بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف وترکیبیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عدد احاطه‌گری گسسته تام در گراف

نگارنده: پریناز سلطان

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

استاد مشاور

سید رضا موسوی

شهریور۱۳۹۶

با احترام تقدیم به

پدرم اول استادم، که همواره چتر محبتش بر سرم است، بزرگواری که الفبای زندگی را از آموختم.

مادرم، بلند تکیه گاهم، که دامان پر مهرش یگانه پناهم است، مهربانی که عشق ورزیدن را از او آموختم.

دو برادرم، به همسفران مهربان زندگیم ... که با هم آغاز کردیم ... در کنار هم آموختیم و به امید هم به آینده چشم میدوزیم. قلبم لبریز از عشق به شماست....

سپاس گزاری...

نخست خداوند بزرگ و علیم را شاکرم که به من قدرت تفکر و نوشتن داد و تلاش را در وجودم برای یافتن معماهایی هرچند کوچک از علم قرار داد.
سپاس گزار کسانی هستم که سرآغاز تولد من هستند، از یکی زاده می شوم و از دیگری جاودانه، استادی که سپیدی را برتخته سیاه زندگیم نگاشت و مادری که تار مویی از او به پای من سیاه نماند...

پریناز سلطان
شهریور۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **پریناز سلطان** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **عدد احاطه‌گری گسسته تام در گراف** ، تحت راهنمایی **نادر جعفری راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

پریناز سلطان
شهریور۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد. زیرمجموعه D از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر نامیم، هرگاه برای هر رأس $v\in V$، یا آن رأس در D باشد و یا در همسایگی یک رأس از D قرار داشته باشد. کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه گری G نامیده و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. یک زیرمجموعه احاطه گرD از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر تام نامیم، هرگاه هر رأس از V با یک رأس از D مجاور باشد. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر تام در گراف G را عدد احاطه گر تام G نامیده و آن را با $\gamma_t(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر گراف G دارای حداقل دو مجموعه احاطه گر تام مجزا باشد، عدد احاطه‌گر تام مجزا برای آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_t\gamma_t(G)=\min\{|D_1|+|D_2| : \text{دومجموعه احاطه‌گر تام مجزا از گراف } G \text{ هستند } D_2 \text{ و } D_1\}.$$

در این پروژه ابتدا به معرفی بعضی از نتایج مقدماتی در خصوص اعداد احاطه‌گری واحاطه‌گری معکوس می‌پردازیم. سپس ضمن محاسبه این اعداد در خانواده های مختلف گراف ها کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری مجزا ارائه می‌دهیم. همچنین احاطه‌گری تام و احاطه‌گری تام معکوس را بررسی نموده و کران‌هایی برای آن‌ها بیان می‌کنیم. در پایان به معرفی کران و بیان دسته بندی‌هایی برای عدد احاطه‌گری تام مجزا می پردازیم.

کلمات کلیدی: عدد احاطه‌گری، عدد احاطه‌گری معکوس، عدد احاطه‌گری تام، عدد احاطه‌گری تام معکوس، عدد احاطه‌گری مجزا، عدد احاطه‌گری تام مجزا

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

در این فصل بعضی از تعاریف و مفاهیمی از نظریه گراف که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم، را بیان می‌کنیم. قابل توجه است که گراف های مورد بحث در سراسر این پایان نامه گراف های ساده، متناهی و غیر بدیهی هستند، که در ادامه به طور دقیق تعریف می شوند. تمام تعاریف این فصل برگرفته از مراجع [۳] و [۸] هستند.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. منظور از یک **گراف** [۱] یک سه‌تایی $(V(G), E(G), \Psi(G))$ است که در آن $V(G)$ یک مجموعه ناتهی از عناصر به نام رئوس و $E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها و $\Psi(G)$ تابع وقوع است که به هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوماً متمایز) از رأس‌های G را متناظر می‌کند.

اگر e یک یال و $v_۱$ و $v_۲$ رأس‌های آن باشند به قسمی‌که $\Psi_G(e) = v_۱v_۲$ آن‌گاه گویند e، $v_۱$ را به $v_۲$ وصل می‌کند و این دو رأس را دو انتهای e نامند. از این پس گراف را به‌طور خلاصه به صورت $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. **طوقه** [۲] در یک گراف یالی است که دو رأس انتهایی‌اش برهم منطبق باشند. همچنین، اگر در یک گراف بین دو رأس دلخواه u و v دو یال یا بیش از دویال وجود داشته

[۱] Gragh

[۲] Loop

باشند، آن‌گاه آن‌ها را **یال‌های چندگانه** [۳] نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. **مرتبه** [۴] گراف G تعداد رئوس گراف G می‌باشد و با $n(G)$ یا n نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. **گراف تهی (پوچ)** [۵] گرافی است، شامل $n \geq ۱$ رأس، که مجموعه یال‌های آن تهی است.

تعریف ۵.۱.۱. گرافی که یک رأس داشته باشد، **بدیهی** [۶] و سایر گراف‌ها را **غیر بدیهی** [۷] می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. اگر مجموعه رأس‌های یک گراف، **متناهی** [۸] باشد گراف مذکور را متناهی می‌نامند در غیر این‌صورت گراف **نامتناهی** [۹] است.

تعریف ۷.۱.۱. **گشت** [۱۰] در G ، دنباله ناتهی $W = v_۰, e_۱, v_۱, e_۲, \ldots, e_k, v_k$ است، که جمله‌های آن متناوبا رأس‌ها و یال‌ها هستند، به طوری‌که به ازای هر k ،$۱ \leq i \leq k$ ،$e_i = v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد. عدد صحیح k طول W است.

تعریف ۸.۱.۱. گشتی که در آن هیچ یالی تکرار نشده باشد را **گذر** [۱۱] می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. یک **مسیر** [۱۲] گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز $v_۰, v_۱, \ldots, v_n$ در نظر می‌گیریم، به طوری‌که به ازای هر $i = ۱, \ldots, n$ ،$e_i = v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد. یک مسیر n رأسی را با P_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. تعداد یال‌های موجود در یک گشت، گذر، مسیر یا دور را طول آن می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. دو رأس در گراف را **مجاور** [۱۳] گوییم، هرگاه مسیری به طول یک بین دو رأس موجود باشد.

[۳] Multiple edges
[۴] Order
[۵] Empty graph
[۶] Trivial graph
[۷] Nontrivial graph
[۸] Finite graph
[۹] Infinite graph
[۱۰] Walk
[۱۱] Trail
[۱۲] Path
[۱۳] Adjacent

تعریف ۱.۱.۱۲. یک رأس را در گراف G **تنها** [۱۴] گوییم هرگاه هیچ یالی متصل با آن نباشد. مجموعه رئوس تنها از گراف G را با $isol(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۳. یک **دور**، [۱۵] گشت بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری دیگری نداریم. یک دور n رأسی را با C_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۴. یک **گراف ساده** [۱۶] گرافی است که هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد.

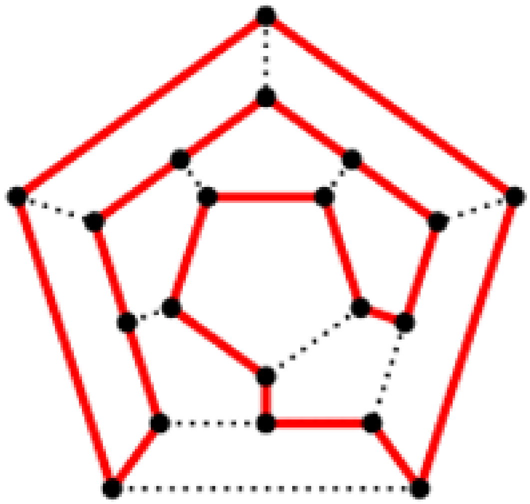
تعریف ۱.۱.۱۵. گرافی که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد را **گراف همبند** [۱۷] نامیم. گرافی که همبند نباشد، را **ناهمبند** [۱۸] می‌نامیم و هر یک از اجزای همبند آن را یک مؤلفه می‌نامیم. بنابراین گراف $G = (V, E)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر بتوان مجموعه V را به دو مجموعه ناتهی V_1 و V_2 چنان افراز کرد که هیچ یالی در E به صورت $\{x, y\}$ که $x \in V_1$ و $y \in V_2$، وجود نداشته باشد. گراف همبند است اگر و تنها اگر فقط یک مؤلفه داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. مجموعه‌ای از رئوس گراف G که با رأس v مجاور باشند را **همسایگی باز** [۱۹] رأس v نامیده و با $N(v)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $N(v) \cup \{v\}$ را **همسایگی بسته** [۲۰] رأس v نامیده و با $N[v]$ نمایش می‌دهیم. برای یک مجموعه S به طوری که $S \subseteq V(G)$ ، همسایگی باز در G را با $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ نمایش می دهیم، و همچنین همسایگی بسته در G را با $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۷. یک **مسیر همیلتونی** [۲۱] مسیری از گراف G که شامل هر رأس G باشد، مسیر همیلتونی می نامند.(در مسیر رأس تکراری نداریم)

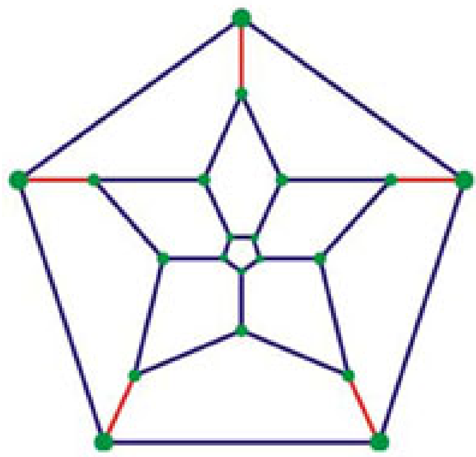
تعریف ۱.۱.۱۸. **دور همیلتونی**، [۲۲] دوری است که هر راس را دقیقاً یک بار مشاهده می‌کند. دور همیلتونی دوری به طول $|V|$ است.

[۱۴] Single
[۱۵] Cycle
[۱۶] Simple graph
[۱۷] Connected graph
[۱۸] Disconnected graph
[۱۹] Open neighbourhood
[۲۰] Closed neighbourhood
[۲۱] Hamiltonian path
[۲۲] Hamiltonian cycle



شکل ۱.۱: دور همیلتونی در یک گراف (رنگ قرمز)

تعریف ۱۹.۱.۱. گرافی که دارای دور همیلتونی باشد، **گراف همیلتونی** [۲۳] نامیده می‌شود. هر گراف کامل که بیشتر از دو راس داشته باشد، همیلتونی است. گرافی با نام گراف همیلتون وجود دارد که یک دوازده وجهی منتظم است و دارای دورهای همیلتونی زیبا می‌باشد.



شکل ۲.۱: گراف همیلتونی

تعریف ۲۰.۱.۱. **درجه** [۲۴] رأس v در گراف G تعداد یال‌های گراف G می‌باشد که v بر آن‌ها واقع است و آن را با $d_G(v)$ نمایش می‌دهیم. بزرگ‌ترین درجه در میان درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۱.۱. گراف G را **منتظم** [۲۵] گوییم هرگاه درجه تمام رئوس با هم برابر باشند. اگر

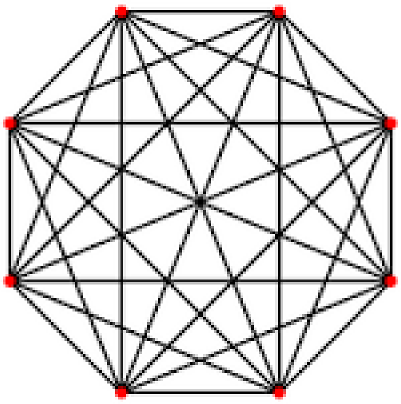
[۲۳] Hamiltonian graph

[۲۴] Degree

[۲۵] Regular graph

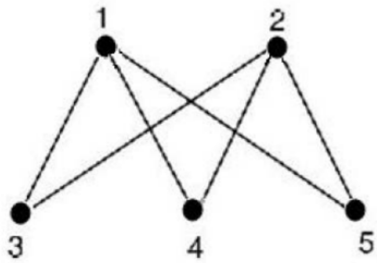
درجه تمام رئوس k باشد، آن‌گاه گراف را k–منتظم نامیم.

تعریف ۲۲.۱.۱. گرافی که در آن هر دو رأس متمایز توسط یک یال به یک‌دیگر متصل شده باشند، **گراف کامل** [۲۶] نامیده می‌شود. یک گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم.



شکل ۳.۱: گراف کامل K_8

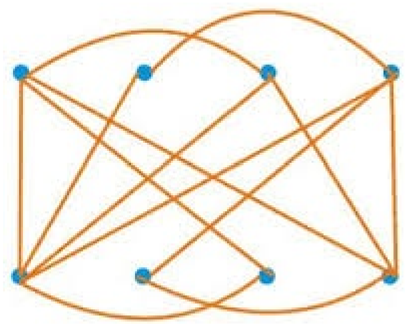
تعریف ۲۳.۱.۱. گراف دو بخشی [۲۷] گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. یک گراف دو بخشی با بخش‌های X و Y، که در آن هر رأس X، به هر رأس Y وصل شده باشد، گراف دو بخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$، آنگاه گراف دو بخشی کامل با بخش‌های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۴.۱: گراف دوبخشی کامل $K_{2,3}$

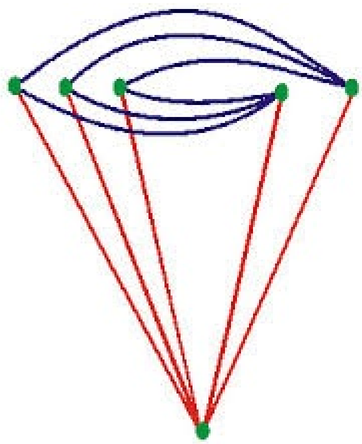
تعریف ۲۴.۱.۱. گراف چند بخشی [۲۸] فرض کنید مجموعه‌ی رأس‌های یک گراف G به n زیر مجموعه $V_1, V_2, ..., V_n$ افراز گردد. G گراف چند بخشی است در صورتی‌که در G دو رأس وقتی می‌توانند به‌هم به‌وسیله یال وصل شوند که دو رأس عضو دو مجموعه‌ی متفاوت V_i و V_j باشند. گراف n بخشی را کامل گویند هرگاه همه‌ی یال‌های ممکن بین رأس‌های آن

[۲۶] Complete graph
[۲۷] Bipartite graph
[۲۸] Multi-part graph



شکل ۵.۱: گراف ۴ بخشی

وجود داشته باشد. اگر G یک گراف n بخشی کامل باشد. به‌قسمی‌که G به n مجموعه‌ی $V_i(۱ \leq i \leq n)$ افراز شده باشد که به‌ازای هر i ، هیچ دو رأسی از V_i به‌هم متصل نباشند. و $|V_i| = a_i$ آن‌گاه گراف G را با نماد $k_{a_۱,a_۲,...,a_n}$ نمایش می‌دهیم برخلاف گراف‌های دوبخشی



شکل ۶.۱: $K_{۱,۲,۳}$

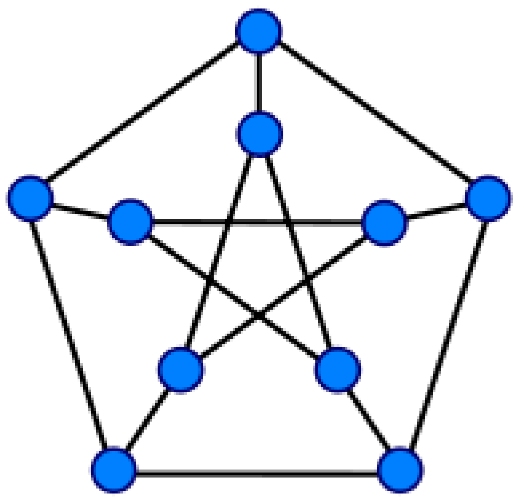
کامل، گراف‌های چند بخشی کامل همیشه منتظم نیستند. مگر گراف‌های کامل چندبخشی به‌صورت $K_{a_۱,a_۲,...,a_n}$ به‌قسمی‌که $a_۱ = a_۲ = ... = a_n$ در این صورت درجه هررأس از این گراف برابر است با $(n - ۱) \times a_۱$.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید G گرافی n رأسی باشد. **مکمل** [۲۹] (متمم) گراف G را با $\overline{G}$ نشان می‌دهیم و بدین صورت تعریف می‌کنیم، $V(G) = V(\overline{G})$ و هر دو رأس مانند u و v در $\overline{G}$ مجاور هستند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند (شکل ۷.۱). توجه کنید که مکمل گراف کامل، گراف تهی است و مکمل گراف کامل دوبخشی، اجتماع دو گراف کامل است.

[۲۹] Complementary

شکل ۷.۱: (الف) گراف G و (ب) گراف $\overline{G}$.

تعریف ۲۶.۱.۱. **گراف پترسن** [۳۰]، گرافی با ۱۰ رأس و ۳ـ منتظم است که به صورت زیر رسم می گردد:



شکل ۸.۱: گراف پترسن

تعریف ۲۷.۱.۱. یک گراف فاقد دور را **جنگل** [۳۱] می‌نامیم.

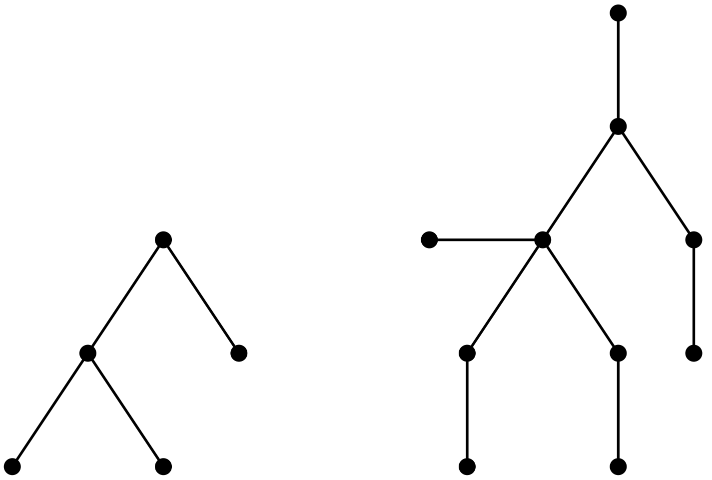
تعریف ۲۸.۱.۱. یک جنگل همبند را یک **درخت** [۳۲] می‌نامیم. به عبارت دیگر گراف همبند فاقد دور را درخت می‌نامیم. از آنجایی که طوقه و یال‌های چندگانه دور تشکیل می‌دهند لذا جنگل‌ها و درخت‌ها گراف‌هایی ساده هستند.

تعریف ۲۹.۱.۱. رأسی که در همسایگی یک برگ قرار داشته باشد، پشتیبان نام دارد. مجموعه رئوس پشتیبان در درختT را با $S(T)$ نمایش می‌دهند. هم‌چنین رأسی که در همسایگی حداقل دو برگ قرار داشته باشد، رأس پشتیبان قوی نام دارد.

تعریف ۳۰.۱.۱. رأسی از درجه یک در گراف G را **رأس پایانی** [۳۳] نامیم و مجموعه رئوس پایانی از گراف G را با نماد $End(G)$ نمایش می‌دهیم.

[۳۰] petersen graph
[۳۱] Forest
[۳۲] Tree
[۳۳] End–vertex

تعریف ۳۱.۱.۱. تاج [۳۴] در یک گراف مانند H که با H^+ یا $cor(H)$ نمایش داده می‌شود، گرافی از مرتبه $۲|V(H)|$ است که با اضافه کردن یک یال آویزان به هر رأس از گراف H به دست می‌آید (شکل ۹.۱).



(الف) (ب)

شکل ۹.۱: (الف) گراف H و (ب) گراف H^+.

تعریف ۳۲.۱.۱. یک گراف را F_آزاد گوییم، هر گاه شامل زیر گراف F نباشد.

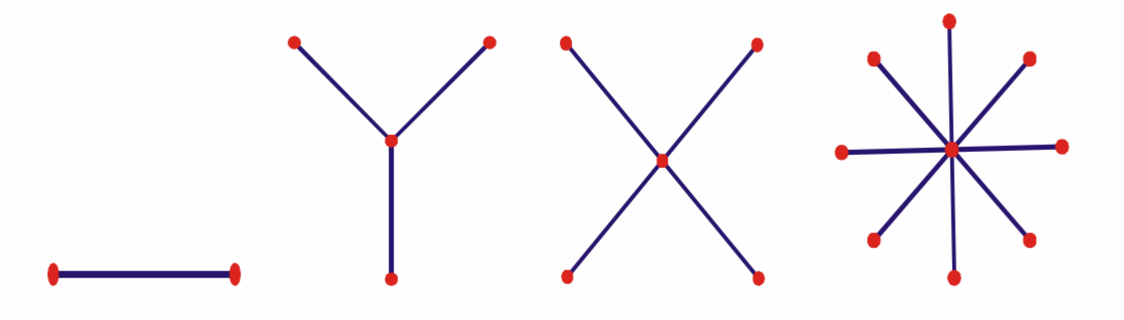
تعریف ۳۳.۱.۱. زیر تقسیم یالی [۳۵] از یک گراف G عبارت است از عمل حذف یال uv و افزودن دویال uw و wv به وسیله رأس جدید w.

تعریف ۳۴.۱.۱. یک **زیر تقسیم گراف** [۳۶] G گرافی است که می‌توان از گراف G با دنباله‌ای از زیرتقسیم‌های یالی بدست آورد.

تعریف ۳۵.۱.۱. گراف ستاره [۳۷] $K_{۱,n-۱}$، یک رأس از درجه $n-۱$ و $n-۱$ رأس از درجه یک دارد. گراف ستاره نوع خاصی از یک درخت است. گراف ستاره را با $S_{n-۱}$ نشان می‌دهند.

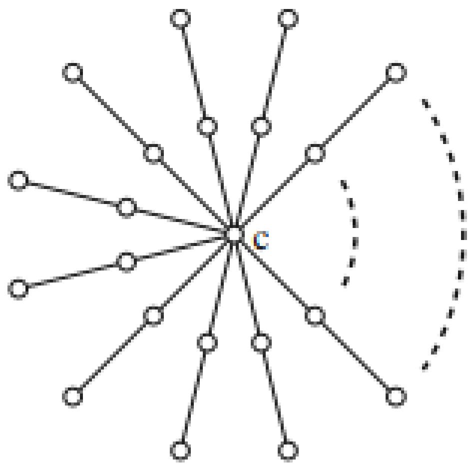
تعریف ۳۶.۱.۱. گراف **زوج ستاره** [۳۸] T^* درختی متشکل از دو ستاره است که دو رأس از بالاترین درجه توسط یک یال به هم وصل شده‌اند.

[۳۴] Corona
[۳۵] Edge Subdivision
[۳۶] Graph Subdivision
[۳۷] Star graph
[۳۸] Double star



شکل ۱.۱۰: گراف‌های ستاره

تعریف ۳۷.۱.۱. گراف زیر تقسیم ستاره [۳۹] را با $K^*_{1,n-1}$ نشان می دهیم. گراف $K^*_{1,n-1}$ یک گراف ستاره است به طوری که هر یال آن به دو یال جدید افراز شده است.



شکل ۱.۱۱: گراف زیر افراز ستاره

تعریف ۳۸.۱.۱. فرض کنیم u و v دو رأس از گراف G هستند که حداقل یک مسیر بین آن‌ها در G موجود است. **فاصله** [۴۰] بین u و v در گراف G، طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v است. فاصله بین u و v در گراف G را با $d_G(u,v)$ و یا به طور مختصر با $d(u,v)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۹.۱.۱. فرض کنیم G گرافی همبند و v رأسی دلخواه از آن باشد. **خروج از مرکز** [۴۱]

[۳۹] Star subdivided graph

[۴۰] Distance

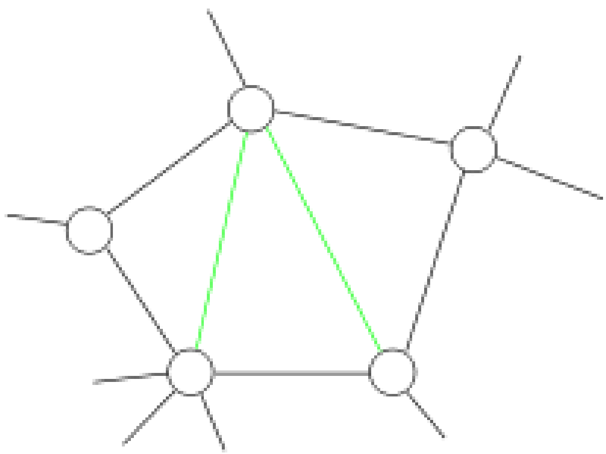
[۴۱] Eccentricity

رأس v را با $e(v)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(v) = \max_{x \in V(G)} d(v, x).$$

تعریف ۴۰.۱.۱. در گراف همبند G، کوچکترین خروج از مرکز به ازای همه‌ی رئوس G را **شعاع** [۴۲] G می‌نامیم و با $rad(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین بزرگترین خروج از مرکز به ازای همه‌ی رئوس را **قطر** [۴۳] G گوییم و با $diam(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴۱.۱.۱. گرافی که شامل هیچ دوری به طول بیش‌تر از ۳ نباشد را **گراف وتری** [۴۴] نامیم.

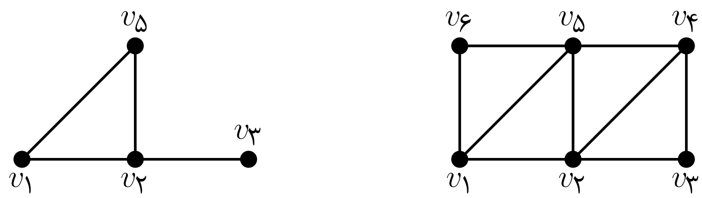


شکل ۱۲.۱: گراف وتری

تعریف ۴۲.۱.۱. یک **زیرگراف** [۴۵] از گراف G، گرافی است مانند H بطوریکه $E(H) \subseteq E(G)$ و $V(H) \subseteq V(G)$.

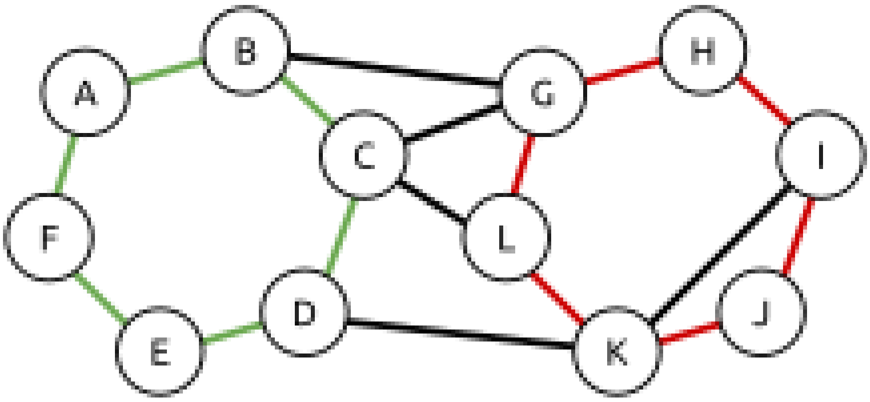
تعریف ۴۳.۱.۱. فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس V و $S \subseteq V$ باشد. زیرگرافی از G که مجموعه رئوس آن S باشد و یال‌هایی از G در آن باشند که هر دو نقطه پایانی آنها متعلق به S است را **زیرگراف القایی** [۴۶] توسط S می‌نامیم و با نماد $\langle S \rangle$ نشان می‌دهیم. برای نمونه در شکل ۱۳.۱، اگر گراف سمت راست G و $S = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۵\}$ آن‌گاه گراف سمت چپ $\langle S \rangle$ خواهد بود.

---
[۴۲] Radius
[۴۳] Diameter
[۴۴] Chordal graph
[۴۵] Subgraph
[۴۶] Induced subgraph



شکل ۱.۱۳: G و $\langle S\rangle$.

تعریف ۴۴.۱.۱. دور بدون وتر [۴۷] یا **چرخه القا شده** [۴۸] یا **گراف سوراخ** [۴۹] در گراف G ، یک دور از طول حداقل ۴ در G است که دارای هیچ وتری نیست.



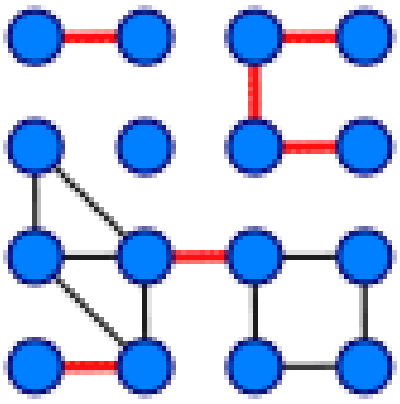
شکل ۱.۱۴: در این گراف دور سبز $(A-B-C-D-E-F-A)$ دور بدون وتر است. در حالی‌که دور قرمز $(G-H-I-J-K-L-G)$ نیست. این به این دلیل است که یال $K-I$ یک وتر است.

تعریف ۴۵.۱.۱. یک $C_{۵}$ **ـ مولفه** [۵۰] از گراف، یک مولفه برای دور بدون وتر با ۵ رأس است.

تعریف ۴۶.۱.۱. یال برشی [۵۱] یالی از گراف است که حذف آن باعث افزایش تعداد مولفه های همبندی گراف می شود. اگر گراف قبل از حذف آن یال همبند باشد، بعد از حذف ناهمبند می شود.

