma_{ss}(T)$.
فرض کنید u و v در شرط (ب) صدق کنند. از این‌رو u و v فقط با رئوس D مجاورند بنابراین D یک مجموعه احاطه‌گر است و $D\cup\{v\}$ یا $D\cup\{u\}$ یک γ_{ss}ـ مجموعه از T است. لذا $\gamma(T) < \gamma_{ss}(T)$. □

۶.۳ کران γ_{ss} برحسب قطر G و زیرگراف فراگیر G

در ادامه کران هایی برای γ_{ss} برحسب قطر G و زیرگراف فراگیر از آن بیان می‌شود.

قضیه ۱.۶.۳. برای هر گراف همبند G داریم: $\lceil\frac{diam(G)+1}{2}\rceil \leq \gamma_{ss}(G)$

برهان. فرض کنید D یک γ_{ss} مجموعه از G باشد. فرض کنید u و v دو رأس از G باشند که ماکزیمم فاصله را از هم‌دیگر دارند، پس $d(u,v) = diam(G)$. همچنین فرض کنید P_0 کوتاه‌ترین مسیر بین u و v باشد. به عبارت دیگر $d(u,v) = diam(G) = P_0$. اگر $|D| < \alpha_0(P_0)$ آن‌گاه طبق گزاره ۳.۴.۳، $\alpha_0(P_0) = \lfloor\frac{diam(G)+1}{2}\rfloor$. لذا دو رأس u_1 و v_1 در $V-D$ وجود دارند به طوری که با هم مجاورند، که این تناقض است. از این‌رو $|D| \geq \alpha_0(P_0)$، بنابراین $\lceil\frac{diam(G)+1}{2}\rceil \leq \gamma_{ss}(G)$. □

حال رابطه میان $\gamma_{ss}(G)$ و $\gamma_{ss}(H)$ که H هر زیرگراف فراگیر از G است ارائه می‌شود.

گزاره ۱.۶.۳. فرض کنید H هر زیرگراف فراگیر از G باشد به طوری که H فاقد رأس تنها باشد. در این صورت $\gamma_{ss}(G) \geq \gamma_{ss}(H)$.

برهان. چون H زیرگراف G است، پس $\beta_0(H) \geq \beta_0(G)$. زیرا اگر این گونه نباشد، آن‌گاه زیرگراف فراگیر H تعداد یال‌های بیشتری از G دارد که این تناقض است. پس طبق قضیه ۱.۳.۲، $\alpha_0(H) \leq \alpha_0(G)$ و از قضیه ۱.۳.۳، $\gamma_{ss}(G) \geq \gamma_{ss}(H)$. □

۷.۳ نتایجی مرتبط با $SSDS$ های خاص

قضایایی که در ادامه بیان می‌شود دارای $SSDS$ هایی هستند که با ویژگی خاصی تعریف شده‌اند و نتایجی مرتبط با آن به دست می‌آید.

قضیه ۱.۷.۳. فرض کنید مجموعه D یک $SSDS$ از گراف G باشد. در این صورت اگر $\langle D\rangle$ کامل باشد، آن‌گاه: $diam(G) \leq ۳$

برهان. دو رأس u و v از G را در نظر بگیرید. برای این دو رأس سه حالت وجود دارد که باید فاصله بین آن‌ها را در این سه حالت به دست آوریم:

(الف) اگر u و v هر دو متعلق به D باشند، چون $\langle D\rangle$ کامل است پس هر دو رأسش با هم مجاورند. لذا $d(u,v) = ۱$.

(ب) فرض کنید $u \in D$ و $v \in V - D$. چون D احاطه‌گر است، بنابراین رأس $w \in D$ وجود دارد به طوری که با v مجاور است. پس طبق نامساوی مثلثی از تعریف ۲۷.۱.۱، از فصل ۱، $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \leq ۲$.

(ج) فرض کنید u و v هر دو متعلق به $V - D$ باشند. پس طبق فوق دو رأس $u_۱$ و $v_۱$ در D وجود دارند به طوری که $u_۱$ با v و $v_۱$ با u مجاور است. بنابراین $d(u,v) \leq d(u,u_۱) + d(u_۱,v_۱) + d(v_۱,v) \leq ۳$، لذا برای هر $u,v \in V(G)$ داریم: $d(u,v) \leq ۳$. در نتیجه $diam(G) \leq ۳$.

□

تذکر ۱.۷.۳. گراف $G = K_{n,n}$ را در نظر بگیرید. آن‌گاه برای هر مجموعه مستقل D از G با n رأس: D و $V - D$ یک $SSDS$ از G هستند.

برای اثبات قضیه بعد نیاز به معرفی نوع دیگری از احاطه‌گری داریم که تعریف آن از مرجع [۱۴] گرفته شده است.

تعریف ۱.۷.۳. مجموعه احاطه‌گر D از گراف $G = (V,E)$ یک مجموعه احاطه‌گر منتظم است، اگر برای هر مجموعه I به طوری که $I \subseteq V - D$، مجموعه $S \subseteq D$ وجود داشته باشد به طوری که زیرگراف القایی $\langle V - D\rangle$ منتظم باشد. اگر $|I| = ۱$ باشد، آن‌گاه $\langle I \cup S\rangle$ باید ۱ـ منتظم باشد.

لم ۱.۷.۳. فرض کنید مجموعه D یک $SSDS$ از گراف G باشد. در این صورت اگر $|D| > \alpha_۰(G)$ باشد، آن‌گاه مجموعه D منتظم است.

۸.۳ کران γ_{ss} برحسب $\Delta(G)$ و دیگر نتایج مرتبط با آن

قضیه ۱.۸.۳. فرض کنید در گراف G، $\Delta(G) < \gamma_{ss}(G) - ۱$، در این صورت $\gamma(\bar{G}) \leq \frac{۱}{۲}(\gamma_{ss}(G) + ۲)$.

برهان. فرض کنید D یک γ_{ss}ـ مجموعه از G باشد. پس $|V-D| \geq ۲$ و هر رأس از زیرگراف القایی $\langle V-D\rangle$ یک رأس تنها است. فرض کنید $\langle H_۱\rangle$ زیرگراف القایی D در $\bar{G}$ و $\langle H_۲\rangle$ زیرگراف القایی $V-D$ در $\bar{G}$ باشد. بنابراین $|H_۱| = |D| = \gamma_{ss}(G)$ و $|H_۲| = |V-D|$. چون $\Delta(G)+۱ < \gamma_{ss}(G)$، لذا رأسی از درجه $n-۱$ در G وجود ندارد، از این‌رو $H_۱$ فاقد رأس تنها است و بر اساس قضیه ۳.۲.۱، $\gamma(H_۱) \leq \frac{\gamma_{ss}(G)}{۲}$. از طرفی چون $H_۲$ کامل است پس $\gamma(H_۲) = ۱$. در نتیجه $\gamma(\bar{G}) \leq \gamma(H_۱)+\gamma(H_۲) \leq \frac{\gamma_{ss}(G)+۲}{۲}$. □

در ادامه شرایط کافی روی گراف G ارائه می‌دهیم، به طوری که برای هر γ_{ss}ـ مجموعه D از G مجموعه $V-D$ یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی مینیمال باشد.

قضیه ۲.۸.۳. گراف G را در نظر بگیرید، به طوری که $۲ \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq n-۲$. اگر $\gamma(G) = \gamma_{ss}(G)$، آن‌گاه برای هر γ_{ss}ـ مجموعه D از G، $V-D$ یک $SSDS$ مینیمال از G است.

برهان. فرض کنید D یک γ_{ss}ـ مجموعه از G باشد. چون $\delta(G) \geq ۲$ و $\langle V-D\rangle$ با حداقل دو رأس هیچ یالی ندارد، بنابراین هر رأس از $V-D$ با حداقل $\delta(G)$ رأس از D مجاور است. از این‌رو $|D| \geq ۲$. از طرفی چون $\gamma(G) = \gamma_{ss}(G)$، پس هر رأس از $\langle D\rangle$ تنها است. چون در غیر این صورت حداقل دو رأس از D باهم مجاورند، لذا $D' = D-\{v\}$ احاطه‌گر است که این تناقض است. از آن‌جا که $\delta(G) \geq ۲$ پس G فاقد رأس تنها است و چون D احاطه‌گر است، از این‌رو هر رأس از $V-D$ یک همسایه در D دارد. بنابراین $V-D$ یک $SSDS$ از G است. از طرفی چون هر رأس از $\langle V-D\rangle$ یک رأس تنها است لذا طبق قضیه ۲.۲.۳، مجموعه $V-D$ مینیمال می باشد. □

برای اثبات قضیه بعد نیاز به نتیجه زیر داریم که از مرجع [۲۰] آورده شده است.

تذکر ۱.۸.۳. در هر گراف $G=(V,E)$ سه خاصیت زیر معادلند.

(الف) مجموعه $S \subseteq V$ یک مجموعه مستقل از G است.

(ب) مجموعه S یک خوشه از $\bar{G}$ است.

(ج) مجموعه $C = V-S$ یک پوشش رأسی از G است.

نتیجه ۱.۸.۳. خوشه‌ها تحت رابطه مکمل سازی به مجموعه‌های مستقل (و برعکس) مبدل می‌شوند.

قضیه ۳.۸.۳. گراف G از مرتبه n را در نظر بگیرید به طوری که $\Delta(G) \leq n-۲$ باشد، آن‌گاه $\gamma_{ss}(\bar{G}) \geq \beta_۰(G)-۱$.

برهان. چون $\Delta(G) \leq ۲$، پس $\beta_\circ(G) \geq ۲$ و همچنین G فاقد رأسی از درجه $n-۱$ است. از این‌رو $\bar{G}$ نیز فاقد رأس تنها است. بنابراین طبق قضیه ۱.۳.۳، $\gamma_{ss}(\bar{G}) = \alpha_\circ(\bar{G}) = n - \beta_\circ(\bar{G}) = n - \omega(G)$. از طرفی $\omega(G) \leq \alpha_\circ(G) + ۱$. زیرا $\alpha_\circ(G)$ شامل حداقل یک رأس از هر یال است. پس اگر $\omega(G) > \alpha_\circ(G) + ۱$، آن‌گاه وجود دارد یال $e = \{uv\}$ که $e \in \omega(G)$، به طوری که $\alpha_\circ(G) \cap \{u, v\} = \phi$. که این تناقض است. لذا $n - \omega(G) \leq n - (\alpha_\circ(G) + ۱) = \beta_\circ(G) - ۱$، و در نتیجه $\gamma_{ss}(\bar{G}) \geq \beta_\circ(G) - ۱$. □

لم ۱.۸.۳. گراف G را در نظر بگیرید به طوری که $\Delta(G) \leq n - ۲$ باشد. آن‌گاه برای هر مجموعه S با حداقل دو رأس اگر $\langle S \rangle$ کامل باشد، آن‌گاه $V - S$ یک $SSDS$ از $\bar{G}$ است.

برهان. $\bar{G}$ فاقد رأس تنها است. چون S یک زیرگراف کامل از G است پس یک مجموعه مستقل از رئوس $\bar{G}$ است. لذا مجموعه $V - S$ در $\bar{G}$ یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی از $\bar{G}$ است. □

لم ۲.۸.۳. گراف G و $\bar{G}$ را از مرتبه n در نظر بگیرید به طوری که فاقد رأس تنها باشند، $\gamma_{ss}(G) + \gamma_{ss}(\bar{G}) \leq n - ۲ + \alpha_\circ(G)$

برهان. از جایی که G و $\bar{G}$ فاقد رأس تنها هستند پس رأسی از درجه $n-۱$ در G و $\bar{G}$ وجود ندارد. پس $\beta_\circ(G) \geq ۲$ و $\beta_\circ(\bar{G})$. بر اساس قضیه ۱.۳.۳، $\gamma_{ss}(G) = \alpha_\circ(G)$ و $\gamma_{ss}(\bar{G}) = \alpha_\circ(\bar{G}) = n - \beta_\circ(G) = n - \omega(G)$. در نتیجه $\gamma_{ss}(G) + \gamma_{ss}(\bar{G}) = n - \beta_\circ(\bar{G}) + \alpha_\circ(G) \leq n - ۲\alpha_\circ(G)$. □

فصل ۴

احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی در گراف‌ها

۱.۴ مقدمه

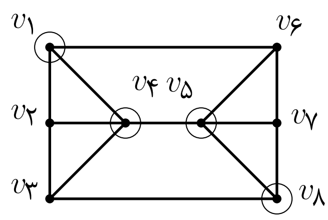
در این فصل مفهوم عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی معرفی شده و چندین نتیجه مرتبط با آن اثبات می‌شود. همچنین مقدار دقیق γ_{sss} برای خانواده متعارف از گراف‌ها از قبیل مسیرها، دورها، چرخ‌ها به دست می آید. سپس کران‌هایی از γ_{sss} برای درخت‌ها تعیین می‌شود. در ادامه پارامتر γ_{sss} برای رده خاصی از گراف‌ها بررسی شده و در انتها نتیجه‌گیری و طرح نهایی ارائه می‌شود. تمام قضایا و تعاریف این فصل از مرجع [۲] هستند.

