بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش جبر ـ نظریه‌ی حلقه‌ها

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

مطالعه حلقه‌های نیم ـ آرمنداریز و برخی توسیع‌های آن

نگارنده: رقیه بالدی

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

دکتر عبدالله آل‌هوز

تیرماه ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **خانم رقیه بالدی** با شماره دانشجویی **۹۳۰۳۵۸٤** رشته **ریاضی محض** گرایش **جبر ـ نظریه حلقه ها** تحت عنوان **مطالعه حلقه های نیم آرمنداریز و برخی توسیع های آن** که در تاریخ **۱۳۹٦/۰٤/۲٦** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با امتیاز ...۱۸/۲۰... **درجه** ....) ☑ **مردود** ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد	
۲- استادراهنمای دوم	-----	-----	-----
۳- استاد مشاور	دکتر عبدالله آل هوز	استادیار	A.A
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر مهدی رضا خورسندی	استادیار	
٦ـ استاد ممتحن دوم	دکتر سیدحیدر جعفری	انشیار دا	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

سپاس‌گزاری...

شکر و سپاس معبودی را که عشق به آموختن را در دل انسان‌ها به ودیعه نهاد. خداوند را سپاس می‌گویم که به من فرصت داد تا عمر خود رادر راه تحصیل علم و دانش سپری کنم.

از پدر و مادر عزیزم که از کودکی، شور دانستن و لذت کشف و جستجو را در من بیدار کردند و استقامت و تلاش را به من آموختند و در تمام این سالها، با فراهم کردن آرامش روحی، بسیاری از دشواری‌ها را بر من آسان نمودند، با تمام وجود، قدر دانم.

به پاس احترام به مقام والای معلم، در مقابل تمام اساتید بزرگواری که در محضرشان کسب فیض نموده و کویر تشنه وجودم را از چشمه جوشان معرفتشان سیراب ساخته‌ام، سر تعظیم فرود آورده و مراتب سپاس گزاری خود را از ایشان ابراز می‌دارم.

از استاد راهنمای بردبارم، **جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی،** که تمام روزهایی که تحت نظارت ایشان مشغول به تحقیق بودم از آموختن توأم با علم و اخلاق بود، نهایت تشکر را دارم. در پرتو پر از امید ایشان بود که تمام دلسردی‌ها رنگ می‌باخت و در سایه وجود خستگی ناپذیرشان، پرسش‌های گاه و بی گاهم پاسخ می‌یافت. همچنین از استاد مشاورم، **جناب آقای دکتر عبداللّه آل‌هوز** برای راهنمایی‌ها و یاری بی‌دریغشان صمیمانه سپاسگزارم. در آخر هم از اساتید محترم **جناب آقای دکتر مهدی رضا خورسندی** و **جناب آقای دکتر سیدحیدر جعفری** از اینکه زحمت داوری این پایان‌نامه را تقبل کردند تشکر و قدردانی می‌کنم.

رقیه بالدی

تیرماه ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **رقیه بالدی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مطالعه حلقه‌های نیم‌ـ‌آرمنداریز و برخی توسیع‌های آن** ، تحت راهنمایی **ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رقیه بالدی
تیرماه ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. حلقه‌ی R را $n-$نیم آرمنداریز گوییم، هرگاه برای هر چندجمله‌ای f در حلقه $R[x]$، اگر $f^n = 0$، آن‌گاه حاصلضرب هر n ضریبی (با تکرارهای ممکن) از f برابر با صفر است. حلقه‌ی R را نیم آرمنداریز گوییم، هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت n، حلقه‌ی R، $n-$نیم آرمنداریز باشد. بدیهی است که حلقه‌های نیم آرمنداریز، تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز هستند. در این پایان نامه، ابتدا برخی از حلقه‌های ماتریسی که خاصیت $n-$نیم آرمنداریزی دارند را بررسی می‌کنیم. سپس رابطه‌ی بین حلقه‌های $n-$نیم آرمنداریز با حلقه‌های تقلیل یافته را بررسی می‌کنیم. در واقع نشان می‌دهیم که حلقه‌ی R تقلیل یافته است اگر و فقط اگر حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی R، $n-$نیم آرمنداریز باشد. همچنین ثابت می‌کنیم که حلقه‌ی R، $n-$نیم آرمنداریز است اگر و فقط اگر $R[x]$ چنین باشد. مثال‌های متعددی از حلقه‌های $n-$ نیم آرمنداریز نیز بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی: حلقه‌ی $n-$نیم آرمنداریز، حلقه‌ی نیم آرمنداریز، حلقه‌ی ماتریس بالا مثلثی، حلقه‌ی چندجمله‌ای، حلقه‌ی تقلیل یافته.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به مطالعه‌ی حلقه‌های آرمنداریز و حلقه‌های وابسته به آن می‌پردازیم و مقدمات لازم برای تعاریف و قضایای اساسی و کلیدی این پایان‌نامه را فراهم می‌کنیم. در سراسر این پایان‌نامه حلقه‌ی R را شرکت‌پذیر و یکدار در نظر می‌گیریم، مگر آنکه به‌صراحت خلاف آن بیان شود و منظور از ایده‌آل، ایده‌آل دو طرفه است. مطالب و مباحث این فصل برگرفته از مرجع [۲۳] می‌باشد.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. اگر G یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، یک عمل دوتایی بر G تابعی است چون $* : G \times G \longrightarrow G$ که به هر زوج مرتب (x, y) از اعضای $G \times G$ یک عضو یکتا چون c از G نسبت می‌دهد که آن را با نماد $x * y$ یا xy نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. یک گروه $(G, *)$ عبارت است از یک مجموعه‌ی G همراه با عمل دوتایی $*$ در G به‌طوری‌که اصول زیر برقرار باشند.

۱) عمل دوتایی $*$ شرکت‌پذیر است؛ یعنی، به ازای هر $x, y, z \in G$

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

۲) عضوی چون e در G وجود دارد به‌طوری‌که برای هر x از G،

$$e * x = x * e = x.$$

این عضو e یک عضو همانی G نسبت به عمل $*$ است و منحصر به‌فرد می‌باشد.

۳) برای هر x از G عضوی چون x' از G وجود دارد به‌طوری‌که

$$x' * x = x * x' = e.$$

عضو x' معکوس x نسبت به عمل $*$ است و منحصر به‌فرد می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۱. ساختار جبری $(G, *)$ را که در آن عمل $*$ روی G فقط شرکت‌پذیر باشد، یک نیم‌گروه می‌نامند.

تعریف ۴.۲.۱. نیم‌گروه $(G, *)$ را یک مونوئید می‌نامیم، هرگاه دارای عضو همانی باشد.

تعریف ۵.۲.۱. گروه $(G, *)$ آبلی می‌نامیم، در صورتی که عمل دوتایی $*$ جابه‌جایی باشد؛ یعنی، به ازای هر $x, y \in G$، $x * y = y * x$.

تعریف ۶.۲.۱. یک حلقه $(R, +, \cdot)$ عبارت است از یک مجموعه‌ی ناتهی R همراه با دو عمل دوتایی "$+$" و "$\cdot$" در R به‌طوری‌که اصول زیر برقرار باشند:

۱) مجموعه‌ی R نسبت به عمل "$+$" یک گروه آبلی باشد.

۲) عمل "$\cdot$" شرکت‌پذیر است؛ یعنی، به ازای هر $x, y, z \in R$، $(x \cdot y) \cdot z) = x \cdot (y \cdot z)$.

۳) عمل "$\cdot$" نسبت به عمل "$+$" توزیع‌پذیر است؛ یعنی، به ازای هر $x, y, z \in R$ داشته باشیم:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{و} \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

عمل‌های دوتایی "$+$" و "$\cdot$" را به‌ترتیب جمع و ضرب می‌نامیم.

اگر در حلقه‌ی R عمل دوتایی ضرب دارای خاصیت جابه‌جایی باشد آن را یک حلقه‌ی جابه‌جایی می‌نامیم.

تعریف ۷.۲.۱. حلقه‌ی R را یکدار می‌نامیم، هرگاه نسبت به عمل دوتایی "$\cdot$" عضو همانی داشته باشد، به‌عبارت دیگر، $۱ \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in R$، $x \cdot ۱ = ۱ \cdot x = x$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه یکدار باشد و $x \in R$. گوییم x وارون‌پذیر از چپ است هرگاه $y \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $yx = 1$. متناظراً وارون‌پذیر از راست تعریف می‌شود.

عنصر ناصفر x، را یکه می‌نامیم، هرگاه هم وارون‌پذیر از چپ و هم وارون پذیر از راست باشد. مجموعه‌ی عناصر یکه‌ی حلقه‌ی R با عمل ضرب تشکیل یک گروه می‌دهد، که آن را گروه یکه‌های R می‌نامیم و با نماد $U(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R را یک زیرحلقه‌ی R می‌نامیم، هرگاه S به‌همراه دو عمل دوتایی تعریف شده روی R خود یک حلقه باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. نگاشت $f : R \longrightarrow S$ را یک همریختی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x,y \in R$ داشته باشیم:

۱) $f(x+y) = f(x) + f(y)$،

۲) $f(xy) = f(x)f(y)$،

۳) $f(1_R) = 1_S$.

- همریختی f را بروریختی می‌نامیم، هرگاه f پوشا باشد.
- همریختی f را تکریختی می‌نامیم، هرگاه f یک‌به‌یک باشد.
- همریختی f را یکریختی می‌نامیم، هرگاه f یک‌به‌یک و پوشا باشد.
- همریختی $f : R \longrightarrow R$ را درون‌ریختی R می‌نامیم. در صورتی‌که f یکریختی باشد، آن را خودریختی R می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. عنصر ناصفر x در R را یک مقسوم علیه صفر چپ می‌نامیم، هرگاه عنصر ناصفر y وجود داشته باشد که $xy = 0$. متناظراً مقسوم علیه صفر راست تعریف می‌شود. عنصر $x \in R$، را یک مقسوم علیه صفر می‌نامیم، هرگاه هم مقسوم علیه صفر چپ و هم مقسوم علیه صفر راست باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. حلقه‌ی R را یک دامنه می‌نامیم، هرگاه هیچ مقسوم علیه صفر راست یا چپ ناصفر نداشته باشد. هرگاه دامنه‌ی R جابه‌جایی باشد آن را دامنه‌ی صحیح یا حوزه‌ی صحیح می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. عنصر x از حلقه R را منظم می‌نامیم، هرگاه عنصر x مقسوم علیه صفر نباشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. زیرمجموعه‌ی ناتهی I از R را ایده‌آل چپ (راست) می‌نامیم به‌طوری‌که در اصول زیر صدق کند.

۱) اگر $x, y \in I$، آن‌گاه، $x + y \in I$؛

۲) اگر $x \in I$ و $r \in R$، آن‌گاه، $rx \in I$ $(xr \in I)$.

هرگاه I هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست باشد، به آن یک ایده‌آل دو طرفه یایک ایده‌آل می‌گوییم.

تعریف ۱.۲.۱۵. کوچکترین ایده‌آل حلقه‌ی R که شامل X باشد را ایده‌آل تولید شده توسط X می‌نامیم و با علامت $\langle X\rangle$ نمایش می‌دهیم. اگر $X = \{x\}$ آن‌گاه به‌جای $\langle X\rangle$ از نماد $\langle x\rangle$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد، در این صورت ساختمان $(\frac{R}{I}, +, .)$ یک حلقه است که آن را حلقه‌ی خارج قسمتی می‌نامیم و جمع و ضرب در آن چنین تعریف می‌شوند:

$$(x+I)+(y+I)=(x+y)+I$$

$$(x+I).(y+I)=(x.y)+I$$

که در آن $x, y \in R$، $x + I \in \frac{R}{I}$ و $y + I \in \frac{R}{I}$.

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنیم R یک حلقه باشد. $R[x]$ را حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها با مجهول x روی R می‌نامیم. عناصر $R[x]$ را چندجمله‌ای می‌نامیم و به‌صورت $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i$ نمایش می‌دهیم، که $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$.

اگر $A \subseteq R$ باشد، آن‌گاه، $A[x]$ مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ای‌های در $R[x]$ است به‌طوری‌که همه‌ی ضرایب آن متعلق به A هستند.

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنیم R یک حلقه باشد. مشخصه‌ی حلقه‌ی R را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Char}(R)=\min\{n\in\mathbb{N}:\ \forall r\in R,\ nr=0\}.$$

اگر چنین nی وجود نداشته باشد، مشخصه‌ی حلقه‌ی R را صفر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنیم R یک حلقه و $\mathfrak{p}$ ایده‌آلی از R باشد. $\mathfrak{p}$ را اول می‌نامیم، هرگاه در اصول زیر صدق کند.

۱) $\mathfrak{p} \neq R$؛

۲) برای ایده‌آل‌های $I, J \subseteq R$ اگر $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ آن‌گاه، $I \subseteq \mathfrak{p}$ یا $J \subseteq \mathfrak{p}$.

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Spec}(R)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۲۰.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. برای ایده‌آل $\mathfrak{p}$ گزاره‌های زیر معادلند:*

۱) *$\mathfrak{p}$ اول است.*

۲) *هرگاه $x,y \in R$ و $<x><y> \subseteq \mathfrak{p}$، آن‌گاه، $x \in \mathfrak{p}$ یا $y \in \mathfrak{p}$.*

۳) *هرگاه $x,y \in R$ و $xRy \subseteq \mathfrak{p}$، آن‌گاه، $x \in \mathfrak{p}$ یا $y \in \mathfrak{p}$.*

۴) *هرگاه I و J ایده‌آل‌هایی چپ از R باشند و $IJ \subseteq \mathfrak{p}$، آن‌گاه، $I \subseteq \mathfrak{p}$ یا $J \subseteq \mathfrak{p}$.*

۵) *هرگاه I و J ایده‌آل‌هایی راست از R باشند و $IJ \subseteq \mathfrak{p}$، آن‌گاه، $I \subseteq \mathfrak{p}$ یا $J \subseteq \mathfrak{p}$.*

برهان. به گزاره‌ی ۱۰.۱ از [۱۲] مراجعه شود. ■

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و $\mathfrak{m}$ ایده‌آلی از R باشد. $\mathfrak{m}$ را ماکسیمال می‌نامیم، هرگاه $\mathfrak{m} \subsetneq R$ و ایده‌آلی چون $\mathfrak{q}$ موجود نباشد به‌طوری‌که $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq R$. مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۲۲.۲.۱. *هر ایده‌آل ماکسیمال، اول است.*

برهان. فرض کنیم $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه‌ی R باشد و I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند که مشمول $\mathfrak{m}$ نیستند. در نتیجه $\mathfrak{m}+I = R = \mathfrak{m}+J$، و لذا $R = (\mathfrak{m}+I)(\mathfrak{m}+J) = \mathfrak{m}+IJ$. بنابراین $IJ \nsubseteq \mathfrak{m}$. ■

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنیم حلقه‌ی R ناصفر باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال آن را رادیکال جیکبسون[۱] R می‌نامیم و با نماد $radR$ نشان می‌دهیم. اگر $R = \{0\}$ آن‌گاه، رادیکال جیکبسون آن را صفر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی ناصفر باشد. R را حلقه‌ی موضعی می‌نامیم، هرگاه فقط یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. اگر $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی R باشد، این حلقه را با نماد $(R,\mathfrak{m})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. فرض کنیم S یک زیرمجموعه از R باشد. S را بسته‌ی ضربی می‌نامیم، هرگاه

۱) $1 \in S$ و $0 \notin S$؛

۲) به ازای هر $s_1, s_2 \in S$ داشته باشیم $s_1 s_2 \in S$.

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی حاصل‌ضرب دکارتی $R \times S$ به ازای هر $(x,s),(y,t) \in R \times S$ به صورت

$$(x,s) \sim (y,t) \Longleftrightarrow \exists u \in S : u(xt-ys) = 0$$

تعریف می‌کنیم.

[۱] Jacobson

به آسانی می‌توان نشان داد که $\sim$ یک رابطه‌ای هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

کلاس هم‌ارزی عنصر (x,s) را با نماد $\frac{x}{s}$ و مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم‌ارزی را با نماد $S^{-1}R$ نشان می‌دهیم. عمل جمع و ضرب در $S^{-1}R$ را به ازای هر $x,y \in R$ و $s,t \in S$، به صورت

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt+ys}{st} \quad \text{و} \quad \frac{x}{s}\frac{y}{t} = \frac{xy}{st}$$

تعریف می‌کنیم. $S^{-1}R$ همراه با این عمل جمع و ضرب یک حلقه‌ای جابجایی می‌باشد. این حلقه را حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S می‌نامیم. عضو صفر آن $\frac{0}{1}$ و همانی ضربی آن $\frac{1}{1}$ است.

مثال ۲۷.۲.۱. به ازای هر ایده‌آل اول از R مانند $\mathfrak{p}$، $S = R\backslash\mathfrak{p}$ یک بسته‌ی ضربی است.

قرارداد. فرآیند ایجاد $S^{-1}R$ از R را موضعی‌سازی در S می‌نامیم. اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R و $S = R\backslash\mathfrak{p}$ باشد، آن‌گاه $S^{-1}R$ را موضعی‌سازی R در $\mathfrak{p}$ می‌نامیم و با نماد $R_{\mathfrak{p}}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و I ایده‌آلی از R باشد. رادیکال I را با نماد $\sqrt{I}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N};\ r^n \in I\}$$

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و q ایده‌آلی از R باشد. q را اولیه می‌نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

۱) $\mathfrak{q} \neq R$؛

۲) برای هر $x,y \in R$ اگر $xy \in \mathfrak{q}$، آن‌گاه، $x \in \mathfrak{q}$ یا $y \in \sqrt{\mathfrak{q}}$.

ملاحظه ۳۰.۲.۱. *هر ایده‌آل اول، اولیه است ولی عکس آن درست نیست.*

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنیم $\mathfrak{q}$ یک ایده‌ال اولیه از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $\mathfrak{q}$ را $\mathfrak{p}$–اولیه می‌نامیم، هرگاه $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$.

تعریف ۳۲.۲.۱. عنصر x از حلقه‌ی R را پوچ‌توان می‌نامیم، هرگاه عدد صحیح مثبتی مانند n موجود باشد به‌طوری‌که $x^n = 0$. مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی R را با نماد $N(R)$ نشان می‌هیم.

تعریف ۳۳.۲.۱. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را پوچ می‌نامیم، هرگاه هر عنصر آن پوچ‌توان باشد؛ ایده‌آل I پوچ‌توان است هرگاه عدد صحیح n موجود باشد به‌طوری‌که $I^n = 0$.

تعریف ۳۴.۲.۱. حلقه‌ی R را اول می‌نامیم، هرگاه ایده‌آل $\{0\}$ اول باشد.

تعریف ۳۵.۲.۱. ایده‌آل P از حلقه‌ی R را کاملاً اول می‌نامیم، هرگاه $a,b \in R$ و $ab \in P$، آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$. واضح‌است که هر ایده‌آل کاملاً اول، اول است.

۳.۱ رادیکال‌های حلقه R

در این بخش رادیکال پوچ پایینی (رادیکال اول)، رادیکال پوچ بالایی، و ایده‌آل‌های اول و کاملاً اول را معرفی کرده و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R را یک $m-$سیستم می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b \in S$ عنصر $r \in R$ وجود داشته باشد که $arb \in S$.

واضح است که هر زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از حلقه‌ی R یک $m-$سیستم است، اما عکس آن درست نیست. برای مثال، اگر $a \in R$ آن‌گاه، $\{۱, a, a^۲, a^۴, \cdots\}$ یک $m-$سیستم است، اما بسته ضربی نیست.

نتیجه ۲.۳.۱. *فرض کنیم P ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت P اول است اگر و فقط اگر $R\backslash P$ یک $m-$سیستم باشد.*

برهان. بدیهی است. ■

تعریف ۳.۳.۱. زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R را یک $n-$سیستم می‌نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، عنصر $r \in R$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که $srs \in S$.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم A ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. رادیکال A را که به $\sqrt{A}$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{A} = \{s \in S : \text{هر } m-\text{سیستمی که شامل } s \text{ باشد اشتراک ناتهی با } A \text{ داشته باشد}\}.$$

قضیه ۵.۳.۱. *فرض کنیم A ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $\sqrt{A}$ با اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول شامل A برابر است. به‌ویژه $\sqrt{A}$ یک ایده‌آل است.*

برهان. به قضیه ۷.۱.۲ از [۲۳] مراجعه شود. ■

تعریف ۶.۳.۱. رادیکال پوچ پایینی (یا رادیکال اول) حلقه‌ی R را $P(R)$ یا $N_*(R)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم $P(R) = \sqrt{\{۰\}}$.

می‌دانیم که $P(R)$ پوچ است و با اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R برابر است.

تعریف ۷.۳.۱. مجموع تمام ایده‌آل‌های پوچ حلقه‌ی R را رادیکال پوچ بالایی می‌نامیم و با $N^*(R)$ نشان می‌دهیم.

واضح است که $N^*(R)$ بزرگترین ایده‌آل پوچ حلقه‌ی R است و

$$N^*(R) = \{a \in R : \langle a \rangle \text{پوچ است}\}.$$

تعریف ۸.۳.۱. حلقه‌ی R را NI می‌نامیم، هرگاه $N(R) = N^*(R)$.

تعریف ۹.۳.۱. ایده‌آل اول P از حلقه R را مینیمال گوییم، هرگاه یک عضو مینیمال مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول R باشد.