تعریف ۴۷.۱.۱. فرض کنید G و H دو گراف به‌ترتیب از مرتبه $n_{۱}$ و $n_{۲}$ باشند. **گراف تاج** [۵۲] $G\circ H$ به‌عنوان گراف به‌دست آمده از G و H با استفاده از گرفتن یک کپی از G، $n_{۱}$ کپی از H ومتصل کردن هر راس از i ـ امین کپی از H با یالی به i ـ امین راس از G، تعریف می‌شود. از

[۴۷] chordless cycle
[۴۸] chordless cycle
[۴۹] Graph Hole
[۵۰] $C_{۵}$-component
[۵۱] Bridge
[۵۲] Corona of two graph



شکل ۱۵.۱: گرافی با ۶ یال برشی

این پس، ما مجموعه رئوس G را با $V = \{u_۱, u_۲, \ldots, u_n\}$ ، و i ـ امین کپی از H در $G \circ H$ را توسط $H_i = (V_i, E_i)$ تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۴۸.۱.۱. هر گراف G که دارای n رأس باشد که $n \geq ۴$ و یکی از رئوس از درجه $n - ۱$ و بقیه از درجه سه باشند را یک **گراف چرخ** [۵۳] می‌نامیم. گراف چرخ n رأسی را با W_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۹.۱.۱. گرافی که از یک بار افراز یال‌های گراف کامل K_n از مرتبه $n \geq ۴$ به دست می‌آید را با K_n^* نشان می‌دهیم. توجه کنید که

$$|V(K_n^*)| = |V(K_n)| + |E(K_n)| = n + \binom{n}{۲}$$

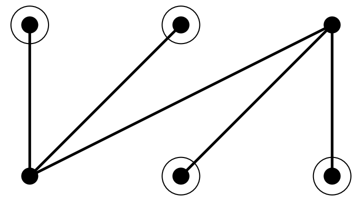
۲.۱ احاطه‌گری

درسال‌های اخیر، مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه‌های الکترونیکی مورد توجه محققین زیادی قرارگرفته و رشد چشم‌گیری داشته است.

تعریف ۱.۲.۱. یک **مجموعه مستقل** [۵۴] در گراف G، مجموعه‌ای از رئوس می‌باشد که هیچ دو رأس از آن مجاور نباشند. بزرگترین اندازه یک مجموعه مستقل در گراف G را عدد استقلال گراف G نامیده و با $\beta_۰(G)$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱۶.۱). یک مجموعه مستقل ماکزیمم را یک $\beta_۰(G)$–مجموعه می‌نامیم. مجموعه تمام مجموعه‌های مستقل ماکزیمم در G را با $\Omega(G)$ نمایش می‌دهیم.

[۵۳] wheel graph

[۵۴] Independent set



شکل ۱.۱۶: $\beta_\circ(G) = ۴$.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه مستقل S را یک **مجموعه مستقل ماکسیمال** [۵۵] می‌نامیم هرگاه هیچ رأس جدیدی مانند v وجود نداشته باشد بطوریکه $S \cup \{v\}$ نیز مستقل باشد.

تعریف ۳.۲.۱. زیر مجموعه S از رأس‌های گراف G را یک **پوشش رأسی** [۵۶] می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از نقاط پایانی هر یال G در آن مجموعه باشد. عدد پوششی رأسی گراف G مینیمم اندازه یک پوشش رأسی است و با $\alpha(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. مجموعه S از یال‌ها را یک پوشش یالی می‌نامیم هرگاه هر رأس حداقل روی یکی از این یال‌ها باشد. عدد **پوشش یالی** [۵۷] G را با $\alpha'(G)$ نشان می‌دهیم و برابر مینیمم اندازه یک پوشش یالی است.

تعریف ۵.۲.۱. زیرمجموعه M از یال‌های گراف G را یک **تطابق** [۵۸] گوییم هرگاه هیچ دو یالی در M رأس مشترک نداشته باشند. اگر M یک تطابق در G باشد و x رأسی روی یکی از یال‌های M باشد، آن‌گاه گوییم M، x را اشباع می‌کند. بزرگترین اندازه یک تطابق در G را عدد تطابقی می‌نامیم و با $\mu(G)$ نمایش می‌دهیم. یک تطابق از اندازه $\mu(G)$ را تطابق ماکزیمم یا $\mu(G)$–مجموعه می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱. اگر هر رأس از گراف G توسط تطابق M اشباع شود آن‌گاه M را یک **تطابق کامل** می‌نامیم. به وضوح هر تطابق کامل، یک تطابق ماکزیمم نیز است.

تعریف ۷.۲.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک **مجموعه احاطه‌گر** [۵۹] نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V$، یا آن رأس در S باشد و یا در همسایگی یک رأس از S قرار داشته باشد. کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه گری G نامیده و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه $\gamma(G)$ را به اختصار با γـ مجموعه نشان می‌دهیم.

[۵۵] Maximal independent set

[۵۶] Vertex covering

[۵۷] Edge covering

[۵۸] Matching

[۵۹] Dominating set

بزرگترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال در گراف G را عدد احاطه گری بالای G نامیده و آن را با $\Gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۲.۱. اگر X و Y زیر مجموعه‌هایی از رئوس در G باشد آن‌گاه مجموعه X، Y را در G احاطه می‌کند اگر $Y \subseteq N_G[X]$ در حالی‌که X ، مجموعه Y را به طور کلی در G احاطه می‌کند اگر $Y \subseteq N_G(X)$.

تعریف ۹.۲.۱. مجموعه احاطه‌گر S را **مجموعه احاطه‌گر مستقل** [۶۰] گوییم هرگاه هیچ دو رأسی از S مجاور نباشند. عدد احاطه‌گری مستقل G کوچک‌ترین اندازه چنین مجموعه‌ای است و با $i(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۰.۲.۱. مجموعه S از یال‌ها را یک مجموعه **مستقل یالی** [۶۱] می‌نامیم هرگاه هیچ دو یالی از S رأس مشترک نداشته باشد. لذا یک مجموعه مستقل یالی همان تطابق است و عدد استقلال یالی G را با $\beta'(G)$ نشان می‌دهیم، که همان عدد مربوط به تطابق ماکزیمم است.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید S کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر برای G باشد. اگر $V-S$ شامل یک مجموعه احاطه‌گر S' برای G باشد، آن‌گاه S' را یک **مجموعه احاطه‌گر معکوس** [۶۲] برای گراف G نسبت به S می‌نامیم.
کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر معکوس در گراف G را عدد احاطه گری معکوس G نامیده و آن را با $\gamma^{-1}(G)$ نمایش می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر معکوس از اندازه $\gamma^{-1}(G)$ را به اختصار با γ^{-1}ـ مجموعه نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک **مجموعه احاطه‌گر تام** [۶۳] نامیم، هرگاه هر رأس V باراًسی از S مجاور باشد.
کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر تام در گراف G را عدد احاطه گر تام G نامیده و آن را با $\gamma_t(G)$ نمایش می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه $\gamma_t(G)$ را به اختصار با γ_tـ مجموعه نشان می‌دهیم.
بزرگترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر تام مینیمال در گراف G را عدد احاطه گری بالای G نامیده و آن را با $\Gamma_t(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید S کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر تام برای G باشد. اگر $V-S$ شامل یک مجموعه احاطه‌گر تام S' برای G باشد، آن‌گاه S' را یک **مجموعه احاطه‌گر تام معکوس** [۶۴] برای گراف G نسبت به S می‌نامیم.

[۶۰] Independent dominating set
[۶۱] independent edge
[۶۲] Inverse dominating set
[۶۳] Total dominating set
[۶۴] Inverse total dominating set

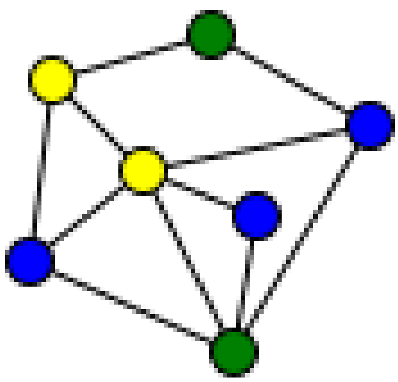
کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر تام معکوس در گراف G را عدد احاطه‌گری تام معکوس G نامیده و آن را با $\gamma_t^{-1}(G)$ نمایش می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر تام معکوس از اندازه $\gamma_t^{-1}(G)$ را به اختصار با γ_t^{-1}ـ مجموعه نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۴. اگر D_1 و D_2 دومجموعه احاطه‌گر از گراف G باشند. **عدد احاطه‌گری مجزا** [۶۵] برای گراف G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma\gamma(G) = \min\{|D_1| + |D_2| : \text{هستند } G \text{ دومجموعه احاطه‌گر مجزا از گراف } D_2 \text{ و } D_1\}$$

و یک مجموعه احاطه‌گر مجزا از اندازه $\gamma\gamma(G)$ را به اختصار با $\gamma\gamma$ ـ مجموعه نشان خواهیم داد.

تعریف ۱.۲.۱۵. در نظریه گراف **کلاسه بندی گنبدی** [۶۶] گراف، یک کلاسه بندی رئوس V به مجموعه های مجزا احاطه گر $V_1, V_2, ..., V_k$ برای G است. بیش ترین اندازه از کلاسه بندی گنبدی را**عدد گنبدی** [۶۷] می نامیم.



شکل ۱.۱۷: کلاسه بندی گنبدی

تعریف ۱.۲.۱۶. یک رأس در گراف G را γـ **ضروری** [۶۸] می‌نامیم اگر آن رأس عنصری از تمام γـ مجموعه‌ها باشد.

تعریف ۱.۲.۱۷. یک رأس در گراف G را γـ **فقیر** [۶۹] می‌نامیم اگر آن عنصر هیچ یک از γـ مجموعه‌ها نباشد.

تعریف ۱.۲.۱۸. گراف G را $\gamma\gamma$ـ **مینیمم** [۷۰] نامیم. اگر دارای دومجموعه احاطه‌گر مجزا باشد، و $\gamma\gamma(G) = 2\gamma(G)$.

[۶۵] The disjoint domination number
[۶۶] domatic partition
[۶۷] domatic number
[۶۸] γ-required
[۶۹] γ-poor
[۷۰] $\gamma\gamma$-minimum

تعریف ۱.۲.۱۹. گراف G را $\gamma\gamma$ـ **ماکسیمم** [۷۱] نامیم. اگر دارای دومجموعه احاطه‌گر مجزا باشد، و $\gamma\gamma(G) = n$.

تعریف ۱.۲.۲۰. یک **DT ـ جفت** [۷۲] از گراف G ، جفت (D, T) از مجموعه‌های مجزا رئوس G است به‌طوری‌که D مجموعه احاطه‌گر و T مجموعه احاطه‌گر تام از G هستند.

تعریف ۱.۲.۲۱. یک DT ـ جفت گراف G **جامع** [۷۳] است اگر $|D| + |T| = |V(G)|$

تعریف ۱.۲.۲۲. یک DT ـ جفت گراف G **غیر جامع** [۷۴] است اگر $|D| + |T| < |V(G)|$

تعریف ۱.۲.۲۳. اگر D یک مجموعه احاطه‌گر و T یک مجموعه احاطه‌گر تام از گراف G باشند. **عدد احاطه‌گری و احاطه‌گری تام مجزا** [۷۵] برای گراف G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma\gamma_t(G) = \min\{|D| + |T| : \text{هستند } G \text{ یک } DT \text{ ـ جفت از گراف } (D, T)\}$$

یک مجموعه احاطه‌گر واحاطه‌گر تام مجزا از اندازه $\gamma\gamma_t(G)$ را به اختصار با $\gamma\gamma_t$ ـ مجموعه نشان خواهیم داد.

تعریف ۱.۲.۲۴. اگر D_1 و D_2 دومجموعه احاطه‌گر تام از گراف G باشند. **عدد احاطه‌گری تام مجزا** [۷۶] برای گراف G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_t\gamma_t(G) = \min\{|D_1| + |D_2| : \text{هستند } G \text{ دومجموعه احاطه‌گر تام مجزا از گراف } D_2 \text{ و } D_1\}$$

مجموعه احاطه‌گر تام مجزا از اندازه $\gamma_t\gamma_t(G)$ را به اختصار با $\gamma_t\gamma_t$ ـ مجموعه نشان خواهیم داد.

تعریف ۱.۲.۲۵. گراف G را $\gamma_t\gamma_t$ـ **مینیمم** [۷۷] نامیم. اگر دارای دومجموعه احاطه‌گر تام مجزا باشد، و $\gamma_t\gamma_t(G) = 2\gamma_t(G)$.

تعریف ۱.۲.۲۶. گراف G را $\gamma_t\gamma_t$ـ **ماکسیمم** [۷۸] نامیم. اگر دارای دومجموعه احاطه‌گر تام مجزا باشد، و $\gamma\gamma(G) = n$.

---

[۷۱] $\gamma\gamma$-maxximum
[۷۲] DT-pair
[۷۳] exhaustive
[۷۴] non-exhaustive
[۷۵] Disjoint dominating and total dominating number
[۷۶] The disjoint total domination number
[۷۷] $\gamma_t\gamma_t$-minimum
[۷۸] $\gamma_t\gamma_t$-maxximum

تعریف ۲۷.۲.۱. اگر D یک مجموعه احاطه‌گر و I یک مجموعه احاطه‌گر تام از گراف G باشند. **عدد احاطه‌گرواحاطه‌گر مستقل مجزا** [۷۹] برای گراف G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$\gamma i(G) = \min\{|D| + |I| :$
D و I به‌ترتیب دومجموعه احاطه‌گر واحاطه‌گر مستقل مجزا از گراف G هستند. $\}$

یک مجموعه احاطه‌گر واحاطه‌گر مستقل مجزا از اندازه $\gamma i(G)$ را به اختصار با γi ـ مجموعه نشان خواهیم داد.

تعریف ۲۸.۲.۱. اگر D_1 و D_2 دومجموعه احاطه‌گر مستقل از گراف G باشند. **عدد احاطه‌گری مستقل مجزا** [۸۰] برای گراف G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$ii(G) = \min\{|D_1| + |D_1| :$ D_1 و D_2 دومجموعه احاطه‌گر مستقل مجزا از گراف G هستند $\}$

یک مجموعه احاطه‌گر مستقل مجزا از اندازه $ii(G)$ را به اختصار با ii ـ مجموعه نشان خواهیم داد.

[۷۹] Disjoint dominating and independent dominating number

[۸۰] The disjoint independent domination number

فصل ۲

مجموعه احاطه‌گر و مجموعه احاطه‌گر معکوس

۱.۲ مجموعه احاطه‌گر

مفهوم احاطه‌گری [۱] در گراف‌ها کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف مانند علوم کامپیوتر، شبکه‌های الکترونیکی و ... دارد.
از جمله کاربردهای آن می‌توان در مخابرات برای نصب دکل‌های آنتن در مناطقی از شهر و یا انتخاب بهترین مکان‌ها برای احداث بیمارستان، فروشگاه یا مراکز آتش نشانی و... اشاره کرد.
این مفهوم نخستین بار در سال۱۸۶۲ توسط دوجیکنیش، [۲] روی صفحه‌ی شطرنج مورد استفاده قرار گرفت اما بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه‌ی گراف‌ها مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت وتاکنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است. در سال ۱۸۶۲ بال [۳] [۵] [۱۹] [۲۰] مسأله‌ی کمترین تعداد مهره‌های وزیر مورد نیاز، جهت قرار گرفتن روی صفحه‌ی شطرنج را به قسمی که هر خانه‌ای مورد حمله یک وزیر قرار گرفته و هیچ وزیری

[۱] Dominating
[۲] Do Jacnish
[۳] W. W. Rouse Ball

مورد حمله‌ی وزیر دیگری نباشد را مطرح کرد، این مسأله به مسأله ۵ـ وزیر معروف شد.
مفهوم احاطه‌گری می‌تواند ابزار مفیدی برای اتخاذ تصمیم گیری و تعیین برخی از شبکه‌های سازمانی باشد.
مثلا فرض کنید یک شرکت می‌خواهد برای ایجاد فروشگاه‌های مواد غذایی در یک منطقه، با در نظر گرفتن تراکم جمعیت درآن منطقه اقداماتی انجام دهد. با این حال این شرکت در نظر داردکه تعدادفروشگاه‌های مورد نظر را به حداقل برساند و در عین حال دسترسی همه‌ی مردم منطقه به فروشگاه امکان‌پذیر باشد، به عبارت دیگر می‌خواهد با ایجاد کمترین تعداد فروشگاه به هدف مورد نظر دست یابد.
برای این منظور نقاط مختلف منطقه‌ی مورد نظر را به عنوان رئوس گراف در نظر می‌گیریم وبا ایجاد هر فروشگاه، تمامی نقاطی که به فروشگاه دسترسی دارندرا به کمک خطوطی به آن متصل می‌کنیم به این ترتیب یال‌های گراف مورد نظر را رسم کرده و گرافی طراحی می‌کنیم.
حال به دنبال کمترین تعداد نقاطی هستیم که تمام نقاط بیرونی را پوشش دهد.
امروزه نظریه‌ی احاطه گری در گراف‌ها از حیطه‌های جذاب پژوهشی می‌باشد و بسیاری از پژوهش‌گران در این خصوص مشغول مطالعه و تحقیق هستند. در سال ۱۹۹۸ دو کتاب شامل آخرین پیشرفت‌های این نظریه توسط سه نفر از رهبران این نظریه به چاپ رسیده، که پنجره‌ای جدید به روی ریاضیات نوین گشوده است و تا کنون در مورد مفهوم احاطه‌گری، مسائل باز بسیار زیادی مطرح شده است.

ملاحظه ۱.۱.۲. برای گراف کامل K_p با p رأس، $\gamma(K_p)=۱$
برای مسیر P_p با p رأس، $\gamma(P_p)=\lceil\frac{p}{۳}\rceil$
برای دور C_p با p رأس، $\gamma(C_p)=\lceil\frac{p}{۳}\rceil$
برای گراف چرخ W_p با p رأس، $\gamma(W_p)=۱$
برای گراف کامل دوبخشی $K_{m,n}$ ، $\gamma(K_{m,n})=۲$

۲.۲ مجموعه احاطه‌گر معکوس

گزاره ۱.۲.۲. برای دور C_p با p رأس، خواهیم داشت:

$$\gamma^{-۱}(C_p)=\left\lceil\frac{p}{۳}\right\rceil.$$

برهان. می‌دانیم که $\gamma(C_p)=\left\lceil\frac{p}{۳}\right\rceil$. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر از C_p باشد، آن‌گاه $D'=\{u_i|u_{i+۱}\in D\}$ یک مجموعه احاطه‌گر معکوس از C_p است. پس

$$\gamma^{-۱}(C_p)=|D'|=\left\lceil\frac{p}{۳}\right\rceil.$$

□

گزاره ۲.۲.۲. برای مسیر P_p با p رأس داریم:

$$\gamma^{-1}(P_p)=\begin{cases}\left\lceil\frac{p}{3}\right\rceil+1, & p\equiv 0(mod 3),\\ \left\lceil\frac{p}{3}\right\rceil, & o.w.\end{cases}$$

برهان. برای اثبات گزاره بالا دو حالت وجود دارد:

- فرض کنید $p\equiv 0(mod 3)$ در این حالت یک مجموعه احاطه‌گر منحصربه‌فرد

$$D=\{u_{3n-1}|1\leq n\leq \frac{p}{3}\}$$

که $u_i\in V(P_p)$ وجود دارد. پس $D'=\{u_i|u_{i+1}\in D\}\cup\{u_p\}$ یک مجموعه احاطه‌گر معکوس است. بنابراین

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}(P_p)=&|D'|\\ =&|D|+1\\ =&\left\lceil\frac{p}{3}\right\rceil+1\end{aligned}$$

- فرض کنید $p\neq 0(mod 3)$. در این حالت یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم D وجود دارد به‌طوری‌که رأس آخر u_p را شامل می‌شود. پس $D'=\{u_i|u_{i+1}\in D\}$ یک مجموعه احاطه‌گر معکوس است. آن‌گاه

$$\begin{aligned}\gamma'(P_p)=&|D'|\\ =&|D|\\ =&\left\lceil\frac{p}{3}\right\rceil.\end{aligned}$$

□

گزاره ۳.۲.۲. برای گراف چرخ W_p با p رأس خواهیم داشت:

$$\gamma^{-1}(W_p)=\left\lceil\frac{(p-1)}{3}\right\rceil.$$

برهان. فرض کنید $W_p=K_1+C_{p-1}$ که $V(K_1)$ تنها مجموعه مینیمم احاطه‌گر W_p است. مجموعه احاطه‌گر معکوس W_p یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم C_{p-1} است. بنابراین

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}(W_p)=&\gamma(C_{p-1})\\ =&\left\lceil\frac{(p-1)}{3}\right\rceil.\end{aligned}$$

□

قضیه ۱.۲.۲. برای هرگراف G ،

$$\gamma^{-1}(G) \leq \beta_\circ(G)$$

اگر $G = K_p$ حالت تساوی اتفاق می‌افتد.

برهان. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر G و S یک مجموعه مستقل ماکسیمال در $\langle V-D \rangle$ باشد. که دو حالت به‌وجود می‌آید:

- فرض کنید $V - D - S = \emptyset$. آن‌گاه $V - D = S$ یک مجموعه احاطه‌گر مستقل معکوس G می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(G) \leq& |V - D| \\ =& |S| \\ \leq& \beta_\circ(G). \end{aligned}$$

- فرض کنید $V - D - S \neq \emptyset$. آن‌گاه هر رأس در $V - D - S$ با حداقل یکی از رأس‌های S همسایه باشد. اگر هر رأس در D با حداقل یکی از رأس‌های در S همسایه باشد، آن‌گاه S یک مجموعه احاطه‌گر معکوس است. از این‌رو فرض کنید $D' \subset D$ یک مجموعه ازرئوس D باشد به‌طوری‌که هیچ رأس از D' با هیچ رأسی از S همسایه نباشد. چون D یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است، هر رأس در D' باید با حداقل یک رأس در $V-D-S$ همسایه باشد. فرض کنید $S' \subset V - D - S$ به‌طوری‌که هر رأس در D' با حداقل یک رأس در S' همسایه باشد. به‌روشنی دیده می‌شود $|S'| \leq |D'|$ و $S \cup S'$ یک مجموعه احاطه‌گر معکوس است. بنابراین

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(G) \leq& |S \cup S'| \\ \leq& |S \cup D'| \\ \leq& \beta_\circ(G). \end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم G باشد. اگر برای هر رأس $v \in D$ ، که زیرگراف $\langle N[v] \rangle$ یک گراف کامل با حداقل مرتبه ۲ باشد، آن‌گاه

$$\gamma(G) = \gamma^{-1}(G)$$

برهان. فرض کنید $D = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم G باشد. فرض کنید $v_1, v_2, ..., v_n$ به‌ترتیب رئوس مجاور با $u_1, u_2, ..., u_n$ باشند. طبق فرض داریم، برای هر رأس $u_i \in D$ گراف $\langle N[u_i] \rangle$ کامل است. درنتیجه $N[u_i] \subset N[v_i]$. بنابراین

$$V(G) = N[u_1] \cup N[u_2] \cup ... \cup N[u_n] \subset N[v_1] \cup N[v_2] \cup ... \cup N[v_n] = V(G)$$

بنابراین $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر معکوس G باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}(G) =&|D|\\ =&\gamma(G).\end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید τ نشان‌دهنده خانواده تمام مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم از G باشد. اگر برای هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم $D \in \tau$ ، $V - D$ مستقل باشد، آن‌گاه

$$\gamma(G) + \gamma^{-1}(G) = p.$$

برهان. برای هرمجموعه احاطه‌گر مینیمم D ، مجموعه $V - D$ یک مجموعه احاطه‌گر G است و چون مستقل است، بنابراین $V - D$ یک مجموعه احاطه‌گر معکوس مینیمم برای گراف G است. بنابراین

$$\gamma(G) + \gamma^{-1}(G) = p.$$

□

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید T یک درخت باشد، به‌طوری‌که هر رأس غیرپایانی باحداقل یک رأس پایانی همسایه باشد. آن‌گاه

$$\gamma(G) + \gamma^{-1}(G) = p.$$

برهان. فرض کنید T یک درخت باشد، به‌طوری‌که هر رأس غیرپایانی T باحداقل دو رأس پایانی همسایه باشد. آن‌گاه مجموعه تمام رئوس غیرپایانی، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است و مجموعه تمام رئوس پایانی، یک مجموعه احاطه‌گر معکوس مینیمم است. فرض کنید بعضی از رئوس غیرپایانی دقیقا با یک رأس پایانی همسایه باشد و D و D' به‌ترتیب مجموعه احاطه‌گر مینیمم و مجموعه احاطه‌گر معکوس مینیمم باشد. فرض کنید u یک رأس غیرپایانی باشد. دقیقا با یک رأس پایانی v همسایه است. اگر $v \in D'$ آن‌گاه $u \in D$ و اگر $u \in D'$ آن‌گاه $v \in D$. آن‌گاه در هر حالت

$$|D| + |D^{'}| = p$$

، بنابراین

$$\gamma(G) + \gamma^{-1}(G) = p.$$

□

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید G یک جفت (p,q) گراف باشد و $\gamma(G)=\gamma^{-1}(G)$ آن‌گاه

$$q\geq 2p-3\gamma(G).$$

برهان. فرض کنید D و D' به‌ترتیب مجموعه احاطه‌گر مینیمم و مجموعه احاطه‌گر معکوس مینیمم G باشد. آن‌گاه

$$\begin{aligned} q\geq & 2|V(G)-D-D'|+|D| \\ =& 2(p-2\gamma(G))+\gamma(G) \\ \geq & 2p-4\gamma(G)+\gamma(G) \\ =& 2p-3\gamma(G). \end{aligned}$$

همچنین تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که اگر دو مجموعه احاطه‌گر مجزای مینیمم D و D' وجود داشته باشد به طوری‌که:

۱. $\langle D\cup D'\rangle=\gamma(G)K_2$

۲. $\langle V(G)-(D\cup D')\rangle=\bar{K_n}$

۳. برای هر رأس $v\in V(G)-V(D\cup D')$

$$\langle N[v]\rangle=K_{1,2}\quad or\quad K_3$$

□

۳.۲ مجموعه‌های احاطه‌گر مجزا

گزاره ۱.۳.۲. برای هر گراف فاقد رأس تنهای G داریم:

$$2\gamma(G)\leq\gamma\gamma(G)\leq\gamma(G)+\gamma^{-1}(G)\leq n$$

گزاره ۲.۳.۲. برای هر گراف دارای مجموعه احاطه‌گر مستقل مجزا G داریم:

$$\gamma\gamma(G)\leq\gamma i(G)\leq ii(G)$$

گزاره ۳.۳.۲. برای مسیر P_n با مرتبه $n\geq 2$ ،

۱.

$$\gamma\gamma(P_{3k})=ii(P_{3k})=2\gamma(P_{3k})+1=2k+1$$

.۲

$$\gamma\gamma(P_{3k+1}) = ii(P_{3k+1}) = 2\gamma(P_{3k+1}) = 2k+2$$

.۳

$$\gamma\gamma(P_{3k+2}) = ii(P_{3k+2}) = 2\gamma(P_{3k+2}) = 2k+2$$

گزاره ۴.۳.۲. برای دور $C_n, n \geq 3$ ، داریم:

$$\gamma\gamma(C_n) = ii(C_n) = 2\gamma(C_n) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil$$

گزاره ۵.۳.۲. برای گراف کامل $K_n, n \geq 2$ ، داریم:

$$\gamma\gamma(K_n) = ii(K_n) = 2$$

قضیه ۱.۳.۲. یک گراف همبند G یک $\gamma\gamma$ـ ماکزیمم است. اگر وتنها اگر یا $G = C_4$ یا هر رأس یا یک برگ یا یک ریشه باشد.

برهان. اگر هر رأس از یک گراف G یا برگ یا ریشه باشد، به روشنی دیده می‌شود $\gamma\gamma(G) = n$ هم‌چنین $\gamma\gamma(C_4) = 4 = n$

ما نشان خواهیم داد که اگر گراف G دارای یک رأس که نه برگ و نه ریشه باشد، آن‌گاه یا $\gamma\gamma(G) < n$ یا $G = C_4$. فرض کنید که یک گراف G از مرتبه n وجود داشته باشد که دارای یک رأس x باشد که نه ریشه و نه برگ باشد، و $\gamma\gamma(G) = n$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. دو رأس مجاور $y, z \in N(x)$ وجود دارد، به‌طوری‌که x و y و z در G یک مثلث هستند. $\{y\}$ یک مجموعه ماکزیمم مستقل برای گراف G است. که آن را مجموعه A می‌نامیم. توجه داشته باشید که $x, z \notin A$. این نشان می‌دهد که مجموعه $V - A - \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از گراف G باشد. از این رو اگر $u \in N(x) \cap A$ آن‌گاه u باید دارای یک همسایگی دیگر با x که در A نیست، داشته باشد.

۲. مجموعه $N(x)$ مستقل است. فرض کنید $N(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. به‌طوری‌که $k \geqslant 2$.

(آ) برای i، $1 \leqslant i \leqslant k$، وجود دارد یک $z \neq x \in N(x_i)$ به‌طوری‌که $|N(x) - N(z)| > 0$. بسط مجموعه $\{z\} \cup N(x) - N(z)$ یک مجموعه مستقل ماکسیمال است. که آن‌را مجموعه A می‌نامیم. مجموعه A یک مجموعه احاطه‌گر مستقل برای گراف G است و مجموعه $V - A - \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. بنابراین $\gamma\gamma(G) < n$.

(ب) برای تمام i ها، اگر $z \in N(x_i)$ باشد، آن‌گاه $N(x) \subseteq N(z)$. آن‌گاه $|N(x_i)| = |N(x_j)|$ برای تمام $1 \leq i, j \leq k$ است. حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

i. $|N(x_۱)| \geqslant ۳$. فرض کنید $z \in N(x_۱) - \{x\}$ آن‌گاه مجموعه

$$B = \{x_۱, z\} \cup (V - (N(x_۱) \cup N(z))$$

یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. فرض کنید $A \subseteq B$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G باشد. توجه داشته باشید که $x \notin A$ و $x_۲, x_۳, \ldots, x_k \notin A$. مجموعه $V - A - \{x\}$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر برای G است. بنابراین $\gamma\gamma(G) < n$.

ii. اگر $|N(x_۱)| = ۲$. دو زیر حالت خواهیم داشت:

آ. $|N(x)| \geqslant ۳$. فرض کنید $N(x_۱) = \{x, z\}$ مجموعه

$$B = \{x_۱\} \cup (V - N[x])$$

یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. فرض کنید $A \subseteq B$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف G باشد. توجه داشته باشید که $x_۱, z \in A$. از این رو مجموعه $V - A - \{x_۲\}$ نیز یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. و این نشان می‌دهد که

$$\gamma\gamma(G) < n.$$

ب. $|N(x)| = ۲$. فرض کنید $y \in N(x_۱) - \{x\}$ اگر $V = \{x_۱, x_۲, x, y\}$، آن‌گاه $G = C_۴$ و $\gamma\gamma(G) = ۴ = n$.