۲.۴ عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی

تعریف ۱.۲.۴. مجموعه احاطه‌گر $D \subseteq V$ از گراف G را یک **مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی** [۱] $SSSDS$ می‌نامیم اگر و تنها اگر $|V - D| \geq ۱$ و ماکزیمم درجه هر رأس در زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ حداکثر یک باشد. بنابراین زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ به صورت $sK_۱ \cup tK_۲$ است، که s و t اعداد صحیح نامنفی هستند و $s > ۰$ یا $t > ۰$. کوچکترین اندازه‌ی یک مجموعه‌ی

[۱] Semi-Strong split dominating set

احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی را عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی می‌نامیم و با نماد $\gamma_{sss}(G)$ نمایش می‌دهیم. (شکل ۱.۴). یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی D از گراف G که $|D| = \gamma_{sss}(G)$، را یک $\gamma_{sss}(G)$ـ مجموعه می‌نامیم. از این پس برای اختصار هر مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی را با نماد $SSSDS$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۱.۴: $\gamma_{sss}(G) = ۴$

گراف شکل ۱.۴ مثالی است که در آن $\gamma_{ss}(G)$، $\gamma_s(G)$، $\gamma(G)$و$\gamma_{sss}(G)$ همگی متفاوتند و مجموعه‌های: $\{v_۴, v_۵\}$ یک γـ مجموعه، $\{v_۱, v_۴, v_۸\}$ یک γ_sـ مجموعه، $\{v_۱, v_۲, v_۴, v_۵, v_۷, v_۸\}$ یک γ_{ss}ـ مجموعه و $\{v_۱, v_۴, v_۵, v_۸\}$ یک γ_{sss}ـ مجموعه می‌باشند.

لم ۱.۲.۴. در هر گراف G شامل یک γ_{ss}ـ مجموعه، هر γ_{ss}ـ مجموعه یک $SSSDS$ از گراف G است.

برهان. فرض کنید مجموعه D هر γ_{ss}ـ مجموعه از G باشد، بنابراین $\langle V - D\rangle = sK_۱ \cup tK_۲$، که $t = ۰$ و $s \geq ۱$. بنابراین D یک $SSSDS$ از G است. □

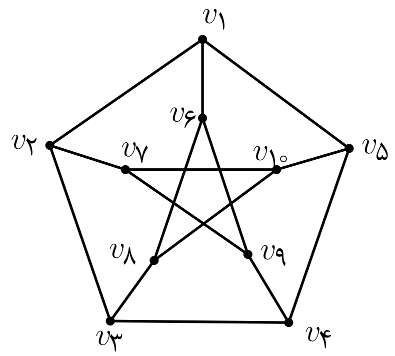
لم ۲.۲.۴. گراف G شامل یک γ_{sss}ـ مجموعه است اگر و تنها اگر $G \neq sK_۱$ برای $s \geq ۱$.

برهان. فرض کنید G شامل یک γ_{sss}ـ مجموعه D باشد. پس $|V - D| \geq ۱$ و ماکزیمم درجه هر رأس در $\langle V - D\rangle$ یک است. به خلف فرض کنید $G = sK_۱$ برای $s \geq ۲$ پس $|D| = n$ و $|V - D| = ۰$ می‌باشد. پس به تناقض با فرض می‌رسیم. بنابراین $G \neq sK_۱$ برای $s \geq ۱$
برعکس: فرض کنید $G = sK_۱$ برای $s \geq ۱$. به طور مشابه $|D| = n$ و $|V - D| = ۰$، پس مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی در G وجود ندارد. □

لم ۳.۲.۴. اگر گراف G از مرتبه n شامل یک γ_{sss}ـ مجموعه باشد، آن‌گاه $۱ \leq \gamma_{sss}(G) \leq n-۱$.

مثال ۱.۲.۴. گراف پترسن $G = (V, E)$ در شکل ۲.۴، را در نظر بگیرید. مجموعه $\{v_۱, v_۷, v_۸, v_۴\}$ یک $SSSDS$ از G است، بنابراین $\gamma_{sss}(G) \leq ۴$. می‌خواهیم ثابت کنیم $\gamma_{sss}(G)$ دقیقاً ۴ است پس باید نشان دهیم هیچ $SSSDS$ از G از اندازه کمتر از ۴ وجود ندارد. فرض کنید مجموعه $D \subseteq V(G)$ یک $SSSDS$ از G باشد به طوری که $|D| = ۳$. از طرفی چون $\gamma(G) = ۳$ پس D

یک $\gamma(G)$ ـ مجموعه از G است. از این‌رو برای برخی از رئوس $v \in V(G)$، $D = N(v)$. در گراف پترسن برای هر دو رأس $\{u, w\} \subseteq V$ یک اتومورفیسم f از G وجود دارد به طوری که $f(u) = w$. بنابراین می‌توان فرض کرد $D = N(v_۱)$، ولی در این صورت رأس $v_۴$ از درجه ۲ در زیرگراف القایی $V - D$ وجود دارد که این تناقض با تعریف مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی دارد. پس مجموعه D یک $SSSDS$ از G نیست. بنابراین $\gamma_{sss}(G) = ۴$.



شکل ۲.۴: $\gamma_{sss}(G) = ۴$

۳.۴ γ_{sss} برای خانواده متعارف از گراف‌ها

در ادامه عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی برای خانواده متعارف از گراف‌ها نظیر گراف‌های :کامل، دور، مسیر، چرخ، دوبخشی، کامل چندبخشی و سایر گراف‌ها بررسی می‌شود.

گزاره ۱.۳.۴. برای گراف کامل K_n از مرتبه $n \geq ۳$ داریم: $\gamma_{sss}(K_n) = n - ۲$

برهان. مجموعه $D = \{u, w\}$ در K_n را در نظر بگیرید. چون تمام رئوس K_n با هم مجاورند پس $N[V - D] = V(K_n)$. از این‌رو مجموعه $V - D$ یک مجموعه احاطه‌گر است. از طرفی $\langle D \rangle$ به فرم $K_۲$ است. بنابراین مجموعه $V - D$ یک $SSSDS$ از اندازه $n - ۲$ است. پس $\gamma_{sss}(K_n) \leq n - ۲$.
فرض کنید D هر $SSSDS$ از K_n باشد. از این‌رو زیرگراف القایی $V - D$ تنها می‌تواند به فرم $K_۱$ یا $K_۲$ باشد. پس $|D| \geq n - ۲$، در نتیجه $\gamma_{sss}(K_n) = n - ۲$.
□

گزاره ۲.۳.۴. برای هر مسیر P_n از مرتبه $n \geq ۳$، $\gamma_{sss}(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

برهان. مسیر $P_n = (v_۱, v_۲, \ldots, v_n)$ از مرتبه $n \geq ۳$ را در نظر بگیرید. طبق گزاره ۱.۴.۲، $\gamma_{sss}(P_n) \geq \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. پس کافیست نشان دهیم: $\gamma_{sss}(P_n) \leq \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. سه حالت زیر را در نظر

می‌گیریم:

(۱) اگر $n \equiv ۰ (\mod ۳)$. آن‌گاه مجموعه $D = \{v_{۳i-۱} : ۱ \leq i \leq \frac{n}{۳}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از P_n است. زیرا برای هر رأس v_i از P_n یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

- اگر $i = ۳k$. آن‌گاه چون $v_{۳k-۱} = v_{i-۱}$ عضو D است، پس رأس v_i توسط رأس $v_{i-۱}$ احاطه می‌شود.
- اگر $i = ۳k + ۱$. آن‌گاه چون $v_{۳k+۱} = v_{i+۱} = v_{۳k-۱}$ عضو D است، پس رأس v_i توسط رأس $v_{i+۱}$ احاطه می‌شود.
- اگر $i = ۳k + ۲$. آن‌گاه چون $v_i = v_{۳k+۲} = v_{۳k-۱}$ خود، عضو D است.

پس هر رأس $v_i(۱ \leq i \leq n)$ از P_n توسط دقیقاً یکی از رأس‌های D احاطه می‌شود، لذا مجموعه D احاطه‌گر است. از طرفی $\langle V - D\rangle = (\lfloor\frac{n-۲}{۳}\rfloor)K_۲ \cup ۲K_۱$. بنابراین مجموعه D یک $SSSDS$ از P_n است، از این‌رو $\gamma_{sss}(P_n) \leq |D| = \lceil\frac{n}{۳}\rceil$. پس چون $\gamma_{sss}(P_n) \geq \lceil\frac{n}{۳}\rceil$، لذا داریم: $\gamma_{sss}(P_n) = \lceil\frac{n}{۳}\rceil$.

(۲) اگر $n \equiv ۱(mod ۳)$، آن‌گاه $D = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{n-۱}{۳}\}$ بنا به استدلال حالت قبل، یک $\gamma(P_n)$ـ مجموعه از P_n است. از طرفی $\langle V - D\rangle = \lfloor\frac{n}{۳}\rfloor K_۲$، پس مجموعه D یک $SSSDS$ از P_n است. لذا $\gamma_{sss}(P_n) \leq \lceil\frac{n}{۳}\rceil$، بنابراین $\gamma_{sss}(P_n) = \lceil\frac{n}{۳}\rceil$.

(۳) اگر $n \equiv ۲(mod ۳)$، آن‌گاه $D = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{n-۲}{۳}\}$ بنا به استدلال حالت قبل، یک $\gamma(P_n)$ـ مجموعه از P_n است. همچنین $\langle V - D\rangle = \frac{n-۲}{۳} \cup K_۱$ پس مجموعه D یک $SSSDS$ از P_n است لذا $\gamma_{sss}(P_n) \leq \lceil\frac{n}{۳}\rceil$، و در نتیجه $\gamma_{sss}(P_n) = \lceil\frac{n}{۳}\rceil$. □

گزاره ۳.۳.۴. برای هر دور C_n از مرتبه $n \geq ۳$، $\gamma_{sss}(C_n) = \lceil\frac{n}{۳}\rceil$

برهان. اثبات کاملاً مشابه اثبات گزاره ۲.۴.۲، در فصل ۲ می‌باشد. □

گزاره ۴.۳.۴. برای هر چرخ $W_n = C_{n-۱} + K_۱$ از مرتبه $n \geq ۴$ داریم: $\gamma_{sss}(W_n) = \lceil\frac{n-۱}{۳}\rceil + ۱$

برهان. فرض کنید $V(K_۱) = \{u\}$. پس رأس u از درجه $n - ۱$ است. فرض کنید $p = n - ۱$، حالت‌های زیر را داریم:

(۱) اگر $p \equiv ۰ (\mod ۳)$. آن‌گاه مجموعه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{p-۳}{۳}\}$ طبق اثبات گزاره ۲.۴.۲، یک مجموعه احاطه‌گر از دور C_p است. و از طرفی $\langle V(C_p) - S\rangle = (\frac{p}{۳})K_۲$. لذا مجموعه $D = \{u\} \cup S$ یک $SSSDS$ از چرخ W_n است. بنابراین $\gamma_{sss}(W_n) \leq \lceil\frac{n-۱}{۳}\rceil + ۱$.

(۲) اگر $p \equiv ۱ (\mod ۳)$. آن‌گاه مجموعه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{p-۱}{۳}\}$ احاطه‌گراز دور C_p و $\langle V(C_p) - S\rangle = (\frac{p-۱}{۳})K_۲$. پس از این‌رو مجموعه $D = \{u\} \cup S$ یک $SSSDS$ از چرخ W_n است. لذا $\gamma_{sss}(W_n) \leq \lceil\frac{n-۱}{۳}\rceil + ۱$.

(۳) اگر $p \equiv ۱(\mod ۳)$. آن‌گاه مجموعه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{p-۲}{۳}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از دور C_p و $\langle V(C_p) - S\rangle = (\frac{n-۲}{۳})K_۲ \cup K_۱$. و مشابه فوق $D = \{u\} \cup S$ یک $SSSDS$ از چرخ W_n است. لذا $\gamma_{sss}(W_n) \leq \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil + ۱$.

فرض کنید مجموعه D هر $SSSDS$ از G باشد و S همان مجموعه تعریف شده در فوق باشد. همچنین فرض کنید رأس $u \in D$ و به ازای هر کدام از حالت‌های S در فوق $|D \cap S| < \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil$، آن‌گاه رأس $x \in \langle V - D\rangle$ از درجه دقیقاً ۲ وجود دارد. که متناقض با $SSSDS$ بودن D است. پس $|D| \geq \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil + ۱$.

