

صلاة الاضلاع



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

شاخص رنگ آمیزی یک به یک گرافها

نگارنده: فرشته یزدانی

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

استاد مشاور

دکتر عبدالله آل هوز

شهریور ۱۳۹۶

به امید درک رازهای پنهانی قصیده‌ی آسمانی عشق
این پایان نامه را که ذره‌ای از تلاش آدمی
برای ورود به گوشه‌ای از منظومه‌ی پررغز و راز، هستی است را
به پیشگاه پاک استوره‌های صبر و وفاداری
که در عرصه‌ی زندگی ناملایمات، تلخی‌ها را بارها و بارها،
برای پیشرفت‌های بیشتر این حقیر،
به جان خریدند

پدر و مادر مهربانم

تقدیم می‌کنم.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود آدمی را زیور غقل آراست.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر میثم علیشاهی، استاد بزرگوارم
که در راستای پیشروی این پایان‌نامه از راهنمایی‌های ارزشمندشان بهره‌برده‌ام کمال تشکر و قدردانی
نمایم.

از جناب آقای دکتر عبدالله آل‌هوز استاد مشاورم که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل
نمودند و در راستای آماده‌سازی هر چه بهتر شدن این پایان‌نامه اینجانب را مورد راهنمایی قرار داده‌اند
کمال تشکر و قدردانی دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر جعفری‌راد و جناب آقای دکتر رحیمی‌شعرباف
که داوری این پایان‌نامه را برعهده گرفتند سپاس‌گذار نمایم.

فرشته یزدانی

شهریور ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **فرشته یزدانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **شاخص رنگ آمیزی یک به یک گراف ها**، تحت راهنمایی **دکتر میثم علیشاهی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فرشته یزدانی

شهریور ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

یک رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک از گراف G ، یک نسبت دهی رنگ‌ها به رأس‌های آن است به‌طوری‌که تعیین این نسبت دهی به همسایگی هر رأس یک نگاشت یک‌به‌یک القاء کند. عدد رنگی یک‌به‌یک گراف G که با $\chi_i(G)$ نشان داده می‌شود کوچکترین عدد طبیعی k است که برای آن یک رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک با k رنگ وجود دارد. رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک گراف G ، رنگ‌آمیزی c از یال‌های G است به‌طوری‌که اگر یال‌های e_1, e_2, e_3 در G متوالی باشند، آنگاه $c(e_1) \neq c(e_3)$. کمترین تعداد رنگ‌های ممکن در این رنگ‌آمیزی را عدد رنگی یالی یک‌به‌یک می‌گوییم و با $\chi'_i(G)$ نمایش می‌دهیم. در این پایان‌نامه نتایجی در خصوص رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک، یالی یک‌به‌یک و یالی سه متوالی را بیان می‌کنیم. همچنین ارتباط بین این پارامترها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: عدد رنگی یک‌به‌یک، عدد رنگی یالی سه متوالی، عدد رنگی یالی یک‌به‌یک

فهرست مطالب

م	فهرست تصاویر
س	فهرست جداول
۱	۱ تعاریف و مباحث مقدماتی
۱	۱.۱ نظریه گراف
۹	۱.۱.۱ رنگ‌آمیزی گراف‌ها
۱۲	۲.۱ نظریه کدگذاری
۱۲	۱.۲.۱ تاریخچه
۱۳	۲.۲.۱ تعاریف
۱۷	۳.۱ نظریه پیچیدگی
۱۹	۲ رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک رأسی
۱۹	۱.۲ مقدمه
۲۰	۲.۲ نتایج پایه
۲۳	۳.۲ عدد‌رنگی یک‌به‌یک گراف مکعب Q_n
۲۷	۴.۲ پیچیدگی محاسباتی
۲۹	۳ رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی
۲۹	۱.۳ مقدمه
۳۲	۲.۳ کران‌هایی از عدد‌رنگی یالی سه متوالی
۳۹	۴ رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک
۳۹	۱.۴ مقدمه
۴۳	۲.۴ w' رنگ‌آمیزی یالی یک به یک گراف‌ها
۴۵	۳.۴ کران‌هایی در شاخص رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک
۴۹	۴.۴ عدد‌رنگی یالی یک‌به‌یک گراف‌های شبکه‌ای
۵۱	۵.۴ پیچیدگی محاسباتی

۵۵	آ نماد
۵۷	مراجع
۵۹	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۶۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۲	گراف چندگانه G	۱.۱
۳	گراف W_8	۲.۱
۴	گراف ۳-منتظم	۳.۱
۵	یکریختی	۴.۱
۵	گراف همسانریخت	۵.۱
۵	گراف تهی N_4	۶.۱
۶	زیرگراف القایی، زیرگراف فراگیر و گراف G	۷.۱
۷	گراف کامل دو بخشی $K_{2,3}$ و گراف ستاره $K_{1,11}$	۸.۱
۷	گراف ۳-مکعب Q_3	۹.۱
۸	گراف خطی $L(G)$	۱۰.۱
۸	درخت T	۱۱.۱
۸	گراف دوستی	۱۲.۱
۹	حاصلضرب دکارتی $G \square H$	۱۳.۱
۱۱	گراف گروتز	۱۴.۱
۳۰	$\psi'_{3c}(P) = 3$ رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی گراف پترسن با ۳	۱.۳
۳۳	$\psi'_{3c}(H) = 4$ و $\psi'_{3c}(G) = 3$	۲.۳
۳۴	مجموعه غالب	۳.۳
۳۷	$4 = \max\{ V_1 , V_2 \} < \psi'_{3c}(G) = 5$	۴.۳
۴۰	گراف پترسن P	۱.۴
۴۳	$\chi'_i(G) = 3$ گراف دوستی با ۳	۲.۴
۴۷	$\chi'_i(T) = 3, T'$ درخت	۳.۴
۴۹	گراف $P_n \square K_2$	۴.۴
۵۰	$P_r \square P_s$	۵.۴
۵۰	۵	۶.۴
۵۱	گراف لانه زنبوری	۷.۴

۵۲	گراف B و B'	۸.۴
۵۲	سه رنگ آمیزی i -یالی گراف B	۹.۴

فهرست جداول

۵۵	۱.آ نمادها
۵۶	۲.آ نمادها

فصل ۱

تعاریف و مباحث مقدماتی

در این فصل، ابتدا به تعاریف و مفاهیم بنیادی و قضایای مهم و اساسی در نظریه‌ی گراف و مقدمه‌ای در رابطه با رنگ‌آمیزی گراف‌ها و نظریه کدگذاری و پیچیدگی محاسباتی که در فصول بعد مورد نیاز می‌باشد می‌پردازیم. تعاریف این فصل برگرفته از مراجع [۲۴]، [۲۵]، [۱۱]، [۵]، [۱۰] و [۲۶] می‌باشد.

۱.۱ نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱. گراف G به صورت زوج $(V(G), E(G))$ تعریف می‌شود که در آن $V(G)$ مجموعه‌ای متناهی ناتهی است که عناصر آن را رأس می‌نامند. $E(G)$ خانواده‌ای است متناهی از زوج‌های نامرتب عناصر $V(G)$ که به آن یال می‌گویند. $V(G)$ را مجموعه رأس‌ها^۲ و $E(G)$ را مجموعه یال‌های^۳ گراف G می‌گویند.

دو رأس u و v را مجاور^۴ گویند اگر یالی بین آنها وجود داشته باشد. به همین ترتیب دو یال متمایز از G را مجاور گویند اگر حداقل یک رأس مشترک داشته باشند.

تعریف ۲.۱.۱. تعداد رئوس گراف G را مرتبه^۵ و تعداد یال‌های گراف G را اندازه^۶ می‌گویند.

^۱Graph

^۲Vertex set

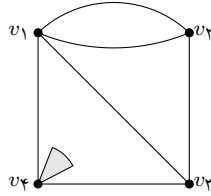
^۳Edge set

^۴Adjacent

^۵Order

^۶Size

به یال‌های تکراری، **یال‌های چندگانه**^۷ و یال‌هایی با نقاط پایانی یکسان در گراف G **طوقه**^۸ می‌گویند. گراف‌هایی که چنین یال‌های داشته باشند، **گراف‌های چندگانه**^۹ و گراف‌هایی که فاقد این یال‌ها باشند، **گراف ساده**^{۱۰} می‌گویند. در این اینجا گراف‌های مورد نظر ما همگی گراف‌های ساده هستند.



شکل ۱.۱: گراف چندگانه G

تعریف ۳.۱.۱. تعداد یال‌های متصل به رأس v را **درجه**^{۱۱} رأس v در G می‌گویند، که با نماد $d_G(v)$ نشان داده می‌شود. کمترین و بیشترین درجه رأس‌ها در G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می‌دهند.

گزاره ۴.۱.۱. اگر گراف G دارای n رأس و دنباله درجات d_1, \dots, d_n باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^n d_i = 2e$.

تعریف ۵.۱.۱. گراف‌هایی که دارای یک رأس هستند، **بدیهی**^{۱۲} و سایر گراف‌ها را **غیربدیهی**^{۱۳} می‌نامند. هر رأس از درجه صفر را **رأس تنها**^{۱۴} و هر رأسی از درجه یک را **رأس پایانی**^{۱۵} می‌گویند.

تعریف ۶.۱.۱. یال متصل به یک رأس از درجه یک را **یال آویزان**^{۱۶} می‌گویند.

تعریف ۷.۱.۱. **مکمل**^{۱۷} گراف G گرافی است ساده که آن را با نماد \bar{G} نمایش می‌دهند که رئوسش همان رئوس گراف G می‌باشد، $V(G) = V(\bar{G})$ ، و همچنین دو رأس u و v در \bar{G} مجاوراند اگر و فقط اگر این دو رأس در G مجاور نباشند.

به عبارت دیگر، اگر بین هر دو رأس از گراف G یالی وجود داشته باشد آنگاه در گراف \bar{G} این یال وجود نخواهد داشت.

تعریف ۸.۱.۱. یک **گشت**^{۱۸} در G ، دنباله‌ای ناصفر متناهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ است به طوری که جملات آن یک‌در میان از رأس‌ها و یال‌ها بوده و به ازای هر $1 \leq i \leq k$ رأس‌های v_i و v_{i-1} دو سر

^۷Multiple edges

^۸Loop

^۹Multigraph

^{۱۰}Simple graph

^{۱۱}Degree

^{۱۲}Trivial

^{۱۳}Nontrivial

^{۱۴}Isolated vertex

^{۱۵}End vertex

^{۱۶}Pendant edge

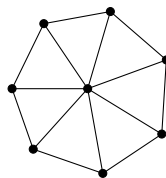
^{۱۷}Complement

^{۱۸}Walk

یال e_i می‌باشند در این صورت می‌گویند W گشتی از v_0 تا v_k یا به عبارت دیگر یک (v_0, v_k) -گشت است. رأس‌های v_0 و v_k به ترتیب رأس‌های ابتدای و انتهای W و v_1, v_2, \dots, v_{k-1} را رأس‌های داخلی آن می‌نامند. طول W برابر با عدد صحیح k می‌باشد. اگر یال‌های e_1, e_2, \dots, e_k در گشت W متمایز باشند، W را یک **گذر**^{۱۹} می‌نامند. گذری که ابتدا و انتهای آن یکسان باشد را گذر بسته می‌گویند. گشتی که دارای یال و رأس تکراری نباشد، **مسیر**^{۲۰} می‌نامند. مسیری با n رأس با P_n نمایش می‌دهند. کمترین فاصله بین دو رأس u و v در گراف G را با نماد $d(u, v)$ نشان می‌دهند. در صورتی که بین این دو رأس مسیری وجود نداشته باشد $d(u, v) = \infty$. گذر بسته‌ای که به جزء رأس‌های ابتدای و انتهای بقیه رأس‌های متمایز باشند **دور**^{۲۱} می‌گویند. یک دور با n رأس را با C_n نمایش می‌دهند.

تعریف ۹.۱.۱. بیشترین فاصله بین دو رأس از گراف G را **قطر**^{۲۲} گراف می‌گویند و آن را با $diam(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۰.۱.۱. گرافی که از اتصال رئوس C_{n-1} با یک رأس جدید مانند v حاصل می‌شود، **چرخ**^{۲۳} می‌گویند. گراف چرخ با n رأس را با W_n نمایش می‌دهند.



شکل ۲.۱: گراف W_8

تعریف ۱۱.۱.۱. گراف $G = (V, E)$ که در آن $V = V(G_1) \cup V(G_2)$ و $E = E(G) \cup E(G_2)$ اجتماع G_1 و G_2 نامیده و با $G_1 \cup G_2$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۲.۱.۱. گرافی که نتوان آن را به صورت اجتماع دو گراف در نظر گرفت را **همبند**^{۲۴} و در غیر این صورت ناهمبند می‌گویند. بدیهی است که هر گراف ناهمبند را می‌توان به صورت اجتماع تعداد متناهی از گراف‌های همبند در نظر گرفت که هر یک از آنها را یک مؤلفه از G می‌نامند.

تعریف ۱۳.۱.۱. مسیری که شامل تمام رأس‌های گراف G باشد، **مسیر همیلتنی**^{۲۵} و دوری که شامل تمام رئوس G باشد، **دور همیلتنی**^{۲۶} می‌نامند. گرافی که شامل یک دور همیلتنی باشد، **گراف همیلتنی**^{۲۷} می‌گویند.

^{۱۹}Trail

^{۲۰}Path

^{۲۱}Cycle

^{۲۲}Diameter

^{۲۳}Wheel

^{۲۴}Connected

^{۲۵}Hamiltonian path

^{۲۶}Hamiltonian cycle

^{۲۷}Hamiltonian graph

تعریف ۱۴.۱.۱. در گراف همبند G یک مجموعه جداساز^{۲۸} زیر مجموعه‌ی رئوس G است که حذف آنها را ناهمبند می‌سازد. اگر یک مجموعه‌ی جداساز فقط یک رأس مانند v داشته باشد آن را **رأس برشی**^{۲۹} می‌نامند.

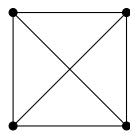
مجموعه ناهمبندساز^{۳۰} گراف همبند G ، زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی $E(G)$ است که حذف یال‌های آن G را ناهمبند می‌کند. بعلاوه **مجموعه برش یالی**^{۳۱}، مجموعه‌ای ناهمبندساز تعریف می‌شود به طوریکه هیچ زیر مجموعه‌ی حقیقی آن مجموعه‌ای ناهمبندساز نباشد. به عبارت دیگر، فرض کنید گراف G همبند و مجموعه یال‌های $Y \subseteq E$ باشد. اگر $G - Y$ شامل حداقل دو مؤلفه همبندی باشد، آنگاه مجموعه Y مجموعه برش یالی گراف G می‌نامیم. اگر مجموعه برش یالی یک عضو $\{e\}$ ، یک پل یا باریکه نامیده می‌شود. فرض کنید گراف G همبند و مجموعه رئوس $X \subseteq V$ باشد. اگر $G - X$ شامل حداقل دو مؤلفه همبندی باشد، آنگاه مجموعه X مجموعه برش رأسی گراف G می‌نامیم. لفظ مجموعه برش را برای مجموعه برش رأسی به کار می‌بریم.

تعریف ۱۵.۱.۱. اگر مجموعه رئوس X گراف $G - X$ را به k مؤلفه همبندی افراز کند. به آن k -مجموعه برش گراف G می‌گوییم.

به مجموعه رئوس X از گراف G که هم مستقل و هم k -مجموعه برش است، مجموعه برش k -پایدار و یا k -مجموعه برش پایدار^{۳۲} می‌گوییم.

تعریف ۱۶.۱.۱. مجموعه تمام رئوس مجاور با رأس v در گراف G را **همسایه‌های**^{۳۳} رأس v در G می‌نامند و با نماد $N_G(v)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۷.۱.۱. گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم برابر باشند، **گراف منتظم**^{۳۴} می‌نامند. اگر درجه هر رأسی r باشد گراف را r -منتظم می‌گویند.
گراف‌های r -منتظم با n رأس دارای $\frac{1}{2}nr$ یال می‌باشند.



شکل ۳.۱: گراف ۳-منتظم

^{۲۸}Separating set

^{۲۹}Cute vertice

^{۳۰}Disconnecting set

^{۳۱}Cutset edge

^{۳۲}Stable k-cutset

^{۳۳}Neighbours

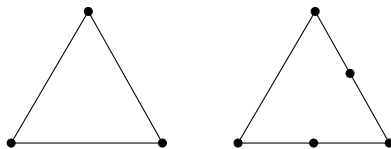
^{۳۴}Regular graph

تعریف ۱۸.۱.۱. یک یکرختی از G به H یک نگاشت دوسویی $f : V(G) \rightarrow V(H)$ به طوری که $uv \in E(G)$ اگر و فقط اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. آنگاه می‌گوییم G با H **یکریخت**^{۳۵} است و می‌نویسیم $G \cong H$ ، اگر یک یکرختی از G به H وجود داشته باشد.



شکل ۴.۱: یکرختی

تعریف ۱۹.۱.۱. دو گراف همسانریخت^{۳۶} هستند اگر دو گراف را بتوان با افزودن رئوس جدید از درجه دو به یال‌های یک گراف به دست آورد.

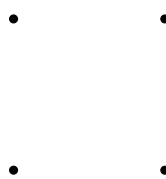


گراف

گراف همسانریخت

شکل ۵.۱: گراف همسانریخت

تعریف ۲۰.۱.۱. گرافی را که مجموعه‌ی یال آن تهی باشد، **گراف تهی**^{۳۷} یا گراف ناهمبند کلی می‌نامند. گراف تهی با n رأس را با N_n نشان می‌دهند.



شکل ۶.۱: گراف تهی N_4

تعریف ۲۱.۱.۱. گرافی که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند، **گراف کامل**^{۳۸} می‌نامند. گراف کامل با n رأس و $\frac{n(n-1)}{2}$ یال را به صورت K_n نشان می‌دهند.

^{۳۵}Isomorphic

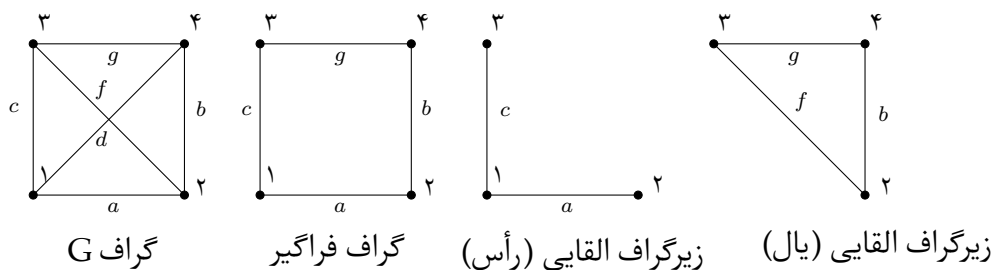
^{۳۶}Homomorphic

^{۳۷}Empty graph

^{۳۸}Complete graph

تعریف ۲۲.۱.۱. دو گراف H و G را در نظر بگیرید، اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد، گراف H را **زیرگراف**^{۳۹} G می‌گویند و به صورت $H \subseteq G$ نمایش داده می‌شود. در صورتی که زیرگراف H از G در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را **زیرگراف فراگیر**^{۴۰} از گراف G گفته می‌شود. فرض کنید S زیرمجموعه‌ی ناتهی از V باشد. زیرگرافی از G که مجموعه رئوس آن S و مجموعه‌ی یال‌هایش برابر مجموعه‌ی یال‌های گراف G باشد، به طوریکه هر دو سر آن در S واقع باشد، **زیرگراف القاء شده**^{۴۱} توسط S نامیده می‌شود.