تعریف ۱۰.۳.۱. حلقه‌ی اول R را قویاً اول گوییم، هرگاه هیچ ایده‌آل ناصفر پوچ نداشته باشد. ایده‌آل سره P از حلقه‌ی R را قویاً اول می‌نامیم، هرگاه حلقه‌ی $\frac{R}{P}$ قویاً اول باشد. ایده‌آل P از حلقه‌ی R را قویاً اول مینیمال می‌نامیم، هرگاه P در بین ایده‌آل‌های قویاً اول، مینیمال باشد.

واضح است که هر ایده‌آل کاملاً اول، اول است و هر ایده‌آل قویاً اول، اول است.

تعریف ۱۱.۳.۱. حلقه‌ی R را تقلیل یافته می‌نامیم، هرگاه هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری نداشته باشد.

لم ۱۲.۳.۱. *فرض کنیم $\{r_۱, r_۲, \cdots, r_n\}$ زیرمجموعه‌ای از حلقه‌ی تقلیل یافته‌ی R باشد، به‌طوری‌که $r_۱r_۲\cdots r_n = ۰$ و $\sigma \in S_n$. در این صورت $r_{\sigma(۱)}r_{\sigma(۲)}\cdots r_{\sigma(n)} = ۰$.*

برهان. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. برای $n = ۲$ به‌وضوح برقرار است. فرض کنیم $n = ۳$. اگر $\sigma = (۱\ ۲\ ۳)$، آن‌گاه، از این‌که $r_۱r_۲r_۳ = ۰$، نتیجه می‌گیریم:

$$(r_۳r_۱r_۲)^۲ = r_۳r_۱r_۲r_۳r_۱r_۲ = ۰,$$

و چون R تقلیل یافته است، از این‌رو $r_۳r_۱r_۲ = ۰$. چون هر جایگشت از $S_۳$ ترکیبی از ترانهش‌هاست، لذا برای هر $\sigma \in S_۳$ داریم:

$$r_{\sigma(۱)}r_{\sigma(۲)}r_{\sigma(۳)} = ۰.$$

حال فرض کنیم $n > ۳$. چون $S_n = \langle (۱\ ۲)(۱\ ۲\ ۳\ldots n) \rangle$، لذا با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری R، نتیجه می‌گیریم که برای هر $\sigma \in S_n$، $r_{\sigma(۱)}r_{\sigma(۲)}\cdots r_{\sigma(n)} = ۰$. ■

۴.۱ حلقه‌های آرمنداریز

تعریف ۱.۴.۱. حلقه R، را آرمنداریز[۲] می‌نامیم، هرگاه $f(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots + a_mx^m$ و $g(x) = b_۰ + b_۱x + b_۲x^۲ + \cdots + b_nx^n$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = ۰$، آن‌گاه برای هر i, j، $a_ib_j = ۰$.

گزاره ۲.۴.۱. *رده‌ی حلقه‌های آرمنداریز تحت زیرحلقه‌ها بسته است.*

برهان. از تعریف به‌دست می‌آید. ■

لم ۳.۴.۱. *هر حلقه‌ی تقلیل یافته، آرمنداریز است.*

[۲] Armendariz

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R تقلیل یافته باشد و $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum\limits_{j=0}^{n}b_jx^j$ دو عضو از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. با استفاده از استقرا روی $m+n$ لم را ثابت می‌کنیم. اگر $m+n=1$، آن‌گاه، نتیجه حاصل است. فرض کنیم $m+n>1$ و $a_m\neq 0\neq b_n$. چون $f(x)g(x)=0$ و R تقلیل یافته است، پس $b_na_m=a_mb_n$ در نتیجه: $b_nf(x)g(x)=(\sum\limits_{i=0}^{m-1}b_na_ix^i)(\sum\limits_{j=0}^{n}b_jx^j)=0$ و با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر $0\leq i\leq m-1$ و $0\leq j\leq n$، $b_na_ib_j=0$ و چون R تقلیل یافته است، از این‌رو برای هر $0\leq i\leq m-1$، $b_na_i=0=a_ib_n$. پس: $(\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i)(\sum\limits_{j=0}^{n-1}b_jx^j)=0$ و با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر $0\leq i\leq m$ و $0\leq j\leq n-1$، $a_ib_j=0$. ■

لم ۴.۴.۱. *فرض کنیم S یک حلقه باشد و برای هر $i\geq 1$، R_i زیرحلقه‌ای آرمنداریز از S باشد و $1_{R_i}=1_S$. اگر $R_1\subseteq R_2\subseteq\cdots$ و $S=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R_i$، آن‌گاه S آرمنداریز است.*

برهان. به لم ۱۱.۱.۴ از [۲۳] مراجعه شود. ■

نمادگذاری. فرض کنیم R یک حلقه و n عددی صحیح و مثبت باشد. فرض کنیم $\mathrm{Mat}_n(R)$ نمایانگر حلقه‌ی ماتریس $n\times n$ روی R و I_n نمایانگر ماتریس همانی $\mathrm{Mat}_n(R)$ باشد. همچنین $U_n(R)$ و $L_n(R)$ به‌ترتیب نمایانگر حلقه‌ی ماتریس $n\times n$ بالا مثلثی و حلقه‌ی ماتریس پایین مثلثی روی R است. همچنین E_{ij} نمایانگر ماتریس $n\times n$ که درایه‌ی (i,j)–ام آن ۱ و سایر درایه‌ها صفر است. تعریف می‌کنیم:

$$D_n(R)=\{M\in U_n(R)|\text{درایه‌های قطر اصلی } M \text{ با هم برابر هستند}\}.$$

تعریف می‌کنیم $RA=\{rA|r\in R\}$ برای $A\in\mathrm{Mat}_n(R)$ و $V=\sum\limits_{i=1}^{n-1}E_{i(i+1)}\in U_n(R)$.

توجه داریم که $\dfrac{R[x]}{<x^n>}$ با حلقه‌ی $RI_n+RV+\cdots+RV^{n-1}$ به‌عنوان زیرحلقه‌ای از $UT_n(R)$ یکریخت است.

مثال ۵.۴.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $n\geq 2$. در این‌صورت حلقه‌ی ماتریس‌های $n\times n$ بالا مثلثی روی R آرمنداریز نیست.

حل. چون هر زیرحلقه از حلقه‌ی آرمنداریز، آرمنداریز است، لذا کافیست نشان دهیم حلقه‌ی ماتریس‌های 2×2 بالا مثلثی روی R آرمنداریز نیست، فرض کنیم $S=UT_2(R)$. دو عنصر

$$f(x)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}x \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}x$$

از $S[x]$ را در نظر می‌گیریم. چون $f(x)g(x)=0$، اما $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\neq 0$، پس S آرمنداریز نیست. بنابراین: $UT_n(R)$ آرمنداریز نیست.

مثال ۶.۴.۱. تصویر همریخت حلقه‌ی آرمندرایز، لزوماً آرمندرایز نیست.

حل. حلقه‌ی $\frac{Z}{۸Z} \oplus \frac{Z}{۸Z}$ را در نظر می‌گیریم. مربع چندجمله‌ای $f(x) = (\bar{۴}, \bar{۰}) + (\bar{۴}, \bar{۱})x$ از حلقه‌ی $(\frac{Z}{۸Z} \oplus \frac{Z}{۸Z})[x]$ صفر است اما $(\bar{۴}, \bar{۰})(\bar{۴}, \bar{۱}) \neq ۰$. حلقه‌ی $\frac{Z}{۸Z} \oplus \frac{Z}{۸Z}$ تصویر همریخت حلقه‌ی آرمندرایز $Z \oplus \frac{Z}{۸Z}$ است. اما خودش آرمندرایز نیست.

گزاره بعد نشان می‌دهد که ممکن است بتوان زیرحلقه‌هایی آرمندرایز از حلقه‌ی ماتریس‌های ۳×۳ بالا مثلثی پیدا نمود.

گزاره ۷.۴.۱. *فرض کنیم حلقه‌ی R تقلیل یافته باشد. در این صورت:*

$$D_۳(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & a & d \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix} | a, b, c, d \in R \right\}$$

آرمندرایز است.

برهان. توجه داریم که هر عنصر از $D_۳(R)$ را می‌توان به فرم (a, b, c, d) نیز نشان داد. پس برای هر $(a_۱, b_۱, c_۱, d_۱), (a_۲, b_۲, c_۲, d_۲) \in D_۳(R)$ می‌توان جمع و ضرب را چنین تعریف نمود:

$$(a_۱, b_۱, c_۱, d_۱) + (a_۲, b_۲, c_۲, d_۲) = (a_۱ + a_۲, b_۱ + b_۲, c_۱ + c_۲, d_۱ + d_۲)$$

و

$$(a_۱, b_۱, c_۱, d_۱)(a_۲, b_۲, c_۲, d_۲) = (a_۱a_۲, a_۱b_۲ + b_۱a_۲, a_۱c_۲ + b_۱d_۲ + c_۱a_۲, a_۱d_۲ + d_۱a_۲).$$

در نتیجه، هر چندجمله‌ای از $D_۳(R)[x]$ را می‌توان به شکل $(p_۰(x), p_۱(x), p_۲(x), p_۳(x))$ نشان داد که برای هر i، $p_i(x) \in R[x]$. فرض کنیم $f(x) = (f_۰(x), f_۱(x), f_۲(x), f_۳(x))$ و $g(x) = (g_۰(x), g_۱(x), g_۲(x), g_۳(x))$ دو عضو از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = ۰$. در نتیجه:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f_۰(x)g_۰(x), f_۰(x)g_۱(x) + f_۱(x)g_۰(x), f_۰(x)g_۲(x) + f_۱(x)g_۳(x) \\ &\quad + f_۲(x)g_۰(x), f_۰(x)g_۳(x) + f_۳(x)g_۰(x)) = ۰ \end{aligned}$$

پس:

$$f_۰(x)g_۰(x) = ۰ \quad (۱.۱)$$

$$f_۰(x)g_۱(x) + f_۱(x)g_۰(x) = ۰ \quad (۲.۱)$$

$$f_۰(x)g_۲(x) + f_۱(x)g_۳(x) + f_۲(x)g_۰(x) = ۰ \quad (۳.۱)$$

$$f_۰(x)g_۳(x) + f_۳(x)g_۰(x) = ۰ \quad (۴.۱)$$

از این که $R[x]$ تقلیل یافته است استفاده می‌کنیم، بدون این‌که آن را ذکر کنیم. از (۱.۱) نتیجه می‌گیریم: $g_\circ(x)f_\circ(x)=\circ$. اگر $f_\circ(x)$ را از راست در (۲.۱) ضرب کنیم، آن‌گاه: $f_\circ(x)g_1(x)=\circ$ و لذا $f_1(x)g_\circ(x)=\circ$. همچنین اگر $f_\circ(x)$ را از راست در (۴.۱) ضرب کنیم، نتیجه می‌گیریم: $f_\circ(x)g_3(x)=\circ$ و لذا $f_3(x)g_\circ(x)=\circ$. حال اگر $f_\circ(x)$ را از راست در (۳.۱) ضرب کنیم، آن‌گاه: $f_\circ(x)g_2(x)=\circ$ و از این‌رو:

$$f_1(x)g_3(x)+f_2(x)g_\circ(x)=\circ. \tag{۵.۱}$$

اگر $f_1(x)$ را از راست در (۵.۱) ضرب کنیم، آن‌گاه: $f_1(x)g_3(x)=\circ$ و لذا $f_2(x)g_\circ(x)=\circ$.
قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\sum_{i=\circ}^{n}\begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \circ & a_i & d_i \\ \circ & \circ & a_i \end{bmatrix}x^i \quad \text{و} \quad g(x)=\sum_{j=\circ}^{m}\begin{bmatrix} a'_j & b'_j & c'_j \\ \circ & a'_j & d'_j \\ \circ & \circ & a'_j \end{bmatrix}x^j$$

که

$$f_\circ(x)=\sum_{i=\circ}^{n}a_ix^i,\quad f_1(x)=\sum_{i=\circ}^{n}b_ix^i,\quad f_2(x)=\sum_{i=\circ}^{n}c_ix^i,\quad f_3(x)=\sum_{i=\circ}^{n}d_ix^i,$$
$$g_\circ(x)=\sum_{j=\circ}^{m}a'_jx^j,\quad g_1(x)=\sum_{j=\circ}^{m}b'_jx^j,\quad g_2(x)=\sum_{j=\circ}^{m}c'_jx^j,\quad g_3=(x)\sum_{j=\circ}^{m}d'_jx^j.$$

پس برای هر i و j، $a_ia'_j=\circ$، $a_ib'_j=\circ$، $b_ia'_j=\circ$، $a_ic'_j=\circ$، $b_id'_j=\circ$، $c_ia'_j=\circ$، $a_id'_j=\circ$ و $d_ia'_j=\circ$. بنابراین برای هر i و j، $\begin{bmatrix} a'_j & b'_j & c'_j \\ \circ & a'_j & d'_j \\ \circ & \circ & a'_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \circ & a_i & d_i \\ \circ & \circ & a_i \end{bmatrix}$ و لذا S آرمندآریز است. ■

گزاره ۸.۴.۱. *فرض کنیم حلقه‌ی R آرمندآریز باشد و $f_1,\dots,f_n\in R[x]$. اگر $f_1f_2\cdots f_n=\circ$، آن‌گاه، $a_1\cdots a_n=\circ$، که برای هر i، $a_i\in C_f$.*

برهان. فرض کنیم $a_1\in C_{f_1}$. چون $f_1(f_2\cdots\cdots_n)=\circ$، پس برای هر $b\in C_{f_1\cdots f_n}$، $a_1b=\circ$. بنابراین $a_1f_2\cdots f_n=\circ$ و لذا $(a_1f_2)(f_3\cdots f_n)=\circ$. چون $a_1a_2\in C_{a_1f_2}$، پس برای هر $c\in C_{f_2}$، $(a_1a_2)c=\circ$. بنابراین $a_1a_2f_3\cdots f_n=\circ$. با ادامه این روند، نتیجه می‌گیریم $a_1a_2\dots a_n=\circ$. ■

لم ۹.۴.۱. *اگر حلقه‌ی R آرمندآریز باشد، آن‌گاه $N(R)[x]\subseteq N(R[X])$.*

برهان. فرض کنیم $f=a_\circ+a_1x+\cdots+a_nx^n\in N(R)[x]$. عدد صحیح مثبت k وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $a_i^k=\circ$ ، $i=\circ,1\cdots,n$. نشان می‌دهیم $(f(x))^{(n+1)k}=\circ$. هر ضریب از $(f(x))^{(n+1)k}$ مجموعی از تک‌جمله‌ای‌هایی براساس $(n+1)k$ از a_iهاست. فرض

کنیم $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i(n+1)k}$ یکی از این تک‌جمله‌ای‌ها باشد که $0 \leq i_j \leq n$. عدد $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که a_j حداقل k بار در این تک‌جمله‌ای ظاهر شده است. فرض کنیم $a_{i_{r_1}} = a_{i_{r_2}} = \cdots = a_{i_k} = a_j$، که $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots r_k \leq (n+1)k$. تک‌جمله‌ای فوق را می‌توان به شکل $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{r_1-1}}a_j a_{i_{r_1+1}}a_{i_{r_2-1}}a_j\cdots a_{i_{r_k-1}}a_j a_{i_{r_k+1}}\cdots a_{i_{(n+1)k}}$ نوشت. برای هر $i_s \neq i_{r_1}$، قرار می‌دهیم: $f'_{i_s}(x) = 1 - a_{i_s}x$ و $f''_{i_s}(x) = 1 + a_{i_s}x + \cdots a_{i_s}^{k-1}x^{k-1}$. به‌وضوح a_{i_s} یکی از ضرایب $f'_{i_s}(x)f''_{i_s}(x) = 1$ است و $f'_{i_s}(x)f''_{i_s}(x)$. چون $a_i^k = 0$ و $f'_{i_s}(x)f''_{i_s}(x) = 1$ پس اگر در تک‌جمله‌ای فوق به‌جای a_{i_s} از $f'_{i_s}(x)f''_{i_s}(x)$ استفاده کنیم، آن‌گاه:

$$f'_{i_1}(x)f''_{i_1}(x)\cdots f'_{i_{r_1-1}}(x)f''_{i_{r_1-1}}(x)a_j f'_{i_{r_1+1}}(x)\cdots f'_{i_{r_k-1}}(x)f''_{i_{r_k-1}}(x)a_j f'_{i_{r_k+1}}(x)\cdots f''_{i_{(n+1)k}}(x) = 0$$

از این‌که R آرمنداریز است با استفاده از لم ۸.۴.۱ نتیجه می‌گیریم حاصل‌ضرب ضرایب چندجمله‌ای‌های ظاهر شده در عبارت فوق صفر هستند. در نتیجه: $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{(n+1)k}} = 0$ و لذا تمام ضرایب $(f(x))^{(n+1)k}$ صفر هستند. بنابراین: $f(x) \in N(R)[x]$. ■

حلقه‌هایی که در زیر معرفی می‌کنیم به‌عنوان تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز می‌باشند و اکثر روابطی که در حلقه‌های آرمنداریز برقرار هستند، با این تعریف نیز حفظ می‌شوند.

تعریف ۱۰.۴.۱. حلقه‌ای را پوچ‌ـآرمنداریز می‌نامیم، هرگاه $f(x), g(x) \in R[x]$ و $f(x)g(x) \in N(R)[X]$ و $a \in C_f$ و $b \in C_g$، که C_f مجموعه ضرایب f و C_g مجموعه ضرایب g است، آن‌گاه ab پوچ‌توان باشد.

قضیه ۱۱.۴.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد به‌طوری‌که $N(R) \lhd R$. اگر $f(x)g(x) \in N(R)[X]$ و $a \in C_f$ و $b \in C_g$، آن‌گاه $ab \in N(R)$.*

برهان. چون $\frac{R}{N(R)}$ تقلیل یافته است، پس آرمنداریز است. فرض کنیم $f(x)g(x) \in N(R)[X]$ اگر چندجمله‌ای‌های متناظر با $f(x), g(x)$، در حلقه‌ی $\frac{R}{N(R)}[x]$ را به ترتیب با $\bar{f}(x), \bar{g}(x)$ نشان دهیم، آن‌گاه $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = 0$ ازاین‌رو $\frac{R}{N(R)}$ آرمنداریزاست، نتیجه می‌گیریم اگر $\bar{a} \in C_{\bar{f}}$ $\bar{b} \in C_{\bar{g}}$، آن‌گاه $\bar{a}\bar{b} = 0$ در نتیجه برای هر $a \in C_f$ و $b \in C_g$، ab پوچتوان است. ■

گزاره ۱۲.۴.۱. *هر حلقه‌ی آرمنداریز، پوچ‌ـآرمنداریز است.*

برهان. به گزاره‌ی ۶.۵.۵ از [۲۳] مراجعه شود. ■

لم ۱۳.۴.۱. *فرض کنیم حلقه‌ی R پوچ‌ـآرمنداریز باشد و $a, b, c \in R$. در این صورت:*

۱) *اگر a و b پوچ‌توان باشند، آن‌گاه، ab پوچ‌توان است.*

۲) *اگر a، b و c پوچ‌توان باشند، آن‌گاه، $(a+b)c$ و $c(a+b)$ پوچ‌توان هستند.*

۳) *اگر a، b و c پوچ‌توان باشند، آن‌گاه، $a+bc$ پوچ‌توان است.*

۴) *اگر a و b پوچ‌توان باشند، آن‌گاه، $a-b$ پوچ‌توان است.*

برهان. (۱). فرض کنیم a و b پوچ‌توان باشند و $b^m = 0$. در نتیجه:

$$(a - abx)(1 + bx + b^2x + \cdots + b^{m-1}x^{m-1}) = a \in N(R)[x]$$

و چون R پوچ_آرمنداریز است، از این‌رو ab پوچ‌توان است.
(۲). فرض کنیم a، b و c پوچ‌توان باشند و $a^n = b^m = 0$. در نتیجه:

$$(1 + ax + \cdots + a^{n-1}x^{n-1})(1 - ax)(1 - bx)(1 - bx + \cdots + b^{m-1}x^{m-1})c = c \in N(R)[x]$$

و لذا

$$(1 + \cdots + a^{n-1}x^{n-1})(1 - (a+b)x + abx^2)(1 + \cdots + b^{m-1}x^{m-1})c = c \in N(R)[x]$$

چون R پوچ_آرمنداریز است، بنابر گزاره‌ی ۸.۴.۱ با انتخاب ضرایب مناسبی از چندجمله‌ای‌های فوق نتیجه می‌گیریم $(a+b)c$ پوچ‌توان است. به‌همین نحو می‌توان نشان داد که $c(a+b)$ پوچ‌توان است.
(۳). فرض کنیم a، b و c پوچ‌توان باشند، بنابر (۱) و (۲)، bc و $b(a+bc)$ پوچ‌توان هستند. در نتیجه:

$$(1 - bx)(c + (a+bc)x) = c + ax - b(a+bc)x^2 \in N(R)[x]$$

و چون R پوچ_آرمنداریز است، از این‌رو $1 \cdot (a+bc) = a+bc$ پوچ‌توان است.
(۴). فرض کنیم a و b پوچ‌توان باشند. چون a، a^2 و $-b$ پوچ‌توان هستند، اگر از (۳) چند بار استفاده کنیم، نتیجه می‌گیریم a^2-ab و $a^2-ab-ba$ پوچ‌توان هستند و لذا $a^2-ab-ba+a^2$ پوچ‌توان است. بنابراین $(a-b)^2$ پوچ‌توان است و در نتیجه $a-b$ پوچ‌توان است. ■

قضیه ۱۴.۴.۱. *اگر حلقه‌ی R پوچ_آرمنداریز باشد، آن‌گاه $N(R)$ زیرحلقه‌ای از R است.*

برهان. از لم ۱۳.۴.۱ نتیجه می‌شود. ■

نتیجه ۱۵.۴.۱. *اگر حلقه‌ی R آرمنداریز باشد، آن‌گاه $N(R)$ زیرحلقه‌ای از R است.*

اگر حلقه‌ی R پوچ_آرمنداریز باشد، آن‌گاه $N(R)$ زیرحلقه‌ی R است و لذا هر ایده‌آل چپ (راست) پوچ از حلقه‌ی R در یک ایده‌آل پوچ قرار می‌گیرد. بنابراین تمام ایده‌آل‌های چپ (راست) پوچ R زیرمجموعه‌ی $N_r(R)$ هستند.