فرض کنید رأس $u \in \langle V - D\rangle$. چون رأس u با تمام رئوس $C_{n-۱}$ مجاور است و D یک $SSSDS$ از W_n است پس حداکثر یک رأس از C_p در $V - D$ قرار می‌گیرد. لذا $|D \cap V(C_p)| \geq \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil + ۱$، و در نتیجه $|D| \geq \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil + ۱$. بنابراین $\gamma_{sss}(W_n) \geq \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil + ۱$، پس $\gamma_{sss}(W_n) = \lceil \frac{n-۱}{۳} \rceil + ۱$. □

گزاره ۵.۳.۴. برای هر گراف چندبخشی کامل $K_{n_۱,n_۲,\ldots,n_t}$ به طوری که $۲ \leq n_۱ \leq n_۲ \leq \ldots \leq n_t$ داریم: $\gamma_{sss}(K_{n_۱,n_۲,\ldots,n_t}) = n_۱ + n_۲ + \ldots + n_{t-۱}$

برهان. فرض کنید $G = K_{n_۱,n_۲,\ldots,n_t}$ و $D = \bigcup_{i=۱}^{t-۱} V(K_{n_i})$. چون G چندبخشی کامل است پس هر رأس از یک بخش با تمام رئوس بخش‌های دیگر مجاور است. لذا مجموعه D یک مجموعه احاطه‌گر است. از طرفی هر بخش از $K_{n_۱,n_۲,\ldots,n_t}$ یک مجموعه مستقل است،از این‌رو زیرگراف القایی $\langle V - D\rangle$ یک مجموعه مستقل است. پس مجموعه D یک $SSSDS$ از G است بنابراین $\gamma_{sss}(G) \leq n_۱ + n_۲ + \ldots + n_{t-۱}$. فرض کنید مجموعه D هر $SSSDS$ از G باشد. اگر $|V(K_{n_i}) \cap D| \leq n_{i-۱}$ برای برخی از iها که $۱ \leq i \leq t-۱$، آن‌گاه چون G چندبخشی کامل است، رأس $x \in V - D$ وجود دارد که با تمام رئوس $V - D$ ا ز اندازه بزرگتر یا مساوی دو، مجاور است. از این‌رو درجه رأس x بزرگتر یا مساوی دو است. بنابراین به تناقض با فرض $SSSDS$ بودن D می‌رسیم. پس $|V(K_{n_i}) \cap D| = n_i$ برای i که $۱ \leq i \leq t-۱$، لذا $|D| \geq n_۱ + n_۲ + \ldots + n_{t-۱}$ پس $\gamma_{sss}(G) \geq n_۱ + n_۲ + \ldots + n_{t-۱}$. در نتیجه $\gamma_{sss}(K_{n_۱,n_۲,\ldots,n_t}) = n_۱ + n_۲ + \ldots + n_{t-۱}$. □

گزاره ۶.۳.۴. برای هر گراف دوبخشی G فاقد رأس تنها با بخش‌های $V(G) = V_۱ \cup V_۲$ داریم: $\gamma_{sss}(G) \leq \min\{|V_۱|, |V_۲|\}$

برهان. گراف دوبخشی G فاقد رأس تنها، با بخش‌های $V_۱$ و $V_۲$ را در نظر بگیرید.

فرض کنید $D_i = V_i$ برای $i = ۱,۲$. از این‌رو چون گراف دوبخشی است پس به ازای هر یال $e \in G$ یک سر یال e در $V_۱$ و یک سر آن در $V_۲$ است. پس مجموعه D_i یک مجموعه احاطه‌گر است. از طرفی چون هر V_i برای $i = ۱,۲$ یک مجموعه مستقل از رئوس G است، پس زیرگراف القایی $\langle V - D_i\rangle$ به فرم $sK_۱$ است. از این‌رو مجموعه D_i برای $i = ۱,۲$ یک $SSSDS$ از G است. بنابراین $\gamma_{sss}(G) \leq \min\{|V_۱|, |V_۲|\}$. □

۴.۴ بررسی مقادیر γ_{sss} بر اساس پارامترهای مختلف از G

در ادامه کران‌هایی برای $\gamma_{sss}(G)$ برحسب پازامترهای مختلف از G به دست می‌آوریم.

گزاره ۱.۴.۴. گراف همبند و غیربدیهی G را در نظر بگیرید. اگر رأس $v \in V(G)$ از درجه $\Delta(G)$ وجود داشته باشد، به طوری که زیرگراف القایی $\langle N(v) \rangle$ به صورت $sK_۱ \cup tK_۲$ برای $s, t \geq ۰$، آن‌گاه $\gamma_{sss}(G) \leq n - \Delta(G)$.

برهان. فرض کنید رأس $v \in V(G)$ از درجه $\Delta(G)$ وجود داشته باشد، به طوری که زیرگراف القایی $\langle N(v) \rangle$ به صورت $sK_۱ \cup tK_۲$ برای $s, t \geq ۰$. مجموعه $D = n - N(v)$ از G را در نظر بگیرید. به‌وضوح مجموعه D احاطه‌گر است. حال چون زیرگراف القایی $\langle N(v) \rangle$ به‌صورت $sK_۱ \cup tK_۲$، پس D احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی نیز می‌باشد. از این‌رو $\gamma_{sss}(G) \leq n - N(v)$، به طوری که $N(v) = \Delta(G)$. در نتیجه $\gamma_{sss}(G) \leq n - \Delta(G)$. □

گزاره ۲.۴.۴. فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq ۳$. در این صورت $\gamma_{sss}(G) = ۱$ اگر و تنها اگر G به صورت $k_۱ \vee (sK_۱ \cup tK_۲)$ برای $s, t \geq ۰$.

برهان. گراف همبند G از مرتبه $n \geq ۳$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\gamma_{sss}(G) = ۱$، پس وجود دارد مجموعه $D = \{u\}$ که یک γ_{sss}ـ مجموعه از G است. از این‌رو $\langle V - D \rangle = sK_۱ \cup tK_۲$ برای $s, t \geq ۰$. پس رأس u از درجه $n - ۱$ با تمام رئوس زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ مجاور می‌باشد. بنابراین گراف G بهٔ صورت پیوند دو گراف $K_۱$ و $sK_۱ \cup tK_۲$ برای $s, t \geq ۰$.
برعکس: فرض کنید G به صورت $(sK_۱ \cup tK_۲) \vee K_۱$ باشد، طبق تعریف پیوند دو گراف رأس $u \in K_۱$ با تمام رئوس $sK_۱ \cup tK_۲$ مجاور است. پس مجموعه $D = \{u\}$ یک γـ مجموعه از G باشد. از طرفی زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ به صورت $sK_۱ \cup tK_۲$. از این‌رو مجموعه $D = \{u\}$ یک γ_{sss}ـ مجموعه از G است، بنابراین $\gamma_{sss}(G) = ۱$. □

گزاره ۳.۴.۴. گراف همبند G از مرتبه $n \geq ۳$ را در نظر گیرید. فرض کنید p و c به ترتیب یک مسیر و یک دور از گراف G با ماکزیمم طول باشند. آن‌گاه:

(الف) $\lceil \frac{p+۱}{۳} \rceil \leq \gamma_{sss}(G) \leq n - \lfloor \frac{۲p+۲}{۳} \rfloor$. کران‌ها تیز هستند.

(ب) $\lceil \frac{c}{۳} \rceil \leq \gamma_{sss}(G) \leq n - \lfloor \frac{۲c}{۳} \rfloor$. کران‌ها تیز هستند.

برهان. (الف) فرض کنید $P = (v_۱, v_۲, \ldots, v_{p+۱})$ یک مسیر با ماکزیمم طول از G و همچنین مجموعه S یک γ_{sss} ـمجموعه از مسیر P باشد. از این‌رو زیرگراف القایی $\langle V(P) - S \rangle = sK_۱ \cup tK_۲$ برای $s, t \geq ۰$. بنابراین طبق قسمت (ب) گزاره ۲.۳.۴، برای

مسیر P، $\gamma_{sss}(P) = |S| = \lceil \frac{p+1}{3} \rceil$. حال مجموعه $D = S \cup (V(G) - V(P))$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم مجموعه D یک $SSSDS$ از G است. طبق فرض می‌دانیم که $N[S] = V(P)$ و رئوس خارج از $V(P)$ خود عضو D هستند. از طرفی زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle = \langle V(P) - S \rangle = sK_1 \cup tK_2$ برای $s, t \geq 0$. پس مجموعه D یک $SSSDS$ از G است. بنابراین $\gamma_{sss}(G) \leq |S| + |V(G) - V(P)| = \lceil \frac{p+1}{3} \rceil + n - (p+1) = n - \lfloor \frac{2p+2}{3} \rfloor$.
حال فرض کنید مجموعه D_1 هر $SSSDS$ از G باشد. از این‌رو اشتراک D_1 با هر مجموعه متشکل از سه رأس متوالی از $V(P)$ ناتهی است، زیرا در غیر این صورت یک رأس از درجه دو در زیرگراف القایی $\langle V - D_1 \rangle$ موجود است. که این تناقض با $SSSDS$ بودن مجموعه D_1 دارد. بنابراین $|D_1 \cap V(P)| \geq \lceil \frac{p+1}{3} \rceil$. پس هر مجموعه احاطه‌گر از G برای شکافنده نیمه قوی بودن باید حداقل $\lceil \frac{p+1}{3} \rceil$ رأس داشته باشد، از این‌رو $\gamma_{sss}(G) \geq \lceil \frac{p+1}{3} \rceil$. حالت تساوی هر دو کران به طور بدیهی برای مسیر P_n برقرار است. □

برهان. (ب) اگر G فاقد دور باشد پس کران‌ها بدیهی هستند. یعنی $1 \leq \gamma_{sss}(G) \leq n-1$. در غیر این صورت اگر G شامل دور باشد، اثبات گزاره مشابه حالت (الف) می‌باشد. حالت تساوی هر دو کران به طور بدیهی برای دور C_n برقرار است. □

ملاحظه ۱.۴.۴. می‌دانیم هر گراف دور از مجاورت ۲ رأس ابتدایی و انتهایی گراف مسیر به دست می‌آید، پس در هر گراف G داریم: $c \leq n + 1$. بنابراین کران‌های تخمینی حالت (الف) از کران‌های تخمین زده شده حالت (ب) در گزاره ۳.۴.۴، بهتر است، زیرا تعداد بیشتری از رئوس در حالت (الف) نسبت به حالت (ب) تحت بررسی قرار می‌گیرند.

قضیه ۱.۴.۴. گراف G را در نظر گیرید. آن‌گاه $\gamma_{sss}(G) \leq n - 2$ است اگر وتنها اگر، G شامل دو مؤلفه یکریخت با K_2 یا یک مؤلفه با حداقل ۳ رأس باشد.

برهان. فرض کنید G شامل دو مؤلفه یکریخت با K_2 باشد. از هر یک از دو مؤلفه K_2 یک رأس را در نظر بگیرید و این دو رأس را u و v بنامید. به وضوح مجموعه $D = V(G) - \{u, v\}$ یک $SSSDS$ از G با اندازه $n - 2$ می‌باشد. فرض کنید G شامل یک مؤلفه H با حداقل ۳ رأس باشد. دو رأس آویزان w و z از درخت فراگیر T از H را در نظر گیرید. به‌وضوح مجموعه $D = V(H) - \{w, z\}$ یک $SSSDS$ از H می‌باشد. پس در هر دو حالت $\gamma_{sss}(G) \leq n - 2$.
برعکس: فرض کنید $\gamma_{sss}(G) \leq n - 2$. حال به خلف فرض کنید G شامل دو مؤلفه یکریخت با k_2 و یک مؤلفه با حداقل ۳ رأس نباشد. بنابراین دو حالت داریم: حالت (الف): $G = sK_1$ برای $s \geq 2$. که در این صورت طبق لم ۲.۲.۴، $\gamma_{sss}(G)$ وجود ندارد و حالت (ب): $G = k_2 \cup sK_1$ برای $s \geq 1$. در این حالت هر $SSSDS$ از G شامل یک رأس از مؤلفه غیربدیهی و تمام رئوس تنها است. بنابراین $\gamma_{sss}(G) = n - 1$، که این یعنی $\gamma_{sss}(G) > n - 2$. پس در هر دو حالت به تناقض می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

نتیجه ۱.۴.۴. برای هر گراف G، $\gamma_{sss}(G) = n - 1$ اگر و تنها اگر، G به صورت $K_2 \cup sK_1$ برای $s \geq 0$.

برهان. فرض کنید $\gamma_{sss}(G) = n - 1$. حال به خلف فرض کنید G به صورت $K_2 \cup sK_1$ نباشد. پس سه حالت داریم: (حالت اول) $G = sK_1$ که $s \geq 0$. در این صورت $\gamma_{sss}(G)$ وجودندارد. (حالت دوم): $G = 2K_2$. (حالت سوم): G شامل یک مؤلفه با حداقل ۳ رأس است. در دو حالت (دوم) و (سوم) طبق قضیه ۱.۴.۴، $\gamma_{sss}(G) \leq n - 2$. بنابراین فرض خلف باطل است. برعکس: فرض کنید G به صورت $K_2 \cup sK_1$ برای $s \geq 0$. در این صورت هر $SSSDS$ از G شامل یک رأس از مؤلفه غیربدیهی و تمام رئوس تنها است. بنابراین $\gamma_{sss}(G) = n - 1$. □

نتیجه ۲.۴.۴. گراف ناتهی و ناکامل G از مرتبه $n \geq 3$ را در نظر بگیرید. آن‌گاه:

(الف) $\gamma_{sss}(G) + \gamma_{sss}(\bar{G}) \leq 2n - 3$

(ب) $\gamma_{sss}(G).\gamma_{sss}(\bar{G}) \leq n^2 - 3n + 2$

(پ) حالت تساوی برای دو نامساوی بالا برقرار است اگر و تنها اگر G گراف $K_n - e$ برای $n \geq 3$ (البته برای گراف $\overline{K_n - e}$ نیز تساوی برقرار است)، که e هر یال از K_n می‌تواند باشد.