فرض کنید S' زیرمجموعه‌ی ناتهی از E باشد. زیرگرافی از G که مجموعه رأس‌های، آن برابر مجموعه رأس‌های دو سر یال‌های S' و مجموعه‌ی یال‌هایشان برابر S' باشد، **زیرگراف القاء شده** توسط S' نامیده می‌شود. در شکل ۷.۱ می‌توان نمونه‌ای از آنها را مشاهده کرد.



شکل ۷.۱: زیرگراف القایی، زیرگراف فراگیر و گراف G

تعریف ۲۳.۱.۱. زیرگراف‌های کامل گراف G را **خوشه**^{۴۲} می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱. تعداد رأس‌ها در ماکزیمم خوشه^{۴۳} گراف G را با نماد $\omega(G)$ نشان می‌دهیم. تعداد یال‌ها در ماکزیمم خوشه گراف G را با نماد $\omega'(G)$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\omega'(G) = \frac{\omega(G)(\omega(G) - 1)}{2}$$

تعریف ۲۵.۱.۱. گراف $G(V, E)$ ، **گراف دوبخشی**^{۴۴} گفته می‌شود اگر مجموعه رأس‌های V را بتوان به دو زیرمجموعه V_1 و V_2 چنان افراز نمود که هر یال در E دارای یک رأس از مجموعه V_1 و رأس دیگر آن از مجموعه V_2 باشد. گراف دوبخشی را با $G_{(|V_1|, |V_2|)}$ نشان می‌دهند. اگر تمام رئوس مجموعه V_1 و V_2 از اندازه n و m با هم یال مشترک داشته باشند، گراف دوبخشی کامل است. هر گراف دوبخشی کامل $K_{n,m}$ دارای $n + m$ رأس و mn یال است. گراف‌های ستاره نیز نوعی از گراف‌های دوبخشی کامل هستند. و با $K_{1,m}$ نمایش داده می‌شوند. گراف کامل دوبخشی و ستاره در شکل ۸.۱ نمایش داده شده است.

^{۳۹} Subgraph

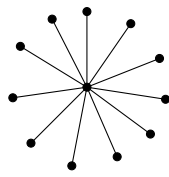
^{۴۰} Spanning subgraph

^{۴۱} Induced subgraph

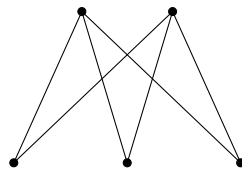
^{۴۲} Clique

^{۴۳} maximum clique

^{۴۴} Bipartite graph



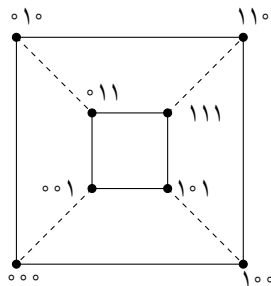
گراف ستاره $K_{1,11}$



گراف دوبخشی $K_{2,3}$

شکل ۸.۱: گراف کامل دو بخشی $K_{2,3}$ و گراف ستاره $K_{1,11}$

تعریف ۲۶.۱.۱. **گراف k -مکعب^{۴۵}** گرافی است که رئوس آن متناظر با دنباله (a_1, a_2, \dots, a_k) که در آن هر a_i صفر یا یک است. یال‌های آن عناصری را به هم متصل می‌کنند که فقط در یک مکان اختلاف دارند این گراف به صورت Q_k نمایش داده می‌شود. گراف Q_k دارای 2^k رأس و $k \cdot 2^{k-1}$ یال است. همچنین منتظم از مرتبه k است.



شکل ۹.۱: گراف ۳-مکعب Q_3

تعریف ۲۷.۱.۱. گراف بدون طوقه G که $V(L(G)) = E(G)$ است، **گراف خطی^{۴۶}** می‌نامند و با $L(G)$ نشان داده می‌شود.

دو رأس در $L(G)$ مجاورند اگر و فقط اگر یال‌های متناظرش در G مجاور باشند. گراف خطی همواره یک گراف ساده است.

تعریف ۲۸.۱.۱. گراف همبند فاقد دور را **درخت^{۴۷}** می‌گویند و با T نمایش می‌دهند.

قضیه ۲۹.۱.۱. [۲۵] در درخت، هر دو رأس با یک مسیر یکتا به یکدیگر متصل هستند.

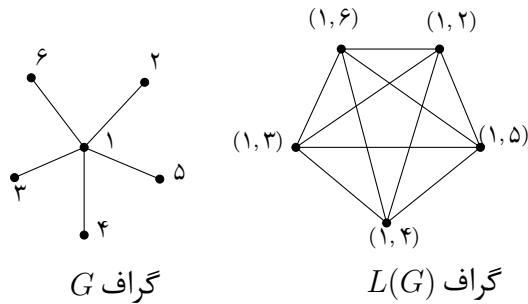
قضیه ۳۰.۱.۱. [۲۵] یک گراف همبند درخت است، اگر و تنها اگر هر یال آن یک یال برشی باشد.

نتیجه ۳۱.۱.۱. درخت T دور ندارد ولی افزایش هر یال جدید دقیقاً یک دور در آن تولید می‌کند.

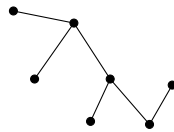
^{۴۵} k -Cube graph

^{۴۶} Line graph

^{۴۷} Tree

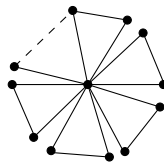


شکل ۱۰.۱: گراف خطی $L(G)$



شکل ۱۱.۱: درخت T

تعریف ۳۲.۱.۱. گراف دوستی^{۴۸}، گرافی است با $n = 2p + 1$ رأس ($p \geq 1$) که به صورت مثلث‌های که در یک رأس مشترک هستند. شکل ۱۲.۱ نمونه‌ای از گراف دوستی را نشان می‌دهد.



شکل ۱۲.۱: گراف دوستی

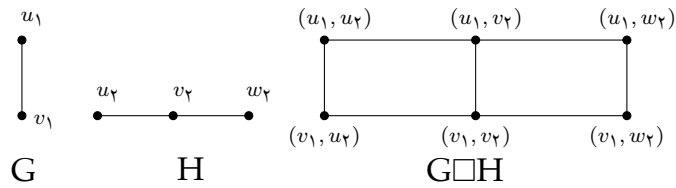
تعریف ۳۳.۱.۱. حاصل ضرب دکارتی^{۴۹} دو گراف $G = (V, E)$ و $H = (U, F)$ که با نماد $G \square H$ نمایش داده می‌شود گرافی است با مجموعه رئوس $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ و همچنین دو رأس (v, x) و (u, y) مجاورند یا به عبارت دیگر $((v, x), (u, y)) \in E(G \square H)$ است اگر و فقط اگر $x = y$ و $[v, u] \in E$ یا $v = u$ و $[x, y] \in F$ باشد.

تعریف ۳۴.۱.۱. حاصل ضرب رسته‌ای^{۵۰} از دو گراف $G = (V, E)$ و $H = (U, F)$ که با نماد $G \times H$ نمایش داده می‌شود گرافی با مجموعه رئوس $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ و مجموعه یال‌های $E(G \times H) = \{[(v, x), (u, y)]: [v, u] \in E, [x, y] \in F\}$ می‌باشد.

^{۴۸}Friendship graph

^{۴۹}Cartesian product

^{۵۰}Categorical product



شکل ۱۳.۱: حاصلضرب دکارتی $G \square H$

تعریف ۳۵.۱.۱. مربع گراف G با نماد $G^{(2)}$ نشان داده می‌شود که مجموعه رئوس آن، مجموعه رئوس گراف G می‌باشد و $\{[u, v] : d(u, v) \leq 2 \text{ در گراف } G\} = E(G^{(2)})$ است.

تعریف ۳۶.۱.۱. در یک گراف G مجموعه یال‌های $M = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ را یک **تطابق**^{۵۱} می‌گویند هرگاه هیچ دو یال از آنها اشتراک رأسی نداشته باشند، به عبارت دیگر هیچ دو یالی با هم مجاور نباشند. تطابق M را کامل گویند هرگاه برای هر رأس از گراف G ، یک یال در M موجود باشد که شامل رأس v باشد.

تعریف ۳۷.۱.۱. زیر مجموعه S از V را که هیچ دو رأس آن در G مجاور نیستند، یک **مجموعه مستقل**^{۵۲} از G می‌نامند. مجموعه مستقل S ماکزیمم است اگر هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S| < |S'|$ وجود نداشته باشد.

زیرمجموعه K از V که حداقل یک سر هر یال G در آن باشد، یک **پوشش**^{۵۳} از G نامیده می‌شود. تعداد رأس‌ها در یک مجموعه مستقل ماکزیمم از G **عدد استقلال**^{۵۴} G گفته می‌شود و با $\alpha(G)$ نمایش داده می‌شود. به طور مشابه، تعداد رأس‌ها در یک پوشش مینیمم از G **عدد پوششی**^{۵۵} G نامیده می‌شود و با $\beta(G)$ نمایش داده می‌شود.

ملاحظه ۳۸.۱.۱. بنابر تعریف عدد استقلال، عدد پوششی و اندازه رئوس گراف G داریم:

$$\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$$

۱.۱.۱ رنگ‌آمیزی گراف‌ها

بحث رنگ‌آمیزی گراف‌ها با ارائه حدس چهار رنگ آغاز شد و به بررسی این می‌پردازد که آیا گراف‌های مسطح را می‌توان با چهار رنگ رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند. این حدس اولین بار توسط گاتری^{۵۶} مطرح شد و تمام نتایج خود را به برادرش که دانشجوی دموورگان^{۵۷} بود

^{۵۱} Matching

^{۵۲} Independent set

^{۵۳} Cover

^{۵۴} Independent number

^{۵۵} Covering number

^{۵۶} F. Guthrie

^{۵۷} A. D. Morgan

نشان داد و از او خواست که از استادش در مورد آنها سوال کند. دموورگان جوابی به او نداد اما در همان تاریخ یعنی سال ۱۸۵۲ نامه‌ای به همیلتن^{۵۸} نوشت و سوالی که از او پرسیده شده بود، برای او توضیح داد. همیلتن چند روز بعد از دریافت نامه در جوابش بیان کرد که به زودی نمی‌تواند به سوال او پاسخ دهد.

در ۱۷ جولای ۱۸۷۹، کمپ^{۵۹} اعلام کرد که یک اثبات برای حدس چهار رنگ به‌دست آورده است. و به پیشنهاد کیلی^{۶۰} قضیه را به ژورنال ریاضیات آمریکا فرستاد که در اواخر سال ۱۸۷۹ به چاپ رسید. در سال ۱۸۹۰ قضیه چهار رنگ دوباره به حدس چهار رنگ تبدیل شد. هیوود^{۶۱} مقاله‌ای با عنوان «قضیه رنگ‌آمیزی نقشه» منتشر کرد و در آن هدف خود را بیان کرد. او در مقاله‌اش نشان داد که اثبات کمپ اشتباه است و هر نقشه ۵-رنگ‌پذیر است.

این وضعیت تا سال ۱۹۷۶ همچنان ادامه داشت تا این‌که اپل^{۶۲} و هکن^{۶۳} قضیه چهار رنگ را اثبات کردند. آن‌ها در بعضی کارهای الگوریتمی از جان کوک^{۶۴} کمک گرفتند.

آخرین تلاش‌ها برای اثبات قضیه چهار رنگ توسط ربرتسون^{۶۵}، سندرس^{۶۶}، سیمور^{۶۷} و توماس^{۶۸} انجام شده است.

تعریف ۳۹.۱.۱. یک k -رنگ‌آمیزی رأسی^{۶۹} از G عبارت است از تخصیص k رنگ $1, 2, \dots, k$ به رأس‌های G بطوریکه هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشد. بنابراین یک k -رنگ‌آمیزی رأسی مجاز از گراف بدون طوقه G ، عبارت است از افزایی مانند (V_1, V_2, \dots, V_k) از V به k مجموعه مستقل، که می‌توانند تهی نیز باشند. اگر G دارای یک k -رنگ‌آمیزی رأسی مجاز باشد آنگاه G یک k -رنگ‌پذیر رأسی نامیده می‌شود.

برای راحتی کار، یک «رنگ‌آمیزی رأسی مجاز» را به‌طور ساده، رنگ‌آمیزی و یک « k -رنگ‌آمیزی رأسی مجاز» را k -رنگ‌آمیز می‌نامند. همچنین « k -رنگ‌آمیزی رأسی» را به اختصار k -رنگ‌پذیر می‌گویند.

یک گراف، k -رنگ‌پذیر است اگر و فقط اگر گراف ساده زمینه آن k -رنگ‌پذیر باشد. **عدد رنگی^{۷۰}** گراف G را با نماد $\chi(G)$ نشان داده می‌شود و برابر با کوچکترین k ای است که به‌ازای آن گراف G می‌تواند k -رنگ‌پذیر باشد. اگر $\chi(G) = k$ باشد، G را k -رنگی می‌نامند.

مثال ۴۰.۱.۱. عدد رنگی برای گراف‌های تهی، دوبخشی و کامل به صورت زیر می‌باشد:

^{۵۸}W. Hamilton

^{۵۹}A. B. Kempe

^{۶۰}A. Cayley

^{۶۱}P. J. Heawood

^{۶۲}K. Appel

^{۶۳}W. Haken

^{۶۴}J. Koch

^{۶۵}Robertson

^{۶۶}Sanders

^{۶۷}Seymour

^{۶۸}Thomas

^{۶۹}K-vertex colouring

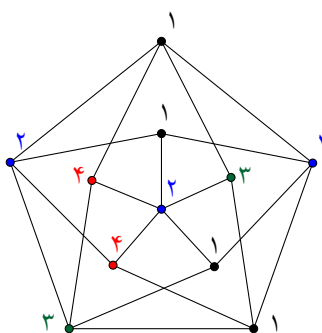
^{۷۰}Chromatic number

- گراف تهی: $\chi(G) = 1$
- گراف دوبخشی: $\chi(G) = 2$
- گراف کامل با n رأس: $\chi(G) = n$

تعریف ۴۱.۱.۱. گراف G بحرانی^{۷۱} است اگر به ازای هر زیرگراف سره‌ی H از G داشته باشیم:

$$\chi(H) < \chi(G).$$

گرافی که k -رنگی و بحرانی باشد گراف k -بحرانی گفته می‌شود. هر گراف k -رنگی دارای یک زیرگراف k -بحرانی است. یک گراف ۴-بحرانی، در شکل ۱۴.۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۴.۱: گراف گروتز

قضیه ۴۲.۱.۱. اگر G ، k -بحرانی باشد، آنگاه $\delta(G) \geq k - 1$.

□ برهان. قضیه ۸-۱ مرجع [۱۱].

نتیجه ۴۳.۱.۱. در هر گراف k -رنگی، دست کم k رأس با درجه حداقل $k - 1$ وجود دارد.

□ برهان. قضیه ۸-۱-۱ مرجع [۱۱].

نتیجه ۴۴.۱.۱. به ازای هر گراف G داریم: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

□ برهان. قضیه ۸-۱-۱ مرجع [۱۱].

قضیه ۴۵.۱.۱. در یک گراف بحرانی، هیچ برش رأسی به صورت خوشه وجود ندارد.

□ برهان. قضیه ۸-۲ مرجع [۱۱].

قضیه ۴۶.۱.۱ (قضیه بروکس^{۷۲}). اگر G گرافی همبند باشد که دور فرد و گراف کامل نباشد، آن‌گاه $\chi(G) \leq \Delta$. اما اگر دارای دور فرد یا گراف کامل باشد، $\chi(G) = \Delta + 1$.

^{۷۱}Critical

^{۷۲}Brooks theorem

□ برهان. قضیه ۴-۸ مرجع [۱۱].

تعریف ۴۷.۱.۱. یک k -رنگ آمیزی یالی^{۷۳} از گراف G عبارت است از تخصیص k رنگ $1, 2, \dots, k$ به یال‌های G . اگر هیچ دو یال مجاور هم‌رنگ نباشند آن را یک رنگ‌آمیزی مجاز می‌نامند. یک k -رنگ آمیزی یالی را می‌توان به عنوان افزای (E_1, E_2, \dots, E_k) از E در نظر گرفت که در آن E_i برابر مجموعه‌ای (احتمالاً تهی) از یال‌های E است که دارای رنگ i می‌باشد. اگر G دارای یک k -رنگ آمیزی یالی مجاز باشد آنگاه G, k -رنگ‌پذیر یالی نامیده می‌شود.

عدد رنگی یالی^{۷۴} گراف G با نماد $\chi'(G)$ نشان داده می‌شود. و برابر با کوچکترین k ای است که به‌ازای آن G می‌تواند k -رنگ‌پذیر یالی باشد. اگر $\chi'(G) = k$ باشد، G را k -رنگی یالی می‌نامند.

قضیه ۴۸.۱.۱. اگر گراف G دوبخشی باشد، آنگاه $\chi'(G) = \Delta$.

□ برهان. قضیه ۱-۶ مرجع [۱۱].

قضیه ۴۹.۱.۱ (قضیه ویزینگ^{۷۵}). اگر گراف G ساده باشد، در این صورت $\chi'(G) = \Delta + 1$ یا $\chi'(G) = \Delta$.

□ برهان. قضیه ۲-۶ مرجع [۱۱].

۲.۱ نظریه کدگذاری

۱.۲.۱ تاریخچه

نظریه کدگذاری کانال یکی از شاخه‌های پرکاربرد مخابرات است که هدف آن ارسال اطلاعات از فرستنده از طریق یک کانال فیزیکی دارای اغتشاش به گیرنده می‌باشد. کلود شانون^{۷۶} را می‌توان پایه‌گذار این نظریه دانست که در مقاله‌ای اساسی در سال ۱۹۴۸ ثابت نمود کدهای تصحیح‌کننده خطا با نرخ ارسال کمتر از ظرفیت کانال وجود دارند که پس از ارسال بر روی کانال، دارای احتمال خطای کدگشایی نزدیک به صفر می‌باشند. شانون این مطلب را به‌صورت وجودی اثبات کرد روند اثبات او بر پایه نظریه احتمال بوده و روش خاصی جهت معرفی کد مطلوب مشخص نمی‌کرد. پس از آن تلاش‌های زیادی برای رسیدن به کدهای مطلوب آغاز گردید و کدهای معروفی نظیر کدهای همینگ، گلی، رید-مولر، کانولوشن و غیره مطرح شدند. برای مطالعه بیشتر این کدها به منابع [۱۷] و [۲۶] رجوع شود.

کاربردهای نظریه کدهای تصحیح‌کننده خطا را می‌توان در مکالمات تلفنی، دستگاه‌های ذخیره‌سازی مانند دستگاه‌های نوار مغناطیسی و غیره مشاهده نمود. اما بیشترین کاربرد آن در سیستم صوتی دیجیتال یک دیسک فشرده است که توسط فیلیپس^{۷۷} اختراع شد.

^{۷۳}Edge colouring

^{۷۴}Edge chromatic number

^{۷۵}Vizing theorem

^{۷۶}C. Shannon

^{۷۷}Philips

۲.۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ مجموعه‌ای با اندازه‌ی q باشد که به‌عنوان الفبای کد^{۷۸} به آن مراجعه می‌شود و اعضای آن را علائم کد می‌نامند.

۱. یک کلمه q -آرایه‌ای از طول n روی الفبای A دنباله‌ای به صورت $W = w_1, w_2, \dots, w_n$ است که برای هر i ، $w_i \in A$. به‌طور معادل، W را می‌توان به شکل بردار (w_1, w_2, \dots, w_n) در نظر گرفت.

۲. یک کد بلوکی q -آرایه‌ای از طول n روی الفبای A ، مجموعه ناتهی C از کلمات q -آرایه‌ای است که طول یکسان n دارند.

۳. هر عضو مجموعه C ، یک کدواژه^{۷۹} از C نامیده می‌شود.

۴. تعداد کدواژه‌ها در C را اندازه C می‌نامیم و آن را با نماد $|C|$ نمایش می‌دهیم.

۵. یک کد از طول n و اندازه M را یک (n, M) -کد می‌نامیم.

