

بسم الله الرحمن الرحيم



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گروه محض

ایده آل های اول وابسته مدول چند جمله ای ها روی

حلقه چند جمله ای های اریب

مریم عربی

استاد راهنما:

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور:

دکتر احمد زیره

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به ...

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخت تا در سایه درخت پر بار  
وجودشان بیاسایم، از ریشه آن ها شاخ و برگ گیرم و در سایه وجودشان در راه کسب علم تلاش  
نمایم.

والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو گوهر  
پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند، دستم را گرفته اند و راه رفتن را در این وادی پر از فراز و  
نشیب آموخته اند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند. حال این برگ  
سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان.

## تشکر و قدردانی

اینک که با استعانت از حضرت حق توانستم این پایان نامه را به اتمام رسانم بر خود لازم می دانم تا از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی که همواره با راهنمایی های ارزشمند خود بنده را مورد تفقد قرار می دهند کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

همچنین مراتب تشکر خود را خدمت اساتید گرامی جناب آقای دکتر احمد زیره و جناب آقای سید رضا موسوی و تمامی کسانی که در انجام این امر بنده را یاری نموده اند اعلام می نمایم.

## چکیده

فیث<sup>۱</sup> با استفاده از نتایج شاک<sup>۲</sup> ثابت نمود که اگر  $R$  یک حلقه جابجایی باشد آنگاه ایده آل های اول وابسته حلقه چند جمله ای های  $R[x]$  (به عنوان یک مدول روی خودش) به فرم  $P = P_0[x]$  هستند که در آن  $P_0 = P \cap R \in \text{Ass}(R)$  نمایانگر مجموعه تمام ایده آل های اول وابسته حلقه  $R$  است). این نتیجه اولین بار در سال ۱۹۷۴ توسط برور<sup>۳</sup> و هنزر<sup>۴</sup> با استفاده از نظریه موضعی سازی ثابت شد.

با ایده گرفتن از مقاله فیث نشان خواهیم داد که اگر  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد آنگاه نتیجه فوق در مورد مدول  $M[x]_{R[x;\sigma]}$  که  $R$  لزوماً جابجایی نیست برقرار است به شرط آنکه  $M$  یک  $R$ -مدول  $\sigma$ -سازگار باشد. به علاوه اگر  $\sigma \in \text{Aut}(R)$ ، می توان  $M[x, x^{-1}]$  را به عنوان یک مدول راست روی حلقه های  $R[x; \sigma]$  و  $R[x, x^{-1}; \sigma]$  در نظر گرفت و نتیجه فوق را برای این مدول ها نیز بدست آورد، به شرط آنکه  $M$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد. همچنین نشان خواهیم داد که در حالت کلی (برای مدول  $\sigma$ -سازگار  $M_R$ ) نتیجه فوق در مورد مدول های  $M[[x]]_{R[[x;\sigma]]}$  و  $M((x))_{R((x;\sigma))}$  برقرار نیست مگر آنکه  $R$  نیز یک حلقه کامل چپ باشد. در نهایت نشان خواهیم داد که با شرط  $(\sigma, \delta)$ -سازگاری  $M_R$ ، می توان نتیجه فوق را به مدول  $M[x]$  (به عنوان یک مدول راست روی توسیع آر  $R[x; \sigma, \delta]$ ) تعمیم داد.

**کلمات کلیدی:** مدول اول، ایده آل اول وابسته، مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار، حلقه کامل چپ، حلقه چند جمله ای های اریب، حلقه چند جمله ای های اریب لوران، حلقه سری های توانی صوری اریب.

<sup>۱</sup> Faith

<sup>۲</sup> Shock

<sup>۳</sup> Brewer

<sup>۴</sup> Heinzer

## فهرست مطالب

| عنوان                       | صفحه |
|-----------------------------|------|
| تصویب نامه.....             | ج    |
| تقدیم به.....               | د    |
| تشکر و قدردانی.....         | ه    |
| تعهدنامه.....               | و    |
| چکیده فارسی.....            | ز    |
| فهرست علائم و اختصارات..... | ی    |

### فصل اول

|                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| تعاریف و خلاصه‌ای از پایان نامه..... | ۱ |
|--------------------------------------|---|

### فصل دوم

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| ایده آل های اول وابسته مدول چند جمله ای ها روی حلقه چند جمله ای های اریب..... | ۱۱ |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|

### فصل سوم

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| ایده آل های اول وابسته مدول چند جمله ای های لوران..... | ۲۴ |
|--------------------------------------------------------|----|

### فصل چهارم

|                                                |    |
|------------------------------------------------|----|
| ایده آل های اول وابسته مدول سری های توانی..... | ۳۳ |
|------------------------------------------------|----|

### فصل پنجم

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| ایده آل های اول وابسته روی توسیع آر..... | ۴۶ |
|------------------------------------------|----|

|         |                            |
|---------|----------------------------|
| ۶۲..... | واژه نامه فارسی به انگلیسی |
| ۶۵..... | واژه نامه انگلیسی به فارسی |
| ۶۸..... | فهرست منابع                |
| .....   | چکیده انگلیسی              |

## فهرست علائم و اختصارات

|                                                                                   |                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| شرط زنجیر افزایشی                                                                 | $A.C.C$                 |
| $annihilator - compliant$                                                         | $ac$                    |
| پوچساز $R$ - مدول راست $M$                                                        | $ann(M_R)$              |
| پوچساز $m$                                                                        | $ann(m)$                |
| مجموعه تمام ایده آل های اول وابسته مدول $M$                                       | $Ass(M)$                |
| حلقه خودریختی های حلقه $R$                                                        | $Aut(R)$                |
| شرط زنجیر کاهشی                                                                   | $D.C.C$                 |
| درجه چند جمله ای $f(x)$                                                           | $\deg(f(x))$            |
| حلقه درونریختی های حلقه $R$                                                       | $End(R)$                |
| مجموع تمام کلماتی که هر کلمه شامل $i$ حرف از $\sigma$ و $j-i$ حرف از $\delta$ است | $f_i^j$                 |
| $R$ - مدول راست $M$                                                               | $M_R$                   |
| مدول خارج قسمتی $M$ بر $N$                                                        | $M/N$                   |
| جمع مستقیم مدول های $M_1, \dots, M_n$                                             | $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ |
| مدول چند جمله ای ها                                                               | $M[x]$                  |
| مدول چند جمله ای های لوران                                                        | $M[x, x^{-1}]$          |
| مدول سری های توانی                                                                | $M[[x]]$                |
| مدول سری های توانی لوران                                                          | $M((x))$                |
| $R$ - مدول دوری تولید شده توسط $m$                                                | $\langle m \rangle$     |



|                                             |                                         |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------|
| مجموعه اعداد طبیعی                          | $\mathbb{N}$                            |
| میدان اعداد گویا                            | $\mathbb{Q}$                            |
| حلقه موضعی سازی $R$ در $P$                  | $R_P$                                   |
| حلقه چند جمله ای ها                         | $R[x]$                                  |
| حلقه چند جمله ای های اریب                   | $R[x; \sigma]$                          |
| حلقه چند جمله ای های اریب لوران             | $R[x, x^{-1}; \sigma]$                  |
| حلقه سری های توانی اریب                     | $R[[x; \sigma]]$                        |
| حلقه سری های توانی اریب لوران               | $R((x; \sigma))$                        |
| توسیع اُ                                    | $R[x; \sigma, \delta]$                  |
| رادیکال جیکوبسون حلقه $R$                   | $rad R$                                 |
| مدول کسرها $M$ بر حسب $S$                   | $S^{-1}M$                               |
| حلقه کسرها $R$ بر حسب $S$                   | $S^{-1}R$                               |
| حلقه اعداد صحیح                             | $\mathbb{Z}$                            |
| حلقه اعداد صحیح به پیمانه $n$               | $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ |
| $p$ - زیر گروه سیلو $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}_{p^\infty}$                 |

## فصل اول

تعاریف و خلاصه‌ای از پایان‌نامه

## فصل اول

### تعاریف و خلاصه‌ای از پایان‌نامه

در این پایان‌نامه،  $R$  نمایانگر یک حلقه شرکت پذیر و یک‌دار است که لزوماً جابجایی نیست و  $M_R$  نمایانگر یک  $R$ -مدول راست است.

**تعریف ۱-۱:** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد و  $m \in M$ . پوچساز<sup>۱</sup>  $M_R$  و پوچساز  $m$  را به ترتیب با نماد های  $ann(M_R)$  و  $ann(m)$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ann(M_R) := \{r \in R : Mr = 0\}, \quad ann(m) := \{r \in R : mr = 0\}.$$

**تعریف ۱-۲:** ایده آل  $P$  از حلقه  $R$  را اول<sup>۲</sup> نامیم اگر  $P \neq R$  و برای هر  $a, b \in R$  که  $aRb \subseteq P$  داشته باشیم  $a \in P$  یا  $b \in P$ .

**تعریف ۱-۳:** فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. در این صورت

---

<sup>۱</sup>annihilator

<sup>۲</sup>prime

ایده آل اول  $P$  از  $R$  را یک ایده آل اول وابسته<sup>۱</sup>  $M$  نامیم هرگاه  $m \in M$  وجود داشته باشد به طوری که  $P = \text{ann}(m)$ . مجموعه تمام ایده آل های اول وابسته  $M$  را با  $\text{Ass}(M)$  نمایش می دهیم.

**تعریف ۱-۴:** الف) فرض کنید  $\{C_i : i \in I\}$  خانواده ای از زیر مجموعه های مجموعه  $C$  باشد. گوئیم این خانواده در شرط زنجیر افزایشی<sup>۲</sup> (به طور خلاصه  $A.C.C$ ) صدق می کند هرگاه یکی از دو گزاره زیر برقرار باشد:

(۱) برای هر زنجیر افزایشی از این خانواده مانند  $C_{i_1} \subseteq C_{i_2} \subseteq \dots$ ، عدد صحیح  $n$  وجود داشته باشد به طوری که  $C_{i_n} = C_{i_{n+1}} = C_{i_{n+2}} = \dots$ .

(۲) هر مجموعه ناتهی از این خانواده تحت رابطه شمول حداقل یک عضو ماکسیمال داشته باشد.

ب) فرض کنید  $\{C_i : i \in I\}$  خانواده ای از زیر مجموعه های مجموعه  $C$  باشد. گوئیم این خانواده در شرط زنجیر کاهشی<sup>۳</sup> (به طور خلاصه  $D.C.C$ ) صدق می کند هرگاه یکی از دو گزاره زیر برقرار باشد:

(۱) برای هر زنجیر کاهشی از این خانواده مانند  $C_{i_1} \supseteq C_{i_2} \supseteq \dots$ ، عدد صحیح  $n$  وجود داشته باشد به طوری که  $C_{i_n} = C_{i_{n+1}} = C_{i_{n+2}} = \dots$ .

(۲) هر مجموعه ناتهی از این خانواده تحت رابطه شمول حداقل یک عضو مینیمال داشته باشد.

**تعریف ۱-۵:** الف) حلقه  $R$  را نوتری<sup>۴</sup> راست (چپ) گوئیم اگر  $R$  در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آل های راست (چپ) صدق کند. گوئیم  $R$  نوتری است اگر  $R$  هم نوتری چپ و هم نوتری راست باشد.

ب) حلقه  $R$  را آرتینی<sup>۵</sup> راست (چپ) گوئیم اگر  $R$  در شرط زنجیر کاهشی روی ایده آل های راست (چپ) صدق کند. گوئیم  $R$  آرتینی است اگر  $R$  هم آرتینی چپ و هم آرتینی راست باشد.

<sup>۱</sup>associated prime

<sup>۲</sup>ascending chain condition

<sup>۳</sup>descending chain condition

<sup>۴</sup>noetherian

<sup>۵</sup>artinian

لم ۱-۶: اگر  $R$  یک حلقه جابجایی نوتری و  $M$  یک  $R$ -مدول ناصفر باشد آنگاه  $Ass(M) \neq \emptyset$ .

اثبات: مجموعه  $\Gamma = \{ann(m) \mid 0 \neq m \in M\}$  را در نظر بگیرید. به وضوح  $\Gamma \neq \emptyset$ . از آنجایی که  $R$  نوتری است لذا  $\Gamma$  تحت رابطه شمول حداقل دارای یک عضو ماکسیمال مانند  $ann(m')$  است. با فرض  $ann(m') = P$ ، نشان می‌دهیم  $P$  یک ایده آل اول از  $R$  است. فرض کنید  $ab \in P$  و  $a \notin P$ ، که در آن  $a, b \in R$ . بنابراین  $m'a \neq 0$ . پس  $ann(m'a) \in \Gamma$ . از طرفی می‌دانیم  $ann(m') \subseteq ann(m'a)$ . ماکسیمال بودن  $ann(m')$  ایجاب می‌کند که  $ann(m'a) = ann(m')$ . از آنجایی که  $b \in ann(m'a)$ ، لذا  $b \in ann(m') = P$ . بنابراین  $P \in Ass(M)$ .  $\square$

تعریف ۱-۷: الف) فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونیختی<sup>۱</sup> از حلقه  $R$  باشد. حلقه  $S := R[x; \sigma]$  که عناصر آن به فرم  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  ( $a_i \in R$ ) هستند را حلقه چند جمله ای های اریب<sup>۲</sup> گوئیم. جمع و ضرب در حلقه  $S$  به طور طبیعی تعریف می‌شوند و ضرب از قانون  $xa = \sigma(a)x$  پیروی می‌کند، یعنی  $(\sum a_i x^i)(\sum b_j x^j) = \sum_{i,j} a_i \sigma^i(b_j) x^{i+j}$ .

فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد. تابع  $\cdot: M[x] \times S \rightarrow M[x]$  را با ضابطه  $m_i x^i \cdot r_j x^j := m_i \sigma^i(r_j) x^{i+j}$  در نظر بگیرید که  $m_i \in M$  و  $r_j \in R$ . پس می‌توان  $M[x]$  را به عنوان یک  $S$ -مدول راست در نظر گرفت که به آن مدول چند جمله ای ها روی حلقه چند جمله ای های اریب گوئیم.

ب) فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک خودریختی<sup>۳</sup> از حلقه  $R$  باشد. حلقه  $T := R[x, x^{-1}; \sigma]$  را که عناصر آن به فرم  $a_{-m}x^{-m} + a_{-m+1}x^{-m+1} + \dots + a_0 + \dots + a_nx^n$  ( $m, n$  اعداد صحیح نامنفی اند) هستند، حلقه چند جمله ای های اریب لوران<sup>۴</sup> گوئیم. جمع و ضرب در حلقه  $T$  به طور طبیعی تعریف می‌شوند و ضرب از قانون  $x^i a = \sigma^i(a) x^i$  (برای هر  $i \in \mathbb{Z}$ ) پیروی می‌کند.

<sup>۱</sup>endomorphism

<sup>۲</sup>skew polynomial ring

<sup>۳</sup>automorphism

<sup>۴</sup>skew Laurent polynomial ring

فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد. تابع  $\cdot: M[x, x^{-1}] \times R[x, x^{-1}; \sigma] \rightarrow M[x, x^{-1}]$  را با ضابطه  $m_i x^i \cdot r_j x^j := m_i \sigma^i(r_j) x^{i+j}$  در نظر بگیرید که  $i, j \in \mathbb{Z}$  و  $m_i \in M$  و  $r_j \in R$ . پس می‌توان  $M[x, x^{-1}]$  را به عنوان یک  $T$ -مدول راست در نظر گرفت که به آن مدول چند جمله‌ای های لوران<sup>۱</sup> روی حلقه چند جمله‌ای های اریب لوران گوئیم.

**تعریف ۱-۸:** الف) فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونیختی از حلقه  $R$  باشد. حلقه  $S' := R[[x; \sigma]]$  را که عناصر آن به فرم  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  ( $a_i \in R$ ) هستند، حلقه سری های توانی صوری اریب<sup>۲</sup> گوئیم. جمع و ضرب در حلقه  $S'$  به طور طبیعی تعریف می‌شوند و ضرب از قانون  $xa = \sigma(a)x$  پیروی می‌کند.

فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد. تابع  $\cdot: M[[x]] \times S' \rightarrow M[[x]]$  را با ضابطه  $m_i x^i \cdot r_j x^j := m_i \sigma^i(r_j) x^{i+j}$  در نظر بگیرید که  $i, j \in \mathbb{Z}$  و  $m_i \in M$  و  $r_j \in R$ . پس می‌توان  $M[[x]]$  را به عنوان یک  $S'$ -مدول راست در نظر گرفت که به آن مدول سری های توانی صوری<sup>۳</sup> روی حلقه سری های توانی صوری اریب گوئیم.

ب) فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک خودریختی از حلقه  $R$  باشد. حلقه  $T' := R((x; \sigma))$  را که عناصر آن به فرم  $\sum_{i=n}^{+\infty} a_i x^i$  ( $a_i \in R$  و  $n$  عدد صحیح است) هستند، حلقه سری های توانی اریب لوران<sup>۴</sup> گوئیم. جمع و ضرب در حلقه  $T'$  به طور طبیعی تعریف می‌شوند و ضرب در آن از قانون  $x^i a = \sigma^i(a) x^i$  (برای هر  $i \in \mathbb{Z}$ ) پیروی می‌کند.

فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد. تابع  $\cdot: M((x)) \times R((x; \sigma)) \rightarrow M((x))$  را با ضابطه  $m_i x^i \cdot r_j x^j := m_i \sigma^i(r_j) x^{i+j}$  در نظر بگیرید که  $i, j \in \mathbb{Z}$  و  $m_i \in M$  و  $r_j \in R$ . بنابراین می‌توان  $M((x))$  را به عنوان یک  $T'$ -مدول راست در نظر گرفت که به آن

<sup>۱</sup>Laurent polynomial module

<sup>۲</sup>skew formal power series ring

<sup>۳</sup>formal power series module

<sup>۴</sup>skew Laurent power series ring

مدول سری های توانی لوران<sup>۱</sup> روی حلقه سری های توانی اریب لوران گوئیم.

**تعریف ۹-۱:** زیر مجموعه  $A$  از حلقه  $R$  را  $T$ -پوچتوان<sup>۲</sup> چپ ( راست ) نامیم هرگاه برای هر دنباله

از عناصر  $A$  مانند  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ، عدد صحیح  $n \geq 1$  وجود داشته باشد به طوری که

$$a_1 a_2 \dots a_n = 0 \quad (a_n \dots a_2 a_1 = 0).$$

**قضیه ۱۰-۱:** فرض کنید  $J$  یک ایده آل چپ از حلقه  $R$  باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

(۱)  $J, T$  - پوچتوان چپ است.

(۲) برای هر  $R$  - مدول چپ مانند  $M$ ،  $JM = M$  نتیجه دهد  $M = 0$ .

(۳) برای هر  $R$  - مدول راست مانند  $N$ ،  $ann_N(J) = \{n \in N \mid nJ = 0\} = 0$  نتیجه دهد  $N = 0$ .

**اثبات:** به [۱۲، قضیه ۲۳-۱۶] مراجعه شود.  $\square$

**تعریف ۱۱-۱:** فرض کنید  $M$  یک  $R$  - مدول باشد.  $R$  - مدول  $N$  را یک جمعوند مستقیم<sup>۳</sup>  $M$

نامیم اگر  $R$  - مدول  $K$  وجود داشته باشد به طوری که  $M \cong N \oplus K$ .

**تعریف ۱۲-۱:** الف)  $R$  - مدول ناصفر  $M$  را ساده<sup>۴</sup> نامیم هرگاه  $\{0\}$  و  $M$  تنها زیر مدول های آن

باشد.

ب)  $R$  - مدول  $M$  را نیم ساده<sup>۵</sup> نامیم هرگاه هر زیر مدول  $M$  یک جمعوند مستقیم آن باشد.

**تعریف ۱۳-۱:** اشتراک تمام ایده آل های چپ ماکسیمال حلقه  $R$  را رادیکال جیکوبسون<sup>۶</sup> حلقه  $R$

نامیده و با  $rad R$  نمایش می دهیم.

**تعریف ۱۴-۱:** فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد. در این صورت:

<sup>۱</sup>Laurent power series module

<sup>۲</sup>T-nilpotent

<sup>۳</sup>direct summand

<sup>۴</sup>simple

<sup>۵</sup>semisimple

<sup>۶</sup>Jacobson radical

(الف)  $R$  را موضعی<sup>۱</sup> نامیم هرگاه  $R/\text{rad } R$  یک حلقه تقسیم باشد.

(ب)  $R$  را نیم موضعی<sup>۲</sup> نامیم هرگاه  $R/\text{rad } R$  یک حلقه نیم ساده باشد.

تعریف ۱-۱۵: حلقه  $R$  را نیم کامل<sup>۳</sup> نامیم اگر  $R$  نیم موضعی باشد و برای هر خودتوان

$x \in R/\text{rad } R$ ، خودتوان  $e \in R$  وجود داشته باشد به طوری که تصویر  $e$ ، تحت نگاشت طبیعی

$R \rightarrow R/\text{rad } R$ ، با  $x$  برابر باشد.

مثال ۱-۱۶: هر حلقه موضعی یک حلقه نیم کامل است.  $\square$

تعریف ۱-۱۷: حلقه  $R$  را کامل چپ<sup>۴</sup> (راست) نامیم اگر  $R/\text{rad } R$  یک حلقه نیم ساده و

$\text{rad } R$ ،  $T$ -پوچتوان چپ (راست) باشد.  $R$  را یک حلقه کامل گوئیم اگر هم کامل چپ و هم

کامل راست باشد.

تعریف ۱-۱۸: فرض کنید  $I$  یک ایده آل از حلقه  $R$  باشد. گوئیم  $I$  یک ایده آل پوچ<sup>۵</sup> است هرگاه

هر عنصر از  $I$  پوچتوان باشد.

قضیه ۱-۱۹: فرض کنید  $I$  یک ایده آل پوچ از حلقه  $R$  باشد. اگر  $a \in R$  باشد به طوری که

$\bar{a} \in \bar{R} := R/I$  یک خودتوان باشد آنگاه خودتوان  $e \in aR$  وجود دارد به طوری که  $\bar{e} = \bar{a} \in \bar{R}$ .

اثبات: به [۱۲، قضیه ۲۱-۲۸] مراجعه کنید.  $\square$

نتیجه ۱-۲۰: اگر  $R$  یک حلقه کامل چپ (راست) باشد آنگاه  $R$  یک حلقه نیم کامل است.

اثبات: چون  $\text{rad } R$ ،  $T$ -پوچتوان است لذا پوچ است. بنابراین بنا به قضیه ۱-۱۹ نتیجه حاصل

است.  $\square$

قضیه ۱-۲۱: برای حلقه  $R$  گزاره های زیر معادلند:

---

<sup>۱</sup>local

<sup>۲</sup>semilocal

<sup>۳</sup>semiperfect

<sup>۴</sup>left perfect

<sup>۵</sup>nil ideal



(۱) حلقه  $R$ ، کامل چپ است.

(۲) حلقه  $R$  در شرط  $D.C.C$  روی ایده آل های راست اصلی صدق می کند.

(۳) هر  $R$  - مدول راست در شرط  $D.C.C$  روی زیر مدول های دوری اش صدق می کند.

اثبات: به [۱۲، قضیه ۲۳-۲۰] مراجعه شود.  $\square$

**تعریف ۱-۲۲:** فرض کنید  $M$  یک  $R$  - مدول راست و  $N$  یک زیر مدول از آن باشد.  $N$  را یک

زیر مدول اساسی<sup>۱</sup> از  $M$  نامیم هرگاه برای هر زیر مدول ناصفر از  $M$  مانند  $X$ ،  $N \cap X \neq \emptyset$ .

**تعریف ۱-۲۳:** فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونریختی باشد. تابع  $\delta: R \rightarrow R$  را  $\sigma$  - مشتق<sup>۲</sup> نامیم

هرگاه

(۱)  $\delta$  یک عملگر جمعی روی  $R$  باشد و

(۲) برای هر  $a, b \in R$ ،  $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$ .

**تعریف ۱-۲۴:** فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونریختی و  $\delta: R \rightarrow R$  یک تابع  $\sigma$  - مشتق باشد.