اگر $n \geqslant ۵$، فرض کنید $z \in N(y) - \{x_۱, x_۲\}$ مجموعه $B = V - \{x, x_۱, z\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G باشد و $A \subseteq B$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای G باشد. تو جه داشته باشید که $x_۲, y \in A$ و $x, x_۱, z \in V - A$. آن‌گاه مجموعه $V - A - \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است. بنابراین $\gamma\gamma(G) < n$ و برهان کامل می‌شود.

□

کلاس‌های زیر از گراف‌هایی است که $\gamma\gamma$ـ مینیمم هستند.

۱. دورهای C_n

۲. گراف‌های به فرم $G = K_۲ + H$، به‌طوری‌که H یک گراف دلخواه، هر رأس در G با رئوس $K_۲$ باهم مجاور باشند در این کلاس از گراف‌ها $\gamma\gamma(G) = ۲$.
کلاس های زیر تمام گراف‌های کامل را نیز شامل می‌شود.

۳. گراف کامل دوبخشی $K_{m,n}$ برای $m, n \geqslant ۲$ و گراف کامل چندبخشی $K_{m_۱, m_۲, \ldots, m_n}$. برای این گراف‌ها $\gamma(G) = ۲$ و $\gamma\gamma(G) = ۴$

۴. تمام دورهای P_{3k+1} و P_{3k+2}.

۵. تمام گراف‌های زیر تقسیم شده ستاره به‌طوری‌که K_{1}^{*}, s برای $S \geqslant 2$. برای کلاس از درخت‌های T، $\gamma(T) = S$ و T دارای دو مجموعه احاطه‌گر مجزا است. در حقیقت $\gamma(T) = i(T)$.

۶. تمام درخت‌هایی $T_1 = T \circ K_1$. برای این کلاس از درخت‌ها $\gamma(T_1) = \frac{n}{2}$ و T_1 دارای دو مجموعه احاطه‌گر مجزا است در حقیقت $\gamma(T_1) = i(T_1)$.

لم ۲.۳.۱. اگر گراف G ، $\gamma\gamma$ـ مینیمم باشد، آن‌گاه G شامل هیچ رأس γـ ضروری نخواهد بود.

نتیجه ۲.۳.۱. درخت T از مرتبه $n \geq 2$ یک $\gamma\gamma$ـ مینیمم است اگر وتنها اگر T شامل هیچ رأس γـ ضروری نباشد.

توجه داشته باشید که به‌طور عمومی، یک گرافی که یک رأس γـ ضروری ندارد، $\gamma\gamma$ـ مینیمم نخواهد داشت. از گراف زیر پیروی خواهد کرد. فرض کنید رئوس گراف K_3 با u_1, u_2, u_3 مشخص شده باشند. دورأس v_1, v_2 که با u_1, u_2 مجاور باشند، را اضافه می‌کنیم. دورأس x_1, x_2 که با u_2, u_3 مجاور باشند، را اضافه می‌کنیم. سرانجام دورأس w_1, w_2 که با u_1, u_3 مجاور باشند، را اضافه می‌کنیم، می‌توانیم ببینیم که گراف G دارای رأس γـ ضروری نیست و $\gamma(G) = 2$ و $\gamma\gamma(G) = 5$

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید گراف G با مرتبه $n \geq 2$ بدون راس تنها باشد. آن‌گاه

$$\gamma\gamma(G) \leq \gamma i(G) \leq i(G) + \beta_0(G)$$

برهان. فرض کنید I یک مجموعه مستقل ماکزیمم با اندازه‌ی $|I| = i(G)$، و فرض کنید S یک مجموعه مستقل ماکسیمال برای $V - I$ باشد. هر رأس در $V - I$ به وسیله‌ی مجموعه‌ی مجموعه S احاطه می‌شود. فرض کنید D، مجموعه باشد که رئوس I توسط S احاطه نشده باشد. بنابراین $S \cup D$ یک مجموعه مستقل ماکسیمال است. بنابراین I یک مجموعه مستقل ماکسیمال است. هر رأس در D حداقل با یک رأس در $(V - I) - S$ مجاور باشد.
هر رأس در D ، یک رأس در $(V - I) - S$ انتخاب می‌کند. این مجموعه را T می‌نامیم. آن‌گاه مجموعه $T \cup S$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G می‌باشد، به‌طوری‌که $(T \cup S, I)$ یک γ_i ـجفت برای G است.

$$|T \cup S| = |T| + |S| \leq \beta_0(G)$$

بنابراین

$$\gamma\gamma(G) \leq \gamma i(G) \leq |I| + |T \cup S| \leq i(G) + \beta_0(G)$$

□

نتیجه ۲.۳.۲. اگر گراف G از مرتبه $n \geq ۲$ بدون رأس تنها باشد و اگر $\gamma(G) = i(G)$، آن‌گاه $\gamma'(G) \leq \beta_\circ(G)$ و حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که

$$\gamma(G) = i(G)$$

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنید m اندازه و n مرتبه گراف همبند باشد. آن‌گاه

$$m \geq ۲n - \frac{۳\gamma\gamma(G)}{۲}$$

برهان. فرض کنید $D_۱$ و $D_۲$ دو مجموعه احاطه‌گر مجزا

$$|D_۱| + |D_۲| = \gamma\gamma(G)$$

آن‌گاه

۱. یکی از مجموعه‌های $D_۱$ و $D_۲$ دارای حداقل $\frac{\gamma\gamma(G)}{۲}$ رأس است.

۲. هر رأس در $V - (D_۱ \cup D_۲)$ دارای یک همسایگی برای $D_۱$ و یک همسایگی برای $D_۲$ است.

۳. هر رأسی در $D_۱$ دارای یک همسایگی در $D_۲$ است.

۴. هر رأسی در $D_۲$ دارای یک همسایگی در $D_۱$ است.

بنابراین حداقل اندازه‌ی گراف G

$$۲|V - (D_۱ \cup D_۲)| + \max\{|D_۱|, |D_۲|\} \geq ۲(n - \gamma\gamma(G)) + \frac{\gamma\gamma(G)}{۲} = ۲n - \frac{۳\gamma\gamma(G)}{۲}$$

است. □

نتیجه ۳.۳.۲. فرض کنید T یک درخت باشد آن‌گاه

$$\gamma\gamma(T) \geq \frac{۲(n+۱)}{۳}$$

نتیجه ۴.۳.۲. برای هر درخت T از مرتبه $n \geq ۲$،

$$\gamma\gamma(T) = \gamma(T) = ii(T) \leq i(G) + \beta_\circ(G)$$

.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید G یک گراف با عدد گنبدی d باشد. آن‌گاه

$$\gamma\gamma(G) \leq \frac{۲n}{d}$$

.

برهان. فرض کنید $V_1, V_2, \ldots, V_d$ یک کلاس‌بندی برای گراف G با توجه به مجموعه احاطه‌گر d باشند. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید

$$|V_1| \leq |V_2| \leq |V_3| \leq \ldots |V_d|$$

بنابراین

$$|V_1| + |V_2| \leq \frac{2n}{d}$$

□

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنید G و $\bar{G}$ بدون رأس تنها باشند. اگر قطر گراف G کمتر از ۴ باشد در این صورت داریم :

$$\gamma\gamma(G) + \gamma\gamma(\bar{G}) \leq (n+4)$$

برهان. فرض کنید گراف G مانند فرض مسأله باشد. فرض کنید x و y به‌طوری باشند که $d(x,y) = diam(G)$ و P کوتاه‌ترین مسیر از x به y باشد. فرض کنید یک همسایگی از x در p باشد و b یک همسایگی y روی p باشد.بنابراین $diam(G) \geq 4$، خواهیم داشت $ab \notin E(G)$. در آخر خواهیم داشت $\gamma\gamma(G) \leq n$. که دو مجموعه مجزا $\{x,b\}$ و $\{y,a\}$ هر کدام مجموعه احاطه‌گر از $\bar{G}$ هستند بنابراین

$$\gamma\gamma(\bar{G}) \leq 4$$

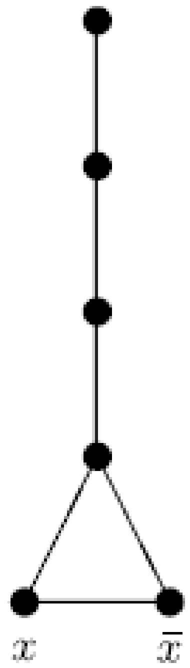
□

۴.۲ پیچیدگی محاسباتی

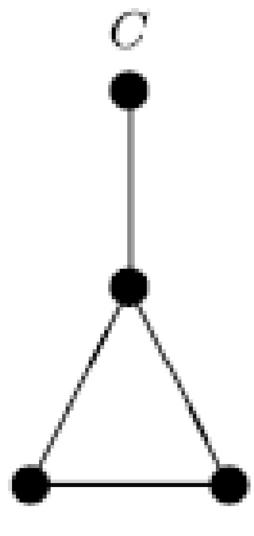
در این بخش ثابت خواهیم کرد که نابرابری $\gamma\gamma(G) \leq 2\gamma(G)$ برای گراف G صادق است یا خیر؟ یک مسأله NP-hard است. این بدان معنی است که به احتمال زیاد، هیچ الگورتیم کارآمدی برای دسته‌بندی چنین گراف‌هایی وجود ندارد. به‌طوری‌که $\gamma\gamma(G)$ برای هر گراف بدون رأس تنها به‌خوبی تعریف شده است. در بحث درخت‌ها دو مجموعه احاطه‌گر مجزای مینیمم به طور مفید در [۲] و [۱۸] بیان شده است. نشان می‌دهیم که مسائل ونتایج متناظر، در حالت کلی مسائل NP-hard هستند. در حقیقت نمی‌دانیم این مسائل NP-hard هستند یا خیر.

قضیه ۱.۴.۲. تشخیص این‌که یک گراف دارای دو مجموعه احاطه‌گر مجزای مینیمم است، مسأله NP-hard است.

برهان. یک ۳sat مثل c داده شده است، گراف G راطوری می سازیم که مرتبه چند جمله‌ای آن در اندازه c کران‌دار باشد و c می‌تواند راضی کننده باشد اگر وتنها اگر G دو مجموعه احاطه‌گر مجزای مینیمم داشته باشد.

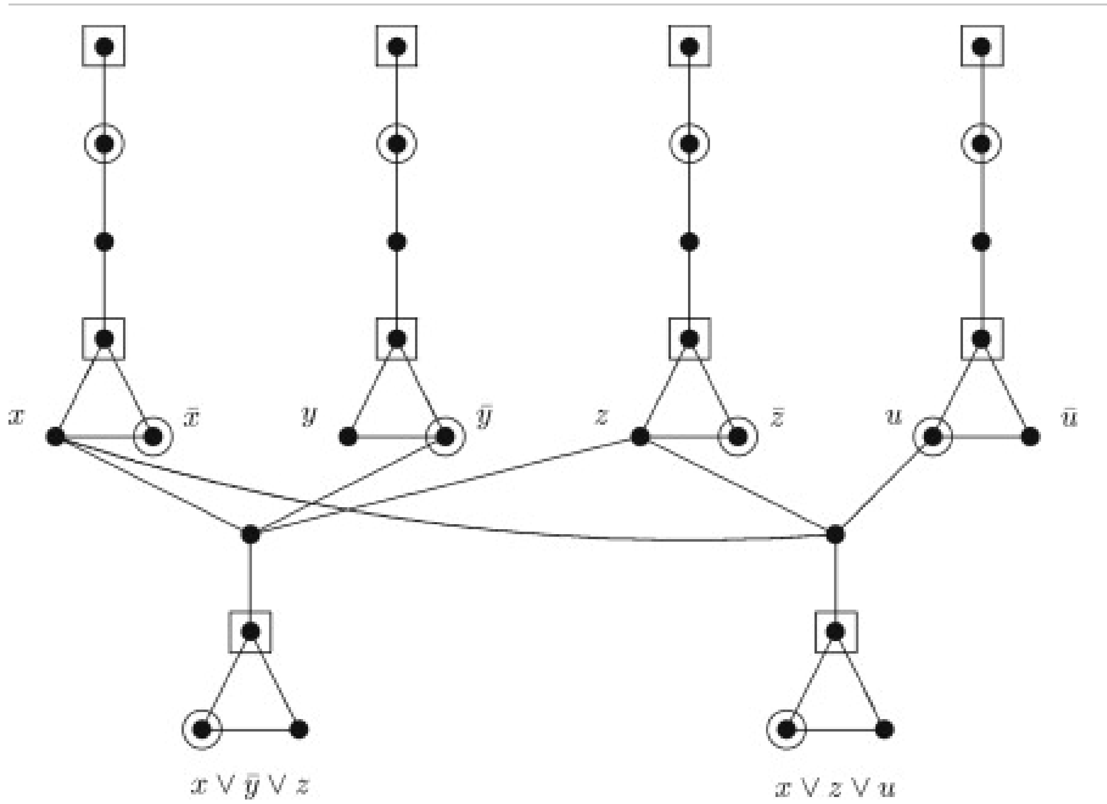


شکل ۱.۲: گراف جزء G_x



شکل ۲.۲: گراف جزء G_c

برای هر متغییر بولی واقع در $\mathcal{C}$ ، یک کپی G_x ازگراف جزء معرفی می‌کنیم که در شکل ۱.۲ نشان داده شده است و شامل دورأس مشخص شده x و $\bar{x}$ است. به‌علاوه برای‌هر جز C از $\mathcal{C}$ یک کپی G_c ازآن جز مطرح می‌کنیم که در شکل ۲.۲ مشخص شده و شامل یک رأس مشخص C است. اگر متغییر x در عبارت C قرار گیرد، رأس مشخص x از G_x را به رأس مشخص شده C از G_c وصل میکنیم. (برای مثال شکل ۳.۲ را ببینید که درآن $\mathcal{C} = \{x \vee \bar{y} \vee z, x \vee z \vee u$) . فرض کنید G گراف نهایی را نشان می‌دهد. فرض کنید $\mathcal{C}$، n متغییر بولی دارد و شامل m عبارت است. توجه کنید که مرتبه G ، $6n + 4m$ است. هر مجموعه احاطه گری از G شامل حداقل دو رأس از جز G_x و حداقل یک رأس از جز G_c است. انتخاب دو رأس در فاصله ۱و ۴ از رأس آخر در هر جز G_x و رأس احاطه‌گر در هر جز G_c ، مجموعه احاطه‌گر G را نتیجه می‌دهد و $\gamma(G) = 2n + m$ را ایجاب می‌کند. اگر $\mathcal{C}$ برقرار باشد، آن‌گاه جایگزینی دقیق ومطلوب را برای



شکل ۳.۲: گراف G برای $\mathcal{C} = \{x \vee \bar{y} \vee z, x \vee z \vee u\}$

$\mathcal{C}$ بررسی می‌کنیم. مجموعه رئوس متناظر بارئوس واقعی به همراه همسایگی از آخرین رأس در هر گراف جز G_x و یکی از دو رأس بادرجه ۲ در هر جز G_c مجموعه احاطه‌گر مینیمم D را از G نتیجه می‌دهد. به‌علاوه، انتخاب ۲ رأس در فاصله۰ و۳ از آخرین رأ از هرگراف جزء G_x ورأس احاطه‌گر در هر گراف جزء G_c ، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از G را نتیجه می‌دهد، که مجزا از D است.

برعکس: حالا فرض کنید G دارای دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم مجزای D_1 و D_2 است. با استدلال فوق، هریک از D_1 و D_2 شامل دقیقا یک رأس از هر جز G_c هستند و این ایجاب می‌کند که برای هر جز G_c ، رأس مشخص C باید بایکی از مجموعه های D_1 و D_2 به‌وسیله رأسی که در G_c نیست احاطه شود. به‌علاوه برای هرجز G_x ، مجموعه $D_1 \cup D_2$ شامل حداکثر یکی از دو رأس مشخص x و $\bar{x}$ است. بنابراین رئوس متناظر با رئوس واقعی در $D_1 \cup D_2$ ، جایگزینی دقیق و مطلوب رابرای $\mathcal{C}$ نشان می‌دهد. توجه کنید که مقدار واقعی متغییر x برای این‌که x و $\bar{x}$ در $D_1 \cap D_2$ نباشد، می‌تواند دلخواه باشد. (دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم در شکل ۳.۲ با قرار دادن نادرست x و y و z و قرار دادن درست x متناظر است) واین اثبات را کامل می‌کند. □

همان‌طور که قبلا اشاره شد، $\gamma\gamma(G)$ برای هر گراف G بدون رئوس تنها، وجود دارد. درتناقض با آن،تعیین وجود $ii(G)$ سخت است.

قضیه ۲.۴.۲. تعیین این‌که آیا گراف داده شده دارای دو مجموعه احاطه‌گر مستقل مجزا است یا خیر، NP-complete است.

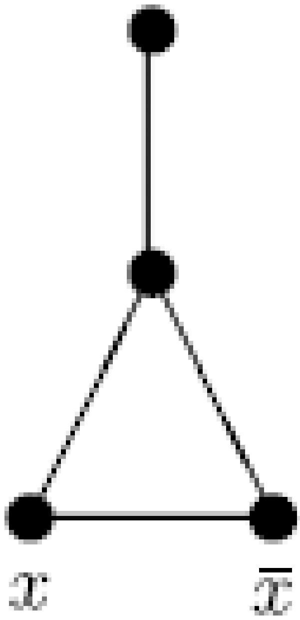
برهان. مسأله تعمیم داده شده به وضوح NP است. □

قضیه ۳.۴.۲. تعیین این‌که آیا گراف داده شده دارای دو مجموعه احاطه‌گری مستقل مجزا است یا خیر، $NP-complete$ است.

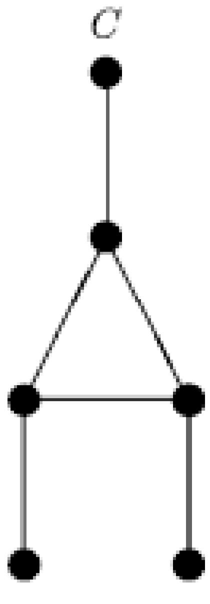
برهان. یک ۳SAT مانند $\mathcal{C}$ داده شده است. گراف G را طوری می‌سازیم که مرتبه چند جمله‌ای آن در اندازه $\mathcal{C}$ کران‌دار باشد و $\mathcal{C}$ می‌تواند راضی کننده باشد اگر و تنها اگر G دو مجموعه احاطه‌گری مستقل مجزا مینیمم داشته باشد.

برای هر متغیر بولی واقع در $\mathcal{C}$، یک کپی از گراف جزء که در شکل ۴.۲ نشان داده شده و شامل دو رأس مشخص x و $\bar{x}$ است، معرفی می‌کنیم. بعلاوه برای هر جزء c از $\mathcal{C}$، کپی G_c ازگراف جزء که درشکل ۵.۲ نشان داده شده و شامل یک رأس مشخص C است را معرفی می‌کنیم.

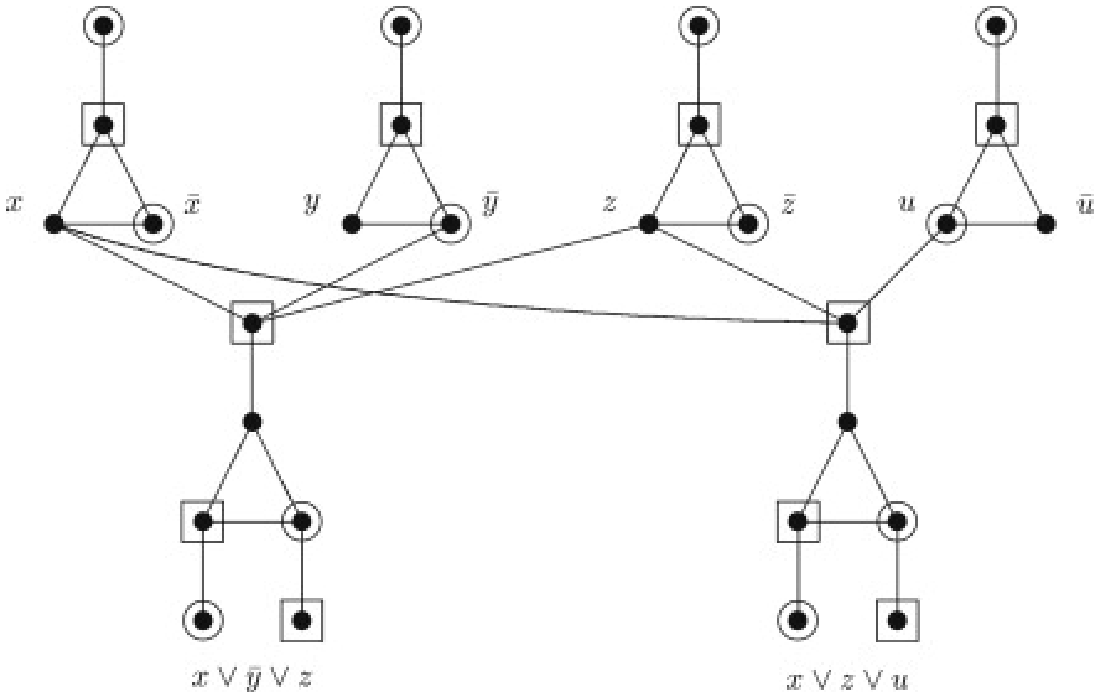
اگر متغییر x در جزء عبارت C باشد، رأس مشخص x را از G_x به رأس مشخص C از G_C وصل می‌کنیم.(برای مثال شکل را ببینید که در آن $\{x \vee \bar{y} \vee z, x \vee z \vee u\}$ $(\mathcal{C} =$ فرض کنید G گراف حاصل را نشان می‌دهد.
فرض کنید $\mathcal{C}$، n متغیر بولی را بکار برد و شامل m جزء است. توجه کنید که مرتبه G، $4n+6m$ است. اگر $\mathcal{C}$ مطلوب باشد آنگاه یک جایگزینی دقیق و مطلوب را برای $\mathcal{C}$ در نظر می‌گیریم.
انتخاب رأس آخر از هر جزء G_x و رأس متناظر با رأس واقعی و همچنین انتخاب رأس آخر متمایز از رأس C از هر جزء G_C و همسایگی رئوس آخر متمایز از C (بجز C)، مجموعه احاطه‌گری I



شکل ۴.۲: گراف جزء G_x



شکل ۵.۲: گراف جزء G_c



شکل ۶.۲: گراف G برای $\mathcal{C} = \{x \vee \bar{y} \vee z, x \vee z \vee u\}$

را از G نتیجه می‌دهد.
بعلاوه، انتخاب همسایگی رأس آخر در هر جزء G_x و انتخاب رأس C و دو رأسی که مجاور C نباشد یا در I باشد از G_C مجموعه احاطه‌گری مستقل G را از I نتیجه می‌دهد.
به عکس حال فرض می‌کنیم که G شامل دو مجموعه احاطه‌گر مستقل مجزا $I_۱$ و $I_۲$ است. چون در هر جزء G_C، دو رأس با فاصله ۲ از C لزوماً در $I_۱ \cup I_۲$ هست، لذا همسایگی C در G_C در $I_۱ \cup I_۲$ نیست. یعنی C با یکی از دو مجموعه $I_۱$ و $I_۲$ بوسیله رأسی که در G_C نیست احاطه شده است. بوضوح حداکثر یکی از دو رأس x و $\bar{x}$ در هر جزء G_x می‌تواند در $I_۱ \cup I_۲$ باشد. بنابراین رئوس واقع در $I_۱ \cup I_۲$ که متناظر با رئوس واقعی هستند یک جایگزینی دقیق و مطلوب را برای $\mathcal{C}$ نشان می‌دهند. بعلاوه مقدار حقیقی متغیر x برای اینکه x و $\bar{x}$ در $I_۱ \cup I_۲$ نباشد می‌تواند دلخواه اختیار شود. (دو مجموعه احاطه‌گری مستقل نشان داده شده در شکل ۶.۲ متناظر با قرارگیری نادرست x و y و z و قرارگیری درست u است.) اثبات کامل می‌شود. □

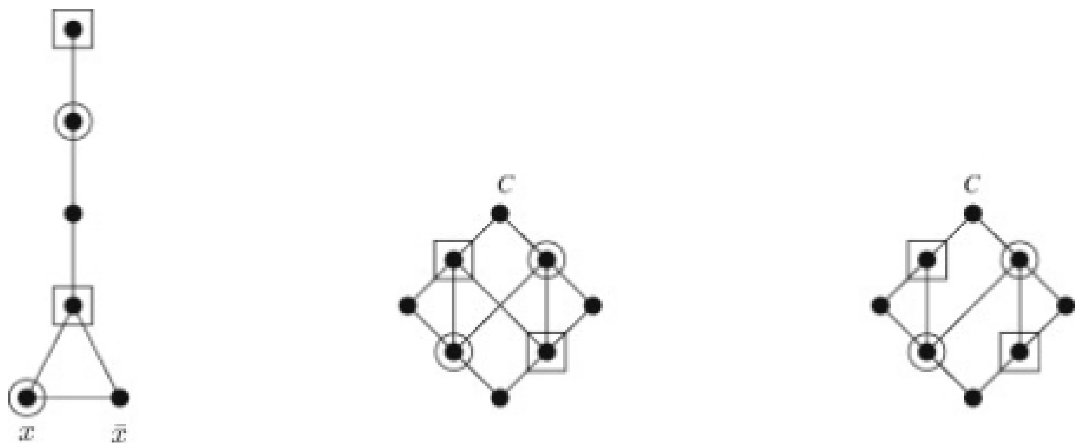
تعیین یک تساوی بین $\gamma\gamma(G)$ و $\gamma i(G)$ و یا بین $\gamma i(G)$ و $ii(G)$ سخت است.

قضیه ۴.۴.۲. گراف G داده شده است. دو مسأله زیر NP-hard است.

i) تعیین این‌که آیا $\gamma\gamma(G) = \gamma i(G)$ در G صدق می‌کند.

ii) تعیین این‌که آیا $\gamma i(G) = ii(G)$ در G صدق می‌کند.

برهان. یک $\mathcal{C}$ ۳SAT داده شده است. دو گراف G و G' را می‌سازیم به‌طوری‌که مرتبه چند جمله آن‌ها در اندازه $\mathcal{C}$ کران‌دار باشد به‌طوری‌که $\mathcal{C}$ می‌تواند راضی کننده باشد اگر و تنها اگر $\gamma\gamma(G) = \gamma i(G)$ اگر و تنها اگر $\gamma i(G') = ii(G')$.
برای ساخت G به صورت زیر عمل می‌کنیم. برای هر متغیر بولی x واقع در $\mathcal{C}$، کپی G_x از



شکل ۷.۲: گراف جزء G_x و G_c و G'_c

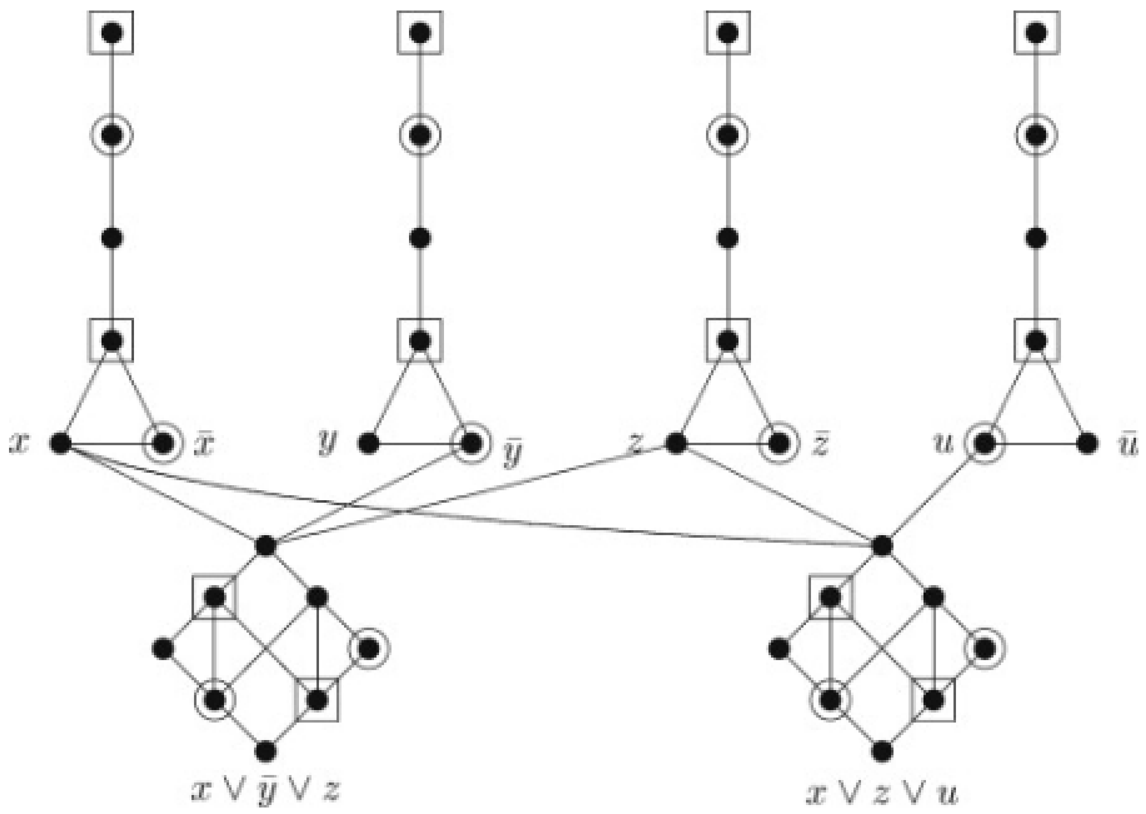
جزئی که در قسمت چپ شکل نشان داده شده معرفی می‌کنیم که شامل دو رأس مشخص x و $\bar{x}$ است. بعلاوه برای هر جزء C از $\mathcal{C}$، کپی G_C از رادار رنگی که در قسمت وسط شکل ۷.۲ نشان داده شده را معرفی می‌کنیم که شامل رأس مشخص C است.
اگر x واقعی در جزء C قرار گیرد، رأس مشخص x در G_x را به رأس مشخص c در G_c وصل می‌کنیم. (برای مثال شکل را ببنید که در آن $\mathcal{C} = \{x \vee \bar{y} \vee z, x \vee z \vee u\}$) برای گراف G' دقیقا به صورت فوق عمل می‌کنیم و بجای G_C از G'_C که در قسمت راست شکل ۷.۲ نشان داده شده استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{C}$، n متغیر بولی را بکار می‌گیرد و شامل m جزء است. توجه کنید که مرتبه G و G'، $۶n + ۸m$ است.
هر مجموعه احاطه‌گر از G شامل حداقل دو رأس از هر جزء G_x و دو رأس از هر جزء G_C است. به عکس انتخاب رئوسی از هر جزء مانند آن که در شکل نشان داده شده است دو مجموعه احاطه‌گر مجزا مینیمم را نتیجه می‌دهد. یعنی

$$\gamma\gamma(G) = ۲\gamma(G) = ۴n + ۴m$$

به طور مشابه

$$\gamma i(G') = ۲\gamma(G') = ۴n + ۴m$$

اگر $\mathcal{C}$ مطلوب باشد، یک جایگزینی دقیق و مطلوب را برای $\mathcal{C}$ در نظر می‌گیریم. دو مجموعه احاطه‌گر مجزای مینیمم که در فوق توصیف شد را انتخاب می‌کنیم به‌گونه‌ای که از هر جزء G_x،



شکل ۸.۲: گراف G برای $\mathcal{C} = \{x \vee \bar{y} \vee z, x \vee z \vee u\}$

رأس متناظر با رأس واقعی در یکی از دو مجموعه قرار گیرد. به‌علاوه از هر جزء G_C، رئوس را همانطور که در شکل نشان داده شده انتخاب می‌کنیم. در نتیجه دو مجموعه احاطه‌گر مجزای مینیمم داریم که یکی از آن‌ها مستقل است یعنی

$$\gamma\gamma(G) = \gamma i(G)$$

با استدلال مشابه داریم

$$\gamma i(G') = ii(G')$$

حال به‌عکس فرض می‌کنیم که G در $\gamma\gamma(G) = \gamma i(G)$ صدق می‌کند. فرض کنید D_1 و I_2 دو مجموعه احاطه‌گری مجزا باشند به‌طوری‌که I_2 مستقل است و

$$|D_1| + |I_2| = \gamma\gamma(G) = \gamma i(G) = 2\gamma(G)$$

یعنی D_1 و I_2 هر دو احاطه‌گر مینیمم هستند. با استدلال فوق هر یک از D_1 و I_2 شامل دقیقا دو رأس از هر جزء G_C هستند. به سادگی نتیجه می‌شود که رأس مشخص c در هر جزء G_C با یکی از مجموعه‌های D_1 و I_2 بوسیله رأسی که در G_C نیست احاطه می‌شود.
بعلاوه برای هر جزء G_x مجموعه $D_1 \cup I_2$ شامل حداکثر یکی از دو رأس مشخص x و $\bar{x}$ است.