ملاحظه ۲.۲.۱. الفبای کد در این اینجا میدان متناهی $F_2 = \{0, 1\}$ از مرتبه ۲ در نظر گرفته شده است. یک کد روی الفبای F_2 کد دودویی^{۸۰} نامیده می‌شود.

مثال ۳.۲.۱. $C = \{000000, 01110, 10011\}$ یک $(5, 3)$ -کد است.

تعریف ۴.۲.۱. یک کانال ارتباطی از یک الفبای کانال متناهی، $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ ، همچنین مجموعه‌ای از احتمال‌های کانال ارسال، $1 = P(a_i | \text{ارسال } a_i)$ ، تشکیل شده است که برای هر i شرط زیر صادق است:

$$\sum_{j=1}^q P(a_j | \text{ارسال } a_i) = 1.$$

تعریف ۵.۲.۱. یک کانال ارتباطی را بی‌حافظه می‌نامند، اگر خروجی هر ارسال مستقل از خروجی ارسال پیشین باشد. به عبارت دیگر اگر $C = c_1 c_2 \dots c_n$ و $X = x_1 x_2 \dots x_n$ کلماتی از طول n باشند، در این صورت:

$$P(X | C) = \prod_{i=1}^n P(x_i | c_i) = 1.$$

تعریف ۶.۲.۱. یک کانال متقارن دودویی در واقع یک کانال ارتباطی بدون حافظه‌ای است که دارای الفبای کد متناهی از اندازه ۲ بوده و شرایط زیر را داشته باشد:

۱. احتمال دریافت نادرست هر علامت برابر p می‌باشد. اگر $p > \frac{1}{2}$ کانال بی‌فایده نامیده می‌شود.

^{۷۸}Code alphabet

^{۷۹}Codewords

^{۸۰}Binary code

۲. هرگاه یک علامت به صورت خطا دریافت شود در این صورت هر حالت خطا دارای احتمال برابر است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید کدواژه‌هایی از C روی یک کانال ارتباطی ارسال می‌شود؛ اگر کلمه X دریافت شود، می‌توان احتمال‌های کانال ارسال، $P(X|C)$ را برای تمام کدواژه‌های $c \in C$ محاسبه کرد. اگر c_x احتمال‌های کانال ارسال را به حداکثر برساند، روش **کدگشایی احتمال ماکزیمم**^{۸۱} (MLD) نتیجه می‌دهد که c_x محتمل‌ترین کدواژه ارسالی است. دو نوع کدگشایی احتمال ماکزیمم داریم:

۱. **کدگشایی احتمال ماکزیمم کامل:** اگر کلمه X دریافت شود، محتمل‌ترین کدواژه ارسال شده را می‌یابد. اگر چنین کدواژه‌ای بیش از یکی باشد، یکی از آنها را به دلخواه انتخاب می‌کند.

۲. **کدگشایی احتمال ماکزیمم ناکامل:** اگر کلمه X دریافت شود، محتمل‌ترین کدواژه ارسال شده را می‌یابد. اگر چنین کدواژه‌ای بیش از یکی باشد، ارسال مجدد درخواست می‌کند.

مثال ۸.۲.۱. فرض کنید کدودویی $C = \{001, 101, 011\}$ را داشته باشیم که در یک کانال دودویی بدون حافظه با احتمال‌های زیر ارسال می‌شود در این صورت کلمه دریافتی $X = 010$ را به روش کدگشایی ماکزیمم احتمال کدگشایی می‌کنیم.

$$P(0|دریافت 0) = \frac{1}{10} \implies P(0|دریافت 1) = \frac{9}{10}$$

$$P(1|دریافت 1) = \frac{5}{10} \implies P(1|دریافت 0) = \frac{5}{10}$$

به راحتی دیده می‌شود که با یک کدودویی متقارن سروکار داریم.

$$P(001|دریافت 001) = P(0|دریافت 0) \times P(0|دریافت 1) \times P(1|دریافت 0)$$

$$= 0.045$$

$$P(101|دریافت 010) = 0.415$$

$$P(011|دریافت 010) = 0.045$$

لذا قاعده کدگشایی ماکزیمم احتمال، کلمه X را به کدواژه‌ی 101 کدگشایی می‌کند.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید X و Y کلماتی از طول n ، روی الفبای A باشند، **فاصله همینگ**^{۸۲} X و Y که با $d(X, Y)$ نمایش داده می‌شود، تعداد مکان‌هایی است که X و Y با هم متفاوت‌اند. اگر $Y = y_1 y_2 \dots y_n$ و $X = x_1 x_2 \dots x_n$ در این صورت:

$$d(X, Y) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) + \dots + d(x_n, y_n)$$

^{۸۱}Maximum likelihood decoding

^{۸۲}Hamming distance

که در آن x_i و y_i به شکل کلماتی از طول ۱ در نظر گرفته می‌شوند و

$$d(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & x_i \neq y_i, \\ 0 & x_i = y_i. \end{cases}$$

گزاره ۱۰.۲.۱. [۲۶] فرض کنید X, Y, Z کلماتی از طول n روی الفبای A باشند. در این صورت همواره داریم:

$$1. \quad 0 \leq d(X, Y) \leq n$$

$$2. \quad d(X, Y) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } X = Y$$

$$3. \quad d(X, Y) = d(Y, X)$$

تعریف ۱۱.۲.۱. فاصله کد C شامل حداقل ۲ کلمه را با $d(C)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$d(C) = \min\{d(X, Y) : X, Y \in C, X \neq Y\}.$$

یک کد از طول n ، اندازه M و فاصله d یک (n, M, d) -کد نامیده می‌شود.

مثال ۱۲.۲.۱. برای مثال ۳.۲.۱ فاصله همینگ و C را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

۱. فاصله همینگ:

$$d(00000, 01110) = 3, \quad d(00000, 10011) = 3, \quad d(01110, 10011) = 4$$

۲. فاصله C :

$$d(C) = 3$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید کدواژه‌هایی از C روی یک کانال ارتباطی ارسال می‌شود؛ اگر کلمه X دریافت شود در صورتی که $d(X, c_x)$ در میان تمام کدواژه‌های C کمترین باشد، به عبارت دیگر

$$d(X, c_x) = \min_{c \in C} [d(X, c)]$$

روش **کدگشایی مینیمم فاصله**^{۸۳} (MDD) کلمه X را به c_x کدگشایی خواهد کرد. همانند کدگشایی ماکزیمم احتمال دو نوع کدگشایی مینیمم فاصله داریم:

۱. کدگشایی مینیمم فاصله کامل.

۲. کدگشایی مینیمم فاصله غیرکامل.

^{۸۳} Minimum distance decoding

مثال ۱۴.۲.۱. کد $C = \{0000, 0101, 0111, 1111, 1001\}$ را در نظر بگیرید این کد یک $(5, 4)$ -کد می باشد فرض کنید کلمه ی $X = 1110$ دریافت شود در این صورت داریم:

$$d(X, 0000) = 3, d(X, 0101) = 2, d(X, 0111) = 2, d(X, 1111) = 1, d(X, 1001) = 3$$

لذا اگر قاعده ی کدگشایی مینیمم فاصله به کار گرفته شود، کلمه ی X به کدواژه ی 1111 کدگشایی می شود.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید u عدد صحیح مثبتی باشد. کد C یک کد u -تشخیص دهنده خطا^{۸۴} است در صورتی که اگر در کدواژه ای حداقل یک خطا و حداکثر u خطا رخ دهد، کلمه نتیجه شده یک کدواژه نباشد. کد C دقیقاً u -تشخیص دهنده خطاست، هرگاه u -تشخیص دهنده خطا باشد ولی $(u + 1)$ -تشخیص دهنده خطا نباشد.

مثال ۱۶.۲.۱. کد دودویی $C = \{0000, 0111, 1101\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت اگر یک خطا در کدواژه ها رخ دهد، کدواژه ی دیگری از کد C حاصل نمی شود. فرض کنید کدواژه ی 1101 با یک خطا به یکی از فرم های 0101 یا 1001 یا 1100 تبدیل شود که هیچکدام از این کلمات کدواژه ای از کد C نباشند. اما اگر با دو خطا ارسال شود ممکن است کدواژه ی 0111 دریافت شود. لذا این کد 1 -تشخیص گر خطا می باشد. در حالی که 2 -تشخیص گر خطا نمی باشد. بنابراین این کد دقیقاً 1 -تشخیص گر خطا می باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید v عدد صحیح مثبتی باشد. در صورتی که روش کدگشایی ناکامل استفاده شود کد C یک v -تصحیح کننده خطا^{۸۵} است، اگر کدگشایی مینیمم فاصله به تصحیح v یا تعدادی کمتر خطا قادر باشد. کد C ، دقیقاً v -تصحیح کننده خطا است، اگر v -تصحیح کننده خطا باشد اما $(v + 1)$ -تصحیح کننده خطا نباشد.

مثال ۱۸.۲.۱. کد $C = \{0000, 0111, 1101\}$ را در نظر بگیرید. اگر 0000 ارسال شود و با اعمال یک خطا $X = 0001$ دریافت شود در این صورت طبق قاعده ی کدگشایی مینیمم فاصله چون

$$d(X, 0000) = 1, d(X, 0111) = 2, d(X, 1101) = 2$$

کلمه X را به کدواژه ی 0000 کدگشایی می کنیم. اگر دوبار خطا را اعمال کنیم $X = 0011$ دریافت می شود. در این صورت چون

$$d(X, 0000) = 2, d(X, 0111) = 1, d(X, 1101) = 3$$

لذا کلمه ی X به خطا کدواژه ی 0111 کدگشایی می شود. از این رو کد C یک کد 2 -تصحیح گر خطا نمی باشد. و این کد دقیقاً 1 -تصحیح کننده خطا است.

قضیه ۱۹.۲.۱. [۲۶] کد C یک کد v -تصحیح کننده خطاست اگر و فقط اگر $d(C) \geq 2v + 1$.

تعریف ۲۰.۲.۱. برای کد q -آرایه ای C با پارامترهای (n, M, d) ، مینیمم فاصله نسبی C به صورت $\xi(C) = \frac{(d-1)}{n}$ تعریف می شود.

^{۸۴}error-detecting

^{۸۵}Error correcting code

۳.۱ نظریه پیچیدگی

تعریف ۱.۳.۱. مسائلی که پاسخ آن بلی یا خیر باشد، (یا به طور رسمی ۱ یا ۰ باشد) **مسئله‌ی تصمیم‌گیری**^{۸۶} نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. مسائلی که در زمان چندجمله‌ای قابل حل هستند کلاس p گفته می‌شوند. مخصوصاً مسئله‌هایی که برای ثابت k می‌توانند در زمان $O(n^k)$ اجرا شوند، که n اندازه ورودی مسئله است.

تعریف ۳.۳.۱. کلاس NP ^{۸۷} شامل مسائلی است که در زمان چندجمله‌ای تصدیق‌پذیر^{۸۸} است. یعنی اگر کسی جوابی را در اختیار ما قرار دهد، در زمان چندجمله‌ای بر حسب اندازه ورودی مسئله می‌توان درستی آن را بررسی نمود.

تعریف ۴.۳.۱. الگوریتم‌هایی با اندازه ورودی n که زمان اجرای بدترین حالت آن‌ها برای مقدار ثابت k برابر $O(n^k)$ می‌باشد، **الگوریتم زمان چندجمله‌ای**^{۸۹} نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید رویه‌ای داریم، که هر نمونه α از A را به نمونه β از B با ویژگی‌های زیر تبدیل می‌کند:

۱. تبدیل در زمان چندجمله‌ای انجام می‌شود.

۲. پاسخ‌ها یکسان است، یعنی پاسخ به α "بله" است اگر و فقط اگر پاسخ به β نیز "بله" باشد.

چنین رویه‌ای را **الگوریتم کاهش**^{۹۰} زمان چندجمله‌ای می‌نامیم.

تعریف ۶.۳.۱. مسئله تصمیم $A \in NP$ جزء مسائل NP -**کامل**^{۹۱} محسوب می‌گردد. اگر تمام مسائل دیگر رده NP در زمان چندجمله‌ای قابل کاهش به مسئله A باشد.

تعریف ۷.۳.۱. مسائل بهینه‌سازی که مسئله تصمیم مرتبط با آن‌ها از نوع NP -کامل است را مسئله **NP-hard** می‌نامیم.

اغلب مسائل بهینه‌سازی در دنیای واقعی از نوع مسائل NP-hard می‌باشد. و الگوریتم مؤثر اثبات شده‌ای برای حل آن‌ها وجود ندارد. زمان حل بهینه آن‌ها در رده زمانی نمایی می‌باشد. تحقیق درباره پرسش $P \neq NP$ ، هسته‌ی مسئله‌های NP -کامل است. اغلب دانشمندان علوم کامپیوتر اعتقاد دارند که $P \neq NP$ ، منجر به ارتباط بین P ، NP و NP -کامل مانند شکل؟؟ می‌شود. اما ممکن است الگوریتم زمان چند جمله‌ای برای مسئله NP -کامل پیدا شود و در نتیجه $P = NP$ اثبات شود. با این وجود چون هنوز الگوریتم زمان چند جمله‌ای برای مسئله NP -کامل کشف نشده. اثبات اینکه مسئله‌های NP -کامل است، گواه هوشمندانه‌ای بر سختی آن است.

^{۸۶} Decision problem

^{۸۷} Nondeterministic polynomial

^{۸۸} Verifiable

^{۸۹} Polynomial-time algorithm

^{۹۰} Reduction algorithm

^{۹۱} NP-complete

فصل ۲

رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک رأسی

۱.۲ مقدمه

در این فصل، عدد‌رنگی یک‌به‌یک را بیان و کرانی از آن برای گراف‌های مختلف و در حالت خاص برای گراف‌های مکعب Q_n محاسبه می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم برای $\chi_i(G) = k$ ، عدد‌رنگی یک‌به‌یک جزء مسائل NP -کامل است.

مطالعات اولیه در سال ۲۰۰۱ توسط هان^۱ و دوستانش در مقاله‌ای با عنوان «رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک گراف‌ها» بیان شد. [۹] چند سال بعد در سال ۲۰۰۶ لوزار^۲ و دوستانش این نوع رنگ‌آمیزی را برای گراف‌های مسطح با کمترین تعداد رنگ در مقاله [۱۳] بیان نمودند. در سال ۲۰۰۷ بوی^۳ و دوستانش رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک برای گراف‌های مسطح در مقاله بیان کردند. [۲۳] دوین^۴ با دوستانش کران‌هایی از عدد‌رنگی یک‌به‌یک برای گراف‌ها مشخص کردند. [۱] در سال ۲۰۰۸ هلل^۵ و دوستانش رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک را روی گراف‌های وتری بررسی نمودند. [۱۹]

تعریف ۱.۱.۲. k -رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک رأسی از گراف $G = (V, E)$ تابعی از

$$C : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

^۱G. Hahn

^۲L. Lovász

^۳V. Bu

^۴A. Doyon

^۵P. Hell

است. به طوریکه هیچ دو رأسی با همسایگی مشترک دارای رنگ یکسانی نباشند. حداقل تعداد رنگ‌های مجاز در رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک، عدد رنگی یک‌به‌یک^۶ می‌گوییم و آن را با $\chi_i(G)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۲. بررسی درستی روابط زیر به سادگی امکان پذیر است.

$$1. \text{ برای } n \geq 2: \chi_i(P_n) = 2$$

$$2. \chi_i(C_n) = \begin{cases} 2, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 3, & \text{فرد } n; n \not\equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

قضیه ۳.۱.۲. برای هر گراف G داریم، $\chi_i(G) = \chi(G^{(2)})$.

$$4.1.2. \text{ قضیه } \Delta(G) \leq \chi_i(G) \leq |V(G)|$$

۲.۲ نتایج پایه

لم ۱.۲.۲. اگر برای گراف G منتظم از درجه d داشته باشیم $\chi_i(G) = d$ ، آنگاه d عاد می‌کند $n = |V(G)|$.

برهان. گراف G منتظم از درجه d و هر رأس آن d همسایه دارد. لذا بنابه تعریف رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک هر رنگ دقیقاً یک بار در همسایگی هر رأس ظاهر می‌شود، در واقع هر رنگ دقیقاً d بار در $n = \sum_{u \in V(G)} 1$ شمارش می‌شود. لذا هر رنگی دقیقاً $\frac{n}{d}$ بار در گراف G استفاده شده است. در نتیجه d تعداد رؤوس گراف G عاد می‌کند. \square

لم ۲.۲.۲. اگر گراف G همبند و متمایز از گراف K_2 باشد، آنگاه $\chi(G) \leq \chi_i(G)$.

برهان. فرض کنید گراف G ، دور فرد یا گراف کامل نداشته باشد. لذا بنابر قضیه بروکس ۴۶.۱.۱ و قضیه ۴.۱.۲ داریم:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) \leq \chi_i(G).$$

فرض کنید گراف G شامل دور C_p یا گراف کامل، متمایز از K_2 باشد. بنابر قضیه بروکس ۴۶.۱.۱ داریم:

$$\chi(G) = \chi_i(G).$$

\square

لم ۳.۲.۲. اگر $diam(G) = 2$ و α عدد استقلال گراف G باشد، آنگاه $\chi_i(G) \geq \alpha$ است.

برهان. در هر مجموعه مستقلی از گراف G که $diam(G) = 2$ است، هر جفت رأسی از آن در نظر بگیریم باید دارای همسایگی مشترک باشند. لذا برای رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک گراف G حداقل α رنگ نیاز داریم. \square

^۶Injective chromatic number

لم ۴.۲.۲. گراف دلخواه G از مرتبه $n \geq 4$ در نظر بگیرید. اگر $\chi_i(G) = |V(G)|$ و فقط اگر گراف G کامل باشد یا $diam(G) = 2$ و هر یال آن در یک مثلث باشد.

برهان. از قضیه بروکس ۴۶.۱.۱ و قضیه ۴.۱.۲ داریم:

$$\chi_i(G) = \chi(G^{(2)}) = |V(G)|.$$

که معادل است با این که گراف $G^{(2)}$ کامل است اگر و فقط اگر هر جفت رئوس متمایز از آن دارای همسایگی مشترک باشند.

فرض کنید گراف $G^{(2)}$ کامل باشد. بنابراین هر جفت رئوس آن با هم مجاور و دارای $diam(G) = 2$ هستند. لذا هر جفت رئوسی که در نظر بگیریم دارای همسایگی مشترک هستند.

فرض می‌کنیم هر جفت رئوسی از گراف $G^{(2)}$ دارای همسایگی مشترک هستند. و نشان می‌دهیم که گراف $G^{(2)}$ کامل است. فرض خلف می‌کنیم که گراف $G^{(2)}$ کامل نباشد پس دو رأس وجود دارند که با هم مجاور نیستند. به طبع آن $diam(G) \neq 2$ است به تناقض رسیدیم و گراف $G^{(2)}$ باید کامل باشد. \square

لم ۵.۲.۲. اگر گراف G دارای ماکزیمم درجه Δ باشد، آنگاه $\chi_i(G) \leq \Delta(\Delta - 1) + 1$.

برهان. رأس دلخواه $v \in V(G) = V(G^{(2)})$ در نظر بگیرید. می‌دانیم که حداکثر $\Delta(\Delta - 1)$ رأس در گراف G وجود دارند، که فاصله آنها تا رأس v حداکثر دو است. لذا ماکزیمم درجه رأس v در گراف مربع $G^{(2)}$ حداکثر $\Delta(\Delta - 1)$ است. در نتیجه بنابه لم ۲.۲.۲ داریم:

$$\chi_i(G) = \chi(G^{(2)}) \leq \Delta(\Delta - 1) + 1.$$

\square

کران‌های حاصل از لم ۵.۲.۲ و ۳.۲.۲ برای گراف‌های نامتناهی G شارپ (تیز) هستند.