حلقه  $\bar{S} := R[x; \sigma, \delta]$  که عناصر آن به فرم  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  ( $a_i \in R$ ) هستند را توسیع<sup>۳</sup> آر<sup>۳</sup> (یا

حلقه چند جمله ای های اریب<sup>۴</sup>) گوئیم. جمع و ضرب در این حلقه به طور طبیعی تعریف می شوند و

ضرب از قانون  $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$  پیروی می کند.

**نمادگذاری:** فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونریختی و  $\delta: R \rightarrow R$  یک تابع  $\sigma$  - مشتق باشد و

$j \geq i \geq 0$ . منظور از  $f_i^j$ ، مجموع تمام کلماتی است که در آن هر کلمه شامل  $i$  حرف از  $\sigma$  و  $j-i$

حرف از  $\delta$  است. به عنوان مثال  $f_j^j = \sigma^j$ ،  $f_j^j = \delta^j$  و  $f_{j-1}^j = \sigma^{j-1}\delta + \sigma^{j-2}\delta\sigma + \dots + \delta\sigma^{j-1}$ .

در حلقه  $\bar{S}$ ، ادعا می کنیم برای هر  $j \geq 1$ ،  $x^j a = \sum_{i=0}^j f_i^j(a)x^i$ ، اگر  $j=1$ ، به وضوح حکم برقرار

<sup>۱</sup>essential submodule

<sup>۲</sup> $\sigma$  - derivation

<sup>۳</sup>Ore extension ring

<sup>۴</sup>Ore polynomial ring

است. فرض می‌کنیم حکم برای  $j = k$  برقرار باشد. پس داریم:

$$\begin{aligned}
 x^{k+1}a &= x(x^k a) \\
 &= x \left( \sum_{i=0}^k f_i^k(a) x^i \right) \\
 &= x \left( f_0^k(a) + f_1^k(a)x + \cdots + f_k^k(a)x^k \right) \\
 &= (\sigma(f_0^k(a))x + \delta(f_0^k(a))) + (\sigma(f_1^k(a))x + \delta(f_1^k(a)))x + \cdots + (\sigma(f_k^k(a))x + \delta(f_k^k(a)))x^k \\
 &= \delta(f_0^k(a)) + (\sigma(f_0^k(a)) + \delta(f_1^k(a)))x + \cdots + (\sigma(f_{k-1}^k(a)) + \delta(f_k^k(a)))x^k + f_{k+1}^{k+1}(a)x^{k+1} \\
 &= f_0^{k+1}(a) + f_1^{k+1}(a)x + \cdots + f_k^{k+1}(a)x^k + f_{k+1}^{k+1}(a)x^{k+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{k+1} f_i^{k+1}(a)x^i
 \end{aligned}$$

بنابراین ادعا به کمک استقرا ثابت شد.

فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد. تابع  $\cdot : M[x] \times \bar{S} \rightarrow M[x]$  را با ضابطه

$$m_i x^i \cdot r_j x^j := m_i \left( \sum_{k=0}^i f_k^i(r_j) x^k \right) x^j$$

پس می‌توان  $M[x]$  را

به عنوان یک  $\bar{S}$ -مدول راست در نظر گرفت که به آن مدول چند جمله ای ها روی توسیع آر گوئیم.

**تعریف ۱-۲۵:** فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار باشد و  $S \subseteq R$ .  $S$  را یک زیر مجموعه

بسته ضربی<sup>۱</sup> از  $R$  نامیم هرگاه:

$$(۱) \quad ۱ \in S \text{ و}$$

$$(۲) \quad \text{برای هر } a, b \in S, ab \in S.$$

**مثال ۱-۲۶:** فرض کنید  $P$  یک ایده آل از حلقه جابجایی و یکدار  $R$  باشد. در این صورت  $R - P$  یک

زیر مجموعه بسته ضربی از  $R$  است اگر و تنها اگر  $P$  یک ایده آل اول باشد.  $\square$

فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار،  $M$  یک  $R$ -مدول و  $S \subseteq R$  یک زیر مجموعه بسته

---

<sup>۱</sup>multiplicatively closed subset

ضربی از  $R$  باشد. رابطه زیر را در بین عناصر  $M \times S$  در نظر بگیرید:

$$(x, s) = (y, t) \Leftrightarrow \exists u \in S : (xt - ys)u = 0$$

به راحتی می‌توان نشان داد که رابطه فوق یک رابطه هم‌ارزی روی  $M \times S$  است. رده هم‌ارزی با

نماینده  $(x, s)$  را با نماد  $\frac{x}{s}$  نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه تمام نماینده‌های این رده‌های

هم‌ارزی را با نماد  $S^{-1}M$  نشان می‌دهیم و به آن مدول کسرهای  $M$  بر حسب  $S$  می‌گوئیم.

با جایگذاری  $M$  با  $R$ ،  $S^{-1}R$  را حلقه کسرهای  $R$  بر حسب  $S$  نامیم.

**لم ۱-۲۷:**  $S^{-1}M$  با عمل  $\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt + ys}{st}$  یک گروه جمعی است. همچنین با در نظر گرفتن تابع

$$S^{-1}M \times S^{-1}R \rightarrow S^{-1}M, \quad \frac{x}{s} \cdot \frac{r}{t} = \frac{xr}{st}$$

با ضابطه  $\cdot$ ،  $S^{-1}M$  یک  $S^{-1}R$ -مدول است.

**نماد گذاری و تعریف ۱-۲۸:** فرض کنید  $P$  یک ایده آل اول از حلقه جابجایی و یکدار  $R$  باشد و

$S = R - P$ . همچنین فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول باشد. در این صورت  $S^{-1}R$  را با نماد  $R_P$

نمایش می‌دهیم و به آن حلقه موضعی سازی  $R$  در  $P$  گوئیم. همچنین  $S^{-1}M$  را با نماد  $M_P$

نشان می‌دهیم.

همریختی  $f: M \rightarrow S^{-1}M$  با ضابطه  $f(m) = \frac{m}{1}$  را همریختی طبیعی<sup>۴</sup> نامند که لزوماً

یک به یک نیست.

**گزاره ۱-۲۹:** (۱) هر ایده آل  $S^{-1}R$  یک ایده آل توسیعی است؛ یعنی برای هر ایده آل  $A$  از حلقه

$S^{-1}R$ ، ایده آل  $I$  از حلقه  $R$  وجود دارد به طوری که  $A = S^{-1}I$ .

(۲) فرض کنید  $I$  ایده آلی از حلقه  $R$  باشد.  $S^{-1}I = S^{-1}R$  اگر و تنها اگر  $I \cap S \neq \emptyset$ .

(۳) ایده آل‌های اول حلقه  $S^{-1}R$  با ایده آل‌های اول  $R$ ، که اشتراکی با  $S$  ندارند در تناظر

<sup>۱</sup>module of fractions

<sup>۲</sup>ring of fractions

<sup>۳</sup>ring of localization

<sup>۴</sup>natural homomorphism

یک به یک هستند.

اثبات: به [۴، قضیه ۳-۱۱] مراجعه کنید.  $\square$

**مثال ۱-۳۰:** فرض کنید  $P$  یک ایده آل اول از حلقه جابجایی و یکدار  $R$  باشد. در این صورت حلقه  $R_P$  یک حلقه موضعی است. به راحتی می توان نشان داد  $S^{-1}P$  تنها ایده آل ماکسیمال حلقه  $R_P$  است.  $\square$

برای مطالعه بیشتر در مورد مدول کسرها می توانید به [۴] و [۵] مراجعه کنید.

در فصل دوم با مفهوم ایده آل های اول وابسته مدول  $M_R$ ، که در آن حلقه  $R$  لزوماً جابجایی نیست، آشنا خواهیم شد. همچنین مدول  $\sigma$ -سازگار را تعریف نموده و نتایجی از این مدول ها را بیان خواهیم کرد. نتیجه اصلی این فصل (قضیه ۲-۱۴)، ایده آل های اول وابسته مدول  $M[x]_S$  را بر حسب ایده آل های اول وابسته مدول  $M_R$ ، زمانی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد، بیان می کند.

در فصل سوم، نشان می دهیم که نتیجه اصلی فصل دوم (قضیه ۲-۱۴)، در مورد مدول های  $M[x, x^{-1}]_S$  و  $M[x, x^{-1}]_T$ ، با شرط  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$ ، نیز برقرار است.

در فصل چهارم نشان می دهیم که در حالت کلی، نتیجه اصلی فصل دوم (قضیه ۲-۱۴) برای مدول های  $M[x]_{S'}$  و  $M((x))_{T'}$ ، زمانی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد، برقرار نیست مگر این که  $R$  نیز یک حلقه کامل چپ باشد.

در فصل پنجم با تعریف مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار، نشان می دهیم که با فرض  $(\sigma, \delta)$ -سازگار بودن  $M_R$ ، می توان ایده آل های اول وابسته مدول  $M[x]_{\bar{S}}$  را بر حسب ایده آل های اول وابسته مدول  $M_R$  بیان نمود.

## فصل دوم

ایده آل های اول وابسته مدول چند جمله ای ها روی

حلقه چند جمله ای های اریب

## فصل دوم

### ایده آل های اول وابسته مدول چند جمله ای ها روی حلقه

### چند جمله ای های اریب

تعریف ۱-۲: فرض کنید  $N$  یک  $R$ -مدول راست ناصفر باشد.  $N$  را اول<sup>۱</sup> نامیم هرگاه برای هر

زیر مدول ناصفر  $N'$  از  $N$ ،  $\text{ann}(N_R) = \text{ann}(N'_R)$ .

تذکر: هر زیر مدول ناصفر از یک مدول اول، اول است.

لم ۲-۲: اگر  $N_R$  یک مدول اول باشد آنگاه  $\text{ann}(N_R)$  یک ایده آل اول از  $R$  است.

اثبات: از آنجایی که  $N \neq 0$ ، لذا  $\text{ann}(N) \neq R$ . فرض کنید  $aRb \subseteq \text{ann}(N_R)$  و  $a \notin \text{ann}(N_R)$ . از

آنجایی که  $a \notin \text{ann}(N_R)$ ، لذا  $n' \in N$  وجود دارد به طوری که  $n'a \neq 0$ . همچنین از آنجایی که

$aRb \subseteq \text{ann}(N_R)$ ، پس  $n'aRb = 0$ . لذا  $b \in \text{ann}(\langle n'a \rangle)$ . چون  $N_R$  یک مدول اول است و  $\langle n'a \rangle$

---

<sup>۱</sup>prime

یک  $R$  - زیر مدول ناصفر از  $N_R$  است لذا  $b \in \text{ann}(\langle n'a \rangle) = \text{ann}(N_R)$  □

عکس لم فوق همواره برقرار نیست. به عنوان مثال  $Z$  - مدول  $N = Z \oplus Z/nZ$  را در نظر بگیرید.

به وضوح  $\text{ann}(N) = 0$  ایده آل اولی از  $Z$  است ولی از آنجایی که  $Z/nZ$  یک  $Z$  - زیر مدول از  $N$  است و برای هر  $n \geq 2$ ،  $\text{ann}(Z/nZ) \neq 0 = \text{ann}(N)$ ، لذا برای هر  $n \geq 2$ ،  $N$  یک مدول اول نیست.

**تعریف ۲-۳:** فرض کنید  $M$  یک  $R$  - مدول راست باشد. ایده آل  $P$  از حلقه  $R$  را یک ایده آل اول وابسته<sup>۱</sup>  $M$  نامیم اگر زیر مدول اول  $N_R \subseteq M_R$  وجود داشته باشد به طوری که  $P = \text{ann}(N_R)$ .

مجموعه تمام ایده آل های اول وابسته  $M$  را با  $\text{Ass}(M_R)$  نمایش می دهیم.

**لم ۲-۴:** اگر  $M_R$  یک مدول اول باشد آنگاه  $\text{Ass}(M_R) = \{\text{ann}(M_R)\}$ .

**اثبات:** به وضوح  $\{\text{ann}(M_R)\} \subseteq \text{Ass}(M_R)$ . به عکس فرض کنید  $P \in \text{Ass}(M_R)$ . بنابراین طبق

تعریف، زیر مدول اول  $N_R \subseteq M_R$  وجود دارد به طوری که  $P = \text{ann}(N_R)$ . از آنجایی که  $M$  یک

مدول اول است لذا  $\text{ann}(N_R) = \text{ann}(M_R)$ . بنابراین  $P = \text{ann}(M_R) \in \{\text{ann}(M_R)\}$  □

**گزاره ۲-۵:** فرض کنید  $N$  زیر مدولی از  $M$  باشد. در این صورت  $\text{Ass}(N) \subseteq \text{Ass}(M)$  و

$$\text{Ass}(M) \subseteq \text{Ass}(N) \cup \text{Ass}(M/N)$$

**اثبات:** به وضوح  $\text{Ass}(N) \subseteq \text{Ass}(M)$ . برای اثبات  $\text{Ass}(M) \subseteq \text{Ass}(N) \cup \text{Ass}(M/N)$ ، فرض کنیم

$P \in \text{Ass}(M)$ . بنابراین زیر مدول اول  $K$  از  $M$  وجود دارد به طوری که  $P = \text{ann}(K)$ . دو حالت را

در نظر می گیریم:

حالت اول: فرض کنیم  $K \cap N \neq 0$ . از آنجایی که  $K \cap N$  زیر مدولی از  $K$  است لذا یک مدول

اول است و همچنین  $\text{ann}(K \cap N) = \text{ann}(K) = P$ . از طرفی  $K \cap N$  زیر مدولی از  $N$  است، پس

$$P \in \text{Ass}(N)$$

حالت دوم: فرض کنیم  $K \cap N = 0$ . می دانیم  $K/(K \cap N) \cong (K + N)/N$ . بنابراین

$$\text{ann}((K + N)/N) = \text{ann}(K) = P \text{ و } (K + N)/N \text{ یک مدول اول است. از آنجایی که } (K + N)/N$$

<sup>۱</sup>associated prime

زیر مدولی از  $M/N$  است لذا  $P \in \text{Ass}(M/N)$ .  $\square$

**نتیجه ۲-۶:** فرض کنید  $\{M_i\}_{i=1}^n$  خانواده ای از  $R$ -مدول ها باشد. در این صورت

$$\text{Ass}\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) = \bigcup_{i=1}^n \text{Ass}(M_i)$$

**تذکر:** اگر  $R$  یک حلقه جابجایی و  $M$  یک  $R$ -مدول باشد آنگاه تعریف ۳-۲ با تعریف ۳-۱ معادل

است، زیرا: فرض کنید  $P \in \text{Ass}(M_R)$  ایده آلی از  $R$  باشد که در تعریف ۳-۲ صدق می کند.

بنابراین زیر مدول اول  $N_R \subseteq M_R$  وجود دارد به طوری که  $P = \text{ann}(N_R)$ . با توجه به لم ۲-۲،  $P$

یک ایده آل اول است. فرض کنید  $n \in N$ . از آنجایی که  $N_R$  اول است لذا

$$\text{ann}(\langle n \rangle) = \text{ann}(N_R) = P \quad (۱-۲)$$

(منظور از  $\langle n \rangle$ ، زیر مدول تولید شده توسط  $n$  از  $N_R$  است). نشان می دهیم  $\text{ann}(n) = \text{ann}(\langle n \rangle)$ .

می دانیم  $\text{ann}(N) \subseteq \text{ann}(n) \subseteq \text{ann}(\langle n \rangle)$  با استفاده از (۱-۲) خواهیم داشت:

$$P = \text{ann}(\langle n \rangle) = \text{ann}(n)$$

حال فرض کنید  $P$  ایده آلی از  $R$  باشد که در تعریف ۳-۱ صدق می کند. بنابراین  $P$  یک ایده آل

اول از  $R$  است و  $m \in M$  و  $m \neq 0$  وجود دارد به طوری که  $P = \text{ann}(m)$ . نشان می دهیم  $\langle m \rangle$  یک

زیر مدول اول از  $M$  است و  $\text{ann}(m) = \text{ann}(\langle m \rangle)$ . فرض کنید  $N$ ،  $R$ -زیر مدول ناصفری از  $\langle m \rangle$

باشد. بنابراین  $\text{ann}(\langle m \rangle) \subseteq \text{ann}(N)$ . حال فرض کنید  $a \in \text{ann}(N_R)$ .  $n \in N$  و  $n \neq 0$  را در نظر

بگیرید، داریم  $na = 0$  (\*). از آنجایی که  $N$  زیر مدولی از  $\langle m \rangle$  است لذا وجود دارد  $r \in R$  به طوری

که  $n = mr$ . پس با جایگذاری در (\*) خواهیم داشت:  $mra = 0$ . بنابراین  $ra \in \text{ann}(m) = P$ . از

آنجایی که  $P$  یک ایده آل اول از  $R$  است لذا  $r \in P$  یا  $a \in P$ . اگر  $r \in P$  آنگاه  $n = mr = 0$  که با

فرض در تناقض است. بنابراین  $a \in P = \text{ann}(m)$  و لذا  $\text{ann}(N) \subseteq \text{ann}(m) \subseteq \text{ann}(\langle m \rangle)$ .

بنابراین  $\langle m \rangle$  زیر مدول اولی از  $M$  است و  $P = \text{ann}(m) = \text{ann}(\langle m \rangle)$ . لذا  $P$  در تعریف ۳-۲ صدق

می کند.



**تعریف ۲-۷:** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول راست و  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونریختی از حلقه  $R$  باشد.

$M$  را  $\sigma$ -سازگار<sup>۱</sup> نامیم اگر برای هر  $m \in M$  و هر  $r \in R$ ،

$$mr = 0 \Leftrightarrow m\sigma(r) = 0.$$

**لم ۲-۸:** الف) هر زیر مدول از یک مدول  $\sigma$ -سازگار،  $\sigma$ -سازگار است.

ب) اگر  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه برای هر  $i \geq 1$ ،  $M_R$  یک مدول  $\sigma^i$ -سازگار است.

**اثبات:** الف) به وضوح برقرار است.

ب) از آنجایی که  $\sigma$  یک درونریختی از  $R$  است لذا برای هر  $i \geq 1$ ،  $\sigma^i$  نیز یک درونریختی از  $R$

است. برای هر  $m \in M$  و هر  $r \in R$

$$mr = 0$$

$$\Leftrightarrow m\sigma(r) = 0$$

$$\Leftrightarrow m\sigma^2(r) = 0$$

$\vdots$

$$\Leftrightarrow m\sigma^i(r) = 0$$

بنابراین  $M_R$  یک مدول  $\sigma^i$ -سازگار است.  $\square$

**لم ۲-۹:** اگر  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه برای هر  $i \geq 1$ ،  $M[[X]]_R$  یک مدول

$\sigma^i$ -سازگار است.

**اثبات:** بنا بر لم ۲-۸، کافیهست برای  $i = 1$  ثابت کنیم. فرض کنید  $m(x) = m_0 + m_1x + \dots \in M[[X]]$

و  $r \in R$ . در نتیجه

$$m(x)r = 0$$

$$\Leftrightarrow m_0r + m_1\sigma(r)x + \dots = 0$$

$$\Leftrightarrow m_j\sigma^j(r) = 0 \quad (j \geq 0 \text{ برای هر } j)$$

---

<sup>۱</sup>  $\sigma$ -compatible

$$\Leftrightarrow m_j \sigma^{j+1}(r) = 0 \quad (j \geq 0 \text{ هر برای هر})$$

$$\Leftrightarrow m_0 \sigma(r) + m_1 \sigma^2(r)x + \dots = 0$$

$$\Leftrightarrow (m_0 + m_1 x + \dots) \sigma(r) = 0$$

□

$$\Leftrightarrow m(x) \sigma(r) = 0$$

لم ۲-۱۰: اگر  $Q_R$  مشمول در  $S$  - مدول  $P_S$  و  $P_R$  یک مدول  $\sigma$  - سازگار باشد آنگاه  $R \cap \text{ann}(Q.S_S) = \text{ann}(Q_R)$  همچنین اگر به جای  $S$  از  $S'$  استفاده کنیم، نتیجه ای مشابه برقرار است.

اثبات: به وضوح  $R \cap \text{ann}(Q.S_S) \subseteq \text{ann}(Q_R)$  فرض کنید  $r \in \text{ann}(Q_R)$  همچنین فرض کنید  $qf(x) \in Q.S$  به طوری که  $q \in Q$  و  $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_l x^l \in S$  بنابراین  $qf(x)r = qa_0 r + qa_1 \sigma(r)x + \dots + qa_l \sigma^l(r)x^l$  از آنجایی که برای هر  $0 \leq i \leq l$ ،  $qa_i \in Q_R \subseteq P$  و  $P_R$  یک مدول  $\sigma$  - سازگار است لذا برای هر  $0 \leq i \leq l$ ،  $qa_i \sigma^i(r) = 0$  بنابراین  $r \in \text{ann}(Q.S_S)$  بنابراین  $S'$  برقرار است. □

لم ۲-۱۱: اگر  $P_S$  ( $P_{S'}$ ) اول و  $P_R$  یک مدول  $\sigma$  - سازگار باشد آنگاه  $P_R$  اول است.

اثبات: لم را برای حلقه  $S$  ثابت می کنیم، برای حلقه  $S'$  نیز به همین روش ثابت می شود.

فرض کنید  $Q_R \subseteq P_R$ ،  $Q_R \neq 0$ . در نتیجه  $\text{ann}(P_R) \subseteq \text{ann}(Q_R)$  حال فرض کنید  $r \in \text{ann}(Q_R)$  بنا به لم ۲-۱۰،  $r \in \text{ann}(Q.S_S)$  از آنجایی که  $P_S$  اول است و  $Q.S_S \subseteq P_S$ ، پس  $Pr = 0$  و لذا  $r \in \text{ann}(P_R)$  بنابراین  $P_R$  اول است. □

مسئله ۲-۱۲: فرض کنید  $P$  یک  $S$  - مدول ( $S'$  - مدول) باشد به طوری که  $P_R$  یک مدول

$\sigma$  - سازگار است. اگر  $P_R$  اول باشد آیا می توان نتیجه گرفت  $P_S$  ( $P_{S'}$ ) اول است؟

مثال زیر به سؤال فوق جواب منفی می دهد.

فرض کنید  $R$  یک دامنه جابجایی باشد. قرار می دهیم  $P_R := R[t] / \langle t^2 \rangle$  (منظور از  $\langle t^2 \rangle$ ،

زیر مدول تولید شده توسط  $t^2$  از  $R$  - مدول  $R[t]$  است). فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  نگاشت همانی

باشد. در این صورت  $P_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است و نیز داریم  $S = R[x]$ .

با فرض این که  $t.x := t^r$  و برای هر  $r \in R$ ،  $r.x := r$ ،  $P$  به یک  $S$ -مدول تبدیل می‌شود. ابتدا ثابت می‌کنیم  $P_R$  اول است. فرض کنید  $P'_R \subseteq P_R$ ،  $0 \neq P'_R$ . بنابراین  $P'_R$  شامل عنصر ناصفری مانند  $\overline{a+bt}$  است. اگر  $(\overline{a+bt})r = 0$ ، به طوری که  $r \in R$ ، آنگاه  $ar = br = 0$ . از آنجایی که  $R$  دامنه است و  $a \neq 0$  یا  $b \neq 0$ ، لذا  $r = 0$ . بنابراین  $\text{ann}(P'_R) = 0$  و در نتیجه  $P_R$  اول است.

حال نشان می‌دهیم  $P_S$  اول نیست. از آنجایی که  $\bar{0} \neq \bar{1}.x = \bar{1}$ ، لذا  $x \notin \text{ann}(P_S)$ .  $S$ -زیر مدول  $\langle t \rangle / \langle t^r \rangle$  از  $P$  را در نظر بگیرید. از آنجایی که  $t.x := t^r$ ، لذا  $x \in \text{ann}(P'_S)$ . بنابراین  $\text{ann}(P_S) \neq \text{ann}(P'_S)$  و در نتیجه  $P_S$  اول نیست. با روندی مشابه می‌توان نشان داد  $P_{S'}$  نیز اول نیست.  $\square$

مثال زیر نشان می‌دهد فرض  $\sigma$ -سازگاری  $P_R$  در لم‌های ۲-۱۰ و ۲-۱۱ یک شرط لازم است.