بنابراین رئوس واقع در $D_1 \cup I_2$ که متناظر با رئوس واقعی هستند یک جایگزینی دقیق و مطلوب را برای $\mathcal{C}$ نشان می‌دهد. (دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم که در شکل ۸.۲ نشان داده شده است با قرارگیری نادرست x و y و z و قرارگیری درست u متناظر است) بعلاوه اگر فرض کنیم که G' در $\gamma i(G') = ii(G')$ صدق می‌کند بطور مشابه نتیجه می‌شود که $\mathcal{C}$ مطلوب است و اثبات کامل می‌شود. $\square$

در [۱۹] نشان داده شده است که محاسبه $\gamma\gamma(G)$، NP-hard است حتی وقتی که به گراف‌های وتری محدود شود. در نتیجه بعدی اثبات می‌کنیم که تشخیص گراف‌های دو قسمتی G با $\gamma\gamma(G) \leq K$ از گراف‌های دو قسمتی با $ii(G) > k$ مسأله‌ای NP-hard است. بلافاصله نتیجه می‌شود که تعیین گراف دو قسمتی G و عدد صحیح K داده شده NP-Complete است.

i) اگر G دارای دو مجموعه احاطه‌گر مجزا D_1 و D_2 است که

$$|D_1| + |D_2| \leq k$$

ii) اگر G دارای دو مجموعه احاطه‌گر مجزا D_1 و D_2 است که

$$|D_1| + |D_2| \leq k$$

به‌طوری‌که D_2 مستقل است.

iii) اگر G دارای دو مجموعه احاطه‌گر مستقل مجزا D_1 و D_2 است که

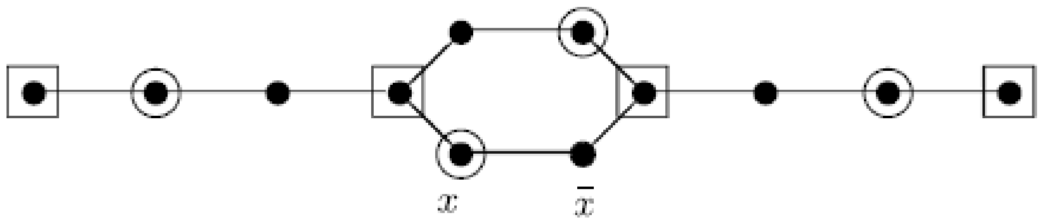
$$|D_1| + |D_2| \leq k$$

قضیه ۵.۴.۲. تعیین $\gamma\gamma(G) \leq k$ یا $ii(G) > k$ برای گراف دو بخشی داده شده G، NP-hard است.

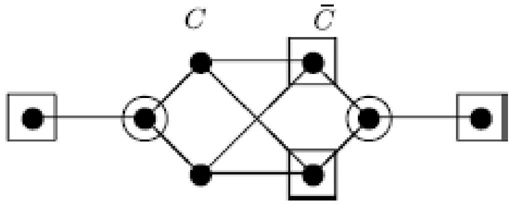
برهان. هر سه مسأله تصمیم به وضوح در NP است. یک مثل $\mathcal{C}$ داده شده است. گراف G را طوری می‌سازیم که رتبه چند جمله آن در اندازه $\mathcal{C}$ کران‌دار باشد و عدد صحیح kای که از نظر چند جمله‌ای در اندازه $\mathcal{C}$ کران‌دار است تعیین می‌کنیم به‌طوری‌که اگر $\mathcal{C}$ مطلوب باشد آنگاه $ii(G) \leq k$ اگر $\gamma\gamma(G) \leq k$ باشد، آنگاه $\mathcal{C}$ می‌تواند برقرار باشد. بدین ترتیب عبارت مطلوب نتیجه می‌شود.

برای هر متغیر بولی x واقع در $\mathcal{C}$ کپی G_x را ازگراف جزء نشان داده شده درشکل ۹.۲ معرفی می‌کنیم که شامل دو رأس مشخص x و $\bar{x}$ است. بعلاوه برای هر جزء از $\mathcal{C}$ یک کپی G_C از رادار رنگی نشان داده شده در شکل ۱۰.۲ معرفی می‌کنیم که شامل دو رأس مشخص و $\bar{C}$ است.

اگر متغیر نامنفی x در جزء c قرار گیرد، رأس مشخص x از G_x را به رأس مشخص C از G_C وصل می‌کنیم. به طور مشابه اگر متغیر نامنفی $\bar{x}$ در C قرار گیرد، رأس مشخص $\bar{x}$ از G_x را به رأس مشخص $\bar{C}$ از G_C وصل می‌کنیم. توجه کنید که این روش افزودن یال به پیوند مجزای



شکل ۹.۲: گراف جزء G_x



شکل ۱۰.۲: گراف جزء G_c

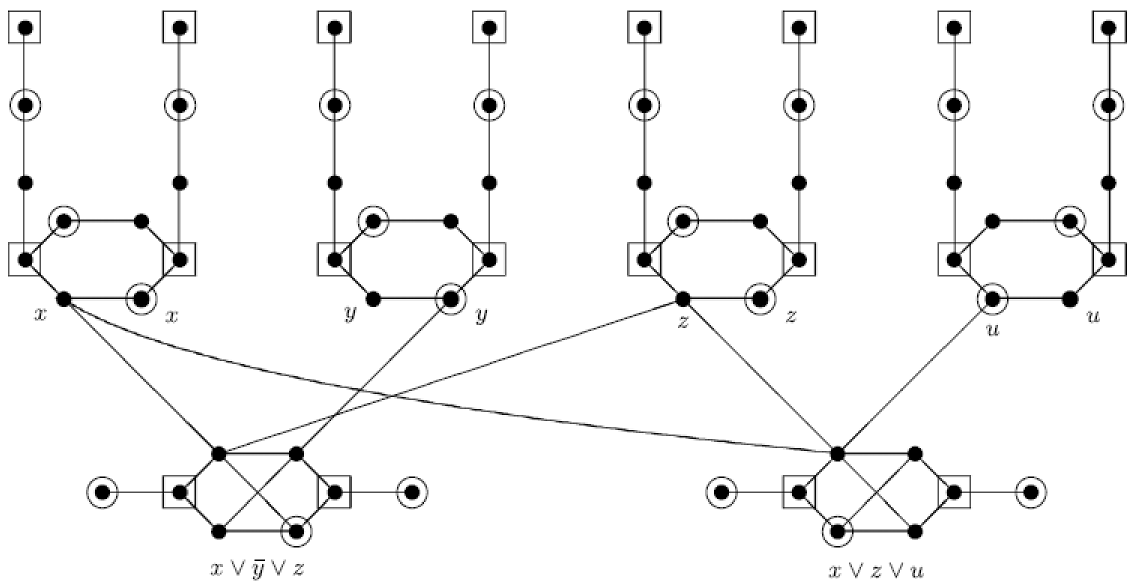
جزءهای دو قسمتی یک گراف دو قسمتی بدست می‌آید. (برای مثال شکل را ببینید که درآن $\mathcal{C} = \{x \vee \bar{y} \vee z, x \vee z \vee u\}$ است.) فرض کنید G گراف حاصل را نشان می‌دهد. فرض کنید $\mathcal{C}$، n متغیر بولی را بکار می‌برد و شامل m جزء است. توجه کنید که رتبه G، $۱۲n+۸m$ است.
قرار دهید $K = ۸n + ۵m$.
ابتدا فرض کنیم $\mathcal{C}$ مطلوب است و نشان می‌دهیم چگونه دو مجموعه احاطه‌گر مجزا $D_۱$ و $D_۲$ از G را بدست می‌آوریم به‌طوری‌که

$$|D_۱| + |D_۲| \leq K.$$

یک جایگزینی دقیق و مطلوب برای $\mathcal{C}$ در نظر بگیرید. در هر جزء G_x، رئوسی را برای مجموعه‌های $D_۱$ و $D_۲$ به صورتی که در قسمت چپ شکل نشان داده شده یا بازتاب عکس آن را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $D_۱$ شامل رأس x یا $\bar{x}$ باشد که متناظر با رأس واقعی است.
چون جایگزینی دقیق، مطلوب است، حداقل یکی از رأس‌های C یا $\bar{C}$ از هر جزء G_C در $D_۱$ با رأسی که در $V(G_C)$ نیست احاطه می‌شود. بدین ترتیب دو مجموعه $D_۱$ و $D_۲$ همانطور که در شکل نشان داده شده، با استفاده از هر مجموع پنج رأس از هر جزء G_C می‌تواند بسط داده شود. بنابراین

$$|D_۱| + |D_۲| = K.$$

حال فرض کنیم G دارای دو مجموعه احاطه‌گر مجزا $D_۱$ و $D_۲$ است. به‌طوری‌که $|D_۱|+|D_۲| \leq K$. در هر جزء G_x، مجموعه $V(G_x) \cap (D_۱ \cup D_۲)$ شامل حداقل هشت رأس برای احاطه کردن



شکل ۱۱.۲: گراف G برای $\mathcal{C} = \{x \vee \bar{y} \vee z, x \vee z \vee u\}$

ده رأس روی مسیر $G_x - \{x, \bar{x}\}$ است. بعلاوه اگر $V(G_x) \cap (D_1 \cup D_2)$ دقیقا شامل هشت رأس باشد، آنگاه حداقل یکی از رئوس x و $\bar{x}$ در $D_1 \cup D_2$ قرار ندارد.
اگر برای چند جزء G_c، c و $\bar{c}$ با رأسی از $D_1 \cup D_2$ که در $V(G_x)$ قرار ندارد احاطه شود آنگاه $V(G_C) \cap (D_1 \cup D_2)$ حداقل شامل شش رأس است. (یک آرایش ممکن (شدنی) در قسمت راست شکل نشان داده شده است.)
بعلاوه اگر برای چند جزء G_C، یکی از c و $\bar{C}$ و یا هر دو با رئوسی از $D_1 \cup D_2$ که در $V(G_C)$ نیست احاطه شود آنگاه $V(G_C) \cap (D_1 \cup D_2)$ حداقل شامل پنج رأس است. چون $|D_1| + |D_2| \leq 8n + 5m$، نتیجه می‌شود که برای هر جزء G_x حداکثر یکی از رئوس x و $\bar{x}$ در $D_1 \cup D_2$ قرار می‌گیرد و برای هر جزء G_C، یکی از رئوس C و $\bar{C}$ با رأسی از $D_1 \cup D_2$ که در $V(G_C)$ قرار ندارد احاطه می‌شود.
بنابراین رئوس متناظر با رئوس واقعی که در $D_1 \cup D_2$ قرار دارند یک جایگزینی دقیق و مطلوب را برای $\mathcal{C}$ نشان می‌دهد و اثبات کامل می‌شود. □

۵.۲ نتایج ساختاری برای درخت‌ها

قضیه ۱.۵.۲. برای هر درخت T از مرتبه $n \geq 2$، $\gamma\gamma(T) = ii(T)$

برهان. فرض کنید U یک اجتماع از مجموعه‌های احاطه‌گر مجزا D_1 و D_2 از درخت T باشند. فرض کنید یال wv در $E(T)$ باشد به‌طوری‌که $\{w, v\}$ یک زیر مجموعه از U باشد. همچنین فرض کنید که دو رأس w و v یک مجموعه احاطه‌گر باشند ، می‌گوییم D_1 به‌طوری‌که $deg(w) \geq$

$deg(v) \geq 2$ و ۲ فرض کنید T_w یک زیر درخت از $T - wv$، شامل w باشد. و فرض کنید T_v یک زیر درخت از دیگر عناصر از T_{wv} باشد. فرض کنید

$$D_1^* = (D_1 \cap T_v) \cup (D_2 \cap T_w)$$

و فرض کنید

$$D_2^* = (D_2 \cap T_v) \cup (D_1 \cap T_w)$$

آن‌گاه (D_1^*, D_2^*) یک $\gamma\gamma$ـ مجموعه هستند.
در T_v، هر یال که در (D_1, D_1) بوده (D_1, D_1) می‌ماند. هر یال که در (D_1, D_2) بوده (D_1, D_2) می‌ماند.درحالی‌که در T_w، هر یال (D_1, D_1) به (D_2, D_2) تبدیل می‌شود. و هر یال (D_1, D_2) به (D_2, D_1) تبدیل می‌شود. با انجام این تبدیل، عدد تام از یال‌های (D_i, D_i) به یک کاهش پیدا می‌کند. در ادامه این تبدیل (روشی)، دو مجموعه احاطه‌گر مجزا پیدا خواهیم کرد به‌طوری‌که مستقل از هم هستند که جمع اندازه‌ی آن‌ها $\gamma\gamma(T)$ است. □

قضیه ۲.۵.۲. اگر $T = (V, E)$ یک درخت از مرتبه n باشد آنگاه

$$\gamma\gamma(T) \geq \frac{2(n+1)}{3},$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر V را بتوان به دو مجموعه D و R افراز کرد به‌طوری‌که D یک تطابق کامل باشدو تمام اعضای R در T مستقل واز درجه ۲ باشد.

برهان. فرض کنید T درختی از مرتبه n باشد و D_1 و D_2 دو مجموعه احاطه‌گر مجزا از T باشند که $\gamma\gamma(T) = |D_1| + |D_2|$ فرض می‌کنیم $|D_1| \geq |D_2|$
قرار دهید $D = D_1 \cup D_2$ و $R = V - D$. چون هر رأس R، همسایه در D_1 و همسایه در D_2 دارد و هر رأس D_1 همسایه در D_2 دارد لذا از تعداد یال‌های T داریم

$$n - 1 \geq 2|R| + |D_1| \geq 2|R| + \frac{|D|}{2} = 2(n - \gamma\gamma(T)) + \frac{\gamma\gamma(T)}{2}.$$

که نتیجه می‌دهد

$$\gamma\gamma(T) \geq \frac{2(n+1)}{3}.$$

اگر

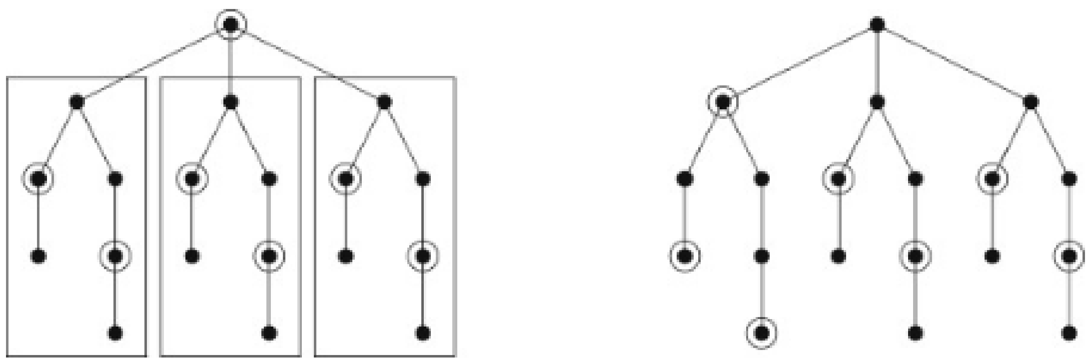
$$\gamma\gamma(T) \geq \frac{2(n+1)}{3},$$

آنگاه تساوی روی همه زنجیره نامساوی فوق قرار می‌گیرد. از این نتیجه می‌شود که $|D_1| = |D_2|$، هر رأس در R دقیقا یک همسایه در D_1 و یک همسایه در D_2 دارد، هر رأس از D_1 دقیقا یک همسایه در D_2 دارد و سه مجموعه D_1 و D_2 و R افراز هستند. چون هر رأس در D_2 حداقل یک همسایه در D_1 دارد، مجموعه D موجب یک تطابق کامل است و ساختار T همان‌گونه است که در حکم نتیجه بیان شده است.

به عکس فرض می‌کنیم که بتوان V را به دو مجموعه D و R افراز کرد که D یک تطابق کامل را ایجاد می‌کند و R یک مجموعه مستقل از تمام رئوس درجه ۲، T است. با استقرا بر روی مرتبه n از درخت T ثابت می‌کنیم

$$\gamma\gamma(T) = \frac{۲(n+۱)}{۳}.$$

به ویژه ثابت می‌کنیم D را می‌توان به دو مجموعه $D_۱$ و $D_۲$ افراز کنیم که هر دو احاطه‌گری باشند. توجه کنید که با توجه به فرضیات مجموعه‌های $D_۱$ و $D_۲$ در $|D_۱| + |D_۲| = \frac{۲(n+۱)}{۳}$ صدق می‌کند. اگر $n = ۲$، حکم بدیهی است. لذا فرض می‌کنیم $n \geq ۳$.
فرض کنید uv یال متناظر با یک رأس آخر از درخت باشد که ناشی از ادغام همه یال‌های تطابق کامل ایجاد شده توسط D در درخت T است.
توجه کنید که بعد از ادغام نیز همه رئوس در R هنوز از درجه ۲ هستند. یعنی ما می‌توانیم فرض کنیم که u یک رأس آخر از T و v در T از درجه ۲ است. فرض کنید w یک همسایه متمایز از u برای v باشد. به وضوح $w \in R$.



مجموعه رأسی $V \setminus \{u,v,w\}$ از درخت $T' = T - \{u,v,w\}$ می‌تواند به دو مجموعه‌ی $D' = D \setminus \{u,v\}$ و $R' = R \setminus \{w\}$ تقسیم شود که D' یک تطابق کامل ایجاد می‌کند و R' یک مجموعه مستقل از همه‌ی رئوس است که در T درجه ۲ دارند.
بنابراین با استقرا D' می‌تواند به دو مجموعه مستقل $D'_۱$ و $D'_۲$ تقسیم شود که هر دو مجموعه در T احاطه‌گری هستند. می‌توان فرض کرد که همسایه w که متمایز از v باشد متعلق به $D'_۱$ است. حال دو مجموعه $D_۱ = D'_۱ \cup \{u\}$ و $D_۲ = D'_۲ \cup \{v\}$ در T و قسمت D مستقل و احاطه‌گری هستند و اثبات کامل می‌شود. $\square$

برای اینکه درخت T در $\gamma\gamma(T) = ۲\gamma(T)$ صدق کند یک شرط لازم و بدیهی این است که هیچ رأس T متعلق به هیچ مجموعه احاطه‌گر مینیمم از T نباشد. مثالی را بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد این شرط کافی نیست.

ملاحظه ۱.۵.۲. درخت‌های T وجود دارند که در آن هیچ رأسی متعلق به مجموعه احاطه‌گر مینیمم از T نیست که دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم مجزا از هم ندارند یعنی

$$\gamma\gamma(T) > ۲\gamma(T)$$

برهان. دو کپی درخت که در شکل بالا نشان داده شده است دارای عدد احاطه‌گر ۷ هستند و دو مجموعه احاطه‌گری مینیمم نشان داده شده نشان می‌دهند که هیچ رأسی به هیچ مجموعه احاطه‌گر مینیمم از T تعلق ندارد . از طرف دیگر به سادگی مشاهده می‌شود که اجتماع هر دو مجموعه احاطه‌گری مجزا از T حداقل شامل ۵ رأس در هر مستطیل هستند که این یعنی یکی از مجموعه‌ها نمی‌تواند مینیمم باشد. □

فصل ۳

مجموعه احاطه‌گر تام و احاطه‌گر تام معکوس

۱.۳ عدد احاطه‌گری تام

در فصل قبل مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها را مطرح کردیم. اینک این مفهوم را به‌طور گسترده‌تر برای تمام گراف G تعمیم می‌دهیم، وآن را احاطه‌گر تام [۱] می‌نامیم.
در سال ۱۹۸۰ به دنبال حل مسأله ۵–وزیر، هدتنیمی [۲] ، داوز [۳] ، کوکاین [۴] مسأله‌ی احاطه‌گری تام را در مقاله‌ای تحت عنوان(احاطه‌گری تام در گراف) [۱۲] ، [۱۳]و [۱۴] مطرح کردند و امروزه به طور گسترده در نظریه‌ی گراف ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.
از جمله کاربردهای آن می‌توان برای ساخت مناطقی از شهر، برای ایجاد فروشگاه اشاره کرد، به طوری‌که علاوه بر امکان دسترسی همه‌ی مردم شهر به فروشگاه، فروشگاه‌ها، خود نیز به یک‌دیگر دسترسی داشته باشند. [۳] و [۳]

ملاحظه ۱.۱.۳. برای گراف کامل K_p با p رأس داریم: $\gamma_t(K_p) = 2$.

---

[۱] Total domination
[۲] Hedetnemi
[۳] Dawes
[۴] t

برای مسیر P_p با p رأس داریم:

$$\gamma_t(P_p)=\begin{cases}\lceil\frac{p}{۲}\rceil & p=۴n \quad or \quad ۴n-۱\\ \left\lceil\frac{(p+۱)}{۲}\right\rceil & O.W \quad .\end{cases}$$

برای دور C_p با p رأس داریم:

$$\gamma_t(C_p)=\begin{cases}\lceil\frac{p}{۲}\rceil & p=۴n \quad or \quad ۴n-۱\\ \left\lceil\frac{(p+۱)}{۲}\right\rceil & O.W \quad .\end{cases}$$

برای گراف چرخ W_p با p رأس داریم: $\gamma_t(W_p)=۲$
برای گراف دوبخشی کامل $K_{m,n}$ ، $\gamma_t(K_{m,n})=۲$ داریم:

قضیه ۳.۱.۱. برای هر گراف G ، $\gamma_t(G)\geq ۲$.

قضیه ۳.۱.۲. برای هر گراف G ، $\gamma(G)\leq\gamma_t(G)$.

قضیه ۳.۱.۳. اگر G گراف همبند از مرتبه n و بدون رأس منفرد باشد و $\Delta(G)<n-۱$ آنگاه

$$\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})\leq n+۲ \tag{۳.۱}$$

و برابری را داریم اگر و فقط اگر G یا $\bar{G}$ برابر $mk_۲$ باشند.

توجه شود در قضیه فوق شرط $\Delta(G)<n-۱$ معادل این است که G و $\bar{G}$ از مرتبه حداقل ۲ باشد. حال به بیان حدسی در مورد کران برای مجموعه عدد احاطه‌گری جمعی گراف G و مکمل آن می‌پردازیم.

ملاحظه ۳.۱.۲. اگر G گراف همبند از مرتبه n و $\gamma_t(G),\gamma_t(\bar{G})\geq ۴$، آنگاه

$$\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})\leq n-\Delta+\delta-۱.$$

قضیه ۳.۱.۴. اگر G گراف همبند ساده از مرتبه $n\geq ۱۰$ باشد و $\delta\geq n-۵$ آنگاه

$$\gamma_t(G)\leq ۳.$$

کران $\gamma_t(G)\leq ۳$. برای گراف‌هایی با مرتبه کمتر از ۱۰ با شرط $\delta\geq\left[\frac{n}{۲}\right]$ برقرار است بنابراین قضیه زیر را داریم:

قضیه ۳.۱.۵. اگر G گراف همبند ساده از مرتبه $۲\leq n<۹$ باشد و $\delta\geq\left[\frac{n}{۲}\right]$ آنگاه

$$\gamma_t(G)\leq ۳.$$

قضیه ۶.۱.۳. اگر G گراف همبند با رئوس $p \geqslant ۳$ باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t(G) \leqslant \frac{۲p}{۳}.$$

برهان. فرض کنید Y کوچکترین مجموعه احاطه‌گر تام باشد، فرض کنید $N(x)$، نشان‌دهنده‌ی مجموعه رئوس همسایه با رأس x باشد. و فرض کنید $G[U]$ نشانٔهنده‌ی یک زیر گراف $U \subseteq V$. هر $y \in Y$ حداقل از دو قانون زیر پیروی می کند

۱. $P_۱$: یک z وجود دارد که $z \in V - Y$ به‌طوری‌که $N(z) \cap Y = y$

۲. $P_۲$: $G[Y - \{y\}]$ شامل یک رأس تنها است.

$$A \cup B = \{y \in Y | \text{شرط } p_۱ \text{ را داشته باشد } y\}$$

و B، مجموعه‌ای که رأس تنها از $G[A \cup B]$ را دارا می‌باشد.

بنابراین فرض کنید C مجموعه مینیمم از رئوس $Y - (A \cup B)$ است به‌طوری‌که هر رأس از B، با یک رأس از C مجاور باشد. بنابراین $|C| \leqslant |B|$ در نهایت فرض کنید $D = Y - (A \cup B \cup C)$. این نشان می دهد که D $|D| = \gamma_t(G[D])$ و از این‌رو $G[D] = mK_۲(m \geqslant ۰)$. فرض کنید $a_ib_i, i = ۱, \ldots, m$ باشد. بدون از دست دادن کلیت هر a_i با یک رأس x_i مجاور است.اگر $x_i \in A \cup B \cup C$ آن‌گاه $Y - b_i$ کوچکترین مجموعه احاطه‌گر تام از Y خواهد بود. از این‌رو $x_i \in V - Y$. اگر $x_i = x_j$ برای $i \neq j$، آن‌گاه $(Y - \{b_i, b_j\}) \cup \{x_i\}$ به یک تناقض مشابه می‌رسیم. با توجه به تعریف D هر x_i حداقل با دو رأس از Y مجاور است. در حالی‌که در ویژگی $P_۱$، $|A \cup B|$ وجود دارد که کمترین رئوس از $V - Y$ است. به‌طوری‌که دقیقاً با یک رأس از Y متصل است. بنابراین

$$|A \cup B| + |\{x_i | i = ۱, \ldots, m\}| \leqslant |V - Y|$$

.

$$|A| + |B| + m \leqslant p - \gamma_t(G)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\gamma_t(G) &= |A| + |B| + |C| + |D| \\
&= (|A| + |B| + m) + (|C| + m) \\
&\leqslant ۲(|A| + |B| + m) \qquad (|C| \leqslant |A| + |B|) \\
&\leqslant ۲(p - \gamma_{t(G)}) \qquad (۱)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\gamma_t(G) \leqslant \frac{۲p}{۳}$$

.