گزاره ۶.۲.۲. فرض کنید گراف G دارای $diam(G) = 2$ و ماکزیمم درجه Δ باشد. اگر هر یال آن در یک مثلث باشد، آنگاه

$$|V(G)| \leq \Delta^2 - \Delta.$$

برهان. فرض خلف می‌کنیم که $|V(G)| \geq \Delta^2 - \Delta + 1$ و $\Delta \geq 3$ باشد. رأس $u \in V(G)$ از درجه Δ در نظر می‌گیریم به طوریکه مجموعه همسایه‌های آن برابر با $N(u) = \{u_i | 1 \leq i \leq \Delta\}$ و باقی رئوس برابر با $V = V(G) \setminus (\{u\} \cup N(u))$ و $N_V(u_i) = N(u_i) \cap V$ باشند. می‌دانیم که $|N_V(u_i)| \leq \Delta - 2$ است، چون در غیر این صورت دور C_3 شامل هیچ کدام از یال‌های uu_i نمی‌شود.

$$|V| \leq \sum_{i=1}^{\Delta} |N_V(u_i)| \leq \Delta(\Delta - 2).$$

از طرفی $|V| = \Delta(\Delta - ۲)$ بنابراین

$$|V| = \sum_{i=1}^{\Delta} |N_V(u_i)| = \Delta(\Delta - ۲)$$

در نتیجه $|N_V(u_i)| = \Delta - ۲$ و u_i ها دوه دو مجزا هستند.

رأس u_1 در همسایگی u و رأس $v \in N_V(u_1)$ در نظر بگیرید. فرض کنید $N(v) = \{u_1, v_2, \dots, v_t\}$ برای $t \leq \Delta$ و برای هر $v_i \in V$ و $۲ \leq i \leq t$ باشد. بنابراین یال $u_1 v$ در یک مثلث است. بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم $v_2 \in N_V(u_1)$ ، دو مجموعه $\{v_i | ۳ \leq i \leq t\}$ و $\{u_i | ۲ \leq i \leq \Delta\}$ در نظر بگیرید. بنابراین وجود دارد $۲ \leq j \leq \Delta$ به طوری که $N_v(u_j) \cap N(v) = \emptyset$ باشد. یعنی فاصله v و u_j بیشتر از دو، به تناقض رسیدیم و حکم ثابت است. \square

لم ۷.۲.۲. برای هر گراف G و H داریم،

$$(G \square H)^{(۲)} = (G^{(۲)} \square H^{(۲)}) \cup (G \times H).$$

برهان. فرض کنید

$$(G \square H)^{(۲)} \subseteq (G^{(۲)} \square H^{(۲)}) \cup (G \times H)$$

و $(x, y) \in V(G)$ ، $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in V(H)$ باشد. برای اثبات کافی است نشان دهیم، دو رأس (a_1, b_1) و (a_2, b_2) در $(G^{(۲)} \square H^{(۲)}) \cup (G \times H)$ به یکدیگر متصل هستند. بنابه تعریف حاصل ضرب دکارتی $G \square H$ سه حالت زیر را داریم: (اتصال را با \sim نشان می دهیم).

۱.

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = x \\ y \sim b_1, y \sim b_2 \end{cases} \implies b_1 \sim b_2 \implies (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \text{ در } G^{(۲)} \square H^{(۲)}.$$

۲.

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = y \\ x \sim a_1, x \sim a_2 \end{cases} \implies a_1 \sim a_2 \implies (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \text{ در } G^{(۲)} \square H^{(۲)}.$$

۳.

$$\begin{cases} a_1 = x, a_2 = x \\ y \sim b_1, y = b_2 \end{cases} \implies \begin{cases} b_1 \sim b_2 \\ a_1 \sim a_2 \end{cases} \implies (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \text{ در } G \times H.$$

برای حالت

$$(G \square H)^{(۲)} \supseteq (G^{(۲)} \square H^{(۲)}) \cup (G \times H)$$

به سادگی می توان نشان داد که $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ در گراف $(G \square H)^{(۲)}$. \square

لم ۸.۲.۲. اگر G و H دو گراف همبند و متمایز از K_2 باشند، آنگاه

$$\chi_i(G \square H) \leq \chi_i(G)\chi_i(H).$$

برهان. یادآوری می‌کنیم که $\chi(G \cup H) \leq \chi(G)\chi(H)$ است. از تعریف حاصل ضرب دکارتی ۳۳.۱.۱ و رسته‌ای ۳۴.۱.۱ و همچنین لم ۷.۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned} \chi(G \times H) &\leq \chi(G) \times \chi(H) \\ &\leq \min\{\chi(G), \chi(H)\} \\ \chi(G^{(2)} \square H^{(2)}) &= \max\{\chi(G^{(2)}), \chi(H^{(2)})\} \\ \chi((G \square H)^{(2)}) &\leq \max\{\chi(G^{(2)}), \chi(H^{(2)})\} \cdot \min\{\chi(G), \chi(H)\}. \end{aligned}$$

بنابه قضیه ۳.۱.۲ نتیجه می‌شود که، $\chi_i(G) = \chi(G^{(2)})$ بنابراین

$$\chi_i(G \square H) \leq \max\{\chi_i(G), \chi_i(H)\} \cdot \min\{\chi(G), \chi(H)\}. \quad (1.2)$$

بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $\chi_i(G) \geq \chi_i(H)$ باشد، بنابه فرض هر دو گراف مجزا از گراف K_2 هستند بنابراین $|V(H)| \geq 3$ و $\chi_i(H) \geq 2$ است. در نهایت با استفاده از معادله (۱.۲) و لم ۲.۲.۲ داریم:

$$\chi_i(G \square H) \leq \chi_i(G)\chi(H) \leq \chi_i(G)\chi_i(H).$$

□

کران بالای حاصل از لم ۸.۲.۲ شارپ است به عنوان مثال، اگر $G = K_m$ و $H = K_n$ برای $m, n \geq 3$ حالت تساوی رابطه بالا برقرار است، اگر $G = K_m \square K_2$ و $H = K_n \square K_2$ برای $m, n \geq 3$.

۳.۲ عدد رنگی یک به یک گراف مکعب Q_n

گراف‌های شبه-مکعب^۸ $Q_X(S)$ ، روی مجموعه توانی 2^X از مجموعه رئوس متناهی X تعریف شده است. دو رأس در $Q_X(S)$ مجاور هستند، اگر تفاضل متقارنشان متعلق به مجموعه $S \subseteq 2^X$ باشد. این نوع گراف توسط لووسز^۹ در سال ۱۹۷۵ معرفی شد. [۱۳]

نوع خاصی از گراف‌های مکعب گراف فاصله $Q_n(D)$ است که مجموعه رئوس آن $\{0, 1\}^n$ و دو رأس با هم مجاور هستند، اگر فاصله همینگ آنها متعلق به $D \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ باشد. همسایگی مشترک گراف مکعب Q_n با این تعریف $Q_n(\{2\})$ است. ایگر^{۱۰} ثابت کرد که $\chi_i(Q_n(\{2\})) \leq 2^{\lceil \log n \rceil}$

^۸Cube-Like

^۹L. Lovász

^{۱۰}F. Jaeger

و احتمال داد برای $n = 2^m - j$ که $0 \leq j \leq 3$ و $m \geq 2$ حالت تساوی برقرار است. این احتمال در قالب دو قضیه ۳.۳.۲ و ۷.۳.۲ توسط لینیل^{۱۱}، مشیولم^{۱۲} و ترسی^{۱۳} بیان و اثبات شده‌اند. [۱۸] در ادامه‌ای بخش از نظریه کدگذاری برای تعیین عدد رنگی یک به یک گراف مکعب Q_n استفاده می‌کنیم.

فرض کنید مجموعه رئوس گراف H_n رشته‌های دودویی از طول n با زوج تعداد یک باشند. دو رأس آن مجاور هستند، اگر در دو مکان با هم متفاوت باشند به عبارت دیگر فاصله همینگ آنها دو باشد. گراف همسایه مشترک $Q_n(\{2\})$ در دو مؤلفه، متناظر با گراف مکعب Q_n است و هر دو یکرخت با گراف H_n می‌باشند.

گراف مربع $Q_n^{(2)}$ را به صورت $Q_n^{(2)} = Q_n \cup Q_n(\{2\})$ تعریف می‌کنیم. دو رأس در گراف مربع $Q_n^{(2)}$ مجاور هستند، اگر و فقط اگر فاصله همینگ آنها حداکثر دو باشد. گراف $Q_n^{(2)}$ یکرخت با گراف H_{n+1} است. [۲۲]

کد دودویی S از طول n ، زیرمجموعه دلخواهی از رئوس گراف مکعب Q_n است کد S یک کد تصحیح کننده خطا است اگر فاصله همینگ هر دو رأس متمایز از آن حداقل ۳ باشد.

تعریف ۱.۳.۲. کمترین تعداد t از کدهای تصحیح کننده خطا S_1, S_2, \dots, S_t بطوریکه $V(Q_n) = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_t$ باشد، عدد پوششی کد^{۱۴} گراف مکعب Q_n می‌گویند و با نماد $\gamma'(Q_n)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۲. بیشترین تعداد کدواژه‌های یک کد دودویی تصحیح کننده خطا از طول n را با نماد $\sigma(n)$ نمایش داده می‌شود.

از دو تعریف ۱.۳.۲ و ۲.۳.۲ داریم،

$$\sigma(n)\gamma'(Q_n) \geq 2^n. \quad (2.2)$$

در نظریه کدگذاری مطالعات گسترده‌ای در رابطه با $\sigma(n)$ صورت گرفته است. اما تنها با استفاده از کدهای همینگ، برنامه ریزی خطی، کران تراکم کره و تعمیم آن روی کدها برای $1 \leq j \leq 4$ درستی رابطه $\sigma(2^m - j) = 2^{2^m - j - m}$ بررسی شده است.

برای مطالعه بیشتر به [۱۶]، [۱۵]، [۲۰] و بخش ۱۷ از [۱۷] مراجعه شود.

قضیه ۳.۳.۲. $\chi_i(Q_n) = n$ اگر و فقط اگر برای $r \geq 0$ داشته باشیم $n = 2^r$.

برهان. فرض می‌کنیم $\chi_i(Q_n) = n$ باشد. نشان می‌دهیم که $n = 2^r$ است برای اثبات کافی است نشان دهیم که Q_n ، گرانی n منتظم است.

فرض می‌کنیم برای $0 \leq i \leq n - 1$ ، $a = (a_i)$ و $a_i \in \{0, 1\}$ رأس‌های گراف مکعب Q_n باشند.

^{۱۱}N.linial

^{۱۲}R.meshulam

^{۱۳}M.tarsi

^{۱۴}Code covering number

دو رأس در Q_n به یکدیگر متصل هستند اگر در یک مکان با هم متفاوت باشند. لذا هر رأس به n رأس دیگر می تواند متصل باشد. از لم ۱.۲.۲ نتیجه می شود که $n|V(G) = 2^n$ و اثبات تمام است.

فرض می کنیم $n|V(G) = 2^r$ و نشان می دهیم که $\chi_i(Q_n) = n$ است.

فرض می کنیم $a = (a_i)$ رأس های گراف مکعب Q_n باشند و $i^r = (i_0, i_1, \dots, i_{r-1}) = (i_j)_2$ برای $0 \leq j \leq r-1$ نمایش دودویی از طول r باشد.

رنگ آمیزی C برای رئوس گراف مکعب Q_n به صورت $C(a) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i i^r$ ارائه می دهیم. از آنجایی که a_i و i^r هر دو بردار هستند و $n = 2^r$ ، لذا رابطه بالا برقرار و برابر با n است.

در ادامه نشان می دهیم که رنگ آمیزی یک به یک است. فرض کنید a و b دو رأس در همسایگی رأس d باشند. دو رأس در Q_n مجاور هستند اگر در یک مکان متفاوت باشند. فرض می کنیم رأس a و d در مکان p و دو رأس b و d در مکان q با هم متفاوت باشند.

$$p \neq q, a_p = d_p + 1, b_q = d_q + 1, a_i = b_i = d_i (i \notin \{p, q\})$$

بنابراین a و b دارای رنگ یکسانی هستند.

$$\begin{aligned} c(a) = c(b) &\implies \sum_{i=0}^{n-1} a_i i^r = \sum_{i=0}^{n-1} b_i i^r, \\ &\implies (d_p + 1)p^r + d_q q^r = d_p p^r + (d_q + 1)q^r, \\ &\implies p^r = q^r \implies p = q. \end{aligned}$$

که با فرض برابر نبودن p و q در تناقض است. لذا دو رأس با همسایگی مشترک دارای رنگ یکسان نیستند و رنگ آمیزی گراف G یک به یک بوده و برابر با $n = 2^r$.

□

نتیجه ۴.۳.۲. برای هر n ای $\chi_i(Q_n) \leq 2^{\lceil \log n \rceil}$ بنابراین $\chi_i(Q_n) \leq 2n - 2$ است. ۱۵

لم ۵.۳.۲. $\chi_i(Q_{n+1}) = \gamma'(Q_n)$.

برهان. از قضیه ۴.۱.۲ و یکرختی گراف H_{n+1} با گراف $Q_{n+1}(\{2\})$ داریم که

$$\chi_i(Q_{n+1}) = \chi(Q_{n+1}(\{2\})) = \chi(H_{n+1}) = \chi(Q_n^{(2)}).$$

بدیهی است که تعداد رنگ ها در رنگ آمیزی گراف $Q_n^{(2)}$ برابر تعداد کدهای تصحیح کننده خطا هستند. از این رو مجموعه رئوس گراف Q_n را به گونه ای تجزیه می کنیم که هر کدام یک کد تصحیح کننده خطا باشند. به هر کدام از این مجموعه ها یک رنگ اختصاص می دهیم. از این رو

$$\chi_i(Q_{n+1}) = \chi(Q_n^{(2)}) = \gamma'(Q_n).$$

□

نتیجه ۶.۳.۲. $\chi_i(Q_3) = \chi_i(Q_4) = 4$ و برای $5 \leq k \leq 8$ ، $\chi_i(Q_k) = 8$.

برهان. از لم ۵.۳.۲ و قضیه ۴.۳.۲ داریم $\chi_i(Q_3) \leq \chi_i(Q_4) = 4$ ، از طرفی $\chi_i(Q_3) = \gamma'(Q_2)$ و $\gamma'(Q_2) = 4$ است.

از لم ۵.۳.۲ و قضیه ۴.۳.۲ واضح است که $\chi_i(Q_5) \leq \chi_i(Q_8) = 8$ و $\chi_i(Q_5) = \gamma'(Q_4)$ از طرفی سه رأس در گراف Q_4 فاصله همینگشان حداقل سه است. بنابراین $\gamma'(Q_4) = 8$ و $\chi_i(Q_5) = \chi_i(Q_8) = 8$ است. \square

قضیه ۷.۳.۲. $\chi_i(Q_{2^m-j}) = 2^m$ برای $0 \leq j \leq 3$ است.

برهان. بنابه نتیجه ۴.۳.۲ برای $0 \leq j \leq 3$

$$\chi_i(Q_{2^m-j}) \leq 2^{\lceil \log 2^m - j \rceil} = 2^{\lceil m-j \rceil},$$

و از لم ۵.۳.۲ و معادله (۲.۲) نتیجه می شود که،

$$\chi_i(Q_{2^m-j}) = \gamma'(Q_{2^m-j-1}) \geq \frac{2^m - j - 1}{\sigma(2^m - j - 1)} = 2^m.$$

بنابراین $\chi_i(Q_{2^m-j}) = 2^m$ برای $0 \leq j \leq 3$ است. \square

لم ۸.۳.۲. $\chi_i(Q_{2n+1}) \leq 2\chi_i(Q_{n+1})$.

برهان. مجموعه رئوس گراف Q_n به دو مجموعه V_e و V_o افراز و به صورت زیر تعریف می کنیم.

• V_e : رشته هایی که تعداد یک های آن زوج است.

• V_o : رشته هایی که تعداد یک های آن فرد است.

کدهای تصحیح کننده خطای $S_{e,i}$ و $S_{o,i}$ برای $i = 1, 2, \dots, t$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$S_{e,i} = \left\{ x \parallel (x, y) : \begin{array}{l} x \in V_e \\ y \in S_i \end{array} \right\},$$

$$S_{o,i} = \left\{ x \parallel (x, y) : \begin{array}{l} x \in V_o \\ y \in S_i \end{array} \right\}.$$

$S_{e,i}$ و $S_{o,i}$ پوششی برای Q_n هستند. حال اگر نشان دهیم که $\gamma'(Q_{2n}) \leq 2t$ ، حکم ثابت می شود. از این رو نشان می دهیم که فاصله همینگ هر دو عضوی از $S_{e,i}$ و $S_{o,i}$ حداقل سه است. بدون کاستن از کلیت فرض می کنیم که $(x_1, x_1 + y_1) \neq (x_2, x_2 + y_2) \in S_{e,1}$ باشند.

$$d[(x_1, x_1 + y_1), (x_2, x_2 + y_2)] = d(x_1, x_2) + d(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \geq 3. \quad (3.2)$$

بنابراین دو حالت زیر را داریم:

$$.1 \quad x_1 \neq x_2$$

- اگر $d(x_1, x_2) \geq 3$ حکم بدیهی است.
- اگر $d(x_1, x_2) = 2$ باشد ادعا می‌کنیم که $d(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \geq 1$ است. فرض می‌کنیم $d(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 0$ باشد.

و

$$Y_1 = (b_1, b_2, \dots, b_n), \quad Y_2 = (c_1, c_2, \dots, c_n), \\ X_1 = (1, 1, a_3, \dots, a_n), \quad X_2 = (0, 0, a_3, \dots, a_n).$$

حال داریم،

$$(1, 1, a_3, \dots, a_n) + Y_1 = (b_1 + 1, b_2 + 1, \dots, b_n + a_n), \\ (0, 0, a_3, \dots, a_n) + Y_2 = (c_1, c_2, \dots, c_n + a_n).$$

مشاهده می‌شود که فاصله همینگ صفر نیست. که این با فرض در تناقض است و باید $d(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \geq 1$ باشد.

$$.2 \quad x_1 = x_2 \text{ و } y_1 \neq y_2 \text{ از معادله (۳.۲) داریم،}$$

$$d[(x_1, x_1 + y_1), (x_2, x_2 + y_2)] = d(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = d(y_1, y_2).$$

کافی است نشان دهیم که $d(y_1, y_2) \geq 3$ است. از آنجای که $y_1, y_2 \in S_1$ و S_1 کد تصحیح کننده خطا است بنابراین حکم ثابت است.

□

۴.۲ پیچیدگی محاسباتی

سوال ۱.۴.۲. آیا گراف G یک k -رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک دارد؟

قضیه زیر به این سوال پاسخ داده و نشان می‌دهد که رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک جزء مسائل NP است.

قضیه ۲.۴.۲. رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک جزء مسائل NP -کامل می‌باشد.

برهان. فرض کنید گراف $G = (V, E)$ و k عددی صحیح باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم گراف G همبند و درجه آن حداقل سه باشد. گراف جدید \tilde{G} به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\chi(G) \leq k \iff \chi_i(\tilde{G}) \leq k + 3|E|.$$

فرض می‌کنیم مجموعه رئوس و یال‌های گراف \tilde{G} به صورت زیر باشند.

$$V(\tilde{G}) = V \cup V_E \cup V_A, \quad E(\tilde{G}) = E_I \cup E_E \cup E_A$$

که

$$V_A = \{y_{uv}^u : uv \in E\}, V_E = \{x_{uv} : uv \in E\}, E_A = \{y_{st}^s y_{uv}^u : st, uv \in E\},$$

$$E_I = \{ux_{uv}, uy_{uv}^u, x_{uv}y_{uv}^u : uv \in E\}, E_E = \{x_{st}x_{uv} : st, uv \in E\}.$$

به بیان سادتر، گراف \tilde{G} از اضافه شدن دو رأس جدید به یال uv از گراف G حاصل شده است. در ادامه نشان می‌دهیم که اگر گراف \tilde{G} دارای رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک باشد، آنگاه رنگ رئوس u, v, x_{uv}, y_{uv}^u باید متفاوت باشند. رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک گراف‌های کامل (حداقل از مرتبه سه) تضمین می‌کنند که رنگ رئوس مجموعه‌های V_A و V_E نسبت به هم متمایز هستند.

