

صلى الله عليه وسلم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

کدگذاری کانال‌های نامتقارن با استفاده از نقاط ثابت شبکه‌های بولی

نگارنده: افسانه عثمانی

استادان راهنما

دکتر نادر جعفری راد
دکتر عبدالله آل هوز

شهریور ماه ۱۳۹۶

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



دانشگاه علمی کاربردی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (3) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای افسانه عثمانی با شماره دانشجویی 9412114 رشته ریاضی کاربردی گرایش گراف و ترکیبیات تحت عنوان کدگذاری کانالهای نامتقارن با استفاده از نقاط ثابت شبکه‌های بولی که در تاریخ 1396/6/21 با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه: <u>خیلی خوب</u>)
<input type="checkbox"/> عملی	<input checked="" type="checkbox"/> نظری

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	دانشیار	دکتر نادر جعفری‌راد	1- استاد راهنمای اول
	استادیار	دکتر عبدالله آل‌هوز	2- استاد راهنمای دوم
-	-	-	3- استاد مشاور
	استادیار	دکتر مهرداد غزنوی	4- نماینده تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر میثم علیشاهی	5- استاد ممتحن اول
	استادیار	دکتر صادق رحیمی شهرباف	6- استاد ممتحن دوم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع

مجدد نباید زودتر از 4 ماه برگزار شود).

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم...
آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...
مواشیان سپید شد تا ما رو سفید شویم...
و عاشقانه سوختند تا کرم ما نخش و جود ما و رو سنگر را همان باشند.

سپاس‌گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.
پروردگارا:

نه میتوانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دستهای پینه بسته شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم. از پدر و مادر عزیزم، که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یابوری بی چشم داشت برای من بوده‌اند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم، باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

جناب آقای دکتر نادر جعفری‌راد و جناب آقای دکتر عبدالله آل‌هوز، اساتید راهنما: شما روشنایی بخش تاریکی جان هستید و ظلمت اندیشه را نور می‌بخشید. چگونه سپاس گویم مهربانی و لطف شما را که سرشار از عشق و یقین است. چگونه سپاس گویم تأثیر علم آموزی شما را که چراغ روشن هدایت را بر کلبه‌ی محقر وجودم فروزان ساخته است. آری در مقابل این همه عظمت و شکوه شما نه توان سپاس است و نه کلام وصف.

همچنین از اساتید گرامی آقای دکتر علیشاهی و آقای دکتر رحیمی که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را متقبل شده‌اند، کمال تشکر و سپاس‌گزاری را دارم.

افسانه عثمانی

شهریور ماه ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب افسانه عثمانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **کدگذاری کانال های نامتقارن با استفاده از نقاط ثابت شبکه های بولی**، تحت راهنمایی دکتر **نادر جعفری راد** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

افسانه عثمانی

شهریور ماه ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

فرض کنیم A یک الفبای متناهی باشد. در این پایان نامه قصد داریم تعداد نقاط ثابت توابع $f : A^n \rightarrow A^n$ که روی گراف جهت دار علامت دار D تعریف می شوند را بررسی نماییم. با استفاده از تکنیک های کدگذاری شبکه، کران هایی پایین برای تعداد نقاط ثابت که فقط وابسته به D می باشند را به دست می آوریم. همچنین روابطی بین نقاط ثابت شبکه f و مسائلی مطرح در نظریه کدگذاری پیدا می کنیم. کدهایی برای کانال های نامتقارن طراحی کرده و با استفاده از روابط به دست آمده، کران هایی بالا و پایین روی تعداد نقاط ثابت به دست می آوریم که نتایج قبلی موجود در این زمینه را بهبود می بخشد. با فرض اینکه گراف زمینه یک گراف جهت دار و علامت دار باشد و الفبای زمینه، الفبای دلخواهی باشد، روابط جالبی که برای تعداد نقاط ثابت توابع موجود است را بررسی کرده و در مورد آن ها بحث می کنیم. در پایان نشان می دهیم لزوماً افزایش دوره های مثبت مجزا در یک گراف جهت دار علامت دار منجر به افزایش تعداد نقاط ثابت توابع نمی شود.

کلمات کلیدی: شبکه های بولی، نقاط ثابت، گراف های جهت دار علامت دار، عدد حدسی، کدهای تصحیح کننده خطا.

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر
ف	فهرست جداول
۱	۱ تعاریف و مباحث مقدماتی
۱	۱.۱ مفاهیم مقدماتی در نظریه گراف و نظریه شبکه
۸	۲.۱ مفاهیم مقدماتی در نظریه کدگذاری
۱۳	۲ گراف‌های حدسی برای گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار
۱۳	۱.۲ گراف‌های علامت‌دار و اعداد حدسی آن‌ها
۱۵	۲.۲ گراف‌های حدسی
۱۹	۳.۲ کران‌هایی برای تعداد نقاط ثابت شبکه‌های بولی بر پایه گراف‌های حدسی
۲۵	۳ کدهای تصحیح‌کننده خطا و شبکه‌های علامت‌دار
۲۵	۱.۳ کدهای تصحیح‌کننده خطا
۲۸	۲.۳ کران‌هایی برای عدد حدسی گراف‌های جهت‌دار
۳۱	۴ نقاط ثابت توابع تعریف شده روی خوشه‌های علامت‌دار
۳۱	۱.۴ کران‌های دقیق‌تر روی توابع مثبت و منفی
۳۶	۲.۴ همگرایی برای توابع مثبت و منفی
۳۹	۵ مقایسه کران‌های به‌دست آمده در بخش‌های قبلی
۴۵	آ نماد
۴۷	مراجع
۵۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

فهرست تصاویر

۵	۱.۱.۱	گراف تشریح شده در مثال	۱.۱
۱۲	۷.۲.۱	شکل مربوط به تعریف	۲.۱
			۱.۵ - کران پایین در رابطه (۲.۵) و -- کران پایین در رابطه (۱.۵) است. کران‌های پایین مجانبی روی عدد حدسی به عنوان تابعی از کمترین درجه ورودی می‌باشند (با مقیاس ۱٪).	
۴۳		۲.۵ - کران بالا در رابطه (۵.۵) و -- کران پایین در رابطه (۶.۵) است. بین دو منحنی، بهبود نسبی روی کران بالای مجانبی \bar{k} را نشان می‌دهد (با مقیاس ۱٪).	
۴۴			

فهرست جداول

آ.۱ نمایه ۴۶

فصل ۱

تعاریف و مباحث مقدماتی

در این فصل مفاهیم مقدماتی مورد نظر پایان نامه را بیان کرده و تقریباً تمامی تعاریفی که پیش نیاز فصل‌های بعد می‌باشد را ذکر می‌نماییم. تعاریف مربوط به نظریه گراف برگرفته از مرجع [۱۱] و تعاریف مربوط به نظریه کدگذاری برگرفته از مرجع [۵۲] می‌باشد.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی در نظریه گراف و نظریه شبکه

تعریف ۱.۱.۱. یک گراف^۱ عبارت است از سه‌تایی $G = (V(G), E(G), I_G)$ ، که در آن $V(G)$ مجموعه‌ای ناتهی از عناصر به نام رئوس، $E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها و I_G یک نگاشت «وقوع» است که به هر عضو $E(G)$ یک زوج نامرتب (یکسان یا متمایز) از $V(G)$ نظیر می‌کند. عناصر $V(G)$ را رأس‌ها (یا گره‌ها یا نقاط) G و عناصر $E(G)$ را یال‌ها (یا خطوط) G می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. تعداد رئوس گراف G را مرتبه^۲ و تعداد یال‌های گراف G را اندازه^۳ می‌گویند.

تعریف ۳.۱.۱. تعداد یال‌های مرتبط با رأس v در گراف G را درجه^۴ رأس v گوئیم و اگر یال مذکور طوقه باشد در محاسبه، درجه رأس دو بار به شمار می‌آید. درجه رأس v را با $\deg(v)$

^۱ Graph

^۲ Order

^۳ Size

^۴ Degree

نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. یک دور^۵ گشت بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری نداریم. یک دور n رأسی را با نماد C_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. طول کوتاهترین دور در گراف G را **کمر** گراف گویند.

تعریف ۶.۱.۱. یک گشت^۶ در گراف G دنباله‌ی متناوب $W : v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_r, v_r$ از رأس‌ها و یال‌ها است که شروع و پایان آن با رأس‌ها است و رأس‌های v_i و v_{i-1} پایان‌های e_i هستند. v_0 ابتدا و v_r انتهای W است. گوییم گشت W را v_0 به v_r وصل می‌کند. این گشت را نیز $v_0 - v_r$ گوییم. حال گشت را **مسیر**^۷ نامیم هرگاه همه‌ی رأس‌ها متمایز باشند. اگر یال‌ها در گشت W متمایز باشند، W را یک **گذر**^۸ می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. دو رأس u و v از G را **همبند**^۹ گوییم هرگاه یک $u-v$ مسیر در G وجود داشته باشد. رابطه‌ی متصل بودن یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $V(G)$ است. فرض کنید V_1, V_2, \dots, V_w رده‌های هم‌ارزی باشند. زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_w]$ را مولفه‌های G گوییم. اگر $w = 1$ ، گراف را همبند نامیم. در غیر اینصورت، گراف را ناهمبند با w مولفه گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. دو رأس u و v را **مجاور**^{۱۰} گوییم هرگاه بین آن‌ها یالی موجود باشد.

تعریف ۹.۱.۱. **طوقه**^{۱۱} در یک گراف، یالی است که دو رأس انتهایی‌اش بر هم منطبق باشند. یک کمان به شکل (u, u) یک طوقه روی رأس u است.

تعریف ۱۰.۱.۱. گراف H را **زیرگراف**^{۱۲} G نامیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ و همچنین I_H برابر تحدید I_G به $E(H)$ باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. زیرگراف H از G را یک **زیرگراف القایی**^{۱۳} از G نامیم هرگاه هر یال G که پایان‌هایش در $V(H)$ باشد، یک یال در H نیز باشد. زیرگراف القایی از G با مجموعه رأس $U \subseteq V(G)$ را زیرگراف القا شده از G توسط U نامیم و با نماد $G[U]$ نمایش می‌دهیم.

^۵Cycle

^۶Walk

^۷Path

^۸Trail

^۹Connected

^{۱۰}Adjacent

^{۱۱}Loop

^{۱۲}Subgraph

^{۱۳}Induced subgraph

تعریف ۱۲.۱.۱. گرافی که هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد را **گراف ساده**^{۱۴} می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. اگر در گراف ساده G هر زوج از رأس‌های متمایز G ، در گراف G مجاور باشند، آن‌گاه G را **گراف کامل**^{۱۵} گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱. گراف G با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ را در نظر بگیرید. یک زیرگراف کامل از گراف G را یک **خوشه**^{۱۶} از گراف G می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک گراف **جهت‌دار**^{۱۷} D ، سه‌تایی $D = (V(D), E(D), I_D)$ است، که در آن $V(D)$ مجموعه‌ای ناتهی که مجموعه‌ی رأس‌های گراف D و همچنین $E(D)$ مجموعه‌ی کمان‌های D نامیده می‌شود و I_D یک نگاشت وقوع که به هر کمان گراف D یک زوج مرتب از رأس‌های D نظیر می‌کند. اگر a یک کمان از D باشد و $I_D(a) = (u, v)$ آن‌گاه گوییم u یال ابتدا و v یال انتهای a است و کمان a رأس v را به رأس u وصل می‌کند. u و v را رئوس پایانی a می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر n رأس گراف را با برچسب‌هایی مثل v_1, v_2, \dots, v_n از یک‌دیگر متمایز کنیم، گراف را **برچسب‌دار**^{۱۸} گوییم.

تعریف ۱۷.۱.۱. گراف جهت‌دار **علامت‌دار**^{۱۹}، گرافی است مانند D که در آن یال‌ها جهت‌دهی شده‌اند (کمان) و همچنین هر کمان دارای علامت (برچسب) می‌باشد، در واقع یک گراف جهت‌دار علامت‌دار را می‌توان به صورت سه‌تایی $D = (V, E, \lambda)$ نمایش داد، جایی که مجموعه رأسی آن $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ، E مجموعه کمان‌های آن و $\lambda : E \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ نگاشتی است که به هر کمان از D ، علامت منفی، صفر یا مثبت را نظیر می‌کند. علامت هر کمان به صورت $\alpha \in \{-, 0, +\}$ می‌توان در نظر گرفت. اگر $0 \notin \lambda(E)$ ، گراف جهت‌دار علامت‌دار ناوابسته^{۲۰} است. اگر $\lambda \equiv 0$ ، گراف فرض شده بدون علامت است که با D^0 نشان داده می‌شود، اگر $\lambda \equiv +1$ ، گراف مثبت است که با D^+ نشان داده می‌شود و اگر $\lambda \equiv -1$ ، گراف منفی است که با D^- نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم P یک مجموعه متناهی و مجهز به رابطه‌ی ترتیبی جزئی \leq باشد. در این صورت یک **زنجیر**^{۲۱} در P یک مجموعه‌ای از عناصر دو بدو قابل مقایسه (نسبت به \leq) در P می‌باشد (زیرمجموعه‌ای به صورت جزئی مرتب).

^{۱۴} Simple graph

^{۱۵} Complete graph

^{۱۶} Clique

^{۱۷} Digraph

^{۱۸} Labeled

^{۱۹} Signed

^{۲۰} Unate

^{۲۱} Chain

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم P یک مجموعه متناهی و مجهز به رابطه‌ی ترتیبی جزئی \leq باشد. در این صورت یک **پادزنجیر**^{۲۲} در P یک مجموعه‌ای از عناصر دو بدو غیر قابل مقایسه (نسبت به \leq) در P می‌باشد.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیم $A = \{0, 1\}$ و

$$f : A^n \rightarrow A^n$$

$$f = (f_0, \dots, f_{n-1})$$

یک تابع باشد. در این صورت **گراف برهم‌کنش**^{۲۳} f که با نماد $G(f)$ نمایش داده می‌شود گرافی جهت‌دار است که مجموعه رأسی آن به صورت $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$ بوده و از رأس j به رأس i کمان موجود است هرگاه $f_i(x)$ تابعی وابسته به x_j باشد.

در واقع علامت کمان (j, i) مشخص می‌کند که چه وقت تابع $f_i(x)$ تابعی صعودی از x_j (علامت مثبت)، تابعی نزولی از x_j (علامت منفی) و تابع غیریکنوا از x_j (علامت صفر) می‌باشد. از نقطه نظر بیولوژیکی، گراف‌های برهم‌کنش به خوبی شناخته شده‌اند در حالی که توابع به خوبی شناخته شده نیستند. پیش‌بینی و بررسی اینکه آیا پایداری شبکه مطابق با گراف برهم‌کنش آن می‌باشد یا خیر، مسئله اصلی تحقیق روی شبکه‌های نه لزوماً بولی می‌باشد. کمان‌های گراف برهم‌کنش می‌توانند علامت داشته باشند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۲۱.۱.۱. علامت **گراف برهم‌کنش** $\lambda(j, i)$ برای هر کمان (j, i) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda(j, i) = \begin{cases} 1; & f_i(x) \leq f_i(x_0, \dots, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}), \quad \forall x \in [s]^n, \quad x_j < s-1, \\ -1; & f_i(x) \geq f_i(x_0, \dots, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}), \quad \forall x \in [s]^n, \quad x_j < s-1, \\ 0; & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

ساختار شبکه $f : A^n \rightarrow A^n$ را می‌توان از طریق گراف‌های برهم‌کنش $G(f)$ وابسته به شبکه f مطالعه کرد که این گراف مشخص می‌کند که تابع‌های موضعی جدید f_i وابسته به کدام متغیرها می‌باشد.

مثال ۱.۱.۱. فرض کنیم شبکه $f : A^4 \rightarrow A^4$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0 x_2, x_0 - x_1^2, x_3^2 x_1^2, x_1 - x_3)$$

^{۲۲} Chain

^{۲۳} Interaction graph

می‌توان فرض کرد $f = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ جایی که داریم:

$$f_0 : A^4 \rightarrow A$$

$$f_0(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 x_2$$

$$f_1 : A^4 \rightarrow A$$

$$f_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 - x_1^2$$

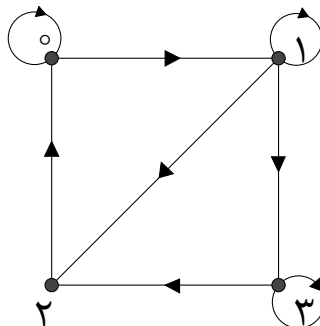
$$f_2 : A^4 \rightarrow A$$

$$f_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_2^2 x_1^2$$

$$f_3 : A^4 \rightarrow A$$

$$f_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_3$$

که در شکل ۱.۱ گراف برهم‌کنش $G(f)$ را برای شبکه فوق رسم می‌کنیم.