□

قضیه ۷.۱.۳. ۱. اگر گراف G دارای p رأس باشد و رأس تنها نداشته باشد ، آن‌گاه

$$\gamma_{t(G)} \leqslant p - \triangle(G) + ۱$$

۲. اگر گراف G همبند باشد و $\triangle(G) < p - ۱$، آن‌گاه

$$\gamma_t(G) \leqslant p - \triangle(G).$$

برهان. (۱) فرض کنید رأس v با درجه $\triangle(G)$ باشد و فرض کنید

$$X = V - (\{v\} \cup N(v)).$$

اگر $X = \emptyset$، $\triangle(G) = p - ۱$ و $\gamma_t(G) = ۲ = p - \triangle(G) + ۱$. بنابراین فرض کنید $X \neq \emptyset$ و فرض کنید S یک مجموعه مجزااز $G[X]$ باشد. اگر $S = \emptyset$ و $X \cup \{v\} \cup \{\lambda\}$، در حالی‌که $\lambda \in N(v)$ یک مجموعه احاطه‌گر تام با اندازه‌ی $p - \triangle(G) + ۱$ است. اگر $S \neq \emptyset$، طبق فرض هر $s \in S$ با یک رأس از $N(v)$ مجاور است و فرض کنیم مجموعه $M(S)$ کوچکترین مجموعه شامل $N(v)$ باشد به‌طوری‌که هر $s \in S$ با یک عضو از $M(S)$ مجاور است و بنابراین

$$|M(S)| \leqslant |S|$$

آن‌گاه $\{v\} \cup M(S) \cup (X - S)$ یک مجموعه احاطه‌گر تام است و

$$\gamma_t(G) \leqslant ۱ + |S| + |X - S| = ۱ + |X| = p - \triangle(G)$$

□

برهان. ۲ فرض کنید v و X و S مجموعه های تعریف شده در اثبات قسمت(۱) ۱.۳ باشند. از این‌رو $\Delta(G) < p - ۱$ و $X \neq \emptyset$. اگر $S = \emptyset$ و $x \in X$ با رأس $y \in N(v)$ همسایه باشد. فرض کنید C و Δ' به‌ترتیب مجموعه رأس و ماکزیمم درجه از عنصر $G[X]$ به‌طوری‌که شامل x باشد، باشند. بنابر(۱) ۱.۳، $G[C]$ دارای یک مجموعه احاطه‌گر تام Y با اندازه بیش‌تر از $|C| - \Delta' + ۱$ باشد. اگر $\Delta' = ۱$ آن‌گاه $|C| = ۲$ ومجموعه $(X - C) \cup \{x, y, z\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام در G باشد و

$$\gamma_t(G) \leq ۳ + (p - \Delta(G) - ۱) - ۲ = p - \Delta(G)$$

اگر $\Delta' \geq ۱$ ، آن‌گاه مجموعه $\{u, y\} \cup Y(X - C)$ یک مجموعه احاطه‌گر تام در G باشد ازاین‌رو

$$\begin{aligned}\gamma_t(G) &\leq ۲ + (|C| - \Delta' + ۱) + (p - \Delta(G) - ۱ - |C|)\\ &= p - \Delta(G) + (۲ - \Delta')\\ &= p - \Delta(G)\end{aligned}$$

حالت $S \neq \emptyset$ به‌صورت مشابه اثبات ۱.۳ ، ثابت می‌شود.

□

۲.۳ کران برای $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})$

در این بخش ثابت می‌کنیم اگر G گراف همبند ساده از مرتبه حداقل ۴ و متفاوت از C_5 باشد به‌طوری‌که مکمل آن مرتبه حداقل ۳ را دارا باشد، آنگاه $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G}) \leq \frac{2n}{3}+2$ و گراف‌های با این خاصیت را معرفی می‌کنیم. با دو لم شروع می‌کنیم.

لم ۱.۲.۳. [۱] فرض کنید G گراف همبند ساده از مرتبه $n \geq 4$ باشد

الف) اگر $\gamma_t(G), \gamma_t(\bar{G}) \geq 3$، آنگاه $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G}) \leq \min\{\delta, n-\Delta-1\}+4$،

ب) اگر $\gamma_t(G), \gamma_t(\bar{G}) \geq 4$، آنگاه $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G}) \leq \min\{\delta, n-\Delta-1\}+3$،

ج) اگر $\gamma_t(G), \gamma_t(\bar{G}) \geq 4$ و $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G}) = \delta+3$، آنگاه $\gamma_t(G)=4$.

برهان. فرض کنید $\gamma_t(G), \gamma_t(\bar{G}) \geq 3$ و رأس x از درجه δ در G باشد و $X = V \setminus N[x]$، از آنجا که $\gamma_t(G) > 2$ بنابراین $X \neq \varnothing$.

الف) اگر برای $y \in X$، $N(x) \cap N(y) = \varnothing$، آنگاه در $\bar{G}$، x، X را احاطه می‌کند و y، $N(x)$ را احاطه می‌کند، بنابراین $\{x,y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام در است که این تناقض است، بنابراین برای همه‌ی $y \in X$،

$$N(x) \cap N(y) \neq \varnothing \tag{۲.۳}$$

از این‌رو $N(x)$، x را احاطه می‌کند. فرض کنید F_1 زیر مجموعه ماکزیمال از $N(x)$ باشد که همه‌ی رئوس X را احاطه نمی‌کند و

$$E_2 = X \setminus E_1, \qquad E_1 = X \cap (\cup_{y\in F_1} N(y)), \qquad F_2 = N(x) \setminus F_1$$

با توجه به رابطه (۲.۳) E_2 و F_2 ناتهی هستند. با توجه به تعریف F_1 هر رأس $y \in F_2$، E_2 را احاطه می‌کند و $F_1 \cup \{x,y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام از G است. از این‌رو

$$\gamma_t(G) \leq |F_1|+2 \tag{۳.۳}$$

از یک طرف اگر $y \in N(x)$، آنگاه X در $N(y)$ محصور نمی‌شود، از طرف دیگر $\{x,y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام از G است. بنابراین برای هر رأس $y \in F_2$، یک رأس $f(y) \in E_1$ وجود دارد به‌طوری‌که یال $yf(y) \in E(\bar{G})$.

حال در $\bar{G}$ مجموعه $\{f(y) | y \in F_2\}$، f_2 را احاطه می‌کند و هر $z \in E_2$، F_1 را احاطه می‌کند و x، X را احاطه می‌کند. بنابراین $\{f(y)|y \in F_2\} \cup \{x,z\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام در $\bar{G}$ است و

$$\gamma_t(\bar{G}) \leq |F_1|+2 \tag{۴.۳}$$

با توجه به روابط (۳.۳) و (۴.۳)، $\gamma_t(G) + \gamma_t(\bar{G}) \leq |F_1| + |F_2| + 4 = \delta + 4$.
با توجه به تقارن بین G و $\bar{G}$ و از آنجا که $\delta)\bar{G} = n - \Delta(G) + 3$. بنابراین

$$\gamma_t(G) + \gamma_t(\bar{G}) \geq 4 + \min\{\delta, n - \Delta - 1\}.$$

ب) قرار دهید $\gamma_t(G), \gamma_t(\bar{G}) \geq 4$، اگر رأس $z_1 \in E_1$ هیچ همسایه‌ای نداشته باشد، آنگاه در $\bar{G}$، z_1، P_2 را احاطه می‌کند و برای هر $z_2 \in E_2$، F_1 را احاطه می‌کند و همچنین x، X را احاطه می‌کند. بنابراین $\{z_1, z_2, x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام در $\bar{G}$ است که یک تناقض است.
بنابراین F_2، E_1 را در G احاطه می‌کند. حال فرض کنید F_3 یک زیرمجموعه ماکسیمال F_2 باشد و فرض کنید F_3، E_1 را در G احاطه نکند. بنابراین $F_2 \neq F_3$. فرض کنید $f(y)$ رأس مرتبط با هر رأس $y \in F_2$ باشد، با توجه به ماکزیمال بودن F_3، برای هر $y \in F_2 \backslash F_3$، $F_3 \cup \{x, y\}$ یک مجموعه احاطه گر تام در G است. از این‌رو

$$4 \leq \gamma_t(G) \leq |F_3| + 2. \tag{۵.۳}$$

فرض کنید z_1 که یک رأس از E_1 در G است، به‌وسیله F_3 احاطه نشود. بنابراین z_1، F_3 را در $\bar{G}$ احاطه می‌کند و z_2، F_1 را احاطه می‌کند و x، X را احاطه می‌کند و مجموعه $\{f(y)|y \in F_2 \backslash F_3\}$، $F_2 \setminus F_3$ را احاطه می‌کند. بنابراین $\{z_1, z_2, x\} \cup \{f(y)|y \in F_2 \setminus F_3\}$ یک γ_tـ مجموعه در $\bar{G}$ است و

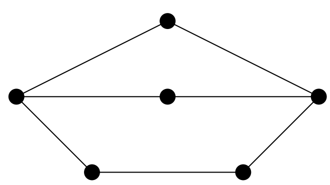
$$\gamma_t(G) \leq |F_2 \setminus F_3| + 3. \tag{۶.۳}$$

از (۳.۳) و (۵.۳) و (۶.۳) نتیجه می‌گیریم:

$$\gamma_t(G) + \gamma_t(\bar{G}) \leq |F_1| + |F_2| - |F_3| + 5 \leq \delta + 3.$$

و همچنین داریم: $\gamma_t(G) + \gamma_t(\bar{G}) \leq 3 + \delta(\bar{G}) = 3 + (n - \Delta - 1)$ اگر در رابطه (۶.۳) تساوی داشته باشیم، آنگاه $|F_2| = 2$ و با توجه به رابطه (۵.۳)، $\gamma_t(G) = 4$. به طور مشابه اگر $\gamma_t(G) + \gamma_t(\bar{G}) = \delta(\bar{G}) + 3$، آنگاه $\gamma_t(\bar{G}) = 4$. □

مثال ۱.۲.۳. شکل دو گراف G و $\bar{G}$ از مرتبه ۶ را نشان می‌دهد که در هر دو γ_t برابر ۳ است و در نامساوی (الف) لم ۱.۲.۳ صدق می‌کند.



نتیجه ۱.۲.۳. [۱] اگر گراف ساده G از مرتبه $n\geq ۴$ باشد و $\gamma_t(G),\gamma_t(\bar{G})\geq ۳$ آنگاه

$$\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})\leq\left\lceil\frac{n+۷}{۲}\right\rceil$$

برهان. با توجه به لم قبل داریم: $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})\leq\left\lceil\frac{(\delta+۴)+(n-\Delta+۳)}{۲}\right\rceil\leq\left\lceil\frac{n+۷}{۲}\right\rceil$ توجه کنید تساوی را هنگامی داریم که G منتظم باشد یا G از مرتبه زوج باشد و در رابطه $\delta=\Delta-۱$ صدق کند. □

نتیجه ۲.۲.۳. [۱] اگر G گرافی با $\gamma_t(G),\gamma_t(\bar{G})\geq ۴$ باشد آنگاه

$$\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})\leq n-\Delta+\delta-۳$$

برهان. با توجه به قسمت (ب) لم قبل داریم، $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})\leq n-\Delta+\delta+۲$ و $\delta\geq ۲$. بنابراین $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})\leq n-\Delta+\delta-۳$ □

لم ۲.۲.۳. [۱] اگر G گراف از مرتبه $n\geq ۴$ باشد و مطابق شکل باشد یا هر گراف kمولفه‌ای $(k\geq ۱)$ یکریخت با $C_۶$ باشد، آنگاه

$$\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})=\frac{۲n}{۳}+۲ \qquad (۷.۳)$$

برهان. تساوی (۷.۳) در گراف شکل صدق می‌کند. اگر G یکریخت با $C_۶$ باشد، آنگاه $\gamma_t(G)=\frac{۲n}{۳}$ و $\gamma_t(\bar{G})=۲$. بنابراین تساوی (۷.۳) برقرار است.
حال اگر G ناهمبند باشد و هر کدام از مولفه‌های همبندی یکریخت با $C_۶$ باشند، آنگاه $\gamma_t(\bar{G})=۲$ و $\gamma_t(G)=\sum_{i=۱}^{k}\gamma_t(G_i)=\sum_{i=۱}^{k}\frac{۲|V(G_i)|}{۳}=\frac{۲n}{۳}$، بنابراین

$$\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})=\frac{۲n}{۳}+۲$$

. □

قضیه ۱.۲.۳. [۱] اگر G گراف ساده از مرتبه $n\geq ۴$ و متفاوت از $C_۵$ باشد، به‌طوری‌که هر مولفه‌ی G و $\bar{G}$ از مرتبه $n\geq ۳$ باشد، آنگاه

$$\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})\leq\frac{۲n}{۳}+۲ \qquad (۸.۳)$$

تساوی را زمانی داریم، اگر وفقط اگر G یا $\bar{G}$ گراف شکل باشد یا هر گرافی که هر مولفه آن یکریخت با $C_۶$ باشد.

برهان. اگر $\gamma_t(\bar{G})=۲$ و $G_۱,G_۲,\dots,G_k$ $(k\geq ۱)$ مولفه‌های G باشند، توجه به قضیه ۳.۱.۳ $\gamma_t(G)=\sum_{i=۱}^{k}\gamma_t(G_i)\leq\sum_{i=۱}^{k}\frac{۲|V(G_i)|}{۳}=\frac{۲n}{۳}$، بنابراین $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})=\frac{۲n}{۳}+۲$. در مورد $\gamma_t(G)=۲$ نیز نتیجه مشابه را داریم.
گراف‌های از مرتبه ۴ یا ۵ که عدد احاطه‌گری تام آن‌ها و مکمل آن‌ها از ۲ بیشتر است، یکریخت

با C_5 می‌باشند. اگر $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})=\frac{2n}{3}+2$ و $\gamma_t(\bar{G})=2$ باشد، آنگاه عدد احاطه‌گری تام هر مولفه G_i از G برابر $\frac{2|V(G_i)|}{3}$ است و با توجه به قضیه ۲.۱.۳ نتیجه می‌شود که هر مولفه G یکریخت با C_6 است.

حال قرار دهید $\gamma_t(G),\gamma_t(\bar{G})\geq 3$. اگر $n=7$ آنگاه با توجه به اینکه گراف G، ۳ــ منتظم نیست، یا $\delta\leq 2$ یا $\Delta\geq 4$ با هر دو حالت را داریم و با توجه به قسمت (الف) لم ۱.۲.۳ داریم، $\gamma_t(G)+\Gamma_t(\bar{G})\leq 6\leq\frac{2n}{3}+2$.

اگر $n=8$ یا $n\geq 10$ باشد، آنگاه با توجه به ۱.۲.۳ داریم $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})\leq\left[\frac{n+7}{2}\right]<\frac{2n}{3}+2$ اگر $n=6,9$ باشد، آنگاه $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})\leq\left[\frac{n+7}{2}\right]<\frac{2n}{3}+2$.

اگر $n=9$ و $\gamma_t(G)+\gamma_t(\bar{G})=\frac{2n}{3}+2$ باشد آنگاه یا $\gamma_t(G)=\gamma_t(\bar{G})=4$ یا $\gamma_t(\bar{G})=5$، $\gamma_t(G)=3$ نتیجه می‌شود. مورد اول با توجه به قسمت (الف) لم ۱.۲.۳ و با توجه به $\delta\geq 5$ و $\Delta\leq 3$ غیرممکن است. مورد دوم با توجه به قسمت (ب) لم ۱.۲.۳ و با توجه به $\Delta=\delta=4$ و $\left[\frac{n}{2}\right]=4=\delta(\bar{G})=n-\Delta-1$ و با توجه به قضیه

به تناقض می‌رسیم. بنابراین تنها امکان داشتن تساوی در رابطه (۸.۳) برای $n=6$ زمانی است که $\gamma_t(G),\gamma_t(\bar{G})\geq 3$ باشد. گراف شکل در شرایط $n=6$ و $\gamma_t(G),\gamma_t(\bar{G})=3$ صدق می‌کند، بنابراین تساوی در رابطه (۸.۳) را برای این گراف داریم. □

۳.۳ عدد احاطه‌گری تام معکوس

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید D یک γ_tــ مجموعه برای گراف همبند G باشد.اگریک $\gamma_t^{-1}(G)$ــ مجموعه موجود باشد، آنگاه گراف G حداقل دارای چهار رأس می باشد.

برهان. فرض کنید D یک γ_tــ مجموعه برای گراف G باشد. بنابراین $|V-D|\geq 2$ و G دارای رأس تنها نیست، $\gamma_t(G)=|D|\geq 2$. اگریک γ_t^{-1}ــ مجموعه برای G موجود باشد، آن‌گاه $V-D$ شامل یک مجموعه احاطه گر تام نسبت به مجموعه D است. بنابراین گراف G حداقل دارای چهار رأس می‌باشد. □

اکنون شرایط لازم وکافی برای وجود داشتن یک مجموعه احاطه‌گر معکوس را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید D یک γ_tــ مجموعه برای گراف G باشد. آن‌گاه G دارای مجموعه احاطه‌گر معکوس است، اگر و فقط اگر از شرایط زیر پیروی کند:

۱. G شامل رأس تنها نباشد.

۲. G رأس انتهایی نداشته باشد.

۳. $|D|\leq|V-D|$.

برهان. فرض کنید D یک γ_tـ مجموعه برای گراف G باشد. (برهان خلف) فرض کنید G شامل یک رأس تنها باشد. آن‌گاه $V-D$ شامل یک مجموعه احاطه گر تام برای G نمی‌باشد، که این تناقض است. لذا فرض خلف باطل و $V-D$ شامل رأس تنها نمی‌باشد.
فرض کنید v رأس انتهایی از G باشد.آن‌گاه v دقیقا با یک رأس u در G مجاور است. اگر $v \notin D$ و $u \in D$ ، آن‌گاه $V-D$ شامل رأس تنها است.بنابراین $V-D$ شامل یک مجموعه احاطه‌گر تام نیست، که این تناقض است. اگر $v \in D$ ، آن‌گاه رأس u باید در مجموعه D باشد. آن‌گاه v با هیچ کدوم از رأس‌های مجموعه $V-D$ مجاور نیست. از این‌رو $V-D$ شامل مجموعه احاطه‌گر تام از گراف G نیست، که این تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و گراف G شامل رأس انتهایی نمی‌باشد.
(برهان خلف)فرض کنید $|D| > |V-D|$. از این‌رو D یک γ_tـ مجموعه برای گراف G باشد، هر رأس از V با بعضی از رأس های D مجاور است. اگر هر رأس از $V-D$ با یکی از رأس های D مجاور باشد، آن‌گاه یک رأس در D وجود دارد،که این با هر رأس از $V-D$ مجاور نیست. بنابراین $V-D$ شامل مجموعه احاطه‌گر تام از گراف G نیست. که این تناقض است.لذا فرض خلف باطل است. بنابراین $|D| \leq |V-D|$.
برعکس $\Longleftarrow$ فرض کنید گراف G سه شرایط را دارا باشد، با توجه به شرط ۱، هر رأس از $V-D$ با حداقل یکی از رأس های $V-D$ مجاور است. با توجه به شرط ۲، هر رأس از $V-D$ با حداقل یکی از رأس های D مجاور است. با توجه ب شرط ۳، $\gamma_t(G) \leq |V-D|$. بنابراین $V-D$ شامل یک مجموعه احاطه‌گر تام باتوجه به D است.بنابراین G یک مجموعه احاطه‌گر تام معکوس است. $\square$

گزاره ۱.۳.۳. ۱.

$$\gamma_t(K_p) = ۲, p \geq ۲.$$

.۲

$$\gamma_t(C_p) = \begin{cases} (\frac{p}{۲}) & p = ۲(mod ۴) \\ \lceil \frac{p}{۲} \rceil & o.w \end{cases}$$

.۳

$$\gamma_t(W_p) = ۲.$$

.۴

$$\gamma_t(K_{m,n}) = ۲ \quad ,۱ \leq m \leq n.$$

گزاره ۲.۳.۳. اگر K_p یک گراف کامل با $p \geq ۴$ رِئوس باشد. آن‌گاه $\gamma_t^{-۱}(K_p) = ۲$.

برهان. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر تام مینیمم از K_p باشد. آن‌گاه $|D| = ۲$. که نتیجه می‌دهد زیر گراف $\langle V-D \rangle$ ، گراف $K_{p-۲}$ است. یک مجموعه احاطه‌گر تام معکوس K_p

مجموعه احاطه‌گر تام مینیمم از گراف $K_{p-۲}$ است. بنابراین

$$\gamma_t^{-۱}(K_p) = \gamma_t^{-۱}(K_{p-۲}) = ۲.$$

□

گزاره ۳.۳.۳. اگر دور C_p با $n \geq ۱$ $p \geq ۴n,$ رِأس باشد. آن‌گاه

$$\gamma_t^{-۱}(C_p) = \frac{p}{۲}.$$

برهان. فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر تام مینیمم از C_p باشد و $n \geq ۱$ $p \geq ۴n,$. باتوجه به ۱.۳.۳ ، خواهیم داشت $\gamma_t(C_p) = \frac{p}{۲}$. بنابراین $V - D$ شامل $\frac{p}{۲}$ رأس است و شامل یک مجموعه احاطه‌گر تام مینیمم D' باتوجه به D است.بنابراین

$$\gamma_t^{-۱}(C_p) = |D'| = \frac{p}{۲}.$$

□

گزاره ۴.۳.۳. اگر گراف چرخ W_p با $p \geq ۴$ رأس باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t^{-۱}(W_p) = \begin{cases} \frac{(p+۱)}{۲} & p = ۳(mod ۴) \\ \left\lceil \frac{(p-۱)}{۲} \right\rceil & O.W \quad . \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $W_p = K_p + C_{p-۱}$ و $deg(v) = p - ۱$. فرض کنید رأس u با رأس v مجاور است. آن‌گاه $D = \{u, v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام از W_p است.بنابراین

$$\begin{aligned} \gamma_t^{-۱}(W_p) &= \gamma_t(C_{p-۱}) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{(p-۱)}{۲} + ۱\right) & p - ۱ = ۲(mod ۴) \\ \frac{(p+۱)}{۲} & p = ۳(mod ۴). \end{cases} \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

بنابراین

$$\gamma_t^{-۱}(W_p) = \begin{cases} \frac{(p+۱)}{۲} & p = ۳(mod ۴) \\ \left\lceil \frac{(p-۱)}{۲} \right\rceil & o.w \quad . \end{cases}$$

□

گزاره ۵.۳.۳. اگر $K_{m,n}$ گراف دو بخشی کامل با $۲ \leq m \leq n$ ،آن‌گاه

$$\gamma_t^{-۱}(K_{m,n}) = ۲$$

.

برهان. فرض کنید $V(K_{m,n}) = V_1 \cup V_2$ و $u \in V_1, v \in V_2$. آن‌گاه $D = \{u, v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام مینیمم از $K_{m,n}$ است و نتیجه می‌شود زیر گراف $\langle V - D \rangle$ یک گراف $K_{m-1,n-1}$ است. مجموعه احاطه‌گر تام معکوس از $K_{m,n}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر تام مینیمم از $K_{m-1,n-1}$ است.بنابراین

$$\gamma_t^{-1}(K_{m,n}) = \gamma_t(K_{m-1,n-1}) = 2$$

□

گزاره ۶.۳.۳. برای هر گراف G با $p \geq 4$ رأس،

$$\gamma_t(G) \leq \gamma_t^{-1}(G)$$

واین کران تند است.

برهان. به روشنی دیده می‌شود،هر مجموعه احاطه‌گر تام معکوس، یک مجموعه احاطه‌گر تام از G است. بنابراین

$$\gamma_t(G) \leq \gamma_t^{-1}(G)$$

دور C_4 وگراف کامل K_4 به کران $\gamma_t(C_4) = \gamma_t(K_4) = 2$ و $\gamma_t^{-1}(C_4) = \gamma_t^{-1}(K_4) = 2$ دست پیدا می‌کنند. □

گزاره ۷.۳.۳. برای هر گراف G با $p \geq 4$ رأس،

$$\gamma_t(G) + \gamma_t^{-1}(G) \leq p$$

واین کران تند است.

برهان. اثبات با پیروی از تعریف $\gamma_t(G)$ به دست می‌آید.
دورهای با $4n$ رأس تند بودن کران را تصدیق می‌کند. □

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید G یک گراف با مرتبه $p \geq 4$ بدون رأس تنها باشد. آنگاه

$$2 \leq \gamma_t^{-1}(G) \leq p - 2$$

واین کران تند است.

برهان. طبق گزاره ۷.۳.۳ ، $\gamma_t(G) \leq p - \gamma_t(G)$ ، بنابراین $2 \leq \gamma_t(G), \gamma_t^{-1}(G) \leq p - 2$.
طبق گزاره ۶.۳.۳ ، $\gamma_t(G) \leq \gamma_t^{-1}(G)$ و بنابراین $2 \leq \gamma_t(G), 2 \leq \gamma_t^{-1}(G)$. از این‌رو

$$2 \leq \gamma_t^{-1}(G) \leq p - 2.$$

□

این کران‌ها تند هستند و همان‌طور که دیده می‌شودبا گراف‌های کامل K_p و $p \geq ۴$ و $C_۴$ به ترتیب کران‌های پایین وبالا را می‌گیرد.

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنید گراف G با $|V| = ۲m$ و $m \geq ۲$ و D یک γ_tـ مجموعه از گراف G با $|D| = ۲$ باشد. اگر نتیجه بگیریم زیرگراف $\langle V - D \rangle$ یک $(m-۱)K_۲$ است، آن‌گاه

۱.

$$\gamma_t^{-۱}(G) = p - ۲,$$

۲.

$$\gamma_t(G) + \gamma_t^{-۱}(G) = p.$$

برهان. فرض کنید D یک γ_tـ مجموعه از گراف G باشد. با $|D| = ۲$. آن‌گاه D شامل دو رأس مجاور از G و $\gamma_t(G) = ۲$ می‌باشد. اگر $\langle V - D \rangle = (m-۱)K_۲$ ، آن‌گاه $\langle V - D \rangle$ یک مجموعه مستقل یالی است. بنابراین هر راس از V با بعضی از رأس‌های $V - D$ مجاور است. بنابراین $V - D$ خودش یک مجموعه احاطه‌گر تام و همچنین یک مجموعه احاطه‌گر تام معکوس مینیمم از G می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} \gamma_t^{-۱}(G) =& |V - D| \\ =& |V| - |D| \\ =& p - ۲. \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

بنابراین $\gamma_t(G) = ۲,$

$$\gamma_t(G) + \gamma_t^{-۱}(G) = p.$$

□

قضیه ۵.۳.۳. برای هر گراف G با $p \geq ۴$ رأس،

$$\gamma_t^{-۱}(G) = \left\lceil \frac{p\Delta(G)}{(\Delta(G)+۱)} \right\rceil$$

واین کران تند است.

برهان. طبق ۷.۳.۳، $\gamma_t^{-۱}(G) \leq p - \gamma_t(G).$ بنابراین

$$\lfloor \frac{p\Delta(G)}{(\Delta(G)+۱)} \rfloor \leq \gamma(G)$$

و

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G),$$

$$\gamma_t^{-۱}(G) \leq p - \left\lceil \frac{p}{(\Delta(G)+۱)} \right\rceil$$

و گراف دور $C_۴$ تند بودن کران بالا را تصدیق می‌کند. □

۴.۳ عدد احاطه‌گر تام معکوس در گراف تاج

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید گراف G همبند باشد. آن‌گاه

$$\gamma_t(K_۲ \circ G) = ۲$$

و

$$\gamma_t^{-۱}(K_۲ \circ G) = ۲\gamma_t(G).$$

برهان. فرض کنید $V(G) = \{u_۱, u_۲, ..., u_n\}$ و $V(K_۲) = \{v, w\}$ آن‌گاه $\{v, w\}$ یک γ_tــ مجموعه از $K_۲ \circ G$ است. هم‌چنین هر $\gamma_t^{-۱}$ــ مجموعه برای $K_۲ \circ G$ یک مجموعه احاطه‌گر تام مینیمم از $K_۲ \circ G - \{v, w\}$ باشد، درحالی‌که یک γ_tــ مجموعه از $۲G$ است. بنابراین

$$\gamma_t(K_۲ \circ G) = ۲$$

و

$$\gamma_t^{-۱}(K_۲ \circ G) = ۲\gamma_t(G).$$

□

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید گراف G همبند با n رأس باشد. آن‌گاه

$$\gamma_t(G \circ K_۲) = n$$

و

$$\gamma_t^{-۱}(G \circ K_۲) = ۲n.$$

برهان. فرض کنید $V(G \circ K_۲) = \{u_۱, u_۲, ..., u_n, v_۱, w_۱, v_۲, w_۲, ..., v_n, w_n\}$ به‌طوری‌که $u_i \in G$ و v_i, w_i رئوس i ام کپی از $K_۲$ مجاور با u_i برای $۱ \leq i \leq n$ است. به روشنی دیده می‌شود $D = \{u_۱, u_۲, ..., u_n\}$ یک γ_tــ مجموعه از $G \circ K_۲$ است و $D_۱ = \{v_۱, w_۱, v_۲, w_۲, ..., v_n, w_n\}$ یک $\gamma_t^{-۱}$ــ مجموعه برای $G \circ K_۲$ باشد. بنابراین

$$\gamma_t(G \circ K_۲) = n$$

و

$$\gamma_t^{-۱}(G \circ K_۲) = ۲n.$$

□

نتیجه ۱.۴.۳. فرض کنید گراف G همبند با n رأس باشد. آن‌گاه برای هر عدد مثبت $m \geq ۲$

$$\gamma_t(G \circ K_m) = n$$

و

$$\gamma_t^{-۱}(G \circ K_m) = ۲n.$$

قضیه ۳.۴.۳. فرض کنید گراف G همبند باشد. آن‌گاه برای هر عدد مثبت $m \geq ۲$

$$\gamma_t(mK_۱ + G) = \gamma_t^{-۱}(mK_m + G) = ۲.$$

برهان. فرض کنید $V(G) = \{u_۱, u_۲, ..., u_n\}$ و $v_۱, v_۲, ..., v_m$ رئوس از m امین کپی از $K_۱$ باشند و $m \geq ۲$. هر رأس v_i باهر رأس از G مجاور باشد و دورأس در $\{v_۱, v_۲, ..., v_m\}$ مجاور نباشند. ازاین‌رو $u_۱, v_۱$ مجاورند، و این دلالت دارد براین‌که $D = \{u_۱, v_۱\}$ یک γ_tـ مجموعه از $mK_۱ + G$ است و ازاین‌رو $u_۲, v_۲$ مجاورند، واین دلالت دارد براین‌که $D_۱ = \{u_۲, v_۲\}$ یک $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه برای $mK_۱ \circ G$ باشد و ازاین‌رو

$$\gamma_t(mK_۱ \circ G) = \gamma_t^{-۱}(mK_m \circ G) = ۲.$$

□

قضیه ۴.۴.۳. فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف باشند به‌طوری‌که $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه برای $G_۱$ موجود باشد و $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه برای $G_۲$ موجود باشد. آن‌گاه

$$\gamma_t^{-۱}(G_۱ \cup G_۲) = \gamma_t^{-۱}(G_۱) + \gamma_t^{-۱}(G_۲).$$

برهان. فرض کنید $D_۱$ و $D_۲$ دو γ_tـ مجموعه به ترتیب در $G_۱$ و $G_۲$ باشند. آن‌گاه $D = D_۱ \cup D_۲$ یک γ_tـ مجموعه در $G_۱ \cup G_۲$ باشد. ازاین‌رو $D'_۱$ و $D'_۲$ دو $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه به‌ترتیب در $G_۱$ و $G_۲$ باشند. واین دلالت دارد براین‌که $D'_۱ + D'_۲$ یک $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه برای $G_۱ \cup G_۲$ است. بنابراین خواهیم داشت

$$\gamma_t^{-۱}(G_۱ \cup G_۲) = \gamma_t^{-۱}(G_۱) + \gamma_t^{-۱}(G_۲).$$

□

قضیه ۵.۴.۳. فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف باشند. فرض کنید $D_۱$ و $D_۲$ دو $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه به ترتیب در $G_۱$ و $G_۲$ باشند و $G = G_۱ + G_۲$. بنابراین $\gamma_t(G) = \gamma_t^{-۱}(G) = ۲$ اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\gamma_t(G_۱) = \gamma_t(G_۲) = ۲$،

۲. $\gamma_t(G_۱) = \gamma_t^{-۱}(G_۱) = ۲$،

۳. $\gamma_t(G_۲) = \gamma_t^{-۱}(G_۲) = ۲$.