برهان. (الف) اگر گراف G ناتهی ناکامل باشد، آن‌گاه G یا شامل دو مؤلفه یکریخت با K_2 و یا شامل یک مؤلفه با حداقل سه رأس است، یا $G = sK_1 \cup K_2$ برای $s \geq 1$. ازطرفی می‌دانیم مکمل هر گراف ناهمبند یک گراف همبند است. پس طبق قضیه ۱.۴.۴ و نتیجه ۱.۴.۴ نامساوی برقرار است.
(ب) اثبات نامساوی کاملاً مشابه قسمت (الف) است.
(پ) فرض کنید $G = K_n - e$، اگر در اثبات قسمت (الف) گزاره ۲.۳.۴، به‌جای K_n گراف $K_n - e$ را قرار دهیم آن‌گاه $\gamma_{sss}(K_n - e) = n - 2$ می‌شود. از طرفی $\overline{K_n - e} = sK_1 \cup K_2$ برای $s \geq 1$، پس $\gamma_{sss}(\overline{K_n - e}) = n - 1$.
برعکس: فرض کنید G گرافی باشد که به ازای آن تساوی در دو نامساوی بالا برقرار است. بنابراین γ_{sss} برای یکی از دو گراف G یا $\bar{G}$ مساوی $n - 1$ است. فرض کنید $\gamma_{sss}(\bar{G}) = n - 1$. پس $\bar{G}$ طبق نتیجه ۱.۴.۴، به صورت $sK_1 \cup K_2$ برای $s \geq 0$ است. اگر $s = 0$، آن‌گاه $G = 2K_1$ و تهی است . اگر $s > 0$، آن‌گاه در G تمام رئوس به جز دو رأس باهم مجاور هستند. لذا G به صورت $k_n - e$ که $n \geq 3$. اثبات برای $\overline{K_n - e}$ نیز مشابه اثبات فوق است. □

قضیه ۲.۴.۴. گراف G را در نظر بگیرید. آن‌گاه $\gamma_{sss}(G) = n - 2$، اگر و تنها اگر G به یکی از ۳ صورت زیر باشد:

(الف) G به صورت $2K_2 \cup sK_1$ با $s \geq 0$.

(ب) G به صورت $H \cup sK_1$ با $s \geq 0$، به طوری که H با یکی از گراف‌های P_3، P_4، C_3، C_4، $K_4 - e$ و یا K_4 (برای هر یال e از K_4) یکریخت باشد.

(پ) G به صورت $H \cup sK_1$ با $s \geq 0$، به طوری که $|H| = n \geq 5$ و $\delta(H) \geq n - 2$.

برهان. فرض کنید $\gamma_{sss}(G) = n - 2$. ابتدا بررسی می کنیم که G چند مؤلفه غیربدیهی می‌تواند داشته باشد. فرض کنید G بیش از یک مؤلفه غیربدیهی داشته باشد. اگر G بیش از دو مؤلفه غیربدیهی داشته باشد و مجموعه S شامل فقط یک رأس از هر مؤلفه باشد، آن‌گاه $V(G) - S$ یک $SSSDS$ از G است. بنابراین $\gamma_{sss}(G) < n - 2$. اگر G شامل مؤلفه H از مرتبه ۳ یا بیشتر و مجموعه S شامل دو رأس از H و یک رأس از تمام مؤلفه‌های غیربدیهی دیگر باشد، آن‌گاه $V(G) - S$ یک $SSSDS$ از G و بنابراین $\gamma_{sss}(G) < n - 2$ است. پس G بیش از دو مؤلفه غیربدیهی ندارد و هیچ کدام از این دو مؤلفه از مرتبه ۳ یا بیشتر نیستند، پس این دو مؤلفه یکریخت با k_2 می‌باشند. پس G به فرم $2K_2 \cup sK_1$ برای $s \geq 0$. بنابراین سایر گراف‌ها که برای آنها $\gamma_{sss}(G) = n - 2$، دقیقاً یک مؤلفه غیربدیهی دارند.
اگر $G = sK_1$ برای $s \geq 1$، آن‌گاه G شامل یک $SSSDS$ نمی‌باشد.
فرض کنید G دارای فقط یک مؤلفه غیربدیهی H از مرتبه ۲ باشد. پس طبق نتیجه ۱.۴.۴، $\gamma_{sss}(G) = n - 1$.
فرض کنید G دارای فقط یک مؤلفه غیربدیهی H از مرتبه ۳ باشد. پس G با C_3 یا P_3 یکریخت می‌باشد و واضح است که $\gamma_{sss}(G) = n - 2$ است.
فرض کنید G دارای فقط یک مؤلفه غیربدیهی H از مرتبه ۴ باشد. اگر G ستاره یا گراف C_3 به علاوه یک رأس آویزان باشد، آن‌گاه $\gamma_{sss}(G) = 1 = n - 3$. در غیر این صورت G با C_4، P_4، $K_4 - e$ ویا K_4 (برای هر یال e از k_4) یکریخت است. روشن است که برای هر کدام از این گراف‌ها $\gamma_{sss}(G) = n - 2$.

فرض کنید G دارای فقط یک مؤلفه غیربدیهی $H = (V', E')$ از مرتبه $n \geq 5$. اگر $\delta(H) \geq n-2$، آن‌گاه هر رأس از H با حداکثر یک رأس دیگر غیر مجاور است. پس هر سه رأس از H به صورت P_3 یا C_3 می‌باشد. آن‌گاه طبق قضیه ۱.۴.۴، $\gamma_{sss}(G) = n - 2$. حال فرض کنید $\delta(H) < n - 2$. فرض کنید v یک رأس از H از مینیمم درجه و $\{u, w\} \subseteq V' - N(v)$. اگر مجموعه $D = V' - \{u, v, w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از G باشد آن‌گاه یک $SSSDS$ از G می‌باشد. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر نباشد. چون H همبند است پس هر دو رأس u و v با حداقل یک رأس از D مجاورند و w با u مجاور است. فرض کنید رأس $z \in D \cap N(u)$. اگر $D \cap N(v) \neq \{z\}$، آن‌گاه $(D - \{z\}) \cup \{u\}$ یک $SSSDS$ از G است. اگر $D \cap N(v) = \{z\}$، آن‌گاه چون مرتبه H بزرگتر یا مساوی ۵ است. لذا رأس x از H وجود دارد که چون گراف همبند است $x \in N(u)$ یا $x \in N(z)$. پس $D = V' - \{x, v, w\}$ یک $SSSDS$ از G است پس

$\gamma_{sss}(G) < n - ۲$ است.
برعکس: فرض کنید G با گراف قسمت (الف) یکریخت باشد. آن‌گاه با استفاده از قضیه ۱.۴.۴، $\gamma_{sss}(G) \leq n - ۲$. فرض کنید D یک $SSSDS$ از G از اندازه کمتر از $n - ۲$ باشد. پس در این صورت یا چند رأس تنها از G و یک یا هر دو مؤلفه $K_۲$ در زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ قرار می‌گیرند. که در هر دو صورت به تناقض با احاطه‌گر بودن D می‌رسیم. پس $\gamma_{sss}(G) = n - ۲$.
فرض کنید G با گراف قسمت (ب) یا قسمت (پ) یکریخت باشد. آن‌گاه با استفاده از قضیه ۱.۴.۴، داریم: $\gamma_{sss}(G) \leq n - ۲$. چون هر سه رأس از مؤلفه H به فرم $P_۳$ یا $C_۳$ است پس حداکثر دو رأس از H به علاوه تمام رئوس تنها G در زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ قرار می‌گیرند. پس $\gamma_{sss}(G) = n - ۲$.
این قضیه نشان می‌دهد تنها درختانی که در تساوی $\gamma_{sss}(G) = n - ۲$ صدق می‌کنند، درختان $P_۳$ و $P_۴$ و تنها دورها دور $C_۳$ و $C_۴$ هستند. همچنین تساوی فوق برای گراف کامل K_n نیز برقرار است. می‌دانیم هر تطابق مجموعه مستقل از یال‌هاست. فرض کنید M هر تطابق از K_n برای $n \geq ۳$، پس $M \leq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$. از این‌رو برای $K_n - M$ نیز تساوی فوق برقرار است. □

گزاره ۴.۴.۴. برای هر عدد صحیح و مثبت k، گراف همبند G وجود دارد به طوری که $\gamma_{ss} - \gamma_{sss} \geq k$ و $\gamma_{sss} - \gamma_s \geq k$.

برهان. گراف همبند G از مرتبه $n \geq ۳$ را در نظر بگیرید. فرض کنید G شامل k خوشه از مرتبه $p \geq ۳$ باشد به طوری که k خوشه در یک رأس مشترکند. این رأس مشترک را u می‌نامیم. چون رأس u با تمام رئوس k خوشه مجاور است پس مجموعه $D = \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از G است. زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ ناهمبند است، در غیر این صورت رأس v از G وجود دارد که در k خوشه مشترک است و هر مسیر بین دو رأس از خوشه‌های متفاوت از این رأس می‌گذرد که این با فرض یکتا بودن u تناقض دارد. پس مجموعه D احاطه‌گر شکافنده است و $\gamma_s(G) = ۱$. از این‌رو زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ شامل k خوشه از مرتبه $p - ۱$ و از درجه $n - ۲$ می‌باشد. اگر از هر خوشه در زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ به جز دو رأس تمامی رئوس را در نظر گیریم به‌عبارتی $p - ۳$ رأس از هر خوشه (زیراهر سه رأس از یک خوشه به فرم دور $C_۳$ یا مسیر $P_۳$ است)، آن‌گاه اجتماع این $k(p - ۳)$ رأس از $\langle V - D \rangle$ با رأس u از D یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی از G است. بنابراین $\gamma_{sss}(G) = k(p - ۳) + ۱$. پس از این‌رو $\gamma_{sss}(G) - \gamma_s(G) = k(p - ۳) + ۱ - ۱ = k(p - ۳)$. مشابه همین استدلال اگر از هر خوشه در زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ به جز یک رأس تمامی رئوس را در نظر گیریم به عبارتی $p - ۲$ رأس از هر خوشه، آن‌گاه اجتماع این $k(p - ۲)$ رأس از $\langle V - D \rangle$ با رأس u از D یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی از G است. بنابراین $\gamma_{ss}(G) = k(p - ۲) + ۱$. لذا برای $p = ۴$ داریم: $\gamma_{sss}(G) - \gamma_s(G) = k$ و $\gamma_{ss}(G) - \gamma_{sss}(G) = k$.

□

قضیه ۳.۴.۴. اگر گراف G از مرتبه $n \geq 3$ شامل یک γ_sـ مجموعه باشد، آن‌گاه $\gamma_s(G) \leq \gamma_{sss}(G)$.

برهان. چون گراف G شامل یک γ_sـ مجموعه است پس طبق لم ۱.۲.۲، G کامل نیست و شامل یک مؤلفه غیرکامل یا حداقل دو مؤلفه غیربدیهی می‌باشد. از این‌رو چون $G \neq sK_1$ برای $s \geq 1$، لذا $\gamma_{sss}(G)$ وجود دارد و طبق قضیه ۱.۴.۴، $\gamma_{sss}(G) \leq n - 2$. بنابراین دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(الف) $\gamma_{sss}(G) \leq n - 3$.

فرض کنید مجموعه D هر γ_{sss}ـ مجموعه از G باشد. از آن‌جایی که $|V - D| \geq 3$ و درجه هر رأس در زیرگراف القایی $\langle V - D\rangle$ حداکثر ۱ است، پس $\langle V - D\rangle$ یک گراف ناهمبند است. از این‌رو D یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیز می باشد. پس $\gamma_s(G) \leq \gamma_{sss}(G) \leq n - 3$.

(ب) $\gamma_{sss}(G) = n - 2$.

اگر G بیش از یک مؤلفه غیربدیهی داشته باشد آن‌گاه هر γ_{sss} ـ مجموعه از G یک γ_s ـ مجموعه است طبق اثبات قضیه ۲.۴.۴، به خلف فرض کنید مجموعه احاطه‌گر D یک $SSSDS$ از G باشد، که احاطه‌گر شکافنده نیست. پس یا زیرگراف القایی $\langle V - D\rangle$ تهی است یا فقط یک رأس دارد یا با حداقل دو رأس همبند است. اگر $\langle V - D\rangle$ تهی باشد یعنی $G = sK_1$ برای $s \geq 1$ و تمام مؤلفه‌هایش بدیهی‌اند، اگر یک رأس داشته باشد طبق نتیجه ۱.۴.۴، G به فرم $k_2 \cup sK_1$ برای $s \geq 0$. اگر $\langle V - D\rangle$ با حداقل دو رأس همبند باشد به تناقض با این فرض که G بیش از یک مؤلفه غیربدیهی دارد می‌رسیم. پس فرض خلف باطل است. اگر G فقط یک مؤلفه غیربدیهی H را داشته باشد پس این مؤلفه کامل نیست و $V(H) \geq 3$. چون H کامل نیست پس دو رأس غیر مجاور $u, v \in V(H)$ وجود دارد به طوری که مجموعه $S = \{u, v\}$ یک مجموعه مستقل است. پس $V(G) - S$ یک γ_{sss}ـ مجموعه است. چون S یک مجموعه مستقل است، پس $\gamma_s(G) \leq n - 2$.

□

نتیجه ۳.۴.۴. برای هر گراف G شامل یک γ_sـ مجموعه $\gamma(G) \leq \gamma_s(G) \leq \gamma_{sss}(G) \leq \gamma_{ss}(G)$.

برهان. نامساوی $\gamma(G) \leq \gamma_s(G)$ طبق قضیه ۳.۳.۲، نامساوی $\gamma_s(G) \leq \gamma_{sss}(G)$ طبق قضیه ۳.۴.۴، و نامساوی $\gamma_{sss}(G) \leq \gamma_{ss}(G)$ طبق لم ۱.۲.۴، برقرار است. □

۵.۴ مقادیر γ_{sss} برای درختT

حال به بررسی γ_{sss} در درخت T می پردازیم و کران‌هایی از γ_{sss} را برحسب پارامترهای مختلف درخت T به دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۵.۴. برای هر درخت T از مرتبه $n \geq ۳$ داریم: $\gamma_{sss}(T) \leq n - \varepsilon(T)$ ، به طوری که $\varepsilon(T)$ نمایان‌گر تعداد رأس‌های آویزان درخت T است. تساوی برقرار است اگر و تنها اگر هر رأس غیرآویزان درخت T با حداقل یک رأس آویزان از آن درخت مجاور باشد.