به عبارت دیگر، فرض کنید $c : V \rightarrow [k]$ یک رنگ‌آمیزی از گراف G باشد، و رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک $\tilde{c} : V(\tilde{G}) \rightarrow [k] \cup E \cup \{(uv, u) : uv \in E\}$ از گراف \tilde{G} با $k + 3|E|$ رنگ تعریف می‌کنیم. همچنین قرار می‌دهیم،

$$\begin{aligned} \tilde{c}(u) &= c(u) & \forall u \in V, \\ \tilde{c}(x_{uv}) &= uv & \forall x_{uv} \in V_E, \\ \tilde{c}(y_{uv}^u) &= (uv, u). \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم \tilde{c} یک‌به‌یک است. هر دو رأسی که از مجموعه $V_A \cup V_E$ در نظر بگیریم دارای رنگ‌های متمایز هستند. بنابراین کافی است نشان دهیم رنگ رأس‌های که در همسایگی دو مجموعه $V_A \cup V_E$ و V قرار دارند، متمایز هستند. رأس $x \in V_E$ را در نظر بگیرید، رنگ تمام همسایگی‌های آن در مجموعه رئوس $V_A \cup V_E$ و همچنین نسبت به رئوس مجموعه V متمایز هستند. بعلاوه، $x = x_{uv}$ دقیقاً دو همسایه در مجموعه V دارد، u و v ، از آنجایی که رئوس یک یال در گراف G هستند لذا رنگی‌های متمایزی دریافت می‌کنند. حال رأس $y \in V_A$ تنها یک همسایگی در مجموعه V دارد که رنگ آن متمایز از تمام همسایگی‌های y است. در نتیجه \tilde{c} یک‌به‌یک است.

برعکس، فرض می‌کنیم l -رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک \tilde{c} از گراف \tilde{G} داشته باشیم. ادعا می‌کنیم مجموعه رئوس V گراف G دقیقاً با $l - 3|E|$ رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی کرد. گراف‌های القایی از مجموعه رئوس V_A و V_E کامل هستند و هیچ دو رأسی در این دو مجموعه دارای رنگ یکسانی نمی‌باشند. بعلاوه، برای هر $st, uv \in E$ رأس‌های x_{st} و y_{uv}^u دارای همسایگی مشترک x_{uv} اگر $\{s, t\} \neq \{u, v\}$ و در غیر این صورت دارای همسایگی مشترک u می‌باشند. لذا $3|E|$ رأس در مجموعه $V_A \cup V_E$ موجود و دارای رنگ‌های متمایزی در \tilde{c} می‌باشند. علاوه بر این، هر رأسی از V یک همسایگی مشترک در گراف \tilde{G} با هر رأسی از V_A و به طور مشابه با V_E دارد. بنابراین رنگ‌های \tilde{c} که در رئوس مجموعه V ظاهر شده‌اند متمایز از $3|E|$ رنگ استفاده شده در $V_A \cup V_E$ می‌باشند. حال از آنجایی که \tilde{c} یک‌به‌یک و هر دو رأس مجاوری در مجموعه رئوس گراف G دارای یک همسایگی مشترک در \tilde{G} است. لذا باقی رأس‌های مجموعه V گراف G را با $l - 3|E|$ رنگ باقی مانده می‌توان رنگ‌آمیزی کرد.

□

فصل ۳

رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی

۱.۳ مقدمه

عدد رنگی یالی سه متوالی در سال ۲۰۱۱ توسط سامپادکمر^۱، و بیوجتس^۲، دومنیک^۳ و... بیان شد. آنها تعداد دقیق رنگ‌های استفاده شده در گراف کامل، مسیر و دور... مشخص کردند. همچنین بنابه تعریف مجموعه برش، درجه رئوس و عدد استقلال غالب کرانی از عدد رنگی یالی سه متوالی پیدا کردند.

تعریف ۱.۱.۳. سه یال e_1, e_2, e_3 در گراف G ، **متوالی**^۴ گفته می‌شود. هرگاه تشکیل یک دور به طول سه یا یک مسیر با سه یال بدهند.

تعریف ۲.۱.۳. رنگ‌آمیزی یالی $\varphi : E \rightarrow \mathbb{N}$ از گراف $G = (V, E)$ سه متوالی نامیده می‌شود. اگر برای هر سه یال متوالی e_1, e_2, e_3 (به ترتیب)، یال e_2 رنگ یکی از یال‌های e_1 یا e_3 را بگیرد. ماکزیمم تعداد رنگ‌های استفاده شده در چنین رنگ‌آمیزی **عدد رنگی یالی سه متوالی**^۵ می‌گویند و با نماد $\psi_c(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنید گراف همبند G کامل نباشد. کوچکترین اندازه مجموعه برش G را **عدد همبندی**^۶ می‌نامیم.

^۱E. Sampathkumar

^۲Cs. Bujtas

^۳Ch. Dominic

^۴Consecutive

^۵3-consecutive edge coloring

^۶Connectivity number

ملاحظه ۴.۱.۳. اگر گراف G ناهمبند و G_1, G_2, \dots, G_c مؤلفه‌های G باشند. عدد رنگی یالی سه متوال آن برابر است با

$$\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = \sum_{i=1}^c \psi'_{\mathcal{P}_c}(G_i).$$

همچنین حذف یا افزودن رأس‌های تنها به گراف G تغییری در مقدار $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G)$ ایجاد نمی‌کند.

مثال ۵.۱.۳. بررسی درستی روابط زیر به سادگی امکان پذیر است.

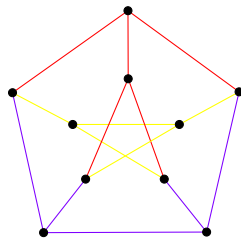
۱. برای $n \geq 2$: $\psi'_{\mathcal{P}_c}(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

۲. برای $n \geq 3$: $\psi'_{\mathcal{P}_c}(C_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

۳. اگر G گرافی کامل با n رأس و یا چرخه با $n+1$ رأس برای $n \geq 3$ باشد: $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = 1$

۴. $\psi'_{\mathcal{P}_c}(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$.

۵. اگر G گراف پترسن P باشد: $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = 3$



شکل ۱.۳: رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی گراف پترسن با $\psi'_{\mathcal{P}_c}(P) = 3$

برهان.

۱. برای $\psi'_{\mathcal{P}_c}(P_n) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ بدیهی است. حال نشان می‌دهیم که برای کمتر از آن نیز برقرار است. فرض می‌کنیم رنگی مانند c_1 وجود دارد که تنها یکبار استفاده شده است. اگر رنگ c_1 به یکی از یال‌های میانی اختصاص داده شود بنابه تعریف رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی یال قبل یا بعد آن باید رنگ c_1 بگیرد. این با فرض یک بار استفاده بودن رنگ c_1 در تناقض است. بنابراین تنها یال‌های ابتدای یا انتهای مسیر P_n می‌توانند رنگ c_1 بگیرند. اما باقی رنگ‌ها حداقل دو بار می‌توانند استفاده شوند. در ادامه نشان می‌دهیم که تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای چنین رنگ‌آمیزی دقیقاً برابر با $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ است.

• اگر n زوج باشد.

بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم، رأس ابتدایی دارای رنگ c_1 باشد. در این صورت

تعداد یال‌های باقی مانده فرد است و رنگ‌های باقی مانده باید حداقل دو بار استفاده شوند از این رو داریم،

$$\psi'_{3c}(P_n) = \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}.$$

• اگر n فرد باشد:

$$\psi'_{3c}(P_n) = \frac{n-1}{2} + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

۲. عدد رنگی یالی سه متوالی را برای دور C_n در دو حالت بررسی می‌کنیم:

• اگر n زوج باشد.

بدیهی است که هر رنگ حداقل دو بار استفاده شده‌اند. در این صورت داریم،

$$\psi'_{3c}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}.$$

• اگر n فرد باشد.

فرض کنید $E(C_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ باشد یال‌های e_1, e_2, \dots, e_{n-1} با حداقل $\frac{n-1}{2}$ رنگ و یال e_n را با رنگی متفاوت از رنگ یال‌های دیگر رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی می‌کنیم. بدیهی است که با تعریف رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی در تناقض است. از این رو یک رنگ حداقل سه بار و برای سه یال متوالی استفاده شده است. در نتیجه داریم،

$$\psi'_{3c}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

□

تعریف ۶.۱.۳. فرض کنید گراف $G = (V, E)$ تحت نگاشت رنگی $\varphi: E \rightarrow \mathbb{N}$ رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی شود. رأس $v \in V$ را **تکرنگ**^۶ می‌نامیم، اگر تمام یال‌های متصل به آن دارای رنگ یکسانی باشند.

گزاره ۷.۱.۳. فرض کنید G گرافی با مجموعه یال‌های E باشد. در این صورت نگاشت رنگی $\varphi: E \rightarrow \mathbb{N}$ یک رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی است اگر و فقط اگر حداقل یکی از رأس‌های پایانی هر یالی تکرنگ باشد.

برهان. اگر گراف G دارای رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی باشد، آنگاه رأس پایانی هر یالی تکرنگ است. فرض می‌کنیم یال $e = xy$ دارای رأس پایانی تکرنگ نباشد. در این صورت یال‌های $f = xu$ و $g = yv$ وجود دارند که $\varphi(e) \neq \varphi(f) \neq \varphi(g)$ هستند. از این رو رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی نیست که این با فرض در تناقض است. لذا حداقل یک رأس پایانی از هر یالی تکرنگ است. اگر یکی از رأس‌های پایانی هر یالی از گراف G تکرنگ باشد، آنگاه G دارای رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی است. فرض می‌کنیم گراف G دارای رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی نباشد. در این صورت سه یال متوالی e, f و

^۶Monochromatic

g وجود دارند که در تعریف رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی صدق نمی‌کنند. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم که e یال میانی با رنگی متفاوت از رنگ دو یال دیگر باشد. بنابراین یال e رأس پایانی تک‌رنگ ندارد. لذا فرض باطل و گراف G دارای رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی است.

□

قضیه ۸.۱.۳. فرض کنید گراف G فاقد رأس‌های تنها باشد. برای هر عدد صحیح $k \geq 2$ عدد رنگی یالی سه متوالی G حداقل k است اگر و فقط اگر G دارای مجموعه برش k -پایدار باشد.

برهان. فرض می‌کنیم $\psi'_e(G) = k$ و M مجموعه تمام رأس‌های تک‌رنگ گراف G باشد. بنابه گزاره ۷.۱.۳ حداقل یک رأس پایانی از هر یالی عضو مجموعه M است. لذا M یک پوشش رأسی و $V \setminus M$ یک مجموعه برش k -پایدار در G هستند.

فرض می‌کنیم S مجموعه برش k -پایدار گراف G باشد. و مجموعه رئوس مؤلفه‌های $G - S$ برابر با V_1, V_2, \dots, V_l که $l \geq k$ باشند. رنگ‌آمیزی یالی را برای یال $e = xy$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(e) = i \iff x \in V_i \text{ یا } y \in V_i$$

از آنجایی که هیچ یالی دو تا رأس پایانی در S ندارد، از این رو به هر یال از گراف G حداقل یک رنگ می‌توان اختصاص داد. در حقیقت دقیقاً یک رنگ دارند و از طرفی V_1, V_2, \dots, V_l مؤلفه‌های مجزایی در $G - S$ القاء می‌کنند. لذا هیچ یالی دارای رأس‌های پایانی از دو مجموعه مختلف V_i و V_j نمی‌باشد. علاوه بر این هر رأسی از $V \setminus S$ تک‌رنگ و هر یال دارای حداقل یک رأس از $V \setminus S$ است. بنابه فرض قضیه گراف G فاقد رأس تنها است و برای بعضی رئوس هر رنگ بین ۱ تا l رخ می‌دهد. و بنابه گزاره ۷.۱.۳ گراف G با $l \geq k$ رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی می‌شود.

□

۲.۳ کران‌هایی از عدد رنگی یالی سه متوالی

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنید H زیرگراف فراگیری از گراف G باشد. اگر هر مؤلفه‌ی همبندی آن حداقل از مرتبه دو باشد، آنگاه

$$\psi'_e(G) \leq \psi'_e(H).$$

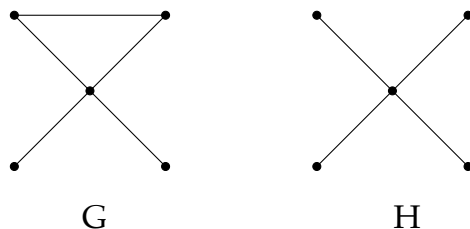
برهان. بنابر قضیه ۸.۱.۳ فرض کنید $\psi'_e(G) = k$ و S مجموعه برش k -پایدار در G باشد. از آنجایی که H زیرگراف فراگیر از G است. لذا S مجموعه رئوس پایدار در H نیز هست. بنابراین اگر دو رأس متعلق به مؤلفه‌های مختلف $G - S$ باشد، آنگاه هر کدام متعلق به همان مؤلفه در $H - S$ نیستند. علاوه بر این S مجموعه برش k -پایدار در H نیز هست. لذا H رأس تنها ندارد و بنابه قضیه ۸.۱.۳ داریم:

$$\psi'_e(G) = k \leq \psi'_e(H).$$

□

گزاره بالا همواره در حالت تساوی برقرار نیست. به عنوان مثال، شکل ۲.۳ و یا مسیر P_n با گراف کامل K_n که $P_n \subseteq K_n$ یعنی تنها رابطه زیر برای آنها برقرار است.

$$\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = k < \psi'_{\mathcal{P}_c}(H).$$



شکل ۲.۳: $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = ۳$ و $\psi'_{\mathcal{P}_c}(H) = ۴$

ملاحظه ۲.۲.۳. اگر گراف G همیلتنی و از مرتبه p باشد، آنگاه می‌توان زیرگراف فراگیری از G به دست آورد که دارای دور همیلتنی باشد.

نتیجه ۳.۲.۳. فرض کنید گراف G از مرتبه p باشد. در این صورت داریم:

۱. اگر G دارای مسیر همیلتنی باشد، آنگاه $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil$.

۲. اگر G دارای دور همیلتنی باشد، آنگاه $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

نتیجه ۴.۲.۳. اگر گراف G از مرتبه p و دارای c مؤلفه همبندی باشد، آنگاه $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) \leq p - c$.

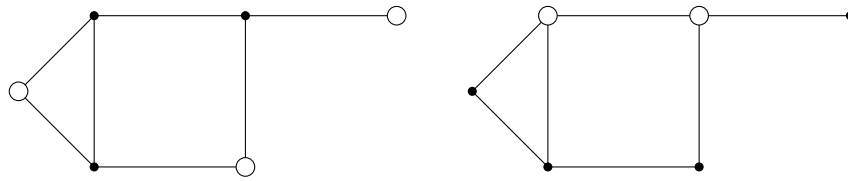
قضیه ۵.۲.۳. برای هر گراف G ، رابطه $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) \leq \alpha(G)$ همواره برقرار است.

برهان. در گراف G با حذف تمامی رئوس تنها می‌توان دید که $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G)$ تغییری نکرده، ولی این عمل باعث کاهش عدد استقلال می‌شود. بنابر قضیه ۸.۱.۳ داریم $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = k$ که این نتیجه می‌دهد گراف G دارای مجموعه برش k -پایدار S است. زیرگراف $G - S$ شامل k مؤلفه است که انتخاب هر رأس از هر کدام یک مجموعه پایدار k -عضوی از G حاصل می‌کند. از این رو داریم:

$$k = \psi'_{\mathcal{P}_c}(G) \leq \alpha(G).$$

□

تعریف ۶.۲.۳. مجموعه احاطه‌گری^۸ گراف $G = (V, E)$ مجموعه‌ای از $D \subseteq V$ است، اگر به ازای هر رأس $v \notin D$ حداقل یک همسایگی در D داشته باشیم. کوچکترین مجموعه احاطه‌گری G را عدد احاطه‌گری^۹ می‌نامیم و با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، رأس‌های سفید شکل ۳.۳ اعضای مجموعه D را تشکیل می‌دهند.



شکل ۳.۳: مجموعه غالب

گراف‌های که رأس فاقد تنها هستند، $\gamma(G) < \frac{n}{3}$ است.

تعریف ۷.۲.۳. مجموعه‌ای که در G هم احاطه‌گر و هم مستقل است، **مجموعه احاطه‌گری مستقل**^{۱۰} می‌گوییم. و به کوچکترین مجموعه احاطه‌گری مستقل گراف G **عدد احاطه‌گری مستقل**^{۱۱} می‌گوییم و با نماد $i(G)$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۸.۲.۳. $\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G)$.

قضیه ۹.۲.۳. اگر گراف G از مرتبه p باشد، آنگاه داریم:

$$\psi'_{pc}(G) \leq p - i(G).$$

برهان. رؤس تنهای گراف G را حذف می‌کنیم مشاهده می‌شود که این عمل تغییری در دو طرف معادله ایجاد نمی‌کند. بنابه گزاره ۸.۱.۳ فرض می‌کنیم $\psi'_{pc}(G) = k$ و S مجموعه برش k -پایدار در G باشد. S را به مجموعه ماکسیمال S' تعمیم می‌دهیم. از آنجایی که هر مجموعه پایدار ماکسیمال یک مجموعه احاطه‌گری مستقل نیز هست، بنابراین $|S'| \geq i(G)$ و $|V \setminus S'| \leq p - i(G)$ است. \square

نتیجه ۱۰.۲.۳. اگر گراف G از مرتبه P باشد، آنگاه $\psi'_{pc}(G) \leq p - \gamma(G)$.

قضیه ۱۱.۲.۳. فرض کنید گراف G همبند و از مرتبه p و ماکزیمم درجه Δ باشد، آنگاه

$$\psi'_{pc}(G) \leq p - \frac{p-1}{\Delta}. \quad (1.3)$$

بعلاوه، حالت تساوی برای p های خیلی بزرگ و $\Delta \geq 2$ نیز برقرار است.

برهان. بنابه قضیه ۸.۱.۳ داریم، $\psi'_{pc}(G) = K$. فرض می‌کنیم S مجموعه برش k -پایدار در G باشد، به‌طوری‌که $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ و $S \subseteq V$ باشد. متناظر با مجموعه S ابرگراف همسایگی^{۱۲} $\mathcal{H} = (X, \varepsilon)$ داریم که مجموعه رؤسش برابر با $X = V \setminus S$ و مجموعه یال‌هایش برابر با

^{۱۰}Dominating set

^۹Dominating number

^{۱۰}Independent dominating set

^{۱۱}Independent dominating number

^{۱۲}Neighborhood hypergraph

$\varepsilon = \{N(v_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$ است.