شکل ۱.۱: گراف تشریح شده در مثال ۱.۱.۱

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید D یک گراف جهت‌دار علامت‌دار روی $[n]$ باشد. یک شبکه f روی D به صورت $f : [s]^n \rightarrow [s]^n$ می‌باشد به گونه‌ای که $G(f) \subseteq D$ است. به بیان دقیق‌تر f یک شبکه روی D می‌باشد هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- f_i وابسته به x_j می‌باشد فقط اگر (j, i) یک کمان در گراف D باشد.
- اگر $\lambda(j, i) = 1$ ، آن‌گاه f_i یک تابع غیر نزولی از x_j است.
- اگر $\lambda(j, i) = -1$ ، آن‌گاه f_i یک تابع غیر صعودی از x_j است.

مجموعه تمام شبکه‌های روی D را با نماد $F(D, S)$ نشان می‌دهیم. در حالتی که $\lambda(j, i) = 0$ می‌باشد هیچ محدودیتی برای اینکه f_i وابسته به x_j می‌باشد یا خیر، وجود ندارد.

تعریف ۲۳.۱.۱. شبکه بولی^{۲۵} برای نمایش عامل دو طرفه (کنش و واکنش) استفاده می‌شود که به صورت زیر است:

یک شبکه دارای حالت $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ می‌باشد که با یک متغیر بولی x_i روی i نمایش داده می‌شود که به صورت تابع جبری

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$$

$$f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$$

بیان می‌شود، جایی که

$$f_i : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

جایگاه موضعی به روز شده x_i را نشان می‌دهد.

از شبکه‌های بولی برای مدل کردن شبکه‌های ژن، شبکه‌های عصبی و عکس‌العمل‌های اجتماعی و ... استفاده می‌شود. تعمیم‌های طبیعی شبکه‌های بولی، جایی که هر متغیر x_i مقادیر خود را از یک الفبای متناهی دلخواه (نه لزوماً بولی) می‌گیرد، اخیراً مورد مطالعه قرار گرفته‌اند زیرا آن‌ها می‌توانند نمایش بهتری از پدیده‌هایی که در مراجع [۳۰] و [۵۰] مدل می‌کنیم را نتیجه دهند.

تعریف ۲۴.۱.۱. به یک دور با تعداد زوج از کمان‌های منفی، دور مثبت^{۲۶} در گراف برهم‌کنش می‌گویند و با نماد c^+ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و $f : A^n \rightarrow A^n$ یک شبکه باشد. در این صورت گوییم نقطه‌ی $x \in A^n$ یک نقطه ثابت^{۲۷} شبکه‌ی f می‌باشد هرگاه $f(x) = x$. مجموعه‌ی تمام نقاط ثابت شبکه‌ی f را با نماد $Fix(f)$ نمایش داده و داریم:

$$Fix(f) = \{x \in A^n \mid f(x) = x\}.$$

در میان خواص دینامیکی متنوع و مختلف شبکه‌ها، مجموعه‌ی نقاط ثابت یک شبکه از جایگاه و اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، به این دلیل که مجموعه‌ی نقاط ثابت شبکه حالت‌های پایداری شبکه را نمایش می‌دهند. پیدا کردن نقاط ثابت و ماکسیمم کردن آن‌ها زمینه کاری است که توجه زیادی از ریاضی‌دانان را به خود جلب کرده است. مقاله‌های زیادی در زمینه‌ی

^{۲۵} Boolean network

^{۲۶} Positive cycle

^{۲۷} Fixed point

اینکه شبکه‌های بولی چه موقع نقاط ثابت زیادی دارند، اختصاص داده شده‌است. تاکنون برای ماکسیمم کردن تعداد نقاط ثابت با یک گراف برهم‌کنش علامت‌دار بین بهترین کران‌های بالا و پایین شناخته شده آن شکاف گسترده‌ای باقی مانده است. در این راستا مطالعات گسترده‌ای توسط محققان مختلف با دیدگاه‌های متنوع صورت گرفته است که در این میان ابتدایی‌ترین نتیجه توسط توماس [۴۸] به صورت زیر می‌باشد:

قضیه ۱.۱.۱. شبکه‌هایی که گراف برهم‌کنش آن‌ها دور مثبت ندارد، حداکثر یک نقطه ثابت دارد.

قضیه فوق به عنوان کران بالایی برای تعداد نقاط ثابت شبکه‌های بولی تعمیم داده شده است.

تعریف ۲۶.۱.۱. علامت یک دور از گراف جهت‌دار D ، به صورت حاصل ضرب علامت کمانهای آن تعریف می‌شود. یک دور نامنفی (نامثبت) 28 یک دور از علامت بزرگتر یا مساوی صفر (کوچکتر یا مساوی صفر) می‌باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. مجموعه رئوسی از گراف با اندازه مینیمم که با برداشتن آن‌ها از گراف، گراف حاصل فاقد دور می‌شود را **مجموعه راسی بازخورد** 29 می‌نامیم که با نماد k^+ نشان می‌دهیم. **مجموعه راسی با بازخورد مثبت**، یک مجموعه‌ای از رئوسی با اندازه مینیمم می‌باشد به گونه‌ای که حذف آن‌ها گراف را فاقد دور مثبت می‌کند و همچنین **مجموعه راسی با بازخورد منفی**، مجموعه‌ای از رئوسی با اندازه مینیمم می‌باشد به گونه‌ای که حذف آن‌ها گراف را فاقد دور منفی می‌کند.

قضیه زیر را نیز می‌توان به عنوان کران بالایی برای شبکه بولی در نظر گرفت.

قضیه ۲۰.۱.۱. یک شبکه بولی حداکثر $^{2k+}$ نقاط ثابت دارد، جایی که k^+ اندازه مینیمم مجموعه راسی بازخورد از گراف برهم‌کنش آن‌ها می‌باشد.

هر دور مثبت یک شبکه بولی، دو نقطه ثابت را می‌دهد. شبکه با تعداد زیادی نقاط ثابت برای گراف جهت‌دار علامت‌دار به وسیله‌ی دسته بندی دورهای مثبت به دست می‌آید. اگر c^+ دورهای مثبت مجزا D باشند، آن‌گاه شبکه $^{2c^+}$ نقطه ثابت دارد.

تعریف ۲۸.۱.۱. **عدد حدسی** 30 s - آرایه‌ای از گراف جهت‌دار علامت‌دار D که با نماد $g(D, s)$ نمایش می‌دهیم، لگاریتم ماکسیمم تعداد نقاط ثابت در شبکه روی گراف D تعریف می‌شود. یعنی داریم:

$$g(D, s) = \max_{f \in F(D, s)} \log_s |Fix(f)|,$$

جایی که $Fix(f)$ مجموعه نقاط ثابت f می‌باشد.

²⁸ Nonnegative(Nonpositive) cycle

²⁹ Feedback vertex set

³⁰ Guessing number

یکی از مهم‌ترین کران‌های شناخته شده روی عدد حدسی به شکل زیر است:

$$c^+ \leq g(D, s) \leq k^+, \quad (1.1)$$

جایی که k^+ اندازه مینیمم مجموعه رأسی با بازخورد نامنفی و c^+ تعداد ماکسیمم از دورهای نامنفی مجزا در گراف D می‌باشد (می‌دانیم که همواره $c^+ \leq n/\gamma^+$). برای کران پایین به مرجع [۳۹] مراجعه کنید.

تعریف ۲۹.۱.۱. مجموعه‌ای از رأس‌های گراف که هیچ دو عضوی از آن مجاور نباشند را **مجموعه مستقل رأسی**^{۳۱} می‌نامند و اندازه بزرگترین مجموعه مستقل رأسی را **عدد استقلال**^{۳۲} گراف G نامیده و آن را با نماد $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ مفاهیم مقدماتی در نظریه کدگذاری

هر چند به نظر می‌رسد نظریه‌ی کدگذاری در کشور ایران موضوعی جدید است اما شروع کلاسیک آن به سال ۱۹۴۸ و انتشار مقاله کلود شانون^{۳۳} برمی‌گردد. در ابتدا این نظریه در حوزه نظامی و امنیتی گسترش یافت اما بعد از توسعه فناوری اینترنت و مخابرات در دیگر حوزه‌ها نیز وارد شد. بحث کدگذاری اغلب در مورد چگونگی تصحیح خطای کدی است که فرستنده به گیرنده ارسال کرده‌است. در حال حاضر مقالات و کتب فراوانی در سطح بالا در جامعه علمی دنیا تولید می‌شود که اغلب مبتنی بر ریاضیات محض به‌ویژه جبر مانند هندسه جبری، نظریه حلقه و مدول و گروه‌های متناهی و ... است.

برای نخستین بار کلود شانون در سال ۱۹۴۸ مقاله نظریه ریاضی ارتباطات را منتشر کرد که در آن نشان داد برای یک کانال ارتباطی پارازیت‌دار، عددی به عنوان ظرفیت کانال وجود دارد که در صورت به‌کارگیری روش‌های مناسب کدگذاری و کدگشایی، ارتباط معتبر با سرعت کمتر از ظرفیت کانال قابل دستیابی است. این مقاله تولدی شد برای نظریه کدگذاری که حوزه‌ای از مطالعات درباره انتقال داده‌ها از طریق کانال‌های پارازیت‌دار و کشف پیام‌های خطا دار است. نظریه کدگذاری در حدود بیش از نیم قرن، رشدی شگفت‌انگیز پیدا کرده‌است. این نظریه در بیشتر حوزه‌ها، از سیستم‌های ارتباطی و پخش کننده‌های لوح فشرده گرفته تا فناوری ذخیره سازی بسیار کاربرد داشته است. مسائل نظریه کدگذاری اغلب از کاربردهای مهندسی نشئت می‌گیرند. جالب است به نقش تعیین کننده‌ای که ریاضیات در توسعه موضوع داشته است، توجه شود. اهمیت جبر، ترکیبیات و هندسه در نظریه کدگذاری، حقیقتی تایید شده توسط نتایج متعدد عمیق ریاضی است که با روش‌هایی ظریف برای پیشرفت نظریه کدگذاری مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

^{۳۱}Independent vertex set

^{۳۲}Independence number

^{۳۳}Claude Shannon

بنابراین نظریه کدگذاری نه فقط مورد علاقه مهندسان و دانشمندان علوم کامپیوتر، بلکه مورد توجه ریاضی دانان نیز است.

تعریف ۱.۲.۱. واژه **کدگذاری**^{۳۴} واژه‌ای استفاده شده با معانی مختلف می‌باشد که در سه مقوله متفاوت به کار رفته است

۱. فشرده‌سازی داده‌ها: در ارتباط با کدگذاری منبع اطلاعاتی می‌باشد. به گونه‌ای تا حد امکان با حذف داده‌های زاید، عمل کم کردن و فشرده‌سازی داده اولیه انجام می‌شود. این مقوله در بخش نظریه اطلاعات می‌باشد.

۲. کدهای تصحیح کننده خطا: در ارتباط با افزایش قابلیت اطمینان در راستای تشخیص و تصحیح خطاهای احتمالی رخ داده در فرآیند عبور پیام از یک کانال پارازیت دار می‌باشد. برخلاف قسمت قبل، این عمل با اضافه کردن بیت‌هایی به پیام اصلی اتفاق می‌افتد. این اضافه کردن در قسمت کانال رخ می‌دهد.

۳. نظریه رمزنگاری: در ارتباط با امنیت داده‌ها می‌باشد و بحث خصوصی سازی داده‌ها به گونه‌ای که به غیر از هدف اصلی پیام، برای تشخیص دیگری، امکان رمز گشایی موجود نباشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ یک مجموعه q عضوی باشد. در این صورت A را **الفبای کد**^{۳۵} و هر عضو آن را **نماد کد**^{۳۶} می‌نامند.

۱. یک واژه q تایی به طول n روی A ، رشته‌ای به شکل $W = w_1 w_2 \dots w_n$ است که در آن، به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، $w_i \in A$ می‌باشد. به طور معادل، می‌توان W را به صورت بردار (w_1, w_2, \dots, w_n) نیز در نظر گرفت.

۲. به مجموعه ناتهی C ، متشکل از واژه‌های q تایی به طول n روی A ، یک **کد بلوکی**^{۳۷} q تایی به طول n روی A می‌گویند. در نتیجه $C \subseteq A^n$ خواهد بود. گاهی اوقات، کد بلوکی q تایی C را کد q تایی یا به طور خلاصه‌تر، کد می‌گویند.

۳. A^n را **فضای کد**^{۳۸} و اعضای کد C را **کدواژه**^{۳۹} می‌نامند.

۴. تعداد کد واژه‌ها در C که با $|C|$ نمایش داده می‌شود، **اندازه**^{۴۰} کد C نامیده می‌شود.

^{۳۴} Coding

^{۳۵} Code alphabet

^{۳۶} Code symbols

^{۳۷} Block code

^{۳۸} Space code

^{۳۹} Codewords

^{۴۰} Cardinal

۵. کد به طول n و اندازه M را یک (n, m) - کد می نامند. می دانیم که الفبای کد A مجموعه ای متناهی است. به منظور استفاده از روش های ریاضی، قصد داریم A را به چند ساختار جبری مجهز کنیم. همان طور که می دانیم، یک میدان اعداد حقیقی \mathbb{R} یا میدان اعداد مختلط \mathbb{C} ، دو عمل به نام های جمع و ضرب دارد. دو عمل روی A را طوری تعریف می کنیم که A یک میدان شود. در این صورت تعداد اعضای A متناهی است، در حالی که \mathbb{R} و \mathbb{C} میدان هایی با تعداد اعضای نامتناهی هستند. مطالعه نظریه میدان های متناهی به قرن های ۱۷ و ۱۸ و نقش مؤثر ریاضی دانان مشهوری مانند پیرفرما^{۴۱} و لئونارد اویلر^{۴۲} (۱۷۷۵-۱۸۵۵) در نظریه ساختاری میدان های متناهی خاص برمی گردد. نظریه کلی میدان های متناهی با کارل فردریک گاوس^{۴۳} (۱۷۷۵-۱۸۵۵) و اوریست گالو^{۴۴} شروع شد، اما به دلیل کاربرد زیاد آن در ریاضیات، علوم کامپیوتر و نظریه ارتباطات، بالاخره در دهه های اخیر مورد توجه ریاضی دانان کاربردی و مهندسان قرار گرفته است. امروز نظریه میدان های متناهی بسیار غنی شده است و مطالعات گسترده ای در جهات مختلف بر روی آن ها صورت گرفته است.

تعریف ۳.۲.۱. میدان^{۴۵} F ، مجموعه ای ناتهی از عناصر، با دو عمل $(+)$ (که جمع نامیده می شود) و (\cdot) (که ضرب نامیده می شود) است که در اصول زیر صادق اند:
برای هر $a, b, c \in F$:

۱. F تحت عمل $+$ و \cdot بسته است؛ یعنی $a + b$ و $a \cdot b$ در F هستند؛
۲. قوانین جابه جایی: $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$ ؛
۳. قوانین شرکت پذیری: $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ؛
۴. قوانین توزیع پذیری (پخشی): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ؛
علاوه بر این، دو عضو همانی مجزای \circ و 1 (به ترتیب، همانی های جمع و ضرب نامیده می شوند) در F موجود باشند که در شرایط زیر صادق اند:
۵. برای هر $a \in F$ داریم $a + \circ = a$ ؛
۶. برای هر $a \in F$ داریم $a \cdot 1 = a$ و $a \cdot \circ = \circ$ ؛
۷. برای هر $a \in F$ عضو وارون جمعی $(-a)$ در F موجود است که $a + (-a) = \circ$ ؛
۸. برای هر $a \neq \circ$ در F ، عضو وارون ضربی a^{-1} در F موجود است که $a \cdot a^{-1} = 1$.

^{۴۱} Pierre Ferma (1601-1665)

^{۴۲} Leonhard Euler

^{۴۳} Carl Friedrich Gauss

^{۴۴} Evariste Galois

^{۴۵} Field

معمولاً میدان متناهی \mathbb{F}_q را به عنوان الفبای کد در نظر می‌گیرند.

تعریف ۴۶. ۴.۲.۱. یک کد خطی^{۴۶} از طول n روی میدان متناهی F_q ، زیر فضایی از فضای برداری F_q^n است. از آنجا که کدهای خطی، فضاهای برداری هستند، ساختار جبری آنها موجب می‌شود توصیف و استفاده آنها نسبت به کدهای غیرخطی راحت‌تر باشد.

تعریف ۴۷. ۵.۲.۱. کدگذاری شبکه^{۴۷} تکنیکی برای انتقال دادن اطلاعات از طریق شبکه‌هاست که به طور قابل توجهی کیفیت انتقال داده را بهبود می‌بخشد. در واقع در هر رأس میانی v ، پیام‌های دریافت شده $x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_k}$ ترکیب شده و پیام ترکیب شده $f_v(x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_k})$ به سمت مقصد خود فرستاده می‌شود.