لم ۱۶.۴.۱. *فرض کنیم حلقه‌ی R پوچ_آرمنداریز باشد و هیچ ایده‌آل پوچ ناصفر نداشته باشد. در این صورت R، آرمنداریز است.*

برهان. چون Rـ پوچ آرمنداریز است، به استناد توضیحات پاراگراف قبل، R هیچ ایده‌آل راست (چپ) پوچ ناصفر ندارد. حال فرض کنیم $f(x), g(x) \in R[x]$، $f(x)g(x) = 0$، $a \in C_f$، $b \in C_g$ و $r \in R$. چون $rf(x)g(x) = 0$، $ra \in C_{rf}$ و R پوچ‌ـآرمنداریز است، از این رو rab پوچ توان است. در نتیجه Rab یک ایده‌آل چپ پوچ است. پس $Rab = \{0\}$ و لذا $ab = 0$. بنابراین R آرمنداریز است. ■

لم ۱۷.۴.۱. *هرگاه حلقه‌ی R پوچ‌ـآرمنداریز باشد، آن‌گاه* $N(R[X]) \subseteq N(R)[x]$.

برهان. به لم ۱۴.۵.۵ از [۲۳] مراجعه شود. ■

ممکن است این سوال پیش بیاید که اگر حلقه یکدار نباشد، آیا این تعاریف برقرار هستند. پاسخ؛ بله. اما بسیاری از مطالبی که در مورد حلقه‌های آرمنداریز و پوچ‌ـآرمنداریز اثبات شده است به‌وجود عنصر یک وابسته است. در هر صورت هر حلقه‌ی آرمنداریز، پوچ‌ـآرمنداریز است.

۵.۱ حلقه‌های آرمنداریز و آبلی

تعریف ۱.۵.۱. حلقه‌ی R را آبلی می‌نامیم، هرگاه هر عنصر خودتوان آن مرکزی باشد.

لم ۲.۵.۱. *فرض کنیم حلقه‌ی R آرمنداریز باشد و* $a, b, c \in R$.

۱) *هرگاه n عددی صحیح و مثبت باشد و $ac^n b = 0$، آن‌گاه* $acb = 0$.

۲) *هرگاه $ab = 0$ و برای عدد صحیح مثبت n، c^n مرکزی باشد، آن‌گاه* $acb = 0$.

برهان. (۱) چندجمله‌ای‌های $f(x) = a(1 - cx)$ و $g(x) = (1 + cx + \cdots + c^{n-1}x^{n-1})b$ را در نظر می‌گیریم. چون R آرمنداریز است و $f(x)g(x) = 0$، پس $acb = 0$.
(۲) چون $ac^n b = 0$، لذا با استفاده از (۱) نتیجه حاصل می‌شود. ■

نتیجه ۳.۵.۱. *هر حلقه‌ی آرمنداریز، آبلی است.*

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R آرمنداریز باشد و $e = e^2 \in R$ و $r \in R$. قرار می‌دهیم: $a = e$، $b = 1 - e$ و $c = er(1 - e)$. در نتیجه: $ab = 0$ و $c^2 = 0$ و لذا بنابر لم ۱ – ۴ – ۲، $acb = 0$. به همین نحو، اگر $a_1 = 1 - e$، $b_1 = e$ و $c_1 = (1 - e)re$، آن‌گاه: $a_1c_1b_1 = 0$. بنابراین e مرکزی است. ■

گزاره ۴.۵.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی آبلی باشد به‌طوری‌که ایده‌آل صفر آن، Pـاولیه است و* $P^2 = 0$. *در این صورت R آرمنداریز است.*

برهان. فرض کنیم $f = a_\circ + a_1X + \cdots + a_nX^n, g = b_\circ + b_1X + \cdots + b_mX^m \in R[X]$ که $fg = \circ$. دو حالت به وجود می‌آید: (حالت اول) $f = \circ$ یا $g = \circ$، آن‌گاه $a_ib_j = \circ$. (حالت دوم) $f \neq \circ$ و $g \neq \circ$، آن‌گاه f و g هر دو مقسوم علیه صفر در $R[X]$ می‌باشد. چون صفر در R، P–اولیه است لذا صفر $P[X]$–اولیه در $R[X]$ است در نتیجه $P[X]$ مجموعه مقسوم علیه‌های صفر از $R[X]$ می‌باشد. بنابراین $f, g \in P[X]$ و از این‌رو $a_i, b_j \in P$، بنابراین $a_ib_j \in P^2 = \circ$، لذا R آرمنداریز است.

■

گزاره ۵.۵.۱. *گزاره‌های زیر بر حلقه‌ی آبلی معادلند:*

۱) *R آرمنداریز است؛*

۲) *برای هر خودتوان $e \in R$، حلقه‌های eR و $(1-e)R$ آرمنداریز هستند؛*

۳) *خودتوان $e \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که حلقه‌های eR و $(1-e)R$ آرمنداریز هستند.*

برهان. (۱)$\Longrightarrow$ (۲) $\Longrightarrow$ (۳) بدیهی است.
(۳)$\Longrightarrow$(۱). فرض کنیم $f(x) = \sum\limits_{i=\circ}^{m} a_ix^i$ و $g(x) = \sum\limits_{j=\circ}^{n} b_jx^j$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = \circ$. فرض کنیم $e^2 = e \in R$. اگر $f_1(x) = ef(x)$، $f_2(x) = (1-e)f(x)$، $g_1(x) = eg(x)$ و $g_2(x) = (1-e)g(x)$ آن‌گاه: $f(x)g(x) = f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)$ و لذا $f_1(x)g_1(x) = ef(x)g(x) = \circ$ و $f_2(x)g_2(x) = (1-e)f(x)g(x) = \circ$. در نتیجه برای هر i, j، $a_ib_je = \circ$ و $a_ib_j(1-e) = \circ$ و لذا $a_ib_j = \circ$. بنابراین R آرمنداریز است. ■

قضیه ۶.۵.۱. *فرض کنیم I ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. اگر حلقه‌ی I تقلیل یافته و $\frac{R}{I}$ آرمنداریز باشد، آن‌گاه R آرمنداریز است.*

برهان. فرض کنیم $a, b \in R$ و $ab = \circ$. چون I تقلیل یافته است و $bIa \subseteq I$ و $(bIa)^2 = \circ$، پس $bIa = \circ$. فرض کنیم $f(x) = \sum\limits_{i=\circ}^{m} a_ix^i$ و $g(x) = \sum\limits_{j=\circ}^{n} b_jx^j$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = \circ$. چون $\frac{R}{I}$ آرمنداریز است، پس برای هر i و j، $a_ib_j \in I$. از استقرا روی m استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم برای هر i و j، $a_ib_j = \circ$. برای $m = \circ$ نتیجه به‌وضوح حاصل است. فرض کنیم $m > \circ$. ادعا کنیم برای هر $j \in \{\circ, 1, \ldots, n\}$، $a_\circ b_j = \circ$. فرض کنیم $1 \leq k < m$ و برای هر $j \in \{\circ, \ldots, k-1\}$، $a_\circ b_j = \circ$. در نتیجه $b_jIa_\circ = \circ$ و از این رو،

$$(a_{k-j}b_j)(a_\circ b_k)^2 = a_{k-j}b_j(a_\circ b_k)a_\circ b_k \in a_{k-j}b_jIab_k = a_{k-j}(b_jIa_\circ)b_k = \circ$$

عنصر

$$\circ = a_\circ b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_\circ = a_\circ b_k + \sum_{j=\circ}^{k-1} a_{k-j}b_j$$

ضریب x^k در چندجمله‌ای $f(x)g(x) = 0$ است. اگر $(a_0b_k)^2$ را از راست در ضریب x^k ضرب کنیم، آن‌گاه:

$$0 = \left(a_0b_k + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k-j}b_j\right)(a_0b_k)^2 = (a_0b_k)^3.$$

چون I تقلیل یافته است و $a_0b_k \in I$. از این رو، $a_0b_k = 0$. در نتیجه برای هر $j \in \{0, 1, \dots, n\}$، $a_0b_j = 0$ و لذا $f(x)g(x) = 0$. که $f_1(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_mx^{m-1}$. چون $\deg(f_1(x)) < m$، با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر $1 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_ib_j = 0$. بنابراین برای هر i و j، $a_ib_j = 0$. ■

فرض کنیم $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n \in R[x]$. مجموعه‌ی ضرایب $f(x)$ در حلقه‌ی R را با C_f نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۵.۷. *حلقه‌ی R آرمنداریز است اگر و فقط اگر $R[x]$ آرمنداریز باشد.*

برهان. اگر $R[x]$ آرمنداریز باشد، آن‌گاه R زیرحلقه‌ای آرمنداریز از آن است. حال فرض کنیم R آرمنداریز باشد و $f(t), g(t) \in R[x][t]$ و $f(t)g(t) = 0$. قرار می‌دهیم: $f(t) = f_0 + f_1t + \dots + f_nt^n$ و $g(t) = g_0 + g_1t + \dots + g_mt^m$، که $f_i, g_i \in R[x]$. نشان می‌دهیم برای هر i و j، $f_ig_i = 0$. قرار می‌دهیم:

$$k = \deg f_0 + \deg f_1 + \dots + \deg f_n + \deg g_0 + \dots + \deg g_m$$

که $\deg$ نمایانگر درجه‌ی یک چندجمله‌ای است و درجه‌ی تمام چندجمله‌ای‌های ثابت را صفر در نظر می‌گیریم. چندجمله‌ای‌های $f(x^k) = f_0 + f_1x^k + \dots + f_nx^{kn}$ و $g(x^k) = g_0 + g_1x^k + \dots + g_mx^{km}$ در $R[x]$ قرار دارند و مجموعه‌ی ضرایب تمام f_iها و مجموعه‌ی ضرایب تمام g_iها به‌ترتیب با مجموعه‌ی ضرایب $f(x^k)$ و $g(x^k)$ برابر هستند. چون $f(t)g(t) = 0$ و x با تمام عناصر R جابه‌جا می‌شود، لذا $f(x^k)g(x^k) = 0$. از این که R آرمنداریز است، نتیجه می‌گیریم حاصل‌ضرب هر کدام از ضرایب f در هر کدام از ضرایب g صفر است. بنابراین $f_ig_i = 0$ و لذا $R[x]$ آرمنداریز است. ■

قضیه ۱.۵.۸. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $n \geq 2$. در این صورت R تقلیل یافته است اگر و فقط اگر $\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ آرمنداریز باشد.*

برهان. فرض کنیم $\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ آرمنداریز باشد، $r \in R$ و $r^n = 0$. چون r و $\overline{x}$ جابه‌جا می‌شوند، پس $0 = r^n - \overline{x}^nt^n = (r - \overline{x}t)(r^{n-1} + r^{n-2}\overline{x}t + \dots + \overline{x}^{n-1}t^{n-1})$. از این که $\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ آرمنداریز است، نتیجه می‌گیریم: $r\overline{x}^{n-1} = 0$ و لذا $r = 0$. بنابراین، R تقلیل یافته است.

حال فرض کنیم R تقلیل یافته باشد. اگر $\overline{x}$ را در حلقه‌ی $\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ با علامت u نشان دهیم، آن‌گاه: $\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle} = R[u] = R + Ru + \dots + Ru^{n-1}$. فرض کنیم $f, g \in R[u][t]$ و $fg = 0$. قرار

می‌دهیم: $f = f_0 + f_1 u + \cdots + f_{n-1} u^{n-1}$ و $g = g_0 + g_1 u + \cdots + g_{n-1} u^{n-1}$، که $f_i, g_j \in R[t]$. برای هر $i + j \geq n$، چون $u^{i+j} = 0$، پس حاصل‌ضرب هر مضرب از u^i در هر مضرب از u^j صفر است. حال نشان می‌دهیم اگر $i + j < n$، آن‌گاه، $f_i g_j = 0$ و چون R تقلیل یافته است، از این‌رو حاصل‌ضرب هر ضریب از f_i در هر ضریب از g_j صفر است. بنابراین حاصل‌ضرب هر ضریب از f در هر ضریب از g صفر است. از

$$\begin{aligned} 0 &= fg = (f_0 + f_1 u + \cdots + f_{n-1} u^{n-1})(g_0 + g_1 u + \cdots + g_{n-1} u^{n-1}) \\ &= f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0) u + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0) u^2 + \cdots + \\ & \quad (f_0 g_{n-1} + f_1 g_{n-2} + \cdots + f_{n-1} g_0) u^{n-1} \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$0 = f_0 g_0 = f_0 g_1 + f_1 g_0 = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 = \cdots = f_0 g_{n-1} + f_1 g_{n-2} + \cdots + f_{n-1} g_0,$$

و چون $R[t]$ تقلیل یافته است، از این‌رو برای هر $i + j < n$، $f_i g_j = 0$. پس حاصل‌ضرب هر مضرب از u^i در هر مضرب از u^j صفر است. حال نشان می‌دهیم اگر $i+j < n$، آن‌گاه، $f_i g_j = 0$ و چون R تقلیل یافته است، از این‌رو حاصل‌ضرب هر ضریب از f_i در هر ضریب از g_j صفر است. بنابراین حاصل‌ضرب هر ضریب از f در هر ضریب از g صفر است. از

$$\begin{aligned} 0 &= fg = (f_0 + f_1 u + \cdots + f_{n-1} u^{n-1})(g_0 + g_1 u + \cdots + g_{n-1} u^{n-1}) \\ &= f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0) u + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0) u^2 + \cdots + \\ & \quad (f_0 g_{n-1} + f_1 g_{n-2} + \cdots + f_{n-1} g_0) u^{n-1} \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$0 = f_0 g_0 = f_0 g_1 + f_1 g_0 = f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 = \cdots = f_0 g_{n-1} + f_1 g_{n-2} + \cdots + f_{n-1} g_0,$$

و چون $R[t]$ تقلیل یافته است، از این‌رو برای هر $i + j < n$، $f_i g_j = 0$. ■

قضیه ۹.۵.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $n \geq 2$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *R تقلیل یافته است.*

(۲) *$\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ آرمنداریز است.*

(۳) *$RI_n + RV + \cdots + RV^{n-1}$ (یک زیر حلقه $D_n(R)$) آرمنداریز است.*

(۴) *$D_3(R)$ آرمنداریز است.*

(۵) *$D_2(R)$ آرمنداریز است.*

برهان. (۱) $\Longleftrightarrow$ (۲): ازقضیه ۸.۵.۱ به‌دست می‌آید.
(۲) $\Longleftrightarrow$ (۳): از تعریف تناظر $V \longmapsto x + \langle x^n \rangle$ نتیجه می‌گیریم که $\frac{R[x]}{\langle x^n \rangle}$ آرمنداریز است اگر و فقط اگر $RI_n + RV + RV^{n-1}$ آرمنداریز باشد.
(۴) $\Longleftarrow$ (۱): به گزاره‌ی ۷.۴.۱ مراجعه شود.
(۵) $\Longleftarrow$ (۱): چون $D_2(R)$ یک زیرحلقه از $D_3(R)$ است، لذا بنابر گزاره‌ی ۲.۴.۱، چون رده‌ی حلقه‌های آرمنداریز تحت زیرحلقه بودن بسته است لذا $D_2(R)$ آرمنداریز است. ■

فصل ۲

تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز

۱.۲ مقدمه

در این فصل به مطالعه‌ی تعمیم حلقه‌های آرمنداریز می‌پردازیم و همچنین خواص آن‌ها را به‌همراه چندین مثال مطرح می‌کنیم. در پایان این فصل حلقه‌های جابه‌جایی n -نیم آرمنداریز را بیان می‌کنیم. مطالب و مباحث این فصل برگرفته از مرجع [۹] می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۲. حلقه‌ی R را n-نیم آرمنداریز می‌نامیم هرگاه برای هر $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i\in R[x]$، اگر $f(x)^n=0$ که $n\geq 2$، آن‌گاه برای هر $a_{i_j}\in\{a_0,a_2,\dots a_m\}$ که $j=1,\dots n$ داشته باشیم:

$$a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}=0.$$

تعریف ۲.۱.۲. حلقه‌ی R را نیم آرمنداریز می‌نامیم هرگاه برای هر $n\geq 2$، n-نیم آرمنداریز باشد.

قضیه ۳.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آل آن باشد و $n\geq 2$. فرض می‌کنیم $\frac{R}{I}$ ، n-نیم آرمنداریز باشد. اگر I تقلیل یافته باشد، آن‌گاه R ، n-نیم آرمنداریز است.*

برهان. فرض کنیم $a,b\in R$ و $ab=0$. بنا به فرض چون I تقلیل یافته است و $I\subseteq bIa$ و $(bIa)^2=0$، پس $bIa=0$. با به کارگیری این استدلال داریم که برای هر $a\in R$ وقتی که $a^n=0$ برای $n\geq 2$ داریم $aI_1aI_2\dots aI_{n-1}a=0$ که درآن $I_k=I$ برای هر $k=1,2,\dots n-1$.

لذا $a^{n-1}Ia=0$ در این صورت خواهیم داشت: $aIaIa^{n-2}=0$. به‌همین ترتیب این روند را ادامه می‌دهیم. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i\in R[x]$ به‌طوری‌که برای $n\geq 2$، $f(x)^n=0$. چون $\frac{R}{I}$، $n-$نیم آرمنداریز است پس برای هر a_{i_j}، در $\{a_0,a_1,\ldots,a_m\}$ که در آن $j=1,\ldots,n$،

$$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}\in I \tag{۱.۲}$$

از استقرا روی m استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم برای هر i و j،

$$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}=0. \tag{۲.۲}$$

برای $m=0$ نتیجه به‌وضوح حاصل است. فرض کنیم $m\geq 1$. ادعا می‌کنیم $aI_1aI_2\cdots aI_{n-1}a=0$. از $f(x)^n=0$، خواهیم داشت $a_0^n=0$ و همچنین

$$a_0I_1a_0I_2\cdots a_0I_{n-1}a_0=0 \tag{۳.۲}$$

حال فرض کنیم $a_{s_1}a_{s_2}\cdots a_{s_n}$ یک حاصل‌ضرب در $f(x)^n$ که شامل a_0 باشد؛ قرار می‌دهیم $a_{s_t}=a_0$. در این صورت بنا به ۱.۲ داریم:

$$\left(a_{s_1}a_{s_2}\cdots a_{s_n}\right)^{2n-1}\in\left(a_{s_1}\cdots a_{s_{t-1}}\right)\left(a_0I_1a_0I_2a_0\cdots a_0I_{n-1}a_0\right)\left(a_{s_{t+1}}\cdots a_{s_n}\right)$$

همچنین با توجه به ۳.۲ داریم $\left(a_{s_1}a_{s_2}\cdots a_{s_n}\right)^{2n-1}=0$. چون I تقلیل یافته است و همچنین $a_{s_1}a_{s_2}\cdots a_{s_n}=0$. در نتیجه $\left(\sum_{i=1}^{m}a_ix^i\right)^n=0$ به‌دست می‌آوریم و به‌علاوه $\left(\sum_{i=1}^{m-1}a_{i+1}x^i\right)^n=0$. حال با توجه به فرض استقرا، $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}=0$ برای هر a_{i_j} که در آن $j=1,\cdots,n$. بنابراین R حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز است. ■

گزاره ۴.۱.۲. *فرض کنیم $h,k,m\geq 2$ اعدادی صحیح باشند به‌طوری که $k\mid h$ و $k\mid m$. همچنین فرض کنیم R یک حلقه با مشخصه‌ی h باشد. در این صورت R تقلیل یافته است اگر و فقط اگر $\frac{R[x]}{\langle x^m\rangle}$ نیم آرمنداریز باشد.*

برهان. اگر R تقلیل یافته باشد، آن‌گاه بنا به قضیه‌ی ۸.۵.۱، $\frac{R[x]}{\langle x^m\rangle}$ آرمنداریز است. برعکس فرض کنیم $\frac{R[x]}{\langle x^m\rangle}$ نیم آرمنداریز باشد. به برهان خلف فرض می‌کنیم که $0\neq r\in R$ وجود دارد به‌طوری که $r^2=0$. قرار می‌دهیم $\bar{x}=x+(x^m)$. اگر $h=k=m=2$ یا $h=k=m=3$، آن‌گاه، $(r+\bar{x})^k=0$ و $r\bar{x}^{k-1}\neq 0$؛ از این‌رو $\frac{R[x]}{\langle x^m\rangle}$، $k-$نیم آرمنداریز نیست، که با فرض ما در تناقض است. فرض کنیم $m\geq 4$ و $k\leq m-1$. حال $m=\ell k$ را در نظر می‌گیریم. چون R

از مشخصه‌ی h است، لذا

$$\begin{aligned}(r+\bar{x}^{\ell}+\bar{x}^{m-1})^k &= r^k\\ &= r^k+\cdots+kr(\bar{x}^{\ell}+\bar{x}^{m-1})^{k-1}+(\bar{x}^{\ell}+\bar{x}^{m-1})^k\\ &= \bar{x}^{\ell k}\\ &= \bar{x}^m\\ &= 0.\end{aligned}$$

اما $r\bar{x}^{\ell(k-1)}\neq 0$ و لذا $\frac{R[x]}{\langle x^m\rangle}$ حلقه‌ای $k-$نیم آرمنداریز نیست، که با فرض ما در تناقض است. ■

۲.۲ زیرحلقه‌های $n-$نیم آرمنداریز

لم ۱.۲.۲. *(۱) فرض کنیم n عددی صحیح و مثبت و $\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$ زیرمجموعه‌ای از حلقه‌ی تقلیل یافته‌ی R باشد به‌طوری‌که $r_1r_2\cdots r_n=0$. در این صورت برای هر $\sigma\in S_n$، $r_{\sigma(1)}Rr_{\sigma(2)}R\cdots Rr_{\sigma(n)}=0$.*

(۲) رده‌ی حلقه‌های ($n-$نیم) آرمنداریز تحت زیرحلقه‌ها بسته است.