**مثال ۲-۱۳:** فرض کنید  $F$  میدانی از مشخصه صفر باشد و  $R := F[t]$ . همچنین فرض کنید  $\sigma$  یک  $F$ -خودریختی از  $R$  باشد به طوری که  $\sigma(t) = t+1$ ، و قرار دهید  $S := R[x; \sigma]$ .  $R$ -مدول راست  $M_R = F[t] / \langle t^r \rangle$  و  $S$ -مدول راست  $P_S = M[x]_S$  را در نظر بگیرید. علامت  $(-)$  به معنی "به پیمانه  $\langle t^r \rangle$ " است. از آنجایی که  $\bar{t}.t = \bar{0}$  و  $\bar{t}.(t+1) \neq \bar{0}$ ، لذا  $P_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار نیست.

ابتدا ثابت می‌کنیم  $P_R$  اول نیست. به وضوح  $t \notin \text{ann}(P_R)$ ، اما  $\langle t \rangle / \langle t^r \rangle$  یک  $R$ -زیر مدول ناصفر از  $P_R$  است و  $t \in \text{ann}(\langle t \rangle / \langle t^r \rangle)$ . بنابراین  $P_R$  اول نیست.

حال نشان می‌دهیم  $P_S$  اول است. کافیت نشان دهیم برای هر زیر مدول ناصفر  $P'_S \subseteq P_S$ ،  $\text{ann}(P'_S) = 0$ . فرض کنید  $p' \in P'$ ،  $0 \neq p'$  و

$$p' = \overline{g_k(t)}x^k + \overline{g_{k+1}(t)}x^{k+1} + \dots \in P$$

به طوری که برای هر  $j$ ،  $\overline{g_j(t)} \in M_R$  و  $\overline{g_k(t)} \neq \bar{0}$ . کافیت نشان دهیم  $\text{ann}(p'S_S) = 0$ . فرض کنید  $s \in S$  وجود داشته باشد به طوری که  $(p'S)s = 0$ . اگر  $s = f_0(t) + f_1(t)x + \dots \in S$ ، به طوری که برای هر  $j$ ،  $f_j(t) \in R$ ، آنگاه برای هر  $i$ ،  $i \geq 0$

$$\begin{aligned} \bar{\circ} &= (\overline{g_k(t)}x^{k+i} + \text{"جملات با درجه بیشتر"})(f_{\circ}(t) + \text{"جملات با درجه بیشتر"}) \\ &= \overline{g_k(t)}\sigma^{k+i}(f_{\circ}(t))x^{k+i} + \text{"جملات با درجه بیشتر"} \\ &= \overline{g_k(t)}f_{\circ}(t+k+i)x^{k+i} + \text{"جملات با درجه بیشتر"} \end{aligned}$$

بنابراین برای هر  $i \geq \circ$ ،  $\overline{g_k(t)}f_{\circ}(t+k+i) = \bar{\circ}$  و لذا برای هر  $i \geq \circ$ ،  $g_k(t)f_{\circ}(t+k+i) \in \langle t^{\vee} \rangle_R$ . از آنجایی که  $g_k(t) \notin \langle t^{\vee} \rangle$ ، لذا برای هر  $i \geq \circ$ ،  $t \mid f_{\circ}(t+k+i)$ . اگر  $t = \circ$ ، آنگاه برای هر  $i \geq \circ$ ،  $f_{\circ}(k+i) = \circ$ . از آنجایی که  $F$  میدانی از مشخصه صفر است لذا برای هر  $i > \circ$ ،  $k+i = (k+i) \cdot 1_F \neq \circ$ . بنابراین  $f_{\circ}$  بی نهایت ریشه متمایز دارد و لذا  $f_{\circ}(t) = \circ$ . به همین ترتیب می توان ثابت نمود که  $f_1 = f_r = \dots = \circ$ . بنابراین  $s = \circ$  و لذا  $\text{ann}(p'S_s) = \circ$ . بنابراین  $P_s$  اول است و  $\text{ann}(P_s) = \circ$ . داریم  $\text{ann}(P_s) = \circ$ ،  $\text{ann}(M.S_s) = \text{ann}(M[x]_s) = \text{ann}(P_s) = \circ$  و  $\text{ann}(M_R) = \langle t^{\vee} \rangle$  و  $\text{ann}(M_R) = \langle t^{\vee} \rangle$ . بنابراین مشاهده می کنیم که با حذف شرط  $\sigma$ -سازگاری  $P_R$ ، تساوی در لم ۲-۱۰ برقرار نیست.  $\square$

**قضیه ۲-۱۴:** فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونیختی باشد. اگر  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه

$$\text{Ass}(M[x]_s) = \{P[x] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$$

در حقیقت، برای هر  $\underline{q} \in \text{Ass}(M[x]_s)$ ،  $\underline{q} = P[x]$  که  $\underline{q} = P[x]$  که  $P = \underline{q} \cap R \in \text{Ass}(M_R)$ .

**برهان:** ابتدا نشان می دهیم  $\text{Ass}(M[x]_s) \supseteq \{P[x] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$ . فرض کنید  $P \in \text{Ass}(M_R)$ .

بنابراین زیر مدول اول  $N_R \subseteq M_R$  وجود دارد به طوری که  $P = \text{ann}(N_R)$ . کفایت ثابت کنیم:

$$P[x] = \text{ann}(N[x]_s) \quad (۲-۲)$$

و

$$N[x]_s \text{ اول است.} \quad (۳-۲)$$

برای اثبات تساوی در (۲-۲)، فرض کنید  $f(x) = a_{\circ} + a_1x + \dots + a_lx^l \in S$  و

$n(x) = n_{\circ} + n_1x + \dots + n_kx^k \in N[x]$ . یک جمله نوعی از  $n(x)f(x)$  به صورت

$$(n_i x^i)(a_j x^j) = n_i \sigma^i(a_j) x^{i+j}$$

است. اگر  $f(x) \in P[x]$ ، آنگاه از  $P = \text{ann}(N_R)$  نتیجه می گیریم

$n_i a_j = 0$ . چون  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $n_i \sigma^i(a_j) = 0$ . بنابراین تمام ضرایب  $n(x)f(x)$  صفرند و لذا  $P[x] \subseteq \text{ann}(N[x]_S)$ . به عکس اگر  $f(x) \notin P[x]$ ، آنگاه  $i \geq 0$  وجود دارد به طوری که  $a_i \notin P$ . پس  $n \in N$  وجود دارد به طوری که  $na_i \neq 0$  و لذا  $nf(x) \neq 0$ . بنابراین  $f(x) \notin \text{ann}(N[x]_S)$  و لذا  $\text{ann}(N[x]_S) \subseteq P[x]$  و تساوی در (۲-۲) ثابت می‌شود.

اکنون ثابت می‌کنیم  $N[x]_S$  اول است. برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم اگر  $Q_S$  زیر مدول ناصفری از  $N[x]_S$  باشد آنگاه

$$\text{ann}(Q_S) = \text{ann}(N[x]_S) \quad (۴-۲)$$

فرض کنید

$$Q_0 = \{n \in N : \exists nx^k + n_{k+1}x^{k+1} + \dots + n_t x^t \in Q; k \geq 0\} \subseteq N \quad (۵-۲)$$

قرار می‌دهیم  $P_0 = \langle Q_0 \rangle_R$ . چون  $N_R$  اول است و  $0 \neq Q_0 \subseteq P_0 \subseteq N$ ، لذا

$$P = \text{ann}(P_0)_R \quad (۶-۲)$$

برای اثبات  $\subseteq$  در (۴-۲)، فرض کنید  $Qf(x) = 0$ ، که در آن  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l \in S$ .

با توجه به (۲-۲) کفایت ثابت کنیم برای هر  $i$ ،  $a_i \in P$ . از  $a_0$  شروع می‌کنیم. عناصر  $P_0$  به فرم

$\sum n_j r_j$  هستند که در آن برای هر  $j$ ،  $r_j \in R$  و  $n_j \in Q_0$ . بنابراین با توجه به (۶-۲) کفایت

نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q_0$ ،  $nr \in 0$ . چون  $n \in Q_0$ ، پس

$nx^k + n_{k+1}x^{k+1} + \dots + n_t x^t \in Q$  وجود دارد که در آن  $k \geq 0$ . چون  $Q$  یک  $R$ -مدول است لذا

برای هر  $r \in R$ ،  $n\sigma^k(r)x^k + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)x^{k+1} + \dots + n_t\sigma^t(r)x^t \in Q$  پس

$$0 = (n\sigma^k(r)x^k + \dots + n_t\sigma^t(r)x^t) \quad (۷-۲)$$

$$= n\sigma^k(ra_0)x^k + \dots + n_t\sigma^t(ra_l)x^l$$

بنابراین  $n\sigma^k(ra_0) = 0$ . با توجه به لم ۲-۸،  $N_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $nra_0 = 0$ . حال

به طور استقرایی فرض کنید  $a_0, a_1, \dots, a_{i-1} \in P$ . از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا

برای هر  $k \geq 0$  و هر  $j$ ، که  $j < i$ ،

$$N\sigma^k(a_i) = 0 \quad (8-2)$$

با توجه به (۶-۲)، کافیت نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q$ ،  $nra_i = 0$  با توجه به (۷-۲) و

(۸-۲) داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= (n\sigma^k(r)x^k + \dots + n_t\sigma^t(r)x^t)(a_0 + \dots + a_{i-1}x^{i-1} + a_ix^i + \dots + a_lx^l) \\ &= (n\sigma^k(r)\sigma^k(a_0)x^k + \dots + n_t\sigma^t(r)\sigma^t(a_0)x^t) + \dots + (n\sigma^k(r)\sigma^k(a_{i-1})x^{k+i-1} + \dots \\ &\quad + n_t\sigma^t(r)\sigma^t(a_{i-1})x^{t+i-1}) + ((n\sigma^k(r)x^k + \dots + n_t\sigma^t(r)x^t)(a_ix^i + \dots + a_lx^l)) \\ &= n\sigma^k(ra_i)x^{k+i} + \text{"جملات با درجه بیشتر"} \end{aligned}$$

پس  $n\sigma^k(ra_i) = 0$  از آنجایی که  $N_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $nra_i = 0$ . بنابراین

$$ann(Q_S) \subseteq ann(N[x]_S) \text{ و در نتیجه } f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l \in P[x] = ann(N[x]_S)$$

قبل از اثبات  $\subseteq$  در قضیه ۱۴-۲ به بیان تعریف و لم زیر می‌پردازیم.

**تعریف ۱۵-۲ [۱۳]:** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد و  $f(x) \in M[x]$ . گوئیم  $f(x)$  یک

چند جمله ای خوب<sup>۱</sup> است هرگاه  $f \neq 0$  و تمام ضرایب ناصفر آن دارای پوچسازهای یکسان در  $R$  باشند.

**لم ۱۶-۲ [۱۸]:** فرض کنید  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد. در این صورت برای هر

$$m(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k \in M[x], \quad 0 \neq m(x), \quad r \in R \text{ وجود دارد به طوری که } m(x)r \text{ خوب است.}$$

**اثبات:** با استقرا روی  $n$ ، که نمایانگر تعداد ضرایب ناصفر  $m(x)$  است، لم را اثبات می‌کنیم. در حالتی

که  $n=1$ ، به وضوح حکم برقرار است. فرض کنید حکم برای  $1 \leq n \leq l-1$  برقرار باشد. اکنون فرض

کنید  $m(x)$  یک چند جمله ای باشد که خوب نیست و در آن  $n=l$ . بنابراین ضرایب ناصفر  $m_i$  و

$m_j$  در  $m(x)$  وجود دارند به طوری که  $ann(m_i) \neq ann(m_j)$ . بدون این که خللی به کلیت وارد شود،

فرض کنیم  $b \in R$  وجود داشته باشد به طوری که  $m_ib = 0 \neq m_jb$ . چون  $M_R$  یک مدول

$\sigma$ -سازگار است لذا  $m_i\sigma^i(b) = 0 \neq m_j\sigma^j(b)$ . بنابراین  $m(x)b = m_0b + \dots + m_k\sigma^k(b)x^k$  یک

---

<sup>۱</sup>good

چند جمله ای ناصفر است که تعداد ضرایب ناصفر آن کمتر از  $l$  است. لذا بنا به فرض استقرار،  $c \in R$  وجود دارد به طوری که  $m(x)bc$  یک چند جمله ای خوب است. قرار می‌دهیم  $r := bc$  و لذا حکم استقرار برقرار است.  $\square$

حال برهان قضیه ۲-۱۴ را ادامه می‌دهیم.

فرض کنید  $I \in \text{Ass}(M[x]_S)$ . بنا به تعریف، زیر مدول اول  $P_S \subseteq M[x]_S$  وجود دارد به طوری که  $I = \text{ann}(P_S)$ . عنصر ناصفر  $m(x)$  را از  $P$  انتخاب می‌کنیم. با توجه به لم ۲-۱۶ می‌توان فرض نمود که  $m(x)$  یک چند جمله ای خوب است. قرار دهید  $Q_R = m(x)R$ . چون  $P_S$  اول است و لذا  $Q.S_S \subseteq P_S$

$$\text{ann}(Q.S_S) = I \quad (۹-۲)$$

با توجه به لم ۲-۷، از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $M[[x]]_R$  نیز  $\sigma$ -سازگار است. چون  $Q_R \subseteq P_R \subseteq M[x]_R \subseteq M[[x]]_R$  پس  $Q_R$  و  $P_R$  نیز  $\sigma$ -سازگارند. بنابراین با توجه به لم ۲-۱۱، از آنجایی که  $P_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار و  $P_S$  اول است لذا  $P_R$  اول است و چون  $Q_R \subseteq P_R$ ، پس  $Q_R$  نیز اول است. با توجه به لم ۲-۱۰ و همچنین (۹-۲)،  $\text{ann}(Q_R) = I \cap R$ . پس داریم:

$$Q_R \text{ اول است و } \text{ann}(Q_R) = I \cap R \quad (۱۰-۲)$$

ادعا می‌کنیم  $I = (I \cap R)[x]$ . چون  $I$  ایده آلی از  $S$  است لذا  $(I \cap R)[x] \subseteq I$ . به عکس فرض کنید  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l \in I$ ، به طوری که برای هر  $1 \leq i \leq l$ ،  $a_i \in R$ . نشان می‌دهیم برای هر  $1 \leq i \leq l$ ،  $a_i \in I$ . با توجه به (۱۰-۲)، کافیت ثابت کنیم برای هر  $1 \leq i \leq l$ ،  $a_i \in \text{ann}(Q_R)$ . فرض کنید  $q \in Q$ . بنابراین  $r \in R$  وجود دارد به طوری که  $q = m(x)r$ . از آنجایی که  $m(x)$  یک چند جمله ای خوب است لذا  $m(x)r$  نیز یک چند جمله ای خوب است (مگر این که صفر باشد). فرض کنید  $m(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k$  که در آن  $m_k \neq 0$ . بنابراین  $m(x)r = m_0r + m_1\sigma(r)x + \dots + m_k\sigma^k(r)x^k$  فرض کنید  $m_i\sigma^i(r)$  و  $m_j\sigma^j(r)$  دو ضریب ناصفر از

$m(x)r$  باشند. در این صورت برای هر  $a \in R$ :

$$\begin{aligned}
 m_i \sigma^i(r)a &= 0 \\
 \Leftrightarrow m_j \sigma^i(r)a &= 0 \quad (\text{چون } m(x) \text{ یک چند جمله ای خوب است}) \\
 \Leftrightarrow m_j \sigma^i(r)\sigma^j(a) &= 0 \quad (\text{چون } M \text{ یک مدول } \sigma\text{-سازگار است}) \\
 \Leftrightarrow m_j \sigma^i(ra) &= 0 \\
 \Leftrightarrow m_j \sigma^j(ra) &= 0 \quad (\text{چون } M \text{ یک مدول } \sigma\text{-سازگار است}) \\
 \Leftrightarrow m_j \sigma^j(r)\sigma^j(a) &= 0 \\
 \Leftrightarrow m_j \sigma^j(r)a &= 0 \quad (\text{چون } M \text{ یک مدول } \sigma\text{-سازگار است})
 \end{aligned}$$

بنابراین  $\text{ann}(m_i \sigma^i(r)) = \text{ann}(m_j \sigma^j(r))$ . در نتیجه  $m(x)r$  یک چند جمله ای خوب است. از آنجایی که  $m(x)r \in Q_R$ ، لذا با توجه به (۹-۲):

$$m(x)r(a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l) = 0 \quad (۱۱-۲)$$

بنابراین با توجه به تساوی (۱۱-۲) و همچنین  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$  می توان نتیجه گرفت  $a_0$ ، ضرب جمله ناصفر با کمترین درجه از  $m(x)r$  را صفر می کند و چون  $m(x)r$  یک چند جمله ای خوب است لذا  $a_0$  در پوچساز  $q = m(x)r$  قرار می گیرد. بنابراین  $a_0 \in \text{ann}(Q_R)$ ، و لذا با توجه به (۱۰-۲)،  $a_0 \in I \cap R$ . همین روند را برای سایر  $a_i$  ها ( $1 \leq i \leq l$ ) تکرار می کنیم. پس  $I \subseteq (I \cap R)[x]$  و ادعا ثابت می شود.

با توجه به (۱۰-۲)،  $I \cap R \in \text{Ass}(Q_R)$ . همریختی  $\varphi: Q_R \rightarrow M_R$  را با ضابطه  $\varphi(m(x)r) = m_k r$  در نظر بگیرید.  $\varphi$  یک نشاننده است: فرض کنید  $m_k r = 0$ . از آنجایی که  $m(x)$  یک چند جمله ای خوب است پس برای هر  $j \geq 0$ ،  $m_j r = 0$  و لذا  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$  ایجاب می کند برای هر  $j \geq 0$ ،  $m_j \sigma^j(r) = 0$ . بنابراین  $m(x)r = 0$ . در نتیجه  $\text{Ass}(Q_R) \subseteq \text{Ass}(M_R)$ ، و لذا  $I \cap R \in \text{Ass}(M_R)$ .

چون  $I = (I \cap R)[x]$ ، لذا  $I = (I \cap R)[x] \subseteq \{P[x] : P \in \text{Ass}(M_R)\} \subseteq \text{Ass}(M[x]_S)$ .  $\square$

**نتیجه ۲-۱۷:** اگر  $R$  یک حلقه و  $M$  یک  $R$ -مدول باشد آنگاه



$$Ass(M[x]_{R[x]}) = \{P[x] : P \in Ass(M_R)\}$$

اثبات: با قرار دادن  $\sigma = Id_R$  در قضیه ۱۴-۲، نتیجه حاصل می شود.  $\square$

مثال ۱۸-۲: فرض کنید  $(R, \underline{m})$  یک حلقه جابجایی موضعی و  $\sigma: R \rightarrow R$  یک خودریختی باشد.

همچنین فرض کنید  $M = R/\underline{m}$ . برای هر  $s \in R$ ، منظور از  $\bar{s}$ ،  $s + \underline{m}$  است. در این صورت  $M_R$

یک مدول  $\sigma$ -سازگار است: برای هر  $\bar{s} \neq \bar{o} \in M$  و هر  $r \in R$

$$\bar{s}r = \bar{o}$$

$$\Leftrightarrow sr \in \underline{m}$$

$$\Leftrightarrow r \in \underline{m} \quad (s \notin \underline{m} \text{ چون})$$

$$\Leftrightarrow \sigma(r) \in \underline{m} \quad (\text{چون تصویر هر عنصر وارون ناپذیر تحت یک خودریختی، وارون ناپذیر است})$$

$$\Leftrightarrow s\sigma(r) \in \underline{m}$$

$$\Leftrightarrow \bar{s}\sigma(r) = \bar{o}$$

از آنجایی که  $M_R$  یک مدول ساده است لذا اول است. پس  $Ass(M_R) = \{ann(M_R)\} = \{\underline{m}\}$

$$\square. Ass((R/\underline{m})[x]_S) = \{\underline{m}[x]\}, \quad ۱۴-۲ \text{ به قضیه}$$

مثال زیر نشان می دهد در قضیه ۱۴-۲، فرض  $\sigma$ -سازگار بودن  $M_R$  را نمی توان حذف نمود.

مثال ۱۹-۲: فرض کنید  $R_\circ$  یک دامنه باشد و  $R = R_\circ[t]$ . همچنین فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  با ضابطه

$$\sigma(t) = \circ \text{ و } \sigma|_{R_\circ} = Id_{R_\circ} \text{ تعریف شده باشد و } M = R. \text{ از آنجایی که برای هر } \circ \neq r \in R, r\sigma(t) = \circ$$

و  $rt \neq \circ$ ، لذا  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار نیست.

چون  $R_\circ$  دامنه است لذا  $R = R_\circ[t]$  نیز دامنه است. بنابراین اگر  $K$  زیر مدول ناصفری از  $M$

باشد آنگاه  $ann(K) = \circ$ . پس  $M$  یک مدول اول است و لذا  $Ass(M_R) = \{ann(M_R)\} = \{\circ\}$ . حال

فرض کنید  $I \in Ass(M[x]_S)$ . بنابراین زیر مدول اول  $Q_S \subseteq M[x]_S$  وجود دارد به طوری که

$I = ann(Q_S)$ . چون  $Q_S$  اول است و  $Qx \subseteq Q$ ، لذا  $ann(Qx) = I$ . چون  $\sigma(t) = \circ$ ، لذا برای هر

$m(x) \in Q$ ،  $t \in ann(m(x)x)$  بنابراین  $t \in ann(Qx)$  پس  $ann(Qx) = I$ ، و  $\circ \neq ann(Qx)$  و لذا

$$\square. \{0\} \notin \text{Ass}(M[x]_S)$$

**مثال ۲-۲۰:** فرض کنید  $R, S, M_R$  و  $P_S$  همانند مثال ۲-۱۳ تعریف شده باشند. در مثال ۲-۱۳

نشان داده شد که  $P_S$  اول است و لذا  $\text{Ass}(P_S) = \{\text{ann}(P_S)\} = \{0\}$ .  $\langle t \rangle / \langle t^2 \rangle$  تنها زیر مدول اول

$M_R$  است:

(۱) به وضوح  $\langle t \rangle / \langle t^2 \rangle$  زیر مدولی از  $M_R$  است.

(۲) چون  $\langle t \rangle / \langle t^2 \rangle$  یک مدول ساده است لذا اول است.

(۳) می‌دانیم تنها  $R$  - زیر مدول های ناصفر  $M_R$ ،  $\langle t \rangle / \langle t^2 \rangle$  و  $M_R$  هستند. همچنین از آنجایی که

$$\text{ann}(M_R) = \langle t^2 \rangle \neq \langle t \rangle = \text{ann}(\langle t \rangle / \langle t^2 \rangle)$$

از  $M_R$  است. در نتیجه  $\text{Ass}(M_R) = \{\text{ann}(\langle t \rangle / \langle t^2 \rangle)\} = \{\langle t \rangle\}$ . مشاهده می‌شود که قضیه ۲-۱۴

در این مثال برقرار نیست.  $\square$

## فصل سوم

ایده آل های اول وابسته مدول چند جمله ای های لوران

## ایده آل های اول وابسته مدول چند جمله ای های لوران

در تمام این فصل  $\sigma: R \rightarrow R$  یک خودریختی از حلقه  $R$  است. در فصل اول، با مدول چند جمله ای های لوران آشنا شدیم و نشان دادیم اگر  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد آنگاه می توان  $M[x, x^{-1}]$  را به عنوان یک  $T$ -مدول راست در نظر گرفت. همچنین چون  $S$  زیر حلقه ای از  $T$  است لذا می توان  $M[x, x^{-1}]$  را به عنوان یک  $S$ -مدول راست نیز در نظر گرفت.

در این فصل نشان می دهیم که با فرض  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$ ، نتایجی مشابه آنچه در قضیه ۲-۱۴ بیان نمودیم را برای مدول های  $M[x, x^{-1}]_T$  و  $M[x, x^{-1}]_S$  خواهیم داشت.

**لم ۳-۱:** فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک خودریختی از حلقه  $R$  و  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد. اگر  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه برای هر  $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ،  $M_R$  یک مدول  $\sigma^i$ -سازگار است.