برهان. فرض کنید $\{u_۱, u_۲\}$ و $\{v_۱, v_۲\}$ به‌ترتیب دو γ_tـ مجموعه در $G_۱$ و $G_۲$ باشند.آن‌گاه $\{u_۱, v_۱\}$ یک γ_tـ مجموعه در G و $\{u_۲, v_۲\}$ یک $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه برای G است. بنابراین

$$\gamma_t(G) = \gamma_t^{-۱}(G) = ۲$$

. فرض کنید $\{u_۱, u_۲\}$ و $\{v_۱, v_۲\}$ یک γ_tـ مجموعه و یک $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه برای $G_۱$ باشند. آن‌گاه $\{u_۱, u_۲\}$ یک γ_tـ مجموعه برای G و $\{v_۱, v_۲\}$ یک $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه برای G باشند. بنابراین

$$\gamma_t(G) = \gamma_t^{-۱}(G) = ۲.$$

۳ به صورت مشابه اثبات می‌شود. □

قضیه ۶.۴.۳. فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دوگراف باشند به‌طوری‌که $\gamma_t(G_i) \geq ۲$ برای $i = ۱,۲$ آن‌گاه

$$\gamma_t(G_۱ + G_۲) = \gamma_t^{-۱}(G_۱ + G_۲) = ۲.$$

برهان. فرض کنید $G = G_۱ + G_۲$. در G یک رأس در $G_۱$ با هر رأس در $G_۲$ مجاور باشد و برعکس. بنابراین یک مجموعه حاوی یک رأس در $G_۱$ و یک رأس در $G_۲$ یک γ_tـ مجموعه برای G و هم‌چنین یک $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه برای G است. ازاین‌رو

$$\gamma_t(G_۱ + G_۲) = \gamma_t^{-۱}(G_۱ + G_۲) = ۲$$

. □

نتیجه ۲.۴.۳. فرض کنید G_i یک گراف باشد به‌طوری‌که $\gamma_t(G_i) \geq ۲$ و $۲ \leq i \leq r$. و فرض کنید $G = (G_۱ + G_۲ + ... + G_r)$ آن‌گاه

$$\gamma_t(G) = \gamma_t^{-۱}(G) = ۲$$

.

قضیه ۷.۴.۳. فرض کنید G یک گراف کامل n بخشی با مجموعه بخش‌های $V_۱, V_۲, ..., V_n$ و $|V_i| \geq ۲$ برای $۱ \geq i \geq n, n \geq ۲$. آن‌گاه

$$\gamma_t(G) = \gamma_t^{-۱}(G) = ۲$$

.

برهان. فرض کنید G یک گراف کامل n بخشی با مجموعه بخش‌های $V_۱, V_۲, ..., V_n$ و $|V_i| \geq ۲$ برای $۱ \geq i \geq n, n \geq ۲$. فرض کنید $u_۱, u_۲ \in V_۱$ و $v_۱, v_۲ \in V_۲$. آن‌گاه $\{u_۱, v_۱\}$ یک γ_tـ مجموعه برای G و $\{u_۲, v_۲\}$ یک $\gamma_t^{-۱}$ـ مجموعه برای G باشد. آن‌گاه

$$\gamma_t(G) = \gamma_t^{-۱}(G) = ۲$$

. □

۵.۳ گراف های با $\gamma_t(G) = \gamma_t^{-1}(G) = 2$

گزاره ۱.۵.۳. اگر K_p یک گراف کامل با $p \geq 2$ رأس باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t(K_p) = \gamma_t^{-1}(K_p) = 2$$

.

گزاره ۲.۵.۳. اگر $K_{m,n}$ یک گراف کامل دوبخشی که $2 \leq m \leq n$ باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t(K_{m,n}) = \gamma_t^{-1}(K_{m,n}) = 2$$

.

گزاره ۳.۵.۳. اگر $K_{m,n}$ یک گراف کامل دوبخشی که $2 \leq m \leq n$ باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t(\overline{K_{m,n}}) = \gamma_t^{-1}(\overline{K_{m,n}}) = 4$$

.

برهان. واضح است که $\overline{K_{m,n}} = K_m \cup K_n$ بنابراین

$$\gamma_t(\overline{K_{m,n}}) = \gamma_t(K_m) + \gamma_t(K_n) = 2 + 2 = 4$$

$$\gamma_t^{-1}(\overline{K_{m,n}}) = \gamma_t^{-1}(K_m) + \gamma_t^{-1}(K_n) = 2 + 2 = 4$$

. □

قضیه ۱.۵.۳. اگر u, v رئوس احاطه‌گر تام برای گراف G باشند، آن‌گاه

$$\gamma_t^{-1} = \gamma_t(G - u - v)$$

.

برهان. طبق فرض u, v رئوس احاطه‌گر تام برای گراف G هستند، از این رو $\{u, v\}$ یک γ_tـ مجموعه برای گراف G باشد. بنابراین هر γ_t^{-1}ـ مجموعه برای G قرار می‌گیرد در $G - \{u, v\}$ و یک مجموعه احاطه‌گر تام مینیمم برای $G - \{u, v\}$ است. بنابراین

$$\gamma_t^{-1} = \gamma_t(G - u - v)$$

. □

قضیه ۲.۵.۳. فرض کنید G یک گراف باشد به‌طوری‌که G و $\bar{G}$ همبند باشند با حداقل دو برگ a, b در گراف G باشد. فرض کنید a', b' به ترتیب a, b را پشتیبانی کنند.

۱. اگر $a'\neq b'$ آن گاه $\gamma_t(\bar{G}+aa'+bb')=\gamma_t^{-1}(\bar{G}+aa'+bb')=۲$.

۲. اگر $a'=b'$ آن گاه $\gamma_t(\bar{G}+aa')=\gamma_t^{-1}(\bar{G}+aa')=۲$..

برهان. فرض کنید G و $\bar{G}$ همبند باشند. آن‌گاه $\Delta(G)\leq p-۲$ و $\Delta(\bar{G})\leq p-۲$. بنابراین $\gamma_t(\bar{G})\geq ۲$ و $\gamma_t^{-1}(\bar{G})\geq ۲$. فرض کنید a,b دورأس آویخته در گراف G باشند. فرض کنید a',b' به‌ترتیب دورأس پشتیبان برای a,b باشند.

۱. فرض کنید $a'\neq b'$ فرض کنید $G_۱=\bar{G}+aa'+bb'$ در گراف $G_۱$ ، a,a' با b,b' مجاور هستند. به‌روشنی دیده می‌شود $D=\{a,a'\}$ یک γ_tـ مجموعه برای $G_۱$ و $D=\{b,b'\}$ یک γ_t^{-1}ـ مجموعه برای $G_۱$ است. بنابراین

$$\gamma_t(G_۱)=\gamma_t^{-1}(G_۱)=۲$$

.

۲. فرض کنید $a'=b'$ فرض کنید $G_۲=\bar{G}+aa'$ در گراف $G_۲$ ، a,a' مجاور هستند. آن گاه $D=\{a,a'\}$ یک γ_tـ مجموعه برای گراف $G_۲$ می‌باشد. ازاین‌رو $G_۲$ همبند است. a' با یک رأس c در $G_۲$ مجاور است. بنابراین $D_۱=\{b,c\}$ یک γ_t^{-1}ـ مجموعه برای گراف $G_۲$ می‌باشد. بنابراین

$$\gamma_t(G_۲)=\gamma_t^{-1}(G_۲)=۲$$

.

□

قضیه ۳.۵.۳. برای هر عدد صحیح $p\geq ۴$ ، $\gamma_t(C_p)=\gamma_t^{-1}(C_p)=\frac{p}{۲}$ اگروتنهااگر

$$p=\circ(\mod ۴)$$

.

برهان. فرض کنید $V(C_p)=\{۱,۲,...,p\}$ و $p=\circ(\mod ۴)$ و $p\geq ۴$ آن‌گاه $p=۴k$ برای مقادیر صحیح $k\geq ۱$ اگر $p=۴k$ ، مجموعه $D=\{۳,۴,۷,۸,...,۴k-۱,۴k\}$ یک γ_tـ مجموعه با $۲k=\frac{p}{۲}$ رأس و $D'=\{۱,۲,۵,۶,...,۴k-۳,۴k-۲\}$ یک γ_t^{-1}ـ مجموعه با $۲k=\frac{p}{۲}$ رأس باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\gamma_t(C_p)=\gamma_t^{-1}(C_p)=\frac{p}{۲}.$$

$\Longleftarrow$ برهان خلف(فرض می‌کنیم $p\neq\circ(\mod ۴)$.) آن‌گاه $p=۴k+۱$ یا $p=۴k+۲$ یا $p=۴k+۳$ برای مقادیر صحیح $k\geq ۱$. اگر $p=۴k+۱$ آن‌گاه مجموعه $D=\{۱,۲,۵,۶,...,۴k+۱\}$ یک γ_tـ مجموعه با $۲k+۱$ رأس و $D_۱=\{۳,۴,۷,۸,...,۴k-۱,۴k\}$ یک γ_t^{-1}ـ مجموعه برای C_p

نیست. اگر $p = ۴k + ۲$ آن‌گاه $D = \{۱,۲,۵,۶,...,۴k+۱,۴k+۲\}$ یک γ_tــ مجموعه با $۲k + ۲$ رأس و $D_۱ = \{۳,۴,۷,۸,...,۴k-۱,۴k\}$ یک $\gamma_t^{-۱}$ــ مجموعه برای C_p نیست. اگر $p = ۴k + ۳$ آن‌گاه $D = \{۱,۲,۵,۶,...,۴k+۱,۴k+۲\}$ یک γ_tــ مجموعه با $۲k + ۲$ رأس و $D_۱ = \{۳,۴,۷,۸,...,۴k-۱,۴k,۴k+۳\}$ یک $\gamma_t^{-۱}$ــ مجموعه برای C_p نیست. بنابراین خواهیم داشت: $p = ۰(\mod ۴)$. □

قضیه ۴.۵.۳. برای هر عدد صحیح $p \geq ۴$ ،

$$\gamma_t(\overline{C_p} + v_iv_{i+۱} + v_jv_{j+۱}) = \gamma_t^{-۱}(\overline{C_p} + v_iv_{i+۱} + v_jv_{j+۱}) = ۲.$$

برهان. فرض کنید $V(C_p) = \{v_۱, v_۲, ..., v_p\}$. آن‌گاه هر رأس v_i از C_p با $v_{i-۱}$ و $v_{i+۱}$ به پیمانه p مجاور است. ازاین‌روهر رأس v_i از C_p با باقی‌مانده $p - ۳$ رأس مجاور است.هم‌چنین $v_{i-۱}$ و $v_{i+۱}$ در $\bar{C}_p$ مجاور هستند. فرض کنید $G = \bar{C}_p + v_iv_{i+۱} + v_jv_{j+۱}$. در گراف G ، v_i و $v_{i+۱}$ مجاورند. از این رو $D = \{v_i, v_{i+۱}\}$ یک γ_tــ مجموعه برای گراف G و $D_۱ = \{v_j, v_{j+۱}\}$ یک $\gamma_t^{-۱}$ــ مجموعه برای گراف G هستند. بنابراین

$$\gamma_t(G) = \gamma_t^{-۱}(G) = ۲$$

□

قضیه ۵.۵.۳. اگر P_p یک مسیر با $p \geq ۴$ رأس باشد، $v_۱$ و v_p رئوس انتهایی باشند و v_i و $v_{i+۱}$ بارئوس غیرانتهایی مجاور باشند، آن‌گاه

$$\gamma_t(\overline{P_p} + v_iv_{i+۱}) = \gamma_t^{-۱}(\overline{P_p} + v_iv_{i+۱}) = ۲$$

برهان. فرض کنید $V(P_p) = \{v_۱, v_۲, ..., v_p\}$. و $v_۱$ و v_p در P_p بهم متصل هستند. آن‌گاه طبق قضیه ۴.۵.۳ ، $\gamma_t(\overline{P_p + v_۱v_p} + v_۱v_p + v_iv_{i+۱}) = \gamma_t^{-۱}(\overline{P_p + v_۱v_p} + v_۱v_p + v_iv_{i+۱}) = ۲$ آن‌گاه

$$\gamma_t(\overline{P_p} + v_iv_{i+۱}) = \gamma_t^{-۱}(\overline{P_p} + v_iv_{i+۱}) = ۲$$

□

قضیه ۶.۵.۳. برای هر عدد صحیح $m, n \geq ۲$ ،

$$\gamma_t(\overline{P_m \cup P_n}) = \gamma_t^{-۱}(\overline{P_m \cup P_n}) = ۲$$

برهان. فرض کنید $V(P_m) = \{v_۱, v_۲, ..., v_m\}$ و $V(P_n) = \{v_۱, v_۲, ..., v_n\}$. آن‌گاه هر رأس v_i در $\overline{P_m \cup P_n}$ با هر رأس u_j مجاور باشند. هم‌چنین هر رأس u_j در $\overline{P_m \cup P_n}$ با هر رأس v_i مجاور باشند. آن‌گاه $D = \{v_۱, u_۱\}$ یک γ_tــ مجموعه برای $P_m \bar{\cup} P_n$ و $D_۱ = \{v_۲, u_۲\}$ یک $\gamma_t^{-۱}$ــ مجموعه برای $P_m \bar{\cup} P_n$ باشند. آن‌گاه

$$\gamma_t(\overline{P_m \cup P_n}) = \gamma_t^{-۱}(\overline{P_m \cup P_n}) = ۲$$

□

قضیه ۳.۵.۷. اگر $G = C_{4n}$ یا K_4 یا $K_4 - e$ ، آن‌گاه $\gamma_t(G) = \gamma_t^{-1}(G) = \frac{p}{2}$ به‌طوری‌که p تعداد رئوس گراف G باشد.

برهان. اگر $G = C_{4n}$ طبق قضیه ۳.۵.۳ ، $\gamma_t(G) = \gamma_t^{-1}(G) = \frac{p}{2}$ ، اگر K_4 یا $K_4 - e$ ، آن‌گاه $\gamma_t(G) = \gamma_t^{-1}(G) = \frac{p}{2}$ به‌طوری‌که p تعداد رئوس گراف G است.

□

فصل ۴

عدد احاطه‌گری تام مجزا در گراف

۱.۴ مجموعه‌های احاطه‌گر و احاطه‌گر تام مجزا

قضیه ۱.۱.۴. [۱۰] اگر G گرافی با $\delta(G) \geq ۲$ ، بدون $C_۵$ ـ مولفه باشد آن‌گاه $V(G)$ را می‌توان به یک مجموعه احاطه‌گر D و یک مجموعه احاطه‌گر تام T افراز کرد.

طبقه بندی مجموعه‌های احاطه‌گر و احاطه‌گر تام مجزا در [۹] آمده است. اخیرا نویسندگانی درباره اندازه جفت مجموعه‌های احاطه‌گر مجزا در گراف‌ها مطالعه کردند [۱۶] [۱۷]. دراین‌جا این سوال مطرح می‌شود که چه گراف‌هایی در قضیه ۱.۴ بهترین امکان را از این جهت داراست که اجتماع $D \cup T$ از دو مجموعه، شامل همه‌ی رأس‌های گراف G باشد. در [۱۱] جواب این سوال به‌طور مختصری آمده است.

قضیه ۲.۱.۴. [۷] اگر G گرافی با $\delta(G) \geq ۳$ ، باشد و حداقل در یک مولفه با گراف پترسن متفاوت باشد. آن‌گاه G شامل یک مجموعه احاطه‌گر D ویک مجموعه احاطه‌گر تام T است. که این مجموعه ها مجزا هستند و در رابطه $|D| + |T| < |V|$ صدق می‌کنند.

توجه داشته باشید که قضیه ۱.۴ به این موضوع دلالت دارد که هر گراف با $\delta(G) \geq ۲$ وبدون $C_۵$ ـ مولفه دارای یک DT ـ جفت جامع است.

قضیه ۳.۱.۴. [۷] اگر G گرافی با $\delta(G) \geq ۲$ ، بدون $C_۵$ ـ مولفه باشد آن‌گاه

$$\gamma\gamma_t(G) \leq |V(G)|.$$

تعریف ۱.۱.۴. یک رأس از درجه k را kـ درجه می‌نامیم. یک رأس را کوچک تعریف می‌کنیم اگر درجه آن حداکثر ۲ باشد و آن را بزرگ می‌نامیم اگر درجه‌ای بزرگتر از ۲ داشته باشد در گراف G، $\mathcal{L}(G)$ و $\mathcal{S}(G)$ به ترتیب مجموعه رئوس بزرگ و کوچک G را نشان می‌دهد.

تعریف ۲.۱.۴. خانواده‌ی C و K^* از دورها و گراف‌های افراز شده را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C = \{C_n : n \geq ۳, n \neq ۵\}$$

$$K_n^* = \{K_n^* : n \geq ۴\}$$

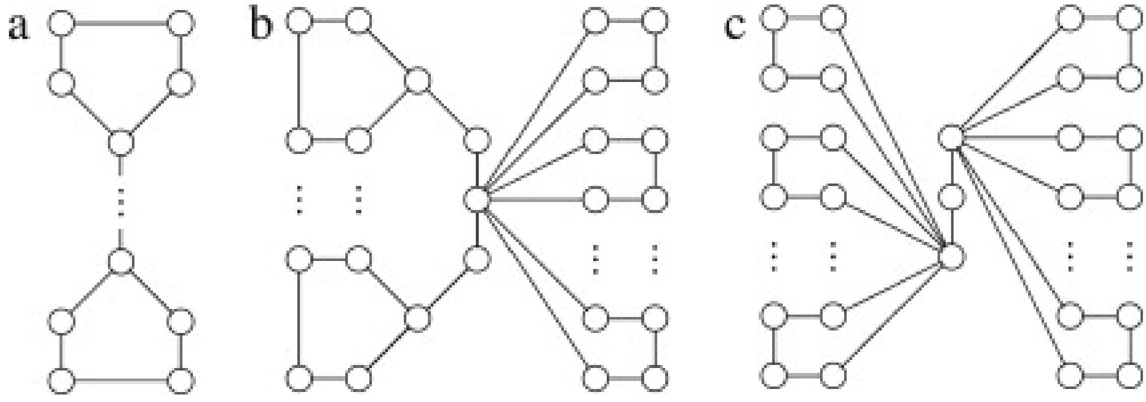
۱.۱.۴ گراف های اکسترمال برای قضیه ۳.۱.۴

دراین بخش گراف‌هایی که در قضیه ۳.۱.۴ به تساوی با کران بالا رسیده‌اند، را مطالعه می‌کنیم. اگر توجه خود را به گراف‌هایی بامینمم درجه ۳ معطوف کنیم، یک ویژگی از قضیه ۲.۱.۴ به‌دست می‌آید که نشان می‌دهد هر مولفه از این گونه گراف‌ها، گراف پترسن است. به هر حال زمانی که شرط $\delta(G) \geq ۳$ به $\delta(G) \geq ۲$ تغییر می‌دهیم، وضعیت پیچیده‌تر می‌شود. در این حالت به‌دست آوردن کلاسه بندی مشکل به‌نظر می‌رسد. چرا که چندین خانواده وجود دارد که شامل تعداد زیادی گراف هستند که در قضیه ۳.۱.۴ به تساوی می‌رسند.
به عنوان مثال سه خانواده زیر از گراف‌های همبند با مینیمم درجه از حداقل ۲ را در نظر بگیرید که هر DT ـ جفت جامع است.

- خانواده $\mathcal{D}_۱$: برای $K \geq ۰$ ، $\mathcal{D}_۱(k)$ را گراف همبند تعریف می‌کنیم که از دو ۵ـ دور مجزا از اتصال یک رأس از یک دور به رأس دیگر به‌دست آمده است. و یال نتیجه شده را به K یال افراز می کنیم. اقرار دهید $\mathcal{D}_۱ = \{\mathcal{D}_۱(K) : K \geq ۰\}$. خانواده $\mathcal{D}_۱$ در شکل ۱.۴(a) نشان داده شده است. متذکر می‌شویم که یک گراف در خانواده $\mathcal{D}_۱$ را در متون ، dumb-bell می‌نامند.

- خانواده $\mathcal{D}_۲$: $k \geq ۰$ و $\ell \geq ۰$ به‌طوری‌که $k+\ell \geq ۲$ ، فرض کنید $\mathcal{D}_۲(k,\ell)$ یک گراف همبند است که از $(k+\ell)$ ۵ـ دور مجزا تشکیل شده است، به این ترتیب که یک مجموعه k رأسی مشخص می‌کنیم که یک رأس از هر k دور به رأس u و از هر ℓ دور باقی‌مانده یک رأس با طول مسیر ۲ به u وصل می‌کنیم. قرار دهید. $\mathcal{D}_۲ = \{\mathcal{D}_۲(k,\ell) : k,\ell \geq ۰, k+\ell \geq ۲\}$ خانواده $\mathcal{D}_۲$ در شکل ۱.۴(b) نشان داده شده است.

- خانواده $\mathcal{D}_۳$: $k \geq ۱$ و $\ell \geq ۱$. فرض کنید $\mathcal{D}_۳(K,\ell)$ یک گراف همبند است که از $K+\ell$ ، ۵ـ دورمجزا تشکیل شده است، به این‌ترتیب که یک مجموعه k رأسی مشخص شده از هر k دور رأسی به رأس u وصل شده است و یک مجموعه ℓ رأسی نیز مشخص شده است که از هر ℓ دور باقی‌مانده رأسی به رأس v وصل شده است و سپس مسیری به طول



شکل ۱.۴: گراف‌های همبند بدون DT ـ جفت غیر جامع

۲، u و v را بهم وصل کرده است. قرار دهید $\mathcal{D}_۳ = \{\mathcal{D}_۳(k) : k \geq ۱, \ell \geq ۱\}$. خانواده $\mathcal{D}_۳$ در شکل ۱.۴(c) نشان داده شده است.

برای برخی از $k \geq ۰$ ، فرض کنید $G = \mathcal{D}_۱(k)$. فرض کنید $u_۱abcdu_۱$ و $u_{k+۲}efghu_{k+۲}$ نشان‌دهنده دو ۵ـ دور از G باشد و $u_۱, u_۲, ..., u_{k+۲}$ مسیر بین آن‌ها را نشان می‌دهند. فرض کنید (D,T) یک DT ـ جفت از G باشد، اگر $u \in V(G)-(D\cup T)$ و $v \in N(u)$ از درجه ۲ باشد آن‌گاه $v \notin T$. از این نتیجه می‌شود که $D \cup T$ شامل همه‌ی رئوس G هست که تنها همسایگی از درجه ۲ دارند. یعنی $b,c,f,g \in D\cup T$. اگر $a \notin D \cup T$ آن‌گاه $b \in D$ و $c \in T$ و $d \in T$ و $u_۱ \in T$ وبنابراین $d \in T$ هیچ همسایه در D ندارد که این تناقض است. اگر $u_۱ \notin D \cup T$ آن‌گاه با استفاده از تقارن، $k = ۰$ و $u_{k+۲} \in T$ و $e \in T$ و $f \in D$ و $h \in D$ و $g \in T$ و بنابراین $g \in T$ هیچ همسایگی در T ندارد که تناقض است. اگر $u_i \notin D \cup T$ که $۲ \leq i \leq k+۱$ ، آن‌گاه با استفاده از تقارن $i = k+۱$ و $u_{k+۲} \in T$ که همان تناقض بالا رانتیجه می‌دهد. روی هم رفته با استفاده از تقارن نتیجه می‌شود که $\gamma\gamma_t(G) = |V(G)|$.
با تعمیم این مباحث معمولی، به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که آیا $G \in \mathcal{D}_۱ \cup \mathcal{D}_۲ \cup \mathcal{D}_۳$ آن‌گاه $\gamma\gamma_t(G) = |V(G)|$. هر چند که همه‌ی این گراف‌های G شامل ۵ـ دورهای القا شده است. گراف‌های G بیشتری که شامل ۵ـ دورهای القا شده هستند و در $\gamma\gamma_t(G) = |V(G)|$ صدق می‌کنند می‌تواند به راحتی ساخته شود. این خانواده‌ها نشان می‌دهند که یک ویژگی کلی برای همه گراف‌هایی که در قضیه ۳.۱.۴ به تساوی می‌رسند به سختی حاصل می‌شود. در این بخش، ازاین به بعد توجه خود را به گراف‌هایی بدون ۵ـ دور القا شده معطوف می‌کنیم.

۲.۱.۴ نتیجه کلی

به عنوان نتیجه کلی در بخش مطالب زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۴.۱.۴. اگر G یک گراف همبند $C_۵$ـ آزاد با $\delta(G) \geq ۲$ باشد، آن‌گاه $\gamma\gamma_t(G) = |V(G)|$ اگر وتنها اگر $G \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$

گراف G را یک گراف nــ مینمال می‌نامیم اگر G از مرتبه n باشد و دارای مینیمم یال باشد و در سه شرط زیر صدق کند:

۱. $\delta(G) \geq ۲$،

۲. گراف G همبند باشد،

۳. $\gamma\gamma_t(G) = n$.

توجه داشته باشید که اکر گراف G یک گراف nــ مینیمال و H گرافی با $\delta(H) \geq ۲$ باشد وهیچ $C_۵$ــ آزاد از حذف یال‌های G وجود نیاید آن‌گاه بنابر قضیه ۳.۱.۴

$$n = \gamma\gamma_t(G) \leq \gamma\gamma_t(H) \leq n$$

یعنی

$$\gamma\gamma_t(H) = n$$

.

قضیه ۵.۱.۴. اگر G یک گراف $C_۵$ــ آزاد از مرتبه n باشد، آن‌گاه G یک nــ مینیمال است اگروتنهااگر $G \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$

توجه داشته باشید که هرگراف $G \in \mathcal{D}_۱ \cup \mathcal{D}_۲ \cup \mathcal{D}_۳$ یک nــ مینیمال گراف است. ولی مثل گراف‌های که $C_۵$ــ آزاد ندارند. درابتدا به اثبات نتایج ابتدایی خواهیم پرداخت وسپس قضیه ۵.۱.۴ را اثبات خواهیم کرد وسپس قضیه ۴.۱.۴ را اثبات می‌کنیم.

نتایج ابتدایی

لم ۱.۱.۴. اگر G یک گراف باشد، (D,T) یک DTــ جفت برای گراف G باشد، و u یک رأس در G باشد به‌طوری‌که تمام همسایگی‌های u از درجه ۲ بیش‌تر باشد، آن‌گاه $u \in D \cup T$.
به‌طور ویژه‌ای برای $n \neq ۵$ ، $\gamma\gamma_t(C_n) = n$.

برهان. فرض کنید G ، (D,T) و u همانند ادعا قضیه باشند. (برهان خلف) فرض کنید $u \notin D \cup T$. بگیرید v یک همسایگی از u و $v \in T$ باشد. ازاین‌رو v با درجه بیشترازِ۲ است. بنابراین u نه همسایه در D ونه همسایه در T دارد. که این تناقض است ونشان می‌دهد که ادعا درست است.

□

لم ۲.۱.۴. [۷] اگر $G \in \mathcal{K}^*$. و (D,T) یک DTــ جفت برای گراف G باشد، آن‌گاه

$$|D| + |T| = |V(G)|.$$

گزاره ۱.۱.۴. [۷] اگر $G \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$ و $v \in V(G)$. آن‌گاه G دارای بخش‌های زیر است:

۱. $(D_۱, T_۱)$ و $(D_۲, T_۲)$ DT ـ جفت‌هایی وجود دارند به‌طوری‌که $u \in D_۱$ و $v \in T_۲$.

۲. اگر $G \in \mathcal{C}$ و $uv \in E(G)$ و $(D_۱, T_۱)$ و $(D_۲, T_۲)$ DT ـ جفت‌هایی باشند به‌طوری‌که $\{u, v\} \subseteq T_۱$ و $u \in D_۲$ و $v \in T_۲$

۳. اگر $G \in \mathcal{K}^*$ و $v \in \mathcal{L}$ آن‌گاه (D, T) و DT ـ جفتی باشد به‌طوری‌که $v \in D$ و $N(v) \subset T$. به‌علاوه، هر رأس در $\mathcal{L} - \{v\}$ متعلق است به T و دارای دقیقا یک همسایه در T است، به‌طوری‌که تمام همسایه‌های باقی‌مانده در D است.