با توجه به درجه G برای تمام یال‌های $E_i \in \varepsilon$ رابطه $|E_i| \leq \Delta$ برقرار است. بعلاوه، با بیشتر شدن مجموعه برش S داریم:

$$\bigcup_{1 \leq i \leq m} N(v_i) = X.$$

فرض می‌کنیم \mathcal{H} دقیقاً C مؤلفه همبندی داشته باشد. بنابراین

$$|V| - |S| - c = |X| - c \leq \sum_{i=1}^m (|E_i| - 1) \leq (\Delta - 1)|S|.$$

در نتیجه داریم:

$$|S| \geq \frac{p-c}{\Delta}.$$

از طرفی بنابه فرض گراف G همبند است. لذا بین هر دو رأس متمایز $v_i, v_j \in S$ مسیری وجود دارد. از این رو باید حداقل $c-1$ اتصال بین مؤلفه‌های متمایز \mathcal{H} در G وجود داشته باشد. بنابراین زیرگراف حاصل از مجموعه رئوس X بیشتر از $|V| - |S| - (c-1)$ مؤلفه همبندی در G نمی‌تواند القاء کند. در نتیجه برای $c \geq 1$ داریم:

$$\psi'_{\mathcal{H}_c}(G) \leq p - (|S| + c - 1) \leq p + 1 - c - \frac{p-c}{\Delta} \leq p - \frac{p-1}{\Delta}.$$

حالت تساوی را به صورت زیر بررسی می‌کنیم،

فرض می‌کنیم برای $\Delta = 2$ مسیری از مرتبه p وجود داشته باشد. در این صورت داریم:

$$\psi'_{\mathcal{H}_c}(G) \leq p - \frac{p-1}{\Delta} = p - \frac{p-1}{2} = \frac{p+1}{2} = \lceil \frac{p}{2} \rceil$$

و بنابه مثال ۵.۱.۳ داریم:

$$\psi'_{\mathcal{H}_c}(G) = \frac{p+1}{2} = \lceil \frac{p}{2} \rceil.$$

فرض می‌کنیم برای $\Delta \geq 3$ ، درختی Δ -منتظم داشته باشیم که فاصله رئوس نسبت به رأس مرکزی r باشد. (رأس مرکزی را x می‌نامیم).

۱. r زوج باشد.

مجموعه برش مستقل S را مجموعه‌ای از رئوسی که در فاصله $r-1, r-3, r-5, \dots$ نسبت به x قرار دارند انتخاب می‌کنیم.

بنابه تعریف درخت، مستقل بودن مجموعه S بدیهی است. از این رو $|S| = p - |V|$ مؤلفه همبندی داریم که مجموع رئوس مؤلفه‌ها برابر است با،

$$|V \setminus S| = p - |S| = (\Delta - 1)|S| + 1.$$

و بنابه قضیه ۸.۱.۳ داریم:

$$\psi'_{\mathcal{H}_c}(G) \geq p - |S| = (\Delta - 1)|S| + 1$$

اگر رابطه بالا درست باشد حالت تساوی برقرار است.
فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned} p - |S| &= 1 + \Delta(\Delta - 1) + \Delta(\Delta - 1)^2 + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{r-1} \\ &= 1 + \Delta(\Delta - 1) \left[1 + (\Delta - 1) + \dots + ((\Delta - 1)^{r-1}) \right] \quad (2.3) \\ &= 1 + \Delta(\Delta - 1) \left[\frac{1 - (\Delta - 1)^r}{1 - (\Delta - 1)} \right] \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} p &= 1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{r-1} \\ &= 1 + \Delta \left[1 + (\Delta - 1) + \dots + (\Delta - 1)^{r-1} \right] \\ &= 1 + \Delta \left[\frac{1 - (\Delta - 1)^r}{1 - (\Delta - 1)} \right] \quad (3.3) \\ &= \frac{1 - \Delta(\Delta - 1)^r}{1 - (\Delta - 1)} \end{aligned}$$

اگر نشان دهیم p حاصل از معادله (۲.۳) برابر با p معادله (۳.۳)، کار تمام است.

$$\begin{aligned} p - \frac{p-1}{\Delta} &= 1 + \Delta(\Delta - 1) \left[\frac{1 - (\Delta - 1)^r}{1 - (\Delta - 1)} \right] \\ p(\Delta - 1) &= (\Delta - 1) + \Delta^2(\Delta - 1) \left[\frac{1 - (\Delta - 1)^r}{1 - (\Delta - 1)} \right] \\ p &= 1 + \Delta^2 \left[\frac{1 - (\Delta - 1)^r}{1 - (\Delta - 1)} \right] \\ &= \frac{1 - \Delta(\Delta - 1)^r}{1 - (\Delta - 1)} \end{aligned}$$

۲. r فرد باشد.

مراحل مشابه قسمت قبل است با این تفاوت که فاصله رئوس مجموعه برش مستقل S تا رأس مرکزی x برابر با $r - 2, r - 4, \dots$ است. و

$$p - |S| = \Delta + \Delta(\Delta - 1)^2 + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{r-2}.$$

□

نتیجه ۱۲.۲.۳. فرض کنید گراف G از مرتبه p ، ماکزیمم درجه Δ و دارای c مؤلفه همبندی باشد. در این صورت

$$\psi'_{pc}(G) \leq p - \frac{p-c}{\Delta}.$$

بعلاوه، تساوی برای p های بزرگ و هر $c \geq 1$ و $\Delta \geq 2$ نیز برقرار است.

گزاره ۱۳.۲.۳. اگر گراف دوبخشی G بدون رأس تنها و مجموعه رئوس $V = V_1 \cup V_2$ باشد، آنگاه

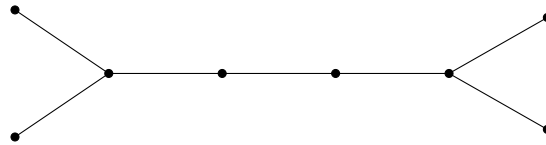
$$\max\{|V_1|, |V_2|\} \leq \psi'_{pc}(G) \leq \alpha(G).$$

برهان. کران بالا بنابه قضیه ۵.۲.۳ برقرار است. حال کافی است نشان دهیم کران پایین نیز برقرار است. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم که $|V_1| \geq |V_2|$ و $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ باشد. به تمام یال‌های متصل به رأس v_i رنگ i را اختصاص می‌دهیم. ($1 \leq i \leq m$) در نتیجه یک که رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی از G با m رنگ داریم. در این صورت داریم:

$$\max\{|V_1|, |V_2|\} \leq \psi'_{\mathcal{P}_c}(G) \leq \alpha(G).$$

□

رنگ‌آمیزی گزاره ۱۳.۲.۳ یک رنگ‌آمیزی یالی سه متوالی برای هر گراف دوبخشی G حاصل نمی‌کند. به عنوان مثال، درخت شکل ۴.۳ نشان می‌دهد که $\max\{|V_1|, |V_2|\} = ۴$ در صورتی که $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = ۵$ است.



شکل ۴.۳: $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = ۵ < \max\{|V_1|, |V_2|\} = ۴$

گزاره ۱۴.۲.۳. فرض کنید گراف دوبخشی G فاقد رأس تنها باشد. اگر تطابقی وجود داشته باشد که یکی از کلاس‌های افراز را پوشش دهد، آنگاه

$$\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = \alpha(G).$$

برهان. فرض می‌کنیم V_1 و V_2 کلاس‌های افراز گراف دوبخشی G باشند. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $|V_1| \leq |V_2|$ و تطابقی از اندازه $|V_1|$ داشته باشیم، آنگاه

$$\alpha(G) \leq |V| - |V_1| = |V_2| \leq \alpha(G).$$

در نتیجه $\alpha(G) = |V_2|$ و بنابه گزاره ۱۳.۲.۳ داریم:

$$\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = \alpha(G).$$

□

از آنجایی که گراف‌های مکعب Q_n ، گرافی‌هایی دوبخشی با تطابق کامل هستند. از این رو نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۵.۲.۳. برای هر $n \geq 1$ عدد‌رنگی یالی سه متوالی گراف مکعب Q_n برابر است با

$$\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = 2^{n-1}.$$

گزاره ۱۶.۲.۳. فرض کنید گراف دوبخشی G همبند باشد. $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = ۲$ اگر و فقط اگر $G \cong P_۳$ ، $G \cong P_۴$ و یا $G \cong C_۴$ باشد.

برهان. فرض می‌کنیم $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = ۲$ باشد. از قضیه ۱۳.۲.۳ داریم:

$$\Delta(G) \leq \max\{|V_1|, |V_2|\} \leq \psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = ۲.$$

در نتیجه گراف G یا یک مسیر و یا دوری به طول زوج است.

• مسیر P_n باشد.

بنابه مثال ۵.۱.۳، $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = \lceil \frac{n}{۲} \rceil = ۲$ در نتیجه $n = ۳$ و $G \cong P_۳$ یا $G \cong P_۴$ است.

• دور C_n باشد.

بنابه مثال ۵.۱.۳، $\psi'_{\mathcal{P}_c}(G) = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor = ۲$ در نتیجه $n = ۴$ و $G \cong C_۴$ است.

عکس گزاره بنابه مثال ۵.۱.۳ و نتیجه ۱۵.۲.۳ به راحتی اثبات می‌شود. □

فصل ۴

رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک

۱.۴ مقدمه

رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک در سال ۲۰۱۵ توسط کاردسو^۱، کویز^۲، دومنیک^۳ و کردیرا^۴ مطرح گردید. عدد رنگی یالی یک‌به‌یک برای گراف‌های خاص مانند گراف کامل، مسیر و پترسن محاسبه کرده و برای بقیه گراف‌ها کرانی از آن را مشخص کرده‌اند. در انتها نشان داده می‌شود، اگر $\chi'_i(G) = k$ باشد، آنگاه جزء مسائل NP -کامل است.

تعریف ۱.۱.۴. یک k -رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک^۵ از گراف G ، یک نگاشت

$$C : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

است به طوری‌که برای هر سه یال متوالی e_1, e_2 و e_3 داشته باشیم $c(e_1) \neq c(e_3)$. کمترین k ای که چنین رنگ‌آمیزی برای G داشته باشد را عدد رنگی یالی یک‌به‌یک G می‌نامیم و با نماد $\chi'_i(G)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۴. بررسی روابط زیر به سادگی امکان پذیر است.

^۱D. M. Cardoso

^۲J. Pedro Cruz

^۳C. Dominic

^۴J. O. Cerdeira

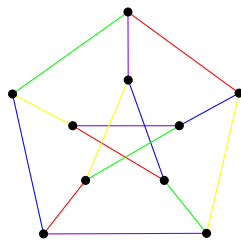
^۵The injective edge coloring

۱. برای $n \geq 4$ داریم: $\chi'_i(P_n) = 2$.

۲.
$$\chi'_i(C_n) = \begin{cases} 2, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 3, & o.w. \end{cases}$$

۳. $\chi'_i(K_{n,m}) = \min\{n, m\}$.

۴. گراف پترسن^۶: $\chi'_i(P) = 5$.



شکل ۱.۴: گراف پترسن P

۵.

$$\chi'_i(K_{1,q}) = 1. \tag{1.4}$$

برهان. فرض می‌کنیم مسیر P_n با کمتر از دو رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی یالی‌به‌یک کرد. یال‌های مسیر P_n را با رنگ c رنگ‌آمیزی می‌کنیم بدیهی است هر سه یال متوالی که در آن در نظر بگیریم دارای رنگ یکسانی هستند. که با تعریف رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک در تناقض است. بنابراین برای $n \geq 4$ مسیر P_n با دو رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک کرد.

□

گزینه‌های دیگر را نیز می‌توان به سادگی بررسی کرد.

گزاره ۳.۱.۴. گراف G را در نظر بگیرید. اگر $\chi'_i(G) = k$ و فقط اگر k مینیمم مقدار برای افزای یال‌های گراف G به زیرمجموعه‌های ناتهی E_1, E_2, \dots, E_k باشد. هر مؤلفه از زیرگراف القایی روی رأس‌های پایانی یال‌های E_i یک ستاره است.

برهان. زیرگراف القایی روی رأس‌های واقع در E_i را با G_i نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم یال‌های G با k رنگ c_1, c_2, \dots, c_k رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک شود. $E(G)$ را به زیرمجموعه‌ای از یال‌های E_1, E_2, \dots, E_k افزای می‌کنیم، به‌طوری‌که هر یال در E_i دارای رنگ c_i باشد. نشان می‌دهیم رأس‌های پایانی یال‌های واقع در E_i ، گراف‌های بدون سه یال متوالی القاء می‌کنند. فرض می‌کنیم چنین نباشد و دارای سه یال متوالی باشند. بنابه تعریف رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک به دو رنگ

^۶Petersen graph

برای رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک نیاز داریم که این با فرض اینکه هر یال در E_i دارای رنگ c_i در تناقض است. از این رو هر گراف G_i بدون سه یال متوالی و به شکل گراف ستاره هستند. برعکس، فرض می‌کنیم کمترین مقدار برای افراز $E(G)$ به E_1, E_2, \dots, E_k برابر k باشد. به هر E_i رنگ c_i اختصاص می‌دهیم. این کار ممکن است زیرا هر زیرگراف القایی روی رأس‌های واقع در E_i به شکل ستاره هستند و $\chi'(G_i) = 1$. در نتیجه داریم:

$$\chi'_i(G) = \sum_{i=1}^k \chi'_i(G_i) = k.$$

□

مثال ۴.۱.۴. برای $n \geq 4$ عدد رنگی یالی یک‌به‌یک گراف چرخ W_n به صورت زیر است.

$$\chi'_i(W_n) = \begin{cases} 6 & n \text{ زوج}, \\ 4 & n \text{ فرد}; n - 1 \equiv 0 \pmod{4}, \\ 5 & n \text{ فرد}; n - 1 \not\equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

ملاحظه ۵.۱.۴. بنابه گزاره ۳.۱.۴ اگر $\chi'_i(G) = k$ باشد. گراف G را می‌توان به زیرگراف‌های القایی G_j که هر کدام به شکل ستاره یا رأس تنها هستند افراز کرد. بنابه مثال ۲.۱.۴ برای گراف‌های ستاره، $\chi'_i(K_{1,q}) = 1$ و برای رأس تنها رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک بی‌معنا است. در واقع می‌توان گفت که $\chi'_i(G)$ کمترین تعداد زیرگراف‌های القایی G_j است.

گراف خطی $L(G)$ را در فصل یک بیان کردیم و مشاهده کردیم که $V(L(G)) = E(G)$ است. بنابه تعاریف ۳۹.۱.۱ و ۴۷.۱.۱ رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\chi'(G) = \chi(L(G)).$$

اما بنابه تعاریف ۱.۱.۲ و ۱.۱.۴ رابطه زیر لزوماً برقرار نیست.

$$\chi'_i(G) = \chi_i(L(G)).$$

مثال ۶.۱.۴. برای گراف ستاره $K_{1,n}$ و گراف خطی $L(K_{1,n})$ داریم:

$$n = \chi'_i(L(K_{1,n})) \neq \chi'_i(K_{1,n}) = 1.$$

گزاره ۷.۱.۴. فرض کنید گراف G از مرتبه $n \geq 2$ باشد. $\chi'_i(G) = 1$ اگر و فقط اگر G اجتماع مجزایی از گراف‌های ستاره باشد. به عبارت دیگر، $G = \bigcup_{j=1}^k K_{1,l_j}$ و $\sum_{j=1}^k l_j = n - k$ که برای $j \neq j'$ $V(K_{1,l_j}) \cap V(K_{1,l_{j'}}) = \emptyset$.

برهان. اثبات را در دو حالت همبندی یا ناهمبندی گراف G بررسی می‌کنیم.

۱. G همبند باشد:

اگر G گراف ستاره $K_{1,n-1}$ باشد. طبق مثال ۲.۱.۴ کار تمام و $\chi'_i(G) = 1$ است. بالعکس، فرض می‌کنیم $\chi'_i(G) = 1$ از این رو بنابه تعریف رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک گراف G دارای سه یال متوالی نیست. در نتیجه گراف حاصل باید گراف ستاره $K_{1,n-1}$ باشد.

۲. G ناهمبند باشد:

اعمال بالا را برای هر مؤلفه همبندی G اجرا می‌کنیم. از آنجایی که G ناهمبند است، تمام قسمت‌های همبندی را با یک رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک کرد. در نتیجه G تنها با یک رنگ، رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک شده است.

□

ملاحظه ۸.۱.۴. کران بالا بدیهی در رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک گراف G کمتر یا مساوی اندازه یال‌های آن است.

$$\chi'_i(G) \leq |E(G)|.$$

گزاره ۹.۱.۴. فرض کنید گراف G از مرتبه n ، اندازه m و فاقد رأس‌های جداشدنی باشد. G کامل اگر و فقط اگر $\chi'_i(G) = m$ باشد.

برهان. فرض می‌کنیم G گراف کامل K_n باشد. دو یال دلخواه e_i و e_j از گراف کامل K_n را در نظر می‌گیریم. دو یال e_i, e_j با هم مجاور و در یک مثلث هستند. و یا یال e_k ای وجود دارد که مجاور با یکی از این دو یال است. بنابراین یال‌های e_i و e_j رنگ‌های متفاوتی دریافت می‌کنند.

$$\chi'_i(G) = \frac{n(n-1)}{2} = m$$

بالعکس، فرض می‌کنیم $\chi'_i(G) = m$. به وضوح مشاهده می‌شود که گراف G همبند است. فرض می‌کنیم چنین نباشد بنابه گزاره ۳.۱.۴ مؤلفه‌های همبندی G را با رنگ‌های یکسانی رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. در این صورت $\chi'_i(G) < m$ که با فرض $\chi'_i(G) = m$ در تناقض است. از این رو گراف G باید همبند باشد.

فرض کنید اندازه G یک باشد در نتیجه گراف کامل و اثبات تمام است. حال فرض می‌کنیم اندازه گراف G بیشتر از یک و کامل نباشد. از آنجایی که G همبند است، دو یال مجاور در گراف G وجود دارند که در دور C_3 نمی‌باشند (تشکیل مثلث نمی‌دهند). این دو یال را با یک رنگ و بقیه یال‌های گراف G را با رنگ‌های مختلف رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم در این صورت $\chi'_i(G) < m$ که با فرض $\chi'_i(G) = m$ در تناقض است. در نتیجه گراف G کامل است.

□

۲.۴ ω' رنگ آمیزی یالی یک به یک گراف ها

گزاره ۱.۲.۴. فرض کنید گراف G همبند و از مرتبه $n \geq 2$ باشد. در این صورت $\chi'_i(G) \geq \omega'(G)$.

برهان. فرض می کنیم K_r ماکزیمم خوشه در گراف G باشد. طبق گزاره ۹.۱.۴ داریم:

$$\chi'_i(K_r) = \frac{r(r-1)}{2} = \omega'(G).$$

و این نشان می دهد که حداقل $\frac{r(r-1)}{2}$ رنگ برای رنگ آمیزی یالی یک به یک یال های گراف G نیاز داریم:

$$\chi'_i(G) \geq \frac{r(r-1)}{2} = \omega'(G).$$

□

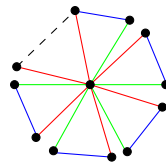
تعریف ۲.۲.۴. هرگاه عدد رنگی یالی یک به یک گراف G با ماکزیمم تعداد یال های خوشه ی گراف G با هم برابر باشند، $\chi'_i(G) = \omega'(G)$ ، گراف G را یک ω' رنگ آمیزی یالی یک به یک^۱ می گوئیم.

مثال ۳.۲.۴. بنابه گزاره ۱.۲.۴ و تعریف ۲.۲.۴ درستی روابط زیر به سادگی قابل مشاهده هستند.

$$\chi'_i(K_n) = \frac{n(n-1)}{2} = \omega'(K_n). \quad ۱. \text{ گراف کامل } K_n:$$

$$\chi'_i(K_{1,q}) = 1 = \omega'(K_{1,q}). \quad ۲. \text{ گراف ستاره } K_{1,q}:$$

$$\chi'_i(G) = 3 = \omega'(G). \quad ۳. \text{ گراف دوستی:}$$



شکل ۲.۴: گراف دوستی با $\chi'_i(G) = 3$

گزاره ۴.۲.۴. گراف کامل K_p از مرتبه $p \geq 3$ و برای $g_j \geq 1$ خانواده ای از ستاره های $K_{1,g_1}, K_{1,g_2}, \dots, K_{1,g_p}$ در نظر بگیرید. فرض کنید گراف G از اتصال ماکزیمم درجه گراف ستاره K_{1,g_p} با رأسی از گراف کامل K_p حاصل شده باشد. نشان دهید که گراف G یک ω' رنگ آمیزی یالی یک به یک است.