**اثبات:** با توجه به بند (ب) لم ۲-۶ کافی است فرض کنیم  $i \leq -1$ . برای هر  $m \in M$  و هر  $r \in R$ ،

$$mr = 0$$

$$\Leftrightarrow m\sigma(\sigma^{-1}(r)) = \circ$$

$$\Leftrightarrow m\sigma^{-1}(r) = \circ$$

$$\Leftrightarrow m\sigma(\sigma^{-2}(r)) = \circ$$

$$\Leftrightarrow m\sigma^{-2}(r) = \circ$$

$\vdots$

$$\square \quad \Leftrightarrow m\sigma^i(r) = \circ \quad (i \leq -1)$$

لم ۳-۲: اگر  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه برای هر  $i \in \mathbb{Z}$ ،  $M((x))_R$  یک مدول  $\sigma^i$ -سازگار است.

اثبات: طبق لم ۳-۱، کافی است برای  $i=1$  ثابت کنیم.

فرض کنید  $m(x, x^{-1}) = m_k x^k + m_{k+1} x^{k+1} + \dots \in M((x))$  و  $r \in R$  در این صورت،

$$m(x, x^{-1})r = \circ$$

$$\Leftrightarrow m_k \sigma^k(r) x^k + m_{k+1} \sigma^{k+1}(r) x^{k+1} + \dots = \circ$$

$$\Leftrightarrow m_j \sigma^j(r) = \circ \quad (\text{برای هر } j \geq k)$$

$$\Leftrightarrow m_j \sigma^{j+1} = \circ \quad (\text{برای هر } j \geq k) \quad (\text{چون } M_R \text{ یک مدول } \sigma\text{-سازگار است})$$

$$\Leftrightarrow m_k \sigma^{k+1}(r) x^k + m_{k+1} \sigma^{k+2}(r) x^{k+1} + \dots = \circ$$

$$\Leftrightarrow (m_k x^k + m_{k+1} x^{k+1} + \dots) \sigma(r) = \circ$$

$$\square \quad \Leftrightarrow m(x, x^{-1}) \sigma(r) = \circ$$

لم ۳-۳: اگر  $Q_R$  مشمول در  $T$ -مدول  $P_T$  و  $P_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه

$$R \cap \text{ann}(Q.T_T) = \text{ann}(Q_R) \text{ همچنین اگر } T \text{ را با } T' \text{ جایگذاری کنیم، نتیجه مشابه برقرار است.}$$

اثبات: به وضوح  $R \cap \text{ann}(Q.T_T) \subseteq \text{ann}(Q_R)$ . فرض کنید  $r \in \text{ann}(Q_R)$  همچنین فرض کنید

$$f(x, x^{-1}) = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots + a_m x^m \in T \text{ و } q \in Q \text{ به طوری که } qf(x, x^{-1}) \in Q.T$$

در نتیجه  $qf(x, x^{-1})r = qa_k \sigma^k(r) x^k + qa_{k+1} \sigma^{k+1}(r) x^{k+1} + \dots + qa_m \sigma^m(r) x^m$  از آنجایی که برای

هر  $k \leq i \leq m$ ،  $qa_i \in Q_R \subseteq P$  و  $P_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا برای هر  $k \leq i \leq m$ ،

$$qa_i \sigma^i(r) = 0. \text{ بنابراین } r \in \text{ann}(Q.T_T). \text{ اثباتی مشابه برای } T' \text{ برقرار است. } \square$$

**لم ۳-۴:** اگر  $P_T$  ( $P_{T'}$ ) اول و  $P_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه  $P_R$  اول است.

**اثبات:** لم را برای حلقه  $T$  ثابت می‌کنیم، برای حلقه  $T'$  نیز به همین روش ثابت می‌شود.

فرض کنید  $Q_R \subseteq P_R$ ، پس  $\text{ann}(P_R) \subseteq \text{ann}(Q_R)$ . حال فرض کنید  $r \in \text{ann}(Q_R)$ . بنا به لم

۳-۳،  $r \in \text{ann}(Q.T_T)$  چون  $P_T$  اول است و  $Q.T_T \subseteq P_T$ ، پس  $Pr = 0$ ، و لذا  $r \in \text{ann}(P_R)$  بنابراین

$P_R$  اول است.  $\square$

**قضیه ۳-۵:** فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک خودریختی باشد. اگر  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد

آنگاه

$$(1) \quad \text{Ass}(M[x, x^{-1}]_S) = \{P[x] : P \in \text{Ass}(M_R)\} \text{ و}$$

$$(2) \quad \text{Ass}(M[x, x^{-1}]_T) = \{P[x, x^{-1}] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$$

**برهان:** (۱) ابتدا نشان می‌دهیم  $\text{Ass}(M[x, x^{-1}]_S) \supseteq \{P[x] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$ . فرض کنید

$P \in \text{Ass}(M_R)$ . بنابراین زیر مدول اول  $N_R \subseteq M_R$  وجود دارد به طوری که  $P = \text{ann}(N_R)$ . کفایت

ثابت کنیم:

$$P[x] = \text{ann}(N[x, x^{-1}]_S) \quad (1-3)$$

و

$$(2-3) \quad N[x, x^{-1}]_S \text{ اول است.}$$

برای اثبات تساوی در (۱-۳)، فرض کنید  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l \in S$  و

$n(x, x^{-1}) = n_sx^s + n_{s+1}x^{s+1} + \dots + n_kx^k \in N[x, x^{-1}]$  به طوری که  $s \in \mathbb{Z}$ . یک جمله نوعی از

$n(x, x^{-1})f(x)$  به صورت  $(n_ix^i)(a_jx^j) = n_i\sigma^i(a_j)x^{i+j}$  است. اگر  $f(x) \in P[x]$ ، آنگاه چون

$P = \text{ann}(N_R)$ ، لذا  $n_ia_j = 0$ . چون  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $n_i\sigma^i(a_j) = 0$ . بنابراین

تمام ضرایب  $n(x, x^{-1})f(x)$  صفرند و لذا  $P[x] \subseteq \text{ann}(N[x, x^{-1}]_S)$ . به عکس، اگر  $f(x) \notin P[x]$ ،

آنگاه  $i \geq 0$  وجود دارد به طوری که  $a_i \notin P$ . پس  $n \in N$  وجود دارد به طوری که  $na_i \neq 0$  و لذا  $nf(x) \neq 0$ . در نتیجه  $f(x) \notin \text{ann}(N[x, x^{-1}]_S)$  و لذا  $\text{ann}(N[x, x^{-1}]_S) \subseteq P[x]$  و تساوی در (۱-۳) ثابت می‌شود.

اکنون ثابت می‌کنیم  $N[x, x^{-1}]_S$  اول است. برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم اگر  $Q_S$  زیر مدول ناصفری از  $N[x, x^{-1}]_S$  باشد آنگاه

$$\text{ann}(Q_S) = \text{ann}(N[x, x^{-1}]_S) \quad (۳-۳)$$

فرض کنید

$$Q_0 = \{n \in N : \exists nx^k + n_{k+1}x^{k+1} + \dots + n_l x^l \in Q; k \in \mathbb{Z}\} \subseteq N \quad (۴-۳)$$

قرار می‌دهیم  $P_0 = \langle Q_0 \rangle_R$ . چون  $N_R$  اول است و  $0 \neq Q_0 \subseteq P_0 \subseteq N$ ، لذا

$$P = \text{ann}(P_0)_R \quad (۵-۳)$$

برای اثبات  $\subseteq$  در (۳-۳)، فرض کنید  $Qf(x) = 0$ ، که در آن  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l \in S$ . با توجه به (۱-۳) کافیت ثابت کنیم برای هر  $i$ ،  $a_i \in P$ . از  $a_0$  شروع می‌کنیم. عناصر  $P_0$  به فرم  $\sum n_j r_j$  هستند که در آن برای هر  $j$ ،  $r_j \in R$  و  $n_j \in Q_0$ . بنابراین با توجه به (۵-۳) کافی است نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q_0$ ،  $nra_0 = 0$ . چون  $n \in Q_0$ ، پس وجود دارد  $k \in \mathbb{Z}$  که در آن  $nx^k + n_{k+1}x^{k+1} + \dots + n_l x^l \in Q$

$$\text{پس } n\sigma^k(r)x^k + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)x^{k+1} + \dots + n_l\sigma^l(r)x^l \in Q, r \in R$$

$$0 = (n\sigma^k(r)x^k + \dots + n_l\sigma^l(r)x^l)(a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l) \quad (۶-۳)$$

$$= n\sigma^k(ra_0)x^k + \dots + \text{"جملات با درجه بیشتر"}$$

بنابراین  $n\sigma^k(ra_0) = 0$ . از  $\sigma$ -سازگاری  $N_R$  می‌توان نتیجه گرفت  $nra_0 = 0$ . حال به طور استقرایی فرض کنید  $a_0, a_1, \dots, a_{i-1} \in P$ . از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا برای هر  $k \in \mathbb{Z}$  و

هر  $j$ ، که  $j < i$ ،

$$N\sigma^k(a_j) = 0 \quad (۷-۳)$$

با توجه به (۵-۳) کافیت نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q_0$ ،  $nra_i = 0$  با توجه به (۶-۳) و

(۷-۳) داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= (n\sigma^k(r)x^k + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)x^{k+1} + \dots + n_t\sigma^t(r)x^t)(a_0 + \dots + a_{i-1}x^{i-1} + a_ix^i + \dots + a_lx^l) \\ &= (n\sigma^k(r)\sigma^k(a_0)x^k + \dots + n_t\sigma^t(r)\sigma^t(a_0)x^t) + \dots + (n\sigma^k(r)\sigma^k(a_{i-1})x^{k+i-1} + \dots \\ &\quad + n_t\sigma^t(r)\sigma^t(a_{i-1})x^{t+i-1}) + ((n\sigma^k(r)x^k + \dots + n_t\sigma^t(r)x^t)(a_ix^i + \dots + a_lx^l)) \\ &= n\sigma^k(ra_i)x^{k+i} + \text{"جملات با درجه بیشتر"} \end{aligned}$$

پس  $n\sigma^k(ra_i) = 0$  از آنجایی که  $N_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $nra_i = 0$  در نتیجه

$$a_i \in P \text{ بنابراین } \left( N[x, x^{-1}]_S \right) \text{ برای } f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l \in P[x] = \text{ann}(N[x, x^{-1}]_S) \text{ و لذا} \\ \text{ann}(Q_S) \subseteq \text{ann}(N[x]_S)$$

قبل از اثبات  $\subseteq$  در بند (۱) قضیه ۵-۳، به بیان تعریف و لم زیر می‌پردازیم.

**تعریف ۶-۳:** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد و  $m(x, x^{-1}) \in M[x, x^{-1}]$  گوئیم  $m(x, x^{-1})$  یک چند جمله ای خوب<sup>۱</sup> است هرگاه  $m(x, x^{-1}) \neq 0$  و تمام ضرایب ناصفر آن دارای پوچسازهای یکسان در  $R$  باشند.

**لم ۷-۳:** فرض کنید  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد. در این صورت برای هر

$$m(x, x^{-1}) \neq 0 \quad (s \in \mathbb{Z}), \quad r \in R \text{ وجود دارد به طوری}$$

که  $m(x, x^{-1})r$  یک چند جمله ای خوب است.

**اثبات:** مشابه لم ۱۶-۲ ثابت می‌شود.  $\square$

حال برهان بند (۱) قضیه ۵-۳ را ادامه می‌دهیم.

فرض کنید  $I \in \text{Ass}(M[x, x^{-1}]_S)$ . بنا به تعریف، زیر مدول اول  $P_S \subseteq M[x, x^{-1}]_S$  وجود دارد

به طوری که  $I = \text{ann}(P_S)$ . عنصر ناصفر  $m(x, x^{-1})$  را از  $P$  انتخاب می‌کنیم. با توجه به لم ۷-۳

می‌توان فرض نمود که  $m(x, x^{-1})$  یک چند جمله ای خوب است. قرار دهید  $Q_R = m(x, x^{-1})R$ . چون

---

<sup>۱</sup>good



$P_S$  اول است و  $Q.S_S \subseteq P_S$ ، لذا

$$ann(Q.S_S) = I \quad (۸-۳)$$

با توجه به لم ۲-۳، از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $M((x))_R$  نیز  $\sigma$ -سازگار است. چون  $Q_R \subseteq P_R \subseteq M[x, x^{-1}]_R \subseteq M((x))_R$  پس  $Q_R$  و  $P_R$  نیز  $\sigma$ -سازگارند. بنابراین با توجه به لم ۱۱-۲، از آنجایی که  $P_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار و  $P_S$  اول است پس  $P_R$  اول است و چون  $Q_R \subseteq P_R$ ،  $Q_R \neq 0$ ، پس  $Q_R$  نیز اول است. با توجه به لم ۱۰-۲ و همچنین (۸-۳)،  $ann(Q_R) = I \cap R$  با قرار دادن این دو مطلب در کنار هم داریم:

$$Q_R \text{ اول است و } ann(Q_R) = I \cap R \quad (۹-۳)$$

ادعا می‌کنیم  $I = (I \cap R)[x]$  (اثبات مانند اثبات ادعای  $I = (I \cap R)[x]$ ، در برهان قضیه ۱۴-۲ است). با توجه به (۹-۳)،  $I \cap R \in Ass(Q_R)$ ، فرض کنید  $\varphi: Q_R \rightarrow M_R$  همریختی  $s \in \mathbb{Z}$  که در آن  $m(x, x^{-1}) = m_s x^s + m_{s+1} x^{s+1} + \dots + m_k x^k$  ضابطه  $\varphi(m(x, x^{-1})r) = m_d r$  در نظر بگیرید که در آن  $m_d$  ضریب ناصفری از  $m(x, x^{-1})$  است.  $\varphi$  یک نشاننده است: فرض کنید  $m_d r = 0$ . از آنجایی که  $m(x, x^{-1})$  یک چند جمله ای خوب است پس برای هر  $s \leq j \leq k$ ،  $m_j r = 0$  و لذا  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$  ایجاب می‌کند برای هر  $s \leq j \leq k$ ،  $m_j \sigma^j(r) = 0$  بنابراین  $m(x, x^{-1})r = 0$  در نتیجه  $Ass(Q_R) \subseteq Ass(M_R)$  و لذا  $I \cap R \in Ass(M_R)$  چون  $I = (I \cap R)[x]$ ، پس  $Ass(M[x, x^{-1}]_S) \subseteq \{P[x] : P \in Ass(M_R)\}$ . (۲) ابتدا نشان می‌دهیم  $Ass(M[x, x^{-1}]_T) \supseteq \{P[x, x^{-1}] : P \in Ass(M_R)\}$  فرض کنید  $P \in Ass(M_R)$ . بنابراین زیر مدول اول  $N_R \subseteq M_R$  وجود دارد به طوری که  $P = ann(N_R)$ . کافیت ثابت کنیم:

$$P[x, x^{-1}] = ann(N[x, x^{-1}]_T) \quad (۱۰-۳)$$

و

$$N[x, x^{-1}]_T \text{ اول است.} \quad (۱۱-۳)$$

برای اثبات تساوی در (۱۰-۳)، فرض کنید  $f(x, x^{-1}) = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \dots + a_l x^l \in T$  و  $n(x, x^{-1}) = n_s x^s + n_{s+1} x^{s+1} + \dots + n_k x^k \in N[x, x^{-1}]$  به طوری که  $r, s \in \mathbb{Z}$ . یک جمله نوعی از  $n(x, x^{-1}) f(x, x^{-1})$  به صورت  $(n_i x^i)(a_j x^j) = n_i \sigma^i(a_j) x^{i+j}$  است. اگر  $f(x, x^{-1}) \in P[x, x^{-1}]$ ، آنگاه از  $P = \text{ann}(N_R)$ ، نتیجه می‌گیریم  $n_i a_j = 0$ . چون  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $n_i \sigma^i(a_j) = 0$ . بنابراین تمام ضرایب  $n(x, x^{-1}) f(x, x^{-1})$  صفرند و لذا  $P[x, x^{-1}] \subseteq \text{ann}(N[x, x^{-1}]_T)$ . به عکس اگر  $f(x, x^{-1}) \notin P[x, x^{-1}]$ ، آنگاه  $i$  ( $r \leq i \leq l$ ) وجود دارد به طوری که  $a_i \notin P$ . پس  $n \in N$  وجود دارد به طوری که  $na_i \neq 0$  و لذا  $nf(x, x^{-1}) \neq 0$ . پس  $nf(x, x^{-1}) \notin \text{ann}(N[x, x^{-1}]_T)$  و لذا  $\text{ann}(N[x, x^{-1}]_T) \subseteq P[x, x^{-1}]$  و تساوی در (۱۰-۳) ثابت می‌شود.

اکنون ثابت می‌کنیم  $N[x, x^{-1}]_T$  اول است. برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم اگر  $Q_T$

زیر مدول ناصفری از  $N[x, x^{-1}]_T$  باشد آنگاه

$$\text{ann}(Q_T) = \text{ann}(N[x, x^{-1}]_T) \quad (۱۲-۳)$$

فرض کنید

$$Q_\circ = \{n \in N : \exists nx^k + n_{k+1}x^{k+1} + \dots + n_l x^l \in Q; k \in \mathbb{Z}\} \subseteq N \quad (۱۳-۳)$$

قرار می‌دهیم  $P_\circ = \langle Q_\circ \rangle_R$ . چون  $N_R$  اول است و  $Q_\circ \neq 0$ ، لذا

$$P = \text{ann}(P_\circ)_R \quad (۱۴-۳)$$

برای اثبات  $\subseteq$  در (۱۲-۳)، فرض کنید  $Qf(x, x^{-1}) = 0$  که در آن

$f(x, x^{-1}) = a_s x^s + a_{s+1} x^{s+1} + \dots + a_l x^l \in T$  به طوری که  $s \in \mathbb{Z}$ . با توجه به (۱۰-۳) کافیت

ثابت کنیم برای هر  $i$ ،  $a_i \in P$ . از  $a_s$  شروع می‌کنیم. عناصر  $P_\circ$  به فرم  $\sum n_j r_j$  هستند که در آن

برای هر  $j$ ،  $r_j \in R$  و  $n_j \in Q_\circ$ . بنابراین با توجه به (۱۴-۳) کافیت نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و

هر  $n \in Q_\circ$ ،  $nr a_s = 0$ . چون  $n \in Q_\circ$ ، پس وجود دارد  $nx^k + n_{k+1}x^{k+1} + \dots + n_l x^l \in Q$  که در آن

$k \in \mathbb{Z}$ . چون  $Q$  یک  $R$ -مدول است لذا برای هر  $r \in R$

$$n\sigma^k(r)x^k + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)x^{k+1} + \dots + n_l \sigma^l(r)x^l \in Q$$

$$\circ = (n\sigma^k(r)x^k + \text{"جملات با درجه بیشتر"}) (a_s x^s + a_{s+1} x^{s+1} + \dots + a_l x^l) \quad (۱۵-۳)$$

$$= n\sigma^k(ra_s)x^{k+s} + \text{"جملات با درجه بیشتر"}$$

بنابراین  $n\sigma^k(ra_s) = \circ$  از  $\sigma$ -سازگاری  $N_R$  می‌توان نتیجه گرفت  $nr a_s = \circ$  حال به طور استقرایی

فرض کنید  $a_s, a_{s+1}, \dots, a_{i-1} \in P$  از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا برای هر  $k \in \mathbb{Z}$

و هر  $j$ ، که  $j < i$

$$N\sigma^k(a_j) = \circ \quad (۱۶-۳)$$

با توجه به (۱۴-۳) کافیت نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q_\circ$ ،  $nr a_i = \circ$  با توجه به (۱۵-۳)

و (۱۶-۳) داریم:

$$\begin{aligned} \circ &= (n\sigma^k(r)x^k + \dots + n_t \sigma^t(r)x^t) (a_s x^s + \dots + a_{i-1} x^{i-1} + a_i x^i + \dots + a_l x^l) \\ &= (n\sigma^k(r)\sigma^k(a_s)x^{k+s} + \dots + n_t \sigma^t(r)\sigma^t(a_s)x^{t+s}) + \dots + (n\sigma^k(r)\sigma^k(a_{i-1})x^{k+i-1} + \dots \\ &\quad + n_t \sigma^t(r)\sigma^t(a_{i-1})x^{t+i-1}) + ((n\sigma^k(r)x^k + \dots + n_t \sigma^t(r)x^t)(a_i x^i + \dots + a_l x^l)) \\ &= n\sigma^k(ra_i)x^{k+i} + \text{"جملات با درجه بیشتر"} \end{aligned}$$

پس  $n\sigma^k(ra_i) = \circ$  چون  $N_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $nr a_i = \circ$  در نتیجه  $a_i \in P$ .

بنابراین  $f(x, x^{-1}) = a_s x^s + a_{s+1} x^{s+1} + \dots + a_l x^l \in P[x, x^{-1}] = \text{ann}(N[x, x^{-1}]_T)$  و لذا

$$\text{ann}(Q_T) \subseteq \text{ann}(N[x, x^{-1}]_T)$$

فرض کنید  $I \in \text{Ass}(M[x, x^{-1}]_T)$  بنا به تعریف، زیر مدول اول  $P_T \subseteq M[x, x^{-1}]_T$  وجود دارد به

طوری که  $I = \text{ann}(P_T)$  عنصر ناصفر  $m(x, x^{-1})$  را از  $P$  انتخاب می‌کنیم. با توجه به لم ۳-۷

می‌توان فرض نمود که  $m(x, x^{-1})$  یک چند جمله ای خوب است. قرار دهید  $Q_R = m(x, x^{-1})R$ .

چون  $P_T$  اول است و  $Q.T_T \subseteq P_T$ ، لذا

$$\text{ann}(Q.T_T) = I \quad (۱۷-۳)$$

با توجه به لم ۳-۲، از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $M((x))_R$  نیز  $\sigma$ -سازگار

است. چون  $Q_R \subseteq P_R \subseteq M[x, x^{-1}]_R \subseteq M((x))_R$  پس  $Q_R$  و  $P_R$  نیز  $\sigma$ -سازگارند. بنابراین با

توجه به لم ۳-۴، از آنجایی که  $P_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار و  $P_S$  اول است لذا  $P_R$  اول است و چون  $Q_R \subseteq P_R$ ، پس  $Q_R \neq \circ$ ، پس  $Q_R$  نیز اول است. با توجه به لم ۳-۳ و همچنین (۳-۱۷)،  $ann(Q_R) = I \cap R$ . با قرار دادن این دو مطلب در کنار هم داریم:

$$ann(Q_R) = I \cap R \text{ و } Q_R \text{ اول است} \quad (۳-۱۸)$$

ادعا می‌کنیم  $I = (I \cap R)[x, x^{-1}]$  (اثبات مشابه اثبات ادعای  $I = (I \cap R)[x]$ ، در برهان قضیه ۲-۱۴ است).

با توجه به (۳-۱۸)،  $I \cap R \in Ass(Q_R)$ . فرض کنید  $\circ \neq m(x, x^{-1}) = m_s x^s + m_{s+1} x^{s+1} + \dots + m_k x^k$  که در آن  $s \in \mathbb{Z}$ . همریختی  $\varphi: Q_R \rightarrow M_R$  را با ضابطه  $\varphi(m(x, x^{-1})r) = m_d r$  در نظر بگیرید که در آن  $m_d$  ضریب ناصفری از  $m(x, x^{-1})$  است.  $\varphi$  یک نشاننده است: فرض کنید  $m_d r = \circ$ . از آنجایی که  $m(x, x^{-1})$  یک چند جمله ای خوب است پس برای هر  $s \leq j \leq k$ ،  $m_j r = \circ$  و لذا  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$  ایجاب می‌کند برای هر  $s \leq j \leq k$ ،  $m_j \sigma^j(r) = \circ$ . در نتیجه  $m(x, x^{-1})r = \circ$ .

بنابراین  $Ass(Q_R) \subseteq Ass(M_R)$ ، و لذا  $I \cap R \in Ass(M_R)$ . چون  $I = (I \cap R)[x, x^{-1}]$ ، پس

$$\square. Ass(M[x, x^{-1}]_T) \subseteq \{P[x, x^{-1}] : P \in Ass(M_R)\}$$

## فصل چهارم

ایده آل های اول وابسته مدول سری های توانی

## فصل چهارم

### ایده آل های اول وابسته مدول سری های توانی

در فصل اول با مدول سری های توانی صوری آشنا شدیم و نشان دادیم اگر  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد آنگاه می توان  $M[[x]]$  را به عنوان یک  $S'$ -مدول راست در نظر گرفت. همچنین با مدول سری های توانی لوران آشنا شدیم و نشان دادیم اگر  $M$  یک  $R$ -مدول راست باشد آنگاه می توان  $M((x))$  را به عنوان یک  $T'$ -مدول راست در نظر گرفت.