برهان. درخت $T = (V, E)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید مجموعه‌ی S مجموعه تمام رئوس آویزان درخت T باشد. لذا واضح است که S یک مجموعه مستقل از رئوس T است. پس مجموعه $V - S$ یک $SSSDS$ از T می‌باشد، از این‌رو $\gamma_{sss}(T) \leq n - \varepsilon(T)$. فرض کنید هر رأس از $V - S$ با حداقل یک رأس از مجموعه $\langle S \rangle$ مجاور باشد، آن‌گاه مجموعه $V - S$ یک γ_{sss} ـ مجموعه است. به خلف فرض کنید مجموعه $V - S$ مینیمم نباشد، لذا رأس $u \in V - S$ وجود دارد به طوری که $V - (S \cup \{u\})$ یک $SSSDS$ از T است. چون مجموعه $V - (S \cup \{u\})$ احاطه‌گر است پس رأس u با هیچ رأس آویزان از T مجاور نیست که این تناقض با فرض دارد. از این‌رو $\gamma_{sss}(T) = n - \varepsilon(T)$. برعکس: فرض کنید $\gamma_{sss}(T) = n - \varepsilon(T)$. حال به خلف فرض کنید رأس $u \in V - S$ وجود دارد به طوری که

$N(u) \cap S = \phi$ یا رأس u با هیچ رأس آویزان از T مجاور نیست. بنابراین $V - (S \cup \{u\})$ یک $SSSDS$ از T است. پس $\gamma_{sss}(T) < n - \varepsilon(T)$. در نتیجه به تناقض با فرض می‌رسیم. □

قضیه ۲.۵.۴. برای هر درخت T از مرتبه $n \geq ۳$، $\gamma_{sss}(T) \leq \frac{n}{۲}$. تساوی برقرار است اگر و تنها اگر هر رأس غیرآویزان از درخت T با دقیقاً یک رأس آویزان از آن درخت مجاور باشد.

برهان. درخت $T = (V, E)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $S_۰$ مجموعه رئوس پشتیبان (ساقه درخت (T)) و $L_۰$ مجموعه رئوس آویزان درخت T باشد. فرض کنید $T_۱ = \langle V - (S_۰ \cup L_۰) \rangle$ و $S_۱$ و $L_۱$ به ترتیب مجموعه رئوس پشتیبان و مجموعه رئوس آویزان از زیرگراف القایی $\langle V - (S_۰ \cup L_۰) \rangle$ باشند. این روند را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که در سمت چپ تساوی برای T_i که ($۰ \leq i \leq k$) است، بعد از k مرحله رأسی باقی نماند (در واقع در هر مرحله رئوس آویزان و رئوس پشتیبان را از مجموعه رئوس باقیمانده از مرحله قبل را انتخاب و در دو مجموعه L_i و S_i قرار می‌دهیم). فرض کنید

$$D = \bigcup_{i=۰}^{k} S_i$$

. پس

D یک مجموعه احاطه‌گر است. $V - D$ یک مجموعه مستقل از رئوس T است، زیرا $V - D$ فقط شامل رئوس آویزان هر k مرحله بوده و لذا اگر دو رأس در آن باهم مجاور باشند یکی از آن دو رأس، رأس پشتیبان است و متعلق به S_i می‌باشد. فرض کنید D احاطه‌گر نباشد پس رأس $u \in V - D$ وجود دارد به طوری که $N(u) \cap D = \phi$، از طرفی چون T همبند است بنابراین همسایه u در $V - D$ قرار دارد که این تناقض با مستقل بودن $V - D$ دارد. از این‌رو مجموعه D احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی است. طبق لم ۳.۴.۳ و قضیه ۱.۳.۲ داریم: $\alpha_۰(T) \leq \beta_۰(T)$. بنابراین زمانی تساوی تعداد رئوس پشتیبان و آویزان رخ می‌دهد که هر رأس غیر آویزان از T

دقیقاً با یک رأس آویزان از T مجاور باشد. لذا بدیهی است که

$$\bigcup_{i=0}^{k}|S_i| \leq \bigcup_{i=0}^{k}|L_i|$$

پس برای $0 \leq i \leq k$، $|D| \leq \frac{n}{2}$. از این‌رو $\gamma_{sss}(T) \leq \frac{n}{2}$. فرض کنید هر رأس از T با دقیقاً یک رأس آویزان مجاور باشد. بنابراین T با تاج T^+ که به صورت $(T \circ K_1)$ یکریخت است، پس طبق قضیه ۳.۲.۱، $\gamma(T) = \frac{n}{2}$. از طرفی طبق نتیجه ۳.۴.۴، می‌دانیم: $\gamma(T) \leq \gamma_{sss}(T)$ پس $\gamma_{sss}(T) = \frac{n}{2}$.

برعکس: فرض کنید $\gamma_{sss}(T) = \frac{n}{2}$. از این‌رو طبق تعریف ۵۷.۱.۱، درخت T به فرم ($T \circ K_1$) است. لذا هر رأس از T با دقیقاً یک رأس آویزان مجاور است. □

۶.۴ ویژگی‌های $SSSDS$ های مینیمال از G

در قضیه بعد شروطی را بیان می‌شود که تحت آن یک $SSSDS$ از G مینیمال باشد. و یک قضیه دیگر مرتبط با این موضوع اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۶.۴. برای هر گراف $G = (V, E)$ داریم: مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی D از G مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر رأس $v \in D$ یکی از شروط زیر برقرار باشد:

(الف) رأس V در مجموعه $\langle D \rangle$ یک رأس تنها است.

(ب) رأس $u \in V - D$ وجود دارد به طوری که $N(u) \cap D = \{v\}$ است، یا به عبارتی رأس u فقط با رأس v از D مجاور است.

(پ) رأس v با حداقل دو رأس از زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ مجاور است، یا به عبارتی $|N(v) \cap (V - D)| \geq 2$.

(ت) رأس v با برخی از رئوس $u \in V - D$ مجاور است. به طوری که رأس u متعلق به یک مؤلفه K_2 از زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ می‌باشد.

برهان. فرض کنید مجموعه D یک $SSSDS$ مینیمال از G باشد و $v \in D$ یک رأس دلخواه باشد. طبق تعریف مجموعه مینیمال D دارای هیچ زیرمجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی نیست. بنابراین مجموعه $D' = D - \{v\}$ یک $SSSDS$ از G نیست. از این‌رو دو حالت زیر برای مجموعه D' وجود دارد: (۱)مجموعه D' احاطه‌گر نیست یا (۲) زیرگراف القایی $\langle (V - D) \cup \{v\} \rangle$ شامل یک رأس از درجه حداقل دو است. اگر حالت (۱) رخ دهد آن‌گاه یا رأس v فقط توسط خودش احاطه می‌شود یا رأس $u \in V - D$ وجود دارد که فقط با رأس v در D مجاور است، از این‌رو یکی از دو حالت (الف) یا (ب) برقرار است.

اگر حالت (۲) رخ دهد یا رأس v با حداقل دو رأس از رأس‌های زیرگراف القایی $\langle V-D\rangle$ مجاور است یا این که با تعدادی رأس $u \in V-D$ به طوری که رأس u متعلق به یک مؤلفه $K_۲$ است، مجاور می‌باشد. از این‌رو دو حالت (پ) یا (ت) برقرار است.
برعکس: فرض کنید مجموعه D هر $SSSDS$ از G باشد، به طوری که به ازای هر رأس $v \in D$ یکی از چهار شرط قضیه برقرار باشد. اگر به ازای هر رأس $v \in D$ شرط (الف) یا (ب) برقرار باشد، آن‌گاه هر مجموعه $D' = D - \{v\}$ احاطه‌گر نیست. اگر به ازای هر رأس $v \in D$ شرط (پ) یا (ت) برقرار باشد، آن‌گاه زیرگراف القایی $\langle (V-D) \cup \{v\}\rangle$ شامل یک رأس از درجه حداقل دو است. بنابراین مجموعه $D' = D - \{v\}$ شکافنده نیمه قوی نیست، پس مجموعه D یک $SSSDS$ مینیمال از G است. □

قضیه ۲.۶.۴. برای هر گراف G بدون رأس تنها، اگر مجموعه D یک $SSSDS$ مینیمال باشد، آن‌گاه $V-D$ یک مجموعه احاطه‌گر است.

برهان. فرض کنید مجموعه D یک $SSSDS$ مینیمال از G باشد. حال به خلف فرض کنید مجموعه $V-D$ احاطه‌گر نباشد، از این‌رو رأس u در مجموعه D وجود دارد به طوری که با هیچ کدام از رئوس $V-D$ مجاور نیست. یا به عبارتی $N(u) \cap D = \phi$. از طرفی G فاقد رأس تنها است، پس رأس u با حداقل یک رأس از D مجاور است. لذا مجموعه $D' = D - \{u\}$ احاطه‌گر است و چون رأس u در زیرگراف القایی $\langle V-D'\rangle$ تنها است، پس D' احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی نیز می‌باشد. بنابراین به تناقض با مینیمال بودن مجموعه D می‌رسیم، لذا فرض خلف باطل و مجموعه D یک $SSSDS$ مینیمال است. □

۷.۴ نتایجی در رابطه با $\gamma_{sss}(G) + \gamma(G)$

حال کرانی برای مجموع دو عدد احاطه‌گری و احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی در G که فاقد رأس تنهااست بیان شده و همچنین کرانی از این مجموع برای درخت T بدست می‌آید.

نتیجه ۱.۷.۴. در هر گراف G فاقد رأس تنها $\gamma_{sss}(G) + \gamma(G) \leq n$.

برهان. فرض کنید D یک γ_{sss}ـ مجموعه از G باشد. بنابراین $|D| = \gamma_{sss}(G)$. پس D مینیمال است و چون فاقد رأس تنها است آن‌گاه طبق قضیه ۲.۶.۴، مجموعه $V-D$ احاطه‌گر است. بنابراین $\gamma(G) \leq |V-D|$. لذا از آن‌جا که $|D| + |V-D| = n$، پس $\gamma_{sss}(G) + \gamma(G) \leq n$. □

نتیجه ۲.۷.۴. برای هر درخت T، $\gamma_{sss}(T) + \gamma(T) = n$. اگر و تنها اگر هر رأس غیر آویزان از T با دقیقاً یک رأس آویزان از آن T باشد.

برهان. درخت T را در نظر بگیرید. فرض کنید $\gamma_{sss}(T) + \gamma(T) = n$. پس $SSSDS$ مجموعه D در درخت T وجود دارد به طوری که مینیمال است و $\gamma_{sss}(T) = \gamma(T) = \frac{n}{۲}$. بنابراین طبق

قضیه ۲.۵.۴، هر رأس غیرآویزان از درخت T دقیقاً با یک رأس آویزان از آن درخت مجاور است.
برعکس: فرض کنید هر رأس غیرآویزان از T دقیقاً با یک رأس آویزان از آن مجاور باشد. بنابراین بر اساس قضیه ۲.۵.۴، داریم: $\gamma_{sss}(T) = \frac{n}{2}$. از طرفی درخت T به صورت گراف تاج ($T \circ K_1$) است. لذا طبق قضیه ۲.۲.۱، $\gamma(T) = \frac{n}{2}$. در نتیجه $\gamma_{sss}(T) + \gamma(T) = n$. □

ملاحظه ۱.۷.۴. در رابطه با نتیجه ۱.۷.۴، بهتر است این نتیجه به گراف‌های همبند محدود شود. که در ادامه نتایجی مرتبط با این فرض ارائه می‌شود.

نتیجه ۳.۷.۴. ۱. برای هر گراف G از مرتبه $n \geq 3$ و فاقد رأس تنها $\gamma_{sss}(G) + \gamma(G) = n$. اگر و تنها اگر برای هر مؤلفه G_i با ($1 \leq i \leq \frac{n}{2}$) از G، تساوی $\gamma_{sss}(G_i) + \gamma(G_i) = n$.

۲. در هر گراف G فاقد رأس تنها $\gamma_{sss}(G) + \gamma(G) = n$. اگر وتنها اگر $\gamma(G) = \frac{n}{2}$. از این‌رو طبق قضیه ۱.۲.۱، تساوی فوق برای هر مؤلفه از از G که با دور C_4 یا H^+ (برای هر گراف همبند H) یکریخت باشد برقرار است.

۳. به هر حال گراف‌های دیگری نیز هستند که تساوی $\gamma_{sss}(G) + \gamma(G) = n$ برای آن‌ها برقرار است، نظیر $K_n^- + 2K_1$ به طوری که n زوج و $n \geq 2$ و K_n^- گرافی است که از حذف کردن ماکزیمم تطابق از گراف کامل K_n حاصل می‌شود.

۴. برای هیچ گرافی از مرتبه ۳ تساوی $\gamma_{sss}(G) + \gamma(G) = n$ برقرار نیست و تنها گراف‌هایی که از مرتبه ۴ در تساوی صدق می‌کنند دور C_4 و مسیر P_4 (هر رأس غیرآویزان از مسیر P_4 دقیقاً با یک رأس آویزان مجاور است) هستند.

۸.۴ کرانی از γ_{sss} بر حسب Δ

در ادامه کرانی از $\gamma_{sss}(G)$ بر حسب $\Delta(G)$ مشخص شده و همچنین این بحث برای درخت T از مرتبه n دنبال می‌شود.

لم ۱.۸.۴. برای هر گراف G فاقد رأس تنها $\gamma_{sss}(G) \leq \lfloor \frac{n\Delta(G)}{\Delta(G)+1} \rfloor$. کران تیز است.