تعریف ۴۸. ۶.۲.۱. فاصله همینگ^{۴۸} بین دو کدواژه $a = (a_1, \dots, a_n) \in C$ و $b = (b_1, \dots, b_n) \in C$ در یک کد بلوکی، به صورت تعداد جایگاه‌های (بیت‌های) متفاوت a و b تعریف می‌شود. یعنی داریم:

$$d_H(a, b) = |\{i | a_i \neq b_i; \quad 1 \leq i \leq n\}|$$

یا به بیان معادل، اگر فاصله همینگ بیت به بیت را به صورت

$$d_H(a_i, b_i) = \begin{cases} 1; & a_i \neq b_i \\ 0; & a_i = b_i \end{cases}$$

تعریف کنیم، آن‌گاه داریم

$$d_H(a, b) = \sum_{i=1}^n d_H(a_i, b_i).$$

تعریف ۴۹. ۷.۲.۱. کانال - Z (کانال نامتقارن دودویی)^{۴۹} کانال نامتقارن دودویی کانالی است که الفبای کانال، $\{0, 1\}$ و احتمال‌های کانال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p(y = 0 | x = 0) = 1$$

$$p(y = 0 | x = 1) = p$$

$$p(y = 1 | x = 0) = 0$$

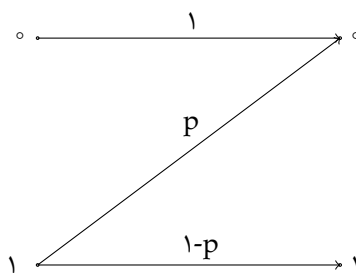
$$p(y = 1 | x = 1) = 1 - p$$

^{۴۶} Liner code

^{۴۷} Network coding

^{۴۸} Hamming distance

^{۴۹} Binary asymmetric channel



شکل ۲.۱: شکل مربوط به تعریف ۷.۲.۱

مفهوم و کاربرد عدد حدسی که در مرجع [۲۲] به طور وسیع مطالعه شده، مستقل از مفهوم گراف حدسی است که در مراجع [۸] و [۳] به عنوان گراف گیج اشاره شده است. این تکنیک به طور کامل تابع جدید موضعی را حذف می‌کند و در عوض مسئله ماکسیمم نقاط ثابت را به یک مسئله کاملاً کدی برمی‌گرداند. براساس این مفهوم، کران‌های بالا و پایین بیشماری روی عدد حدسی از گراف‌های بدون علامت نتیجه شده که در مرجع [۲۲] مشاهده می‌کنید. در این پایان‌نامه قصد داریم با تعمیم و سازگای کردن تکنیک‌های قبلی موجود در نظریه کدگذاری شبکه و همچنین نظریه کدگذاری در مسئله به حداکثر رساندن نقاط ثابت را برای گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار استفاده کنیم. همانطور که گفتیم روابطی بین نقاط ثابت شبکه‌ها که روی گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار تعریف شده‌اند و کدهای تصحیح‌کننده خطاهای نامتقارن وجود دارد که در حد امکان آن‌ها را پیدا می‌کنیم. طبق این روابط کران‌های بالا و پایین قوی را روی تعداد نقاط ثابت با استفاده از کران‌ها روی کدها برای خطاهای نامتقارن در قضیه ۱.۲.۳ و ۲.۲.۳ به دست می‌آوریم. این روابط پربار و سودمند می‌باشند و همچنین تا حدودی مشهود نیستند زیرا اکثریت قریب به اتفاق کدهای تصحیح خطا، خطی هستند و شامل توابع خطی روی میدان‌های متناهی که یکنوا نیستند و نمی‌توانند برای گراف‌های علامت‌دار استفاده شوند. همچنین کران‌های دقیق‌تری برای گراف‌های جهت‌داری که در آن کمان‌ها همگی دارای علامت مثبت می‌باشند، یعنی توابع جدید موضعی که یکنوا صعودی هستند را به دست می‌آوریم (برای نمونه قضیه ۱.۲.۳ را ببینید). این موضوع قابلیت تغییر و همچنین گستردگی عملکرد اعداد حدسی را نشان می‌دهد. نتایج، حاصل، بیانگر رفتارهای متفاوتی است که در حالت گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار رخ می‌دهد. در واقع یک گراف جهت‌دار علامت‌داری را پیدا می‌کنیم که برای عدد حدسی روی هر الفبای متناهی با اندازه $s \geq 3$ بزرگتر از حد عدد حدسی می‌باشد، در حالتی که s به بی‌نهایت میل می‌کند.

فصل ۲

گراف‌های حدسی برای گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار

در این فصل به مرور بعضی مفاهیم روی گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار و همچنین معرفی عددهای حدسی و گراف‌های حدسی می‌پردازیم. برخی ویژگی‌های رأس‌ها و یال‌های گراف حدسی را بررسی کرده و براساس گراف‌های حدسی، کران‌هایی پایین برای عدد حدسی گراف به دست می‌آوریم.

۱.۲ گراف‌های علامت‌دار و اعداد حدسی آن‌ها

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید $D = (V, E, \lambda)$ یک گراف جهت‌دار علامت‌دار باشد. در این صورت تعداد همسایه‌های ورودی^۱ به رأس $i \in V$ ، به گونه‌ای که کمان مربوطه دارای علامت α می‌باشد ($\alpha \in \{-, \circ, +\}$) را با نماد d_i^α نمایش می‌دهیم. همچنین درجه ورودی متوسط^۲، مینیمم^۳ و ماکسیمم^۴ را به ترتیب با نمادهای d ، δ و Δ نمایش می‌دهیم. نمادهای d^α ، δ^α و Δ^α به صورت مشابه تعریف می‌شوند. همچنین فرض می‌کنیم $\delta^\pm := \min_i \{d_i^+ + d_i^-\}$ باشد.

^۱In-neighbors

^۲Average

^۳Minimum

^۴Maximum

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید $D = (V, E, \lambda)$ و $D' = (V', E', \lambda')$ دوگراف جهت‌دار علامت‌دار باشند و فرض کنید $|D| = (V, E)$ و $|D'| = (V', E')$ به ترتیب نسخه‌های بدون علامت باشند. گوییم گراف D زیرگرافی از گراف D' می‌باشد و آن را با نماد $D \subseteq D'$ نمایش می‌دهیم هرگاه اگر $|D|$ زیرگراف از $|D'|$ باشد و همچنین شرط زیر نیز برقرار باشد:

برای هر کمان $e \in E$ ، اگر $\lambda'(e) = -1$ آن‌گاه $\lambda(e) = -1$ و اگر $\lambda'(e) = 1$ آن‌گاه $\lambda(e) = 1$ را داریم. اگر علامت کمان e در گراف D' صفر باشد آن‌گاه هیچ ضرورتی روی علامت e در گراف D نمی‌باشد و می‌تواند هر علامتی را بپذیرد.

تعریف ۳.۱.۲. **کمر نامنفی**^۵ گراف جهت‌دار D ، به صورت مینیمم طول دوره‌های نامنفی گراف D تعریف می‌شود و با نماد γ^+ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۲. فرض کنید $D = (V, E, \lambda)$ یک گراف جهت‌دار علامت‌دار باشد. زیر مجموعه U از مجموعه رئوس V به طوری که زیرگراف القایی $D[V \setminus U]$ شامل هیچ دور نامنفی نمی‌باشد را یک مجموعه رأسی با بازخورد نامنفی نامیم.

• در گراف جهت‌دار علامت‌دار D همسایگی ورودی رأس i در گراف D را با نماد $N(i)$ نمایش می‌دهیم.

• همچنین برای هر رأس i و هر علامت $\alpha \in \{-, \circ, +\}$ ، مجموعه رئوس $j \in N(i)$ به طوری که $\lambda(j, i) = \alpha$ است را با نماد $N^\alpha(i)$ نشان می‌دهیم.

• اگر h یک نگاشت از V به قسمت‌هایی از V (که همان U است) باشد آنگاه $h(U) = \{U_i \in U \mid h(i) \in U\}$.

• گوییم گراف جهت‌دار D ناوابسته است هرگاه $N^\circ(V) = \circ$ و بدون علامت است هرگاه $N^+(V) = N^-(V) = \circ$ باشد.

• برای هر عدد صحیح مثبت a ، مجموعه $\{0, 1, \dots, a-1\}$ را با نماد $[a]$ نمایش می‌دهیم.

• فرض کنید $s \geq 2$ و $n \geq 1$ عددهای صحیح مثبت باشند. برای هر $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in [s]^n$ ، **تحدید**^۶ x به یک مجموعه از اندیس‌های $I \subseteq [n]$ را با نماد x_I نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید $f : [s]^n \rightarrow [s]^n$ جایی که $f = (f_0, \dots, f_{n-1})$. در این صورت گوییم f_i به طور اساسی وابسته به متغیر x_j می‌باشد هرگاه $a, b \in A^n$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $k \neq j$ داریم $a_k = b_k$ و همچنین $a_j \neq b_j$ و $f_i(a) \neq f_i(b)$.

تعریف ۶.۱.۲. برای $i \in [n]$ ، رابطه ترتیبی \leq_i روی \mathbb{N}^n را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \leq_i y \iff x_{N^\circ(i)} = y_{N^\circ(i)} \quad , \quad x_{N^+(i)} \leq y_{N^+(i)} \quad \text{و} \quad x_{N^-(i)} \geq y_{N^-(i)}.$$

^۵Girth nonnegative

^۶Restriction

حال از رابطه ترتیبی فوق میتوان برای مشخصه‌سازی شبکه‌ها روی گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار D به صورت زیر استفاده کرد:

لم ۱.۱.۲. فرض کنیم D یک گراف جهت‌دار علامت‌دار و $f : [s]^n \rightarrow [s]^n$ باشد، در این صورت داریم:

$$f \in F(D, s) \iff \forall i \in [n], \quad \forall x, y \in [s]^n, \quad x \leq_i y \Rightarrow f_i(x) \leq f_i(y).$$

۲.۲ گراف‌های حدسی

گراف حدسی اولین بار برای گراف‌های جهت‌دار بدون علامت در مرجع [۸] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند جایی که گراف‌ها تحت عنوان گراف‌های گیج خوانده می‌شدند و سپس به طور مستقل در مرجع [۲۲] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. این مفهوم بعداً به عملگرهای بسته در مرجع [۲۰] تعمیم پیدا کرد. حال قصد داریم این مفهوم را برای حالت گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار تعمیم دهیم. برخی از نتایج ما در این حالت را می‌توان به صورت معادل آنچه در مرجع [۲۲] ارائه شد، در نظر گرفت. حال آن که بقیه‌ی نتایج در این حالت جدید می‌باشند.

تعریف ۱.۲.۲. (گراف حدسی برای یک گراف جهت‌دار علامت‌دار). برای هر گراف جهت‌دار علامت‌دار از D روی $[n]$ و هر عدد صحیح $s \geq 2$ ، **گراف s -حدسی**^۷ از گراف D که با نماد $G(D, s)$ نمایش داده می‌شود، گرافی ساده با مجموعه رأسی $[s]^n$ می‌باشد به طوری که برای هر $f \in F(D, s)$ ، $x, y \in [s]^n$ اگر هر دو عضو x و y همزمان نقطه ثابت f نباشند، در این صورت xy یک یال از گراف $G(D, s)$ می‌باشد.

گزاره ۱.۲.۲. فرض کنیم D یک گراف جهت‌دار علامت‌دار و $s \geq 2$ باشد. در این صورت مجموعه یال‌های گراف حدسی $G(D, s)$ به صورت

$$E(G(D, s)) = \cup_{i \in [n]} E_i(D, s)$$

می‌باشد، جایی که

$$E_i(D, s) = \{xy : x, y \in [s]^n, \quad x \leq_i y \text{ و } x_i > y_i \text{ یا } y \leq_i x \text{ و } y_i > x_i\}.$$

برهان. قصد داریم تساوی

$$E(G(D, s)) = \cup_{i \in [n]} E_i(D, s)$$

را ثابت کنیم. برای این منظور ابتدا نشان می‌دهیم که $\cup_{i \in [n]} E_i(D, s) \subseteq E(G(D, s))$. فرض کنیم $xy \in \cup_{i \in [n]} E_i(D, s)$ ، و بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که i وجود

^۷Guessing graph

دارد که $x \leq y$ و $x_i > y_i$. حال فرض کنیم $f \in F(D, s)$ دلخواه باشد. اگر x نقطه ثابت f باشد، یعنی داشته باشیم $f(x) = x$ ، نشان می‌دهیم که y نقطه ثابت f نمی‌تواند باشد، یعنی $y \notin \text{Fix}(f)$. بنابر یکنوا بودن f_i داریم:

$$y_i < x_i = f_i(x) \leq f_i(y)$$

حال چون $y_i < f_i(y)$ ، لذا $f_i(y) \neq y_i$. در نتیجه $f(y) \neq y$ و لذا $y \notin \text{Fix}(f)$ بنابراین طبق تعریف گراف $G(D, S)$ ، $xy \notin E(G(D, S))$ یا $xy \in E(G(D, S))$ می‌باشد، یعنی $xy \in E(G(D, S))$. برعکس، ثابت می‌کنیم که $E(G(D, S)) \subseteq \cup_{i \in [n]} E_i(D, s)$. برای این منظور فرض می‌کنیم که $xy \notin \cup_{i \in [n]} E_i(D, s)$ و نشان می‌دهیم که $xy \notin E(G(D, S))$. حال چون قصد داریم ثابت کنیم $xy \notin \cup_{i \in [n]} E_i(D, s)$ ، لذا برای هر $i \in [n]$ ، داریم $xy \notin E_i(D, s)$. فرض کنیم I مجموعه‌ای باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = \{i \in [n] \mid x_i < y_i\}$$

حال تابع $f : [s]^n \rightarrow [s]^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall z \in [s]^n, \forall i \in I; \quad f_i(x) = \begin{cases} x_i; & z \leq_i x \\ y_i; & o.w \end{cases}$$

$$\forall z \in [s]^n, \forall i \in [n] \setminus I; \quad f_i(z) = \begin{cases} y_i; & z \leq_i y \\ x_i; & o.w \end{cases}$$

حال دو حالت مختلف را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $i \in I$ باشد در این صورت طبق تعریف مجموعه‌ی I داریم $x_i < y_i$ و چون $xy \notin E_i(D, s)$ (طبق فرض خودمان) لذا طبق تعریف $E_i(D, s)$ داریم $y \leq_i x$ و همچنین برای تابع f_i که $i \in I$ ، داریم $f_i(x) = x_i$ و $f_i(y) = y_i$. همچنین طبق ضابطه اول داریم $z \leq_i x$ که نتیجه می‌دهد $f_i(z) \leq f_i(x)$ ، یعنی $x_i \leq z_i$ ، که در این حالت تابع f_i نسبت به ترتیب \leq_i یکنوا می‌باشد.

حالت دوم: اگر $i \notin I$ ، در این صورت $y_i \leq x_i$ و چون طبق فرض داریم $xy \notin E_i(D, s)$ ، لذا طبق تعریف $E_i(D, s)$ خواهیم داشت $x \not\leq_i y$. بنابراین طبق تعریف تابع f_i در حالت $i \notin I$ ، داریم $f_i(x) = x_i$ و $f_i(y) = y_i$ ، همچنین در این حالت نیز می‌توان با تعریف داده شده از تابع f_i و طبق ضابطه دوم داریم $z \leq_i y$ که نتیجه می‌دهد $f_i(z) \leq f_i(y)$ ، یعنی $y_i \leq z_i$ ، که در این حالت تابع f_i نسبت به ترتیب \leq_i یکنوا می‌باشد.

بنابراین در هر دو حالت فوق برای هر $i \in [n]$ ، داریم $f_i(x) = x_i$ و $f_i(y) = y_i$ ، لذا $f(x) = x$ و $f(y) = y$. یعنی $x, y \in \text{Fix}(f)$. چون برای هر i ، تابع f_i یکنوا بود، لذا $f \in F(D, s)$. بنابراین طبق تعریف گراف حدسی $G(D, s)$ داریم $xy \notin E(G(D, s))$ ، یعنی xy یک یال در گراف حدسی $G(D, s)$ نیست. \square

باتوجه به تعاریف و گزاره‌های بالا، نکات زیر را داریم:

- اگر گراف D دارای یک طوقه نامنفی روی هر رأس باشد، آن گاه گراف حدسی $G(D, s)$ تهی است.
- برای C_n^+ ، دور جهت‌دار روی n رأس با کمان‌هایی که همگی مثبت علامت‌دار شده‌اند، یال‌های گراف حدسی به صورت زیر است:

$$E(G(C_n^+, s)) = \{xy : x < y \text{ یا } x > y\}.$$

که این موضوع می‌تواند به هر دور جهت‌دار که در آن تعداد کمان‌های با علامت منفی، زوج می‌باشد (و لذا علامت خود دور مثبت می‌باشد)، تعمیم داده شود.

- اگر گراف D فاقد دور باشد، آن گاه گراف حدسی $G(D, s)$ کامل است، که این موضوع در مرجع [۲۲] برای گراف‌های بدون علامت نیز بررسی شده است.