لم ۳.۱.۴. [۷] فرض کنید $G = C_n$ به‌طوری‌که $n \neq ۵$ و $v \in V(G)$ آن‌گاه (D, T) ، DT ـ جفتی باشد از مجموعه‌های مجزا از رئوس گراف G باشد به‌طوری‌که $|D| + |T| < n$ و $v \in T$ وموارد زیر:

۱. مجموعه D مجموعه احاطه‌گر برای $V(G)$ است و T مجموعه احاطه‌گر تام برای $V(G) - \{v\}$ است

۲. D مجموعه احاطه‌گر برای $V(G) - \{v\}$ است و T مجموعه احاطه‌گر تام برای $V(G)$ است.

لم ۴.۱.۴. فرض کنید $F \neq C_۵$ یک گراف همبند با $\delta(F) \geq ۲$ باشد و G از سه بار افراز یال F به‌دست آمده باشد. اگر $\gamma\gamma_t(G) = |V(G)|$ آن‌گاه $\gamma\gamma_t(F) = |V(F)|$.

برهان. فرض کنید $\gamma\gamma_t(F) < |V(F)|$ ، نشان می‌دهیم $\gamma\gamma_t(G) < |V(G)|$ فرض کنید (D_F, T_F) یک $\gamma\gamma_t(F)$ـ جفت از F باشد، داریم: $|D_F| + |T_F| = \gamma\gamma_t(F) < |V_F|$. فرض کنید $e = uv$ یالی از F باشد که سه بار افراز شده است تا مسیر $uv_۱v_۲v_۳v$ را در G تولید کند. توجه کنید که u و v در G مجاور نیستند.
فرض کنید $T_F \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ با تغییر نام رئوس در صورت لزوم، فرض می‌کنیم $u \in T_F$ اگر $v \in T_F$ قرار دهید $D = D_F \cup \{v_۲\}$ وقرار دهید $T = T_F \cup \{v_۱, v_۳\}$. اگر $v \in D_F$ قرار دهید $D = D_F \cup \{v_۱\}$ وقرار دهید $T = T_F \cup \{v, v_۳\}$. اگر $v \notin D_F$ قرار دهید $D = D_F \cup \{v_۲\}$ وقرار دهید $T = T_F \cup \{v_۲, v_۳\}$. پس (D, T) یک DTـ جفت از G هستند که:

$$|D| + |T| = |D_F| + |T_F| + ۳ < |V(F)| + ۳ = |V(G)|$$

بنابراین

$$\gamma\gamma_t(G) < |V(G)|$$

لذا باید فرض کنیم $T_F \cap \{u, v\} = \emptyset$ فرض کنید $D_F \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ با تغییر نام رئوس در صورت لزوم، فرض کنیم $u \in D_F$ در این مورد، قرار دهید $D = D_F \cup \{v_۳\}$ و $T = T_F \cup \{v_۱, v_۲\}$ وبازهم

(D,T) یک DTـ جفت از G با $|D|+|T|<|V(G)|$ است.
لذا باید فرض کنیم $D_F\cap\{u,v\}=\emptyset$. حال $|D_F|+|T_F|\leq|V(F)|-۲$ یادآور می‌شویم که هرکدام از رئوس u و v با یک رأس T_F ویک رأس در D_F مجاور هستند. حال قرار می‌دهیم $D=D_F\cap\{v,v_۱\}$ و $T=T_F\cap\{v_۲,v_۳\}$ پس (D,T) یک DTـ جفت از گراف G است که

$$|D|+|T|=|D_F|+|T_F|+۴\leq|V(F)|+۲=|V(G)|$$

بنابراین

$$\gamma\gamma_t(G)<|V(G)|.$$

□

لم ۵.۱.۴. [۷] فرض کنید G گراف به‌دست آمده از $F_۱,F_۲,...,F_k$ دور مجزا به ترتیب با اندازه‌های $n_۱,n_۲,...,n_k$ و $k\geq۲$ باشد. یک مجموعه k رأسی قابل شناسایی، از یک دور، به یک رأس را v می‌نامیم. اگر $n_i\neq۵$ برای $i=۱,۲,\ldots,k$ آن‌گاه G دارای یک DT ـ غیر جامع است.

لم ۶.۱.۴. فرض کنید G یک گراف همبند $C_۵$ـ آزاد از مرتبه n باشد که $\delta(G)\geq۲$ و $\gamma\gamma_t(G)=n$ اگر G، n مینمال نباشد آن‌گاه G شامل یک زیر گراف $C_۵$ـ آزاد، n مینیمال فراگیر است.

برهان. فرض کنید $G=(V,E)$ مانند حکم لم باشد به‌طوری‌که G ، n مینیمال نباشد، باحذف یال‌هایی از G به زیرگراف فراگیر n مینیمال از G می‌رسیم، ازبین زیرگراف‌هایی با این ویژگی ، F را انتخاب کنید که تعداد ۵ـ دورهای ایجاد شده در F کمترین باشد. برای تناقض فرض کنید F شامل ۵ـ دور $C:v_۱v_۲v_۳v_۴v_۵v_۱$ است. اگر $n=۵$ آن‌گاه، چون G یک $C_۵$ـ آزاد است، فرض کنیم $v_۱v_۳\in E$ در صورت لزوم نام رئوس را تغییر دهید. اما $(\{v_۳,v_۴\},\{v_۱,v_۵\})$ یک DTـ جفت غیر جامع در G است که تناقض است. بنابراین $n\neq۵$ وچون F همبند است فرض کنیم $d_F(v_۱)\geq۳$. از مینیمال بودن F ، $d_F(v_۲)=d_F(v_۵)=۲$.
برای تناقض، فرض کنید $d_F(v_۳)\leq۳$ ازمینیمال بودن F داریم $d_F(v_۴)=۲$ اگر $v_۲v_۴\in E$ آن‌گاه گراف به‌دست آمده از F با اضافه کردن این یال وحذف یال $v_۱v_۲$ یک زیرگراف فراگیر n مینیمال از G شامل ۵ـ دور تولید شده‌ی کمتر نسبت به F است که با انتخاب F در تناقض است. بنابراین $v_۲v_۴\notin E$ و به‌طورمشابه $v_۲v_۵\notin E$ اگر $v_۱v_۴\in E$ آن‌گاه گراف به‌دست آمده از F با اضافه کردن این یال وحذف یال $v_۱v_۲$ یک زیرگراف فراگیر n مینیمال از G شامل ۵ـ دور تولید شده‌ی کمتر نسبت به F است که با انتخاب F در تناقض است. بنابراین $v_۱v_۴\notin E$ و به‌طورمشابه $v_۳v_۵\notin E$ اگر $v_۱v_۳\in E$ قرار دهید $F'=F+v_۱v_۳$ بنابرقضیه ۱.۴ یک DTـ جفت (D',T') در F' وجود دارد. برای احاطه تام $v_۲$ بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $v_۱\in T'$.
اگر $v_۳\in D'$ آن‌گاه $((D'-\{v_۲,v_۵\})\cup\{v_۴\},(T'-\{v_۲,v_۴\})\cup v_۵)$ یک DTـ جفت غیر جامع از F' ودر نتیجه در G است که تناقض است. بنابراین $v_۳\in T'$ برای احاطه $v_۲$ داریم $v_۲\in D'$

اما $((D' - \{v_۴\}) \cup \{v_۵\}, T' - \{v_۴, v_۵\})$ یک DTـ جفت غیر جامع در F ولذا در G است و بازهم تناقض است بنابراین $v_۱v_۳ \notin E$. لذا C یک ۵ـ دور تولید شده در G است که با $C_۵$ـ آزاد بودن G درتناقض است. بنابراین ۲ $d_F(v_۳) =$ به‌صورت مشابه ۲ $= d_F(v_۴)$.
اگر $v_۲, v_i \in E$ که $i \in \{۴,۵\}$ آن‌گاه گراف به‌دست آمده از F بااضافه کردن این یال وحذف یال $v_۱v_۲$ یک زیرگراف فراگیر nـ مینیمال از G است که شامل ۵ـ دور تولید شده کمتری نسبت به F است واین باانتخاب F درتناقض است. بنابراین $v_۲, v_۵ \notin E$ و $v_۲, v_۴ \notin E$. با همین استدلال $v_۳, v_۵ \notin E$ اگر $v_۱, v_۳ \in E$ باشد قرار دهید $F' = F + v_۱v_۳$.
طبق قضیه ۱.۴ یک DTـ جفت (D', T') در F' وجود دارد اگر $v_۱ \in T'$ آن‌گاه

$$((D' - \{v_۲, v_۵\}) \cup \{v_۳, v_۴\}, (T' - \{v_۲, v_۳, v_۴\}) \cup v_۵)$$

یک DTـ جفت غیر جامع از F' ودر نتیجه در G است که تناقض است. بنابراین $v_۱ \in D'$ اما

$$((D' - \{v_۲, v_۳, v_۴\}) \cup \{v_۵\}, (T' - \{v_۲, v_۵\}) \cup v_۳, v_۴)$$

یک DTـ جفت غیر جامع از F' ودرنتیجه در G است که بازهم تناقض است.بنابراین $v_۱, v_۳ \notin E$ به‌طور مشابه $v_۱, v_۴ \notin E$ درنتیجه C یک ۵ـ دور تولید شده در G است که با $C_۵$ـ آزاد بودن G در تناقض است. □

لم ۷.۱.۴. اگر $G \neq C_n$ یک گراف همیلتونی $C_۵$ـ آزاد از مرتبه n باشد آن‌گاه $\gamma\gamma_t(G) < n$.

برهان. فرض کنید $G \neq C_n$ یک گراف همیلتونی $C_۵$ـ آزاد از مرتبه n باشد و C یک دورهمیلتونی در G باشد، بنابراین هر یال در $E(G) - E(C)$ یک وتر C در G است. از بین وترهای C ، فرض کنید uv وتر انتخابی باشد که $k = d_c(u, v)$ کمترین است. از آن‌جاکه یک وتر از C ، یک یال از C نیست یادآور می‌شویم که ۲ $\geq k$ فرض کنید $P : u_۰u_۱...u_k$ کوتاه‌ترین مسیر $u - v$ در C باشد که $u = u_۰, v = u_k$ و فرض کنید C' دور $u_۰u_۱...u_ku_۰$ است. باانتخاب uv و C' یک دور ایجاد شده در G است. اگر ۴ $= k$ آن‌گاه C' یک ۵ـ دور ایجادشده در G است که با $C_۵$ـ آزاد بودن G در تناقض است ولذا $C' \in \mathcal{C}$.
فرض کنید $v_۰v_۱...v_\ell$ مسیر $u - v$ در C باشد که شامل $u_۱$ نیست و $v = v_۰$ و $u = v_\ell$. بنابراین C دور $u_۰u_۱...u_kv_۱v_۲...v_\ell$ است و $n = k + \ell$ چون $k = d_c(u, v)$ ملاحظه می‌کنیم که ۲ $\ell \geq k \geq$. حال ملاحظه ۲.۱.۴ را برای دور $C' \in \mathcal{C}$ به‌صورت زیر به کار می‌بریم.
اگر $\ell \equiv ۱, ۰ (mod ۳)$ ، فرض کنید (D', T') یک DTـ جفت از C' است به‌طوری‌که

$$\{u, v\} = \{u_۰, v_k\} \subseteq T'$$

. درحالی‌که اگر $\ell \equiv ۲ (mod ۳)$ ، (D', T') را یک DTـ جفت از

$$D" = \{v_i | i \equiv ۲ (mod ۳), ۱ < i < \ell\}$$

قرار دهید که $u = u_\circ \in D'$ و $v = u_k \in T'$. قرار دهید $D = D' \cup D''$ و $T = T' \cup T''$. می‌بینیم که $v_1 \notin D \cup T$ پس (D,T) یک DTــ جفت برای $C + uv$ است. بنابراین (D,T) یک DTــ جفت غیر جامع در $C + uv$ ودر نتیجه در G است ولذا $\gamma\gamma_t(G) < n$ □

لم ۸.۱.۴. فرض کنید G یک گراف همبند C_5ــ آزاد از مرتبه n باشد، اگر یک زیر گراف سره پوشا مانند F در G باشد که $F \in \mathcal{K}^*$ آن‌گاه $\gamma\gamma_t(G) < n$.

برهان. فرض کنید G یک گراف همبند C_5ــ آزاد از مرتبه n باشد، اگر یک زیر گراف فراگیر سره مانند F در G باشد که $F \in \mathcal{K}^*$. دربین یال‌های $E(G) - E(F)$ فرض کنید یال uv انتخاب شده است که $d_F(u) + d_F(v)$ بیشتر است وتعداد همسایه‌های مشترک u و v در F نیز بیشتر است. قرار دهید $F' = F + uv$.

بنا به تعریف خانواده $\mathcal{K}^*$ داریم $\mathcal{L}(F) \geq ۴$ فرض کنید $\{u, v\} \subset \mathcal{L}(F)$ فرض کنید

$$w \in \mathcal{L}(F) - \{u, v\}$$

u' را همسایه مشترک u و w و v' همسایه مشترک v و w در F درنظر بگیرید. بنابر گزاره ۲.۱.۴ یک DTــ جفت (D,T) در F وجود دارد به‌طوری‌که $w \in D$ و $\{u, v\} \subset T$ و $\{u, v'\} \subset N_F(w) \subset T$ حال $(D, T - \{u'\})$ یک DTــ جفت غیرجامع از F' ودر نتیجه از G است. بنابراین $\gamma\gamma_t(G) < n$. حال بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $d_F(u) = ۲$.

فرض کنید $v \in \mathcal{L}(F)$ چون $uv \notin E(F)$ داریم $v \notin N_F(u)$ فرض کنید $w \in N_F(u)$ پس $w \in \mathcal{L}(F)$. v' را همسایه مشترک v و w درنظر بگیرید. بنابر گزاره ۲.۱.۴ یک DTــ جفت (D,T) در F وجود دارد به‌طوری‌که $w \in D$ و $\{u, v'\} \subset N_F(w) \subset T$ و $v \in T$. حال $(D, T - \{v\})$ یک DTــ جفت غیرجامع در F' ودرنهایت در G است ولذا $\gamma\gamma_t(G) < n$ بنابراین فرض می‌کنیم $d_F(v) = ۲$.

فرض کنید $N_F(u) = \{u_1, u_2\}$ و $N_F(v) = \{v_1, v_2\}$ پس $\{u_1, u_2\} \subset \mathcal{L}(F)$ و $\{v_1, v_2\} \subset \mathcal{L}(F)$ است. فرض کنید u و v هیچ همسایه مشترکی در F نداشته باشند. پس $\{u_1, u_2\} \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$. w را همسایه مشترک u_1 و v_1 در F درنظر بگیرید. پس $C' : uu_1wv_1vu$ یک ۵ــدور در F' ولذا در G است. باانتخاب یال uv دور C' یک ۵ــدور تولید شده در G است که با C_5ــ آزاد بودن G درتناقض است. بنابراین u و v یک همسایه مشترک در F دارد و فرض می‌کنیم $u_1 = v_1$. بنابر گزاره ۲.۱.۴ یک DTــ جفت (D,T) در F وجود دارد به‌طوری‌که $u_1 \in D$ و $\{u, v\} \subset N_F(u_1) \subset T$ و $\{u_2, v_2\} \subset T$ به‌علاوه می‌بینیم که هر همسایگی u_2 در F متمایز از u به‌طور کلی با $T - \{u_2\}$ احاطه شده است. بنابراین $(D, T - \{u_2\})$ یک DTــ جفت غیرجامع از F' ولذا در G است پس $\gamma\gamma_t(G) < n$. □

حال دو لم بالارا در لم زیر ترکیب می‌کنیم

لم ۹.۱.۴. [۷] فرض کنید G یک گراف همبند C_5ــ آزاد از مرتبه n باشد. اگر یک زیرگراف سره فراگیر مانند F در G باشد که $F \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$ آن‌گاه $\gamma\gamma_t(G) < n$.

حال به اثبات نتیجه مقدماتی وکلیدی به‌نام قضیه ۵.۱.۴ می‌پردازیم. یادآور می‌شویم که گراف G را یک گراف nـ مینیمال گوییم هرگاه G از مرتبه n باشد ویال ـ مینیمال و در شرایط

۱. $\delta(G) \geq ۲$

۲. G همبند باشد

۳. $\gamma\gamma_t(G) = n$

صدق کند. حال قضیه ۵.۱.۴ را اثبات می‌کنیم. (اگر G یک گراف $C_۵$ـ آزاد از مرتبه n باشد، آن‌گاه G یک nـ مینیمال است اگروتنهااگر $G \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$)

برهان. اگر $G \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$ آن‌گاه بنابرتعریف خانواده $\mathcal{C}$ و $\mathcal{K}^*$، $\delta(G) \geq ۲$ و G همبند است. بنابه لم ۱.۱.۴ و ۲.۱.۴ داریم $\gamma\gamma_t(G) < n$. به‌علاوه برای هر یال e در G داریم: $\delta(G-e) = ۱$ ودرنتیجه G یک nـ مینیمال است و این کافی بودن را اثبات می‌کند. برای اثبات لازم بودن با استقرا روی مرتبه n از گراف G که $C_۵$ـ آزاد و n مینیمال است عمل می‌کنیم. اگر $n \in \{۳, ۴\}$ آن‌گاه فرض کنید $G = C_n \in \mathcal{C}$ $n = ۵$ چون $G \neq C_۵$ ، G شامل یک $C_۳$ است که G با اضافه شدن یک یال به $C_۵$ ویا از دو ۳ـ دور مجزا به‌وسیله وصل کردن یک رأس از هر دور به یک رأس به‌وجود آمده است ویا G شامل $C_۴$ است اما شامل $C_۳$ نیست. در این حالت $G = K_{۲,۳}$. در هر دو حالت، یک (D, T) جفت غیر جامع در G وجود دارد که با این مطلب ک G ، n مینیمال است در تناقض است وبنابراین $n \neq ۵$ واین حالت‌های اساسی را اثبات می کند. فرض کنید $n \geq ۶$ وفرض کنید نتیجه برای گراف‌های $c_۵$ـ آزاد که n' مینیمال هستند درست باشد که $۳ \leq n' \leq n$. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف $C_۵$ـ آزاد و n مینیمال است. پیش از ادامه دو مشاهده را ارائه می‌دهیم که در آنچه که خواهیم گفت مورد استفاده است.

تعریف ۳.۱.۴. فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف و $e \in E$ و $v \in V$ باشد. گراف حاصل از حذف یال e از G را با نماد $G - e$ نشان می‌دهیم. همچنین گراف حاصل از حذف رأس v را با نماد $G - v$ نشان می‌دهیم.

مشاهده ۱.۱.۴. اگر $e \in E$ ، آن‌گاه هر e یا یک یال برشی برای گراف G است یا

$$\delta(G - e) = ۱.$$

برهان. برهان خلف : فرض کنید $\delta(G - e) \geq ۲$. ازاین‌رو G یک گراف همبند $C_۵$ـ آزاد با مرتبه ۶ است، $G - e$ شامل $C_۵$ ـ مولفه نیست. بنابراین طبق قضیه ۳.۱.۴ ،

$$n = \gamma\gamma_t(G) \leq \gamma\gamma_t(G - e) \leq n$$

درحالی‌که $\gamma\gamma_t(G - e) = n$. ازاین‌رو G ، n مینیمال است، که این نشان می‌دهدکه $G - e$ همبند نیست و برهان تمام می‌شود. □

مشاهده ۲.۱.۴. اگر G' یک زیرگراف همبند تولید شده از G با مرتبه $n' < n$ با $\delta(G') \geq ۲$ باشد، آن‌گاه یا $G' \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$ یا $\gamma\gamma_t(G') \leq n'$.

برهان. فرض کنید G' یک زیرگراف همبند تولید شده از G با مرتبه $n' < n$ با $\delta(G') \geq ۲$ باشد، به‌روشنی دیده می‌شود که G' یک C_5ــ آزاد است. فرض کنید $\gamma\gamma_t(G') = n'$ آن‌گاه طبق لم ۲.۱.۴، G شامل یک زیرگراف پوشا C_5ــ آزاد مانند G'' است درحالی‌که n' مینیمال است. با استنتاج $G'' \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$. اگر G'' یک زیرگراف سره از G' باشد طبق لم ۲.۱.۴ تناقض است. از این رو $G' = G''$ و همچنین $G' \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$. □

اگر $|\mathcal{L}| = ۰$ آن‌گاه $G = C_n$ و چون G یک C_5ــ آزاد و $G \in \mathcal{C}$ ما انجام داده ایم. از این رو ما فرض می‌کنیم که $|\mathcal{L}| \geq ۱$ اگر $|\mathcal{L}| = ۱$ ، آن‌گاه G شرایط لم ۵.۱.۴ را دارد وبنابراین شامل یک DT ــ جفت غیر جامع است، که تناقض دارد با این‌که G ، n مینیمال است. از این رو $|\mathcal{L}| \geq ۲$. ما ادعاهای زیر که در مورد مجموعه $\mathcal{L}$ از رئوس بزرگ در G است را بیان می‌کنیم.

ادعا ۱.۱.۴. [۱۵] $\mathcal{L}$ یک مجموعه مستقل برای G است.

فرض کنید R یک مولفه از $G - \mathcal{L}$ داشته باشد، توجه داشته باشید که R یک مسیر است. اگر R دارای تنها یک رأس باشد، یادارای حداقل دو رأس به طوری‌که دو رأس پایانی R با رئوس متفاوت بزرگ در G مجاور باشد، آن‌گاه R را $path - ۲$ می نامیم. در غیر این‌صورت R را $handle - ۲$ می‌نامیم.

ادعا ۲.۱.۴. [۱۵] هر $path - ۲$ در G شامل بیش از دو رأس است.

ادعا ۳.۱.۴. [۱۵] هیچ $handle - ۲$ در G وجود ندارد.

ادعا ۴.۱.۴. [۱۵] گراف G یک گراف دوبخشی با مجموعه‌های $\mathcal{L}$ و $\mathcal{S}$ است.

ادعا ۵.۱.۴. [۱۵] هر دورأس در $\mathcal{L}$ دارای دقیقا یک همسایگی است.

حال به اثبات قضیه ۵.۱.۴ برمی‌گردیم. طبق ادعا ۴.۱.۴ و ۵.۱.۴ ، G یک گراف دوبخشی است با مجموعه‌های $\mathcal{L}$ و $\mathcal{C}$ که هر دو رأس در $\mathcal{L}$ دارای دقیقا یک همسایگی است. ازاین‌رو $G \in \mathcal{K}^*$ و قسمت لازم بودن قضیه ۵.۱.۴ اثبات می‌شود. □

حال می‌خواهیم نتیجه اصلی یعنی قضیه ۴.۱.۴ را اثبات کنیم. قضیه ۴.۱.۴ را یادآوری می‌کنیم:

اگر G یک گراف همبند C_5ــ آزاد با $\delta(G) \geq ۲$ باشد، آن‌گاه $\gamma\gamma_t(G) = |V(G)|$ اگر وتنها اگر $G \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$

برهان. کافی بودن از لم ۱.۱.۴ و ۲.۱.۴ نتیجه می‌شود. برای اثبات لازم بودن، فرض کنید G یک گراف همبند C_5ــ آزاد از مرتبه n است که $\delta(G) \geq 2$ به‌طوری‌که $\gamma\gamma_t(G) = n$. فرض کنید $G \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$ آن‌گاه با استفاده از قضیه ۵.۱.۴، G یک گراف n مینیمال نیست. بنابراین با استفاده از لم ۲.۱.۴ ، G شامل یک زیرگراف فراگیر و n مینیمال مثل F است که هیچ ۵ــ دور را نتیجه نمی‌دهد. بنابرقضیه ۵.۱.۴ ، $F \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$. بنابراین با استفاده از لم ۲.۱.۴ ، $\gamma\gamma_t(G) < n$ یک تناقض است ولذا $G \in \mathcal{C} \cup \mathcal{K}^*$. □

۲.۴ عدد احاطه‌گری تام مجزا

در این بخش به بررسي عدد احاطه‌گر مجزا تام در گراف‌ها مي‌پردازيم و خصوصيات مختلف و كران‌هاو دسته‌بندی‌های مختلفي براى گراف‌ها بر اساس خواص اين عدد ارائه مي‌كنيم.

قضیه ۱.۲.۴. [۶] اگر یک گراف G یک γ_t^{-1}ــ مجموعه داشته باشد، آن‌گاه

$$2\gamma_t(G) \leq \gamma_t\gamma_t(G) \leq \gamma_t(G) + \gamma_t^{-1}(G) \leq p$$

گزاره ۱.۲.۴. [۶] اگر جفت $\gamma\gamma_t$ــ مجموعه و $\gamma_t\gamma_t$ــ مجموعه وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$\gamma\gamma(G) \leq \gamma\gamma_t(G) \leq \gamma_t\gamma_t(G).$$

گزاره ۲.۲.۴. [۶] اگر K_p یک گراف کامل با $p \geq 4$ رأس باشد، آن‌گاه

$$2\gamma_t(K_p) = \gamma_t\gamma_t(K_p) = 4.$$

گزاره ۳.۲.۴. [۶]
اگر $K_{m,n}$ یک گراف کامل دوبخشی با $2 \leq m \leq n$ رأس باشد، آن‌گاه

$$2\gamma_t(K_{m,n}) = \gamma_t\gamma_t(K_{m,n}) = 4.$$

گزاره ۴.۲.۴. [۶]
اگر C_{4n} یک گراف دوربا $n \geq 1$ رأس باشد، آن‌گاه

$$2\gamma_t(C_{4n}) = \gamma_t\gamma_t(C_{4n}) = 4n.$$

گزاره ۵.۲.۴. [۶] برای دور C_4 ،

$$\gamma\gamma(C_{4n}) = \gamma_t\gamma_t(C_n)$$

گزاره ۶.۲.۴. [۶] اگر $K_{m,n}$ یک گراف کامل دوبخشی با $۲ \leq m \leq n$ رأس باشد، آن‌گاه

$$\gamma\gamma(K_{m,n}) = \gamma_t\gamma_t(K_{m,n}) = ۴.$$

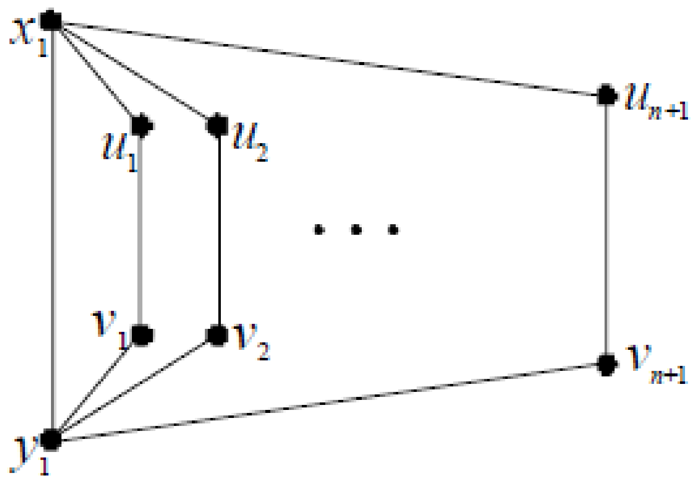
قضیه ۲.۲.۴. بدیهی است گراف درخت شامل دو مجموعه مجزا احاطه‌گر تام نیست.

برهان. فرض کنیم $T = P_۲$ به‌روشنی دیده می‌شود که شامل دو مجموعه احاطه‌گر مجزا نیست. فرض کنیم T یک درخت با $p \geq ۳$ رأس باشد. فرض کنید u رأس انتهایی باشد و v پشتیبانی کند از u. آنگاه یک رأس w وجود دارد به‌طوری‌که w با v مجاور باشد. فرض کنید D یک γ_tــ مجموعه برای T باشد. دوحالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. فرض کنید $u, v \in D$. ازاین‌رو w با u مجاور نیست. این نشان می‌دهد که V_D شامل هیچ γ_tــ مجموعه نیست.

۲. فرض کنید $u, v \in D$. که w با هیچ رأسی از $V - D$ مجاور نیست. این نشان می‌دهد که V_D شامل هیچ γ_tــ مجموعه نیست.