برهان. بر اساس قضیه ۲.۲.۱ و نتیجه ۲.۵.۴، داریم: $\lceil \frac{n}{\Delta(G)+1} \rceil \leq \gamma(G) \leq n - \gamma_{sss}(G)$، بنابراین $\gamma_{sss}(G) \leq \lfloor \frac{n\Delta(G)}{\Delta(G)+1} \rfloor$.
فرض کنید $\gamma_{sss}(G) = \lfloor \frac{n\Delta(G)}{\Delta(G)+1} \rfloor$ از این‌رو $\lceil \frac{n}{\Delta(G)+1} \rceil = \gamma(G) = n - \gamma_{sss}(G)$. لذا بر اساس لم ۲.۲.۴، G با دور C_4 یا مسیر P_4 یکریخت است و بالعکس. □

قضیه ۱.۸.۴. برای هر درخت T از مرتبه $n \geq 3$، $\gamma_{sss}(T) = n - \Delta(T)$. اگر و تنها اگر درخت T به فرم یک عنکبوت زخمی باشد.

برهان. فرض کنید درخت T با یک عنکبوت زخمی یکریخت باشد. پس هر رأس غیرآویزان از درخت T با حداقل یک رأس آویزان مجاور است و طبق قضیه ۱.۵.۴، $\gamma_{sss}(T) = n - \varepsilon(T)$. از طرفی در عنکبوت زخمی $\Delta(T) = \varepsilon(T)$ از این‌رو $\gamma_{sss}(T) = n - \Delta(T)$.

برعکس: فرض کنید برای درخت T، $\gamma_{sss}(T) = n - \Delta(T)$. فرض کنید رأس $v \in V(T)$ یک رأس با ماکزیمم درجه باشد. اگر درخت T غیر از رأس v و همسایه‌هایش رأس دیگری نداشته باشد، به عبارتی دیگر $V(T) - N[v] = \phi$، آن‌گاه درخت T یک ستاره $K_{1,t}$ برای ($t \geq 1$)، بنابراین درخت T یک عنکبوت زخمی است. حال فرض کنید در $V(T) - N[v]$ حداقل یک رأس موجود باشد. زیرگراف القایی $\langle V(T) - N[v] \rangle$ یک گراف دوبخشی است، زیرا در غیر این صورت شامل یک دور فرد است که این با فرض درخت بودن T تناقض دارد. می‌توان بخش‌های این گراف دوبخشی از $V(T) - N[v]$ را X و Y نامید. به طوری که اندازه بخش X از اندازه بخش Y بزرگتر یا به‌عبارتی اندازه بخش X ماکزیمم است. پس X یک مجموعه مستقل از زیرگراف القایی $\langle V(T) - N[v] \rangle$ است. مجموعه $X \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مستقل است. لذا زیرگراف القایی $\langle V(T) - (X \cup \{v\}) \rangle$ به صورت $Y \cup N(v)$ است. مجموعه Y مستقل است. از طرفی هیچ دو رأسی از $N(v)$ با هم مجاور نیستند، زیرا در غیر این صورت دور ایجاد می‌شود که این با فرض درخت بودن T تناقض دارد. پس مجموعه $X \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی مستقل از درخت T است. بنابراین $n = \gamma_{sss}(T) + \Delta(T) \leq |X| + 1 + \Delta(G)$. پس از این‌رو مجموعه Y تهی است و مجموعه $V(T) - N[v]$ یک مجموعه مستقل است. چون درخت T همبند است پس هر رأس در مجموعه $V(T) - N[v]$ با دقیقاً یک رأس از $N(v)$ مجاور است. زیرا اگر با حداقل دو رأس $N(v)$ مجاور باشد آن‌گاه در گراف دور ایجاد می‌شود. از این‌رو درخت T یک عنکبوت است یا به عبارت دیگر درخت T شامل یک رأس از درجه حداقل ۳ و $n - 1$ رأس از درجه حداکثر ۲ می‌باشد. اگر عنکبوت سالم باشد پس $n = 2\Delta(T) + 1$ و برای رأس v از درجه $\Delta(T)$ مجموعه $N(v)$ یک $SSSDS$ مجموعه از T می باشد. لذا داریم: $n = \gamma_{sss}(T) + \Delta(T) \leq 2\Delta(T)$. بنابراین حداقل یک رأس از مجموعه $N(v)$ با هیچ کدام از رئوس $V(T) - N[v]$ مجاور نیست، پس T یک عنکبوت زخمی است. $\square$

۹.۴ کران بالای γ_{sss} بر حسب $\alpha_\circ(G)$، $\beta_\circ(G)$ و $\mu(G)$

قضیه ۱.۹.۴. برای هر گراف G فاقد رأس تنها $\gamma_{sss}(G) \leq \min\{n - \beta_\circ(G), \alpha_\circ(G), 2\mu(G)\}$.

برهان. گراف G فاقد رأس تنها را در نظر بگیرید. فرض کنید S یک مجموعه مستقل ماکزیمم از رئوس G با اندازه $\beta_\circ(G)$ باشد. از این‌رو زیرگراف القایی $\langle S \rangle$ دارای هیچ یالی نیست. از طرفی چون G فاقد رأس تنها است، پس هر رأس در $\langle S \rangle$ حداقل یک همسایه در مجموعه $V - S$ دارد بنابراین $\delta(G) \geq 1$. پس مجموعه $V - S$ یک $SSSDS$ از گراف G است. لذا $\gamma_{sss}(G) \leq n - \beta_\circ(G)$. فرض کنید S مینیمم پوشش رأسی از G با اندازه $\alpha_\circ(G)$ باشد. از

این‌رو زیرگراف القایی $\langle V-S\rangle = sK_1$ برای $s \geq 1$. زیرا اگر $\langle V-S\rangle$ شامل حداقل یک یال باشد با این که S مینیمم پوشش رأسی است تناقض دارد. هر رأس در $V-S$ با یک رأس در S مجاور است، بنابراین $\delta(G) \geq 1$. پس مجموعه S یک $SSSDS$ از G است. لذا $\gamma_{sss}(G) \leq \alpha_0(G)$. فرض کنید مجموعه $M = \{e_i = u_iv_i : i = 1,2,\ldots,\mu\}$ یک تطابق ماکزیمم از یال‌های G و $e_i \in E(G)$ و $u_i, v_i \in V(G)$. اگر $D = \{u_i, v_i : i = 1,2,\ldots,\mu\}$ یک مجموعه احاطه‌گر نباشد، آن‌گاه حداقل یک رأس در زیرگراف القایی $\langle V-D\rangle$ وجود دارد به طوری که با هیچ کدام از رئوس مجموعه D مجاور نیست. یا به عبارت دیگر برای برخی از رئوس $x \in D$، $d(x, D) = \min\{d(x,w) : w \in D\} \geq 2$. لذا بدون کاستن از کلیت مطلب مسیر $P = (x, y, \ldots, u_i)$ در G وجود دارد، به طوری که u_i هر رأس از D می تواند باشد و $d(x, u_i) = \min\{d(x,w) : w \in D\}$. از این‌رو یال $\{xy\}$ را می‌توان به تطابق M افزود زیرا هیچ رأس مشترکی با رئوس تطابق M ندارد. پس $M \cup \{xy\}$ یک تطابق از G است که با ماکزیمال بودن تطابق M تناقض دارد. همین طور اگر تطابق M در G ماکزیمال باشد مجموعه $V-D$ یک مجموعه مستقل است. زیرا اگر مستقل نباشد آن‌گاه یک یال در $V-D$ وجود دارد که هیچ رأس مشترکی با تطابق M ندارد و از این‌رو می‌توان آن‌را به M افزود. پس D یک $SSSDS$ از G است. لذا $\gamma_{sss}(G) \leq 2\beta_1(G)$. از این‌رو در هر گراف G فاقد رأس تنها $\gamma_{sss}(G) \leq \min\{n-\beta_0(G), \alpha_0(G), 2\beta_1(G)\}$. □

نتیجه ۱.۹.۴. برای هر درخت T، $\gamma_{sss}(T) \leq \beta_0(T)$.

برهان. طبق لم ۳.۴.۳، در هر درخت T، $\beta_0(T) \geq \frac{n}{2}$. از این‌رو بر اساس قضیه ۱.۳.۲ و قضیه ۱.۹.۴، $\gamma_{sss}(T) \leq \beta_0(T)$. □

نتیجه ۲.۹.۴. برای هر گراف همبند و غیربدیهی G، $\gamma_{sss}(G) + i(G) \leq n$.

برهان. فرض کنید D یک مجموعه مستقل ماکزیمم از اندازه $\beta_0(G)$ باشد. چون G همبند است، پس مجموعه D یک مجموعه احاطه‌گر مستقل است. از این‌رو $i(G) \leq \beta_0(G)$. از طرفی بر اساس قضیه ۱.۹.۴، $\gamma_{sss}(G) \leq n - \beta_0(G)$. لذا $\gamma_{sss}(G) + i(G) \leq n$. □

۱۰.۴ تعیین γ_{sss} برای رده خاصی از گراف‌ها

در این بخش توجه خود را معطوف به مشخص کردن عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی برای رده‌ای از گراف‌ها می‌کنیم، که در برخی خصوصیات خاص صدق می‌کنند. مانند گراف‌هایی که از ترکیب دو گراف با استفاده از اعمال تعریف شده روی گراف‌ها بدست می‌آیند.

۱.۱۰.۴ γ_{sss} برای گراف حاصل از پیوند دو گراف G_1 و G_2

قضیه ۱.۱۰.۴. اگر G_1 و G_2 دو گراف از مرتبه n_1 و n_2 باشند. به طوری که $\min\{n_1, n_2\} \geq 1$ و $V(G_1) \cap V(G_2) = \phi$. آن‌گاه

$$\gamma_{sss}(G_1 \vee G_2) = \min\{n_1 + k_2, n_2 + k_1\}$$

. به صورتی که k_i کوچکترین اندازه مجموعه D_i و $D_i \subset V(G_i)$ و زیرگراف القایی $\langle V(G_i) - D_i \rangle$ یکریخت با $sK_1 \cup tK_2$ ($s, t \geq 0$) می‌باشد.

برهان. دو گراف G_1 و G_2 از مرتبه n_1 و n_2 را در نظر بگیرید. فرض کنید مجموعه D هر $SSSDS$ از $G_1 \vee G_2$ و همچنین $V' = V(G_1 \vee G_2) - D$. اگر

$$|V' \cap V(G_i)| \geq 1$$

و

$$|V' \cap V(G_j)| \geq 2$$

به طوری که $\{i, j\} = \{1, 2\}$. آن‌گاه چون هر رأس از G_i به هر رأس از G_j متصل است پس درجه هر رأس x که $x \in V(G_i) \cap V'$ حداقل دو می‌باشد. لذا این تناقض با $SSSDS$ بودن مجموعه D دارد. اگر

$$|V' \cap V(G_1)| = |V' \cap V(G_2)| = 1$$

آن‌گاه مجموعه D هر $SSSDS$ از $G_1 \vee G_2$ می‌باشد. اگر برای $i = 1$ یا $i = 2$، $V' \cap V(G_i) = \phi$، آن‌گاه طبق تعریف k_i،

$$|D \cap V(G_i)| \geq k_i$$

. از این‌رو

$$\gamma_{sss}(G_1 \vee G_2) \geq \min\{n_1 + k_2, n_2 + k_1\}$$

. اگر مجموعه D_i یک زیر مجموعه مینیمم از $V(G_i)$ باشد به طوری که زیرگراف القایی $V(G_i) - D_i$ برای $i = 1, 2$ دارای هیچ رأسی از درجه بزرگتر یا مساوی ۲ نباشد، آن‌گاه مجموعه‌های $D_1 \cup V(G_2)$ و $D_2 \cup V(G_1)$ هر کدام یک $SSSDS$ از $G_1 \vee G_2$ می‌باشند. لذا

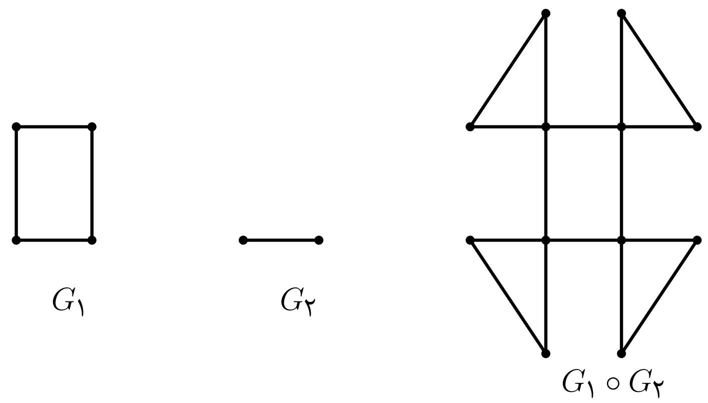
$$\gamma_{sss}(G_1 \vee G_2) \leq \min\{n_1 + k_2, n_2 + k_1\}$$

. در نتیجه $\gamma_{sss}(G_1 \vee G_2) = \min\{n_1 + k_2, n_2 + k_1\}$. □

در ادامه گراف‌های جدیدی معرفی می‌شود، این گراف‌ها گراف تاج، دوستونی و گراف شکافته شده نام دارند. سپس مقدار عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی در این گراف‌ها بررسی می شود.