گزاره بعدی تعمیمی از مطالب بالا و همچنین نتیجه مستقیم از رابطه (۱.۱) می‌باشد. همچنین گزاره بعدی نشان می‌دهد که چطور می‌توان ز گراف‌های حدسی برای نتیجه‌گیری گراف‌های بدون علامت نیز استفاده کنیم. اگر گراف D فاقد دور نامنفی باشد، آن گاه هر $f \in F(D, s)$ حداکثر یک نقطه ثابت دارد. به‌علاوه، بحث و تکنیک‌های به کار گرفته شده در برهان قضیه ۱.۲.۳ در اثبات گزاره زیر می‌تواند نیز مورد استفاده قرار گیرد.

گزاره ۲.۲.۲. اگر گراف جهت‌دار علامت‌دار D فاقد دور نامنفی باشد، آن گاه گراف حدسی $G(D, s)$ گرافی کامل است.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم که گراف حدسی $G(D, s)$ ، گرافی کامل نیست. ابتدا xy را یک یالی در نظر می‌گیریم که در گراف حدسی $G(D, s)$ نباشد. یعنی $xy \notin E(G(D, s))$ و فرض می‌کنیم که I مجموعه‌ای به شکل زیر باشد:

$$I = \{i | x_i \neq y_i\}$$

حال برای هر i چون $x_i \neq y_i$ است، دو حالت داریم: در حالت اول که $x_i > y_i$ و طبق فرض $xy \notin E(G(D, s))$ و گزاره‌ی ۱.۲.۲ داریم $x \not\leq_i y$ جایی که

$$E_i(D, s) = \{xy : x, y \in [s]^n, \quad x \leq_i y \text{ و } x_i > y_i \text{ یا } y \leq_i x \text{ و } y_i > x_i\}.$$

حال برای هر $i \in I$ به طوری که $x_i > y_i$ داریم $x \not\leq_i y$. از این رو حداقل یک رأس مثل i^* ، وجود دارد به طوری که

$$i^* \in N^-(i) \text{ و } x_{i^*} < y_{i^*}, \text{ یا } i^* \in N^+(i) \text{ و } x_{i^*} > y_{i^*}, \text{ یا } i^* \in N^0(i) \text{ و } x_{i^*} \neq y_{i^*}.$$

به طور مشابه، برای هر $i \in I$ که $y_i > x_i$ ، داریم $y \not\leq_i x$. از این رو یک رأس i^* وجود دارد به طوری که

$$i^* \in N^\circ(i) \text{ و } y_{i^*} \neq x_{i^*}, \text{ یا } i^* \in N^+(i) \text{ و } y_{i^*} > x_{i^*}, \text{ یا } i^* \in N^-(i) \text{ و } y_{i^*} < x_{i^*}.$$

در هر دو حالت ویژگی زیر را داریم:

$$\forall i \in I, \quad \lambda(i^*, i) \neq 0 \implies \lambda(i^*, i) = \frac{\text{sign}(x_i - y_i)}{\text{sign}(x_{i^*} - y_{i^*})}. \quad (1.2)$$

برای هر $i \in I$ ، چون $i^* \in I$ ، یک دور C وجود دارد به گونه‌ای که همه کمان‌ها از دور C به شکل (i^*, i) هستند. به عبارت دیگر یک دور به شکل $C = i_0, i_1, \dots, i_{k-1}, i_0$ وجود دارد به طوری که برای هر $l \in [k]$ داریم $i_{l+1}^* = i_l$ (اندیس‌ها به مدول k حساب شده‌اند). حال چون بعضی کمان‌های دور علامت صفر دارند، بنابراین با فرض گزاره در تناقض می‌شود. چون C علامت صفر ندارد.

از رابطه (۱.۲) علامت σ از C را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\sigma = \frac{\text{sign}(x_{i_1} - y_{i_1})}{\text{sign}(x_{i_0} - y_{i_0})} \frac{\text{sign}(x_{i_2} - y_{i_2})}{\text{sign}(x_{i_1} - y_{i_1})} \cdots \frac{\text{sign}(x_{i_{k-1}} - y_{i_{k-1}})}{\text{sign}(x_{i_{k-2}} - y_{i_{k-2}})} \frac{\text{sign}(x_{i_0} - y_{i_0})}{\text{sign}(x_{i_{k-1}} - y_{i_{k-1}})} = 1$$

□ که دور نامنفی می‌شود و با فرض در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنیم D یک گراف جهت‌دار علامت‌دار باشد. برای هر مجموعه مستقل Z از گراف حدسی $G(D, s)$ ، وجود دارد $f \in F(D, s)$ به طوری که $Z \subseteq \text{Fix}(f)$ می‌باشد. از این رو رابطه زیر را داریم:

$$g(D, s) = \log_s \alpha(G(D, s))$$

برهان. ابتدا با تعریف گراف حدسی، مجموعه‌ی نقاط ثابت تابع f باید یک مجموعه مستقل در گراف حدسی تشکیل دهند. از این رو رابطه $g(D, s) \leq \log_s \alpha(G(D, s))$ برقرار است. برعکس، فرض کنید Z یک مجموعه مستقل ناتهی از گراف حدسی $G(D, s)$ باشد. برای همه $x \in [s]^n$ ، قرار می‌دهیم

$$Z(x, i) = \{z : z \in Z, x \leq_i z\},$$

و تعریف می‌کنیم $f : [s]^n \rightarrow [s]^n$ جایی که

$$\forall i \in [n], \forall x \in [s]^n, \quad f_i(x) = \min(\{z_i : z \in Z(x, i)\} \cup \{\max(\{z_i : z \in Z\})\}).$$

اگر $x \leq_i y$ ، آن‌گاه $Z(y, i) \subseteq Z(x, i)$ بنابراین $f_i(x) \leq f_i(y)$. از این رو تابع f_i یکنوا با ترتیب \leq_i ، و $f \in F(D, s)$ است. فرض کنید $z \in Z$ و چون $z \in Z(z, i)$ داریم $f_i(z) \leq z_i$. حال اگر $f_i(z) \neq z_i$ ، آن‌گاه $y \in Z(z, i)$ وجود دارد به طوری که $f_i(z) = y_i < z_i$ می‌باشد. بنابراین داریم

اما مطابق گزاره ۱.۲.۲ در گراف حدسی $G(D, s)$ یک یال بین y و z وجود دارد، بنابراین Z یک مجموعه مستقل نیست، که یک تناقض است. یعنی برای همه $z \in Z$ $f_i(z) = z_i$ و همچنین برای همه $i \in [n]$ $f_i(z) = z$ می‌باشد. \square

نکات زیر در تعیین عدد حدسی با استفاده از مفهوم گراف حدسی نقش مؤثری دارد.

• اگر گراف D دارای یک طوقه نامنفی روی هر رأس باشد، آن‌گاه $g(D, S) = n$ است. این رابطه به وسیله تابع همانی $f_i(x) = x_i$ نتیجه شده است.

• اگر گراف D شامل دورهای نامنفی نباشد، آن‌گاه $g(D, s) = 0$ است.

• برای c_n^+ داریم $g(D, s) = 1$ که با تابع $f_i(x) = x_{i-1}$ به مدول n به دست آمده است.

با استفاده از گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار، تفسیرهای زیر را روی گراف حدسی داریم:

۱. تعاریف برای گراف حدسی در گراف‌های جهت‌دار بدون علامت معرفی شده در مرجع [۲۲] سازگار است.

۲. اگر گراف D یک گراف جهت‌دار علامت‌دار و گراف D° یک گراف جهت‌دار بدون علامت با رئوس یکسان باشند و کمان‌هایی مانند گراف D داشته باشند، آن‌گاه گراف حدسی $G(D^\circ, s)$ یک زیر گراف پوشا از گراف حدسی $G(D, s)$ است. علاوه بر این اضافه کردن علامت‌ها به گراف جهت‌دار فقط تعداد نقاط ثابت را کاهش می‌دهد.

۳. اگر گراف D یک گراف جهت‌دار علامت‌دار بدون طوقه باشد و گراف D' با اضافه کردن یک طوقه منفی روی بعضی رئوس گراف D به دست آید، آن‌گاه $G(D, s) = G(D', s)$. علاوه بر این اضافه کردن یک طوقه روی یک رأس تأثیری بر مجموعه نقاط ثابت ندارد.

۳.۲ کرانهایی برای تعداد نقاط ثابت شبکه‌های بولی بر پایه گراف‌های حدسی

در این بخش بر پایه گراف حدسی، کرانهایی روی عدد حدسی دودویی $g(D, s)$ را نتیجه خواهیم گرفت.

فرض کنید D یک گراف جهت‌دار علامت‌دار روی $[n]$ و $x \in \{2\}^n$ باشد. اگر $x_j \neq x_i$ و $\lambda(j, i) = 1$ یا $x_j = x_i$ و $\lambda(j, i) = -1$ کمان (j, i) از گراف D و در واقع خود گراف D -خنثی^۸ است. فرض کنید $I \subseteq [n]$ مجموعه رئوس $I \setminus N(I)$ را با نماد $N(I, x)$ نمایش می‌دهیم به طوری که همه کمان‌ها از رأس i به I ، $-x$ -خنثی هستند. اگر گراف D بدون علامت باشد، سپس $N(I, x) = 0$ و $D[I]$ ، $-x$ -خنثی است اگر و فقط اگر I یک مجموعه مستقل باشد.

^۸x-frustrate

گزاره ۱.۳.۲. درجه یک رأس x در گراف حدسی $G(D, 2)$ به شکل زیر است:

$$d(x) = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ x, D[I] \text{ خنثی است}}} (-1)^{|I|-1} 2^{n-|N(I) \cup I| + |N(I, x)|}$$

برهان. بنابر اصل شمول و طرد داریم:

$$d(x) = |E(G(D, 2)) \cup \{x\}| = \left| \bigcup_{i \in [n]} E_i(D, 2) \cap \{x\} \right| = \sum_{I \in [n]} (-1)^{|I|-1} |E_I(D, 2) \cap \{x\}|$$

که $E_I(D, 2) = \bigcap_{i \in I} E_i(D, 2)$ و از این رو فقط $|E_I(D, 2) \cap \{x\}|$ برای هر $I \subseteq [n]$ تعیین می‌کنیم. حال $xy \in E(D, 2)$ اگر و فقط اگر برای هر $i \in I$ داشته باشیم $x \leq_i y$ و $x_i > y_i$ یا $x \leq_i x$ یا $y \leq_i x$ و $y_i > x_i$ فرض کنید که $xy \in E_I(D, 2)$ و همچنین (j, i) یک کمان از D با $i \in I$ باشد. فرض می‌کنیم $x_j = x_i$ و $\lambda(j, i) = -1$. به برهان خلف فرض کنیم اگر $x_j \neq y_j$ باشد آن‌گاه $x_j = x_i = y_j$ بنابراین $x_i \neq y_i = y_j$ که تناقض است. بنابراین

$$x_j = x_i \quad \lambda(j, i) = -1 \implies x_j = y_j$$

و به طور مشابه ثابت می‌کنیم که

$$x_j \neq x_i \quad \lambda(j, i) = 1 \implies x_j = y_j$$

اگر $j \in I$ ، چون i متعلق به مجموعه I است، داریم $x_j \neq y_j$. حال اگر $\lambda(j, i) = 0$ باشد، داریم $x \leq_i x$ یا $y \leq_i x$ از این رو $x_j = y_j$ در هر دو نمونه، یک تناقض است. بنابراین $\lambda(j, i) \in \{1, -1\}$ و (j, i) یک $-x$ خنثی است. و نتیجه گرفتیم که $D[I]$ یک $-x$ خنثی است. فرض کنید که $j \notin I$. اگر $y_j \neq x_j$ آن‌گاه (j, i) یک $-x$ خنثی است بنابراین $j \in N(I, x)$ و برای هر $i \in [n]$ داریم $y_i \neq x_i$ اگر $i \in I$ ، داریم $y_i = x_i$ اگر $i \in J = (N(I) \setminus I) \setminus N(I, x)$ و مؤلفه y_i در هر نمونه آزاد است. بنابراین $|E_I(D, 2) \cap \{x\}| = 2^{n-|I|-|J|} = 2^{n-|N(I) \cup I| + |N(I, x)|}$. □

داریم

$$|E_i(D, s) \cap \{x\}| = s^{n-d_i-1} \left((s-x_i) \prod_{j \in N^+(i) \setminus i} \prod_{j \in N^-(i \setminus i)} (s-x_j+1) + x_i \prod_{j \in N^-(i \setminus i)} (x_j+1) \prod_{j \in N^+(i \setminus i)} (s-x_j+1) \right),$$

بنابراین عبارت ساده از $d(x)$ برای $s > 2$ وجود ندارد.

برخلاف نمونه بدون علامت، تنها گراف حدسی که منتظم نیست، گراف کیلی است. علاوه بر این، بعضی تکنیک‌ها در مرجع [۲۲] برای گراف حدسی از گراف‌های جهت‌دار بدون علامت که

کرانهایی برای تعداد نقاط ثابت شبکه‌های بولی بر پایه گراف‌های حدسی ۲۱

پاسخ گو نیست استفاده شده است. دو کران پایین روی عدد حدسی را نتیجه خواهیم گرفت که هر دو مبنایی برای کران پایین معروف روی عدد استقلال از گراف بدون جهت G روی n رئوس با درجه میانگین d است (یک نتیجه از قضیه توران^۹ در مرجع [۴۹]).

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{d+1}$$

کران نخست، یک کاربرد مستقیم از این کران برای کل گراف حدسی است، در حالی که کران دوم، زیر گراف القاشده از گراف حدسی است.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید D یک گراف جهت‌دار علامت‌دار باشد، در این صورت داریم

$$g(D, 2) \geq \delta^\circ + \left(\log_2 \frac{4}{3} \right) \delta^\pm - \log_2 n.$$

برهان. برای هر $x \in [2]^n$ و هر $i \in [n]$ بنا به قضیه قبل داریم

$$|E_i(D, 2) \cap \{x\}| = 2^{n-d_i-1+|N(i,x)|},$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |E_i(D, 2)| &= \frac{1}{2} \sum_x |E_i(D, 2) \cap \{x\}| \\ &= \frac{1}{2} \sum_x 2^{n-d_i-1+|N(i,x)|} \\ &= 2^{n-d_i-2} \sum_x 2^{|N(i,x)|}. \end{aligned}$$

لذا نیاز به محاسبه رابطه $\sum_x 2^{|N(i,x)|}$ داریم. ابتدا توجه کنیم که بنابر تعریف مجموعه‌ی $|N(i,x)|$ مقدار x خارج از $N^+(i) \cup N^-(i)$ نمی‌باشد. به علاوه، برای هر x داریم $z \in [2]^{N^+(i) \cup N^-(i)}$ به طوری که

$$z_u = \begin{cases} x_u + x_i; & u \in N^+(i) \\ x_u + x_i + 1; & u \in N^-(i). \end{cases}$$

بنابراین $|N(i,x)|$ برابر با تعداد یک‌ها در z می‌باشد. چون $\binom{d_i^+ + d_i^-}{k}$ انتخاب برای z با

دقیقاً k تا یک وجود دارد. $\binom{d_i^+ + d_i^-}{k} 2^{n-d_i^+-d_i^-}$ حالت برای x وجود دارد به طوری که

^۹Turan

از این رو داریم $|N(i, x)| = k$

$$\begin{aligned} |E_i(D, \mathcal{V})| &= \mathcal{V}^{n-d_i} \mathcal{V}^{n-d_i^+-d_i^-} \sum_{k=0}^{d_i^++d_i^-} \binom{d_i^++d_i^-}{k} \mathcal{V}^k \\ &= \mathcal{V}^{2n-d_i^0} \mathcal{V}^{2d_i^+-2d_i^-} \mathcal{V}^{d_i^++d_i^-} \\ &\leq \mathcal{V}^{2n-\delta^\circ} \mathcal{V}^{\binom{3}{4} \delta^\pm} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d(G(D, \mathcal{V})) &= \frac{\mathcal{V} |E(G(D, \mathcal{V}))|}{\mathcal{V}^n} = \frac{\mathcal{V} |\cup_i E_i(D, \mathcal{V})|}{\mathcal{V}^n} \leq \frac{\mathcal{V} \sum_i |E_i(D, \mathcal{V})|}{\mathcal{V}^n} \leq n \mathcal{V}^{n-\delta^\circ-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{\delta^\pm} \\ \alpha(G(D, \mathcal{V})) &\geq \frac{\mathcal{V}^n}{d(G(D, \mathcal{V})) + 1} \geq \frac{\mathcal{V}^n}{n \mathcal{V}^{n-\delta^\circ} \left(\frac{3}{4}\right)^{\delta^\pm}} = \mathcal{V}^{\delta^\circ} \left(\frac{4}{3}\right)^{\delta^\pm} n^{-1}, \\ g(D, \mathcal{V}) &= \log_{\mathcal{V}} \alpha(G(D, \mathcal{V})) \geq \delta^\circ + \left(\log_{\mathcal{V}} \frac{4}{3}\right) \delta^\pm - \log_{\mathcal{V}} n. \end{aligned}$$

□

کران بالا موقعی کوچکتر است که کمان‌های بیشتری در گراف D وجود داشته باشد و همچنین کمان‌ها دارای علامت مثبت یا منفی باشند. به ویژه، اگر گراف D° بدون علامت باشد، آن‌گاه داریم $\delta = \delta^\circ$ و $\delta^\pm = 0$ ، که رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$g(D^\circ, \mathcal{V}) \geq \delta^\circ - \log_{\mathcal{V}} n$$

(مرجع [۲۲] را ببینید) و اگر گراف D^\pm ناوابسته باشد، آن‌گاه داریم $\delta^\circ = 0$ و $\delta^\pm = \delta$ که رابطه زیر را داریم:

$$g(D^\pm, \mathcal{V}) \geq \left(\log_{\mathcal{V}} \frac{4}{3}\right) \delta^\pm - \log_{\mathcal{V}} n.$$

کران قضیه ۱.۳.۲ برای گراف‌های جهت‌دار، چون بیشتر کران‌ها مثبت یا منفی علامت‌دار شده‌اند، می‌تواند بهبود پیدا کند.