در این فصل نشان می دهیم که قضیه ۲-۱۴ را در صورتی می توان به مدول های  $M[[x]]_{S'}$  و  $M((x))_{T'}$  تعمیم داد که علاوه بر فرض  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$ ،  $R$  نیز یک حلقه کامل چپ باشد.

گزاره ۴-۱: فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونریختی باشد. اگر  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه

$$Ass(M[[x]]_{S'}) \supseteq \{P[[x]] : P \in Ass(M_R)\}$$

اثبات: فرض کنید  $P \in Ass(M_R)$ . در نتیجه زیر مدول اول  $N_R \subseteq M_R$  وجود دارد به طوری که

$P = ann(N_R)$  کافیت ثابت کنیم:

$$P[[x]] = ann(N[[x]]_{S'}) \quad (۱-۴)$$

و

$$N[[x]]_{S'} \text{ اول است.} \quad (۲-۴)$$

برای اثبات تساوی در (۱-۴)، فرض کنید  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots \in S'$  و  $n(x) = n_0 + n_1x + \dots \in N[[x]]$  یک جمله نوعی از  $n(x)f(x)$  به صورت  $(n_i x^i)(a_j x^j) = n_i a_j x^{i+j}$  است. اگر  $f(x) \in P[[x]]$ ، آنگاه چون  $P = ann(N_R)$ ، لذا  $n_i a_j = 0$ . چون  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $n_i \sigma^i(a_j) = 0$  بنابراین تمام ضرایب  $n(x)f(x)$  صفرند و  $n(x)f(x) = 0$  لذا  $f(x) \notin P[[x]]$ ، آنگاه  $i \geq 0$  وجود دارد به طوری که  $a_i \notin P$  پس  $n \in N$  وجود دارد به طوری که  $na_i \neq 0$  و لذا  $nf(x) \neq 0$  بنابراین  $f(x) \notin ann(N[[x]]_{S'})$  و لذا  $ann(N[[x]]_{S'}) \subseteq P[[x]]$  و تساوی در (۱-۴) ثابت می‌شود.

اکنون ثابت می‌کنیم  $N[[x]]_{S'}$  اول است. برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم اگر  $Q_{S'}$

زیر مدول ناصفری از  $N[[x]]_{S'}$  باشد آنگاه

$$ann(Q_{S'}) = ann(N[[x]]_{S'}) \quad (۳-۴)$$

فرض کنید

$$Q_0 = \{n \in N : \exists nx^k + n_{k+1}x^{k+1} + \dots \in Q; k \geq 0\} \subseteq N \quad (۴-۴)$$

قرار می‌دهیم  $P_0 = \langle Q_0 \rangle_R$ . چون  $N_R$  اول است و  $0 \neq Q_0 \subseteq P_0 \subseteq N$ ، لذا

$$P = ann(P_0)_R \quad (۵-۴)$$

برای اثبات  $\subseteq$  در (۳-۴)، فرض کنید  $Qf(x) = 0$ ، که در آن  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots \in S'$ . با توجه به

(۱-۴) کافیت ثابت کنیم برای هر  $i$ ،  $a_i \in P$ . از  $a_0$  شروع می‌کنیم. عناصر  $P_0$  به فرم  $\sum n_j r_j$

هستند که در آن برای هر  $j$ ،  $r_j \in R$  و  $n_j \in Q_0$ . بنابراین با توجه به (۵-۴) کافیت نشان دهیم

برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q_0$ ،  $nra_0 = 0$ . فرض کنید  $n \in Q_0$ . بنابراین  $nx^k + n_{k+1}x^{k+1} + \dots \in Q$

وجود دارد که در آن  $k \geq 0$ . چون  $Q$  یک  $R$ -مدول است لذا برای هر  $r \in R$ ,

$$n\sigma^k(r)x^k + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)x^{k+1} + \dots \in Q$$

$$(4-6) \quad 0 = (n\sigma^k(r)x^k + \text{"جملات با درجه بیشتر"})(a_0 + a_1x + \dots)$$

$$= n\sigma^k(ra_0)x^k + \text{"جملات با درجه بیشتر"}$$

بنابراین  $n\sigma^k(ra_0) = 0$ . بنا به لم ۲-۸،  $N_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $nra_0 = 0$ . حال به طور

استقرایی فرض کنید  $a_0, a_1, \dots, a_{i-1} \in P$ . از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا برای

هر  $k \geq 0$  و هر  $j < i$ ,

$$(4-7) \quad N\sigma^k(a_j) = 0$$

با توجه به (۴-۵)، کفایت نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q_0$ ،  $nra_i = 0$ . با توجه به (۴-۶) و

(۴-۷) داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= (n\sigma^k(r)x^k + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)x^{k+1} + \dots)(a_0 + \dots + a_{i-1}x^{i-1} + a_ix^i + a_{i+1}x^{i+1} + \dots) \\ &= (n\sigma^k(r)\sigma^k(a_0)x^k + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)\sigma^{k+1}(a_0)x^{k+1} + \dots) + \dots + (n\sigma^k(r)\sigma^k(a_{i-1})x^{k+i-1} \\ &\quad + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)\sigma^{k+1}(a_{i-1})x^{k+i} + \dots) + ((n\sigma^k(r)x^k + \dots)(a_ix^i + a_{i+1}x^{i+1} + \dots)) \\ &= n\sigma^k(ra_i)x^{k+i} + \text{"جملات با درجه بیشتر"} \end{aligned}$$

پس  $n\sigma^k(ra_i) = 0$ . از آنجایی که  $N_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $nra_i = 0$ . بنابراین

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots \in P[[x]] = \text{ann}(N[[x]]_{S'})$  و لذا  $\text{ann}(Q_{S'}) \subseteq \text{ann}(N[[x]]_{S'})$ . بنابراین

$$\square. \text{Ass}(M[[x]]_{S'}) \supseteq \{P[[x]] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$$

مثال زیر نشان می‌دهد که در گزاره ۴-۱، اگر  $R$  یک دامنه جابجایی نوتری باشد و  $\sigma = \text{Id}_R$ ,

لزوماً تساوی برقرار نیست.

مثال ۴-۲: فرض کنید  $R = \mathbb{Z}$ ،  $S' = R[[x]]$  و  $p$  یک عدد صحیح اول باشد. همچنین فرض کنید

$$M = Z_{p^\infty} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \left\langle \frac{1}{p^i} + \mathbb{Z} \right\rangle, \quad Z_{p^\infty} = \left\langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \right\rangle \text{ ها } (n \geq 0)$$



هستند. همچنین می‌دانیم  $\circ = G_\circ \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots$  بنابراین  $G_1$  یک زیر مدول اساسی از  $M$  است.

$$\text{نشان می‌دهیم } \text{Ass}(M) = \text{Ass}(G_1).$$

واضح است که  $\text{Ass}(G_1) \subseteq \text{Ass}(M)$  حال فرض کنید  $q \in \text{Ass}(M)$  بنابراین  $\circ \neq m \in M$  وجود دارد به طوری که  $q = \text{ann}(m)$  از آنجایی که  $G_1$  یک زیر مدول اساسی از  $M$  است لذا  $\circ \neq r \in Z$  وجود دارد به طوری که  $\circ \neq mr \in G_1$  ادعا می‌کنیم  $\text{ann}(mr) = \text{ann}(m)$  واضح است که  $\text{ann}(m) \subseteq \text{ann}(mr)$  فرض کنید  $mrr' = \circ$  که در آن  $r' \in Z$  بنابراین  $rr' \in \text{ann}(m) = q$  از آنجایی که  $q$  یک ایده آل اول از  $Z$  است و  $r \notin \text{ann}(m) = q$  لذا  $r' \in q = \text{ann}(m)$  چون  $\text{ann}(mr) = q$  ایده آل اولی از  $Z$  است و  $mr \in G_1$  لذا  $q \in \text{Ass}(G_1)$ .

می‌دانیم  $G_1 \cong Z/pZ$  پس  $\text{Ass}(M) = \text{Ass}(G_1) = \text{Ass}(Z/pZ) = \{\langle p \rangle\}$  حال نشان می‌دهیم عنصری در  $\text{Ass}(M[[x]]_{S'})$  وجود دارد که به فرم  $\langle p \rangle[[x]]$  نیست.

عنصر  $m = \left(\frac{1}{p} + Z\right) + \left(\frac{1}{p^2} + Z\right)x + \left(\frac{1}{p^3} + Z\right)x^2 + \dots \in M[[x]]$  را در نظر بگیرید. ثابت

می‌کنیم پوچساز  $m$  در  $S'$  با ایده آل تولید شده توسط  $x - p$  در حلقه  $S'$  برابر است.

چون

$$\begin{aligned} m(x-p) &= \left( \left( \frac{1}{p} + Z \right) + \left( \frac{1}{p^2} + Z \right)x + \dots \right) (x-p) \\ &= \left( \left( \frac{1}{p} + Z \right)x + \left( \frac{1}{p^2} + Z \right)x^2 + \dots \right) - \left( \left( \frac{p}{p} + Z \right) + \left( \frac{p}{p^2} + Z \right)x + \dots \right) = \circ \end{aligned}$$

لذا  $\langle x-p \rangle \subseteq \text{ann}(m)$  حال فرض کنید  $f(x) = a_\circ + a_1x + a_2x^2 + \dots \in S'$  و  $mf(x) = \circ$  در

نتیجه

$$mf(x) = \left( \frac{a_\circ}{p} + Z \right) + \left( \left( \frac{a_1}{p} + \frac{a_\circ}{p^2} \right) + Z \right)x + \left( \left( \frac{a_2}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_\circ}{p^3} \right) + Z \right)x^2 + \dots = \circ$$

بنابراین برای هر  $i \geq \circ$ ،  $n_i = \frac{a_i}{p} + \frac{a_{i-1}}{p^2} + \dots + \frac{a_\circ}{p^{i+1}} \in Z$  پس برای هر  $i \geq \circ$ ،  $pn_i = a_i + n_{i-1}$  و لذا

برای هر  $a_i = pn_i - n_{i-1}$ ,  $i \geq 0$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} \text{ann}(m) &\subseteq \{(pn_0) + (pn_1 - n_0)x + (pn_2 - n_1)x^2 + \dots : n_i \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(p-x)(n_0 + n_1x + n_2x^2 + \dots) : n_i \in \mathbb{Z}\} = \langle x-p \rangle \end{aligned}$$

به وضوح ایده آل  $\langle x-p \rangle$  را نمی‌توان به فرم  $\langle p \rangle[[x]]$  نوشت. نشان می‌دهیم ایده آل  $\langle x-p \rangle$  یک ایده آل اول از حلقه  $S'$  است. فرض کنید  $x-p = f(x)g(x)$ ، به طوری که  $f(x), g(x) \in S'$ . لذا جمله ثابت  $f$  یا  $g$ ،  $\pm 1$  است. بنابراین بنا بر [۱۰، قضیه ۳-۵-۹]،  $f$  یا  $g$  در  $S' = \mathbb{Z}[[x]]$  یکه است. بنابراین  $x-p$  عنصری تحویل ناپذیر در  $S'$  است. از آنجایی که  $\mathbb{Z}$  یک دامنه ایده آل اصلی<sup>۱</sup> است لذا  $\mathbb{Z}[[x]]$  نیز یک دامنه تجزیه یکتا<sup>۲</sup> است. در نتیجه  $x-p$  یک عنصر اول است. بنابراین  $\langle x-p \rangle$  یک ایده آل اول از حلقه  $S'$  است. در نتیجه  $\langle x-p \rangle \in \text{Ass}(M[[x]]_{S'})$ .  $\square$

**تعریف ۴-۳:** عنصر  $m(x) \in M[[x]]$  را  $k$ -خوب<sup>۳</sup> گوئیم هرگاه تمام ضرایب ناصفر جملات درجه  $k$  و کمتر از  $k$ ، دارای پوچسازهای یکسان در  $R$  باشند.

با فرض  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$ ، برای عدد ثابت  $k \in \mathbb{N}$ ، با استفاده از ایده ای که در اثبات لم ۲-۱۶ استفاده نمودیم، می‌توان  $r \in R$  را چنان یافت به طوری که  $m(x)r$  یک عنصر  $k$ -خوب باشد. **قضیه ۴-۴:** فرض کنید  $R$  یک حلقه کامل چپ و  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونریختی از حلقه  $R$  باشد. اگر  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه

$$\text{Ass}(M[[x]]_{S'}) = \{P[[x]] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$$

در حقیقت، برای هر  $\underline{q} \in \text{Ass}(M[[x]]_{S'})$ ،  $\underline{q} = P[[x]]$  که  $P = \underline{q} \cap R \in \text{Ass}(M_R)$ .

**برهان:** با توجه به گزاره ۴-۱، کفایت ثابت کنیم  $\text{Ass}(M[[x]]_{S'}) \subseteq \{P[[x]] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$ .

فرض کنید  $I \in \text{Ass}(M[[x]]_{S'})$ . بنا به تعریف، زیر مدول اول  $P_{S'} \subseteq M[[x]]_{S'}$  وجود دارد به طوری که  $I = \text{ann}(P_{S'})$ . عنصر ناصفر  $m(x)$  را از  $P$  انتخاب می‌کنیم. با توجه به لم ۲-۱۶ می‌توان

<sup>۱</sup>principal ideal domain

<sup>۲</sup>unique factorization domain

<sup>۳</sup>k- good

$r_i \in R$  را طوری انتخاب کرد که  $m(x)r_i$  یک عنصر ۱- خوب باشد. به طور استقرایی می توان  $r_i \in R$  را طوری انتخاب کرد که  $m(x)r_1r_2 \dots r_i$  یک عنصر  $i$ - خوب باشد. زنجیر کاهشی از  $R$  - زیر مدول های دوری زیر را در نظر بگیرید:

$$m(x)R \supseteq m(x)r_1R \supseteq m(x)r_1r_2R \supseteq \dots$$

چون  $R$  یک حلقه کامل چپ است لذا طبق قضیه ۱-۲۱،  $k \in \mathbb{N}$  وجود دارد به طوری که برای هر  $i, k \leq i$

$$m(x)r_1r_2 \dots r_iR = m(x)r_1r_2 \dots r_kR \quad (\lambda-4)$$

با فرض این که  $m'(x) = m(x)r_1r_2 \dots r_k$ ، ادعا می کنیم  $m'(x)$  یک عنصر خوب است (یا به طور معادل، برای هر  $j \in \mathbb{N}$ ،  $m'(x)$  یک عنصر  $j$ - خوب است). طبق فرض استقرا  $m'(x) = m(x)r_1r_2 \dots r_k$  یک عنصر  $k$ - خوب است. پس  $m'(x) \neq 0$ . فرض کنید  $k < j$ ، و ضرب  $x^j$  در  $m'(x)$ ، ناصفر باشد. با توجه به  $(\lambda-4)$ ،  $a \in R$  وجود دارد به طوری که  $m'(x) = m'(x)r_{k+1} \dots r_ja$  از آنجایی که  $m'(x)r_{k+1} \dots r_ja$  یک عنصر  $j$ - خوب است لذا  $m'(x)$  نیز یک عنصر  $j$ - خوب است. بنابراین  $m'(x)$  یک عنصر خوب است.

قرار می دهیم  $Q_R = m'(x)R$ . چون  $P_{S'}$  اول است و  $Q.S'_{S'} \subseteq P_{S'}$ ، لذا

$$\text{ann}(Q.S'_{S'}) = I \quad (9-4)$$

با توجه به لم ۲-۹، از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ - سازگار است لذا  $M[[X]]_R$  نیز  $\sigma$ - سازگار است. چون  $P_R \subseteq M[[X]]$ ، پس  $P_R$  نیز  $\sigma$ - سازگار است. بنابراین با توجه به لم ۲-۱۱، از آنجایی که  $P_R$  یک مدول  $\sigma$ - سازگار و  $P_{S'}$  اول است لذا  $P_R$  اول است و چون  $Q_R \subseteq P_R$ ،  $Q_R \neq 0$ ، پس  $Q_R$  نیز اول است. با توجه به لم ۲-۸ و همچنین  $(9-4)$ ،  $\text{ann}(Q_R) = I \cap R$ . بنابراین داریم:

$$\text{ann}(Q_R) = I \cap R \text{ و } Q_R \text{ اول است و} \quad (10-4)$$

ادعا می کنیم  $I = (I \cap R)[[X]]$ . چون  $I$  ایده آلی از  $S'$  است لذا  $(I \cap R)[[X]] \subseteq I$ . به عکس

فرض کنید  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots \in I$ ، به طوری که برای هر  $1 \leq i \leq l$ ،  $a_i \in R$ . نشان می دهیم برای

هر  $a_i \in I$ ،  $1 \leq i \leq l$  با توجه به (۹-۴)، برای هر  $r \in R$ ،  $m'(x)r f(x) = 0$ ، بنابراین با توجه به  $\sigma$ -سازگاری مدول  $M_R$ ،  $a_0$  در پوچساز ضریب ناصفر جمله با کمترین درجه از  $m'(x)r$  قرار دارد. از آنجایی که  $m'(x)r$  یک عنصر خوب و  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $m'(x)ra_0 = 0$ ، چون  $r \in R$  دلخواه بود پس  $a_0 \in \text{ann}(Q_R) = I \cap R$  حال با قرار دادن  $a_0$  به جای  $f(x)$  و تکرار روند فوق خواهیم داشت:  $a_1 \in \text{ann}(Q_R)$  با ادامه همین روند نتیجه می‌گیریم که برای هر  $i$ ،  $a_i \in \text{ann}(Q_R) = I \cap R$  بنابراین  $I \subseteq (I \cap R)[[x]]$  و ادعا ثابت می‌شود.

با توجه به (۱۰-۴)،  $I \cap R \in \text{Ass}(Q_R)$  همریختی  $\varphi: Q_R \rightarrow M_R$  را با ضابطه  $\varphi(m'(x)r) = m'_d r$  در نظر بگیرید که در آن  $m'_d$  ضریب ناصفری از  $m'(x)$  است.  $\varphi$  یک نشاننده است: فرض کنید  $m'_d r = 0$  از آنجایی که  $m'(x)$  یک عنصر خوب و  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $m'(x)r = 0$ .

در نتیجه  $\text{Ass}(Q_R) \subseteq \text{Ass}(M_R)$ ، و لذا  $I \cap R \in \text{Ass}(M_R)$  چون  $I = (I \cap R)[[x]]$ ، لذا  $\square. \text{Ass}(M[[x]]_{S'}) \subseteq \{P[[x]] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$

با ارائه مثال زیر نشان می‌دهیم که اگر در قضیه فوق، به جای کامل چپ بودن حلقه  $R$ ، شرط نیم کامل بودن  $R$  را قرار دهیم، لزوماً تساوی برقرار نیست.

**مثال ۴-۵:** فرض کنید  $p$  یک عدد اول باشد و  $R = \mathbb{Z}$ . همچنین فرض کنید  $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ ،  $P = \langle p \rangle$

و  $S' = R_p[[x]]$ .  $R_p$  یک حلقه نیم کامل است. همریختی طبیعی  $\varphi: M \rightarrow M_p$  را با ضابطه

$$\varphi\left(\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}\right) = \frac{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}}{1} \quad \text{در نظر بگیرید. } \varphi \text{ یک نشاننده است: اگر } \frac{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}}{1} = \frac{0}{1} \text{ آنگاه } u \in \mathbb{Z} - P$$

$$\text{وجود دارد به طوری که } \left(\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}\right)u = 0 \text{ پس } p^n | au \text{ و لذا } p^n | a \text{ بنابراین } \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} = 0.$$

می‌دانیم  $m \in M[[x]]$   $m = \left(\frac{1}{p} + \mathbb{Z}\right) + \left(\frac{1}{p^2} + \mathbb{Z}\right)x + \left(\frac{1}{p^3} + \mathbb{Z}\right)x^2 + \dots$  لذا با توجه به نشاننده

فوق،  $m \in M_p[[x]]$  نشان می‌دهیم  $\text{ann}(m)$  با ایده آل تولید شده توسط  $x - p$  در حلقه

$R_p[[x]]$  برابر است. چون

$$\begin{aligned} m(x-p) &= \left( \left( \frac{1}{p} + Z \right) + \left( \frac{1}{p^r} + Z \right) x + \dots \right) (x-p) \\ &= \left( \left( \frac{1}{p} + Z \right) x + \left( \frac{1}{p^r} + Z \right) x^r + \dots \right) - \left( \left( \frac{p}{p} + Z \right) + \left( \frac{p}{p^r} + Z \right) x + \dots \right) = 0 \end{aligned}$$

لذا  $\langle x-p \rangle \subseteq \text{ann}(m)$ . به عکس فرض کنید  $f(x) = \frac{a_0}{s_0} + \frac{a_1}{s_1} x + \dots \in R_p[[x]]$  و  $mf(x) = 0$ .

بنابراین

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \left( \frac{1}{p} + Z \right) + \left( \frac{1}{p^r} + Z \right) x + \dots \right) \left( \frac{a_0}{s_0} + \frac{a_1}{s_1} x + \dots \right) \\ &= \left( \frac{a_0}{ps_0} + Z \right) + \left( \frac{a_1}{ps_1} + \frac{a_0}{p^r s_0} + Z \right) x + \dots \end{aligned}$$

پس برای هر  $i \geq 0$ ،  $n_i = \frac{a_i}{ps_i} + \frac{a_{i-1}}{p^r s_{i-1}} + \dots + \frac{a_0}{p^{i+1} s_0} \in \mathbb{Z}$ ، بنابراین برای هر  $i \geq 0$ ،

$$\text{و لذا } \frac{a_i}{s_i} = pn_i - n_{i-1}$$

$$\begin{aligned} \text{ann}(m) &\subseteq \{ (pn_0) + (pn_1 - n_0)x + \dots : n_i \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ (x-p)(-n_0 - n_1 x - \dots) : n_i \in \mathbb{Z} \} \\ &= \langle x-p \rangle \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم  $\langle x-p \rangle$  یک ایده آل اول از حلقه  $R_p[[x]]$  است. فرض کنید

$$x-p = f(x)g(x), \quad \text{که } f(x) = \frac{a_0}{s_0} + \frac{a_1}{s_1} x + \dots \in R_p[[x]] \quad \text{و}$$

$$g(x) = \frac{b_0}{t_0} + \frac{b_1}{t_1} x + \dots \in R_p[[x]]. \quad \text{بنابراین } \frac{a_0 b_0}{s_0 t_0} = \frac{p}{1}. \quad \text{پس } u \in \mathbb{Z} - P \text{ وجود دارد به طوری که}$$

$$(a_0 b_0 - ps_0 t_0)u = 0$$

حالت اول: فرض کنیم  $p \mid a_0$ . در این صورت  $p \nmid b_0$ ، و لذا  $\frac{b_0}{t_0}$  در حلقه  $R_p$  وارون پذیر است.

حالت دوم: فرض کنیم  $p \mid b_0$ . در این صورت  $a_0 \nmid p$ ، و لذا  $\frac{a_0}{s_0}$  در حلقه  $R_p$  وارون پذیر است.

بنابراین بنا بر [۱۰، قضیه ۳-۵-۹]،  $f$  یا  $g$  در  $R_p[[x]]$  یکه است. بنابراین  $x-p$  عنصری تحویلناپذیر در  $R_p[[x]]$  است. از آنجایی که  $R_p$  یک دامنه ایده آل اصلی است لذا  $R_p[[x]]$  نیز یک دامنه تجزیه یکتا است. در نتیجه  $x-p$  یک عنصر اول است. بنابراین  $\langle x-p \rangle$  یک ایده آل اول از حلقه  $R_p[[x]]$  است. در نتیجه  $\langle x-p \rangle \in \text{Ass}(M_p[[x]]_{R_p[[x]])}$  به وضوح  $\langle x-p \rangle$  را نمی توان به فرم  $q[[x]]$  که  $q \in \text{Ass}(M)$ ، نوشت.  $\square$

حال نشان می دهیم اگر  $\sigma: R \rightarrow R$  یک خودریختی از حلقه  $R$  باشد آنگاه گزاره ۴-۱ و قضیه ۴-۴ در مورد مدول سری های توانی لوران  $M((x))$  روی حلقه سری های توانی اریب لوران  $T' = R((x; \sigma))$  نیز برقرار است.