۲.۱۰.۴ γ_{sss} برای گراف تاج $G_1 \circ G_2$

فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف به ترتیب از مرتبه n_1 و n_2 باشند به طوری که $V(G_1) \cap V(G_2) = \phi$. **گراف تاج** [۲] $G = G_1 \circ G_2$ به عنوان گراف بدست آمده از G_1 و G_2 با استفاده از گرفتن یک کپی از G و n_1 کپی از G_2 و متصل کردن هر رأس از iـامین کپی از G_2 به iـامین رأس از G_1، تعریف می‌شود. اگر G_2 یکریخت با K_1 باشد، آن‌گاه طبق تعریف ۵۷.۱.۱، G همان تاج یا G^+ است.



شکل ۳.۴: گراف‌های G_1 و G_2 و گراف تاج $G_1 \circ G_2$

در ادامه عدد احاطه گری شکافنده نیمه قوی برای گراف تاج بررسی می‌شود. اما قبل از آن به نتیجه پایه‌ای زیر از مرجع [۱] نیاز داریم.

لم ۱.۱۰.۴. برای هر گراف G_1 و G_2، داریم $\gamma(G_1 \circ G_2) = n$.

قضیه ۲.۱۰.۴. فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف از مرتبه n_1 و n_2 باشند، به طوری که $V(G_1) \cap V(G_2) = \phi$ باشد. آن‌گاه $\gamma_{sss}(G_1 \circ G_2) = n_1(k+1)$، که k کوچکترین اندازه مجموعه $D \subset V(G_2)$ می‌باشد، به طوری که زیرگراف القایی $\langle V(G_2) - D \rangle$ با $sK_1 \cup tK_2$ برای ($s, t \geq 0$) یکریخت است.

برهان. گراف‌های G_1 و G_2 از مرتبه n_1 و n_2 را در نظر بگیرید، فرض کنید $G = G_1 \circ G_2$ باشد. فرض کنید

$$V(G) = V(G_1 \circ G_2) = (\bigcup_{i=1}^{n_1} V_i) \cup V(G_1)$$

[۲] Corona graph

، به طوری که $V_i = \{u_{i_1}, \dots, u_{i_{n_2}}\}$ و $\langle V_i\rangle \cong G_2$ برای $i = 1, \dots, n_1$ و $V(G_1) = \{v_1, \dots, v_{n_1}\}$.
فرض کنید مجموعه

$$D = V(G_1) \cup (\bigcup_{i=1}^{n_1} S_i)$$

، که $S_i \subset V_i$ یک مجموعه با اندازه مینیمم باشد، به طوری که زیرگراف القایی $\langle V_i - S_i\rangle$ برای $i = 1, \dots, n_1$ با $sK_1 \cup tK_2$ که $s, t \geq 0$ یکریخت باشد. لذا بر اساس لم ۱.۱۰.۴، و این که در گراف تاج هر رأس از iـامین کپی از G_2 به هر رأس i از G_1 متصل است، پس مجموعه D مجموعه رئوس $G_1 \circ G_2$ احاطه می‌کند. از طرفی زیرگراف القایی

$$\langle V(G_1 \circ G_2) - D\rangle \cong n_1(sK_1) \cup n_1(tK_2)$$

، بنابراین مجموعه D یک $SSSDS$ از $G_1 \circ G_2$. پس

$$|D| = |V(G_1) \cup (\bigcup_{i=1}^{n_1} S_i)| = |V(G_1)| + \bigcup_{i=1}^{n} |S_i| = n_1 + n_1 k$$

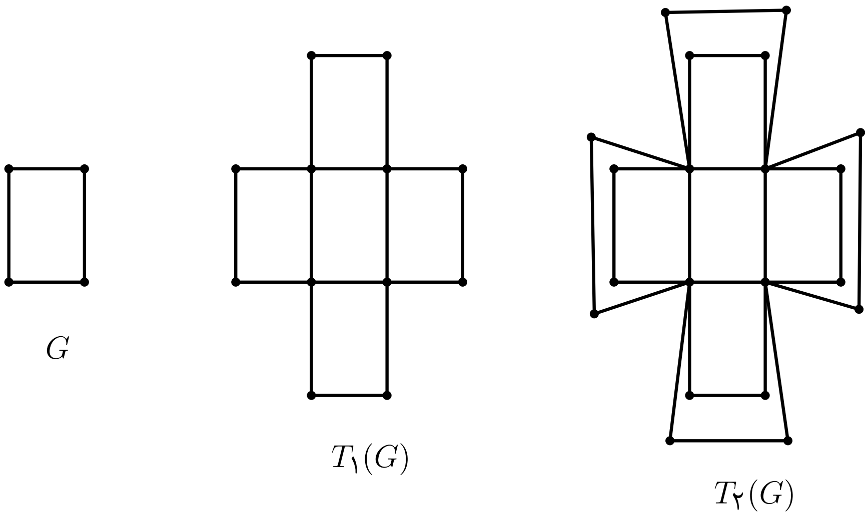
. بنابراین $\gamma_{sss}(G_1 \circ G_2) \leq n_1(k+1)$.
برعکس: فرض کنید مجموعه D' هر $SSSDS$از $G_1 \circ G_2$ باشد. اگر G_2 دارای هیچ مؤلفه‌ای از مرتبه ۳ یا بیشتر نباشد آن‌گاه $k = 0$، یعنی G_2 خود به فرم $sK_1 \cup tK_2$ که $s, t \geq 0$. از طرفی $V(G_1)$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از $G_1 \circ G_2$ و زیرگراف القایی $\langle V(G) - D'\rangle$ به فرم $sK_1 \cup tK_2$ که $s, t \geq 0$. بنابراین $V(G_1)$ یک $\gamma_{sss}(G_1 \circ G_2)$ ـ مجموعه است، از این‌رو برای هر رأس $v_i \in V(G_1) - D'$، باید حداقل یک رأس از D' متعلق به iـامین کپی از G_2 باشد در غیر این صورت یا D' یک $SSSDS$ از $G_1 \circ G_2$ نیست.
فرض کنید G_2 شامل یک مؤلفه با حداقل سه رأس باشد، پس طبق قضیه ۲.۴.۴، $k \leq n_2 - 2$.
اگر رأس $v_i \in V(G_1)$ عضو مجموعه D' نباشد برای برخی از i ها که $1 \leq i \leq n$، آن‌گاه $|D' \cap V_i| \geq n_2 - 1$. چون در غیر این صورت درجه رأس v_i متعلق به زیرگراف القایی $\langle V - D'\rangle$ بزرگتر یا مساوی ۲ است، که تناقض با $SSSDS$ بودن D' دارد. اگر رأس $v_i \in V(G_1)$، عضو مجموعه D' باشد برای برخی از i هاکه $1 \leq i \leq n$، آن‌گاه $|D' \cap V_i| \geq k$. بنابراین

$$|D'| \geq a(n_2 - 1) + k(n_1 - a) + (n_1 - a) = n_1 k + n_1 + at \qquad (*)$$

به طوری که a تعداد رئوسی از $V(G_1)$ است که متعلق به $SSSDS$، D' نیست. به عبارت دیگر $a = |V(G_1) - D'|$ پس $a \geq 0$ و $t = (n_2 - k - 2)$. لذا چون $k \leq n_2 - 2$ ، بنابراین $t \geq 0$. پس $|D'| \geq n_1 k + n_1$. از این‌رو رابطه *، برای حالتی که G_2 شامل هیچ مؤلفه با حداقل سه رأس نباشد، نیز قابل استفاده است. پس داریم: $\gamma_{sss}(G_1 \circ G_2) = n_1(k+1)$. □

۳.۱۰.۴ γ_{sss} برای گراف دو ستونی $T_k(G)$

برای هر گراف G، **گراف دوستونی** $T_k(G)$ [۳] به عنوان گراف به دست آمده از G و K_2 با استفاده از گرفتن یک کپی از G و k کپی از K_2 به ازای هر یال uv از G و متصل کردن رأس u و رأس v به رئوس انتهایی هر K_2– ای که مربوط به همان یال uv باشد.



شکل ۴.۴: گراف G، گراف دوستونی $T_1(G)$ و $T_2(G)$

قضیه ۳.۱۰.۴. برای هر گراف ناتهی G از مرتبه $n \geq 2$، $\gamma_{sss}(T_k(G)) = n$. به طوری که $k \geq 2$.

برهان. $G \neq sK_1$ برای $s \geq 1$ از مرتبه n و اندازه m را در نظر بگیرید. فرض کنید $V = V(T_k(G))$ و $D = V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. فرض کنید $e_i^1, e_i^2, \ldots, e_i^k$ یال‌های جدید $T_k(G)$ متناظر با یال $e_i \in E(G)$ برای $i = 1, 2, \ldots, m$. طبق تعریف $T_k(G)$ به ازای هر یال $(vi, vj \in V(G))$ $e_i = v_iv_j$، رأس v_i و رأس v_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ به رئوس انتهایی K_2 متناظر با خود متصل است. از این‌رو D یک مجموعه احاطه‌گر است. از طرفی زیرگراف القایی $\langle V - D \rangle$ با $(mk)K_2$ یکریخت است. بنابراین مجموعه D یک $SSSDS$ از $T_k(G)$ است. لذا $\gamma_{sss}(T_k(G)) \leq n$.
حال فرض کنید مجموعه D' یک $SSSDS$ از $T_k(G)$ با اندازه مینیمم باشد. واضح است که هر رأس تنها متعلق به D' است. اگر رأس $v_i \in V(G)$ برای برخی از i ها که $1 \leq i \leq n$، عضو مجموعه D' نباشد و $v_iv_j = e_t \in E(G)$. آن‌گاه برای احاطه شدن انتهای یال‌های $e_t^1, e_t^2, \ldots, e_t^k$ که با رأس v_i مجاور هستند، حداقل k رأس از رئوس واقع بر یال‌های $e_t^1, e_t^2, \ldots, e_t^k$ نیاز است. بنابراین $|D'| \geq a + (n-a)k$. به طوری که $a = |D' \cap V(G)|$. چون $k \geq 2$ و $a \leq n$، لذا داریم: $|D'| \geq 2n - a \geq n$. این تصدیق می‌کند که $\gamma_{sss}(T_k(G)) \geq n$. بنابراین $\gamma_{sss}(T_k(G)) = n$. □

[۳] Trestled graph

لم ۴.۱۰.۲. گراف G را در نظر بگیرید. فرض کنید $K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots, K_{n_t}$ خوشه‌های مجزا از G باشند به طوری که $\min\{n_1, n_2, \ldots, n_t\} \geq 2$ و خوشه‌ها لزوماً ماکزیمال نیستند. در این صورت

$$\gamma_{sss}(G) \geq \sum_{i=1}^{t} n_i - 2$$

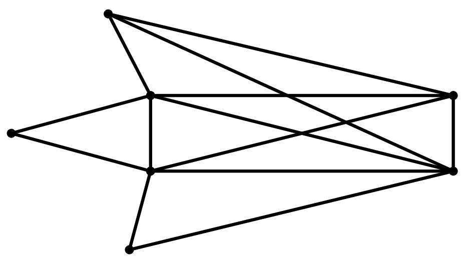
برهان. فرض کنید مجموعه D هر $SSSDS$ از G باشد. اگر داشته باشیم $|V(K_{n_t}) \cap D| \leq n_i - 3$ برای $1 \leq i \leq t$، آن‌گاه زیرگراف القایی $\langle V(K_{n_t}) - D \rangle$ یک خوشه از $\langle V - D \rangle$ از درجه حداقل سه است. که این تناقض با $SSSDS$ بودن D دارد. بنابراین $|V(K_{n_t}) \cap D| \geq n_i - 2$، برای i که $1 \leq i \leq t$. بنابراین

$$\gamma_{sss}(G) \geq \sum_{i=1}^{t} n_i - 2$$

. □

۴.۱۰.۴ γ_{sss} برای گراف شکافته شده

گراف G را یک **گراف شکافته شده** [۴] گوییم، اگر بتوان مجموعه رئوس آن را به یک خوشه و یک مجموعه مستقل افراز کرد.



شکل ۴.۵: گراف شکافته شده

قبل از بررسی عدد احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی برای گراف شکافته شده، نیاز به لم زیر داریم که از مرجع [۳] آورده شده است.

لم ۴.۱۰.۳. گراف G یک گراف شکافته شده است، اگر و تنها اگر فاقد زیرگراف القایی به صورت دور C_4 یا C_5، مسیر P_4 و $2K_2$ باشد.

قضیه ۴.۱۰.۴. اگر G یک گراف شکافته شده همبند با بخش‌های مجزای $S \cup I$، که $\langle S \rangle$ یک خوشه و I یک مجموعه مستقل از G باشد، آن‌گاه $|S| - 2 \leq \gamma_{sss}(G) \leq |S|$. به علاوه

(الف) $\gamma_{sss}(G) = |S|$. اگر و تنها اگر هر رأس $x \in S$ دارای یک همسایه خصوصی یا حداقل دو همسایه در I باشد. به عبارت دیگر $|N(x) \cap I| \geq 2$.

[۴] Split graph

(ب) $\gamma_{sss}(G) = |S| - ۱$، اگر و تنها اگر حداقل یک رأس $x \in S$ وجود داشته باشد که هیچ همسایه خصوصی نداشته باشد به طوری که $|N(x) \cap I| \leq ۱$ و هر رأس $y \in S$ که $y \neq x$ حداقل یک همسایه در I داشته باشد.

(ج) $\gamma_{sss}(G) = |S| - ۲$، اگر و تنها اگر حداقل دو رأس از S هیچ همسایه‌ای در I نداشته باشند.