برهان. فرض می کنیم $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس گراف کامل K_p و $C_p = v_1, v_2, \dots, v_p, v_1$ یک دور همیلتنی از آن باشد. یال های دور همیلتنی C_p را با رنگ های c_1, c_2, \dots, c_p ، یال های گراف

^۱ ω' edge injective colorable graph

ستاره K_{1,g_j} با رنگ c_j و یال‌های باقی مانده در گراف کامل K_p با رنگ‌های مختلف رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. از این رو حداقل $\frac{p(p-1)}{2}$ رنگ برای رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک گراف G نیاز داریم.

$$\chi'_i(G) \leq \frac{p(p-1)}{2}. \quad (2.4)$$

از رابطه بالا و مثال ۳.۲.۴ نتیجه می‌شود که،

$$\chi'_i(G) \leq \omega'(K_p) = \omega'(G). \quad (3.4)$$

لذا گراف G بنابه قضیه ۱.۲.۴ و معادله (۳.۴) یک ω' رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک است. و

$$\chi'_i(G) = \omega'(G).$$

□

گزاره ۵.۲.۴. اگر گراف G دارای تک دور K_3 باشد، آنگاه G یک ω' رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک است.

برهان. فرض می‌کنیم v_1, v_2, v_3 رئوس و $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_1$ یال‌های گراف K_3 باشند. برای $i = 1, 2, 3$ به یال e_i رنگ c_i اختصاص می‌دهیم. فرض می‌کنیم درخت‌های T_1, T_2 و T_3 به ترتیب به یکی از رئوس v_1, v_2, v_3 متصل باشند.

- یال‌های درخت T_1 که به رأس v_1 متصل هستند، با رنگ c_1 رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. و مجموعه این یال‌ها را با c_1 نمایش می‌دهیم. به تمام یال‌های مجاور با مجموعه c_1 ، رنگ c_2 داده و این مجموعه یال‌ها را با c_2 نمایش می‌دهیم. تمام یال‌های مجاور با مجموعه $c_1 \setminus c_2$ ، رنگ c_3 داده و با c_3 نمایش می‌دهیم. تمام یال‌های مجاور با مجموعه $c_2 \setminus c_3$ را با رنگ c_1 رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم و با c_1 نشان می‌دهیم. این روش را تا جای که کل درخت T_1 رنگ شود ادامه می‌دهیم.

- یال‌های درخت T_2 که به رأس v_2 متصل هستند با رنگ c_2 رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. و مجموعه این یال‌ها را با نماد c_2 نشان می‌دهیم. تمام یال‌های مجاور با مجموعه c_2 ، رنگ c_3 داده و این مجموعه یال‌ها را با نماد c_3 نشان می‌دهیم. یال‌های مجاور به مجموعه $c_2 \setminus c_3$ ، رنگ c_1 داده و با نماد c_1 نشان می‌دهیم، یال‌های مجاور با مجموعه $c_3 \setminus c_1$ ، رنگ c_2 داده و با نماد c_2 نشان می‌دهیم. این روند را تا زمانی که کل درخت T_2 رنگ شود ادامه می‌دهیم.

- یال‌های درخت T_3 که به رأس v_3 متصل هستند، با رنگ c_3 رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. و این مجموعه یال‌ها را با نماد c_3 نشان می‌دهیم. تمام یال‌های مجاور با مجموعه c_3 ، رنگ c_1 داده و این مجموعه یال‌ها را با نماد c_1 نشان می‌دهیم. یال‌های مجاور به مجموعه $c_3 \setminus c_1$ ، رنگ c_2 داده و با نماد c_2 نشان می‌دهیم. یال‌های مجاور با مجموعه $c_1 \setminus c_2$ ، رنگ c_3 داده و با نماد c_3 نشان می‌دهیم. این روند را تا زمانی که کل درخت T_3 رنگ شود ادامه می‌دهیم.

از این رو گراف G دارای یک سه i -یال رنگی و $\omega'(G) = 3 = \chi'_i(G)$ است.

□

۳.۴ کران‌هایی در شاخص رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک

فرض می‌کنیم G گراف دو بخشی با مجموعه رئوس $V(G) = V_1 \cup V_2$ و فاقد رأس جدا شدنی باشد، در این صورت

$$\chi'_i(G) \leq \min\{|V_1|, |V_2|\}$$

در واقع این یک کران بدیهی برای تمام گراف‌های کامل دوبخشی $K_{n,m}$ است. از تعریف رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک و گزاره ۱۳.۲.۳ و قضایای ۱۱.۲.۳ و ۹.۲.۳ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱.۳.۴. فرض کنید گراف دوبخشی G همبند و از مرتبه $n \geq 2$ باشد. در این صورت داریم:

$$\chi'_i(G) \leq \min\{|V_1|, |V_2|\} \leq \max\{|V_1|, |V_2|\} \leq \psi'_{\Psi_c}(G) \leq n - \frac{n-1}{\Delta},$$

$$\chi'_i(G) \leq n - i(G),$$

$$\chi'_i(G) \leq \alpha(G).$$

گزاره ۲.۳.۴. فرض کنید گراف همبند G از اندازه $m \geq 3$ باشد. $\chi'_i(G) \leq m - \text{diam}(G) + 2$ اگر فقط اگر گراف G دارای مسیر P_{m+1} باشد.

برهان. فرض می‌کنیم $P_d = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ مسیری قطری در گراف همبند G باشد. مسیر P_d با دو رنگ، رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. تعداد یال‌های باقی مانده در گراف G برابر با $m - \text{diam}(G)$ که با حداکثر $m - \text{diam}(G)$ رنگ می‌توانند رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک شوند. از این رو برای رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک گراف G حداکثر $m - \text{diam}(G) + 2$ رنگ نیاز داریم.

$$\chi'_i(G) \leq m - \text{diam}(G) + 2 \quad (4.4)$$

فرض کنید گراف G مسیر P_{m+1} باشد. بنابه مثال ۲.۱.۴ مسیر P_{m+1} با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک است. بنابراین

$$\text{diam}(G) = m \text{ و } \chi'_i(G) = 2$$

فرض کنید گراف G مسیر نباشد.

۱. اگر $\text{diam}(G) = 1$ بدیهی است که گراف G کامل بوده و از قضیه ۹.۱.۴ داریم $\chi'_i(G) = m$. حال بنابه معادله (۴.۴) داریم:

$$\chi'_i(G) = m < m + 1.$$

۲. اگر $\text{diam}(G) = 2$ ، گراف G دیگر کامل نیست. و بنابه معادله (۴.۴)، داریم:

$$\chi'_i(G) < m.$$

۳. اگر $diam(G) > ۲$ باشد. مسیر قطری P_d در گراف همبند G در نظر بگیرید. از آنجایی که فرض کردیم گراف G مسیر نیست، بنابراین رأسی مانند $u \in V(G)$ وجود دارد که $u \notin V(P_d)$ و یک یا دو و یا سه همسایه روی مسیر قطری P_d دارد.

• فرض می‌کنیم تنها یک همسایه روی مسیر قطری P_d مانند v_i داشته باشد. رأس v_i نمی‌تواند رئوس ابتدایی و انتهایی مسیر قطری P_d باشد فرض می‌کنیم چنین نباشد. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم همسایه رأس u روی مسیر قطری P_d رأس ابتدایی باشد. در این صورت مسیر جدیدی ساخته می‌شود، که با فرض اینکه P_d بزرگترین مسیر در گراف G در تناقض است. بنابراین همسایه رأس u ، رئوس ابتدایی یا انتهایی نیستند. یال‌های مسیر قطری P_d را با دو رنگ، رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. به‌طوریکه یال‌های $v_i v_{i+1}, v_{i-1} v_i \in E(P_d)$ دارای رنگ یکسان c باشند. به یال uv_i نیز رنگ c اختصاص می‌دهیم. تعداد یال‌های که در گراف G باقی مانده‌اند برابر با $m - diam(G) - ۱$ که برای رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک آنها حداکثر $۱ - diam(G) - m$ رنگ نیاز داریم.

$$\chi'_i(G) \leq ۲ + m - diam(G) - ۱ \leq m - diam(G) + ۲.$$

• فرض می‌کنیم رأس u دارای دو همسایه $v_i, v_j \in V(P_d)$ باشد، به‌طوریکه بین آنها حداقل یک رأس دیگر وجود داشته باشد. فرض می‌کنیم که چنین نباشد، از این رو مسیر قطری جدید $P'_d = v_1, \dots, v_i, u, v_j, \dots, v_d$ حاصل می‌شود که با بزرگترین مسیر قطری بودن P_d در تناقض است. بنابراین بین هر دو رأسی که در همسایگی رأس u در نظر می‌گیریم باید حداقل یک رأس دیگر وجود داشته باشد.

دو یال uv_j و $v_i u$ با رنگ c_1 و مسیر قطری P_d با دو رنگ c_2 و c_3 رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. $۲ - diam(G) - m$ یال در گراف G باقی مانده‌اند که برای رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک آنها حداکثر $۲ - diam(G) - m$ رنگ نیاز داریم. در نتیجه کل رنگ‌های که برای رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک یال‌های گراف G نیاز داریم به صورت زیر است.

$$\chi'_i(G) \leq ۳ + m - diam(G) - ۲ \leq m - diam(G) + ۲.$$

• فرض می‌کنیم رأس u دارای سه همسایه $v_i, v_{i+1}, v_{i+2} \in V(P_d)$ باشد. که بنابه قسمت قبل این سه رأس باید متوالی باشند.

مسیر قطری P_d را با دو رنگ c_1 و c_2 ، یال‌های uv_i و uv_{i+1} را با رنگ c_3 و یال uv_{i+2} را با رنگ c_4 رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. $۳ - diam(G) - m$ یال در گراف G باقی مانده‌اند که برای رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک آنها حداکثر $۳ - diam(G) - m$ رنگ نیاز داریم. در نتیجه حداکثر رنگ‌های استفاده شده در گراف G به صورت زیر است.

$$\chi'_i(G) \leq ۴ + m - diam(G) - ۳ \leq m - diam(G) + ۲.$$

در این سه حالت مشاهده کردیم که،

$$\chi'_i(G) \leq m - \text{diam}(G) + 2.$$

□

گزاره ۳.۳.۴. اگر H زیرگرافی از گراف همبند G باشد، آنگاه $\chi'_i(H) \leq \chi'_i(G)$.

برهان. بنابه فرض گزاره H زیرگرافی از گراف همبند G است. بنابراین هر سه یال متوالی که در گراف H در نظر بگیریم در گراف G نیز وجود دارد. از این رو مشاهده می‌شود که،

$$\chi'_i(G) \geq \chi'_i(H).$$

□

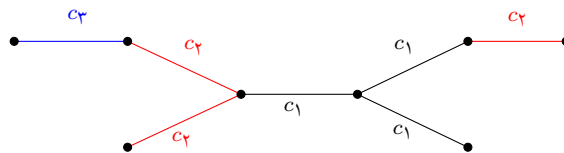
گزاره ۴.۳.۴. فرض کنید درخت T از مرتبه $n \geq 2$ باشد. در این صورت $1 \leq \chi'_i(T) \leq 3$.

برهان. فرض می‌کنیم $n = 2$ باشد. در این صورت، $\chi'_i(T) = 1$.

فرض کنید که $n \geq 3$ باشد. بنابه تعریف ۲۸.۱.۱ اگر یال جدیدی به T اضافه کنیم، گراف جدید H حاصل می‌شود که دارای دوری به طول سه است بنابه مثال ۲.۱.۴ و گزاره ۵.۲.۴ نتیجه می‌شود که،

$$\chi'_i(H) = 3. \text{ از طرفی بنابه گزاره ۳.۳.۴ داریم، } \chi'_i(T) \leq \chi'_i(H) = 3.$$

□
درخت T' نشان داد شده در شکل ۳.۴ کوچکترین درختی است که با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک است.



شکل ۳.۴: درخت T' ، $\chi'_i(T) = 3$

نتیجه ۵.۳.۴. فرض کنید گراف همبند G از مرتبه $n \geq 2$ باشد.

۱. اگر یال x را به گراف G اضافه کنیم، آنگاه $\chi'_i(G) \leq \chi'_i(G+x)$.
۲. اگر گراف G شامل دور C_p با $p \equiv 0 \pmod{4}$ باشد، آنگاه $\chi'_i(G) \geq \chi'_i(C_p) = 3$.
۳. اگر گراف G شامل گراف کامل K_p باشد، آنگاه $\chi'_i(G) \geq \chi'_i(K_p) = \frac{p(p-1)}{4}$.
۴. اگر گراف G شامل درخت T' شکل ۳.۴ باشد، آنگاه $\chi'_i(G) \geq \chi'_i(T') = 3$.
۵. اگر درخت T شامل زیر درخت T' شکل ۳.۴ باشد، آنگاه $\chi'_i(T) = \chi'_i(T') = 3$.

برهان.

۱. فرض می‌کنیم گراف جدید G' از افزوده شدن یال جدید x به گراف G حاصل شده باشد. در این صورت یکی از حالت‌های زیر را داریم؛

- گراف G' کامل باشد، آنگاه $\chi'_i(G) \leq \chi'_i(G')$.
- یال x به صورت یک یال آویز در گراف G' باشد، آنگاه $\chi'_i(G) = \chi'_i(G')$.
- یک دور C_p در گراف G ایجاد کند، آنگاه $\chi'_i(G) \leq \chi'_i(G')$.

در هر سه حالت مشاهده کردیم که با افزودن یال جدید به گراف G عدد رنگی یالی یک‌به‌یک یا تغییری نمی‌کند، یا افزایش می‌یابد. بنابراین داریم:

$$\chi'_i(G) \leq \chi'_i(G + x).$$

۲. بنابه مثال ۲.۱.۴ عدد رنگی یالی یک‌به‌یک دور C_p با $P \neq 0 \pmod{4}$ برابر با ۳ است. حال اگر گراف G شامل دور C_p باشد حداقل سه رنگ برای رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک آن نیاز داریم.

□ بررسی حالت‌های دیگر به سادگی امکان پذیر است.

تعریف ۶.۳.۴. درخت‌های که دقیقاً یک رأس از درجه دو و بقیه رأس‌هایش از درجه یک یا سه هستند، درخت دودویی کامل می‌گوییم.

نتیجه ۷.۳.۴. اگر درخت دودویی کامل T دارای $diam(T) \geq 7$ باشد، آنگاه $\chi'_i(T) = 3$.

برهان. فرض می‌کنیم $diam(T) \geq 7$ باشد. در این صورت هر درختی که در نظر بگیریم، شامل زیر درختی مانند درخت شکل ۳.۴ است. بنابه قسمت ۵ نتیجه ۵.۳.۴ داریم که، $\chi'_i(T) = 3$.

□

نتیجه ۸.۳.۴. در درخت T یکی از سه حالت زیر همواره برقرار است،

۱. ستاره باشد: $\chi'_i(T) = 1$.

۲. شامل دور فرد باشد: $\chi'_i(T) = 3$.

۳. برای درخت‌های دیگر: $\chi'_i(T) = 2$.

نتیجه ۹.۳.۴. برای هر گراف همبند G ، $\chi'_i(G) \leq \chi'_i(G^{(2)})$.

برهان. بنابه تعریف ۲.۲.۴ و نتیجه ۵.۳.۴ بدیهی است که، $\chi'_i(G) \leq \chi'_i(G^{(2)})$.

□

در قضیه ۵.۲.۴ نشان دادیم که گراف‌های با تک دور C_3 یک ω -رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک هستند. حال در قضیه زیر برای گراف‌های که دارای تک دور C_p با $p \geq 4$ کران بالا و پایینی از عدد رنگی یالی یک‌به‌یک بیان می‌کنیم.

گزاره ۱۰.۳.۴. اگر گراف G دارای تک دور C_p با $p \geq 4$ باشد، آنگاه $2 \leq \chi'_i(G) \leq 4$.

برهان. کران پایین از مثال ۲.۱.۴ مستقیماً نتیجه می‌شود.

یک رأس دلخواه مانند v از دور C_p را با تمام یال‌های که به آن متصل هستند، از گراف G حذف می‌کنیم. گراف حاصل $G - v$ درختی است که بنابه نتیجه ۷.۳.۴ حداکثر سه رنگ c_1, c_2 و c_3 قابل رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک است. رأس v را با تمام یال‌های که به آن متصل هستند به گراف G اضافه و یال‌هایش را با رنگ c_4 رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. □

۴.۴ عددرنگی یالی یک‌به‌یک گراف‌های شبکه‌ای

گراف‌های که از حاصلضرب دکارتی دو گراف مانند گراف‌های $P_n \square K_2, P_r \square P_s$ و یا گراف‌های لانه‌زنبوری^۸ که به شکل خانه‌های شش ضلعی هستند، جزء گراف‌های شبکه‌ای^۹ می‌باشند. محاسبه عددرنگی یالی یک‌به‌یک گراف‌های شبکه‌ای جزء مسائل باز می‌باشند. سه قضیه‌ای که در ادامه آنها را بیان می‌کنیم اثباتشان به صورت شهودی می‌باشد.

گزاره ۱.۴.۴. فرض کنید مسیر P_n از مرتبه $n \geq 3$ باشد، در این صورت $\chi'_i(P_n \square K_2) = 3$.

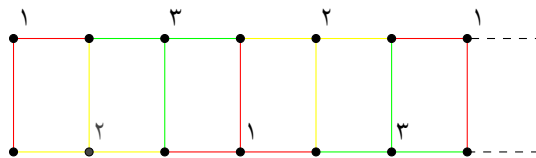
برهان. به اولین رأس گراف $P_n \square K_2$ از بالا شماره ۱، دومین رأس از پایین شماره ۲ و به سومین رأس از بالا شماره ۳ اختصاص می‌دهیم. این روند را مانند شکل ۴.۴ تا آخرین رأس ادامه می‌دهیم. به تمام یال‌های متصل به رأس‌های شماره ۱ رنگ قرمز، یال‌های که به رأس‌های شماره ۲ متصل هستند رنگ آبی و یال‌های متصل به رأس‌های شماره ۳ رنگ سبز اختصاص می‌دهیم. در نهایت یک رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک برای گراف $P_n \square K_2$ حاصل می‌شود که،

$$\chi'_i(P_n \square K_2) \leq 3. \quad (5.4)$$

از طرف دیگر C_6 زیرگرافی از گراف $P_n \square K_2$ است. بنابه مثال ۲.۱.۴ و نتیجه ۵.۳.۴ داریم:

$$\chi'_i(P_n \square K_2) \geq \chi'_i(C_6) = 3. \quad (6.4)$$

از معادله (۵.۴) و (۶.۴) نتیجه می‌شود که $\chi'_i(P_n \square K_2) = 3$.



شکل ۴.۴: گراف $P_n \square K_2$

□

^۸The honeycomb graph

^۹Mesh graphs

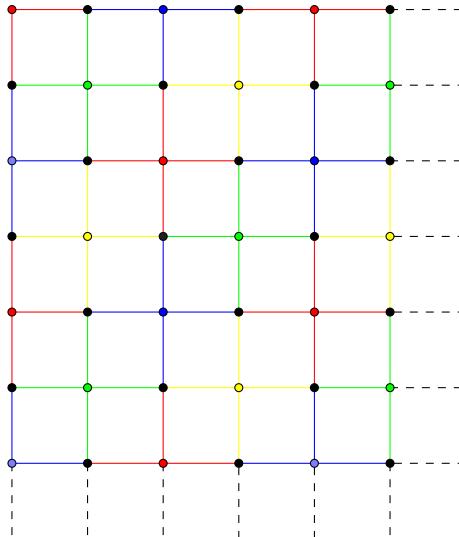
گزاره ۲.۴.۴. اگر در گراف $P_r \square P_s$ ، $r, s \geq 4$ باشند، آنگاه $\chi'_i(P_r \square P_s) = 4$.