قضیه ۲.۳.۲. برای هر گراف جهت‌دار علامت‌دار D با مینیمم درجه ورودی $\delta \geq \frac{\ln(\mathcal{V}n)}{\mathcal{V}}$ ، رابطه زیر را داریم:

$$g(D, \mathcal{V}) \geq \frac{\delta}{\mathcal{V}} - \sqrt{\frac{\ln(\mathcal{V}n)\delta}{\mathcal{V}}}.$$

برهان. هدف اصلی برهان، استفاده‌ی یک مجموعه T از انواع حالت‌های $x \in [\mathcal{V}]^n$ است به طوری که T وسیع و زیرگرافی از گراف حدسی $G(D, \mathcal{V})$ می‌باشد که به وسیله T القا شده است که جدا از همه گراف‌های حدسی است. نشان می‌دهیم $\epsilon := \frac{\ln(\mathcal{V}n)}{\mathcal{V}}$. برای هر $i \in [n]$ و $x \in [\mathcal{V}]^n$ ، داریم:

$$|E_i(D, \mathcal{V}) \cap \{x\}| = \mathcal{V}^{n-d_i-1+|N(i,x)|}.$$

برای هر $i \in [n]$ فرض کنید

$$N^\pm(i) := (N^+(i) \cup N^-(i)) \setminus \{i\}$$

$$d_i^\pm := |N^\pm(i)|,$$

$$J_i := \left\{ w : \left| w - \frac{d_i^\pm}{\Upsilon} \right| < \sqrt{\epsilon d_i^\pm} \right\}$$

$$S_i(w) := \{x \in [\Upsilon]^n : |N(i, x)| = w\},$$

$$T_i := \cup_{w \in J_j} S_i(w) = \left\{ x \in [\Upsilon]^n : \left| |N_i(i, x)| - \frac{d_i^\pm}{\Upsilon} \right| < \sqrt{\epsilon d_i^\pm} \right\},$$

$$T := \cap_{i=1}^n T_i.$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که T وسیع است، داریم

$$|S_i(w)| = \Upsilon^{n-d_i^\pm} \binom{d_i^\pm}{w}$$

$$|T_i| = \Upsilon^n \sum_{w \in J_j} \Upsilon^{-d_i^\pm} \binom{d_i^\pm}{w}.$$

هر x_i را به عنوان متغیر تصادفی ساختار برنولی با احتمال مطلوب $\frac{1}{\Upsilon}$ و با نابرابری هافدینگ در مرجع [۲۸] در نظر بگیرید، داریم

$$\sum_{w \notin J_j} \Upsilon^{-d_i^\pm} \binom{d_i^\pm}{w} = pr \left(\left| \sum_{j \in N^\pm(i)} x_j - \frac{d_i^\pm}{\Upsilon} \right| \geq \sqrt{\epsilon d_i^\pm} \leq \Upsilon e^{-\Upsilon \epsilon} \right)$$

بنابراین

$$|T_i| = \Upsilon^n \sum_{w \in J_j} \Upsilon^{d_i^\pm} \binom{d_i^\pm}{w} \geq (1 - \Upsilon e^{-\Upsilon \epsilon}) \Upsilon^n$$

با یک کران واحد روی متمم‌ها از T_1 تا T_n رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$|T| \geq (1 - \Upsilon n e^{-\Upsilon \epsilon}) \Upsilon^n = \Upsilon^{n-1}.$$

حال درجه رأس x در T را محدود می‌کنیم، داریم

$$\begin{aligned} d(x) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |E_i(D, \Upsilon) \cap \{x\}| \\ &\leq \Upsilon^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \Upsilon^{-d_i + \frac{d_i^\pm}{\Upsilon} + \sqrt{\epsilon d_i^\pm}} \\ &\leq \Upsilon^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \Upsilon^{-\frac{d_i}{\Upsilon} + \sqrt{\epsilon d_i}} \\ &\leq n \Upsilon^{n-1 - \frac{\delta}{\Upsilon} + \sqrt{\epsilon \delta}}, \end{aligned}$$

اگر $\delta \geq \epsilon$ ، ماکسیمال عبارت جمع موقعی اتفاق می‌افتد که $d_i = \delta$ است. آن‌گاه مجموعه‌های مستقل همبند در T را در نظر می‌گیریم، که در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \alpha(G(D, \mathcal{Y})) &\geq \frac{|T|}{n 2^{n-1-\frac{\delta}{\gamma}+\sqrt{\epsilon^\delta}+1}} \\ &\geq \frac{2^{n-1}}{n 2^{n-\frac{\delta}{\gamma}+\sqrt{\epsilon^\delta}}} \\ &= n 2^{\frac{\delta}{\gamma}-\sqrt{\epsilon^\delta}-1}, \\ g(D, \mathcal{Y}) &\geq \frac{\delta}{\gamma} - \sqrt{\epsilon^\delta} - \log_2 n - 1. \end{aligned}$$

□

فصل ۳

کدهای تصحیح کننده خطا و شبکه‌های علامت‌دار

در این فصل رابطه‌هایی متعدد بین نقاط ثابت شبکه‌ها روی گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار و کدهای تصحیح کننده خطاهای نامتقارن در مرجع [۳۱] پیدا می‌کنیم. کران‌های بیشتری روی عدد حدسی به دست می‌آوریم. همچنین به بررسی ویژگی‌های مجموعه نقاط ثابت $Fix(f)$ برای $f \in F(D, s)$ می‌پردازیم و به عنوان یک کد با ویژگی‌های فاصله‌ای خاص در نظر می‌گیریم و با استفاده از آن کران‌هایی را روی $Fix(f)$ با اندازه ماکسیمم تعیین می‌کنیم. براساس این روابط، کران‌های بالا و پایین قوی را روی تعداد نقاط ثابت با استفاده از کران‌ها روی کدهای خطاهای نامتقارن در قضیه ۱.۲.۳ به دست می‌آوریم.

۱.۳ کدهای تصحیح کننده خطا

یک کد s -آرایه‌ای C با طول n یک زیر مجموعه از $[s]^n$ است. پارامتر اصلی C فاصله مینیمم است که به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{min}(C) = \min\{\mu(c, c') : c, c' \in C, c \neq c'\}$$

که μ تابع فاصله روی $[s]^n$ است. سه تابع فاصله زیر را در نظر بگیرید. برای هر $x, y \in [s]^n$ ، فرض کنید $l(x, y) := |i: x_i < y_i|$. فاصله همینگ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_H(x, y) := L(x, y) + L(y, x)$$

یعنی تعداد حالت‌هایی که x, y متفاوت هستند. ماکسیمم فاصله به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$d_M(x, y) := \max\{L(x, y), L(y, x)\},$$

و همچنین مینیمم فاصله را داریم:

$$d_m(x, y) := \min\{L(x, y), L(y, x)\}.$$

خوانندگان که به کدهای تصحیح‌کننده خطا با فاصله همینگ علاقه مند می‌باشند برای آگاهی بیشتر به مرجع [۳۴] مراجعه کنند. کدهای دودویی روی فاصله ماکسیمم برای تصحیح خطاهای نامتقارن مطرح شده است (که متریک نامتقارن می‌نامند). به عنوان مثال مانند آن‌هایی که در Z -کانال رخ می‌دهد، برای مرور روی این کدها مرجع [۳۱] را ببینید. مینیمم فاصله متریک نیست، چون مانع استفاده از انواع تکنیک‌های کدگذاری است. کران‌های روی کدهای دودویی مینیمم فاصله را با نسبت آن‌ها با کدهای فاصله همینگ تعیین می‌کنیم. اندازه ماکسیمم از یک کد s -آرایه‌ای از طول n با مینیمم μ فاصله d را با $A_\mu(n, d, s)$ نشان می‌دهیم. کران گیلبرت^۱ را داریم

$$A_H(n, d, 2) \geq \frac{2^n}{\sum_{k=0}^{d-1} \binom{n}{k}}, \quad (1.3)$$

و کران گوی بسته‌بندی^۲

$$A_H(n, d, 2) \leq \frac{2^n}{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{n}{k}}, \quad (2.3)$$

و کران سینگلتون^۳ $A_H(n, d, s) \leq s^{n-d+1}$ که برای $s = 2$ فقط در حالت‌های بدیهی حاصل می‌شود و به نسبت کران گوی بسته‌بندی، کران بسیار خوبی نیست و کران بالای بزرگتری (نادقیق‌تر) از کران گوی بسته‌بندی دارد (کران سینگلتون برای الفبای بزرگتر بهتر است). برای کدهای با ماکسیمم فاصله فقط نمونه دودویی مطالعه شده است. کران وارشاموف^۴ در

^۱ Gilbert

^۲ Sphere-packing

^۳ Singleton

^۴ Varshamov

مرجع [۵۱] رابطه زیر را نتیجه می دهد

$$A_M(n, d, 2) \leq \frac{2^{n+1}}{\sum_{j=0}^{d-1} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{j} + \binom{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{j}}. \quad (3.3)$$

تاکنون این بهترین کران شناخته شده نیست. برای مشاهده کران های بالا به دست آمده روی $A_M(n, d, s)$ می توانید مرجع [۳۱] را ببینید.

در حالتی که s کلی باشد به یک روش می توان سه فاصله را به هم مرتبط کرد ولی برای وقتی که $s = 2$ است دو روش دیگر وجود دارد. اولین رابطه را (برای همه $s \geq 2$) براساس تعاریف های آنها بین این سه فاصله به سادگی می توان بررسی کرد که به شکل زیر است:

$$A_M(n, d, s) \leq A_H(n, 2d, s) \leq A_M(n, d, s).$$

در حالت دودویی ($s = 2$)، رابطه دوم با کران بوردن^۵ در مرجع [۱۲] فرض شده است.

$$A_M(n, d, 2) \leq dA_H(n, 2d - 1, 2).$$

در حالت دودویی، راه سوم برای مرتبط کردن ماکسیم فاصله و مینیم فاصله به فاصله همینگ از طریق استفاده از کدهای با وزن ثابت است. برای هر $x \in [s]^n$ ، فرض کنید وزن x که $W(x) := \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ (در \mathbb{N})، برای هر وزن w ، $0 \leq w \leq n(s-1)$ تمام حالت ها با وزن w را با $B(n, w, s) := \{x \in [s]^n : W(x) = w\}$ مشخص می کنیم. یک کد دودویی با وزن ثابت C از طول n و وزن w یک زیر مجموعه از 2^n است که همه کد واژه ها در C دارای وزن w هستند. ماکسیم تعداد کدهای با وزن ثابت از طول n ، وزن w و فاصله مینیم d را با $A_H(n, d, w, 2)$ نشان می دهیم. به دلیل کاربردهای وسیع و اهمیت تئوریشان، کدهای با وزن ثابت به طور کامل، مورد مطالعه قرار گرفته شده است. برای نمونه مراجع [۱]، [۱۳] و [۱۴] را ببینید. به ویژه از کران باسالیگو^۶-الیاس^۷ در مرجع [۲] استفاده خواهیم کرد.

$$A_H(n, d, w, 2) \geq \frac{\binom{n}{d}}{2^n} A_H(n, d, 2). \quad (4.3)$$

چون $d_m(x, y) = d_H(x, y)$ ، برای همه $x, y \in [2]^n$ با وزن مساوی، به دست می آوریم

$$A_m(n, d/2) \geq A_H(n, 2d, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2).$$

کران ها روی عدد حدسی شامل ضرایب دوجمله ای است، که در مرجع [۳۴] تخمین زده شده است. تابع آنتروپی دودویی را با

$$H(p) := -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$$

^۵Borden

^۶Bassaligo

^۷Elias

برای $p \in [0, 1]$ مشخص می‌کنیم. سپس

$$\frac{2^{nH(\lambda)}}{\sqrt{\lambda n \lambda (1-\lambda)}} \leq \binom{n}{\lambda n} \leq \frac{2^{nH(\lambda)}}{\sqrt{2\pi n \lambda (1-\lambda)}} \quad (5.3)$$

$$\frac{2^{nH(\mu)}}{\sqrt{\lambda n \mu (1-\mu)}} \leq \sum_{k=0}^{\mu n} \binom{n}{k} \leq 2^{nH(\mu)}, \quad (6.3)$$

جایی که λn یک عدد صحیح، $0 \leq \lambda n \leq n$ و μn یک عدد صحیح، $0 \leq \mu n \leq \frac{n}{2}$ به ویژه

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2n}}. \quad (7.3)$$

حال یک جمع‌بندی روی کمیت‌هایی که تاکنون تعریف کردیم را داریم، که به صورت زیر است:
لم ۱.۱.۳. فرض کنید $A_\mu(n, d, s)$ یک کد s -آرایه‌ای از طول n با مینیمم μ فاصله d باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2n}} A_H(n, 2d, 2) &\leq A_H\left(n, 2d, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) \leq A_M(n, d, 2) \leq A_H(n, 2d, 2) \\ &\leq A_M(n, d, 2) \leq d A_H(n, 2d-1, 2). \end{aligned}$$

۲.۳ کران‌هایی برای عدد حدسی گراف‌های جهت‌دار

قضیه ۱.۲.۳. برای هر گراف جهت‌دار علامت‌دار D و هر $f \in F(D, s)$ ، حال اگر $Fix(f)$ یک کد از طول n با فاصله مینیمم همینگ حداقل γ^+ باشد، آن‌گاه داریم:

$$g(D, s) \leq \log_s A_H(n, \gamma^+, s).$$

علاوه بر این، برای هر گراف جهت‌دار منفی D^- داریم

$$g(D^-, s) \leq \log_s A_M(n, \frac{\gamma^+}{2}, s),$$

و برای هر گراف جهت‌دار مثبت D^+ ، داریم

$$g(D^+, s) \leq \log_s A_M(n, \gamma^+, s).$$

برهان. برهان بر پایه‌ی بحث و تکنیک‌های به کار گفته شده در اثبات گزاره ۲.۲.۲ می‌باشد. اگر x و y مجزا و غیر مجاور در گراف حدسی $G(D, s)$ باشند، آن‌گاه فرض کنید $I = \{i | x_i \neq y_i\}$ باشد. برای هر $i \in I$ داریم $x_{N(i)} \neq y_{N(i)}$ از این رو $j \in I \cap N(i)$ وجود دارد. با کاربرد مکرر، i متعلق به یک دور در گراف جهت‌دار که القا شده با I است را به دست می‌آوریم. این دور

باید نامنفی باشد، چون در غیر اینصورت، دو حالت $x_i > y_i$ و $x_i < y_i$ به صورت همزمان با هم اتفاق می‌افتد. بنابراین $d_H(x, y) \geq \gamma^+$ می‌باشد. علاوه بر این اگر D^+ یک گراف جهت‌دار مثبت و $x_i < y_i$ باشد، آن‌گاه روی همه رئوس در I ، $x_k < y_k$ است. بنابراین $L(x, y) \geq \gamma^+$ می‌باشد. اگر قرار دهیم $x_i > y_i$ ، آن‌گاه داریم $L(x, y) \geq \gamma^+$ ، در هر حالت $d_M(x, y) \geq \gamma^+$ است. همچنین اگر D^- یک گراف جهت‌دار منفی باشد، آن‌گاه دور باید نامنفی باشد. یعنی باید طول زوج داشته باشد و می‌بینیم که علامت $x_k - y_k$ روی دور تغییر می‌کند. بنابراین $d_m(x, y) \geq \frac{\gamma^+}{2}$. \square

نتیجه ۱.۲.۳. (کران گوی بسته بندی برای عدد حدسی). فرض کنید D گراف جهت‌دار علامت‌دار و $t := \frac{1}{n} \lfloor \frac{\gamma^+ - 1}{2} \rfloor$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$g(D, 2) \leq n - \log_2 \sum \binom{n}{s} \\ \leq n - nH(t) + \frac{1}{2} \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 (\lambda t(1-t)).$$

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید D یک گراف جهت‌دار علامت‌دار باشد، داریم:

$$\phi := \max_{1 \leq i \leq n} \min \left\{ \frac{n - d_i^0 + 1}{2}, n - d_i^0 - d_i^- + 1, n - d_i^0 - d_i^+ + 1 \right\}$$

هر کد با مینیمم کمترین فاصله حداقل ϕ یک زیر مجموعه از نقاط ثابت از تعدادی $f \in F(D, s)$ است. بنابراین

$$g(D, s) \geq \log_s A_m(n, \phi, s),$$

و به‌ویژه

$$g(D, 2) \geq \log_2 A_m(n, \phi, 2) \geq \log_2 A_H(n, 2, \phi, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2).$$

برهان. فرض کنید که برای بعضی i ، $xy \in E_i(D, s)$ باشد، در این صورت می‌گوییم $x \leq_i y$ و $x_i > y_i$ همچنین داریم $x_{N^0(i)} = y_{N^0(i)}$. از این رو

$$2d_m(x, y) \leq d_H(x, y) \leq n - d_i^0.$$

حال چون $x_j \leq y_j$ برای هر $j \in N^0(i) \cup N^+(i)$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$d_m(x, y) \leq L(y, x) \leq n - d_i^0 - d_i^+,$$

و به‌طور مشابه

$$d_m(x, y) \leq n - d_i^0 - d_i^-.$$

اجتماعی از این سه حالت روی هم رابطه $d_m(x, y) < \phi$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین هر کد با مینیمم کمترین فاصله حداقل ϕ یک مجموعه مستقل $G(D, s)$ را تشکیل می‌دهد. \square

با ترکیب کران باسالیگو-الیاس و کران گیلبرت، کران پایین دیگری روی $g(D, 2)$ به دست می‌آوریم که معمولاً کران بهتری برای گراف‌هایی با مینیمم درجه ورودی بزرگتر است.