(۳) هر حاصل‌ضرب مستقیم از حلقه‌های $n-$نیم آرمنداریز، $n-$نیم آرمنداریز است.

(۴) هر مجموع مستقیم از حلقه‌های $n-$نیم آرمنداریز، $n-$نیم آرمنداریز است.

برهان. **(۱)** چون R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته است، لذا بنابر لم ۱۲.۳.۱، که $r_1r_2\cdots r_n=0$، آن‌گاه برای هر $\sigma\in S_n$ داریم $r_{\sigma(1)}r_{\sigma(2)}\cdots r_{\sigma(n)}=0$. با استفاده از استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n=2$، آن‌گاه $r_1r_2=0$ و چون حلقه تقلیل یافته است، پس برای هر $r\in R$، $r_1rr_2=0$. در نتیجه $r_1Rr_2=0$ حال فرض کنیم $n>2$ و $r_1r_2\cdots r_n=0$. اگر $a=r_1r_2\cdots r_{n-1}$ و $r_n=b$، آن‌گاه $r_1r_2\cdots r_{n-1}Rr_n=0$. در نتیجه با استفاده از فرض استقرا داریم: $r_1Rr_2R\cdots r_{n-1}Rr_n=0$.

(۲) از تعریف به‌دست می‌آید.

(۳) فرض کنیم $f(x)\in R[x]$. مجموعه‌ی تمام ضرایب f را با علامت C_f نمایش می‌دهیم. برای هر $i\in I$، فرض کنیم R_i یک حلقه‌ی $n-$نیم آرمنداریز و $T=\prod_{i\in I}R_i$. باشد. قرار می‌دهیم $f(x)=\sum_{j=1}^{m}a_jx^j\in T[x]$، به‌طوری‌که $f(x)^n=0$، که در آن $a_j=(\alpha_{ij})\in T$ و $\alpha_{ij}\in R_i$. لذا برای هر $i\in I$، قرار می‌دهیم $f_i(x)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}x^j\in R_i[x]$. در این صورت از $f(x)^n=0$، نتیجه می‌گیریم برای هر $i\in I$، $f_i(x)^n=0$. حال چون هر R_i، $n-$نیم آرمنداریز است از این‌رو

برای هر $\alpha_{i_j} \in C_{f_i}$، داریم $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_n} = 0$. بنابراین برای هر $a_{s_k} \in \{a_0, \ldots, a_m\}$، که در آن $k = 1, \ldots, n$، نتیجه می‌گیریم $a_{s_1}a_{s_2}\cdots a_{s_n} = 0$.

(۴) با توجه به (۲) و (۳) به‌دست می‌آید. ■

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه و n عددی صحیح و مثبت باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

(۱) *R تقلیل یافته است؛*

(۲) *برای هر $h = 1, 2, \ldots, n+1$، $U_h(R)$ حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز است؛*

(۳) *$U_n(R)$ حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز است؛*

(۴) *برای هر $h = 1, 2, \ldots, n+1$، $L_h(R)$ حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز است؛*

(۵) *$L_n(R)$ حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز است.*

برهان. (۱)$\Longleftarrow$(۲): فرض کنیم R تقلیل یافته باشد. بنابر لم ۱.۲.۲(۲)، کافی است ثابت کنیم که $U_{n+1}(R)$ حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز است. فرض کنیم $f(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m$ عنصری در $U_{n+1}(R)[x]$ باشد و $f(x)^n = 0$ ($n \geq 2$). قرار می‌دهیم: $A_i = (a(i)_{uv})$ برای هر $i = 0, 1, \ldots, m$ و برای $u > v$، $a(i)_{uv} = 0$.

از تقلیل یافته بودن R بدون ذکر آن استفاده می‌کنیم. چون $f(x)^n = 0$، لذا دستگاه معادلات زیر را برای هر $k = 0, 1, \ldots, mn$ خواهیم داشت:

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=k} A_{s_1}A_{s_2}\cdots A_{s_n} = 0.$$

چون $A_0^n = 0$ و $A_m^n = 0$ لذا داریم:

$$a(0)_{11} = \cdots = a(0)_{(n+1)(n+1)} = 0$$

و

$$a(m)_{11} = \cdots = a(m)_{(n+1)(n+1)} = 0,$$

که نتیجه می‌دهد $A_0, A_m \in N_{n+1}(R)$. در $\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=n} A_{s_1}A_{s_2}\cdots A_{s_n}$ هر عبارتی، به‌جز A_1^n، A_0 را به‌عنوان یک عامل در بردارد و چون $A_0 \in N_{n+1}(R)$ می‌باشد، لذا تمام عوامل در $N_{n+1}(R)$ قرار می‌گیرند. لذا $A_1^n \in N_{n+1}(R)$ و در نتیجه داریم $A_1 \in N_{n+1}(R)$. با استقراء روی $i = 0, 1, \ldots, m-1$ اثبات را ادامه می‌دهیم. در $\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=in} A_{s_1}A_{s_2}\cdots A_{s_n}$، هر عبارت (به‌جز A_i^n) A_j را به‌عنوان یک عامل در بردارد جایی‌که $j < i$، لذا بنا به فرض استقراء

A_j مشمول در $N_{n+1}(R)$ است. در نتیجه $A_i^n \in N_{n+1}(R)$ و در این صورت $A_i \in N_{n+1}(R)$. بنابراین خواهیم داشت:

$$a(i)_{11} = a(i)_{22} = \cdots = a(i)_{(n+1)(n+1)} = 0$$

برای هر $i = 0, 1, \ldots, m$، نتیجه می‌گیریم برای هر s_i دلخواه، داریم:

$$A_{s_1} A_{s_2} \cdots A_{s_n} = \big(a(s_1)_{12} a(s_2)_{23} \cdots a(s_n)_{n(n+1)}\big) E_{1(n+1)}.$$

از بحث فوق می‌توان دستگاه معادلات زیر را برای هر $k = 0, 1, \ldots, mn$، داشته باشیم:

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=k} a(s_1)_{12} a(s_2)_{23} \cdots a(s_n)_{n(n+1)} = 0$$

اگر معادله‌ی

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=1} a(s_1)_{12} a(s_2)_{23} \cdots a(s_n)_{n(n+1)} = 0$$

را از سمت راست در

$$a(0)_{12} \cdots a(0)_{(i-1)i} a(0)_{(i+1)(i+2)} \cdots a(0)_{n(n+1)}$$

ضرب کنیم، آن‌گاه از $a(0)_{12} \cdots a(0)_{n(n+1)} = 0$ و لم ۱.۲.۲(۱) به‌دست می‌آوریم:

$$\big(a(0)_{12} \cdots a(0)_{(i-1)i} a(1)_{i(i+1)} a(0)_{(i+1)(i+2)} \cdots a(0)_{n(n+1)}\big)$$
$$\big(a(0)_{12} \cdots a(0)_{(i-1)i} a(0)_{(i+1)(i+2)} \cdots a(0)_{n(n+1)}\big) = 0$$

برای هر $i = 1, \ldots, n$، چون هر عبارت دیگر $a(0)_{i(i+1)}$ را به‌عنوان یک عامل دربر دارد، جایی‌که $i = 1, \ldots, n$. بنا بر لم ۱.۲.۲(۱) لذا داریم

$$\big(a(0)_{12} \cdots a(0)_{(i-1)i} a(1)_{i(i+1)} a(0)_{(i+1)(i+2)} \cdots a(0)_{n(n+1)}\big)^2 = 0$$

و در نتیجه

$$a(0)_{12} \cdots a(0)_{(i-1)i} a(1)_{i(i+1)} a(0)_{(i+1)(i+2)} \cdots a(0)_{n(n+1)} = 0.$$

حال با استقراء روی $k = 0, 1, \ldots, mn - 1$ کار را ادامه می‌دهیم. فرض کنیم v در بین s_iهایی که در تساوی $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = k$ صدق می‌کنند، ماکسیمال باشد. عبارت $a(s_1)_{12} a(s_2)_{23} \cdots a(s_n)_{n(n+1)}$ را با $s_i = v$ و $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = k$ در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشیم که تمامی s_jها مساوی نیستند. با ضرب طرفین تساوی

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=k} a(s_1)_{12} a(s_2)_{23} \cdots a(s_n)_{n(n+1)} = 0 \qquad (۴.۲)$$

از سمت راست در

$$a(s_1)_{12}\cdots a(s_{i-1})_{(i-1)i}a(s_i+1)_{(i+1)(i+2)}\cdots a(n)_{n(n+1)},$$

آن‌گاه بنابر فرض استقراء و لم ۱.۲.۲(۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\big(a(s_1)_{12}\cdots a(s_i-1)_{(i-1)i}a(s_i)_{i(i+1)}a(s_i+1)_{(i+1)(i+2)}\cdots a(s_n)_{n(n+1)}\big)\\&\big(a(s_1)_{12}\cdots a(s_i-1)_{(i-1)i}a(s_i+1)_{(i+1)(i+2)}\cdots a(s_n)_{n(n+1)}\big)=0,\end{aligned}$$

چون هر عبارت دیگری (پس از ضرب) شامل عامل $a(t_1)_{12}, a(t_n)_{n(n+1)}$، می‌باشد جایی‌که $t_1+\cdots+t_n\leq k-1$. بنابراین بنا بر لم ۱.۲.۲(۱)، خواهیم داشت:

$$\big(a(s_1)_{12}\cdots a(s_i-1)_{(i-1)i}a(s_i)_{i(i+1)}a(s_i+1)_{(i+1)(i+2)}\cdots a(s_n)_{n(n+1)}\big)^2=0,$$

که نتیجه می‌دهد $a(s_1)_{12}\cdots(s_n)_{n(n+1)}=0$. حال v را در عبارات باقیمانده در نظر گرفته و روش محاسباتی مشابهی مانند قبل اعمال می‌کنیم. با ادامه این روند،

$$a(u_1)_{12}a(u_2)_{23}\cdots a(u_n)_{n(n+1)}=0$$

برای هر انتخاب u_iها به گونه‌ای که $u_1+u_2+\cdots+u_n=k$ و تمامی u_iها برابر نیستند. در این صورت، اگر k بر n بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$a(\frac{k}{n})_{12}a(\frac{k}{n})_{23}\cdots a(\frac{k}{n})_{n(n+1)}=0.$$

لذا تمامی عبارت‌ها در $\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n=k}a(s_1)_{12}a(s_2)_{23}\cdots a(s_n)_{n(n+1)}$ برابر صفر هستند، و در نتیجه برای هر $k\in\{1,2,\ldots,mn-1\}$ و هر انتخاب s_i به گونه‌ای که $s_1+s_2+\cdots+s_n=k$، داریم $a(s_1)_{12}a(s_2)_{23}\cdots a(s_n)_{n(n+1)}=0$.

با در نظر داشتن این نکته که $a(s_1)_{12}\cdots a(s_n)_{n(n+1)=0}$ معادل با $A_{s_1}\cdots+A_{s_n}=0$ می‌باشد، داریم $A_{s_1}\cdots+A_{s_n}=0$ برای هر $k\in\{1,2,\ldots,mn\}$ و برای هر s_i به گونه‌ای که، $s_1+\cdots+s_n=k$. در نتیجه $U_{n+1}(R)$، حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز است.

(۳)$\Longleftarrow$(۱): به برهان خلف فرض می‌کنیم که $0\neq a\in R$ وجود دارد که $a^2=0$. فرض کنیم $A=(a_{ij})\in N_n(R)$ ماتریسی است که برای هر i، $a_{i(i+1)}=1$ و سایر درایه‌های آن صفر است، و $B=(b_{ij})\in U_n(R)$ ماتریسی است که $b_{11}=a$، $b_{nn}=-a$ و سایر درایه‌های آن صفر باشد. در این صورت محاسبات زیر را خواهیم داشت:

$$ABA=BA^hB=B^2=0,\ A^{n-k}B=(-a)E_{kn},\ BA^k=aE_{1(k+1)}, \tag{۵.۲}$$

برای $k=1,\ldots,n-1$ و هر h. حال چندجمله‌ای $f(x)=A+Bx\in U_n(R)[x]$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت بنابر (۵.۲)، داریم

$$f(x)^n=(A^{n-1}B+BA^{n-1})x=((-a)E_{1n}+aE_{1n})x=0$$

در حالی‌که $A^{n-1}B$ و BA^{n-1} هر دو غیرصفر هستند. بنابراین $U_n(R)$، حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز نمی‌باشد که این یک تناقض است.

(۲)$\Longleftarrow$ (۳): از لم ۱.۲.۲(۲) نتیجه می‌شود و اثبات‌های بخش‌های (۱)$\Longleftarrow$ (۴)$\Longleftarrow$ (۵)$\Longleftarrow$ (۱) مشابه اثبات حالت $U_n(R)$ است و از آوردن آن صرف‌نظر می‌کنیم. ■

بنا به لم ۱.۲.۲(۲) و قضیه‌ی ۲.۲.۲(۵)، نتیجه زیر را به‌دست می‌آوریم.

نتیجه ۳.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱) *R تقلیل یافته است؛*

۲) *$U_3(R)$ نیم آرمنداریز است؛*

۳) *$U_2(R)$ نیم آرمنداریز است؛*

۴) *$D_3(R)$ آرمنداریز است؛*

۵) *$D_2(R)$ آرمنداریز است.*

برهان. فرض کنیم R تقلیل یافته باشد. در این صورت بنابر قضیه‌ی ۲.۲.۲ برای $k \geq 3$، $U_k(R)$ حلقه‌ای $(k-1)-$نیم آرمنداریز است. چون $U_k(R)$ زیرحلقه‌ی $U_{k+1}(R)$ می‌باشد، در این صورت بنابر لم ۱.۲.۲(۲)، به ازای هر $\ell \geq k-1$، $U_k(R)$ حلقه‌ای $\ell-$نیم آرمنداریز است. در نتیجه $U_3(R)$ نیم آرمنداریز است. بنا به لم ۱.۲.۲(۲) نتیجه می‌شود که اگر $U_3(R)$ نیم آرمنداریز باشد، آن‌گاه $U_2(R)$ نیز نیم آرمنداریز است. اثبات بقیه جملات از لم ۱.۲.۲(۲) و ۹.۵.۱ به‌دست می‌آید. ■

نکته. اگر $U_2(R)$ حلقه‌ای نیم آرمنداریز باشد، آن‌گاه R حلقه‌ای تقلیل یافته می‌باشد. به برهان خلف فرض کنیم R تقلیل یافته نبوده و عنصر $a \neq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $a^2 = 0$. حال $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ در $U_2(R)$ در نظر می‌گیریم. آن‌گاه $A^2 = B^2 = 0$ و $AB + BA = 0$. ازاین‌رو فرض می‌کنیم $f(x) = A + Bx \in U_2(R)[x]$. داریم $f(x)^2 = 0$. اما AB و BA هر دو مخالف صفر هستند بنابراین $U_2(R)$ نیم آرمنداریز نیست که با فرض ما در تناقض است.

نکته. اگر $D_2(R)$ حلقه‌ای آرمنداریز باشد، آن‌گاه بنابر لم ۱.۲.۲(۲)، R نیز حلقه‌ای آرمنداریز (لذا نیم آرمنداریز) می‌باشد. در مثال بعد، حلقه‌ی آرمنداریز، R، را معرفی می‌کنیم که تقلیل یافته نمی‌باشد. نشان می‌دهیم که $D_2(R)$ حلقه‌ای نیم آرمنداریز نمی‌باشد.

مثال ۴.۲.۲. فرض کنیم $\mathbb{Z}_4$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه ۴ باشد و $R = D_3(\mathbb{Z}_2)$. در این صورت با توجه به نتیجه ۳.۲.۲، R یک حلقه‌ی آرمنداریز است. فرض کنیم

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A, B \in R \right\}.$$

حال

$$f(x)=\begin{pmatrix} C & \circ \\ \circ & C \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \circ & D \\ \circ & \circ \end{pmatrix}x\ ; \quad C=\begin{pmatrix} \circ & \circ & ۱ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \text{ و } D=\begin{pmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{pmatrix}\in S[x]$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت $f(x)^۲=\circ$، اما $\begin{pmatrix} \circ & D \\ \circ & \circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & \circ \\ \circ & C \end{pmatrix}\neq \circ$ لذا S، ۲−نیم آرمنداریز نیست، بنابراین نیم آرمنداریز نمی‌باشد.

از قضیه‌ی ۲.۲.۲، ممکن است بپرسید آیا حلقه‌ی R وقتی که $D_n(R)$، n−نیم آرمنداریز باشد، تقلیل یافته است؟ پاسخ آن را نمی‌دانیم، اما وضعیت مناسبی داریم وقتی که مشخصه‌ی حلقه‌ها $n\geq ۲$ است.

گزاره ۵.۲.۲. *فرض کنیم R یک حلقه با مشخصه‌ی $n\geq ۲$ باشد. در این صورت R تقلیل یافته است اگر و فقط اگر $D_n(R)$ حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز باشد.*

برهان. بنا به قضیه ۲.۲.۲ و لم ۱.۲.۲(۲) کافیست نشان دهیم که R تقلیل یافته است هرگاه $D_n(R)$ حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز باشد. به برهان خلف فرض کنیم R تقلیل یافته نبوده و عنصر $\circ\neq a\in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $a^۲=\circ$. چندجمله‌ای $f(x)=A+Bx$ در $D_n(R)[x]$ را در نظر می‌گیریم که در آن $A=(a_{ij})\in N_n(R)$ به‌طوری‌که برای هر i داریم $a_{i(i+۱)}=۱$ که در سایر جاها صفر، و همچنین $B=(b_{ij})\in D_n(R)$ به‌طوری‌که $b_{ii}=a$ و سایر جاها صفر است. در این صورت چون R از مشخصه‌ی n است داریم $A^n=B^۲=\circ$ و $AB=BA$، به‌طوری‌که $f(x)^n=nA^{n-۱}Bx=naE_{۱n}x=\circ$. اما $A^{n-۱}B=aE_{۱n}\neq\circ$، بنابراین $D_n(R)$ حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز نیست، که با فرض ما در تناقض است. ■

همچنین از قضیه‌ی ۲.۲.۲، ممکن است حدس بزنید که $U_{n+۲}(R)$ روی حلقه‌ی تقلیل یافته‌ی R حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز باشد. اما مثال نقض زیر وجود دارد.

مثال ۶.۲.۲. $U_{n+۲}(R)$ $(n\geq ۳)$ را روی حلقه‌ی R را در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنیم

$$A=E_{۱۲}+\cdots+E_{(n-۲)(n-۱)}+E_{(n-۱)(n+۱)}+E_{n(n+۲)}$$

و

$$B=E_{(n-۱)n}+E_{(n-۱)(n+۱)}+E_{n(n+۲)}-E_{(n+۱)(n+۲)}$$

دو عنصر در $N_{n+2}(R)$ باشند. در این صورت محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} AB &= E_{(n-2)n} + E_{(n-2)(n+1)}E_{(n-1)(n+2)}, BA = E_{(n-1)(n+2)}, \\ B^2 &= BA^2 = BAB = 0, \\ A^kBA &= E_{(n-k-1)(n+2)} \neq 0, k = 1, \dots, n-2, \\ A^tB &= E_{(nt1)n} + E_{(nt1)(n+1)}E_{(nt)(n+2)} \neq 0, t = 1, \dots, n-2, \\ A^{n-1}B &= -E_{1(n+2)}. \end{aligned}$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (A+Bx)^n &= (A^{n-2}BA + A^{n-1}B)x \\ &= (E_{1(n+2)} + (-E_{1(n+1)}))x \\ &= 0. \end{aligned}$$

اما از $A^{n-2}BA \neq 0$ و $A^{n-1}B \neq 0$ حلقه‌ی $U_{n+2}(R)$ حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز نسیت.

با توجه به لم ۱.۲.۲(۲)، قضیه‌ی ۲.۲.۲ و مثال ۶.۲.۲ می‌توان گفت که «حلقه‌های m−نیم آرمنداریز برای $m \geq n+1$، لزوماً n−نیم آرمنداریز نیستند».