برهان. یال‌های متصل به رأس‌های قطر اصلی (شروع اولین رأس از بالا سمت چپ) را به شکل ۵.۴ به طور تناوبی با دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. یال‌های متصل به رأس‌های که روی دو قطر موازی با این قطر هستند را با دو رنگ آبی و زرد به طور متناوب رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۵.۴ مشاهده می‌شود، حداقل چهار رنگ برای رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک گراف $P_r \square P_s$ نیاز داریم. از طرف دیگر گراف \mathcal{N} شکل ۶.۴ زیرگرافی از گراف $P_r \square P_s$ و $\chi'_i(\mathcal{N}) = 4$ است.

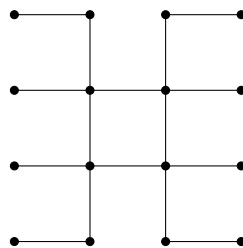
از نتیجه ۵.۳.۴ داریم:

$$4 = \chi'_i(\mathcal{N}) \leq \chi'_i(P_r \square P_s) \leq 4.$$

□



شکل ۵.۴: $P_r \square P_s$



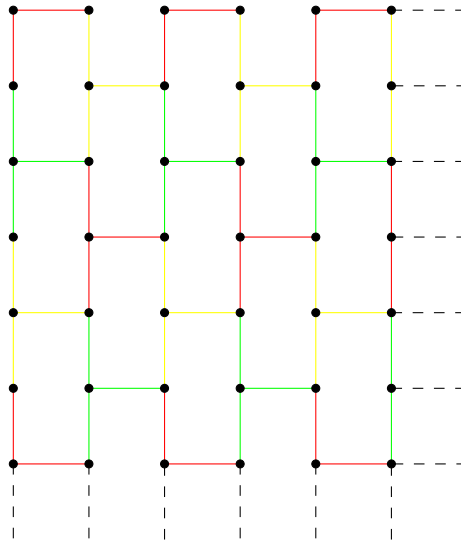
شکل ۶.۴: \mathcal{N}

گزاره ۳.۴.۴. اگر G گراف لانه‌زنبوری باشد، آنگاه $\chi'_i(G) = 3$.

برهان. گراف لانه‌زنبوری G شکل ۷.۴ به صورت شبکه‌های شش ضلعی هستند، از این رو دارای زیرگراف C_6 که بنابه مثال ۲.۱.۴، $\chi'_i(C_6) = 3$ و به طور شهودی مشاهده می‌شود که حداقل سه رنگ برای رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک نیاز داریم. از نتیجه ۵.۳.۴ داریم:

$$3 = \chi'_i(C_6) \leq \chi'_i(G) \leq 3$$

□



شکل ۷.۴: گراف لانه‌زنبوری

۵.۴ پیچیدگی محاسباتی

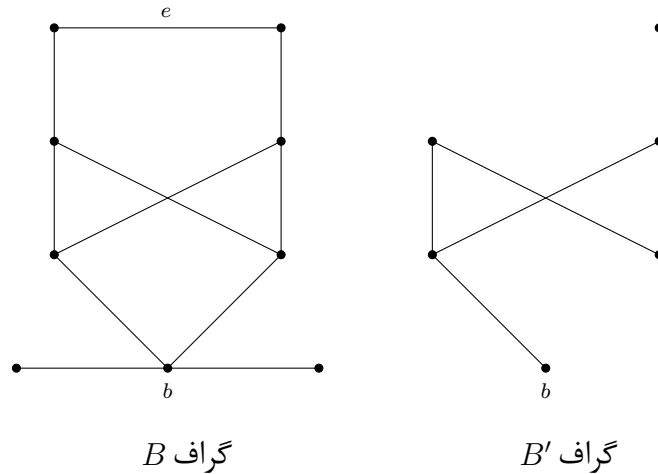
لم ۱.۵.۴. در هر سه رنگ‌آمیزی i -یالی از گراف B شکل ۸.۴، یال e و تمام یال‌های متصل به رأس b دارای رنگ یکسانی هستند.

برهان. فرض می‌کنیم یال e و یکی از یال‌های متصل به آن دارای رنگ یکسان c_1 باشند. از این رو زیرگراف B' باید با دو رنگ دیگر رنگ‌آمیزی شود، که بنابه تعریف رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک این کار ممکن نیست. لذا هیچ کدام از یال‌های متصل به یال e نمی‌توانند رنگ c_1 دریافت کنند. یال‌های متصل به یال e را با دو رنگ $c_2 \neq c_3$ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. دو یال متصل به یالی که رنگ c_2 دارد، با رنگ c_2 و به دو یالی که متصل به یال دارای رنگ c_3 هستند، با رنگ c_3 رنگ‌آمیزی می‌کنیم. بنابر شکل ۸.۴ و تعریف ۱.۱.۴ تمام یال‌های متصل به رأس b رنگ c_1 دریافت می‌کنند.

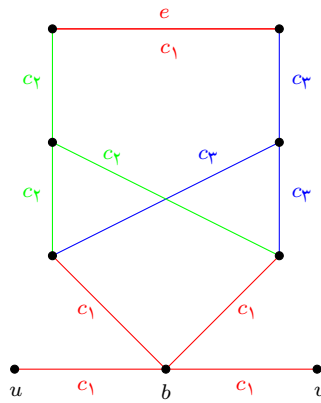
□

شکل ۹.۴ یک رنگ‌آمیزی یک‌به‌یک از گراف B شکل ۸.۴ را نشان می‌دهد.

با استفاده از لم ۱.۵.۴ و NP -سخت بودن اندازه‌عددرنگی یالی گراف G ، $\chi'(G)$ ، با ماکزیمم درجه $\Delta = 3$ (اثبات در [۸])، پیچیدگی محاسباتی برای رنگ‌آمیزی i -یالی گراف G در قضیه ۲.۵.۴ بیان می‌کنیم



شکل ۸.۴: گراف B و B'



شکل ۹.۴: سه رنگ‌آمیزی i -یالی گراف B

قضیه ۲.۵.۴. رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک برای گراف‌های که عدد رنگی یالی یک‌به‌یکشان برابر با مقدار صحیح k می‌باشد، جزء مسائل NP -کامل محسوب می‌شود.

برهان. گراف دلخواه G با ماکزیمم درجه $\Delta = ۳$ در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم گراف $G(B)$ از تعویض هر یال uv از گراف G با گراف B شکل ۸.۴ حاصل شده باشد. یعنی هر یال uv از G به یال‌های ub و bv از B تبدیل شود.

فرض می‌کنیم $k \geq ۳$ یال رنگی در G داریم، حال اگر

۱. رنگ یال uv از G با رنگ یال e و هر یال متصل به رأس b از B یکسان باشد.

۲. به ازای هر دو رنگی که از $(k - ۱)$ رنگ باقی مانده انتخاب کنیم رنگ بقیه یال‌های گراف $G(B)$ با آنها رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک شود.

آنگاه یک k رنگ‌آمیزی i -یالی از گراف $G(B)$ حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، گراف $G(B)$ دارای k رنگ‌آمیزی i -یالی اگر و فقط اگر گراف G دارای k رنگ‌آمیزی یالی باشد.

فرض می‌کنیم که $G(B)$ دارای $3 \leq k$ رنگ‌آمیزی i -یالی است نشان می‌دهیم که G دارای k رنگ‌آمیزی یالی است. هر زیرگراف B متناظر با هر یال از گراف G دقیقاً سه رنگ دارد. حال یک رنگ‌آمیزی یالی از گراف G به دست می‌آوریم. به هر یال uv از گراف G رنگ یال e و یا یال‌های متصل به رأس b از گراف B اختصاص می‌دهیم. در نتیجه $\chi'(G) = \chi'_i(G)$ و از آنجایی که گراف G با $\chi'(G) = k$ جزء مسائل NP ، واضح است که گراف G با $\chi'_i(G) = k$ جزء مسائل NP است.

□

پیوست آ

نماد

نام	نماد	نام	نماد
مجموعه یال	$E(G)$	مجموعه رئوس	$V(G)$
کمترین درجه	$\delta(G)$	درجه	$d_G(v)$
گشت	W	بیشترین درجه	$\Delta(G)$
مسیر	P_n	گراف مکمل	\bar{G}
قطر گراف	$diam(G)$	کمترین فاصله بین دو رأس	$d(u, v)$
چرخ	W_n	دور	C_n
گراف دوبخشی	$K_{n,m}$	گراف کامل	K_n
گراف تهی	N_n	گراف ستاره	$K_{1,m}$
گراف خطی	$L(G)$	گراف مکعب	Q_n
حاصل ضرب دکارتی	$G \square H$	درخت	T
گراف مربع	$G^{(2)}$	حاصل ضرب رسته‌ای	$G \times H$
عدد رنگی یالی	$\chi'(G)$	عدد رنگی	$\chi(G)$

جدول آ.۱: نمادها

نام	نماد	نام	نماد
همسایگی رأس u	$N(u)$	عدد رنگی یک به یک	$\chi_i(G)$
گراف فاصله	$Q_n(D)$	شبه-مکعب	$Q_X(S)$
کد دودویی تصحیح کننده خطا	$\sigma(n)$	عدد پوششی کد	$\gamma'(Q_n)$
عدداحاطه گری مستقل	$i(G)$	عدد رنگی یالی سه متوالی	$\psi'_i(G)$
پوشانه	$\beta(G)$	عدد استقلال	$\alpha(G)$
نعداد رئوس در ماکزیمم خوشه G	$\omega(G)$	عدد رنگی یالی یک به یک	$\chi'_i(G)$
عدد احاطه گری	$\gamma(G)$	تعداد یالها در ماکزیمم خوشه G	$\omega'(G)$

جدول آ.۲: نمادها

مراجع

- [1] A. Doyon, G. Hahn and A. Raspaud, Some bounds on the injective chromatic number of graphs, *Discrete Math.*, 310 (2010), 585-590.
- [2] A. Vince, Star chromatic number, *J. Graph Theory*, 12 (1988), 551–559.
- [3] C. Bujtás, E. Sampathkumar, Zs. Tuza, C. Dominic and L. Pushpalatha, 3-consecutive edge coloring of a graph, *Discrete Math.*, 312 (2012), 561–573.
- [4] C. Payan, On the chromatic number of cube-like graphs, *Discrete Math.*, 103 (1992), 271–277.
- [5] D. B. West, *Introduction to graph theory*, Prentice hall Upper Saddle River, 2 (2001).
- [6] D. Leven and Z. Galil, NP-completeness of finding the chromatic index of regular graphs, *J. Algorithms*, 4 (1983), 35–44.
- [7] D. M. Cardoso, J. O. Cerdeira, J. P. Cruz, C. Dominic, Injective edge chromatic index of a graph, *arXiv preprint arXiv:1510.02626*, (2015).
- [8] D. P. Koreas, The NP-completeness of chromatic index in triangle free graphs with maximum vertex of degree 3, *Appl. Math. and Comput.*, 83 (1997), 13–17.
- [9] G. Hahn, J. Kratochvíl, J. Širáň and D. Sotteau, On the injective chromatic number of graphs, *Discrete Math.*, 256 (2002), 179-192.
- [10] I. Holyer, The NP-completeness of edge-coloring, *SIAM J. Comput.*, 10 (1981), 718–720.
- [11] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, North Holland, New York, (1976), 290.
- [12] J. Fiala, J. Kratochvíl, Partial covers of graphs, *Discuss. Math. Graph Theory*, 22 (2002), 89–99.

- [13] L. Lovász, Spectra of graphs with transitive groups, *Period. Math. Hungar.*, 6 (1975), 191–195.
- [14] L. Van, H. Jacobus, *Introduction to coding theory*, 86 (2012).
- [15] M. R. Best, A. E. Brouwer, The triply shortened binary Hamming code is optimal, *Discrete Math.*, 17 (1977), 235–245.
- [16] M. R. Best, Optimal codes, *A. Schrijver (Ed.), Packing and Covering in Combinatorics*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 106 (1979), 119–140.
- [17] N. J. A. Sloane, F. J. MacWilliams, *The Theory of Error Correcting Codes*, North-Holland, Amsterdam, 16 (1978).
- [18] N. Linial, R. Meshulam and M. Tarsi, Matroidal bijections between graphs, *J. Combin. Theory, Series B*, 45 (1998), 31–44.
- [19] P. Hell, A. Raspaud and J. Stacho, On injective colourings of chordal graphs, *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, (2008), 520-530.
- [20] R. J. McEliece, An application of linear programming to a problem in coding theory, *unpublished*, (1973).
- [21] T. Dvořák, I. Havel, J. M. Laborde and P. Liebl, Generalized hypercubes and graph embeddings with dilation, *Rostock Math., Kolloq.*, 39 (1990), 13–20.
- [22] T. Jansen and B. Toft, *Graph Colouring Problems*, Wiley, New York, (1995), 156–158.
- [23] Y. Bu, D. Chen, A. Raspaud and W. Wang, Injective coloring of planar graphs, *Discrete Appl. Math.*, 157 (2009), 663–672.
- [۲۴] رابین ویلسون، مترجم: بی آزار ج، (۱۳۸۸)، درآمدی بر نظریه گراف، چاپ چهارم، انتشارات دانشگاه گیلان، ۲۱۸.
- [۲۵] رشیدیان پ، (۱۳۸۲)، نظریه گراف، چاپ اول، انتشارات دانشگاه کردستان، ۲۷۷.
- [۲۶] ج.اچ. ون لینت، مترجمان: غلامی م، سبحانی ر، مقدمه‌ای بر نظریه کدگذاری، انتشارات دانشگاه شهرکرد، ۳۱۵.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

K-vertex colouring	k -رنگ‌آمیزی رأسی
K-Edge colouring	k -رنگ‌آمیزی یالی
ω' edge injective colorable graph	ω' رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک
NP-complete	NP -کامل
Code alphabet	الفبای کد
Cover	پوشش
Matching	تطابق
Monochromatic	تک‌رنگ
Cartesian product	حاصل ضرب دکارتی
Categorical product	حاصل ضرب رسته‌ای
Clique	خوشه
Tree	درخت
Cycle	دور
Hamiltonian cycle	دور همیلتنی
Cute vertice	رأس برشی
The injective edge coloring	رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک
Induced subgraph	زیرگراف القاء شده
Spanning subgraph	زیرگراف فراگیر
Cube-Like	شبه-مکعب
Independent number	عدد استقلال
Dominating number	عدد احاطه‌گری
Independent dominating number	عدد احاطه‌گری مستقل
Covering number	عدد پوششی
Code covering number	عدد پوششی کد
Connectivity number	عدد همبندی
Chromatic number	عدد رنگی
Edge chromatic number	عدد رنگی یالی

3-consecutive edge coloring	عدد رنگی یالی سه متوالی
Injective chromatic number	عدد رنگی یک به یک
Hamming distance	فاصله همینگ
Error correcting code	کد تصحیح کننده خطا
Binary code	کد دودویی
Maximum likelihood decoding	کد گشایی احتمال ماکزیمم
Minimum distance decoding	کد گشایی مینیمم فاصله
Codewords	کدواژه
Cube graph	گراف مکعب
Empty graph	گراف تهی
Wheel graph	گراف چرخ
Multi graph	گراف چندگانه
Line graph	گراف خطی
Bipartite graph	گراف دوبخشی
Friendship graph	گراف دوستی
Simple graph	گراف ساده
Mesh graph	گراف شبکه‌ای
Complete graph	گراف کامل
The honeycomb graph	گراف لانه زنبوری
Regular graph	گراف منتظم
Hamiltonian graph	گراف همیلتنی
Dominating set	مجموعه احاطه‌گری
Independent dominating set	مجموعه احاطه‌گری مستقل
Cutset	مجموعه برش
Stable k-cutset	k -مجموعه برش پایدار
Separating set	مجموعه جداساز
Independent set	مجموعه مستقل
Disconnecting set	مجموعه ناهمبندساز
Path	مسیر
Hamiltonian path	مسیر همیلتنی
Multiple edges	یال‌های چندگانه
Isomorphic	یکریختی
Homomorphic	همسانریختی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

3-consecutive edge coloring	عدد رنگی یالی سه متوالی
ω' edge injective colorable graph	ω' رنگ آمیزی یالی یک به یک
Binary code	کد دودویی
Bipartite graph	گراف دوبخشی
Cartesian product	حاصل ضرب دکارتی
Categorical product	حاصل ضرب رسته‌ای
Chromatic number	عدد رنگی
Clique	خوشه
Code alphabet	الفبای کد
Code covering number	عدد پوششی کد
Error correcting code	کد تصحیح کننده خطا
Codewords	کدواژه
Complement graph	گراف مکمل
Connectivity number	عدد همبندی
Cover	پوشش
Covering number	عدد پوششی
Cycle	دور
Cube-Like	شبه- مکعب
Cube graph	گراف مکعب
Cute vertice	رأس برشی
Cutset	مجموعه برش
Disconnecting set	مجموعه ناهمبندساز
Dominating number	عدد احاطه‌گری
Dominating set	مجموعه احاطه‌گر
Edge chromatic number	عدد رنگی یالی
Empty graph	گراف تهی
Friendship graph	گراف دوستی

Hamiltonian cycle	دور همیلتنی
Hamiltonian graph	گراف همیلتنی
Hamiltonian path	مسیر همیلتنی
Hamming distance	فاصله همینگ
Homomorphic	همسانریختی
Independent dominating number	عدد احاطه‌گری مستقل
Independent dominating set	مجموعه احاطه‌گری مستقل
Independent number	عدد استقلال
Independent set	مجموعه مستقل
Induced subgraph	زیرگراف القاء شده
Injective chromatic number	عدد رنگی یک‌به‌یک
Isomorphic	یکریختی
K-Edge colouring	k -رنگ‌آمیزی یالی
K-vertex colouring	k -رنگ‌آمیزی رأسی
Line graph	گراف خطی
Matching	تطابق
Maximum likelihood decoding	کدگشایی احتمال ماکزیمم
Monochromatic	تک‌رنگ
Mesh graph	گراف شبکه‌ای
Minimum distance decoding	کدگشایی مینیمم فاصله
Multi graph	گراف چندگانه
Multiple edges	یال‌های چندگانه
NP-complete	NP -کامل
Path	مسیر
Regular graph	گراف منتظم
Spanning subgraph	زیرگراف فراگیر
Stable k-cutset	k -مجموعه برش پایدار
Separating set	مجموعه جداساز
Simple graph	گراف ساده
The honeycomb graph	گراف لانه‌زنبوری
The injective edge coloring	رنگ‌آمیزی یالی یک‌به‌یک
Tree	درخت
Wheel graph	گراف چرخ

Abstract

A coloring of a graph G is injective if its restriction to the neighborhood of any vertex is injective. The injective chromatic number $\chi_i(G)$ of a graph G is the least k such that there is an injective k -coloring. An injective edge coloring of a graph G is a coloring c of the edges of G such that if e_1, e_2 and e_3 are consecutive edges, then $c(e_1) \neq c(e_3)$. The injective edge coloring number $\chi'_i(G)$ is the minimum number of colors required in such a coloring. In this thesis, we will study some properties of injective coloring, injective edge coloring and 3-consecutive edge coloring. Also, some relationship between these parameters will be presented.

keywords: Injective chromatic number, 3-consecutive edge coloring, Injective edge coloring number



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and Combinatorics

Injective Chromatic Index of Graphs

By: Fereshteh Yazdani

Supervisor

Dr. Meysam Alishahi

Advisor

Dr. Abdollah Alhevaz

September 2017