**گزاره ۴-۶:** فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک خودریختی باشد. اگر  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه

$$\text{Ass}(M((x))_{T'}) \supseteq \{P((x)) : P \in \text{Ass}(M_R)\}$$

**اثبات:** فرض کنید  $P \in \text{Ass}(M_R)$ . بنابراین زیر مدول اول  $N_R \subseteq M_R$  وجود دارد به طوری که  $P = \text{ann}(N_R)$  کفایت ثابت کنیم:

$$P((x)) = \text{ann}(N((x))_{T'}) \quad (۱۱-۴)$$

و

$$N((x))_{T'} \text{ اول است.} \quad (۱۲-۴)$$

برای اثبات تساوی در (۱۱-۴)، فرض کنید  $f(x, x^{-1}) = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \dots + a_0 + a_1 x + \dots \in T'$  و  $n(x, x^{-1}) = n_s x^s + n_{s+1} x^{s+1} + \dots + n_0 + n_1 x + \dots \in N((x))$  به طوری که  $r, s \in \mathbb{Z}$ . یک جمله نوعی از  $n(x, x^{-1}) f(x, x^{-1})$  به صورت  $(n_i x^i)(a_j x^j) = n_i \sigma^i(a_j) x^{i+j}$  است. اگر  $f(x, x^{-1}) \in P((x))$ ، آنگاه چون  $P = \text{ann}(N_R)$ ، لذا  $n_i a_j = 0$  چون  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $n_i \sigma^i(a_j) = 0$ .

بنابراین تمام ضرایب  $n(x, x^{-1})f(x, x^{-1})$  صفرند و لذا  $P((x)) \subseteq \text{ann}(N((x))_{T'})$  به عکس اگر  
 $f(x, x^{-1}) \notin P((x))$ ، آنگاه  $i (r \leq i)$  وجود دارد به طوری که  $a_i \notin P$ . پس  $n \in N$  وجود دارد به  
 طوری که  $na_i \neq 0$  و لذا  $nf(x, x^{-1}) \neq 0$ . بنابراین  $nf(x, x^{-1}) \notin \text{ann}(N((x))_{T'})$  و لذا  
 $\text{ann}(N((x))_{T'}) \subseteq P((x))$  و تساوی در (۱۱-۴) ثابت می‌شود.

اکنون ثابت می‌کنیم  $N((x))_{T'}$  اول است. برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم اگر  $Q_{T'}$

زیر مدول ناصفری از  $N((x))_{T'}$  باشد آنگاه

$$\text{ann}(Q_{T'}) = \text{ann}(N((x))_{T'}) \quad (۱۳-۴)$$

فرض کنید

$$Q_\circ = \{n \in N : \exists nx^k + n_{k+1}x^{k+1} + \dots \in Q; k \in \mathbb{Z}\} \subseteq N \quad (۱۴-۴)$$

قرار می‌دهیم  $P_\circ = \langle Q_\circ \rangle_R$ . چون  $N_R$  اول است و  $Q_\circ \subseteq P_\circ \subseteq N$ ،  $Q_\circ \neq 0$ ، لذا

$$P = \text{ann}(P_\circ)_R \quad (۱۵-۴)$$

برای اثبات  $\subseteq$  در (۱۳-۴)، فرض کنید  $Qf(x, x^{-1}) = 0$  که در آن

$f(x, x^{-1}) = a_s x^s + a_{s+1} x^{s+1} + \dots \in T'$  به طوری که  $s \in \mathbb{Z}$ . با توجه به (۱۱-۴) کافیت ثابت کنیم

برای هر  $i$ ،  $a_i \in P$ . از شروع می‌کنیم. عناصر  $P_\circ$  به فرم  $\sum n_j r_j$  هستند که در آن برای هر  $j$ ،

$r_j \in R$  و  $n_j \in Q_\circ$ . بنابراین با توجه به (۱۵-۴) کافیت نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q_\circ$ ،

$nra_s = 0$ . چون  $n \in Q_\circ$ ، پس  $nx^k + n_{k+1}x^{k+1} + \dots \in Q$  وجود دارد که در آن  $k \in \mathbb{Z}$  از آنجایی که

$Q$  یک  $R$ -مدول است لذا برای هر  $r \in R$ ،  $n\sigma^k(r)x^k + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)x^{k+1} + \dots \in Q$ . پس

$$0 = (n\sigma^k(r)x^k + \text{"جملات با درجه بیشتر"}) (a_s x^s + a_{s+1} x^{s+1} + \dots) \quad (۱۶-۴)$$

$$= n\sigma^k(ra_s)x^{k+s} + \text{"جملات با درجه بیشتر"}$$

بنابراین  $n\sigma^k(ra_s) = 0$ . از سازگاری  $N_R$  می‌توان نتیجه گرفت  $nra_s = 0$ . حال به طور استقرایی

فرض کنید  $a_s, a_{s+1}, \dots, a_{i-1} \in P$ . از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا برای هر  $k \in \mathbb{Z}$

و هر  $j$ ، که  $j < i$ ،

$$N\sigma^k(a_j) = 0 \quad (17-4)$$

با توجه به (۱۵-۴) کافیت نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q_0$ ،  $nra_i = 0$ ، با توجه به (۱۶-۴) و (۱۷-۴) داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= (n\sigma^k(r)x^k + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)x^{k+1} + \dots)(a_s x^s + \dots + a_{i-1}x^{i-1} + a_i x^i + \dots) \\ &= (n\sigma^k(r)\sigma^k(a_s)x^{k+s} + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)\sigma^{k+1}(a_s)x^{k+s+1} + \dots) + \dots + (n\sigma^k(r)\sigma^k(a_{i-1})x^{k+i-1} \\ &\quad + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)\sigma^{k+1}(a_{i-1})x^{k+i} + \dots) + ((n\sigma^k(r)x^k + n_{k+1}\sigma^{k+1}(r)x^{k+1} + \dots)(a_i x^i + \dots)) \\ &= n\sigma^k(r a_i)x^{k+i} + \text{"جملات با درجه بیشتر"} \end{aligned}$$

پس  $n\sigma^k(r a_i) = 0$  از آنجایی که  $N_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $nra_i = 0$  در نتیجه  $a_i \in P$ .  
بنابراین  $f(x, x^{-1}) = a_s x^s + a_{s+1}x^{s+1} + \dots \in P((x)) = \text{ann}(N((x))_{T'})$  و لذا

$$\square. \text{Ass}(M((x))_{T'}) \supseteq \{P((x)) : P \in \text{Ass}(M_R)\} \text{ در نتیجه } \text{ann}(Q_{T'}) \subseteq \text{ann}(N((x))_{T'})$$

**تعریف ۷-۴:** عنصر  $m(x, x^{-1}) \in M((x))$  را  $k$ -خوب ( $k \in \mathbb{Z}$ ) گوئیم هرگاه تمام ضرایب ناصفر جملات درجه  $k$  و کمتر از  $k$  دارای پوچسازهای یکسان در  $R$  باشند.

با فرض  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$ ، برای عدد ثابت  $k \in \mathbb{Z}$ ، با استفاده از ایده ای که در اثبات لم ۱۶-۲ استفاده نمودیم، می توان  $r \in R$  را چنان یافت به طوری که  $m(x)r$  یک عنصر  $k$ -خوب باشد.

**قضیه ۸-۴:** فرض کنید  $R$  یک حلقه کامل چپ و  $\sigma: R \rightarrow R$  یک خودریختی از حلقه  $R$  باشد. اگر  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار باشد آنگاه

$$\text{Ass}(M((x))_{T'}) = \{P((x)) : P \in \text{Ass}(M_R)\}$$

در حقیقت، برای هر  $\underline{q} \in \text{Ass}(M((x))_{T'})$ ،  $\underline{q} = P((x))$  که  $\underline{q} \cap R \in \text{Ass}(M_R)$ .

**برهان:** با توجه به گزاره ۶-۴، کافیت ثابت کنیم  $\text{Ass}(M((x))_{T'}) \subseteq \{P((x)) : P \in \text{Ass}(M_R)\}$ .

فرض کنید  $I \in \text{Ass}(M((x))_{T'})$ . بنا به تعریف، زیر مدول اول  $P_{T'} \subseteq M((x))_{T'}$  وجود دارد به

طوری که  $I = \text{ann}(P_{T'})$ . عنصر ناصفر  $m(x, x^{-1})$  را از  $P$  انتخاب می کنیم. فرض کنید

$m(x, x^{-1}) = m_s x^s + m_{s+1}x^{s+1} + \dots$  که  $s \in \mathbb{Z}$  و  $m_s \neq 0$ . با توجه به لم ۱۶-۲ می توان  $r_{s+1} \in R$  را



طوری انتخاب کرد که  $m(x, x^{-1})_{r_{s+1}}$  یک عنصر  $-(s+1)$ -خوب باشد. به طور استقرایی می توان  $r_i \in R$  را طوری انتخاب کرد که  $m(x, x^{-1})_{r_{s+1}r_{s+2}\dots r_i}$  یک عنصر  $-i$ -خوب باشد. زنجیر کاهشی از  $R$ - زیر مدول های دوری زیر را در نظر بگیرید:

$$m(x, x^{-1})R \supseteq m(x, x^{-1})_{r_{s+1}}R \supseteq m(x, x^{-1})_{r_{s+1}r_{s+2}}R \supseteq \dots$$

چون  $R$  یک حلقه کامل چپ است لذا طبق قضیه ۱-۲۱،  $k \in \mathbb{Z}$  وجود دارد به طوری که برای هر  $k \leq i$

$$m(x, x^{-1})_{r_{s+1}r_{s+2}\dots r_i}R = m(x, x^{-1})_{r_{s+1}r_{s+2}\dots r_k}R \quad (18-4)$$

با فرض این که  $m'(x, x^{-1}) = m(x, x^{-1})_{r_{s+1}r_{s+2}\dots r_k}$  ادعا می کنیم  $m'(x, x^{-1})$  یک عنصر خوب است (یا به طور معادل، برای هر  $j \in \mathbb{Z}$ ،  $m'(x, x^{-1})$  یک عنصر  $-j$ -خوب است). طبق فرض استقرا  $m'(x, x^{-1}) = m(x, x^{-1})_{r_{s+1}r_{s+2}\dots r_k}$  یک عنصر  $-k$ -خوب است. فرض کنید  $k < j$ ، و ضریب  $x^j$  در چند جمله ای  $m'(x, x^{-1})$  ناصفر باشد. با توجه به (۱۸-۴)،  $a \in R$  وجود دارد به طوری که  $m'(x, x^{-1}) = m'(x, x^{-1})_{r_{k+1}\dots r_j}a$ . از آنجایی که  $m'(x, x^{-1})_{r_{k+1}\dots r_j}a$  یک عنصر  $-j$ -خوب است لذا  $m'(x, x^{-1})$  نیز یک عنصر  $-j$ -خوب است. بنابراین  $m'(x, x^{-1})$  یک عنصر خوب است.

قرار می دهیم  $Q_R = m'(x, x^{-1})R$ . چون  $P_{T'}$  اول است و  $Q.T'_{T'} \subseteq P_{T'}$ ، لذا

$$ann(Q.T'_{T'}) = I \quad (19-4)$$

با توجه به لم ۳-۲، از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $M((x))_R$  نیز  $\sigma$ -سازگار است. چون  $P_R \subseteq M((x))$ ، پس  $P_R$  نیز یک مدول  $\sigma$ -سازگار است. بنابراین با توجه به لم ۳-۴، چون  $P_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار و  $P_{T'}$  اول است لذا  $P_R$  اول است و چون  $Q_R \subseteq P_R$ ،  $Q_R \neq 0$ ، پس  $Q_R$  نیز اول است. با توجه به لم ۳-۳ و همچنین (۱۹-۴)،  $ann(Q_R) = I \cap R$ . با قرار دادن این دو مطلب در کنار هم داریم:

$$Q_R \text{ اول است و } ann(Q_R) = I \cap R \quad (20-4)$$

ادعا می کنیم  $I = (I \cap R)((x))$  (اثبات مشابه اثبات ادعای  $I = (I \cap R)[[x]]$ ، در برهان قضیه

۴-۴ است).

با توجه به (۴-۲۰)،  $I \cap R \in \text{Ass}(Q_R)$  همریختی  $\varphi: Q_R \rightarrow M_R$  را با ضابطه  $\varphi(m'(x, x^{-1})r) = m'_d r$  در نظر بگیرید که در آن  $m'_d$  ضریب ناصفری از  $m'(x, x^{-1})$  است.  $\varphi$  یک نشاننده است: فرض کنید  $m'_d r = 0$ . از آنجایی که  $m'(x, x^{-1})$  یک عنصر خوب و  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است پس  $m'(x, x^{-1})r = 0$ .

در نتیجه  $\text{Ass}(Q_R) \subseteq \text{Ass}(M_R)$ ، و لذا  $I \cap R \in \text{Ass}(M_R)$ . چون  $I = (I \cap R)((x))$ ، لذا

$$\square. \text{Ass}(M((x))_{T'}) \subseteq \{P((x)) : P \in \text{Ass}(M_R)\}$$

## فصل پنجم

ایده آل های اول وابسته روی توسیع آر

## فصل پنجم

### ایده آل های اول وابسته روی توسیع آر

در فصل اول با توسیع آر  $\bar{S} = R[x; \sigma, \delta]$  آشنا شدیم. در این فصل به دنبال پیدا کردن روابط بین ایده آل های اول وابسته مدول  $M[x]$  (به عنوان یک مدول راست روی  $\bar{S}$ ) و ایده آل های اول وابسته مدول  $M_R$  هستیم.

**تعریف ۵-۱:** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول راست،  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونیختی و  $\delta: R \rightarrow R$  یک تابع  $\sigma$ -مشتق باشد.  $M_R$  را  $\sigma$ -سازگار گوئیم هرگاه برای هر  $m \in M$  و هر  $r \in R$ ،  $mr = 0 \Leftrightarrow m\sigma(r) = 0$ . همچنین  $M_R$  را  $\delta$ -سازگار<sup>۱</sup> گوئیم هرگاه برای هر  $m \in M$  و هر  $r \in R$ ،  $mr = 0 \Rightarrow m\delta(r) = 0$ . گوئیم  $(\sigma, \delta)$ -سازگار<sup>۲</sup> است اگر  $M_R$  هم  $\sigma$ -سازگار و هم  $\delta$ -سازگار باشد.

---

<sup>۱</sup>  $\delta$  - compatible

<sup>۲</sup>  $(\sigma, \delta)$  - compatible

لم ۵-۲: الف) هر زیر مدول از یک مدول  $\delta$  - سازگار،  $\delta$  - سازگار است.

ب) اگر  $M_R$  یک مدول  $\delta$  - سازگار باشد آنگاه برای هر  $i \geq 1$ ،  $M_R$  یک مدول  $\delta^i$  - سازگار است.

اثبات: الف) به وضوح برقرار است.

ب) از آنجایی که  $\delta$  یک تابع مشتق است لذا  $\delta^i$  نیز یک تابع مشتق است، زیرا:  $\delta^i: R \rightarrow R$  یک

عملگر خطی است و همچنین برای هر  $a, b \in R$ ،  $\delta^i(ab) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \delta^{i-j}(a) \delta^j(b)$ ، برای هر  $m \in M$

و هر  $r \in R$ ،

$$mr = 0$$

$$\Rightarrow m\delta(r) = 0$$

$$\Rightarrow m\delta^2(r) = 0$$

$\vdots$

$$\Rightarrow m\delta^i(r) = 0$$

بنابراین برای هر  $M_R$  یک مدول  $\delta^i$  - سازگار است.  $\square$

لم ۵-۳: فرض کنید  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$  - سازگار باشد. همچنین فرض کنید

$$m(x)r = 0 \text{ اگر } r \in R \text{ و } m(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k \in M[x]$$

$$m_jr = 0, j \text{ آنگاه برای هر } j, m_jr = 0.$$

اثبات: فرض کنید  $m(x)r = 0$  داریم:

$$\begin{aligned} m(x)r &= (m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k)r \\ &= m_0r + m_1\left(\sum_{i=0}^1 f_i^1(r)x^i\right) + \dots + m_k\left(\sum_{i=0}^k f_i^k(r)x^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k m_j f_i^j(r)x^i \end{aligned} \quad (1-5)$$

بنابراین برای هر  $0 \leq i \leq k$ ،

$$\sum_{j=i}^k m_j f_i^j(r) = 0 \quad (2-5)$$

فرض کنید  $i = k$ . بنابراین با توجه به (۲-۵)،  $m_k \sigma^k(r) = 0$ . چون  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $m_k r = 0$ . حال به استقرا، فرض کنیم برای هر  $j$ ، که  $i < j$ ،  $m_j r = 0$ . لذا با توجه به  $(\sigma, \delta)$ -سازگار بودن  $M_R$ ، برای هر  $j$ ، که  $i < j$ ،  $m_j f_i^j(r) = 0$ . بنابراین با توجه به (۲-۵)،  $m_i \sigma^i(r) = 0$  و لذا  $m_i r = 0$ .  $\square$

لم ۴-۵: اگر  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار باشد آنگاه  $M[x]_R$  نیز  $(\sigma, \delta)$ -سازگار است.

اثبات: چون  $M[x]_R$  یک زیر مدول از  $M[[x]]_R$  است لذا با توجه به لم های ۲-۸ و ۲-۹،  $M[x]_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است. حال فرض کنید  $r \in R$ ،  $m(x) = m_0 + m_1 x + \dots + m_k x^k \in M[x]$ ، و  $m(x)r = 0$ . در نتیجه با استفاده از لم ۳-۵، برای هر  $j$ ،  $m_j r = 0$ .  $(\sigma, \delta)$ -سازگاری  $M_R$  ایجاب می کند که برای هر  $i$  و هر  $j$ ، که  $0 \leq i \leq k$  و  $i \leq j \leq k$ ،  $m_j f_i^j(\delta(r)) = 0$ . بنابراین با قرار دادن  $\delta(r)$  به جای  $r$  در (۱-۵)،  $m(x)\delta(r) = 0$ . در نتیجه  $M[x]_R$  یک مدول  $\delta$ -سازگار است.  $\square$

لم ۵-۵: اگر  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار باشد آنگاه برای هر  $m \in M$  و هر  $r \in R$ ،

$$ann(mr) = ann(m\sigma(r)) \subseteq ann(m\delta(r))$$

اثبات: فرض کنید  $a \in R$  باشد به طوری که  $mra = 0$ . با توجه به  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$  داریم:

$$mra = 0 \Leftrightarrow m\sigma(ra) = 0$$

$$\Leftrightarrow m\sigma(r)\sigma(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow m\sigma(r)a = 0$$

بنابراین  $ann(mr) = ann(m\sigma(r))$ . حال فرض کنید  $mra = 0$ ، که در آن  $a \in R$ . با توجه به

$\delta$ -سازگار بودن  $M_R$ ،

$$0 = m\delta(ra) = m(\sigma(r)\delta(a) + \delta(r)a) \quad (۳-۵)$$

با توجه به قسمت اول،  $m\sigma(r)a = 0$ . از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $\delta$ -سازگار است لذا

$$m\sigma(r)\delta(a) = 0. \text{ بنابراین با توجه به (۳-۵)، } m\delta(r)a = 0. \text{ و نتیجه حاصل است. } \square$$

لم ۶-۵: اگر  $Q_R$  یک  $R$ -زیر مدول از  $P_R$  و  $P_{\bar{S}}$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار باشد آنگاه

$$R \cap \text{ann}(Q.\bar{S}_{\bar{S}}) = \text{ann}(Q_R)$$

اثبات: به وضوح  $R \cap \text{ann}(Q.\bar{S}_{\bar{S}}) \subseteq \text{ann}(Q_R)$  فرض کنید  $r \in \text{ann}(Q_R)$  همچنین فرض کنید

$qg(x) \in Q.\bar{S}$ ، به طوری که  $q \in Q$  و  $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l \in \bar{S}$  در نتیجه

$$qg(x)r = q \left( \sum_{i=0}^l \sum_{j=i}^l a_j f_i^j(r) x^i \right)$$

$(\sigma, \delta)$  - سازگار است لذا برای هر  $i$  و هر  $j$ ، که  $0 \leq i \leq l$  و  $i \leq j \leq l$ ،  $qa_j f_i^j(r) = 0$ ، بنابراین

$$\square \quad qg(x)r = 0$$

لم ۵-۷: اگر  $P_{\bar{S}}$  اول و  $P_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$  - سازگار باشد آنگاه  $P_R$  اول است.

اثبات: فرض کنید  $0 \neq Q_R \subseteq P_R$  پس  $\text{ann}(P_R) \subseteq \text{ann}(Q_R)$  حال فرض کنید  $r \in \text{ann}(Q_R)$  بنا به

لم ۵-۶،  $r \in \text{ann}(Q.\bar{S}_{\bar{S}})$  از آنجایی که  $P_{\bar{S}}$  اول است و  $Q.\bar{S}_{\bar{S}} \subseteq P_{\bar{S}}$ ، لذا  $Pr = 0$  پس

$$\square \quad r \in \text{ann}(P_R) \text{ بنا براین } P_R \text{ اول است.}$$

تعریف ۵-۸: گوئیم چند جمله ای ناصفر  $m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k \in M[x]$  (که در آن  $m_k \neq 0$ )،

$\text{ann}(m_k) \subseteq \text{ann}(m_i)$ ،  $i \leq k$  هرگاه برای هر  $\text{annihilator-compliant}$  (یا به اختصار  $ac$ ) است

لم ۵-۹: فرض کنید  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$  - سازگار باشد. در این صورت برای هر

$$r \in R \quad 0 \neq m(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k \in M[x]$$
 وجود دارد به طوری که  $m(x)r$ ،  $ac$  است.

اثبات: (برهان خلف) فرض می‌کنیم یک چند جمله ای مانند  $h(x)$  در  $M[x]$  وجود داشته باشد به

طوری که برای هر  $r \in R$ ،  $h(x)r$  یک چند جمله ای  $ac$  نباشد. می‌توان فرض نمود

$$m(x) = m_0 + m_1x + \dots + m_kx^k \in M[x]$$
 در بین تمامی چند جمله ای هایی که این چنین هستند

یک چند جمله ای با کمترین درجه باشد که در آن  $k \geq 1$ . چون  $m(x)$  یک چند جمله ای  $ac$  نیست

لذا  $i$  ای وجود دارد به طوری که  $i < k$  و  $\text{ann}(m_k) \not\subseteq \text{ann}(m_i)$ . در این صورت  $b \in R$  وجود دارد به

طوری که  $m_ib \neq 0 = m_kb$ . بنا براین با توجه به (۵-۱) و  $\sigma$  - سازگاری  $M_R$ ، ضریب جمله درجه

---

<sup>۱</sup>annihilator - compliant

$k$  در چند جمله ای  $m(x)b$  برابر است با  $m_k \sigma^k(b) = 0$ . پس چند جمله ای  $m(x)b$  حد اکثر از درجه  $k-1$  است و چون  $m_k b \neq 0$ ، لذا بنا به لم ۳-۵، در نتیجه با توجه به مینیمال بودن  $k$ ،  $c \in R$  وجود دارد به طوری که  $m(x)bc$  یک چند جمله ای  $ac$  است که با فرض در تناقض است.  $\square$

**لم ۵-۱۰:** فرض کنید  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار و  $m(x) \in M[x]$  یک چند جمله ای  $ac$  باشد. در این صورت برای هر  $r \in R$ ، اگر  $m(x)r \neq 0$ ، آنگاه  $m(x)r$  نیز  $ac$  است.

**اثبات:** فرض کنید  $r \in R$  و  $m(x) = m_0 + m_1 x + \dots + m_k x^k \in M[x]$  باشند به طوری که  $m(x)r \neq 0$ . ضریب جمله درجه  $k$  در  $m(x)r$  برابر است با  $m_k \sigma^k(r)$ ، که باید ناصفر باشد (در غیر این صورت،  $m_k r = 0$ ، و چون  $m(x)$  یک چند جمله ای  $ac$  است لذا برای هر  $i$ ،  $m_i r = 0$ ، بنابراین با توجه به  $(\sigma, \delta)$ -سازگار بودن  $M_R$ ،  $m(x)r = 0$ ). پس  $m_k \sigma^k(r)$  ضریب پیشرو  $m(x)r$  است.