نتیجه ۲.۲.۳. (کران گیلبرت برای عدد حدسی). فرض کنیم D یک گراف جهت‌دار علامت‌دار باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} g(D, 2) &\geq \log_2 \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \log_2 \sum_{k=0}^{2\phi-1} \binom{n}{k} \\ &\geq n - nH \left(\min \left\{ \frac{2\phi-1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \right) - \frac{1}{2} \log_2 n - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

این فصل را با یک سؤال باز در مورد عدد حدسی به پایان می‌رسانیم. برای گراف‌های جهت‌دار بدون علامت، حد عدد حدسی همیشه وجود دارد (در آینده در مورد آن بیشتر صحبت خواهیم کرد). هر چند که این سؤال برای گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار باز باقی می‌ماند.

فصل ۴

نقاط ثابت توابع تعریف شده روی خوشه‌های علامت‌دار

در این فصل به بررسی عدد حدسی از خوشه‌های علامت‌دار می‌پردازیم. کران‌هایی دقیق‌تری روی توابع مثبت و منفی به دست می‌آوریم و همچنین همگرایی توابع را که به چه صورت است، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۴ کران‌های دقیق‌تر روی توابع مثبت و منفی

در این فصل به نقاط ثابت توابعی می‌پردازیم که گراف‌های برهم‌کنش علامت‌دار آنها به طور یکسان و کامل دارای علامت‌اند و کمان‌های آنها مثبت (تابع مثبت) یا منفی (تابع منفی) علامت‌دار شده‌اند. برای نمایش بیانیه‌های بالا گراف‌های جهت‌دار را بدون طوقه در نظر می‌گیریم. از این رو در این فصل به اعداد حدسی K_n^+ و K_n^- که به ترتیب خوشه مثبت و خوشه منفی روی n رأس می‌باشد، می‌پردازیم که گراف‌های حدسی متناظر با آنها را به راحتی می‌توان تعیین کرد.

لم ۱.۱.۴.۱. فرض کنیم $G(K_n^-, s)$ یک گراف حدسی باشد و K_n^- خوشه‌ی منفی روی n

رأس باشد، در این صورت داریم:

$$E(G(K_n^-, s)) = \{xy: x \leq y \text{ یا } y \leq x\} = \{xy: d_m(x, y) = 0\}.$$

۲. برای خوشه‌ی K_n^+ داریم:

$$E(G(K_n^+, s)) = \{xy: L(x, y) = 1 \text{ یا } L(y, x) = 1\}$$

برهان. ابتدا برای K_n^- ، فرض می‌کنیم که xy یک یال در گراف حدسی است اگر و تنها اگر i وجود داشته باشد به طوری که $x_i < y_i$ و طبق تعریف یال‌های گراف حدسی و همچنین تعریف رابطه ۶.۱.۲ داریم $x_j \leq y_j$ برای هر $j \neq i$ (یا بر عکس) که معادل است با $x \leq y$ (یا $y \leq x$). برای K_n^+ فرض می‌کنیم که xy یک یال در گراف حدسی است اگر و تنها اگر یک i وجود داشته باشد به طوری که $x_i < y_i$ و طبق تعریف یال‌های گراف حدسی و همچنین تعریف رابطه ۶.۱.۲ داریم $x_j \geq y_j$ برای هر $j \neq i$ (یا بر عکس) که معادل است با $L(x, y) = 1$ (یا $L(y, x) = 1$). □

گزاره ۱.۱.۴. برای خوشه‌ی منفی K_n^- ، داریم:

$$g(K_n^-, s) = \log_s \left| B \left(n, \left\lfloor \frac{n(s-1)}{2} \right\rfloor, s \right) \right|,$$

و به ویژه

$$g(K_n^-, 2) = \log_2 \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq n - \frac{1}{2} \log_2 n - \frac{3}{2},$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(K_n^-, s) = \sup_{s \geq 2} g(K_n^-, s) = n - 1 = K^+.$$

برهان. یک مجموعه از نقاط ثابت $f \in F(K_n^-, s)$ یک مجموعه از حالت‌های قیاس ناپذیر است. یعنی یک پادزنجیر مطابق مرتب جزئی \leq . این رابطه، یکرخت با شبکه‌ای از مقسوم‌علیه‌های $N = (p_1 p_2 \dots p_n)$ که i, P_i امین عدد اول است. بنابراین بزرگترین پادزنجیر، $B(n, \frac{n(s-1)}{2}, s)$ است. یک نتیجه تحت عنوان قضیه اسپرنر^۱ برای $s = 2$ نام گذاری شده است و سپس به هر s در مرجع [۱۶] توسعه داده شده است. همچنین کران روی ضریب دوجمله‌ای از مرجع [۹] به دست آمده است. به این صورت که در این رابطه داشتیم:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2n}}$$

حال با جایگذاری داریم:

$$g(K_n^-, 2) = \log_2 \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \log_2 \left(\frac{2^{n-1}}{\sqrt{2n}} \right)$$

^۱Sperner's theorem

که با انجام محاسبات، کران مورد نظر را به ما می‌دهد. یعنی

$$g(K_n^-, 2) = \log_2 \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq n - \frac{1}{2} \log_2 n - \frac{3}{2}$$

برای حد، مشاهده می‌کنیم که $W(x)$ مقداری بین صفر و $n(s-1)$ را می‌گیرد از این رو

$$\max_{0 \leq w \leq n(s-1)} |B(n, w, s)| \geq \frac{s^n}{n(s-1) + 1}$$

$$\log_s \max_w |B(n, w, s)| \geq n - 1 - o(1),$$

□ در حالی که $g(K_n^-, s) \leq K^+ = n - 1$ است.

گراف حدسی از K_n^+ به راحتی تعیین می‌شود اما عدد استقلال آن هنوز شناخته نشده است.

کران‌ها روی عدد حدسی در ۱.۱ رابطه زیر را نتیجه می‌دهند

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq g(K_n^+, s) \leq n - 1. \quad (1.4)$$

اثبات‌های معتبری روی آن کران‌ها خواهیم کرد. ابتدا نمونه دودویی را در نظر می‌گیریم.

گزاره ۲.۱.۴. عدد حدسی دودویی از K_n^+ به شکل زیر است

$$n - \frac{3}{2} \log_2 n - \frac{3}{2} \leq g(K_n^+, 2) \leq n - \log_2(n+2) + 1.$$

برهان. برای کران پایین، قضیه ۲.۲.۳ رابطه زیر را نتیجه می‌دهد جایی که

$$g(K_n^+, 2) \geq \log_{A_H} \left(n, 4, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2 \right) \geq \log_2 \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \log_2 n \geq n - \frac{3}{2} \log_2 n - \frac{3}{2},$$

که نامساوی دوم از ساختار در مرجع [۲۶] و قضیه ۱.۲.۲ به دست می‌آید، که با برهان گزاره

۳.۱.۴ تطبیق می‌دهیم. با استفاده از کران بالا قضیه ۱.۲.۳ و کران ورشاموف در رابطه (۳.۳)

داریم:

$$g(K_n^+, 2) \leq \log_2 A_M(n, n, 2) \leq \log_2 \frac{2^{n+1}}{n+2}.$$

□

حال الفبای کلی را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۳.۱.۴. برای خوشه‌ی مثبت روی n رأس K_n^+ ، داریم:

$$g(K_n^+, s) = 1 \quad \forall s \geq 2$$

$$g(K_n^+, s) = \log_s \left(\left\lfloor \frac{3(s-1)}{2} \right\rfloor + 1 \right) \quad \forall s \geq 2,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(K_3^+, s) = \inf_{s \geq 2} g(K_3^+, s) = 1,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(K_4^+, s) = 2,$$

و برای هر $n \geq 4$

$$n - 3 \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} g(K_n^+, s) \leq n - 2.$$

برهان. ابتدا برای هر n و s داریم $g(K_n^+, s) \leq n - 1$. چون K_n^+ یک دور مثبت است، یک عدد حدسی از فصل ۱ داریم. برای K_n^+ ، فرض کنید x و y در گراف حدسی مجاور نیستند و فرض کنید که $W(x) \leq W(y)$ باشد. سپس ادعا می‌کنیم که $x \leq y$ و $W(y) \geq W(x) + 2$. در واقع مختصات را با i, j و k نشان می‌دهیم. چون y وزن بالاتری دارد، داریم $x_i < y_i$ و چون آن‌ها غیرمجاور نیستند داریم $x_j < y_j$. و همچنین بدون همسایگی باید داشته باشیم $x_k < y_k$. بنابراین هر مجموعه مستقل در گراف حدسی یک زنجیر با طول حداکثر $1 + \lfloor \frac{3(s-1)}{4} \rfloor$ است. برعکس، ساختار زنجیر نامتناهی زیر به صورت بازگشتی است. فرض کنید $c^\circ = (\circ, \circ, \circ)$ و برای هر $k \geq \circ$

$$c^{k+1} = c^k + \begin{cases} (1, \circ, \circ); & k \equiv \circ \pmod{3} \\ (\circ, 1, 1); & k \equiv 1 \pmod{3} \\ (1, \circ, 1); & k \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

دنباله را شروع می‌کنیم

$$c^\circ = (\circ, \circ, \circ), c^1 = (1, 1, \circ), c^2 = (1, 2, 1), c^3 = (2, 2, 2), c^4 = (3, 3, 2), \dots$$

به راحتی چک می‌کنیم که ابتدا عبارت $1 + \lfloor \frac{3(s-1)}{4} \rfloor$ در دنباله متعلق به $[s]^3$ و برای هر $k < l$ ، $L(c^l, c^k) = \circ$ و $L(c^k, c^l) \geq 2$. بنابراین، این عبارت‌ها یک مجموعه مستقل در گراف حدسی $G(K_n^+, s)$ تشکیل می‌دهند.

برای K_n^+ ، کران پایین در (۱.۴) و برای هر $s \geq 2$ ، $g(K_n^+, s) \geq 2$ را داریم. حال حد کران بالا را روی $\limsup_{s \rightarrow \infty} g(K_n^+, s)$ اثبات می‌کنیم. فرض کنید \mathcal{C} بزرگترین مجموعه از نقاط ثابت یک شبکه روی K_n^+ ($n \geq 4$) باشد و فرض کنید که \mathcal{C}_w مجموعه‌ای از کدواژه‌ها در \mathcal{C} با وزن w باشد. اگر $x, y \in \mathcal{C}_w$ متمایز باشند، داریم $L(x, y) > \circ$. چون آن‌ها وزن مساوی دارند و از این رو $K(x, y) \geq 2$ متعلق به \mathcal{C} می‌باشد. به طور مشابه، $L(x, y) \geq 2$ که $d_H(x, y) \geq 4$ را نتیجه می‌دهد. با کران سینگلتون، رابطه‌ی $|C_w| \leq s^{n-3}$ و رابطه‌ی زیر را داریم:

$$g(K_n^+, s) = \log_s \{(n(s-1) + 1)s^n - 3\} = n - 2 + o(1).$$

حال کران پایین روی حد عدد حدسی K_n^+ که خوشه مثبت روی n رأس است را ثابت می‌کنیم. برای هر $m = (m_\circ, m_1, m_2) \in \mathbb{N}^3$ ، $C_m \subseteq [s]^n$ را مانند زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_m = \{x \in [s]^n : W_\circ(x) = m_\circ, W_1(x) = m_1, W_2(x) = m_2\},$$

$$W_{\circ}(x) := \sum_{i=\circ}^{n-1} x_i = W(x),$$

$$W_1(x) := \sum_{i=\circ}^{n-1} i x_i,$$

$$W_2(x) := \sum_{i=\circ}^{n-1} i^2 x_i.$$

ادعا می‌کنیم که برای هر $x, y \in C_m$ و $d_m(x, y) \geq 2$ از این رو C_m یک مجموعه مستقل از گراف حدسی است. ابتدا، چون $w(x) = w(y)$ داریم $d_m(x, y) \geq 1$. فرض کنید $L(x, y) = 1$ ، یعنی برای یک j خاص، $y_j > x_j$ و برای $b \in B \subseteq [n] \setminus \{j\}$ داریم $x_b > y_b$. با استفاده از نمادهای مشخص، فرض کنید $Y_j := y_j - x_j > \circ$ و $X_b := x_b - y_b > \circ$ باشد، در این صورت، داریم:

$$\sum_{b \in B} X_b = Y_j,$$

$$\sum_{b \in B} b X_b = j Y_j,$$

$$\sum_{b \in B} b^2 X_b = j^2 Y_j,$$

و فرض کنید $\sum_{b \in B} (b - j + 1) X_b = Y_j$ و $\sum_{b \in B} (b - j + 1) X_b = Y_j$ باشد. چون برای هر $b \in B$ داریم $c = b - j + 1, C = B - j + 1$ ، جایی که

$$\sum_{c \in C} \hat{X}_c = \sum_{c \in C} c \hat{X}_c = \sum_{c \in C} C^2 \hat{X}_c = Y_j.$$

چون $j \notin B$ داریم $1 \notin C$. همچنین اگر $d \in C \setminus \{\circ\}$ ، آن‌گاه رابطه $\circ = \sum_{c \in C} (C^2 - C) \hat{X}_c \geq \sum_{c \in C} c \hat{X}_c = \circ < Y_j$ و $C = \{\circ\}$ بنا بر این است. که تناقض است. حال برای هر $x \in [s]^n$ و $2 \leq i \leq \circ$ ، $\circ \leq W_i(x) \leq n^{i+1}(s-1)$ ، آن‌گاه داریم

$$\max_m |C_m| \geq s^n \{(n(s-1) + 1) + 1(n^2(s-1) + 1)(n^3(s-1) + 1)\}^{-1},$$

$$\log_s g(K_n^+, s) \geq n - 3 - o(1).$$

□

ابتدا، یادآوری می‌کنیم که برای یک گراف جهت‌دار بدون علامت D° ، حد عدد حدسی سوپریمم آن است.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(D^\circ, s) = \sup_{s \geq 2} g(D^\circ, s) = H(D^\circ).$$

که معروف به آنتروپی گراف جهت‌دار در مراجع [۴۲] و [۴۳] است. هرچند که K_n^+ یک مثالی است که کاملاً عکس است، برای

$$g(K_n^+, s) > \lim_{s \rightarrow \infty} g(K_n^+, s) \quad \forall s \geq 3.$$

عدد حدسی گراف‌های جهت‌دار علامت‌دار، برخی رفتارهایی را که در گراف‌های بدون علامت دیده نمی‌شود را می‌تواند نشان دهند. جالب توجه است که خوشه منفی K_n^- رفتاری شبیه یک گراف بدون علامت دارد چون در واقع حد عدد حدسی، سوپریمم آن است. دوماً، بعضی نتایج به دوره‌های نامنفی اشاره می‌کند که تمایل به تولید بسیاری از نقاط ثابت دارد که این عکس کران بالا روی عدد حدسی در قضیه ۱.۲.۳ است که به طور مستقیم وابسته به بعد نامنفی می‌باشد. فرض کنید $D_1 = K_{n+1}^+$ و $D_2 = K_n^-$ دو گراف جهت‌دار علامت‌دار باشند به طوری که D_1 دوره‌های نامنفی مجزای بیشتری از D_2 دارد در حالی که D_2 عدد حدسی بالاتری دارد. علاوه بر این عدد حدسی یک تابع افزایشی از تعداد دوره‌های نامنفی مجزا نیست که این برخلاف نظریه رایج ذکر شده در بالا است و به نحوی بازتاب نتیجه در مرجع [۶] روی تعداد نقاط ثابت شبکه‌های رابط است. این شبکه‌ها، شبکه‌های بولی هستند که هر تابع جدید موضعی $f_i(x)$ یک پیوستگی از کلمه‌ها است. علامت مثبت یا منفی روی کمان (j, i) مشخص می‌کند که کلمه x_j یا $-x_j$ است. در مرجع [۶] نشان داده شده است که حداکثر نقاط ثابت از شبکه رابط بدون طوقه در گراف برهم‌کنش با استفاده از یک اجتماع مجزا از مثلث‌ها به دست می‌آید که همه کمان‌ها، منفی علامت‌دار شده‌اند. علاوه بر این به حداکثر رساندن تعداد نقاط ثابت در نمونه رابط بر خلاف به حداکثر رساندن دوره‌های مثبت مجزا می‌باشد. این بخش را با یک سؤال معمولی با توجه به شکاف گسترده در گزاره ۶ تمام می‌کنیم. حد $\lim_{s \rightarrow \infty} g(D, s)$ برای $n \geq 5$ اگر وجود داشته باشد چیست؟

۲.۴ همگرایی برای توابع مثبت و منفی

در این بخش عملکرد ترکیبی روی گراف‌های حدسی و نظریه کدگذاری در مورد شبکه‌های اصلی با یک مجموعه‌ای فرضی از نقاط ثابت را در نظر نمی‌گیریم. قابل توجه است گاهی اوقات مجموعه فرضی از نقاط ثابت $S \subseteq [s]^n$ را شبکه $f \in F(D, s)$ تصدیق می‌کند که به راحتی قابل تجزیه و تحلیل است. ویژگی اصلی که باید مطالعه کنیم این است که آیا شبکه واقعاً همگرا به S است یعنی برای هر x یک عدد صحیح مثبت k وجود دارد به طوری که $f^k(x) \in S$ باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که همگرایی به یک مجموعه از نقاط ثابت با اندازه ماکسیمال برای شبکه‌های $F(K_n^-, s)$ هرگز اتفاق نمی‌افتد.