برای این منظور، فرض کنیم که حلقه‌های m−نیم آرمنداریز برای $m \geq n+1$، حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز باشند، در این صورت بنابر لم ۱.۲.۲(۲) و قضیه‌ی ۲.۲.۲، حلقه‌ی $U_{n+2}(R)$، n−نیم آرمنداریز می‌باشد جایی‌که R حلقه‌ای تقلیل یافته است، که این موضوع در تناقض با مثال ۶.۲.۲ می‌باشد.

برعکس، ممکن است سوال شود، آیا حلقه‌های n−نیم آرمنداریز، لزوماً $(n+1)$−نیم آرمنداریز هستند؟ که با توجه به مثال زیر، جواب این سوال منفی است.

مثال ۷.۲.۲. عدد صحیح $v \geq 3$ با تجزیه‌ی اولیه $v = p_1^{r_1} \cdots p_\alpha^{r_\alpha}$ را در نظر می‌گیریم، که در آن p_iها اعداد اول متمایز و r_iها اعداد صحیح مثبت هستند. قرار می‌دهیم $w = p_1 \cdots p_\alpha$.

حل. فرض کنیم $\mathbb{Z}_w$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی w و $\mathbb{Z}_w[x,y]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی دو متغیر تعویض‌پذیر x و y است. توجه داشته باشیم که $\mathbb{Z}_w$ تقلیل یافته است (لذا حلقه‌های چندجمله‌ای روی $\mathbb{Z}_w$ هستند). قرار می‌دهیم $R = \dfrac{\mathbb{Z}_w[x,y]}{I}$، که در آن I ایده‌آل تولید شده توسط x^v، x^2y^2 و y^v می‌باشد. نشان خواهیم داد که R، حلقه‌ای $(v-1)$−نیم آرمنداریز است ولی v−نیم آرمنداریز نیست. برای سادگی، از x و y به‌ترتیب برای $x+I$ و $y+I$ استفاده می‌کنیم. حال فرض کنیم $R[t]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها با مجهول t روی R باشد.

چون مشخصه‌ی R، w است و $v \mid w$، خواهیم داشت:

$$(x+yt)^v = x^v + vx^{v-1} + vxy^{v-1} + y^vt^v = 0.$$

اما $x^{v-1} \neq 0$، پس R، v−نیم آرمنداریز نسیت.

حال نشان می‌دهیم که R، حلقه‌ای $(v-1)$−نیم آرمنداریز است. فرض کنیم $(f_0+f_1t+\cdots+f_mt^m)^{v-1}=0$ که در آن

$$\begin{aligned} f_i &= a_{i0}+a_{i1}x+\cdots+a_{i(v-1)}x^{v-1}+b_{i1}y+\cdots+b_{i(v-1)}y^{v-1} \\ &\quad +c_{i1}xy+\cdots+c_{i(v-1)}x^{v-1}y+d_{i2}xy^2+\cdots+d_{i(v-1)}xy^{v-1} \end{aligned}$$

برای $i=0,1,\dots,m$، یک عضو از حلقه‌ی $R[t]$ باشد. در این صورت می‌توانیم $(f_0+f_1t+\cdots+f_mt^m)^{v-1}=0$ را به‌صورت

$$\begin{aligned} &(g_0+g_1x+\cdots+g_{v-1}x^{v-1}+h_1y+\cdots+h_{v-1}y^{v-1}+k_1xy+\cdots+k_{v-1}x^{v-1}y \\ &+q_2xy^2+\cdots+q_{v-1}xy^{v-1})^{v-1}=0 \end{aligned}$$

بنویسیم که در آن $g,h,k,q\in\mathbb{Z}_w[t]$ و $g_j=\sum_{i=0}^{m}a_{ij}t^i$، $h_\ell=\sum_{i=0}^{m}b_{i\ell}t^i$، $k_\ell=\sum_{i=0}^{m}c_{i\ell}t^i$، $q_s=\sum_{i=0}^{m}d_{is}t^i\in\mathbb{Z}_w[t]$ برای $j=0,\dots,v-1$، $\ell=1,\dots,v-1$، $s=2,\dots,v-1$. چون $\mathbb{Z}_w[t]$ تقلیل یافته است، $g_0^{v-1}=0$ لذا $g_0=0$. حال ضرایب x^{v-1} (به‌ترتیب y^{v-1}) هر عبارت به‌جز g_1^{v-1} (به‌ترتیب h_1^{v-1}) شامل g_0 به‌عنوان عامل مشترک است، به‌عبارت دیگر $g_1^{v-1}=h_1^{v-1}=0$؛ از این رو $g_1=h_1=0$ چون $\mathbb{Z}_w[t]$. در نتیجه هر تک‌جمله‌ای که در f_i که $(i=0,1,\dots,m)$ ظاهر می‌شود حداقل از درجه‌ی ۲ می‌باشد و $f_i\in I$ ونتیجه حاصل است. لذا اگر فرض کنیم $f_{\sigma_1}f_{\sigma_2}\cdots f_{\sigma_{v-1}}$ حاصل‌ضربی از $(v-1)$−جمله باشد که $f_{\sigma_i}\in\{f_0,f_1,\dots,f_m\}$. آن‌گاه $f_{\sigma_1}f_{\sigma_2}\cdots f_{\sigma_{v-1}}$ شامل $(v-1)$−عدد از تک‌جمله‌ای‌های در $\{x^2,y^2,xy\}$ است که با توجه به نتیجه‌ی قبل، داریم $f_{\sigma_1}f_{\sigma_2}\cdots f_{\sigma_{v-1}}=0$. بنابراین R، $(v-1)$−نیم آرمنداریز است.

در مثال ۷.۲.۲ نشان دادیم که «حلقه‌های n−نیم آرمنداریز لزوماً $(n+1)$−نیم آرمنداریز نیستند، کافیست قرار دهیم $n+1=p_1^{r_1}\cdots p_\alpha^{r_\alpha}$.

۳.۲ خواص و مثال‌های بیشتر

در این بخش خواص جالبی از رده‌ی حلقه‌های n−نیم آرمنداریز را بررسی می‌کنیم و مثال‌های متفاوتی از این حلقه‌ها را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۳.۲. **۱)** *حلقه‌ی R حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز است اگر و فقط اگر $R[X]$ حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز باشد.*

۲) *حلقه‌ی R حلقه‌ای نیم آرمنداریز است اگر و فقط اگر $R[X]$ حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز باشد.*

۳) *اگر حلقه‌ی R حلقه‌ای نیم آرمنداریز باشد، آن‌گاه $N(R[X])\subseteq N(R)[X]$.*

برهان. (۱) کافیست بنا به لم ۱.۲.۲(۲) ثابت کنیم که $R[x]$، n–نیم آرمنداریز است اگر R، n–نیم آرمنداریز باشد. فرض کنیم که R، n–نیم آرمنداریز است برای اعداد $n \geq ۲$ قرار دهیم $f(T) = f_۰ + f_۱T + \cdots + f_mT^m \in R[x][T]$ با $f(T)^n = ۰$، که در آن $f_i = \sum\limits_{j=۰}^{k_i} a_{ij}x^j \in R[x]$ برای $i = ۰, ۱, \ldots, m$. روند اثبات قضیه‌ی ۷.۵.۱ را به‌کار می‌گیریم، فرض کنیم $k = k_۰ + k_۱ + \cdots + k_m$. در این صورت $f(x^k) = f_۰ + f_۱x^k + \cdots + f_mx^{km} \in R[x]$ و مجموعه‌ی مضرب‌های f_iها برابر مجموعه‌ی ضرایب $f(x^k)$ است. چون $f(T)^n = ۰$ و x با عناصر R جابه‌جا می‌شود، $f(x^k)^n = ۰$ در $R[x]$. چون R، n–نیم آرمنداریز است، $a_{i_۱}a_{i_۲} \cdots a_{i_n} = ۰$ برای هر انتخاب a_{i_j}ها با $j = ۱, \ldots, n$. بنابراین $f_{s_۱}f_{s_۲} \cdots f_{s_n} = ۰$ برای هر انتخاب f_{s_ℓ}ها در $\{f_۰, f_۱, \ldots, f_m\}$.

حال فرض کنیم $g \in R[X]$ طوری‌که $g^n = ۰$، زیرمجموعه‌ی متناهی $X_۰$ از X وجود دارد به‌طوری‌که $g \in R[X_۰]$؛ از این‌رو کافیست حالت متناهی بودن X را در نظر گرفت. در این صورت با کمک نتیجه‌ی فوق، استقرا ما را قادر خواهد ساخت که نتیجه بگیریم $R[X_۰]$ نیز n–نیم آرمنداریز است. بنابراین $R[X]$، n–نیم آرمنداریز است.

(۲) از (۱) به‌دست می‌آید.

(۳) فرض کنیم R یک حلقه‌ی نیم آرمنداریز باشد. قرار می‌دهیم $f \in N(R[X])$، زیرمجموعه‌ی متناهی $X_۰$ از X وجود دارد به‌طوری‌که $f \in N(R[X_۰])$، ادعا می‌کنیم $X_۰ = \{x_۱, \ldots, x_k\}$. بنابر لم ۱.۳.۲(۳)، $N(R[x_۱]) \subseteq N(R)[x_۱]$. $R[x_۱]$ و $R[x_۱, x_۲]$ بنا به (۲) نیم آرمنداریز و همچنین بنا به لم ۱.۲.۲(۷)، داریم:

$$N\big(R[x_۱, x_۲]\big) = N\big(R[x_۱][x_۲]\big) \subseteq N(R)[x_۱][x_۲] = N(R)[x_۱, x_۲].$$

با استقراء می‌توانیم به‌دست آوریم: $N\big(R[X_۰]\big) \subseteq N(R)[X_۰]$، موجب می‌شود $N\big(R[X]\big) \subseteq N(R)[X]$. ■

در مثال زیر نشان می‌دهیم که قضیه‌ی ۲.۲.۲ برای حلقه‌ی ماتریس کامل برقرار نیست.

مثال ۲.۳.۲. فرض کنیم S یک حلقه‌ی دلخواه باشد و $R = \mathrm{Mat}_n(S)$. ابتدا فرض کنیم $n = ۲$ لذا اگر

$$f(x) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} x^۲ \in \mathrm{Mat}_۲(S)[x],$$

آن‌گاه $f(x)^۲ = ۰$. اما $f(x) \notin N(R)[x]$ و بنابراین با توجه به لم ۱.۳.۲(۳) $\mathrm{Mat}_۲(S)$، ۲–نیم آرمنداریز نیست.

حال فرض کنیم $n = ۳$،

$$f(x) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{pmatrix} x \in \mathrm{Mat}_۳(S)[x]$$

و $g(x) = f(x)^2$. در این صورت داریم:

$$f(x)^3 = 0,\ g(x)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}x^2,\ g(x)^2 = 0.$$

اما

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix} = -E_{12},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^2$$

هر دو غیرصفر هستند. بنابراین $\mathrm{Mat}_3(S)$ هیچ‌وقت ۲−نیم آرمنداریز (با توجه به $g(x)$ و لم ۱.۳.۲(۳)) و ۳−نیم آرمنداریز نیست (با توجه به $f(x)$).

در حالت کلی $n \geq 4$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $g(x) = A + Bx \in R[x]$ به‌طوری‌که

$$A = E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{(n-2)(n-1)} + E_{(n-1)n} \quad \text{و} \quad B = E_{(n-1)1} + (-E_{n2}).$$

ابتدا نشان می‌دهیم $g(x)^n = 0$. از نماد $\phi_{(s,t)}$ برای نشان دادن مجموع همه‌ی حاصل‌ضرب‌های s−عدد A و t−عدد B استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم: $(A+Bx)^n = \sum_{i=0}^{n}\phi_{(n-i,i)}x^i$. توجه داشته باشید که

$$\phi_{(n,0)} = A^n = 0 \qquad BA^{\ell}B, \ell = 0, 1, \ldots, n-4. \tag{6.2}$$

با جایگذاری $f_k = A^{n-k-1}BA^k$ برای محاسبه‌ی $\phi_{(n-1,1)}$، داریم:

$$\begin{aligned} f_0 &= -E_{12}, \\ f_k &= E_{k(k+1)} + (-E_{(k+1)(k+2)})(k = 1, 2, \ldots, n-2), \\ f_{n-1} &= E_{(n-1)n}. \end{aligned}$$

بنابراین $\phi_{(n-1,1)} = \sum_{i=0}^{n-1} f_i = 0$. حال با توجه به (۶.۲)،

$$\begin{aligned} \phi_{(n-2,2)} &= BA^{n-3}BA + BA^{n-2}B + ABA^{n-3}B \\ &= (-E_{n2}) + (E_{n-1)1} + E_{n2}) + (-E_{(n-1)1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

در حالت $\phi_{(n-k,k)}$ $(k \geq 3)$، هر عبارت شامل B^2 یا BA^hB $(h \leq n-4)$، به‌عبارت دیگر با توجه به (۶.۲) برای هر $k \geq 3$، $\phi_{(n-k,k)} = 0$. بنابراین $g(x)^n = (A+Bx)^n = \sum_{i=0}^{n}\phi_{(n-i,i)}x^i = 0$. اما $A^{n-1}B = -E_{12} \neq 0$، ایجاب می‌کند که R، n−نیم آرمنداریز نسیت.

فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایده‌آل سره ناصفر از R می‌باشد. گوییم I یک حلقه‌ی $n-$نیم آرمنداریز است هرگاه I به‌عنوان یک حلقه‌ی بدون عضو همانی، $n-$نیم آرمنداریز باشد. حال ممکن است حدس زده شود که اگر I و $\frac{R}{I}$ حلقه‌هایی $n-$نیم آرمنداریز باشند، آن‌گاه همواره R، نیز حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز می‌باشد. در حالی که با مثال زیرنشان می‌دهیم که این حدس درست نمی‌باشد. فرض کنیم R یک جبر روی حلقه‌ی جابه‌جایی S باشد. توسیع دروه[۱] حلقه‌ی R توسط S، را به‌صورت $R \oplus_D S$ می‌نویسیم که $R \oplus S$ حلقه‌ای است با عملگرهای

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

و

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1, s_1 s_2)$$

به ازای $r_i \in R$ و $s_i \in S$.

مثال ۳.۳.۲. فرض کنیم D توسیع دروه $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus_D \mathbb{Z}_m$ باشد، که در آن $\mathbb{Z}_m$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی m باشد که توان اعداد اول متمایز در تجزیه‌ی اولیه m همگی ۱ است. در این صورت $\mathbb{Z}_m$ تقلیل یافته است. حلقه‌ی $R = U_n(D)$ را برای $n \geq 2$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، با توجه به قضیه‌ی ۲.۲.۲، R، $n-$نیم آرمنداریز نیست چون D تقلیل یافته نیست. فرض کنیم

$$I = U_n\left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus_D 0\right).$$

در این صورت I ایده‌آلی از حلقه‌ی R است به‌طوری‌که $\frac{R}{I} \cong U_n(\mathbb{Z})$. بنابراین $\frac{R}{I}$ بنا به قضیه‌ی ۲.۲.۲، $n-$نیم آرمنداریز است و لذا I، $n-$نیم آرمنداریز می‌باشد در نتیجه $I^n = 0$.

اما باید شرایطی را فراهم آورد که به حدس فوق پاسخی مثبت بدهیم. لذا کافیست I را تقلیل یافته در نظر بگیریم که این شرطی قوی‌تر نسبت به $n-$نیم آرمنداریز بودن I است.

گزاره ۴.۳.۲. *برای حلقه‌ی آبلی R شرایط زیر معادلند:*

۱) *R حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز است؛*

۲) *برای هر خودتوان $e \in R$، حلقه‌های eR و $(1-e)R$ حلقه‌هایی $n-$نیم آرمنداریز هستند؛*

۳) *خودتوان $e \in R$، وجود دارد به‌طوری‌که حلقه‌های eR و $(1-e)R$ حلقه‌هایی $n-$نیم آرمنداریز هستند.*

[۱] Dorroh extension

برهان. (۱)$\Leftarrow$(۲): بنا به لم ۱.۲.۲(۲) به‌دست می‌آید، چون eR و $(1-e)R$ زیرحلقه‌هایی از R هستند.

(۲)$\Leftarrow$(۳): بنا به فرض بدیهی است.

(۳)$\Leftarrow$(۱): فرض کنیم eR و $(1-e)R$، $n-$نیم آرمنداریز باشند. چندجمله‌ای $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m} a_ix^i$ عضوی از $R[x]$ باشد که برای هر عدد صحیح $n\geq 2$، $f(x)^n=0$. اگر $f_1(x)=ef(x)\in eR[x]$ و $f_2(x)=(1-e)f(x)\in(1-e)R[x]$ چون R آبلی است، آن‌گاه $f_1(x)^n=ef(x)^n=0$ و $f_2(x)^n=(1-e)f(x)^n=0$. در نتیجه با توجه به شرط (۳)، برای هر $a_{s_j}\in\{a_0,a_1,\ldots,a_m\}$، که در آن $j=1,2,\ldots,n$ داریم:

$$ea_{s_1}a_{s_2}\cdots a_{s_n}=ea_{s_1}ea_{s_2}e\cdots ea_{s_{n_1}}e=0$$
$$(1-e)a_{s_1}a_{s_2}\cdots a_{s_n}=(1-e)a_{s_1}(1-e)a_{s_2}(1-e)\cdots(1-e)a_{s_n}(1-e)=0,$$

و لذا $a_{s_1}a_{s_2}\cdots a_{s_n}=0$. بنابراین R، $n-$نیم آرمنداریز است. ■

گزاره ۵.۳.۲. *فرض کنیم R یک حلقه و J ایده‌آلی از R باشد به‌طوری که هر عنصر $R\setminus J$ منظم و $J^n=0$. در این صورت برای هر $\ell\geq n$، R حلقه‌ای $\ell-$نیم آرمنداریز است.*

برهان. در سرتاسر اثبات از این واقعیت که هر عنصر از $R\setminus J$ عنصری منظم می‌باشد به‌طور آزادانه استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m} a_ix^i\in R[x]$ و $f(x)^n=0$. در این صورت $a_0^n=0=a_m^n$، به‌عبارت دیگر $a_0,a_m\in J$.

در ضریب x^n از $\cdots+a_1^n+\cdots=0$، هر عبارت (به‌جز a_1^n) شامل a_0 و لذا مشمول در J است، که نتیجه می‌دهد $a_1^n\in J$. که در این صورت $a_1\in J$ را به‌دست می‌آوریم. با استفاده از استقراء روی $k=0,1,\ldots,[\frac{m}{2}]$ برهان را ادامه می‌دهیم. در ضریب x^{kn} از $\cdots+a_k^n+\cdots=0$، هر عبارت (به‌جز a_k^n) شامل a_h با $h<k$ و لذا مشمول در J، که ایجاب می‌کند $a_k^n\in J$. بنابراین $a_k\in J$. محاسبه بر اساس $a_m\in J$، از a_m به $a_{[\frac{m}{2}]+1}$ مشابه است. بنابراین $a_i\in J$، برای $i=0,\ldots,m$. حال چون $J^n=0$، برای هر انتخاب $a_{i_j}\in\{a_0,\ldots,a_m\}$ خواهیم داشت که $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}=0$، که در آن $j=1,\ldots,n$، بنا به محاسبات بالا نتیجه می‌شود که R، $n-$نیم آرمنداریز است.

حال چون برای هر $\ell\geq n$، $J^\ell=0$، در نتیجه R، $\ell-$نیم آرمنداریز است. ■

حلقه‌ی موضعی R که در آن $J^n(R)^n=0$ باشد با توجه به گزاره‌ی ۵.۳.۲، برای هر $\ell\geq n$، $\ell-$نیم آرمنداریز است، که در آن $J(R)$، رادیکال جیکبسون حلقه‌ی R است.

نتیجه ۶.۳.۲. *فرض کنیم p عددی اول و $\mathbb{Z}_p$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی p باشد.*

$$R=\begin{pmatrix}0 & \mathbb{Z}_p\\ 0 & 0\end{pmatrix}\oplus_D\mathbb{Z}_p.$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت $D_n(R)$ برای هر $m\geq n+1$، $m-$نیم آرمنداریز است.

برهان. فرض کنیم $\circ \oplus_D \begin{pmatrix} \circ & \mathbb{Z}_p \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$ = I و $J = \{(a_{ij}) \in D_n(R) | a_{ii} \in I\}$. چون $\frac{D_n(R)}{J}$ با $\mathbb{Z}_p$ یکریخت است و $J^{n+1} = \circ$، در نتیجه $D_n(R)$ موضعی است. بنابراین هر عنصر $D_n(R) \setminus J$ منظم است و در نتیجه با توجه به گزاره‌ی ۵.۳.۲، $D_n(R)$ (برای $m \geq n+1$) m–نیم آرمنداریز است. ■

۴.۲ حلقه‌های جابه‌جایی n – نیم آرمنداریز

در این بخش با استفاده از مباحث مطرح شده در مرجع [۱] به بررسی ساختار حلقه‌های جابه‌جایی n–نیم آرمنداریز می‌پردازیم.

فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. برای $f \in R[x]$، ایده‌آل تولیدشده با ضرایب f را با A_f نشان می‌دهیم. اگر $f, g \in R[x]$، آن‌گاه $A_{fg} \subseteq A_f A_g$، اما لزوماً تساوی برقرار نیست. حلقه‌ی R را گاوسی می‌نامیم، هرگاه برای هر $f, g \in R[x]$، $A_{fg} = A_f A_g$. همچنین توجه داریم که حلقه‌های R آرمنداریز است اگر و فقط اگر برای $f, g \in R[x]$ با شرط $A_{fg} = \circ$، داشته باشیم $A_f A_g = \circ$. بنابراین اگر R گاوسی باشد، آن‌گاه R، آرمنداریز است.

لم ۱.۴.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت R، n–نیم آرمنداریز است اگر و فقط اگر برای $f \in R[x]$، اگر $A_{f^n} = \circ$، آن‌گاه $(A_f)^n = \circ$.*

قضیه ۲.۴.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت R گاوسی است اگر و فقط اگر برای هر تصویر همریخت R، آرمنداریز باشد.*

برهان. فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. اگر R گاوسی باشد، آن‌گاه، $\frac{R}{I}$ گاوسی و لذا آرمنداریز است.

حال فرض کنیم $f, g \in R[x]$ و $fg = \circ$. در نتیجه در حلقه‌ی $\frac{R}{A_{fg}}[x]$، $\bar{f}\bar{g} = \circ$ و چون $\frac{R}{A_{fg}}$ آرمنداریز است، پس $\frac{A_f A_g}{A_{fg}}$. بنابراین $A_{fg} = A_f A_g$ و لذا R گاوسی است. ■

نتیجه ۳.۴.۲. *حلقه‌ی جابه‌جایی R گاوسی است اگر و فقط اگر برای هر $f_1, \ldots, f_n \in R[X]$ داشته باشیم $A_{f_1, \ldots, f_n} = A_{f_1} \cdots A_{f_n}$.*

با توجه به قضیه‌ی (۲.۲) از [۲۱] هر تصویر همریخت از حوزه‌ی ایده‌آل اصلی آرمنداریز است. در قضیه‌ی زیر نتیجه‌ی مشابهی برای n–نیم آرمنداریز ملاحظه می‌کنیم.

قضیه ۴.۴.۲. *(۱) فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت برای هر $f \in R[x]$، $A_{f^n} = (A_f)^n$ است اگر و فقط اگر هر تصویر همریخت R، n–نیم آرمنداریز باشد.*

(۲) فرض کنیم R یک حلقه و S یک بسته‌ی ضربی در R که شامل عناصر مرکزی منظم باشد. در این صورت R، n–نیم آرمنداریز است اگر و فقط اگر $S^{-1}R$، n–نیم آرمنداریز باشد.

برهان. (۱) فرض کنیم که $A_{f^n} = (A_f)^n$ برای $f \in R[x]$. در این صورت هر حلقه‌ی خارج قسمتی $\bar{R}$ از R در این شرایط صدق می‌کند، با توجه به لم ۱.۴.۲، R حلقه‌ای $n-$نیم آرمندادریز است. برعکس فرض کنیم که هر تصویر همریخت از R، $n-$نیم آرمندادریز باشد. برای $f \in R[x]$، $S = \frac{R}{A_{f^n}}$ را در نظر بگیریم. در این صورت $(\bar{f})^n = 0$ در S و چون $\frac{R}{A_{f^n}}$، $n-$نیم آرمندادریز است داریم $\frac{(A_f)^n}{A_{f^n}} = 0$، که مستلزم این است که $(A_f)^n = A_{f^n}$.

(۲) با توجه به لم ۱.۲.۲(۲) کافی است ثابت کنیم اگر R، $n-$نیم آرمندادریز باشد، آن‌گاه $S^{-1}R$ نیز $n-$نیم آرمندادریز است. فرض کنیم R، $n-$نیم آرمندادریز باشد و

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i \in S^{-1}R[x]$$

که $f(x)^n = 0$ را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم فرض کنیم $\alpha_i = a_i u^{-1}$ که در آن برای هر i، $a_i \in R$ و $u \in S$ منظم باشد. قرار می‌دهیم $f_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$، لذا داریم

$$0 = f(x)^n = \left(f_1(x)u^{-1}\right)^n = f_1(x)^n u^{-n},$$

که نشان می‌دهد $f_1(x)^n = 0$. چون R، $n-$نیم آرمندادریز است، $a_{i_1} \cdots a_{i_n} = 0$ برای هر انتخاب a_{i_j}ها با $j = 1, \dots, n$.

از این‌رو برای هر انتخاب α_{i_j}ها با $j = 1, \dots, n$، $\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n} = 0$. بنابراین $S^{-1}R$، $n-$نیم آرمندادریز است. ■

با در نظر گرفتن قضیه‌ی ۴.۴.۲، مشاهده می کنیم حلقه‌ی جابه‌جایی تقلیل یافته وجود دارد که تصویر همریخت آن $n-$نیم آرمندادریز نمی‌باشد (مثال ۷.۲.۲). فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و $T(R)$ حلقه‌ی خارج قسمتی R به‌روی S که شامل R باشد؛ یعنی، $(R \subseteq S \subseteq T(R))$.

از قضیه‌ی ۴.۴.۲(۲) و لم ۱.۲.۲(۲)، نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۵.۴.۲. *(۱) فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و S شامل R باشد. در این صورت R، $n-$نیم آرمندادریز است اگر و فقط اگر S، $n-$نیم آرمندادریز است اگر و فقط اگر $T(R)$، $n-$نیم آرمندادریز باشد.*

(۲) فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و P ایده‌آل اولی از R باشد به‌طوری‌که $R \setminus P$ شامل مقسوم علیه صفر آن نباشد. در این صورت R، $n-$نیم آرمندادریز است اگر و فقط اگر R_P چنین باشد.

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد به‌طوری‌که صفر $P-$اولیه است و $P^2 = 0$. در این صورت با توجه به گزاره‌ی ۴.۵.۱، R آرمندادریز است. به‌طور مشابه نتیجه را برای حلقه‌های $n-$نیم آرمندادریز در گزاره‌ی زیر به‌دست می‌آوریم.

گزاره ۶.۴.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و Q ایده‌آلی از R باشد به‌طوری‌که Q، P−اولیه است و $P^n \subseteq Q$. در این صورت $\frac{R}{Q}$ و $\frac{R[X]}{Q[X]}$، برای $\ell \geq n$، ℓ−نیم آرمنداریز هستند.*

برهان. فرض کنیم $f = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i \in \frac{R}{Q}[x]$ با شرط $f^n = 0$. چون Q ایده‌آلی P−اولیه است لذا $Q[x]$ یک ایده‌آل $P[x]$−اولیه در $R[x]$ می‌باشد و همچنین $\frac{R[x]}{P[x]}$ یک حوزه‌ی جابه‌جایی است، که نتیجه می‌دهد $f \in P[x]$. در این صورت به ازای هر i، $a_i \in P$ است و چون $P^n \subseteq Q$، در نتیجه $\frac{R}{Q}$، n−نیم آرمنداریز است. همچنین با توجه به محاسبات فوق برای $\ell \geq n$، چون $P^\ell \subseteq Q$، داریم که $\frac{R}{Q}$، ℓ−نیم آرمنداریز است. حال با توجه به قضیه‌ی ۱.۳.۲(۱)، $\frac{R[X]}{Q[X]}$ ($\cong \frac{R}{Q}[X]$)، ℓ−نیم آرمنداریز است. ■

مثال ۷.۴.۲. **۱)** فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حلقه‌ی اعداد صحیح و p یک ایده‌آل اول باشد. چون p^n $(n \geq 2)$ نسبت به p اولیه است و $\langle p \rangle^n = \langle p^n \rangle$ ، بنابراین با توجه به گزاره‌ی ۶.۴.۲، $\frac{\mathbb{Z}}{\langle p^n \rangle}$ به ازای $\ell \geq n$، ℓ−نیم آرمنداریز است.

۲) فرض کنیم $S = \mathbb{Z}[x,y]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها با متغیرهای جابجایی x و y روی $\mathbb{Z}$ باشد. چون $Q = (x^n, y^n, x^i y^i)$ ($n \geq 2$ و $i + j = n$) نسبت به (x,y) و $(x,y)^n = Q$ اولیه است، با توجه به گزاره‌ی ۶.۴.۲، $\frac{S}{Q}$ به ازای $\ell \geq n$، ℓ−نیم آرمنداریز است.

فصل ۳

بررسی حلقه‌های ماتریسی نیم آرمنداریز

در این فصل حلقه‌های ماتریسی که خاصیت n−نیم آرمنداریز دارند را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم و انگیزه این مطالعه در نتایج چئون[۱]، لی [۲]و ریو[۳] از فصل دوم و یک مساله باز گذاشته شده در آن فصل است. در قضیه‌ی ۲.۲.۲ نشان داده شد که برای هر $n \geq ۲$ حلقه‌ی ماتریسی بالا مثلثی $n \times n$، $U_n(R)$ روی حلقه‌ی R، n−نیم آرمنداریز است اگر و فقط اگر R تقلیل یافته باشد.

همچنین در این فصل برخی دیگر از نتایج فصل دوم را برای حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی حلقه‌ی R، که درایه‌های قطری آن متعلق به زیرحلقه‌ای S از R است را توسیع می‌دهیم. مطالب و مباحث این فصل برگرفته از مرجع [۱۷] می‌باشد.

طبق قضیه‌ی ۲.۲.۲ و لم ۱.۲.۲، اگر R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد، آن‌گاه حلقه‌ی $D_n(R)$، n−نیم آرمنداریز است. طبیعی است که پرسیده شود آیا معکوس آن می‌تواند برقرار باشد؟ در فصل قبل این مساله حل نشده باقی ماند. که در این فصل به آن پاسخ می‌دهیم.

نماد گذاری: حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ روی R را با نماد $M_n(R)$ نشان می‌دهیم. برای

---
۱ Jeon
۲ Lee
۳ Ryu

ماتریس $A \in M_n(R)$ و هر $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$، درایه‌ی (i, j) از A را با $A^{(ij)}$ نشان می‌دهیم.
یکریختی طبیعی $\Phi : M_n(R)[x] \longrightarrow M_n(R[x])$ چندجمله‌ای

$$f = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_k x^k \in M_n(R)[x]$$

را به ماتریس $\Phi(f)$ (که یک ماتریس $n \times n$ است) روی $R[x]$ تصویر می‌کند که درایه‌های (i, j) آن برای هر $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ به‌صورت چندجمله‌ای زیر است:

$$A_0^{(ij)} + A_1^{(ij)} x + A_2^{(ij)} x^2 + \cdots + A_k x^k \in R[x].$$

معمولاً یکریختی Φ را به صورت تحدید به یک زیرحلقه‌ی معین از حلقه‌ی $M_n(R)$ در نظر خواهیم گرفت؛ به‌طوری‌که این تحدید را نیز با نماد Φ نشان خواهیم داد.

۱.۳ حلقه‌های ماتریسی nـ نیم آرمنداریز

هدف از این بخش معرفی زیرحلقه‌های nـنیم آرمنداریز از حلقه‌ی ماتریسی کامل $M_m(R)$ می‌باشد که در آن R یک حلقه و $m \geq 2$ است. برای شروع ابتدا نشان می‌دهیم که حلقه‌ی $M_m(R)$ برای $n \geq 2$، nـنیم آرمنداریز نیست.

گزاره ۱.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و $m, n \geq 2$. در این صورت حلقه‌ی $M_m(R)$، nـنیم آرمنداریز نیست.*

برهان. فرض کنیم $f = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \in M_m(R)[x]$، که در آن

$$A_0 = E_{1m}, \quad A_1 = E_{11} - E_{mm}, \quad A_2 = -E_{m1}.$$

در این صورت $f^2 = 0$ و لذا $f^n = 0$. چون $A_1^n = E_{11} + (-1)^n E_{mm} \neq 0$، حلقه‌ی $M_m(R)$، nـنیم آرمنداریز نیست. ■

لم ۲.۱.۳. *فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد به‌طوری‌که حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ تقلیل یافته است. همچنین فرض کنیم m یک عدد صحیح مثبت باشد به‌طوری‌که $I^m = 0$. در این صورت برای هر $n \geq m$، R یک حلقه‌ی nـنیم آرمنداریز است.*

برهان. به‌وضوح، مجموعه‌ی $I[x]$ ایده آلی از $R[x]$ است که عناصر آن به فرم چندجمله‌هایی با ضرایبی در I می‌باشند. چون حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ تقلیل یافته است و از طرفی حلقه‌ی $\frac{R}{I}[x]$ یکریخت با $\frac{R[x]}{I[x]}$ است، پس $\frac{R[x]}{I[x]}$ نیز تقلیل یافته است. اگر چندجمله‌ای $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \in R[x]$ در شرط $f^n = 0$ صدق کند، آن‌گاه $f \in I[x]$ و لذا برای هر i، $a_i \in I$. از این‌رو، اگر $n \geq m$، آن‌گاه برای هر $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0, 1, \ldots, k\}$ داریم $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n} \in I^n \subseteq I^m = 0$، این نشان می‌دهد که R حلقه‌ای nـنیم آرمنداریز است. ■

یک نتیجه مستقیم از لم ۲.۱.۳، گزاره‌ی ۵.۳.۲ است. در مثال ۴.۲.۳ خواهیم دید که در لم ۲.۱.۳ شرط تقلیل یافته بودن $\frac{R}{I}$ ضروری است.

ملاحظه ۳.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. یادآور می‌شویم که ایده‌آل J از R کاملاً اول است هرگاه حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{J}$ یک دامنه باشد. اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های کاملاً اول R را رادیکال پوچ تعمیم‌یافته‌ی R می‌نامند و با $N_g(R)$ نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که اگر I یک ایده‌آل از R باشد به‌طوری‌که حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ تقلیل یافته و برای $m > 0$، $I^m = 0$، آن‌گاه $I = N_g(R)$. در واقع چون $I^m = 0$، نتیجه می‌گیریم که I مشمول در هر ایده‌آل کاملاً اول R است و $I \subseteq N_g(R)$. عکس شمول بلافاصله از این واقعیت نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب هر تعداد دامنه، یک حلقه‌ی تقلیل یافته است. بنابراین $I = N_g(R)$. لذا می‌توان لم ۲.۱.۳ را بدین صورت نوشت: فرض کنیم R یک حلقه باشد به‌طوری‌که برای بعضی عددهای صحیح مثبت m، $N_g(R)^m = 0$ آن‌گاه برای هر $m \geq n$، R یک حلقه‌ی n−نیم آرمنداریز است.*

تعریف ۴.۱.۳. فرض کنیم S زیرحلقه‌ی R باشد. برای هر عدد صحیح مثبت n مجموعه‌ی زیر را داریم:

$$U_n(S,R) = \{A \in U_n(R) | A^{(ii)} \in S,\ \forall i \in \{1,2,\dots,n\}\},$$

یعنی؛ $U_n(S,R)$ شامل همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی روی R که درایه‌های قطری آن‌ها متعلق به S می‌باشد. به‌وضوح $U_n(S,R)$ یک زیرحلقه از $U_n(R)$ است. به‌علاوه مجموعه‌ی زیر را داریم:

$$N_n(R) = \{A \in U_n(R) | A^{(ii)} = 0,\ \forall i \in \{1,2,\dots,n\}\}.$$

یعنی؛ $N_n(R)$ مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی روی R با درایه‌های قطری برابر صفر است. بدیهی است که $N_n(R)$ ایده‌آلی از $U_n(R)$ و $U_n(S,R)$ است.

گزاره‌ی زیر در اثبات k−نیم آرمنداریز بودن برخی حلقه‌های ماتریسی به‌فرم $U_n(S,R)$ مفید خواهد بود.

گزاره ۵.۱.۳. *فرض کنیم S زیرحلقه‌ی R و n یک عدد صحیح مثبت باشد. اگر ایده‌آل I از R موجود باشد به‌طوری‌که $I \subseteq S$، حلقه‌ی $\frac{S}{I}$ تقلیل یافته و برای $m > 0$، $I^m = 0$، آن‌گاه برای هر $k \geq n+m-1$، $U_n(S,R)$ حلقه‌ی k−نیم آرمنداریز است.*

برهان. چون I ایده‌آلی از R است، پس مجموعه‌ی

$$J = \Big\{A \in U_n(S,R) |\ A^{(ii)} \in I,\ \forall i \in \{1,2,\dots,n\}\Big\}$$

یک ایده‌آل از $U_n(S,R)$ است. به‌علاوه حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{U_n(S,R)}{J}$ با مجموع مستقیم n−تا از حلقه‌ی تقلیل یافته‌ی $\frac{S}{I}$ یکریخت است. لذا $\frac{U_n(S,R)}{J}$ نیز تقلیل یافته است. از این‌رو با توجه

به لم ۲.۱.۳، برای کامل کردن برهان کافیست نشان دهیم که $J^{n+m-1}=0$. برای این منظور کافیست نشان دهیم که برای هر $A_1, A_2, \ldots, A_{n+m-1} \in J$ داریم $A_1A_2\cdots A_{n+m-1}=0$. توجه داشته باشید که برای هر $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ درایه‌ی (i,j) از ماتریس $A_1A_2\cdots A_{n+m-1}$ یک مجموع از حاصل‌ضرب‌هایی به‌صورت زیر است:

$$A_1^{(k_1k_2)}A_2^{(k_2k_3)}A_3^{(k_3k_4)}\cdots A_{n+m-1}^{(k_{n+m-1}k_{n+m})} \tag{1.3}$$

که در آن $k_1=i$ و $k_{n+m}=j$. اگر برای برخی $l \in \{1,2,\ldots,n+m-1\}$، $k_l > k_{l+1}$، آن‌گاه $A_l^{(k_lk_{l+1})}=0$. لذا حاصل‌ضرب (۱.۳) در این حالت برابر با صفر است. در غیر این صورت داریم:

$$1 \leq i = k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \cdots \leq k_{n+m} = j \leq n.$$

از این‌رو در این حالت می‌بایست حداقل m جفت (k_l, k_{l+1}) با شرط $k_l = k_{l+1}$ موجود باشد. حال برای هر (k_l, k_{l+1})، چون $A_j \in J$، پس $A_l^{(k_lk_{l+1})} \in I$. در نتیجه حاصل‌ضرب (۱.۳) متعلق به I^m است، پس برابر با صفر است. لذا $A_1A_2\cdots A_{n+m-1}=0$. ■

در فصل اول ملاحظه نمودیم که برای هر $n \geq 2$، اگر R یک حلقه‌ی دلخواه باشد، آن‌گاه حلقه‌ی ماتریس بالا مثلثی $U_n(R)$ آرمنداریز نیست (مثال ۵.۴.۱ مشاهده کنید). به‌علاوه در فصل دوم نشان دادیم که اگر R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد، آن‌گاه $U_n(R)$، $n-$نیم آرمنداریز است، که در قضیه‌ی ۲.۲.۲ بیان شد. قضیه‌ی زیر توسیع قضیه‌ی ۲.۲.۲ به حلقه‌های ماتریسی به فرم $U_n(S,R)$ می‌باشد، که با برهان متفاوتی در این فصل به‌دست می‌آید.

قضیه ۶.۱.۳. *فرض کنیم S یک زیرحلقه از حلقه‌ی R و $n \geq 2$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت*

الف) *گزاره‌های زیر معادلند:*

- **(i)** *$U_n(S,R)$، $n-$نیم آرمنداریز است؛*
- **(ii)** *برای هر عدد صحیح $k \geq n$، $U_n(S,R)$ حلقه‌ای $k-$نیم آرمنداریز است؛*
- **(iii)** *S تقلیل یافته است.*

ب) *$U_{n+1}(S,R)$، $n-$نیم آرمنداریز است اگر و فقط اگر S تقلیل یافته و R آرمنداریز باشد.*

برهان. (الف) (i)⟸(iii): فرض کنیم $U_n(S,R)$، $n-$نیم آرمنداریز باشد. در این صورت بنا به لم ۱.۲.۲(۲)، حلقه‌ی $U_n(S)$، $n-$نیم آرمنداریز است. از این‌رو با توجه به قضیه‌ی ۲.۲.۲، حلقه‌ی S تقلیل یافته است.

(iii)⟸(ii): گزاره‌ی ۵.۱.۳ با مفروضات $I=0$ و $m=1$ به‌کار می‌بریم.

(ii)⟸(i): بدیهی است.

(ب) از نکته‌ی زیر استفاده خواهیم کرد:
برای هر حلقه‌ی T و ماتریس‌های $B_1, B_2, \dots, B_n \in N_{n+1}(T)$ داریم:

$$B_1 B_2 \cdots B_n = B_1^{(1,2)} B_2^{(2,3)} \cdots B_n^{(n,n+1)} E_{1,n+1}. \qquad (۲.۳)$$

برای برقراری (۲.۳)، توجه داشته باشیم که برای هر $i, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ درایه‌ی (i,j) از $B_1 B_2 \cdots B_n$ به‌صورت مجموعی از حاصل‌ضرب‌های زیر است:

$$B_1^{(k_1 k_2)} B_2^{(k_2 k_3)} \cdots B_n^{(k_n k_{n+1})}, \qquad (۳.۳)$$

که در آن $k_1 = i$ و $k_{n+1} = j$. برای هر $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ داریم $B_l \in N_{n+1}(T)$ و بنابراین اگر $k_l \geq k_{l+1}$، آن‌گاه $B_l^{(k_l k_{l+1})} = 0$. از این‌رو حاصل‌ضرب (۳.۳) فقط در حالتی می‌تواند غیرصفر باشد که

$$1 \leq i = k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < k_{n+1} = j \leq n+1.$$

به‌عبارت دیگر، برای هر $l \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ داشته باشیم $k_l = l$. لذا رابطه‌ی (۲.۳)، به‌دست می‌آید.