فرض کنید  $m_k \sigma^k(r)a = 0$ . با توجه به (۵-۱)، ضریب جمله درجه  $i$  در  $m(x)r$  برابر است با  $\sum_{j=i}^k m_j f_i^j(r)$ . از آنجایی که  $m_k \sigma^k(r)a = 0$ ، لذا با توجه به  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$ ،  $m_k \sigma^k(ra) = 0$ ، و در نتیجه  $m_k ra = 0$ . چون  $m(x)$  یک چند جمله ای  $ac$  است پس برای هر  $j$  که  $j \leq k$ ،  $m_j ra = 0$ . با استفاده مکرر از لم ۵-۵، برای هر  $j$ ، که  $i \leq j \leq k$ ،  $m_j f_i^j(r)a = 0$ . بنابراین  $a$  ضریب جمله درجه  $i$  در  $m(x)r$  را صفر می کند و نتیجه مورد نظر حاصل است.  $\square$

**نتیجه ۵-۱۱:** فرض کنید  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار و  $m(x) \in M[x]$  یک چند جمله ای از درجه  $k \geq 0$  باشد. در این صورت  $m(x)$  یک چند جمله ای  $ac$  است اگر و تنها اگر زیر مدول دوری  $m(x)\bar{S}_{\bar{S}}$  از  $M[x]_{\bar{S}}$  شامل هیچ عنصر ناصفری از درجه کمتر از  $k$  نباشد.

**اثبات:** فرض کنید  $m(x) = m_0 + m_1 x + \dots + m_k x^k$  یک چند جمله ای  $ac$  نباشد. بنابراین  $r \in R$  و  $i < k$  وجود دارند به طوری که  $m_k r = 0 \neq m_i r$ . پس ضریب جمله درجه  $k$  در  $m(x)r$  برابر است با  $m_k \sigma^k(r) = 0$ . لذا  $\deg(m(x)r) \leq k-1$ . همچنین با توجه به لم ۳-۵، از آنجایی که  $m_i r \neq 0$ ، لذا



$m(x)r \neq 0$ . پس زیر مدول دوری  $m(x)\bar{S}$  شامل چند جمله ای ناصفر  $m(x)r$  است که درجه آن کمتر از  $k$  است.

به عکس فرض کنید  $m(x)$  یک چند جمله ای  $ac$  باشد. اگر برای  $r \in R$ ،  $m(x)r \neq 0$ ، آنگاه  $m_k \sigma^k(r) \neq 0$  (در غیر این صورت،  $m_k r = 0$  و چون  $m(x)$  یک چند جمله ای  $ac$  است لذا برای هر  $i$ ،  $m_i r = 0$ ). بنابراین با توجه به  $(\sigma, \delta)$ -سازگار بودن  $M_R$ ،  $m(x)r = 0$ . پس  $\deg(m(x)r) = k$ .  $\square$

**قضیه ۵-۱۲:** فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  یک درونیختی و  $\delta: R \rightarrow R$  یک تابع  $\sigma$ -مشتق باشد. اگر  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار باشد آنگاه

$$\text{Ass}(M[x]_{\bar{S}}) = \{P[x] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$$

در حقیقت، برای هر  $\underline{q} \in \text{Ass}(M[x]_{\bar{S}})$ ،  $\underline{q} = P[x]$ ، که  $P = \underline{q} \cap R \in \text{Ass}(M_R)$ .

**برهان:** ابتدا نشان می‌دهیم  $\text{Ass}(M[x]_{\bar{S}}) \supseteq \{P[x] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$ . فرض کنید  $P \in \text{Ass}(M_R)$ .

پس زیر مدول اول  $N_R \subseteq M_R$  وجود دارد به طوری که  $P = \text{ann}(N_R)$ . کافیت ثابت کنیم:

$$P[x] = \text{ann}(N[x]_{\bar{S}}) \quad (۴-۵)$$

و

$$N[x]_{\bar{S}} \text{ اول است.} \quad (۵-۵)$$

برای اثبات تساوی در (۴-۵)، فرض کنید  $g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_l x^l \in \bar{S}$  و

$n(x) = n_0 + n_1 x + \dots + n_k x^k \in N[x]$  یک جمله نوعی از  $n(x)g(x)$  به صورت

لذا  $P = \text{ann}(N_R)$  چون آنگاه  $g(x) \in P[x]$ ، اگر  $(n_j x^j)(a_d x^d) = n_j \sum_{i=0}^j f_i^j(a_d) x^{i+d}$  است.

چون  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار است لذا برای هر  $i$  که  $0 \leq i \leq j$ ،  $n_j f_i^j(a_d) = 0$ .

بنابراین  $n(x)g(x) = 0$  و لذا  $P[x] \subseteq \text{ann}(N[x]_{\bar{S}})$ . به عکس اگر  $g(x) \notin P[x]$ ، آنگاه  $d \geq 0$  وجود

دارد به طوری که  $a_d \notin P$ . پس  $n \in N$  وجود دارد به طوری که  $na_d \neq 0$  و لذا  $ng(x) \neq 0$ . بنابراین

$g(x) \notin \text{ann}(N[x]_{\bar{S}})$  و لذا  $\text{ann}(N[x]_{\bar{S}}) \subseteq P[x]$  و تساوی در (۴-۵) ثابت می‌شود.

اکنون ثابت می‌کنیم  $N[x]_{\bar{S}}$  اول است. برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم اگر  $Q_{\bar{S}}$

زیر مدول ناصفری از  $N[x]_{\bar{S}}$  باشد آنگاه

$$ann(Q_{\bar{S}}) = ann(N[x]_{\bar{S}}) \quad (۶-۵)$$

فرض کنید

$$Q_{\circ} = \{n \in N : \exists n_t x^t + n_{t+1} x^{t+1} + \dots + n x^k \in Q; t \geq \circ\} \subseteq N \quad (۷-۵)$$

چون  $Q \neq \circ$ ، لذا  $Q_{\circ} \neq \circ$ . قرار می‌دهیم  $P_{\circ} = \langle Q_{\circ} \rangle_R$ . چون  $N_R$  اول است و  $Q_{\circ} \subseteq P_{\circ} \subseteq N$ ، لذا

$$P = ann(P_{\circ})_R \quad (۸-۵)$$

برای اثبات  $\subseteq$  در (۶-۵)، فرض کنید  $Qg(x) = \circ$ ، که در آن  $g(x) = a_{\circ} + a_1 x + \dots + a_l x^l \in \bar{S}$  با

توجه به (۴-۵)، کافیت ثابت کنیم برای هر  $i$ ،  $a_i \in P$ . از  $a_l$  شروع می‌کنیم. عناصر  $P_{\circ}$  به فرم

$\sum n_j r_j$  هستند که در آن برای هر  $j$ ،  $r_j \in R$  و  $n_j \in Q_{\circ}$ . بنابراین با توجه به (۸-۵) کافیت

نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q_{\circ}$ ،  $n r = \circ$ . چون  $n \in Q_{\circ}$ ، پس

$n_t x^t + n_{t+1} x^{t+1} + \dots + n x^k \in Q$  وجود دارد که در آن  $t \geq \circ$ . چون  $Q$  یک  $R$ -مدول است لذا برای

هر  $r \in R$ ،  $n \sigma^k(r) x^k \in Q$  "جملات با درجه کمتر". پس

$$\circ = (a_{\circ} + a_1 x + \dots + a_l x^l) (n \sigma^k(r) x^k) \quad (۹-۵)$$

$$= (n \sigma^k(r a_l) x^{k+l})$$

بنابراین  $n \sigma^k(r a_l) = \circ$ . با توجه به لم ۲-۸،  $N_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $n r a_l = \circ$ . حال به

طور استقرایی فرض کنید  $a_l, a_{l-1}, \dots, a_{m+1} \in P$ . از آنجایی که  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار است

لذا برای هر  $d$ ، که  $d > m$  و برای هر  $j$  و  $i$ ، که  $t \leq j \leq k$  و  $\circ \leq i \leq j$ ،

$$N f_i^j(a_d) = \circ \quad (۱۰-۵)$$

با توجه به (۸-۵)، کافیت نشان دهیم برای هر  $r \in R$  و هر  $n \in Q_{\circ}$ ،  $n r a_m = \circ$ . با توجه به (۹-۵) و

(۱۰-۵) داریم:

$$\circ = (n_t \sigma^t(r) x^t + n_{t+1} \sigma^{t+1}(r) x^{t+1} + \dots + n \sigma^k(r) x^k) (a_{\circ} + \dots + a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \dots + a_l x^l)$$

$$\begin{aligned}
&= (n\sigma^k(r)x^k + \text{"جملات با درجه کمتر"}) (a_0 + \dots + a_m x^m) \\
&+ \left( n_t \sigma^t(r) \sum_{i=0}^t f_i^t(a_{m+1}) x^{i+m+1} + \dots + n\sigma^k(r) \sum_{i=0}^k f_i^k(a_{m+1}) x^{i+m+1} \right) + \dots \\
&+ \left( n_t \sigma^t(r) \sum_{i=0}^t f_i^t(a_l) x^{i+l} + \dots + n\sigma^k(r) \sum_{i=0}^k f_i^k(a_l) x^{i+l} \right) \\
&= \text{"جملات با درجه کمتر"} + n\sigma^k(ra_m)x^{k+m}
\end{aligned}$$

پس  $n\sigma^k(ra_m) = 0$  از آنجایی که  $N_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار است لذا  $nra_m = 0$ . بنابراین

$$ann(Q_{\bar{S}}) \subseteq ann(N[x]_{\bar{S}}) \text{ و لذا } g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_l x^l \in P[x] = ann(N[x]_{\bar{S}})$$

حال فرض کنید  $I \in Ass(M[x]_{\bar{S}})$ . بنا به تعریف، زیر مدول اول  $P_{\bar{S}} \subseteq M[x]_{\bar{S}}$  وجود دارد به

طوری که  $I = ann(P_{\bar{S}})$ . عنصر ناصفر  $m(x) = m_0 + m_1 x + \dots + m_k x^k$  را از  $P$  انتخاب می‌کنیم. با

توجه به لم ۵-۹ می‌توان فرض نمود که  $m(x)$  یک چند جمله ای  $ac$  است. قرار دهید

$$Q_R = m(x)R \text{ چون } P_{\bar{S}} \text{ اول است و } Q, \bar{S} \subseteq P_{\bar{S}} \text{ لذا}$$

$$ann(Q, \bar{S}) = I \quad (۱۱-۵)$$

با توجه به لم ۵-۴، چون  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار است لذا  $M[x]_R$  نیز  $(\sigma, \delta)$ -سازگار

است. چون  $Q_R \subseteq P_R \subseteq M[x]_R$ ، پس  $Q_R$  و  $P_R$  نیز  $(\sigma, \delta)$ -سازگارند. بنابراین با توجه به لم ۵-۷،

از آنجایی که  $P_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار و  $P_{\bar{S}}$  اول است لذا  $P_R$  اول است و چون  $Q_R \subseteq P_R$ ،  $Q_R \neq 0$ ،

پس  $Q_R$  نیز اول است. با توجه به لم ۵-۶ و همچنین (۱۱-۵)،  $ann(Q_R) = I \cap R$ . با قرار دادن این

دو مطلب در کنار هم داریم:

$$ann(Q_R) = I \cap R \text{ و } Q_R \text{ اول است} \quad (۱۲-۵)$$

ادعا می‌کنیم  $I = (I \cap R)[x]$ . از آنجایی که  $I$  ایده‌الی از  $\bar{S}$  است لذا  $(I \cap R)[x] \subseteq I$ . به

عکس، فرض کنید  $g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_l x^l \in I$  به طوری که برای هر  $1 \leq i \leq l$ ،  $a_i \in R$ . نشان

می‌دهیم برای هر  $1 \leq i \leq l$ ،  $a_i \in I$ . با توجه به (۱۲-۵)، کافیت ثابت کنیم برای هر  $1 \leq i \leq l$ ،

$a_i \in ann(Q_R)$ . فرض کنید  $q \in Q$ ،  $q \neq 0$ . بنابراین  $r \in R$  وجود دارد به طوری که  $q = m(x)r$ . با

توجه به لم ۵-۱۰، چون  $m(x)$  یک چند جمله ای  $ac$  است و  $m(x)r \neq 0$ ، لذا  $m(x)r$  نیز یک چند جمله ای  $ac$  است. از آنجایی که  $m(x)r \in Q_R$ ، لذا با توجه به (۵-۱۱):

$$m(x)r(a_0 + a_1x + \dots + a_lx^l) = 0 \quad (۵-۱۳)$$

بنابراین با توجه به تساوی (۵-۱۳) و همچنین  $\sigma$ -سازگاری  $M_R$  می توان نتیجه گرفت  $a_l$ ، ضریب پیشرو  $m(x)r$  را صفر می کند و چون  $m(x)r$  یک چند جمله ای  $ac$  است لذا  $a_l$  تمام ضرایب  $q$  را صفر می کند. لذا با توجه به  $(\sigma, \delta)$ -سازگار بودن  $M_R$ ،  $f_i^j(a_l)$  نیز تمام ضرایب  $q$  را صفر می کند. پس  $qa_l = 0$ . بنابراین  $a_l \in \text{ann}(Q_R)$ ، و لذا با توجه به (۵-۱۲)،  $a_l \in I$ . حال  $g(x)$  را با  $a_0 + a_1x + \dots + a_{l-1}x^{l-1} \in I$  جایگذاری می کنیم و همین روند را تکرار می کنیم. در نتیجه برای هر  $a_i \in I \cap R$ ،  $0 \leq i \leq l$  پس  $I \subseteq (I \cap R)[x]$  و ادعا ثابت می شود.

با توجه به (۵-۱۲)،  $I \cap R \in \text{Ass}(Q_R)$ . همریختی  $\varphi: Q_R \rightarrow M_R \oplus M_R \oplus \dots \oplus M_R$  را با ضابطه  $\varphi(m(x)r) = (m_0r, m_1r, \dots, m_kr)$  در نظر بگیرید.  $\varphi$  یک نشاننده است: فرض کنید  $(m_0r, m_1r, \dots, m_kr) = (0, 0, \dots, 0)$ . بنابراین برای هر  $0 \leq j \leq k$ ،  $m_jr = 0$ . در نتیجه  $(\sigma, \delta)$ -سازگاری  $M_R$  ایجاب می کند برای هر  $i$  و هر  $j$ ، که  $0 \leq i \leq k$  و  $i \leq j \leq k$ ،  $m_j f_i^j(r) = 0$ ، لذا  $m(x)r = 0$ . بنابراین  $\text{Ass}(Q_R) \subseteq \text{Ass}(M_R \oplus M_R \oplus \dots \oplus M_R)$ . با توجه به نتیجه ۲-۶،  $\text{Ass}(M_R \oplus M_R \oplus \dots \oplus M_R) = \text{Ass}(M_R)$ . پس  $I \cap R \in \text{Ass}(M_R)$ . چون  $I = (I \cap R)[x]$ ، لذا  $I = (I \cap R)[x] \subseteq \{P[x] : P \in \text{Ass}(M_R)\}$ .  $\square$

مثال های زیر نشان می دهند که در قضیه ۵-۱۲، هیچ یک از فرض های  $\sigma$ -سازگاری و

$\delta$ -سازگاری مدول  $M$  را نمی توان حذف نمود.

**مثال ۵-۱۳:** فرض کنید  $R_0$  یک دامنه باشد و  $R = R_0[t]$ . همچنین فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  با ضابطه  $\sigma(t) = 0$  و  $\sigma|_{R_0} = \text{Id}$  تعریف شده باشد و  $\delta = 0$ . قرار می دهیم  $M = R$ . چون  $t.t = t^2 \neq 0$  و  $t.\sigma(t) = 0$ ، لذا  $M_R$  یک مدول  $\sigma$ -سازگار نیست. چون  $R_0$  دامنه است لذا  $R$  نیز دامنه است. پس برای هر زیر مدول ناصفر  $N$  از  $M$ ،  $\text{ann}(N_R) = 0$ . بنابراین  $M_R$  یک مدول اول است. بنا به لم

۴-۲،  $Ass(M_R) = \{ann(M_R)\} = \{\circ\}$ . حال فرض کنید  $I \in Ass(M[x]_{\bar{s}})$ . بنا به تعریف، زیر مدول اول  $Q_{\bar{s}}$  از  $M[x]_{\bar{s}}$  وجود دارد به طوری که  $I = ann(Q_{\bar{s}})$ . چون  $Q$  یک مدول اول است و  $Qx \subseteq Q$ ، لذا  $ann(Qx) = I$ . برای هر  $m(x) \in Q$ ،  $m(x)xt = \circ$ ، بنابراین  $t \in ann(Qx) = I$ . در نتیجه  $\{\circ\} \notin Ass(M[x]_{\bar{s}})$ .  $\square$ .

**مثال ۵-۱۴:** فرض کنید  $R$  و  $R_0$  همانند مثال ۵-۱۳ در نظر گرفته شوند. همچنین فرض کنید  $R_0$  از مشخصه صفر باشد. قرار می‌دهیم  $M = R_0$ . با تعریف  $M \cdot t := \circ$ ، می‌توان  $M$  را به عنوان یک  $R$ -مدول راست در نظر گرفت.  $\sigma: R \rightarrow R$  را تابع همانی و  $\delta: R \rightarrow R$  را همان مشتق معمولی در نظر بگیرید. از آنجایی که برای  $m \in M$ ،  $m \neq \circ$ ،  $m \cdot t = \circ$  و  $m \cdot \delta(t) = m \cdot 1 \neq \circ$ ، لذا  $M_R$  یک مدول  $\delta$ -سازگار نیست. برای هر زیر مدول ناصفر  $N_R$  از  $M_R$ :

$$ann(N_R) = \{g(t) = r_0 + r_1 t + \dots + r_m t^m \in R \mid \forall n \in N : n \cdot g(t) = \circ\} \quad (۱۴-۵)$$

$$= \{g(t) = r_0 + r_1 t + \dots + r_m t^m \in R \mid \forall n \in N : nr_0 + (nr_1) \cdot t + \dots + (nr_m) \cdot t^m = \circ\}$$

از آنجایی که برای هر  $j$ ،  $nr_j \in N \subseteq M$ ،  $M \cdot t = \circ$ ، لذا برای هر  $1 \leq j \leq m$ ،  $(nr_j) \cdot t^j = \circ$ . پس از (۱۴-۵) داریم:

$$ann(N_R) = \{g(t) = r_0 + r_1 t + \dots + r_m t^m \in R \mid \forall n \in N : nr_0 = \circ\} \\ = \{g(t) = r_0 + r_1 t + \dots + r_m t^m \in R \mid r_0 = \circ\} = \langle t \rangle$$

بنابراین  $M_R$  یک مدول اول است. لذا طبق لم ۴-۲،  $Ass(M_R) = \{Ann(M_R)\} = \{\langle t \rangle\}$ .

نشان می‌دهیم  $\{\langle t \rangle[x]\} \not\subseteq Ass(M[x]_{\bar{s}})$ . (فرض خلف) فرض می‌کنیم  $\langle t \rangle[x] \in Ass(M[x]_{\bar{s}})$ .

بنابراین زیر مدول اول  $Q_{\bar{s}} \subseteq M[x]_{\bar{s}}$  وجود دارد به طوری که

$$ann(Q_{\bar{s}}) = \langle t \rangle[x] \quad (۱۵-۵)$$

عنصر ناصفر  $m(x) = m_0 + m_1 x + \dots + m_k x^k \in Q_{\bar{s}}$  را در نظر بگیرید. پس با توجه به (۱۵-۵)،

$$m(x)xt = \circ \quad \text{در نتیجه}$$

$$\circ = m(x)xt \quad (۱۶-۵)$$

$$\begin{aligned}
&= (m_0 x + m_1 x^r + \dots + m_k x^{k+1})t \\
&= m_0 \left( \sum_{i=0}^1 f_i'(t) x^i \right) + m_1 \left( \sum_{i=0}^r f_i^r(t) x^i \right) + \dots + m_k \left( \sum_{i=0}^{k+1} f_i^{k+1}(t) x^i \right)
\end{aligned}$$

با توجه به این که  $\sigma$  تابع همانی است و برای هر  $j \geq 2$ ،  $\delta^j(t) = 0$ ، لذا از (۵-۱۶) داریم:

$$\begin{aligned}
0 &= m_0 \left( \sum_{i=0}^1 f_i'(t) x^i \right) + m_1 \left( \sum_{i=1}^r f_i^r(t) x^i \right) + \dots + m_k \left( \sum_{i=k}^{k+1} f_i^{k+1}(t) x^i \right) \\
&= m_0 (1 + tx) + m_1 (rx + tx^r) + \dots + m_k ((k+1)x^k + tx^{k+1}) \\
&= m_0 + m_1 rx + \dots + m_k (k+1)x^k
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر  $0 \leq j \leq k$ ،  $m_j(j+1) = 0$ . چون  $R_0$  از مشخصه صفر است لذا برای هر  $0 \leq j \leq k$ ،

$m_j = 0$ ، که با فرض ناصفر بودن  $m(x)$  در تناقض است.  $\square$

**مثال ۵-۱۵:** فرض کنید  $R_0$  یک حلقه باشد و  $R = R_0[t]$ . همچنین فرض کنید  $\sigma: R \rightarrow R$  نگاشت

همانی و  $h(t)$  یک چند جمله ای مرکزی<sup>۱</sup> در  $R$  باشد به طوری که  $c \in R_0$  ریشه ای از  $h(t)$  باشد (یاد آوری می کنیم که  $h(t)$  را یک چند جمله ای مرکزی در  $R$  نامیم هرگاه برای هر  $g(t) \in R$ ،  $h(t)g(t) = g(t)h(t)$ .)  $\delta: R \rightarrow R$  را با ضابطه  $\delta(f(t)) = f'(t)h(t)$  در نظر بگیرید.  $\delta$  یک تابع

$\sigma$ -مشتق روی  $R$  است؛ زیرا برای هر  $f(t), g(t) \in R$ ، اولاً

$$\begin{aligned}
\delta(f(t) + g(t)) &= (f(t) + g(t))' h(t) \\
&= f'(t)h(t) + g'(t)h(t) \\
&= \delta(f(t)) + \delta(g(t))
\end{aligned}$$

ثانیاً

$$\begin{aligned}
\delta(f(t)g(t)) &= (f(t)g(t))' h(t) \\
&= (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))h(t) \\
&= f'(t)h(t)g(t) + f(t)g'(t)h(t)
\end{aligned}$$

---

<sup>۱</sup>central polynomial

$$= \delta(f(t))g(t) + \sigma(f(t))\delta(g(t))$$

قرار می‌دهیم  $M = R_\circ$ . تعریف می‌کنیم  $m \cdot f(t) := mf(c)$ . با این تعریف می‌توان  $M$  را به عنوان یک  $R$ -مدول راست در نظر گرفت. برای هر  $m \in M$  و هر  $f(t) \in R$ ،  
 $m \cdot \delta(f(t)) = m \cdot (f'(t)h(t)) = mf'(c)h(c) = \circ$  بنابراین  $M_R$  یک مدول  $\delta$ -سازگار است. لذا بنا

به قضیه ۵-۱۲،  $\square. \text{Ass}(R_\circ[x]_{R_\circ[t]_{[x;\delta]}}) = \{P[x] : P \in \text{Ass}(R_\circ[t]_{[x;\delta]})\}$

**مثال ۵-۱۶:** فرض کنید  $R_\circ$  یک دامنه باشد و  $R = R_\circ[s, t]$ . همچنین فرض کنید  $\sigma = Id$  و  $\delta = \partial/\partial s$ . قرار دهید  $M = R_\circ[s]$ . با تعریف  $M \cdot t \equiv \circ$ ، می‌توان  $M$  را به عنوان یک  $R$ -مدول راست در نظر گرفت. برای هر زیر مدول ناصفر  $N$  از  $M$ ، با توجه به دامنه بودن  $R_\circ$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \text{ann}(N_R) &= \{g(s, t) = h_\circ(s) + h_1(s)t + \dots + h_m(s)t^m \in R \mid \forall f(s) \in N : f(s) \cdot g(s, t) = \circ\} \\ &= \{g(s, t) = h_\circ(s) + h_1(s)t + \dots + h_m(s)t^m \in R \mid \forall f(s) \in N : f(s)h_\circ(s) = \circ\} \\ &= \{g(s, t) = h_\circ(s) + h_1(s)t + \dots + h_m(s)t^m \in R \mid h_\circ(s) = \circ\} = \langle t \rangle \end{aligned}$$

بنابراین  $M$  یک مدول اول است و  $\text{Ass}(M_R) = \{\text{ann}(M_R)\} = \{\langle t \rangle\}$

برای هر  $m \in M$  و  $\circ \neq m$  و هر  $f \in R$ ، اگر  $m \cdot f = \circ$ ، آنگاه  $g \in R$  وجود دارد به طوری که  $f = tg$  (چون  $R_\circ$  یک دامنه است). پس  $m \cdot \delta(f) = m \cdot \delta(tg) = m \cdot (t_s g + tg_s) = \circ$  بنابراین  $M_R$  یک مدول  $\delta$ -سازگار است. در نتیجه با استفاده از قضیه ۵-۱۲،

$$\square. \text{Ass}(M[x]_{\bar{s}}) = \{P[x] : P \in \text{Ass}(M_R)\} = \{\langle t \rangle[x]\}$$

**تعریف ۵-۱۷:** فرض کنید  $\sigma : R \rightarrow R$  یک درونیختی و  $\delta : R \rightarrow R$  یک تابع  $\sigma$ -مشتق باشد. در این صورت  $\delta$  را یک تابع  $\sigma$ -مشتق داخلی<sup>۱</sup> (یا به اختصار  $\sigma$ -داخلی<sup>۲</sup>) نامیم هرگاه  $d \in R$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر  $r \in R$ ،  $\delta(r) = dr - \sigma(r)d$ .