گزاره ۱.۲.۴. برای هر $0 \leq w \leq n(s-1)$ ، مجموعه نقاط ثابت تابع در $F(K_n^-, s)$

با روابط زیر تعریف می‌شود:

$$f_i(x) = S \left(w - \sum_{j \neq i} x_j \right),$$

که S یک تابع از \mathbb{Z} به $[s]$ تعریف می‌شود

$$S(a) := \begin{cases} \circ; & a < \circ, \\ a; & \circ \leq a \leq s-1, \\ s-1; & a > s-1. \end{cases}$$

هرچند، هیچ تابعی در $F(K_n^-, s)$ همگرا به $B(n, w, s)$ برای هر $s-1 \leq w \leq (n-1)(s-1)$ نیست. به ویژه برای $n \leq 2$ هیچ تابعی همگرا به مجموعه‌ای بزرگتر از نقاط ثابت $B(n, \lfloor \frac{n(s-1)}{2} \rfloor, s)$ نیست.

برهان. برای تابع تعریف شده بالا داریم $x = f(x)$ است اگر و فقط اگر برای هر i ، داشته باشیم $x_i = w - \sum_{j \neq i} x_j$ که معادل است با $W(x) = w$. حال فرض کنیم $f \in F(K_n^-, s)$ ، جایی که $s-1 \leq w \leq (n-1)(s-1)$ همگرا به $B(n, w, s)$ است. آن‌گاه $f(\circ, \dots, \circ)$ را برای هر x و i که $f_i(x) \leq f_i(\circ, \dots, \circ)$ باشد را در نظر می‌گیریم. چون همیشه یک حالت $x \in B(n, w, s)$ وجود دارد به طوری که $x_i = s-1$ است. حال برای هر i باید داشته باشیم $f_i(\circ, \dots, \circ) = s-1$. و همچنین به طور مشابه رابطه‌ی $f(s-1, \dots, s-1) = (\circ, \dots, \circ)$ را داریم که این دو حالت تشکیل یک دور مجانبی را می‌دهند. \square

برای K_n^+ ، قادر به توضیح مجموعه ماکسیمم از نقاط ثابت نیستیم. در نمونه دودویی دیدیم که یک کد بهینه با وزن ثابت نزدیک به حالت مطلوب خواهد شد.

فصل ۵

مقایسه کران‌های به دست آمده در بخش‌های قبلی

در این فصل به مقایسه کران‌های متفاوتی که در فصل‌های قبل نتیجه گرفتیم، می‌پردازیم. هر چند مقایسه‌ی کران‌های به دست آمده در فصل‌های قبل که وابسته به پارامترهای مختلفی از گراف جهت‌دار و روی اندازه الفبا می‌باشد، مشکل است. با وجود اینکه بعضی از آن‌ها برای کلاس‌های جهت‌دار علامت‌دار معتبر هستند، فقط $s = 2$ را در نظر خواهیم گرفت. چون نتایج باید برای شبکه‌های بولی معتبر باشد و همچنین در اینجا رابطه‌های زیادی بین فاصله‌های متفاوت داریم که فقط گراف‌های جهت‌دار مثبت D^+ مهم‌ترین حالت‌های خاص هستند، چون کران‌های بهتری را به ما می‌دهند. برای مقایسه کران‌های متفاوت، رفتار مجانبی آن‌ها را به کار خواهیم برد. این تکنیک رایج در نظریه کدگذاری در مرجع [۳۴] است. برای این منظور یک دنباله از کدهای دودویی \mathcal{C} از طول n و حداقل فاصله d_n (برای فاصله $\mu \in \{d_H, d_m, d_M\}$) به طوری که $|\mathcal{C}_n| = A_\mu(n, d_n, 2)$ را بررسی می‌کنیم. مفهوم مجانبی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{d} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n},$$

$$\bar{A}_\mu(\bar{d}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\log_2 A_\mu(n, n\bar{d}, 2)}{n}.$$

و همچنین در اینجا به بررسی این که چطور نرخ مجانبی \bar{A}_μ مانند یک تابع از \bar{d} رفتار می‌کند، می‌پردازیم. به عنوان مثال، کران گیلبرت در (۱.۳) و تخمین روی جمع‌های ضرایب چند جمله‌ای در (۶.۳) رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌دهند:

$$\bar{A}_H(\bar{d}) \geq 1 - H(\bar{d})$$

که بهترین کران مجانبی شناخته شده است. از سوی دیگر، کران سینگلتون را به صورت زیر داریم:

$$\bar{A}_H(\bar{d}) \leq \bar{d}$$

و نسخه مجانبی کران گوی بسته‌بندی در رابطه ۲.۳ به خوبی در زیر تعریف شده است:

$$\bar{A}_H(\bar{d}) \leq 1 - H\left(\frac{\bar{d}}{2}\right)$$

که کران گوی بسته‌بندی، لزوماً کران بالای مجانبی خوبی نیست. در عوض کران معروف $MRRW$ ^۱ رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\bar{A}_H(\bar{d}) \leq MRRW(\bar{d}),$$

که

$$MRRW(\bar{d}) = \min_{0 < \mu \leq 1 - 2\bar{d}} \{1 + h(u^2) - h(u^2 + 2\bar{d}_u + 2\bar{d})\}$$

$$h(x) = H\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right)$$

به ویژه، اگر $\bar{d} \geq \frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه $2\bar{d} \geq 1$ و داریم $0 < \mu \leq 1 - 2\bar{d} \leq 0$. حال چون $0 < u \leq 1 - 2\bar{d} \leq 0$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که $u = 0$ و $h(u^2 = 0) = H\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-u^2}\right) = H(0) = 0$ است. چون $h(2\bar{d}) = H\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-2\bar{d}}\right) = H\left(\frac{1}{2}\right)$ می‌باشد، لذا $h(u^2 - 2\bar{d}_u + 2\bar{d}) = h(2\bar{d})$ است. حال داریم $H\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ و با توجه به تعریف، کران $MRRW(\bar{d}) = 0$ است. نتایج روی فاصله‌های متفاوت در لم ۱.۱.۳ نشان می‌دهد که رابطه زیر برقرار است:

$$\bar{A}_m(\bar{d}) = \bar{A}_M(\bar{d}) = \bar{A}_H(2\bar{d}).$$

برای مطالعه رفتار مجانبی عدد حدسی نیاز به معرفی بعضی مفاهیم مجانبی برای پارامترهای گراف جهت‌دار داریم.

فرض کنید $\{D_n^+\}$ یک دنباله از گراف‌های جهت‌دار مثبت روی n رئوس با کمترین مجموعه بازخورد رأسی از اندازه k_n^+ ، کمر مثبت γ^+ و حداقل درجه ورودی δ_n^+ باشد، تعاریف زیر را در

^۱McEliece-Rodemich-Rumsey-Welch

نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(D_n^+, \Upsilon)}{\Upsilon} &= \bar{g}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n^+}{n} &= \bar{k}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n^+}{n} &= \bar{\gamma}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n^+}{n} &= \bar{\delta}.\end{aligned}$$

با استفاده از مفاهیم بالا، کران‌ها به شکل مجانبی تعریف می‌شوند. در ادامه گزاره‌ای برای کران‌های بالا و پایین بر پایه‌ی رفتار مجانبی خواهیم داشت.

گزاره ۱.۰.۵. برای عدد حدسی به طور مجانبی دو کران پایین به صورت زیر است:

$$\bar{g} \geq \frac{1}{\Upsilon} \bar{\delta} \quad (۱.۵)$$

$$\bar{g} \geq \bar{A}_H(\Upsilon(1 - \bar{\delta})) \geq 1 - H(\Upsilon(1 - \bar{\delta})) \quad \text{برای } \bar{\delta} \geq \frac{\Upsilon}{4}, \quad (۲.۵)$$

و همچنین دو کران بالا را برای آن داریم:

$$\bar{g} \leq \bar{A}_H(\Upsilon \bar{\gamma}) \leq MRRW(\Upsilon \bar{\gamma}), \quad (۳.۵)$$

$$\bar{g} \leq \bar{k}. \quad (۴.۵)$$

برهان. اولین کران پایین با استفاده از قضیه ۲.۳.۲ به دست می‌آید. ابتدا داریم:

$$g(D, \Upsilon) \geq \frac{\delta}{\Upsilon} - \sqrt{\frac{\ln(\Upsilon n) \delta}{\Upsilon}}.$$

تعریف مجانبی را بر روی آن اعمال می‌کنیم

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(D, \Upsilon)}{n} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\delta}{\Upsilon} - \sqrt{\frac{\ln(\Upsilon n) \delta}{\Upsilon}}}{n}, \\ \bar{g} &\geq \frac{1}{\Upsilon} \bar{\delta}.\end{aligned}$$

همچنین برای یک گراف جهت‌دار مثبت D^+ داریم $\phi = n - \delta^+ + 1$. از این رو با توجه به قضیه ۲.۲.۳ رابطه زیر برقرار است:

$$\bar{g} \geq \bar{A}_m(1 - \bar{\delta}) = \bar{A}_H(\Upsilon(1 - \bar{\delta})).$$

و در ادامه اثبات، کران گیلبرت مجانبی دومین کران پایین $(1 - H(\Upsilon(1 - \bar{\delta})))$ را نتیجه می‌دهد. دو کران پایین باقیمانده نسبت به $\bar{\delta}$ به طور مجانبی دقت زیادی ندارد. کران پایین c^+ در رابطه (۱.۵) که از بالا کران‌دار شده با $\frac{n}{\Upsilon^+}$ است، به طور مجانبی صفر را نتیجه می‌دهد، در

حالیکه قضیه ۱.۳.۲ $\frac{1}{4} \log_2 \delta$ را نتیجه می‌دهد. برای کران‌های بالا با توجه به قضیه ۱.۲.۳ رابطه زیر را داریم:

$$\bar{g} \leq \bar{A}_M(\bar{\gamma}) = \bar{A}_H(2\bar{\gamma}).$$

کران MRRW، اولین کران ذکر شده در بالا را نتیجه می‌دهد و کران مجموعه رأسی بازخورد، دومین کران بالا که $\bar{g} \leq \bar{k}$ است را نتیجه می‌دهد. □

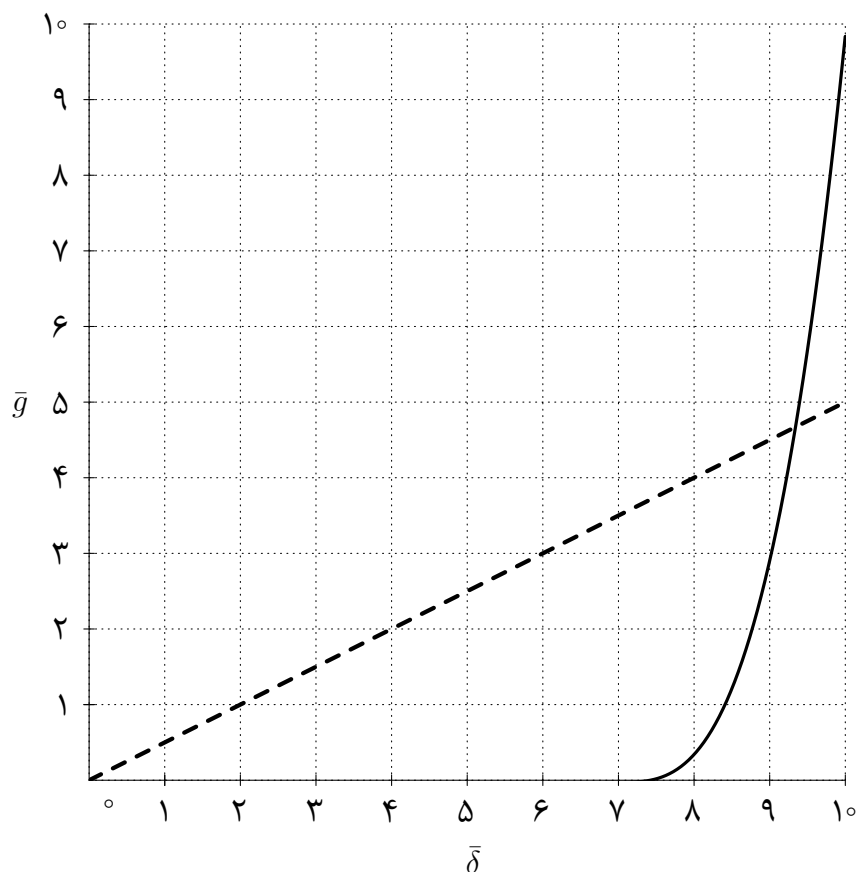
کران‌های پایین در رابطه‌های (۱.۵) و (۲.۵) آن‌هایی را که وابسته به پارامتر یکسان δ هستند، مقایسه می‌کنند که در شکل ۵ نشان می‌دهیم. برای مقایسه صحیح کران‌های بالا در رابطه‌های (۳.۵) و (۴.۵)، در شکل ۵ مقادیر $\bar{\gamma}$ برای کران MRRW در رابطه (۳.۵) که بهتر از کران بازخورد در رابطه (۴.۵) است را برای یک مقدار فرضی \bar{k} نشان می‌دهیم. ابتدا فرض می‌کنیم که $\gamma^+ \leq n - k^+ + 1$ باشد، برای هر گراف جهت‌دار علامت‌دار D داریم:

$$\bar{\gamma} \leq 1 - \bar{k}, \quad (5.5)$$

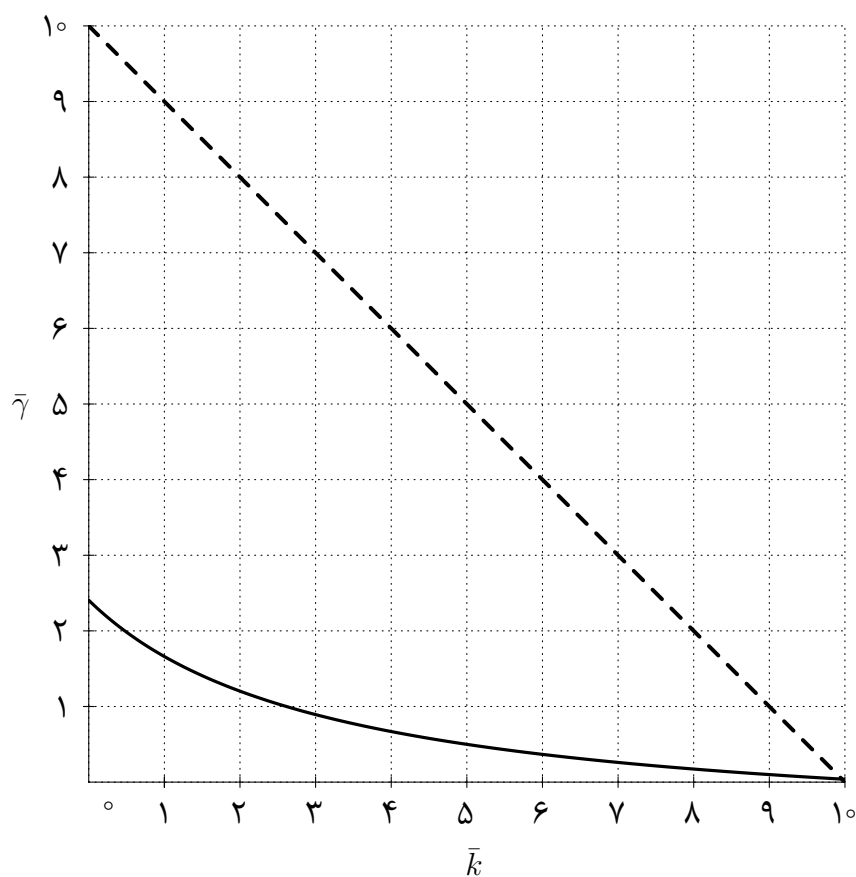
از این رو $\bar{\gamma}$ زیر خط منحنی بالا واقع است. چون MRRW یک دوسویی از $[\frac{1}{4}, 1]$ به $[0, 1]$ است، می‌توان نوشت که کران MRRW بهتر است اگر و فقط اگر

$$\bar{\gamma} \geq \frac{1}{4} MRRW^{-1}(\bar{K}). \quad (6.5)$$

هرجایی بین دو خط منحنی برای $\bar{\gamma}$ ، کران در قضیه ۱.۲.۳ بهتر از کران بازخورد مجموعه رأسی است. به ویژه اگر $\frac{1}{4} \geq \bar{\gamma}$ ، باشد، آن‌گاه قضیه ۱.۲.۳، نتیجه می‌دهد که $\bar{g} = 0$ است. حال می‌توانیم نتیجه بگیریم که کران K^+ ضعیف‌تر از کران نظریه کدگذاری در قضیه ۱.۲.۳ است. K^+ که در تناظر با کران سینگلتون برای کدها با کمترین فاصله همینگ $n - K^+ + 1$ است، یک توضیح روشنی برای درک این موضوع می‌باشد. قبلاً اشاره کردیم که کران سینگلتون نسبت به نمونه دودویی گرایش ضعیفی دارد. بنابراین اگر $n - K^+ + 1$ بالاتر از $\bar{\gamma}$ شود، کران K^+ دقت زیادی نخواهد داشت.