برای اثبات (ب) قرار می‌دهیم $V = U_{n+1}(S, R)$ و $N = N_{n+1}(R)$. فرض کنیم V حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز باشد. چون $U_n(S, R)$ با زیرحلقه‌ای از V یکریخت است، پس با توجه به لم ۱.۲.۲(۲) حلقه‌ی $U_n(S, R)$، n−نیم آرمنداریز است. لذا بنا به برهان قسمت (الف)، حلقه‌ی S تقلیل یافته است. حال نشان می‌دهیم که R آرمنداریز است. چندجمله‌ای‌های دلخواه

$$f = \sum_{i=0}^{k} a_i x^k, \quad g = \sum_{j=0}^{l} b_j x^j \in R[x]$$

به‌طوری‌که $fg = 0$ را در نظر می‌گیریم. بدون کاستن از کلیت مساله می‌توانیم فرض کنیم که $k = l$. برای هر $m \in \{0, 1, \dots, k\}$، قرار می‌دهیم:

$$A_m = a_m E_{12} + b_m E_{23} + E_{34} + \cdots + E_{n,n+1} \in N$$

و

$$h = A_0 + A_1 x + \cdots + A_k x^k \in N[x].$$

فرض کنیم $U_{n+1}(R[x]) \longrightarrow U_{n+1}(R)[x] : \Phi$ یکریختی طبیعی و $H = \Phi(h)$ باشد. چون $h \in N[x]$، نتیجه می‌شود که $H \in N_{n+1}(R[x])$. از این‌رو (۲.۳) نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} H^n &= H^{(1,2)} H^{(2,3)} H^{(3,4)} \cdots H^{(n,n+1)} E_{1,n+1} \\ &= fg(1 + x + \cdots + x^k)^{n-2} E_{1,n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

لذا $h^n = 0$. چون V، $n-$نیم آرمنداریز و $h^n = 0$ است، نتیجه می‌شود که برای هر i و j، $A_iA_jA_1^{n-2} = 0$. چون $A_i, A_j, A_1 \in N$، پس بنا به رابطه‌ی (۲.۳) داریم:

$$a_ib_j = A_i^{(1,2)}A_j^{(2,3)}A_1^{(3,4)}\cdots A_1^{(n,n+1)} = 0.$$

لذا ثابت می‌شود که R آرمنداریز است.

برعکس، فرض کنیم S تقلیل یافته و R آرمنداریز باشد. چندجمله‌ای دلخواه $q = A_0 + A_1x + \cdots + A_kx^k \in V[x]$ که $q^n = 0$ را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که برای هر i، $A_i \in N$. توجه داشته باشیم که چون S تقلیل یافته و N ایده‌آلی از V است به‌طوری‌که $\frac{V}{N}$ یکریخت با مجموع مستقیم $n+1-$تا از S باشد، پس حلقه‌ی $\frac{V}{N}$ نیز تقلیل یافته است. لذا حلقه‌ی $\frac{V}{N}[x] \cong \frac{V[x]}{N[x]}$. از $q^n = 0$ به‌دست می‌آید که $q \in N[x]$ و این ادعا را ثابت می‌کند.

فرض کنیم $\Phi : U_{n+1}(R)[x] \longrightarrow U_{n+1(R[x])}$ یکریختی طبیعی و $Q = \Phi(q)$ باشد. چون $q \in N[x]$ نتیجه می‌شود که $Q \in N_{n+1}(R[x])$. به‌علاوه، $Q^n = \Phi(q^n) = \Phi(0) = 0$. لذا بنا به رابطه‌ی (۲.۳) داریم:

$$Q^{(1,2)}Q^{(2,3)}\cdots Q^{(n,n+1)} = 0.$$

از این‌رو، اگر برای هر $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ قرار دهیم:

$$f_i = A_0^{(i,i+1)} + A_1^{(i,i+1)}x + \cdots + A_k^{(i,i+1)}x^k \in R[x],$$

آن‌گاه $f_1f_2\cdots f_n = 0$. چون R آرمنداریز است، با توجه به گزاره‌ی ۸.۴.۱ برای هر $n-$تایی $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$، خواهیم داشت:

$$A_{s_1}^{(1,2)}A_{s_2}^{(2,3)}\cdots A_{s_n}^{(n,n+1)} = 0.$$

لذا بنا به رابطه‌ی (۲.۳) نتیجه می‌شود که $A_{s_1}A_{s_2}\cdots A_{s_n} = 0$. بنابراین V، $n-$نیم آرمنداریز است. ■

نتیجه ۷.۱.۳. الف) *برای هر حلقه‌ی R و عدد صحیح $n \geq 2$، گزاره‌های زیر معادلند:*

(i) *$U_n(R)$، $n-$نیم آرمنداریز است؛*

(ii) *برای هر عدد صحیح $k \geq n$، $U_n(R)$ حلقه‌ای $k-$نیم آرمنداریز است؛*

(iii) *$U_{n+1}(R)$ حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز است؛*

(iv) *R تقلیل یافته است.*

ب) *اگر هر یک از این گزاره‌ها برقرار باشد، آن‌گاه $U_n(R)$ زیرحلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز ماکسیمال از $M_n(R)$ است.*

برهان. الف) چون حلقه‌های تقلیل یافته آرمنداریز هستند، بنا به قضیه‌ی ۶.۱.۳ گزاره‌های (i)، (ii)، (iii) و (iv) معادلند.

ب) فرض می‌کنیم R تقلیل یافته و T یک زیرحلقه‌ی n–نیم آرمنداریز از $M_n(R)$ باشد به‌طوری‌که $T \subsetneq U_n(R)$. در این صورت ماتریس $A \in T$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $i > j$ درایه‌ی (i,j) از A، مانند a، غیرصفر باشد. چون $E_{ii}, E_{jj} \in T$، لذا $E_{ii}AE_{jj} = aE_{ij} \in T$. بنابراین برای ماتریس‌های $A_۰ = aE_{ij}$، $A_۱ = aE_{ii} - aE_{jj}$ و $A_۲ = -aE_{ji}$ داریم $f = A_۰ + A_۱x + A_۲x^۲ \in T[x]$. به آسانی ملاحظه می‌شود که $f^۲ = ۰$، پس $f^n = ۰$. چون T، n–نیم آرمنداریز است، بنابراین $۰ = A_۱^n = a^nE_{ii} - a^nE_{jj}$. از این‌رو $a^n = ۰$. حال از تقلیل یافته بودن R به‌دست می‌آوریم $a = ۰$، که یک تناقض است. ■

عددهای صحیح $n \geq ۲$ و $m \geq n + ۲$ مفروض است. در این صورت بنا به قسمت (الف) نتیجه‌ی ۷.۱.۳ طبیعی است که سوال شود، آیا برای حلقه‌ی R، حلقه‌ی $U_m(R)$، n–نیم آرمنداریز است؟ گزاره‌ی زیر نشان می‌دهد که پاسخ منفی است (همچنین به مثال ۶.۲.۲ رجوع شود).

گزاره ۸.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه و $n \geq ۲$ یک عدد صحیح باشد. در این صورت برای هر عدد صحیح $m \geq n + ۲$ حلقه‌ی $U_m(R)$، n–نیم آرمنداریز نیست.*

برهان گزاره‌ی ۸.۱.۳ بر مبنای لم زیر برقرار است. در حکم لم به‌شیوه‌ای آشکار، مفهوم حلقه‌ی نیم آرمنداریز را به حلقه‌های غیریکه توسیع می‌دهیم. یادآور می‌شویم که $N_{n+۲}(R)$ شامل ماتریس‌های $(n+۲) \times (n+۲)$ بالا مثلثی روی R که درایه‌های قطری برابر صفر است. به‌وضوح، $N_{n+۲}(R)$ یک زیرحلقه‌ی غیریکه از $U_{n+۲}(R)$ است (همچنین، یک ایده‌آل از $U_{n+۲}(R)$ است).

لم ۹.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه باشد و عدد صحیح $n \geq ۲$. در این صورت حلقه‌ی غیریکه $N_{n+۲}(R)$، n–نیم آرمنداریز نیست.*

برهان. فرض کنیم $n = ۲$ باشد. قرار می‌دهیم $A = E_{۱۲} + E_{۳۴}$ و $B = E_{۱۲} + E_{۱۳} - E_{۲۴} + E_{۳۴}$. در این صورت $f = A + Bx \in N_۴(r)[x]$ که $f^۲ = ۰$، اما $AB = -E_{۱۴} \neq ۰$. بنابراین $N_۴(R)$، ۲–نیم آرمنداریز نیست.

حال فرض می‌کنیم که $n \geq ۳$. به توجه به استدلال مثال ۶.۲.۲ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} A &= E_{۱۲} + E_{۲۳} + \cdots + E_{n-۲,n-۱} + E_{n-۱,n+۱} + E_{n,n+۲} \in N_{n+۲}(R), \\ B &= E_{n-۱,n} + E_{n-۱,n+۱} + E_{n,n+۲} - E_{n+۱,n+۲} \in N_{n+۲}(R). \end{aligned}$$

به آسانی ملاحظه می‌شود که $B^۲ = BA^۲ = BAB = ۰$ و برای $۲ \leq k \leq n - ۲$،

$$\begin{aligned} A^k &= E_{۱,k+۱} + E_{۲,k+۲} + \cdots + E_{n-k-۱,n-۱} + E_{n-k,n+۱}, \\ A^{n-۱} &= E_{۱,n+۱}. \end{aligned}$$

از این‌رو برای $f = A + Bx \in N_{n+2}(R)[x]$ خواهیم داشت:

$$f^n = A^n + (A^{n-2}BA + A^{n-1}B)x = (E_{1,n+2} - E_{1,n+2})x = 0.$$

چون $A^{n-2}BA = E_{1,n+2} \neq 0$، پس حلقه‌ی $N_{n+2}(R)$، $n-$نیم آرمنداریز نیست. ■

حال گزاره‌ی ۸.۱.۳ را اثبات می‌کنیم.

برهان. **(گزاره‌ی ۸.۱.۳)** از لم ۱.۲.۲(۲) و لم ۹.۱.۳ نتیجه می‌گیریم که حلقه‌ی $U_{n+2}(R)$، $n-$نیم آرمنداریز نیست. برای کامل کردن برهان، عدد صحیح دلخواه $m \geq n+2$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت حلقه‌ی $U_{n+2}(R)$ با یک زیرحلقه از $U_m(R)$ یکریخت است. چون حلقه‌ی $U_{n+2}(R)$، $n-$نیم آرمنداریز است، لم ۱.۲.۲(۲) نشان می‌دهد که $U_m(R)$، $n-$نیم آرمنداریز نیست. ■

فرض کنیم R یک حلقه و n و k اعدادی صحیح باشند به‌طوری‌که $2 \leq n < k$. با توجه به نتیجه‌ی ۷.۱.۳، تقلیل یافته بودن R نشان می‌دهد که $U_n(R)$ حلقه‌ای $k-$نیم آرمنداریز است. مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این حالت درست نمی‌باشد، یعنی؛ برای هر $2 \leq n < k$ حلقه‌ی غیرتقلیل یافته‌ی R وجود دارد به‌طوری‌که حلقه‌ی $U_n(R)$، $k-$نیم آرمنداریز است.

مثال ۱۰.۱.۳. فرض کنیم p یک عدد اول و $m = k - n + 1$ باشد. همچنین فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_{p^m}$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه‌ی p^m و $I = \langle p \rangle$ ایده‌آل تولید شده توسط p باشد. در این صورت حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{I} \cong \mathbb{Z}_p$ تقلیل یافته و $I^m = 0$. از این‌رو با توجه به گزاره‌ی ۵.۱.۳ حلقه‌ی $U_n(R)$ حلقه‌ای $k-$نیم آرمنداریز است. به‌علاوه، چون $m \geq 2$، حلقه‌ی R تقلیل یافته نیست.

نتیجه‌ی ۷.۱.۳ نشان می‌دهد که حلقه‌ی $U_n(R)$ به‌دست آمده در مثال ۱۰.۱.۳ حلقه‌ای $n-$نیم آرمنداریز نمی‌باشد. همچنین نشان داده شد که برای هر $2 \leq n < k$ نیز یک حلقه‌ی $k-$نیم آرمنداریز وجود دارد که $n-$نیم آرمنداریز نیست (به مثال ۷.۲.۲ رجوع شود).

۲.۳ پاسخ به مساله‌ی چئون، لی و ریو

فرض کنیم $n \geq 2$ یک عدد صحیح باشد. در قضیه‌ی ۲.۲.۲ چئون، لی و ریو نشان دادند که $U_n(R)$، $n-$نیم آرمنداریز است اگر و فقط اگر R تقلیل یافته باشد (نتیجه‌ی ۷.۱.۳ را مشاهده کنید). چون مجموعه‌ی

$$D_n(R) = \{A \in U_n(R) | A^{(1,1)} = A^{(2,2)} = \cdots = A^{(n,n)}\}$$

(یعنی؛ مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی روی R که درایه‌های قطری آن‌ها برابر است) یک زیرحلقه از $U_n(R)$ است، از لم ۱.۲.۲(۲) نتیجه می‌شود که اگر R یک حلقه‌ی تقلیل

یافته باشد، آن‌گاه $D_n(R)$، $n-$نیم آرمنداریز است. طبیعی است که سوال شود، آیا می‌توان عکس آن را نشان داد؟ که این منجر به مطرح شدن مساله‌ی زیر شد.

مساله ۱: اگر $n \geq ۲$ و حلقه‌ی $D_n(R)$، $n-$نیم آرمنداریز باشد، آیا ضروری است که R یک حلقه‌ی تقلیل یافته باشد؟

در فصل دوم مساله بدون پاسخ باقی ماند. در مثال ۲.۲.۳ نشان خواهیم داد که پاسخ مساله برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$، منفی است. جواب به آسانی از قضیه‌ی ۱.۲.۳ به‌دست خواهد آمد.

دلیل اصلی تمرکز ما در قضیه‌ی ۱.۲.۳ بر روی حلقه‌های $D_n(S)$ که در آن $S = D_۲(R)$، این است که حلقه‌ی S تقلیل یافته نیست. بنابراین در صورت مساله‌ی ۱، طبیعی است بپرسید، در چه صورتی حلقه‌ی $D_n(S) = D_n(D_۲(R))$، $n-$نیم آرمنداریز است. در قضیه‌ی زیر پاسخ این سوال را در حالتی که حلقه‌ی R تقلیل یافته و جابه‌جایی است داده می‌شود.

برای حلقه‌ی R، اگر n عددی صحیح مثبت و $r \in R$ باشد، آن‌گاه nr نشان دهنده‌ی جمع $r + r + \cdots + r$ با n جمعوند است.

قضیه ۱.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی تقلیل یافته و n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:*

(i) *حلقه‌ی $D_n(D_۲(R))$، $n-$نیم آرمنداریز است؛*

(ii) *حلقه‌ی $\frac{D_۲(R)[x]}{\langle x^n \rangle}$، $n-$نیم آرمنداریز است؛*

(iii) *اگر $nr = ۰$ باشد، آن‌گاه برای هر $r \in R$، $r = ۰$ است.*

برهان. حالت $n = ۱$ بدیهی است، زیرا هر حلقه به وضوح ۱−نیم آرمنداریز است. بنابراین فرض کنیم که $n \geq ۲$ باشد.

(i)⟸(ii): فرض کنیم حلقه‌ی $D_n(D_۲(R))$، $n-$نیم آرمنداریز است. حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{D_۲(R)[x]}{\langle x^n \rangle}$ با حلقه‌ی ماتریسی

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_۱ & A_۲ & \dots & A_{n-۱} & A_n \\ ۰ & A_۱ & \ddots & & A_{n-۱} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \ddots & A_۱ & A_۲ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ & A_۱ \end{pmatrix} \middle| A_۱, A_۲, \dots, A_n \in D_۲(R) \right\},$$

که زیرحلقه‌ای از $D_n(D_۲(R))$ می‌باشد یکریخت است. از این‌رو گزاره‌ی ۲.۲.۲(۱) نشان می‌دهد که حلقه‌ی $\frac{D_۲(R)[x]}{\langle x^n \rangle}$، $n-$نیم آرمنداریز است.

(ii)⟸(iii): قرار می‌دهیم $P = \frac{D_۲(R)[x]}{\langle x^n \rangle}$ و فرض می‌کنیم P، $n-$نیم آرمنداریز باشد. از

نمادگذاری ستونی عناصر P استفاده می‌کنیم، به‌عبارت دیگر، برای هر $h \in D_2(R)[x]$ داریم $\bar{h}$ که نشان دهنده‌ی هم‌مجموعه‌ی $h + \langle x^n \rangle \in P$ است. فرض کنیم $r \in R$ باشد به‌طوری‌که $nr = 0$. مجموعه‌ی

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D_2(R)$$

و چندجمله‌ای $f = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}t \in P[t]$ را در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که در P داریم $\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A}$، $\bar{B}^2 = 0$، $\bar{x}^n = 0$ و $n\bar{A} = 0$. از این‌رو، با توجه به قضیه‌ی دوجمله‌ای،

$$\begin{aligned} f^n &= (\bar{A}\bar{x} + \bar{B}t)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\bar{A}^n \bar{x})^{n-i} (\bar{B}t)^i \\ &= \bar{A}^n \bar{x}^n + n\bar{A}^{n-1}\bar{x}^{n-1}\bar{B}t \\ &= 0. \end{aligned}$$

چون P حلقه‌ای n−نیم آرمنداریز است، نتیجه می‌شود که $(\bar{A}\bar{x})^{n-1}\bar{B} = 0$. لذا $A^{n-1}Bx^{n-1} \in \langle x^n \rangle$. از این‌رو، $A^{n-1}B = 0$ و در نتیجه $r^{n-1} = 0$. چون R تقلیل یافته است، بنابراین $r = 0$ به‌دست می‌آید که این نتیجه‌ی مطلوب است.

(iii)⟸(i): فرض کنیم $D(R) = D_n(D_2(R))$. برای ادامه برهان، حلقه‌ی $D(R)$ را به‌عنوان یک زیرحلقه از $U_{2n}(R)$ در نظر می‌گیریم. برای هر $B \in D(R)$ و $i, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$، $B^{(i,j)}$ نشان دهنده‌ی درایه‌ی (i, j) از ماتریس B است.

به‌وضوح $N(R) = \{B \in D(R) : B^{(ii)} = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, 2n\}\}$ یک ایده‌آل از $D(R)$ است. با توصیف صورت هر حاصلضرب از n ماتریس $N(R)$، که در اثبات (iii) به (i) بسیار مهم خواهد بود شروع می‌کنیم. خواننده باید توجه داشته باشد که در این قسمت از برهان هیچ فرضی را بر روی حلقه‌ی R قرار ندادیم.

فرض کنیم $B_1, B_2, \dots, B_n \in N(R)$ و $B = B_1 B_2 \cdots B_n$. در این صورت برای هر $i, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$، درایه‌ی (i, j) از B یک جمع از حاصلضرب‌ها به صورت زیر است:

$$b = B_1^{(k_0 k_1)} B_2^{(k_1 k_2)} B_3^{(k_2 k_3)} \cdots B_n^{(k_{n-1} k_n)}, \tag{۴.۳}$$

که در آن $k_0 = i$ و $k_n = j$ فرض کنیم $b \neq 0$. در این صورت $B_t^{(k_t k_{t+1})} \neq 0$ برای هر $t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$، و چون $B_t \in N(R)$، نتیجه می‌شود که $k_t < k_{t+1}$. بنابراین

$$1 \leq i = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-1} < k_n = j \leq 2n.$$

توجه داشته باشید که برای هر ماتریس $A \in D(R) = D_n(D_2(R))$ داریم $A^{(pq)} = 0$ برای هر جفت (p, q) که p زوج و q فرد است. از این‌رو، چون $b \neq 0$، اگر k_t برای $t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$،

زوج باشد، آن‌گاه $k_{t+1}, k_{t+2}, \dots, k_n$ نیز زوج هستند. اگر k_0 زوج باشد، آن‌گاه $k_1, k_2, \dots, k_n$ نیز زوج است، و $n+1$ عدد صحیح زوج در بازه‌ی $(1, 2n)$ به‌دست می‌آوریم، که یک تناقض است. بنابراین k_0 فرد است. همچنین اگر $k_1, k_2, \dots, k_n$ زوج باشند، آن‌گاه $n+1$ عدد صحیح بین ۱ و $2n$ وجود دارد، که یک تناقض است. بنابراین، $m \in \{1, 2, \dots\dots, n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $k_0, k_1, \dots, k_{m-1}$ فرد و $k_m, k_{m+1}, \dots, k_n$ زوج هستند. از این‌رو

$$k_0 + 2(m-1) \leq k_{m-1} \quad \text{و} \quad k_m \leq k_n - 2(n-m). \tag{۵.۳}$$

به‌علاوه چون $k_{m-1} < k_m$، از (۵.۳) نتیجه می‌شود که $2n - 1 \leq k_n - k_0$. لذا $k_0 = 1$ و $k_n = 2n$. حال مقادیر k_0 و k_n را در ۵.۳ قرار می‌دهیم، و $k_{m-1} = 2m - 1$ و $k_m = 2m$ را به‌دست می‌آوریم.