**تعریف ۵-۱۸:** فرض کنید  $\sigma : R \rightarrow R$  یک درونیختی باشد. در این صورت  $\sigma$  را یک

<sup>۱</sup>inner  $\sigma$ -derivation

<sup>۲</sup> $\sigma$ -inner

خودریختی داخلی<sup>۱</sup> از  $R$  نامیم هرگاه عنصر وارون پذیری از  $R$  مانند  $u$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر  $r \in R$ ،  $\sigma(r) = u^{-1}ru$ .

فرض کنید  $\delta$  یک تابع  $\sigma$ -مشتق داخلی باشد. در نتیجه  $d \in R$  وجود دارد به طوری که برای هر  $r \in R$ ،  $\delta(r) = dr - \sigma(r)d$ . در این صورت، به راحتی می توان نشان داد که  $\bar{S} \cong R[x-d; \sigma]$ . همچنین، فرض کنید  $\sigma$  یک خودریختی داخلی از  $R$  باشد. در نتیجه عنصر وارون پذیری از  $R$  مانند  $u$  وجود دارد به طوری که برای هر  $r \in R$ ،  $\sigma(r) = u^{-1}ru$ . در این صورت، به راحتی می توان نشان داد که  $\bar{S} \cong R[ux; u\delta]$ .

**گزاره ۵-۱۹:** فرض کنید  $R$  یک دامنه و  $\sigma \in \text{End}(R)$  یک به یک باشد. همچنین فرض کنید  $\delta$  یک تابع  $\sigma$ -مشتق باشد. در این صورت:

(الف) اگر  $\varphi: R[x; \sigma, \delta] \rightarrow R[x'; \sigma']$  یک یکرختی باشد که  $\varphi|_R \in \text{Aut}(R)$ ، آنگاه  $\delta$  یک تابع  $\sigma$ -مشتق داخلی است.

(ب) اگر  $\varphi: R[x; \sigma, \delta] \rightarrow R[x'; \delta']$  یک یکرختی باشد که  $\varphi|_R \in \text{Aut}(R)$ ، آنگاه  $\sigma$  یک خودریختی داخلی از  $R$  است.

**اثبات:** به [۳، ضمیمه A] مراجعه کنید.  $\square$

اکنون مثالی را ارائه می کنیم که در آن  $\delta$  و  $\sigma$  هر دو نابدیهی هستند.

**مثال ۵-۲۰:** فرض کنید  $R_0$  یک دامنه از مشخصه صفر باشد و  $R = R_0[t]$ .  $\sigma: R \rightarrow R$  را با ضابطه

$$\sigma|_{R_0} = \text{Id} \text{ و } \sigma(t) = -t$$

تعریف می کنیم. برای هر  $a \in R_0$  قرار دهید:

$$\delta(at^l) := \begin{cases} at^{l-1} & l = 2k+1 \\ 0 & l = 2k \end{cases}$$

$\delta$  یک تابع  $\sigma$ -مشتق روی  $R$  است، زیرا:

$$(1) \text{ برای هر } a, b \in R$$

---

<sup>۱</sup>inner automorphism



$$\begin{aligned}
\delta(at^l + bt^l) &= \delta((a+b)t^l) = \begin{cases} (a+b)t^{l-1} & l = 2k+1 \\ \circ & l = 2k \end{cases} \\
&= \begin{cases} at^{l-1} + bt^{l-1} & l = 2k+1 \\ \circ + \circ & l = 2k \end{cases} \\
&= \begin{cases} \delta(at^l) + \delta(bt^l) & l = 2k+1 \\ \delta(at^l) + \delta(bt^l) & l = 2k \end{cases} \\
&\text{لذا } \delta(at^l + bt^l) = \delta(at^l) + \delta(bt^l)
\end{aligned}$$

(۲) برای هر  $a, b \in R$ ، حالت های زیر را در نظر بگیرید:

حالت اول:  $m, n$  هر دو زوج باشند:

$$\delta((at^m)(bt^n)) = \delta((ab)t^{m+n}) = \circ = \circ + \circ = \delta(at^m)bt^n + \sigma(at^m)\delta(bt^n)$$

حالت دوم:  $m, n$  هر دو فرد باشند:

$$\delta((at^m)(bt^n)) = \delta((ab)t^{m+n}) = \circ = (at^{m-1})(bt^n) + (-at^m)(bt^{n-1}) = \delta(at^m)bt^n + \sigma(at^m)\delta(bt^n)$$

حالت سوم:  $m$  زوج و  $n$  فرد باشد:

$$\delta((at^m)(bt^n)) = \delta((ab)t^{m+n}) = abt^{m+n-1} = \circ + (at^m)(bt^{n-1}) = \delta(at^m)bt^n + \sigma(at^m)\delta(bt^n)$$

حالت چهارم:  $m$  فرد و  $n$  زوج باشد:

$$\delta((at^m)(bt^n)) = \delta((ab)t^{m+n}) = abt^{m+n-1} = (at^{m-1})(bt^n) + \circ = \delta(at^m)bt^n + \sigma(at^m)\delta(bt^n)$$

در نتیجه  $\delta((at^m)(bt^n)) = \delta(at^m)bt^n + \sigma(at^m)\delta(bt^n)$

$\delta$  یک تابع  $\sigma$ -مشتق داخلی نیست. در غیر این صورت،  $d \in R$  وجود دارد به طوری که برای هر

$$r \in R, \quad \delta(r) = dr - \sigma(r)d \quad \text{عنصر } r = t^r \quad \text{را در نظر بگیرید. داریم:}$$

$$t^r = \delta(t^r) = dt^r - (-t^r d) = 2dt^r \quad \text{که یک تناقض است.}$$

همچنین  $\sigma$  یک خودریختی داخلی نیست. در غیر این صورت، عنصر وارون پذیری از  $R$  مانند  $u$

وجود دارد به طوری که برای هر  $r \in R$ ،  $\sigma(r) = u^{-1}ru$  عنصر  $r = t$  را در نظر بگیرید. پس

$$-t = \sigma(t) = u^{-1}tu \quad \text{و لذا } u(-t) = tu \quad \text{که یک تناقض است.}$$

فرض کنید  $M_R = R_\circ \oplus R_\circ \oplus R_\circ \oplus \dots$  که در آن  $t \in R$  روی  $M$  به صورت زیر عمل می کند:

برای هر  $(m_o, m_1, m_r, \dots) \in M$ ،  $(m_o, m_1, m_r, \dots) \cdot t = (o, m_o k_o, m_1 k_1, m_r k_r, \dots)$  که در آن  $k_i$  ها اعداد صحیح ناصفری هستند که ثابتند. با توجه به دامنه بودن  $R_o$ ، به وضوح  $M$  یک مدول اول است و لذا،  $Ass(M_R) = \{ann(M_R)\} = \{o\}$  ثابت می‌کنیم  $M_R$  یک مدول  $(\sigma, \delta)$ -سازگار است. برای این منظور نشان می‌دهیم برای هر  $m \in M$ ،  $ann(m) = o$ ،  $o \neq m \in M$  در این صورت برای هر  $m \in M$  و هر  $f(t) \in R$

$$\begin{aligned} mf(t) &= o \\ \Leftrightarrow f(t) &= o \\ \Leftrightarrow \sigma(f(t)) &= o \\ \Leftrightarrow m\sigma(f(t)) &= o \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} mf(t) &= o \\ \Rightarrow f(t) &= o \\ \Rightarrow \delta(f(t)) &= o \\ \Rightarrow m\delta(f(t)) &= o \end{aligned}$$

(فرض خلف) فرض می‌کنیم  $(a_o, a_1, a_r, \dots) \in M$  و  $o \neq a_o, a_1, a_r, \dots$  به طوری

که  $b_r \neq o$  و  $(a_o, a_1, a_r, \dots) \cdot (b_r t^r + b_{r+1} t^{r+1} + \dots + b_s t^s) = o$  در نتیجه

$$\begin{aligned} o &= ((a_o, a_1, a_r, \dots) \cdot t^r) \cdot (b_r + b_{r+1} t + \dots + b_s t^{s-r}) \\ &= \left( \overbrace{o, \dots, o, a_o k_o, \dots, k_{r-1}, a_1 k_1, \dots, k_r, \dots}^{\zeta_r} \right) \cdot (b_r + b_{r+1} t + \dots + b_s t^{s-r}) \\ &= \left( \overbrace{o, \dots, o, a_o k_o, \dots, k_{r-1}, a_1 k_1, \dots, k_r, \dots}^{\zeta_r} \right) \cdot b_r + \left( \overbrace{o, \dots, o, a_o k_o, \dots, k_{r-1}, \dots}^{\zeta_r} \right) \cdot (b_{r+1} t) + \dots \\ &\quad + \left( \overbrace{o, \dots, o, a_o k_o, \dots, k_{r-1}, \dots}^{\zeta_r} \right) \cdot (b_s t^{s-r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \overbrace{\circ, \dots, \circ}^{\mathcal{L}_r}, a_{\circ} k_{\circ} \dots k_{r-1} b_r, a_{\mathcal{L}_1} k_{\mathcal{L}_1} \dots k_r b_r, \dots \right) + \left( \overbrace{\circ, \dots, \circ}^{\mathcal{L}_{r+1}}, a_{\circ} k_{\circ} \dots k_{r-1} k_r b_{r+1}, \dots \right) + \dots \\
&\quad + \left( \overbrace{\circ, \dots, \circ}^{\mathcal{L}_s}, a_{\circ} k_{\circ} \dots k_{r-1} k_r \dots k_{s-1} b_s, \dots \right) \\
&= \left( \overbrace{\circ, \dots, \circ}^{\mathcal{L}_r}, a_{\circ} k_{\circ} \dots k_{r-1} b_r, a_{\mathcal{L}_1} k_{\mathcal{L}_1} \dots k_r b_r + a_{\circ} k_{\circ} \dots k_{r-1} k_r b_{r+1}, \dots \right)
\end{aligned}$$

لذا  $a_{\circ} k_{\circ} \dots k_{r-1} b_r = \circ$  چون  $R_{\circ}$  یک دامنه از مشخصه صفر است و  $b_r \neq \circ$ ، لذا  $a_{\circ} = \circ$  به همین نحو

می‌توان نتیجه گرفت که برای هر  $i$ ،  $a_i = \circ$ ، که با فرض در تناقض است. بنابراین با توجه به قضیه

$$\square. Ass(M[x]_{\bar{s}}) = \{\circ\}, \quad ۱۲-۵$$

## فهرست راهنما

### واژه نامه فارسی به انگلیسی

|             |               |                |             |
|-------------|---------------|----------------|-------------|
| Ascending   | chain         | condition      | A.C.C       |
| A.C.C       |               |                | A.C.C       |
|             | on ideals     | روی ایده آل ها |             |
| Prime       |               |                | اول         |
|             | associated    | وابسته         |             |
| Ideal       |               |                | ایده آل     |
|             | prime         | اول            |             |
|             | nil           | پوچ            |             |
| Annihilator |               |                | پوچساز      |
|             | of an element | یک عنصر        |             |
|             | of a module   | یک مدول        |             |
| T-nilpotent |               |                | T-پوچتوان   |
| Summand     |               |                | جمعوند      |
|             | direct        | مستقیم         |             |
| Polynomial  |               |                | چند جمله ای |
|             | skew          | اریب           |             |
|             |               | Laurent        | لوران       |
|             | central       | مرکزی          |             |
| Ring        |               |                | حلقه        |
|             | artinian      | آرتینی         |             |
|             | extension     | توسیع          |             |
|             |               | Ore            | اُر         |
|             | polynomial    | چند جمله ای    |             |
|             |               | skew           | اریب        |
|             | perfect       | کامل           |             |
|             | of fractions  | کسر ها         |             |
|             | local         | موضعی          |             |
|             | noetherian    | نوتری          |             |
|             | semiperfect   | نیم کامل       |             |
|             | semilocal     | نیم موضعی      |             |

|              |               |                  |         |         |                |
|--------------|---------------|------------------|---------|---------|----------------|
| Good         |               |                  |         |         | خوب            |
| Automorphism |               |                  |         |         | خودریختی       |
|              | inner         |                  |         |         | داخلی          |
| Descending   | chain         | condition        |         |         | D.C.C          |
| D.C.C        |               |                  |         |         | D.C.C          |
|              | on ideals     |                  |         |         | روی ایده آل ها |
| Domain       |               |                  |         |         | دامنه          |
|              | ideal         |                  |         |         | ایده آل        |
|              |               | principal        |         | اصلی    |                |
|              | factorization |                  |         |         | تجزیه          |
|              |               | unique           |         | یکتا    |                |
| Endomorphism |               |                  |         |         | درونریختی      |
| Subset       |               |                  |         |         | زیر مجموعه     |
|              | closed        |                  |         |         | بسته           |
|              |               | multiplicatively |         | ضربی    |                |
| Submodule    |               |                  |         |         | زیر مدول       |
|              | essential     |                  |         |         | اساسی          |
| Compatible   |               |                  |         |         | سازگار         |
| Series       |               |                  |         |         | سری            |
|              | power         |                  |         |         | توانی          |
|              |               | skew             |         | اریب    |                |
|              |               |                  | Laurent | لوران   |                |
|              |               | formal           |         |         | صوری           |
|              |               |                  | skew    | اریب    |                |
| Condition    |               |                  |         |         | شرط            |
|              | chain         |                  |         |         | زنجیر          |
|              |               | ascending        |         | افزایشی |                |
|              |               | descending       |         | کاهشی   |                |
| Element      |               |                  |         |         | عنصر           |
|              | prime         |                  |         |         | اول            |
| Perfect      |               |                  |         |         | کامل           |
|              | left          |                  |         |         | چپ             |
| Module       |               |                  |         |         | مدول           |
|              | prime         |                  |         |         | اول            |
|              | polynomial    |                  |         |         | چند جمله ای    |

|                         |         |       |                |
|-------------------------|---------|-------|----------------|
|                         | Laurent | لوران |                |
| simple series           |         |       | ساده سری       |
|                         | power   | توانی |                |
|                         | Laurent | لوران |                |
| of fractions semisimple |         |       | کسرها نیم ساده |
| Derivation              |         |       | مشتق           |
| Localization            |         |       | موضعی سازی     |
| Embedding               |         |       | نشاننده        |
| Homomorphism            |         |       | همریختی        |
| Natural                 |         |       | طبیعی          |

## واژه نامه انگلیسی به فارسی

|              |               |                   |
|--------------|---------------|-------------------|
| A.C.C        |               | شرط زنجیر افزایشی |
|              | on ideals     | روی ایده آل ها    |
| Annihilator  |               | پوچساز            |
|              | of a module   | یک مدول           |
|              | of an element | یک عنصر           |
| Artinian     |               | آرتینی            |
|              | ring          | حلقه              |
| Ascending    |               | افزایشی           |
|              | chain         | زنجیر             |
|              | condition     | شرط               |
| Associated   |               | وابسته            |
|              | prime         | اول               |
| Automorphism |               | خودریختی          |
| Central      |               | مرکزی             |
|              | polynomial    | چند جمله ای       |
| Compatible   |               | سازگار            |
| D.C.C        |               | شرط زنجیر کاهشی   |
|              | on ideals     | روی ایده آل ها    |
| Derivation   |               | مشتق              |
| Direct       |               | مستقیم            |
|              | summand       | جمعوند            |
| Descending   |               | کاهشی             |
|              | chain         | زنجیر             |
|              | condition     | شرط               |
| Endomorphism |               | درونریختی         |
| Essential    |               | اساسی             |
|              | submodule     | زیر مدول          |
| Formal       |               | صوری              |
|              | power         | توانی             |
|              | series        | سری               |
| Good         |               | خوب               |
| Inner        |               | داخلی             |

|                  |              |        |             |            |
|------------------|--------------|--------|-------------|------------|
| Laurent          | automorphism |        | خودریختی    | لوران      |
|                  | polynomial   |        | چند جمله ای |            |
|                  | power        |        | توانی       |            |
| Left             |              | series | سری         | چپ         |
|                  | perfect      |        | کامل        |            |
|                  | ring         |        | حلقه        |            |
| Localization     |              |        |             | موضعی سازی |
| Module           |              |        |             | مدول       |
| Multiplicatively | of fractions |        | کسر ها      | ضربی       |
|                  | closed       |        | بسته        |            |
|                  |              | subset | زیر مجموعه  |            |
| Nil              |              |        |             | پوچ        |
| Noetherian       | ideal        |        | ایده آل     | نوتری      |
|                  | ring         |        | حلقه        |            |
|                  |              |        |             |            |
| Ore              | extension    |        | توسیع       | أر (اریب)  |
|                  |              | ring   | حلقه        |            |
|                  | polynomial   |        | چند جمله ای |            |
| Perfect          |              | ring   | حلقه        | کامل       |
|                  | ring         |        | حلقه        |            |
|                  |              |        |             |            |
| Principal        |              |        |             | اصلی       |
| Prime            | ideal        |        | ایده آل     | اول        |
|                  |              | domain | دامنه       |            |
|                  | element      |        | عنصر        |            |
| Ring             | ideal        |        | ایده آل     | حلقه       |
|                  | module       |        | مدول        |            |
|                  | of fractions |        | کسر ها      |            |



|             |               |            |        |             |             |
|-------------|---------------|------------|--------|-------------|-------------|
| Semilocal   |               |            |        |             | نیم موضعی   |
|             | ring          |            |        |             | حلقه        |
| Semiperfect |               |            |        |             | نیم کامل    |
|             | ring          |            |        |             | حلقه        |
| Semisimple  |               |            |        |             | نیم ساده    |
|             | module        |            |        |             | مدول        |
| Simple      |               |            |        |             | ساده        |
|             | module        |            |        |             | مدول        |
| Skew        |               |            |        |             | اریب        |
|             | formal        |            |        |             | صوری        |
|             |               | power      |        | توانی       |             |
|             |               |            | series | سری         |             |
|             | Laurent       |            |        |             | لوران       |
|             |               | polynomial |        | چند جمله ای |             |
|             |               | power      |        | توانی       |             |
|             |               |            | series | سری         |             |
|             | polynomial    |            |        |             | چند جمله ای |
|             |               | ring       |        |             | حلقه        |
| T-nilpotent |               |            |        |             | T-پوچتوان   |
| Unique      |               |            |        |             | یکتا        |
|             | factorization |            |        |             | تجزیه       |
|             |               | domain     |        |             | دامنه       |

## References

- [1] S. Annin (2000) “Associated primes over skew polynomial rings” **Communications in Algebra**, 30, 5, 2511-2528.
- [2] S. Annin (2004) “Associated primes over Ore extension rings” **J. Algebra Appl.**, 3, 2, 193-205.
- [3] Annin S., (2002), PhD. thesis, “Associated and Attached primes over noncommutative rings”, Math. Depart., University of California at Berkeley.
- [4] M. Atiyah and I. G. Macdonald (1969), “**Introduction to Commutative Algebra**”, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- [5] N. Bourbaki (1966), “**Commutative Algebra**”, Hermann, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- [6] J. Brewer and W. Heinzer (1974) “Associated primes of principal ideals” **Duke Math. Journal**, 41, 1-7.
- [7] C. Faith (2000) “Associated primes in commutative polynomial rings” **Communications in Algebra**, 28, 8, 3983-3986.
- [8] K. Goodearl and E. S. Letzter (1994) “Prime ideals in skew and q-skew polynomial rings” **Mem. Amer. Math. Soc.**, 109, 521, vi + 106pp.
- [9] K. Goodearl and R. Warfield (1989), “**An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings**”, London Math. Soc. student texts, Cambridge University Press, Cambridge, New York.
- [10] T. W. Hungerford (1989), “**Algebra**”, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York.
- [11] R. Irving (1979) “Prime radicals of Ore extensions over commutative rings” **Journal of Algebra**, 56, 2, 315-342.
- [12] T. Y. Lam (1991), “**A First Course in Noncommutative Rings**”, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [13] T. Y. Lam (1998), “**Lectures on Modules and Rings**”, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

- [14] T. Y. Lam “**An Introduction to Division Rings**”, Graduate Texts in Math. (in preparation).
- [15] T. Y. Lam and A. Leroy (1992) “Homomorphisms between Ore extensions” **Contemporary Mathematics**, 124, 83-110.
- [16] T. Y. Lam, A. Leroy, and J. Matczuk (1997) “Primeness, semiprimeness, and prime radical of Ore extensions” **Communications in Algebra**, 25, 8, 2459-2506.
- [17] J. Matczuk (1995) “Goldie rank of Ore extensions” **Communications in Algebra**, 23, 4, 1455-1471.
- [18] R. C. Shock (1972) “Polynomial rings over finite dimensional rings” **Pacific Journal of Math**, 42, 251-257.

## Abstract

C. Faith by using results of R. C. Shock, proved that the associated primes of the polynomial ring  $R[x]$  (viewed as a module over itself) have the form  $P = P_\circ[x]$ , where  $P_\circ = P \cap R \in \text{Ass}(R)$  (the set of associated primes of  $R$  is denoted by  $\text{Ass}(R)$ ), when  $R$  is a commutative ring. This result was originally proved in 1974 by Brewer and Heinzer using localization theory.

Our work in this thesis more closely parallels that of Faith. We will show that the result above still holds in the module  $M[x]_{R[x;\sigma]}$ , with possibly noncommutative base ring  $R$ , provided a  $\sigma$ -compatibility assumption on  $M_R$  is fulfilled. Moreover, if we assume that  $\sigma \in \text{Aut}(R)$ , we can make the  $M[x, x^{-1}]$  into a right module over  $R[x; \sigma]$  and  $R[x, x^{-1}; \sigma]$ , and the main result still holds, provided the  $M_R$  is  $\sigma$ -compatible. We also show that the result does not hold to the case of modules  $M[[x]]_{R[[x; \sigma]]}$  and  $M((x))_{R((x; \sigma))}$  in general (for  $\sigma$ -compatible  $M_R$ ), unless  $R$  is a left perfect ring. Finally, we will show that the result can be extended to the module  $M[x]$  (viewed as a right module over Ore extension ring  $R[x; \sigma, \delta]$ ), provided the  $M_R$  is  $(\sigma, \delta)$ -compatible.

**Keywords:** Prime module, Associated prime,  $(\sigma, \delta)$ -compatible module, Left perfect ring, Skew polynomial ring, Skew Laurent polynomial ring, Skew formal power series ring.



**Shahrood  
University of Technology**

**Faculty Math**

**Associated Primes Over Skew Polynomial Rings**

**Maryam Arabi**

**Supervisor:**

**Dr. Ebrahim Hashemi**

**September 2010**