شکل ۱.۵: - کران پایین در رابطه (۲.۵) و -- کران پایین در رابطه (۱.۵) است. کران‌های پایین مجانبی روی عدد حدسی به عنوان تابعی از کمترین درجه ورودی می‌باشند (با مقیاس ۱٪).



شکل ۲.۵: - کران بالا در رابطه (۵.۵) و -- کران پایین در رابطه (۶.۵) است. بین دو منحنی، بهبود نسبی روی کران بالای مجانبی \bar{k} را نشان می‌دهد (با مقیاس ۰.۱).

پیوست آ

نماد

نام	نماد
گراف	G
رأس‌ها	V
یال‌ها	E
گراف جهت‌دار	D
علامت گراف	λ
گراف برهم‌کنش	$G(f)$
مجموعه رأسی بازخورد	K^+
عدد استقلال گراف	$\alpha(G)$
درجه ورودی متوسط	d
درجه ورودی مینیمم	δ
درجه ورودی ماکسیمم	Δ
کمر گراف	γ^+
زیرگراف القایی	$D[U]$
مجموعه تمام شبکه‌ها روی D	$F(D, s)$
گراف حدسی	$G(D, s)$
عدد حدسی	$g(D, s)$
تعداد ماکسیمم دورهای نامنفی مجزا	c^+
دور مستقیم روی n رأس	C_n^+
یک دنباله از گراف‌های جهت‌دار مثبت روی n رأس	D_n^+
خوشه مثبت روی n رأس	K_n^+
خوشه منفی روی n رأس	K_n^-
مینیمم درجه ورودی	δ_n^+
رفتار مجانبی	\bar{d}
فاصله همینگ	$d_H(x, y)$
مینیمم فاصله	$d_m(x, y)$
ماکسیمم فاصله	$d_M(x, y)$
تابع فاصله روی $[s]^n$	μ
تابع آنتروپی	$H(p)$
یک مجموعه وسیع و زیرگراف القا شده از $G(D, s)$	T
همسایگی‌های ورودی i	$N(i)$
مجموعه‌ی تمام نقاط ثابت شبکه‌ی f	$Fix(f)$

مراجع

- [1] E. Agrell, A. Vardy, K. Zeger and Upper bounds for constant-weight codes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 46 (2000), 2373–2395.
- [2] R. Ahlswede, N. Cai, S. Y. R. Li and R. W. Yeung, Network information flow, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 46 (2000), 1204–1216.
- [3] N. Alon, E. Lubetzky, U. Stav, A. Weinstein and A. Hassidim, Broadcasting with side information, in *Proceedings of IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE, Piscataway, NJ*, 823–832 (2008).
- [4] J. Aracena, J. Demongeot and E. Goles, Fixed points and maximal independent sets in AND/OR networks, *Discrete Appl. Math.*, 138 (2004), 277–288.
- [5] J. Aracena, J. Demongeot and E. Goles, Positive and negative circuits in discrete neural networks, *IEEE Trans. Neural Netw.*, 15 (2004), 77–83.
- [6] J. Aracena, A. Richard and L. Salinas, Maximum number of fixed points in AND-OR-NOT networks, *J. Comput. System Sci.*, 80 (2014), 1175–1190.
- [7] C. L. Barrett, H. S. Mortveit and C. M. Reidys, ETS IV: Sequential dynamical systems: Fixed points, invertibility and equivalence, *Appl. Math. Comput.*, 134 (2003), 153–171.
- [8] Z. Bar-Yossef, Y. Birk, T. S. Jayram and T. Kol, Index coding with side information, in *Proceedings of IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE, Piscataway, NJ*, (2006), 197–206.
- [9] Z. Bar-Yossef, Y. Birk, T. S. Jayram and T. Kol, Index coding with side information, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 57 (2011), 1479–1494.
- [10] G. Bernot, J. P. Comet, A. Richard, M. Chaves, J. L. Gouze and F. Dayan, Modeling and analysis of gene regulatory networks, in *Modeling in Computational Biology and Biomedicine*, Springer-Verlag, Berlin, (2013), 47–80.

- [11] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph theory with applications*. London: Macmillan, (1976).
- [12] J. M. Borden, Bounds and constructions for error correcting/detecting codes on the Z-channel, in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory, IEEE, New York*, (1981), 94–95.
- [13] A. E. Brouwer, J. B. Shearer, N. J. A. Sloane and W. D. Smith, A new table of constant weight codes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 36 (1990), 1334–1380.
- [14] A. Brouwer, *Bounds for Binary Constant Weight Codes*, available at: <http://www.win.tue.nl/aeb/codes/Andw.html>.
- [15] A. Brouwer, *Table of General Binary Codes*, available at: <http://www.win.tue.nl/aeb/codes/binary-1.html>.
- [16] N. G. De Bruijn, Ca. van Ebbenhorst Tengbergen and D. Kruyswijk, On the set of divisors of a number, *Nieuw Arch. Wiskd.(2)*, 23 (1951), 191–193.
- [17] H. De Jong, Modeling and simulation of genetic regulatory systems: A literature review, *J. Comput. Biol.*, 9 (2002), 67–103.
- [18] M. Effros, S. El Rouayheb and M. Langberg, An equivalence between network coding and index coding, *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory, IEEE, Piscataway, NJ*, (2013), 967–971.
- [19] S. El Rouayheb, A. Sprintson, and C. Georghiades, On the index coding problem and its relation to network coding and matroid theory, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 56 (2010), 3187–3195.
- [20] M. Gadouleau, Closure solvability for network coding and secret sharing, *IEEE Trans. Inform. Theory*, (2013), 7858–7869.
- [21] M. Gadouleau, A. Richard and S. Riis, Fixed points of Boolean networks, Guessing graphs, and coding theory, *SIAM J. Discrete Math.*, 29(4), (2016), 2312-2335.
- [22] M. Gadouleau and S. Riis, Graph-theoretical constructions for graph entropy and network coding based communications, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 57 (2011), 6703–6717.
- [23] E. Goles, Dynamics of positive automata networks, *Theoret. Comput. Sci.*, 41 (1985), 19–32.

- [24] E. Goles and S. Martinez, *Neural and Automata Networks: Dynamical Behavior and Applications*, Kluwer Academic Publications, Norwell, MA, (1990).
- [25] E. Goles and M. Tchuente, Iterative behaviour of generalized majority functions, *Math. Social Sci.*, 4 (1983), 197–204.
- [26] R. L. Graham and N. J. A. Sloane, Lower bounds for constant weight codes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 26 (1980), 37–43.
- [27] K. Gurney, *An Introduction to Neural Networks*, CRC Press, London, (1997).
- [28] W. Hoeffding, Probability inequalities for sums of bounded random variables, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 58 (1963), 13–30.
- [29] J. Hopfield, Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proc. Nat. Acad. Sc. USA.*, 79 (1982), 2554–2558.
- [30] G. Karlebach and R. Shamir, Modelling and analysis of gene regulatory networks, *Nature*, 9 (2008), 770–780.
- [31] T. Klove, *Error Correcting Codes for the Asymmetric Channel*, available at: <http://www.iu.uib.no/torleiv/rap95.pdf> (1995).
- [32] S. A. Kauffman, Metabolic stability and epigenesis in randomly connected nets, *J. Theoret. Biol.*, 22 (1969), 437–467.
- [33] W. S. Mac Culloch and W. S. Pitts, A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, *Bull. Math. Bio. Phys.*, 5 (1943), 113–115.
- [34] F. J. Mac Williams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, North Holland, Amsterdam, (1977).
- [35] A. Mazumdar, On a duality between recoverable distributed storage and index coding, in *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory, IEEE, Piscataway, NJ*, (2014), 1977–1981.
- [36] H. S. Mortveit and C. M. Reidys, *An Introduction to Sequential Dynamical Systems*. Springer, New York, (2008).
- [37] S. Poljak and M. Sura, On periodical behaviour in societies with symmetric influences, *Combinatorica*, 3 (1983), 119–121.

-
- [38] E. Remy, P. Ruet and D. Thieffry, Graphic requirements for multistability and attractive cycles in a Boolean dynamical framework, *Adv. Appl. Math.*, 41 (2008), 335–350.
- [39] A. Richard, Positive circuits and maximal number of fixed points in discrete dynamical systems, *Discrete Appl. Math.*, 157 (2009), 3281–3288.
- [40] A. Richard, Fixed point theorems for boolean networks expressed in terms of forbidden subnetworks, *Theoret. Comput. Sci.*, 583 (2015), 1–26.
- [41] A. Richard and J. P. Comet, Necessary conditions for multistationarity in discrete dynamical systems, *Discrete Appl. Math.*, 155 (2007), 2403–2413.
- [42] S. Riis, Utilising public information in network coding, in *General Theory of Information Transfer and Combinatorics, Lecture Notes in Comput. Sci.*, 4123 (2006), 866–897.
- [43] S. Riis, Graph entropy, network coding and guessing games, *preprint, arXiv:0711*, 4175 (2007).
- [44] S. Riis, Information flows, graphs and their guessing numbers, *Electron. J. Combin.*, 14, R44 (2007).
- [45] F. Robert, Discrete Iterations: A Metric Study, *Springer Ser. Comput. Mat.*, 6, Springer, (1986).
- [46] M. H. Shih and J. L. Dong, A combinatorial analogue of the Jacobian problem in automata networks, *Adv. Appl. Math.*, 34 (2005), 30–46.
- [47] R. Thomas, Boolean formalization of genetic control circuits, *J. Theoret. Biol.*, 42 (1973), 563–585.
- [48] R. Thomas, On the relation between the logical structure of systems and their ability to generate multiple steady states or sustained oscillations, *Springer Series in Synergies*, 9 (1980), 180–193.
- [49] R. Thomas and R. D’Ari, *Biological Feedback*, CRC Press, 1990.
- [50] R. Thomas and M. Kaufman, Multistationarity, the basis of cell differentiation and memory. II. Logical analysis of regulatory networks in terms of feedback circuits, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 11 (2001), 180–195.
- [51] L. Tolhuizen, The generalized Gilbert–Varshamov bound is implied by Turan’s theorem, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 43 (1997), 1605–1606.

- [52] J. H. Van Lint, J. Hendricus. *to coding theory*. Spring Science, Business Media, (2012).
- [53] R. R. Varshamov, Some features of linear codes that correct asymmetric errors, *Soviet Physics Doklady*, 9 (1965), 538–540.
- [54] R. W. Yeung, S. Y. R. Li, N. Cai and Z. Zhang, *Network coding theory*, 2, Foundation and Trends in Communications and Information Theory, no, Publishers, Hanover, MA, (2006).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Saturation	اشباع
Code alphabet	الفبای کد
Size	اندازه
Labeled	برچسب
Antichain	پادزنجیر
Restriction	تحدید
Trail	گذر
Frustrate	خنثی
Clique	خوشه
Degree	درجه
Cycle	دور
Positive cycle	دور مثبت
Nonnegative cycle	دور نامنفی
Nonpositive cycle	دور نامثبت
Chain	زنجیر
Subgraph	زیرگراف
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Network	شبکه
Boolean network	شبکه بولی
Loop	طوقه
Independence number	عدد استقلال
Guessing number	عدد حدسی
Signed	علامت‌دار
Hamming distance	فاصله همینگ
Turan theorem	قضیه توران

Sperner theorem	قضیه اسپرنر
Binary asymmetric channel	کانال نامتقارن دودویی
Block code	کد بلوکی
Liner code	کد خطی
Codeword	کدواژه
Coding	کدگذاری
Index coding	کدگذاری شاخص
Network coding	کدگذاری شبکه
Singleton bound	کران سینگلتون
Sphere-packing bound	کران گوی بسته‌بندی
Gilbert bound	کران گیلبرت
Girth	کمر
Graph	گراف
Interaction graph	گراف برهم‌کنش
Digraph	گراف جهت‌دار
Guessing graph	گراف حدسی
Simple graph	گراف ساده
Complete graph	گراف کامل
Walk	گشت
Order	مرتبه
Path	مسیر
Adjacent	مجاور
Feedback vertex set	مجموعه بازخورد رأسی
Indepent vertex set	مجموعه مستقل رأسی
Field	میدان
Unate	ناوابسته
Fixed point	نقطه ثابت
Code symbol	نماد کد
Connected	همبند
In-neighbor	همسایگی ورودی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Antichain	پادزنجیر
Binary asymmetric channel	کانال نامتقارن دودویی
Block code	کد بلوکی
Boolean network	شبکه بولی
Chain	زنجیر
Clique	خوشه
Code alphabet	الفبای کد
Code symbol	نماد کد
Codeword	کدواژه
Coding	کدگذاری
Complete graph	گراف کامل
Connected	همبند
Cycle	دور
Degree	درجه
Digraph	گراف جهت‌دار
Feedback vertex set	مجموعه بازخورد رأسی
Field	میدان
Fixed point	نقطه ثابت
Frustrate	خنثی
Gilbert bound	کران گیلبرت
Girth	کمر
Graph	گراف
Guessing graph	گراف حدسی
Guessing number	عدد حدسی

Hamming distance	فاصله همینگ
Independence number	عدد استقلال
Independent vertex set	مجموعه مستقل رأسی
Index coding	کدگذاری شاخص
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Interaction graph	گراف برهم‌کنش
In-neighbor	همسایگی ورودی
Labeled	برچسب
Liner code	کد خطی
Loop	طوقه
Network	شبکه
Network coding	کدگذاری شبکه
Nonnegative cycle	دور نامنفی
Nonpositive cycle	دور نامثبت
Order	مرتبه
Path	مسیر
Positie cycle	دور مثبت
Restriction	تحدید
Saturation	اشباع
Signed	علامت‌دار
Simple graph	گراف ساده
Singleton bound	کران سینگلتون
Size	اندازه
Sperner theorem	قضیه اسپرنر
Sphere-packing bound	کران گوی بسته بندی
Subgraph	زیرگراف
Trail	گذر
Turan theorem	قضیه توران
Unate	ناوابسته
Walk	گشت

Abstract

In this thesis, we are interested in the number of fixed points of functions $f : A^n \rightarrow A^n$ over a finite alphabet A defined on a given signed digraph D . We first use techniques from network coding to derive some lower bounds on the number of fixed points that only depends on D . We then study relationships between the number of fixed points of f and problems in coding theory, especially the design of codes for the asymmetric channels. Using these relationships, we bring upper and lower bounds on the number of fixed points, which significantly improve those given in the literature. We also unveil some interesting behavior of the number of fixed points of functions with a given signed digraph when the alphabet varies. We finally prove that signed digraphs with more (disjoint) positive cycles actually do not necessarily have functions with more fixed points.

Keywords: Boolean networks, Fixed points, Signed digraphs, Guessing number, Error-correcting codes.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and Combinatorics

**Coding Of Asymmetric Channels Using The
Fixed Points Of Boolean Networks**

By: Afsane Osmani

Supervisors

Dr. Nader Jafari Rad

Dr. Abdollah Alhevaz

September 2017