حال بنابه مطالب فوق، اگر $b \neq 0$ باشد، آن‌گاه $i = 1$، $j = 2n$ و دنباله‌ی

$$(k_0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n)$$

به‌صورت زیر است:

$$(\underbrace{1, 3, \dots, 2m-1}_{\text{اعداد صحیح فرد}}, \underbrace{2m, 2m+2, \dots, 2n}_{\text{اعداد صحیح زوج}}) \tag{۶.۳}$$

برای $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. دنباله‌ی (۶.۳)، را با نماد γ_m و مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌ها را با نماد $\mathcal{C}_n$ نشان می‌دهیم، یعنی؛ $\mathcal{C}_n = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$. برای مثال، $\mathcal{C}_4$ نشان دهنده‌ی چهار دنباله‌ی زیر است:

$$\gamma_1 = (1, 2, 4, 6, 8), \gamma_2 = (1, 3, 4, 6, 8), \gamma_3 = (1, 3, 5, 6, 8), \gamma_4 = (1, 3, 5, 7, 8).$$

برای ساده کردن نماد، برای هر $\gamma = (k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, k_n) \in \mathcal{C}_n$، حاصل‌ضرب (۴.۳) را با نماد $\gamma(B_1, B_2, \dots, B_n)$ نشان خواهیم داد، یعنی؛

$$\gamma(B_1, B_2, \dots, B_n) = B_1^{(k_0 k_1)} B_2^{(k_1 k_2)} B_3^{(k_2 k_3)} \cdots B_n^{(k_{n-1} k_n)}.$$

به‌طور خلاصه، با استفاده از نمادگذاری فوق، اگر $B_1, B_2, \dots, B_n \in N(R)$، آن‌گاه درایه‌ی $(1, 2n)$ از حاصل‌ضرب $B_1 B_2 \cdots B_n$ برابر با مجموع $\sum_{m=1}^{n} \gamma_m(B_1, B_2, \dots, B_n)$ است و سایر درایه‌های دیگر برابر صفر هستند، یعنی؛

$$B_1 B_2 \cdots B_n = \left(\sum_{m=1}^{n} \gamma_m(B_1, B_2, \dots, B_n) \right) E_{1,2n}. \tag{۷.۳}$$

اکنون می‌توانیم (iii) به (i) را اثبات کنیم. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی تقلیل یافته باشد. همچنین فرض کنیم $n \geq 2$ یک عدد صحیح که در شرط (iii) صدق می‌کند، یعنی؛ برای هر $r \in R$ داریم $nr = 0 \Leftarrow r = 0$. برای اثبات (i)، چندجمله‌ای دلخواه زیر را در نظر می‌گیریم

$$f = A_0 + A_1 x + \cdots + A_t x^t \in D(R)[x]$$

به‌طوری‌که $f^n=\circ$، نشان می‌دهیم که

$$A_{s_1}A_{s_2}\cdots A_{s_n}=\circ \tag{۸.۳}$$

برای هر n−تایی $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$. چون $N(R)$ یک ایده‌آل از $D(R)$ و حلقه‌ی $\frac{D(R)}{N(R)}$ یکریخت با R است، نتیجه می‌شود که $\frac{D(R)}{N(R)}$ تقلیل یافته است. از این‌رو حلقه‌ی

$$\frac{D(R)[x]}{N(R)[x]}\cong\frac{D(R)}{N(R)}[x]$$

نیز تقلیل یافته و از $f^n=\circ$ نتیجه می‌گیریم که $f\in N(R)[x]$. بنابراین $A_\circ,A_1,\ldots,A_r\in N(R)$، و (۷.۳) نشان می‌دهد که برای اثبات (۸.۳) کافیست نشان دهیم که برای هر $m\in\{1,2,\ldots,n\}$ و n−تایی $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ داریم:

$$\gamma_m(A_{s_1},A_{s_2},\ldots,A_{s_n})=\circ. \tag{۹.۳}$$

برای اثبات (۹.۳)، فرض کنیم $\Phi: D(R)[x]\longrightarrow D(R[x])$ یکریختی طبیعی و $F=\Phi(f)$ باشد. چون $f\in N(R)[x]$ و $f^n=\circ$، داریم $F\in N(R[x])$ و $F^n=\circ$. از این‌رو (۷.۳) نشان می‌دهد که

$$\sum_{m=1}^{n}\gamma_m(\underbrace{F,F,\ldots,F}_{\text{تا } n}) \tag{۱۰.۳}$$

یادآور می‌شویم که γ_m که نشان دهنده‌ی دنباله‌ی (۶.۳) است، بنابراین

$$\begin{aligned}\gamma_m(F,F,\ldots,F) &= F^{(1,3)}F^{(3,5)}\ldots F^{(2m-3,2m-1)}\\ &\quad F^{(2m-1,2m)}F^{(2m,2m+2)}\ldots F^{(2n-2,2n)}.\end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

توجه داشته باشیم که چون $F\in D(R[x])=D_n(D_2(R[x]))$، برای هر عدد فرد $i\in\{1,2,\ldots,2n\}$ خواهیم داشت $F^{(i,i+1)}=F^{(1,2)}$ و اگر علاوه بر این $i\le 2n-3$، آن‌گاه $F^{(i,i+2)}=F^{(i+1,i+3)}$. به‌علاوه، چون R جابه‌جایی است، حلقه‌ی $R[x]$ جابه‌جایی می‌باشد. با ترکیب همه‌ی این‌ها با ۱۱.۳، داریم:

$$\begin{aligned}\gamma_m(F,F,\ldots,F) &= F^{(2,4)}F^{(4,6)}\ldots F^{(2m-2,2m)}F^{(1,2)}F^{(2m,2m+2)}\ldots F^{(2n-2,2n)}\\ &= F^{(1,2)}F^{(2,4)}F^{(4,6)}\ldots F^{(2m-2,2m)}F^{(2m,2m+2)}\ldots F^{(2n-2,2n)}\\ &= \gamma_1(F,F,\ldots,F).\end{aligned}$$

نشان می‌دهیم داد که

$$\gamma_m(F,F,\ldots,F)=\gamma_1(F,F,\ldots,F) \tag{۱۲.۳}$$

برای هر $m\in\{1,2,\ldots,n\}$. و بنابراین (۱۰.۳) نشان می‌دهد که

$$n\cdot\gamma_1(F,F,\ldots,F)=\circ. \tag{۱۳.۳}$$

چون بنا به (iii)، اگر $nr=0$ باشد، آن‌گاه برای هر $r\in R$ داریم $r=0$. از (۱۳.۳)، نتیجه می‌شود که $\gamma_1(F,F,\ldots,F)=0$. لذا بنا به (۱۲.۳)، برای هر $m\in\{1,2,\ldots,n\}$ داریم:

$$\gamma_m(F,F,\ldots,F)=0 \tag{۱۴.۳}$$

برای کامل کردن برهان کافیست نشان دهیم که ۱۴.۳، ۹.۳ را اثبات کند. فرض کنیم $\gamma_m(k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n)$ (در این نقطه، صورت دقیق γ_m مهم نیست). از (۱۴.۳) به‌دست می‌آوریم

$$F^{(k_0k_1)}F^{(k_1k_2)}\cdots F^{(k_{n-1}k_n)}=0. \tag{۱۵.۳}$$

برای هر $i\in\{1,2,\ldots,n\}$، مجموعه‌ی

$$f_i=A_0^{(k_{i-1}k_i}+A_1^{(k_{i-1}k_i)}x+\cdots+A_t^{(k_{i-1}k_i)}x^t\in R[x].$$

چون $F=\Phi(f)$، از (۱۵.۳) نتیجه می‌شود که

$$f_1f_2\cdots f_n=0. \tag{۱۶.۳}$$

با توجه به‌فرض حلقه‌ی R تقلیل یافته است، بنابراین R آرمندار‌یز نیز می‌باشد. لذا (۱۶.۳) و گزاره‌ی ۸.۴.۱ نشان می‌دهند که برای هر n–تایی $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ داریم:

$$A_{s_1}^{(k_0k_1)}A_{s_2}^{(k_1k_2)}\cdots A_{s_n}^{(k_{n-1}k_n)}=0,$$

به‌عبارت دیگر،

$$\gamma_m(A_{s_1},A_{s_2},\ldots,A_{s_n})=0$$

برای هر $m\in\{1,2,\ldots,n\}$. چون $A_{s_1},A_{s_2},\ldots,A_{s_n}\in N(R)$، از (۷.۳) به‌دست می‌آوریم

$$A_{s_1},A_{s_2},\ldots,A_{s_n}=0,$$

که این همان شرط (۸.۳) است. لذا برهان کامل می‌شود. ■

حال با این شرایط می‌توانیم پاسخ مساله‌ی (۱) چئون، لی و ریو را بدهیم. در مثال زیر نشان می‌دهیم حلقه‌ی غیرتقلیل یافته‌ی R وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n\geq 2$ حلقه‌ی $D_n(R)$، n–نیم آرمندار‌یز است.

مثال ۲.۲.۳. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ نشان دهنده‌ی حلقه‌ی اعداد صحیح باشد. حلقه‌ی $R=D_2(\mathbb{Z})$ تقلیل یافته نیست. اما، با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۳، برای هر $n\geq 2$ حلقه‌ی $D_n(R)$، n–نیم آرمندار‌یز است.

ملاحظه ۳.۲.۳. *با استفاده از مفروضات برهان قضیه‌ی ۱.۲.۳ می‌توان تعمیم قضیه‌ی ۱.۲.۳ را در زیر نشان داد.*
فرض کنیم S زیرحلقه‌ای تقلیل یافته از حلقه‌ی جابه‌جایی و آرمنداریز R باشد و یک عدد صحیح $n \geq ۲$. ر این صورت شرایط زیر معادلند:

(i) *حلقه‌ی $D_n(D_۲(S,R))$، $n-$نیم آرمنداریز است؛*

(ii) *حلقه‌ی $\frac{D_۲(S,R)}{\langle x^n \rangle}$، $n-$نیم آرمنداریز است؛*

(iii) *اگر $nr = ۰$ باشد، آن‌گاه برای هر $r \in R$، $r = ۰$ است.*

فرض کنیم I ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. همچنین فرض کنیم $\frac{R}{I}$ و I، $n-$نیم آرمنداریز باشند، که در آن I به‌عنوان یک حلقه‌ی $n-$نیم آرمنداریز غیریکه در نظر گرفته می‌شود. به‌نحوی می‌توان حدس زد که در این حالت R، $n-$نیم آرمنداریز است. اما، این حالت را نمی‌توان در مثال ۳.۳.۲ نشان داد. در زیر با استفاده از قضیه‌ی ۱.۲.۳ به ساخت یک مثال دیگر از حلقه‌ی R با ایده‌آل I به‌طوری‌که $\frac{R}{I}$ و I، $n-$نیم آرمنداریز هستند، اما R، $n-$نیم آرمنداریز نیست، می‌پردازیم.

مثال ۴.۲.۳. فرض کنیم $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه‌ی یکتایی از n و $m = p_۱ p_۲ \cdots p_k$ باشد. توجه داشته باشیم که $\mathbb{Z}_m$ حلقه‌ی اعداد صحیح به پیمانه m حلقه‌ای تقلیل یافته است. قرار می‌دهیم $R = \frac{D_۲(\mathbb{Z}_m)[x]}{\langle x^n \rangle}$ و $I = \frac{\langle x^{n-۱} \rangle}{\langle x^n \rangle}$. در این صورت I ایده‌آلی از R که در آن $I^۲ = ۰$ است. لذا I، $n-$نیم آرمنداریز است. به‌علاوه، حلقه‌ی $\frac{D_۲(\mathbb{Z}_m)[x]}{\langle x^{n-۱} \rangle} \cong \frac{R}{I}$ با زیرحلقه‌ی $U_{n-۱}(D_۲(\mathbb{Z}_m))$ یکریخت است. (برهان (i) به (ii) را در قضیه‌ی ۱.۲.۳ مشاهده کنید). چون $N = N_۲(\mathbb{Z}_m)$ ایده‌آلی از $D_۲(\mathbb{Z}_m)$ است به‌طوری‌که حلقه‌ی $\mathbb{Z}_m \cong \frac{D_۲(\mathbb{Z}_m)}{N}$ تقلیل یافته و $N^۲ = ۰$. گزاره‌ی ۵.۱.۳ نشان می‌دهد که حلقه‌ی $U_{n-۱}(D_۲(\mathbb{Z}_m))$، $n-$نیم آرمنداریز است، پس حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ نیز $n-$نیم آرمنداریز است. همچنین با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۳، حلقه‌ی R، $n-$نیم آرمنداریز نیست.

این فصل را با دو مثال از حلقه‌های جابه‌جایی که نیم آمنداریز نیستند به پایان می‌رسانیم.

مثال ۵.۲.۳. واضح است، حلقه‌ی $R = D_۲(D_۲(\mathbb{Z}_۲))$ جابه‌جایی است. اما با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۳، R حلقه‌ای ۲$-$نیم آرمنداریز نیست و در نتیجه R نیم آرمنداریز نمی‌باشد.

مثال ۶.۲.۳. فرض کنیم S یک حلقه‌ی تقلیل یافته و F یک میدان از مرتبه‌ی ۲^n باشد، که در آن n یک عدد صحیح مثبت دلخواه و $F[x,y]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای که روی دو متغیر تعویض‌پذیر x و y باشد. حال $R = \frac{F[x,y]}{\langle x^n, y^n \rangle}$ را در نظر می‌گیریم، که در آن $\langle x^n, y^n \rangle$ ایده‌آل تولیدشده توسط x^n و y^n از S می‌باشد. در این صورت R جابه‌جایی است و $(x+yT)^۲ = ۰$، که در آن T یک متغیر روی R است. اما $xy \neq ۰$ نشان می‌دهد که R نیم آرمنداریز نمی‌باشد.

مراجع

[1] Anderson D.D. and Camillo V. (1998), ”Armendariz rings and Gaussian rings”, *Comm. Algebra* , **26**, 7, pp 2265-2272.

[2] Anderson D. D. and Camillo V. (1999), ”Semigroups and rings whose zero products commute”, *Comm. Algebra* , **27**, no. 6, 2847–2852.

[3] Armendariz E. P. (1974), ”A note on extensions of Baer and P. P.-rings”, *J. Austral. Math. Soc.* , **18** , 470-473.

[4] Gardner B. J. and Wiegandt R. (2004), ” Radical theory of rings”,*Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, vol. 261, Marcel Dekker, Inc., New York.

[5] Hirano Y. (2002), ”On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring”, *J. Pure Appl. Algebra* , **168**, no. 1, 45–52.

[6] Huh C., Kim H. K. and Lee Y. (2002), ”p.p. rings and generalized p.p. rings”, *J. Pure Appl. Algebra* , **167**, no. 1, 37–52.

[7] Huh C., Lee Y. and Smoktunowicz A. (2002), ”Armendariz rings and semicommutative rings”, *Comm. Algebra* , **30**, no. 2, 751–761.

[8] Hwang S. U., Jeon Y. C. and Lee Y. (2006), ”Structure and topological conditions of NI rings”, *J. Algebra* , **302**, no. 1, 186–199.

[9] Jeon Y. C., Lee Y. and Ryu S. J. (2010), ”A structure on coefficients of nilpotent polynomials”, *J. Korean Math. Soc.* , **47**, no. 4, 719–733.

[10] Kim N. K., Lee K. H. and Lee Y. (2006), ”Power series rings satisfying a zero divisor property”, *Comm. Algebra*, **34**, no. 6, 2205–2218.

[11] Kim N. K. and Lee Y. (2000), ”Armendariz rings and reduced rings”, *J. Algebra*, **223**, no. 2, 477–488.

[12] Lam T. Y. (1991), "*A first Course in Noncommutative Rings*", Graduate Texts in Math., vol. 131, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[13] Lambek J. (1971), "On the representation of modules by sheaves of factor modules", *Canad. Math. Bull.* **14**, 359-368.

[14] Lee T.-K. and Wong T.-L. (2003), "On Armendariz rings", *Houston J. Math.* , **29**, no. 3, 583–593.

[15] Lee T.-K. and Zhou Y. (2004), "Armendariz and reduced rings", *Comm. Algebra* , **32**, no. 6, 2287-2299.

[16] Liu Z. and Zhao R. (2006), "On weak Armendariz rings", *Comm. Algebra* , **34**, no. 7, 2607-2616.

[17] Lowski K. K. and Mazurek R. (2015), "On semi-Armendariz matrix rings", *J. Korean Math.* Soc. **52**, no. 4, 781-795.

[18] Marks G. (2001), "On 2-primal Ore extensions", *Comm. Algebra* , **29**, no. 5, 2113–2123.

[19] Marks G., Mazurek R. and Ziembowski M. (2010), "A unified approach to various generaliza-tions of Armendariz rings", *Bull. Aust. Math. Soc.* , **81**, no. 3, 361–397.

[20] Mazurek R. and Ziembowsk M. (2014), "On a characterization of distributive rings via saturations and its applications to Armendariz and Gaussian rings", *Rev. Mat. Iberoam.* , **30**, no. 3, 1073–1088.

[21] Mazurek R. and Ziembowski M. (2011), "Right Gaussian rings and skew power series rings", *J. Algebra* , **330**, no. 1, 130-146.

[22] Rege M. B. and Chhawchharia S. (1997), "Armendariz rings", *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* , **73**, no. 1, 14–17.

[۲۳] هاشمی ا، (۱۳۹۰)، "*آشنایی با پوچ‌سازهای چندجمله‌ای‌ها*"، چاپ اول، انتشارات دانشگاه صنعتی شاهرود، صفحه ۴۱۰.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اولیه	Primary
ایده‌آل اول	Prime ideal
ایده‌آل کاملا اول	Completely prime ideal
بُعد	Dimension
بروریختی	Epimorphism
بسته ضربی	Multiplicatively Closed
پوچ‌توان	Nilpotent
تجزیه	Decomposition
تک جمله‌ای	Monomial
تکریختی	Monomorphism
توسیع دروه	Dorroh extension
حاصلضرب مستقیم	Direct product
جایگشت	Permutation
حلقه‌ی تقلیل یافته	Reduced ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای	Polynomial ring
حلقه‌ی ماتریس بالا مثلثی	Upper triangular matrix ring
حلقه‌ی ماتریس پایین مثلثی	Lower triangular matrix ring
حلقه‌ی موضعی	Local ring
خودریختی	Automorphism
درایه‌های قطری	Diagonal entries
درون‌ریختی	Endomorphism
دوجمله‌ای	Binomial
رادیکال پوچ تعمیم یافته	Generalized nil radical
رادیکال جیکبسون	Jacobson radical
$m-$سیستم	m-System
ضریب	Coefficient

عامل	Factorization
قطری	Diagonal
مجموع مستقیم	Direct sum
مشخصه	Characteristic
منظم	Regular
نیم آرمنداریز	semi-Armendariz
همریختی	Homomorphism
یکریختی	Isomorphism

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Automorphism	خودریختی
Binomial	دوجمله‌ای
Characteristic	مشخصه
Coefficient	ضریب
Completely prime ideal	ایده‌آل کاملا اول
Decomposition	تجزیه
Diagonal	قطری
Diagonal entries	درایه‌های قطری
Dimension	بُعد
Direct product	حاصلضرب مستقیم
Direct sum	مجموع مستقیم
Dorroh extension	توسیع دروه
Endomorphism	درون‌ریختی
Epimorphism	بروریختی
Factorization	عامل
Generalized nil radical	رادیکال پوچ تعمیم یافته
Homomorphism	همریختی
Isomorphism	یکریختی
Jacobson radical	رادیکال جیکبسون
Local ring	حلقه‌ی موضعی
Lower triangular matrix ring	حلقه‌ی ماتریس پایین مثلثی
Monomial	تک جمله‌ای
Monomorphism	تکریختی
m-System	$m-$سیستم
Multiplicatively Closed	بسته ضربی
Nilpotent	پوچ‌توان

Permutation .... جایگشت
Polynomial ring .... حلقه‌ی چندجمله‌ای
Primary .... اولیه
Prime ideal .... ایده‌آل اول
Reduced ring .... حلقه‌ی تقلیل یافته
Regular .... منظم
Semi-Armendariz .... نیم آرمنداریز
Upper triangular matrix ring .... حلقه‌ی ماتریس بالا مثلثی

Abstract

Given a positive integer n, a ring R is said to be n-semi-Armendariz if whenever $f^n = 0$ for a polynomial f in one indeterminate over R, then the product (possibly with repetitions) of any n coefficients of f is equal to zero. A ring R is said to be semi-Armendariz if R is n-semi-Armendariz for every positive integer n. Semi-Armendariz rings are a generalization of Armendariz rings. In the thesis, we first obtain a classification of reduced rings, proving that a ring R is reduced if and only if the n by n upper triangular matrix ring over R is n-semi-Armendariz. We prove that a ring R is n-semi-Armendariz if and only if so is the polynomial ring over R. We next study interesting properties and useful examples of n-semi-Armendariz rings, constructing various kinds of counterexamples in the process.

keywords: n-semi-Armendariz ring, semi-Armendariz ring, upper traingular matrix ring, polynomail ring, reduced ring, Armendariz ring.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Algebra

On Semi-Armendariz Rings and Some Extensions of Semi-Armendariz Rings

By: Roghayeh Baledi

Supervisor

Dr. E. Hashemi

Advisor

Dr. A. Alhevaz

July 2017