برهان. بر اساس لم ۲.۱۰.۴، $|S| - ۲ \leq \gamma_{sss}(G)$. از این‌رو زمانی که $|S| = ۱$ نامساوی قبل به طور بدیهی برقرار است. چون G همبند است از این‌رو رئوس مجموعه مستقل I با رئوس خوشه S مجاورند، بنابراین S یک مجموعه احاطه‌گر است. از طرفی $V - S = I$. پس مجموعه S یک $SSSDS$ از G است. بنابراین $\gamma_{sss}(G) \leq |S|$.
(الف) فرض کنید $\gamma_{sss}(G) = |S|$. فرض کنید وجود داشته باشد رأس $x \in S$، به طوری که هیچ همسایه خصوصی ندارد و $|N(x) \cap I| \leq ۱$. چون G همبند است، پس رأس $y \in S$ که $y \neq x$ وجود دارد به طوری که $y \subseteq |N(x) \cap I|$. بنابراین مجموعه $S - \{x\}$ یک $SSSDS$ از G است و این با فرض مینیمال بودن S تناقض دارد.
برعکس: فرض کنید هر رأس $x \in S$ دارای یک همسایه خصوصی است، یا $|N(x) \cap I| \geq ۲$ است. فرض کنید رأس $x \in S$ وجود دارد به طوری که مجموعه $D = S - \{x\}$ یک $SSSDS$ از G باشد. چون D احاطه‌گر است رأس x همسایه خصوصی ندارد که این با فرض همسایه خصوصی داشتن هر رأس $x \in S$ متناقض است. فرض کنید $|N(x) \cap I| \geq ۲$. پس درجه رأس $x \in \langle V - D \rangle$ بزرگتر یا مساوی ۲است، که این با $SSSDS$ بودن D متناقض است. بنابراین $\gamma_{sss}(G) = |S|$ (ب) فرض کنید $\gamma_{sss}(G) = |S| - ۱$. پس باید حداقل یک رأس x وجود داشته باشد فاقد همسایه خصوصی و به طوری که $|N(x) \cap I| \leq ۱$. فرض کنید دو رأس $x, y \in S$ وجود دارد به طوری که $|N(x) \cap I| = |N(y) \cap I| = ۰$. بنابراین $S - \{x, y\}$ یک $SSSDS$ از G است که متناقض با $\gamma_{sss}(G) = |S| - ۱$.
برعکس:فرض کنید رأس $x \in S$ همسایه خصوصی ندارد و به طوری که $|N(x) \cap I| \leq ۱$ و هر $y \in S$ که $y \neq x$ حداقل یک همسایه در I دارد. آن‌گاه مجموعه $S - \{x\}$ یک $SSSDS$ از G است. ولی $S - \{u, v\}$ برای هر $\{u, v\} \subset S$ یک $SSSDS$ از G نیست. بنابراین $\gamma_{sss}(G) = |S| - ۱$
(ج) فرض کنید $\gamma_{sss}(G) = |S| - ۲$. فرض کنید $D - \{x, y\}$ یک γ_{sss}ــ مجموعه از G باشد. اگر $|N(x) \cap I| \geq ۱$، آن‌گاه درجه رأس $x \in \langle V - D \rangle$ بزرگتر یا مساوی ۲ است. که با فرض $SSSDS$ بودن D تناقض دارد.
برعکس: فرض کنید دو رأس $x, y \in S$ وجود دارد به طوری که هیچ همسایه‌ای در I ندارند از این‌رو $\gamma_{sss}(G) = |S| - ۲$.

□

۱۱.۴ نتیجه گیری و طرح نهایی

نظریه احاطه‌گری، مهم و به علاوه سریع ترین زمینه در حال رشد در نظریه گراف است. در این پایان نامه سه پارامتر از احاطه‌گری را با نام‌های عدد احاطه‌گری شکافنده، عدداحاطه‌گری شکافنده قوی و عدداحاطه‌گری شکافنده نیمه قوی را معرفی شد. که اهم مطالعه در مورد مفهوم احاطه‌گری شکافنده نیمه قوی و مطالعه عدد γ_{sss} در گراف‌ها است که موضوع پژوهش نیز به این نام است. البته، فقط مطالعه‌ای از این پارامترآغاز شد. اگرچه، حوزه وسیعی برای پژوهش بیشتر روی این پارامتر وجود دارد که این جا برخی از آن‌ها فهرست می‌شوند.
(A) برخی از مسایل باز به صورت زیر هستند.

۱. گراف‌هایی که در آن‌ها $\gamma(G) = \gamma_{sss}(G)$، را مشخص کنید.

۲. گراف‌هایی که در آن‌ها $\gamma_s(G) = \gamma_{sss}(G)$، را مشخص کنید.
نتیجه ۳.۴.۴، بر این که اگر $\gamma(G) = \gamma_{sss}(G)$، آن‌گاه $\gamma_s(G) = \gamma_{sss}(G)$ دلالت دارد. اما برعکسش درست نیست.

۳. گراف‌هایی که در آن‌ها $\gamma_{ss}(G) = \gamma_{sss}(G)$، را مشخص کنید.

۴. گراف‌های فاقد رأس تنها از مرتبه n را که در آن‌ها $\gamma(G) + \gamma_{sss}(G) = n$، را مشخص کنید.
اگر این مسئله را برای گراف‌های همبند اثبات کنید نیز کفایت می‌کند.

۵. گراف‌های فاقد رأس تنها از مرتبه n را که در آن‌ها $\gamma(G) + \gamma_{sss}(G) = \frac{n}{۲}$، را مشخص کنید.

۶. اعداد مثبت a، b، c و d با $a \leq b \leq c \leq d$ داده شده‌اند. آیا گراف G وجود دارد به طوری که برای آن $\gamma(G) = a$، $\gamma_s(G) = b$، $\gamma_{sss}(G) = c$ و $\gamma_{ss}(G) = d$.

(B) این مسئله در کل برای بررسی جالب است. گراف $G = (V, E)$ و عدد مثبت k را در نظر بگیرید. مجموعه $S \subseteq V$ یک مجموعه احاطه‌گر kـ شکافنده است، اگر احاطه‌گر باشد و زیرگراف القایی $\langle V - S \rangle$ فاقد رأسی از درجه بزرگتر یا مساوی k باشد. بنابراین مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی یک مجموعه احاطه‌گر ۰ـ شکافنده و مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی یک مجموعه احاطه‌گر ۱ـ شکافنده است و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. عدد احاطه‌گری kـ شکافنده اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر kـ شکافنده است که با نماد γ_s^k نشان داده می‌شود. با پیروی از ایده گزاره ۴.۴.۴، اثبات این که برای هر عدد صحیح مثبت t گراف همبند G وجود دارد به طوری که $\gamma_s^k - \gamma_s^{k-۱} \geq t$ دشوار نیست: گراف، شامل t خوشه از مرتبه p مشترک در یک رأس که $p \geq k + ۲$. این

چندین سؤال، همچنین برنامه‌های کاربردی مرتبط با مفهوم کلی را پیشنهاد می‌دهد. حال می‌توانید به بررسی خصوصیات این پارامترها بپردازید.

(C) در ادامه پارامتر دیگری به شرح ذیل برای بررسی می‌آید. گراف $G=(V,E)$ و عدد مثبت k را در نظر بگیرید. مجموعه $S\subseteq V$ یک مجموعه احاطه‌گر kـ‌خوشه نامیده می‌شود اگر احاطه‌گر باشد و زیرگراف القایی $\langle V-D\rangle$ فاقد خوشه‌ای از مرتبه بزرگتر یا مساوی k باشد. بنابراین مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی یک مجموعه احاطه‌گر ۱ـ‌خوشه و مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی یک مجموعه احاطه‌گر ۲ـ‌خوشه می‌باشد. مینیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌گر kـ‌خوشه با γ_c^k نشان داده می‌شود. برای هر عدد صحیح مثبت t گراف همبند G وجود دارد به طوری که $\gamma_c^k-\gamma_c^{k-۱}\geq t$. گراف، شامل t خوشه از مرتبه p مشترک در یک رأس که $p\geq k+۱$. اثبات این که برای عدد صحیح و مثبت k، $\gamma_c^{k+۱}\leq\gamma_c^k$ دشوار نیست. تساوی رخ می‌دهد اگر $k=۱,۲$. حال می‌توانید به بررسی این پارامترها بپردازید.

مراجع

[1] H. Abdolallahzadeh Ahangar, V. Samodivkin and I. G. Yero, Independent transversal dominating sets in graphs: complexity and structural properties, *Filmot* **30** (2016), 293-303.

[2] A. Alwardi, K. Ebadi, M. Manrique and N. Soner, Semi-strong split domination in graphs, *Transactions on Combinatorics*, **3** (2014), 51-63.

[3] C. Benzaken P. L. Hammer D. de Werra, Split graphs of Dilworth number 2, *Discrete Mathematics*, **55** (1985), 123-127.

[4] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Fourth edition, CRC Press, Boca Raton, (2005).

[5] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs, *Networks*, **7** (1977), 247-261.

[6] J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. Kinch and J. Roberts, On graphs having domination number half their order, *Period Math. Hungar*, **16** (1985), 287-293.

[7] I. Gonzalez Yero, D. Kuziak and A. Rondon Aguilar, Coloring, location and domination of corona graphs, *Aequationes Mathematicae* **86** (2013), 1–21.

[8] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Massachuserrs (1969).

[9] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1998).

[10] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1998).

[11] S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar, *Topics on Domination*, Discrete Math. **86** (1990).

[12] V. R. Kulli and B.Janakiram, The minimal dominating graph, *Graph Theory Notes of New York*, New York Academy of Sciences, (1995), 12-15.

[13] V. R. Kulli and B.Janakiram, The nonbondage number of a graph, *Graph Theory Notes of New York*, New York Academy of Sciences, (1996), 14-16.

[14] V. R. Kulli and B.Janakiram, The regular set domination number of a graph (submitted).

[15] V. R. Kulli and B. Janakiram, The split domination number of a graph, *Graph Theory Notes N. Y.*, **32** (1997), 16-190.

[16] V. R. Kulli ana B. Janakiram, The strong split domination number of a graph, *Acta Cinenc. Indica*, **32** (2006), 715-720.

[17] E. A. Nordhaus and J. W. Gaddum, On complementary graphs, *Amer. Math. Monthly*, **63** (1956), 175-177.

[18] C. Payan and N. H. Xuong, Domination-balanced graphs, *J. Graph Theory*, **6** (1982), 23-32.

[19] E. Sampathkumar and H.B.Walikar, The connected domination number of a graph, *J. Math. Phy. Sci.*,**13** (1979), 607-613.

[20] D. B. West, Introduction to Graph theory, second edition. (2001).

[21] S. Zhou and X. Yue, Gallai-type equalities for f-dominatiom and connected f-domination numbers, *Graph Theory Notes of New York*, New York Academy of Sciences, (1995), 30-32.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

پوشش رأسی .... Vertex Covering
تاج .... Corona
تطابق .... Matching
تیز .... Sharp
خوشه .... Clique
درخت .... Tree
زیرگراف القایی .... Induced Subgraph
زیرگراف فراگیر .... Spanning Subgraph
رأس پایانی .... End Vertex
ساقه .... Stem
ستاره .... Star
طوقه .... Loop
قطر .... Diameter
کران .... Bound
مجاور .... Adjacent
مجموعه احاطه‌گر .... Dominating Set
مجموعه احاطه‌گر شکافنده .... Split Dominating Set
مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی .... Strong Split Dominating Set
مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی .... Semi-Strong Split Dominating Set
مجموعه احاطه‌گر مستقل .... Independent Dominating Set
مجموعه احاطه‌گر همبند .... Connected Dominating Set
یال آویزان .... Pendant Edge

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Bound	کران
Clique	خوشه
Corona	تاج
Connected Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر همبند
Diameter	قطر
Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر
End Vertex	رأس پایانی
Independent Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر مستقل
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Loop	طوقه
Matching	تطابق
Pendant Edge	یال آویزان
Semi-Strong Split Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر شکافنده نیمه قوی
Sharp	تیز
Spanning Subgraph	زیرگراف فراگیر
Split Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر شکافنده
Star	ستاره
Stem	ساقه
Strong Split Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر شکافنده قوی
Tree	درخت
Vertex Covering	پوشش رأسی

Aabstract

Let G be a graph. A set $D \subseteq V$ of vertices in a graph G is called a dominating set if every vertex in $V - D$ is adjacent to a vertex in D. A dominating set D is a split dominating set if the induced subgraph $\langle V - D \rangle$ is disconnected. If there exist a split dominating set D of G, then the minimum cardinality of D is called the split domination number or $\gamma_s(G)$. A dominating set D is a strong split dominating set if the induced subgraph $\langle V - D \rangle$ with at least two vertices is empty graph. If there exist a strong split dominating set D of G, then the minimum cardinality of D is called the strong split domination number or $\gamma_{ss}(G)$. A dominating set D is a semi-strong split dominating set if $|V - D| \geq 1$ and the maximum degree of any vertex $v \in (V - D)$ is one. If there exist a semi-strong split dominating set D of G, then the minimum cardinality of D is called the semi-strong split domination number or $\gamma_{sss}(G)$. In this thesis, some of the results related to the $\gamma_s(G)$ are described and then the $\gamma_{ss}(G)$ is examined. At the end, the semi-strong split domination is introduced in the graphs and a number of related theorems are proved.

Keywords: dominating set, split dominating set, strong split dominating set, semi-strong split dominating set.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and Combinatorics

Semi-Strong Split Domination in Graphs

By: Pegah Dalvand

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

Advisor

Dr. Mahdi Reza Khorsandi

November 2017