از این دوحالت بالا نتیجه می‌گیریم که T شامل دو مجموعه احاطه‌گر مجزا نیست. □



شکل ۲.۴: گراف G

قضیه ۳.۲.۴. برای هر عدد صحیح $n \geq ۱$ یک گراف همبند G وجود دارد، به‌طوری‌که

$$\gamma_t^{-۱}(G) - \gamma_t(G) = ۲n$$

و

$$|V(G)| = \gamma_t^{-۱}(G) + \gamma_t(G).$$

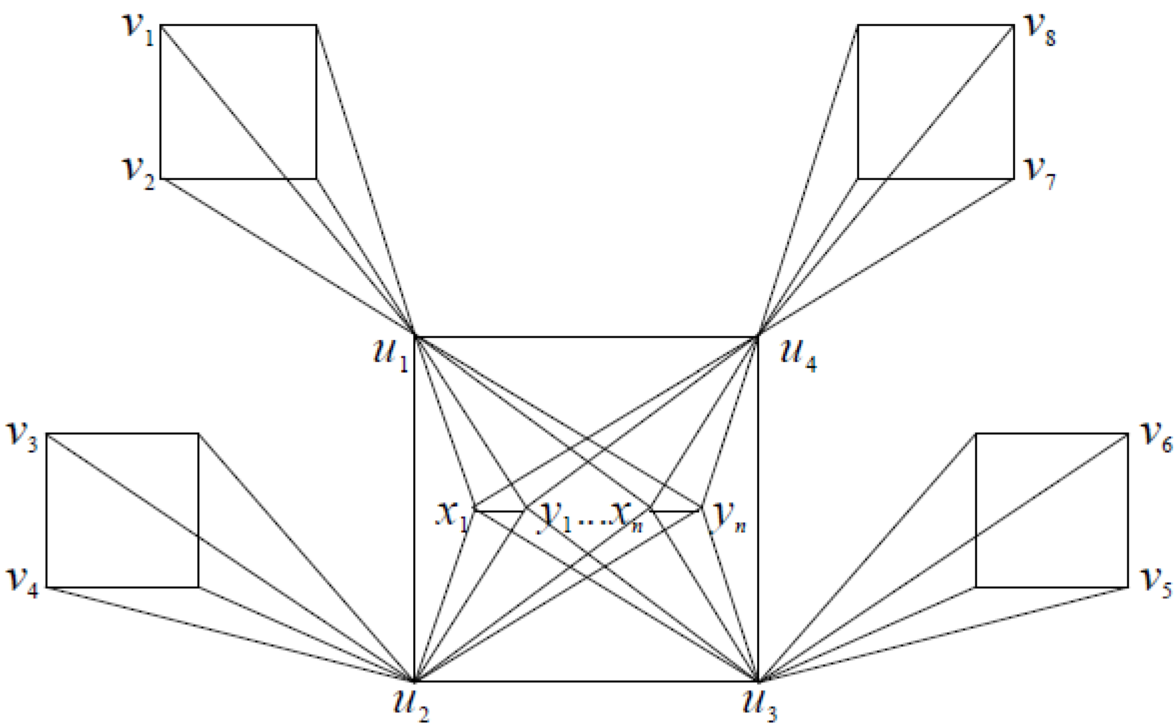
برهان. فرض کنید $n \geq ۱$. در نظر می‌گیریم گراف G با $۲n+۴$ رأس مانند شکل بالا باشد. آن‌گاه $D=\{x_۱, y_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام برای گراف G باشد، در حالی‌که کوچک‌ترین مجموعه باشد. بنابراین $\gamma_t(G)=۲$. ازاین‌رو u, v در گراف G برای $i=۱,۲,...,n+۱$ مجاورند، که نشان می‌دهد $D=V(G)-\{x_۱, y_۱\}$ یک مجموعه منحصربه‌فرد احاطه‌گر تام برای گراف G می‌باشد. بنابراین $\gamma_t^{-۱}(G) \leq |D| = ۲n+۲$. ازاین‌رو برای تمام زیر مجموعه‌های S از G ، $N_G[S] \neq V(G)$. که این نشان می‌دهد $\gamma_t^{-۱}(G) = |D| = ۲n+۲$. ازاین‌رو $\gamma_t^{-۱}(G)-\gamma_t(G)=۲n$ و هم‌چنین $|V(G)| = \gamma_t^{-۱}(G)+\gamma_t(G)$

□

قضیه ۴.۲.۴. برای هر عدد صحیح $n \geq ۱$ یک گراف همبند G وجود دارد، به‌طوری‌که

$$\gamma_t^{-۱}(G)+\gamma_t(G)-\gamma_t\gamma_t(G)=۲n.$$

برهان. فرض کنید گراف G در شکل ۳.۴ با اضافه کردن یگ گراف تاج $C_۴ \circ C_۴$ به $۲n$ رأس $x_۱, y_۱, x_۲, y_۲, ..., x_n, y_n$ و یال‌های $j=۱,۲,۳,۴$ $\quad i=۱,۲,...,n$ $\quad x_iu_j, y_iu_j, x_iy_j$ آن‌گاه $\{u_۱, u_۲, u_۳, u_۴\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام مینیمم منحصر به‌فرد برای گراف G است



شکل ۳.۴: گراف تاج $C_۴ \circ c_۴$

و

$$\{v_۱, v_۲, v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵, v_۶, v_۷, v_۸ \cup \{x_۱, y_۱, x_۲, y_۲, ..., x_n, y_n, \},$$

یک γ_t^{-1}ــ مجموعه برای گراف G است. بنابراین $\gamma_t(G) = ۴$ و $\gamma_t^{-1}(G) = ۲n + ۸$. هم‌چنین مجموعه $D_۱ = \{u_۱, u_۲, v_۵, v_۶, v_۷, v_۸\}$ و $D_۲ = \{u_۳, u_۴, v_۱, v_۲, v_۳, v_۴\}$. یک $\gamma_t\gamma_t$ ــ جفت برای گراف G تشکیل می‌شود. از این‌رو $\gamma_t\gamma_t(G) = |D_۱| + |D_۲| = ۱۲$. بنابراین

$$\gamma_t^{-۱}(G) + \gamma_t(G) - \gamma_t\gamma_t(G) = ۲n.$$

□

نتیجه ۱.۲.۴. [۶] اختلاف $\gamma_t^{-۱}(G) + \gamma_t(G) - \gamma_t\gamma_t(G)$ می‌تواند عدد بزرگ دلخواهی باشد

گزاره ۷.۲.۴. [۶] اگر یک γ_t^{-1}ــ مجموعه برای گراف G وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$\gamma_t\gamma_t(G + K_۲) = ۲ + \gamma_t(G) = ۲ + \gamma_t^{-۱}(G + K_۲)$$

گزاره ۸.۲.۴. فرض کنید G و H دو گراف باشند. اگر یک $\gamma_t^{-۱}(G + H)$ موجود باشد، آن‌گاه $\gamma_t\gamma_t(G + H) = ۴$

برهان. در گراف $G + H$ ، یک رأس از گراف G با رأسی از گراف H مجاور است و برعکس. بنابراین $u \in G, v \in H$ را انتخاب کنید و $x \in V(G) - \{u\}, y \in V(H) - \{v\}$ را انتخاب کنید. آن‌گاه $D = \{u, v\}$ و $S = \{x, y\}$ دو γ_tــ مجموعه مجزا برای گراف $G + H$ هستند. بنابراین $\gamma_t^{-۱}(G + H) = ۲$ و $\gamma_t(G + H) = ۲$. آن‌گاه

$$۲\gamma_t(G + H) = \gamma_t\gamma_t(G + H) = \gamma_t(G + H) + \gamma_t^{-۱}(G + H) = ۴$$

□

نتیجه ۲.۲.۴. [۶] فرض کنید G و H دو گراف باشند. و p تعداد رئوس گراف $G + H$ باشد. آن‌گاه $\gamma_t(G + H) + \gamma_t^{-۱}(G + H) = p$ اگروتنهااگر $G = K_۲, H = K_۲$

۳.۴ پیشنهادها

با توجه به نتایج به دست آمده در فصل چهارم و به منظور تکمیل روند این پایان نامه می توان تحقیقات دیگری انجام داد که عبارتنداز:

مسأله ۱.۳.۴. کلاسه بندی کردن گراف های $\gamma_t\gamma_t$ــ ماکزیمم.

مسأله ۲.۳.۴. کلاسه بندی کردن گراف های $\gamma_t\gamma_t$ــ مینیمم.

مسأله ۳.۳.۴. تحت چه شرایطی $\gamma_t\gamma_t(G)$ موجود است.

مسأله ۴.۳.۴. برای چه گراف هایی $\gamma\gamma(G) = \gamma_t\gamma_t(G)$ برقرار است.

مسأله ۵.۳.۴. برای چه گراف هایی $\gamma\gamma(G) = \gamma\gamma_t(G)$ برقرار است.

مسأله ۶.۳.۴. برای چه گراف هایی $\gamma\gamma_t(G) = \gamma_t\gamma_t(G)$ برقرار است.

مسأله ۷.۳.۴. به دست آوردن یک کران بالا برای $\gamma_t\gamma_t(G) = \gamma_t\gamma_t(\bar{G})$.

مراجع

[۱] محمدی ع، (۱۳۸۹)، پایان‌نامه ارشد: ”بررسی عدد احاطه گری جمعی در حاصل ضرب گراف ها“، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی،

[2] Bange D. W. and Barkauskas A. E. and Slater P. J. (1978), ”A constructive characterization of trees with two disjoint minimum dominating sets” **Congressus Numerantium**, 21, pp. 101-112.

[3] Cockayne E. J. Dawes R. M. and Hedetniemi S.T., ” Total domination in graphs”, Network **10** (1980) pp. 211–219

[4] Haynes T. W. and Henning M. A. (2005), ”Trees with two disjoint minimum independent dominating sets”**Discrete mathematics**, 304(1), pp. 69-78.

[5] Haynes Teresa W. Hedetniemi S.T. and Slater P.” Fundamentals of domination in graphs” CRC Press,1998.

[6] Hedetniemi S. M. Hedetniemi S. T. Laskar R. C. Markus, L. and Slater P. J. (2006),” Disjoint dominating sets in graphs” **In Proc. Int. Conf. on Disc. Math. IMI-IISc, Bangalore** (pp. 88-101).

[7] Henning M. A. Löwenstein C. Rautenbach D. and Southey J. (2010),” Disjoint dominating and total dominating sets in graphs” **Discrete Applied Mathematics** , 158(15), pp. 1615-1623.

[8] Henning M. A. Löwenstein C. Rautenbach D. and Southey J. (2010), ”Disjoint dominating and total dominating sets in graphs” **Discrete Applied Mathematics**, 158(15), pp. 1615-1623.

[9] Henning M. A. and Southey J. (2009),” A characterization of graphs with disjoint dominating and total dominating sets” **Quaestiones Mathematicae**, 32(1), pp. 119-129.

[10] Henning M. A. and Southey J. (2008),” A note on graphs with disjoint dominating and total dominating sets” **Ars Combin**, 89, pp. 159-162.

[11] Henning M. A. Löwenstein C. and Rautenbach D. (2010),” Partitioning a graph into a dominating set, a total dominating set, and something else” **Discussiones Mathematicae Graph Theory**, 30(4), pp. 563-574.

[12] Henning M. and Yeo A. (2014), ”**Total domination in graphs**” Springer Science and Business Media.

[13] Henning M. A. (2000), ”Graphs with large total domination number” **Journal of Graph Theory**, 35(1), pp. 21-45.

[14] Henning M. A and Yeo, A. (2013), ”Total Domination Critical Graphs” (pp. 83-101). Springer New York.

[15] Henning M. A. Löwenstein C. Rautenbach D. and Southey J. (2010),” Disjoint dominating and total dominating sets in graphs” **Discrete Applied Mathematics**, 158(15), pp. 1615-1623.

[16] Kulli V. R. and Sigarkanti S. C. (1991),” Inverse domination in graphs” **Nat. Acad. Sci. Lett**, 14(12), pp. 473-475.

[17] Löwenstein C. and Rautenbach D. (2010),” Pairs of disjoint dominating sets and the minimum degree of graphs” **Graphs and Combinatorics**, 26(3), pp. 407-424.

[18] Maw-Shang C. and Chung-Chang H. (1997), ”On minimum intersection of two minimum dominating sets of interval graphs”**Discrete applied mathematics**, 78(1-3), pp. 41-50.

[19] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater,” Domination in Graphs” Topics (Marcel Dekker, New York, 1998)

[20] S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar, ”Topics on Domination” **Discrete Math.** (1990).

[21] Kulli, V. R. and Sigarkanti S. C. (1991), ”Inverse domination in graphs” **Nat. Acad. Sci. Lett**, 14(12), pp. 473-475.

پیوست آ

مسائل تصمیم

برای دسته‌بندی مسائل از لحاظ زمان اجرای آن‌ها، ابتدا به دسته‌بندی خود زمان اجرا می‌پردازیم.
یک الگوریتم دارای زمان اجرای چندجمله‌ای [۱] است، اگر تعداد عملیاتی که انجام می‌دهد به صورت $O(n^k)$ باشد که در آن k یک مقدار ثابت می‌باشد و n اندازه ی ورودی است. مثلا اگر اندازه‌ی ورودیn باشد، تمام زمان‌های زیر چند جمله‌ای می‌باشند:

$$O(n), O(n^{۲}), O(n^{۳} \log n), O(n^{۵}\sqrt{n}), O(\log n), O(n^{۱۰۰۰}), O(n^{۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰})$$

برای مثال در مرتب‌سازی اندازه‌ی ورودی برابر با n عدد است و زمان مرتب‌سازی آن برابر با $O(n \log n)$ است که یک زمان چندجمله‌ای بر حسب n محسوب می‌شود. زمان اجراهایی که تابع آن‌ها مانند $۲^n, ۱/۵^n, n!, n^{\log n}$ باشد، زمان اجرای چندجمله‌ای نمی‌باشند.
یکی از سوالات مطرح در علوم کامپیوتر این است که آیا برای مساله‌ی داده شده یک راه حل چند جمله‌ای وجود دارد یا نه؟ جواب این سوال برای مساله‌هایی مانند مساله مرتب‌سازی و یا پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر و درخت پوشای کمینه در گراف مثبت می‌باشد. برای دسته‌ای دیگر از مسائل مشخصا چنین الگوریتمی وجود ندارد و همچنین دسته‌ای از مسائل نیز وجود دارند که هنوز برای آنها الگوریتم چند جمله‌ای داده نشده و عدم وجود چنین الگوریتمی اثبات نشده. در بخش بعد به طور کامل‌تر در این مورد صحبت خواهیم نمود. البته توجه کنید

[۱] Polynomial

که تعریف دقیق و کامل مسائل نیاز به اطلاعات و تفصیل بیشتری دارد. برای همین تعاریف مقداری نادقیق هستند.

۱.آ کلاس‌های P, NP

تعریف آ.۱.۱. مساله‌ی تصمیم‌گیری [۲]: مساله‌ی X یک مساله‌ی تصمیم است، اگر جواب آن به صورت بلی یا خیر باشد. یا به عبارت دیگر مسائلی هستند که ورودی $x \in \{0,1\}^*$ وخروجی آن‌ها یک مقدار بولی(بله یا خیر) است.

مثال آ.۱.۱. ورودی:رشته‌ی A شامل n کاراکتر
خروجی: آیا در رشته‌ی ورودی حرف s وجود دارد؟

مثال آ.۱.۲. ورودی: گرافG شامل n راس و m یال
خروجی: آیا در G دور همیلتونی وجود دارد؟

تعریف آ.۱.۲. تصدیق [۳]: تصدیق برای مساله‌ی، X یک پاسخ (گواهی) برای مساله‌ی X را دریافت می‌کند و در صورتی که این پاسخ صحیح باشد، در زمان چند جمله‌ای آن را تایید می‌کند و پاسخ بلی برمی‌گرداند. یک تصدیق چند جمله‌ای است اگر زمان لازم برای تایید یک پاسخ در آن چند جمله‌ای باشد.

مثال آ.۱.۳. فرض کنید در مساله‌ی X پیدا کردن یک دور همیلتونی در گراف باشد. یک پاسخ X شامل یک دنباله از n راس است. در این حالت یک تصدیق برای مساله‌ی X به این صورت است که چک می‌کند بین راس i و $i+1$ از این دنباله، یال وجود دارد یا خیر و نیز آیا تمام راس‌ها در دنباله حاضر شده اند؟ مشخصا این کار در زمان چند جمله‌ای $(O(n))$ انجام می‌پذیرد و بنابراین این تصدیق چند جمله‌ای می‌باشد.

مثال آ.۱.۴. مساله‌ی پیدا کردن مجموعه‌ی مستقل [۴] در گراف: گراف X داده شده است. هدف پیدا کردن یک زیرمجموعه‌ی مستقل از راس‌ها می‌باشد. یک گواهی برای این مساله لازم است تنها بررسی کند که بین k راس داده شده به عنوان جواب، یالی نباشد.

در حقیقت یک تصدیق چک می‌کند که آیا جواب داده شده صحیح می‌باشدیا خیر؟ یک تصدیق قرار نیست که خود، جواب صحیح تولید نماید.

[۲] Decisino problem
[۳] Certifier
[۴] Independent set

تصدیق در حقیقت یک بیان رسمی از این است که راه حل مساله می‌تواند در زمان مناسبی «چک» شود، مستقل از این که می‌تواند در زمان مناسبی حل بشود یا خیر. توجه کنید که چک کردن پاسخ با حل آن مساله متفاوت است. فرض کنید یک پاسخ s برای مساله‌ی X به صورت یک رشته داده می‌شود. در این صورت می‌توان به طور رسمی یک تصدیق را به این صورت تعریف کرد: می‌گوییم B یک تصدیق برای مساله‌ی X است، اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

۱. B یک الگوریتم چند جمله‌ای است که دو ورودی s و t را می‌گیرد.

۲. یک تابع چند جمله‌ای p وجود دارد که به ازای هر رشته‌ی s، s یک جواب صحیح برای X است، اگر و تنها اگر یک رشته t وجود داشته باشد که $|t| < p(|s|)$ و $B(s,t) = yes$ باشد.

این تعریف مقداری نسبت به تعریف قبلی سخت‌تر و البته دقیق‌تر است. توجه کنید که در اینجا هدف پیدا کردن t نیست و تنها وجود چنین رشته‌ای برای وجود تصدیق کافی است.

تعریف آ.۳.۱. مجموعه‌ی P مجموعه‌ی تمام مساله‌هایی است که الگوریتم چند جمله‌ای برای حل آن‌ها وجود دارد. به عبارت دیگر مسائلی که برای حل آن‌ها الگورتیم یا الگوریتم‌هایی بامرتبه زمانی چندجمله‌ای یافت شده است. کلاس الگورتیم‌های معین یا الگوریتم‌های قطعی را تشکیل می‌دهند، این کلاس را با علامت P نشان می‌دهند. الگورتیم‌هایی که برای کامپیوترهای رایج طراحی می‌گردنند. الگورتیم‌های معین نامیده می‌شوند، دراین الگوریتم‌ها نتیجه هر عمل کاملا مشخص، معین و قطعی است. P کلاس کلیه مسائل تصمیم‌گیری است که برای حل آن‌ها الگورتیم معین با مرتبه زمانی چند جمله‌ای وجود دارد. به بیان دیگر P به دسته‌ای از مسائل گفته می‌شود که هم چک کردن جواب وهم پیدا کردن جواب در زمان چندجمله‌ای مشخص (قطعی) رخ خواهد داد. در بدترین حالت پیچیدگی زمانی الگوریتم‌های این دسته از مسائل، تابعی چند جمله‌ای از اندازه ورودی هستند.

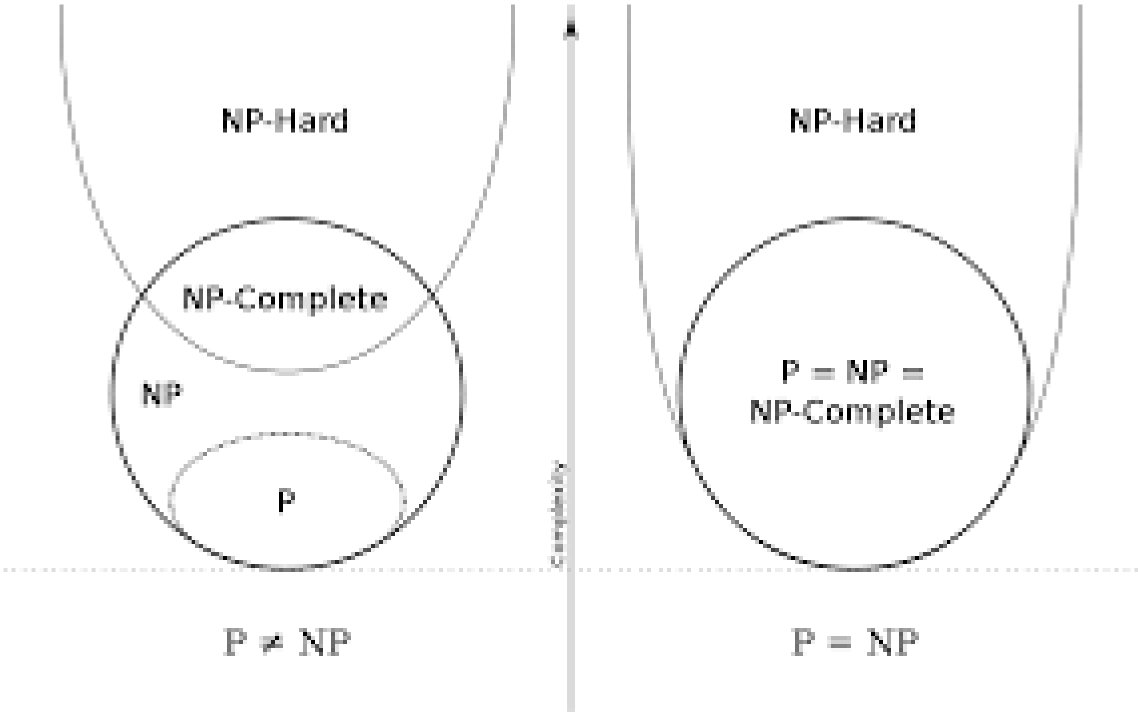
تعریف آ.۴.۱. مجموعه‌ی NP مجموعه‌ی تمام مساله‌هایی است که برای آن‌ها تصدیق چندجمله‌ای وجود دارد. یعنی اگر یک پاسخ برای آن‌ها داده شود، این پاسخ در زمان چند جمله‌ای قابل تصدیق می‌باشد. به عبارت دیگر مسائلی که اگر بخواهیم یک جواب را چک کنیم این چک کردن توسط ماشین تورینگ [۵] در زمان چندجمله‌ای قابل حصول است ولی اگر بخواهیم جواب مسأله را به‌دست بیاوریم (احتمالا تک تک چک می‌کنیم) مشخص نیست (غیرقطعی) که در زمان چندجمله‌ای به جواب برسیم یا نه؟ به‌عبارت دیگر این دسته از مسائل در زمان چند جمله‌ای با ماشین تورینگ غیرقطعی حل می‌شود. ساده ترین مجموعه از این کلاس، مجموعه p است یعنی این دسته از مسائل درزمان چندجمله‌ای حل می‌شوند. از طرفی هر الگورتیم معین توسط یک کامپیوتر نامعین قابل اجرا است. پس p زیر مجموعه NP است. محققین زیادی سعی کرده‌اند اثبات کنند $p = NP$ است، اماتا به‌حال کسی نتوانسته آن‌را اثبات کند. اگر $p = NP$ باشد یعنی می‌توان برای هر مسأله ای که برای آن الگوریتم نامعین با مرتبه زمانی چند جمله‌ای وجود دارد. یک الگوریتم معین با مرتبه زمانی چندجمله‌ای پیدا کرد. با توجه به مثال‌ها، می‌توان فهمید که مساله‌ی پیدا کردن دور همیلتونی و مجموعه‌ی مستقل در گراف‌ها در مجموعه‌ی NP قرار دارد. همینطور مساله‌ی پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در گراف‌های وزن‌دار یا درخت پوشای کمینه، در مجموعه‌ی P قرار دارند و البته چون یک پاسخ از این دو مساله هم می‌تواند در زمان چند جمله‌ای چک شود، هر دو این مساله‌ها جزو دسته NP نیز هستند.

مشاهده ۱ $P \subseteq NP$

توجه کنید که اگر الگوریتم صحیح چند جمله‌ای برای حل یک مساله وجود داشته باشد، پاسخ آن را توسط همان الگوریتم می‌توان تصدیق کرد. به عبارتی می‌توان از خود الگوریتم چند جمله‌ای برای تصدیق پاسخ آن استفاده کرد.

یکی از سوالات مهم در علوم کامپیوتر که هنوز هم حل نشده است و یکی از بزرگترین سوالات

[۵] Turing machine



شکل آ.۱: P=NP

حل نشده در این زمینه است، این است که آیا عکس این رابطه هم برقرار است یا خیر؟ یعنی آیا $NP \subseteq P$ هم درست است؟ توجه کنید که درست بودن آن نتیجه خواهد داد $P = NP$ و این یعنی تمام مساله‌هایی که برای آنها تصدیق چند جمله‌ای وجود دارد در زمان چند جمله‌ای نیز قابل حل می‌باشند. هر چند هنوز این مساله حل نشده است، اما نتایج قدرتمند و جالبی در این زمینه به دست آمده است که در ادامه توضیح داده شده است.

آ.۲ تکنیک کاهش چند جمله‌ای

تکنیک کاهش [۶] در حقیقت روشی برای مقایسه‌ی سختی مساله‌ها است. در چه صورتی می‌توان گفت مساله‌ی A سخت‌تر از مساله‌ی B است؟ برای پاسخ به این سوال از روش کاهش چند جمله‌ای استفاده می‌کنیم. در یک نگاه کلی می‌توان گفت مساله‌ی A حداقل به اندازه‌ی مساله‌ی B سخت است، اگر وجود یک جعبه سیاه که مساله‌ی A را زمان چند جمله‌ای حل می‌کند، باعث شود که مساله‌ی B را نیز بتوانیم در زمان چند جمله‌ای حل کنیم.

تعریف آ.۲.۱. مساله X در زمان چند جمله‌ای به مساله‌ی Y کاهش پیدا می‌کند، اگر هر نمونه‌ی دلخواه از مساله‌ی X را بتوان با استفاده از:

۱. تعداد محاسبات با زمان چند جمله‌ای

[۶] Reduction

۲. تعداد چند جمله‌ای بار استفاده از جعبه سیاهی که مساله‌ی Y را حل می‌کند

حل نمود. این موضوع را به صورت ریاضی به شکل $X \preceq_p Y$ نشان می‌دهند.
اگر داشته باشیم: $X \preceq_p Y$ و همینطور $Y \preceq_p X$ یعنی این دو مساله از لحاظ سختی با هم برابر هستند و می‌نویسیم: $X \equiv_p Y$.

مثال آ.۲.۱. این دو مساله را در نظر بگیرید:

مسئله ۱ (مجموعه مستقل): برای گراف داده شده $G(V,E)$ و عدد k آیا زیرمجموعه $S \subset V$ وجود دارد که $|S| \leq k$ و برای هر یال در گراف حداکثر یک سر آن در S باشد؟ (بین هیچ دو راسی از مجموعه‌ی S یال نباشد)

مسئله ۲ (پوشش راسی): برای گراف داده شده $G(V,E)$ و عدد k آیا زیرمجموعه $S \subset V$ وجود دارد که $|S| \leq k$ و برای هر یال در گراف حداقل یک سر آن در S باشد؟

مشاهده ۲ (مجموعه مستقل $\equiv_p$ مجموعه پوشش راسی)

برهان. هر دو مورد را نشان می‌دهیم:
(مجموعه مستقل $\preceq_p$ پوشش راسی)
نشان می‌دهیم مجموعه، S مجموعه مستقل است اگر و فقط اگر $V - S$ یک پوشش راسی باشد. S را یک مجموعه مستقل دلخواه و یال (u, v) را یالی دلخواه در نظر بگیرید. بنابر مستقل بودن S داریم $u \notin S$ یا $v \notin S$. درنتیجه داریم $u \in V - S$ یا $v \in V - S$ است و واین به معنی پوشش راسی بودن $V - S$ می‌باشد. بنابراین با داشتن جعبه سیاهی که مساله‌ی مجموعه‌ی مستقل را حل کند، می‌توان مساله پوشش راسی را هم حل کنیم.
(پوشش راسی $\preceq_p$ مجموعه مستقل)
همچنین به صورت مشابه بنابر پوشش راسی بودن $V - S$ به ازای هر یال (u, v) داریم $u \in V - S$ یا $v \in V - S$ که در نتیجه $u \notin S$ و یا $v \notin S$ و این یعنی مجموعه‌ی S یک مجموعه مستقل است. □

بنابراین برای پیدا کردن یک مجموعه پوشش راسی به اندازه k کافی است یک مجموعه مستقل با اندازه‌ی $n - k$ پیدا کنیم و بالعکس.

مثال آ.۲.۲. این مساله را در نظر بگیرید:
مساله‌ی پوشش مجموعه‌ای [۷]:
یک مجموعه‌ی U شامل n عضو داده شده است و زیر مجموعه‌های $s, \ldots, s_m$ از آن داده شده است. آیا حداکثر k تا از این زیرمجموعه‌ها وجود دارند که اجتماع آنها برابر با U شود؟

نشان می‌دهیم: (پوشش مجموعه‌ای $\preceq_p$ پوشش راسی)

[۷] Set Cover

برهان. برای اثبات باید هر نمونه از مساله پوشش راسی را با استفاده از مساله پوشش مجموعه‌ای حل نماییم. فرض کنید گراف $G(V,E)$ داده شده است. مجموعه U شامل تمام یال‌های گراف قرار دهید $(U=E)$ و همچنین به ازای هر راس i یک زیرمجموعه s_i در نظر بگیرید که شامل تمام یال‌هایی است که یک سر آنها راس i است. شکل زیر مثالی از این تبدیل را نشان می‌دهد. مشخصا اگر بتوانیم مساله پوشش مجموعه‌ای را بر این نمونه‌ی به دست آمده حل کنیم، کافی است راس‌های متناظر با مجموعه‌های انتخاب شده را برای مساله‌ی پوشش راسی برگردانیم. در شکل زیر می‌توانید این تبدیل و رابطه‌ی بین پاسخ دو مساله را ببینید. □

صدق‌پذیری [۸] در دانش رایانه پرسمانی است که می‌پرسد آیا می‌توان ارزش متغیرهای فرمولی دودویی را به گونه‌ای یافت که فرمول درست باشد؟ بنابراین اگر چنین ارزش‌دهی پیدا شود، گوییم پرسمان صدق‌پذیر است. وگرنه، بی‌گمان این فرمول همواره نادرست است و گوییم که فرمول صدق‌ناپذیر است. برای نمونه، فرمول $A \wedge B$ صدق‌پذیر است چون اگر ارزش‌های A و B درست باشند، فرمول نیز درست است.
پرسمان صدق‌پذیری نخستین پرسمانی است که ان‌پی کامل بودنش نشان داده شده است. کوک و لوین نشان دادند الگوریتمی شناخته‌شده‌ای نیست که در زمانی کوتاه پرسمان صدق‌پذیری را حل کند. محدودهٔ وسیعی از بقیهٔ مسائل تصمیم‌گیری و بهینه‌سازی طبیعی می‌توانند به موارد مسئلهٔ صدق‌پذیری تبدیل شوند. یک رده از الگوریتم‌ها به نام حل‌کننده‌های SAT به طور کارآمد می‌توانند زیرمجموعه‌ای به اندازهٔ کافی بزرگ از موارد SAT را حل کنند تا در حوزه‌های مختلف عملی از جمله طراحی مدار و قضیهٔ اثبات اتوماتیک مفید باشند. وسیعتر کردن قابلیت‌های الگوریتم‌های حل‌کنندهٔ SAT یک حوزهٔ در حال پیشرفت است. هرچند هیچ‌کدام از روش‌های کنونی نمی‌توانند همه‌ی موارد مسئلهٔ صدق‌پذیری را به طور کارآمد حل کنند. در نظریه پیچیدگی محاسباتی مسئلهٔ صدق‌پذیری یک مسئلهٔ تصمیم است که نمونهٔ آن یک عبارت بولی می‌باشد که فقط با AND، OR، NOT، متغیرها و پرانتز نوشته شده است. سؤال این است که: آیا می‌توان به متغیرها مقادیر ''درست'' و ''نادرست'' داد تا عبارت موردنظر همواره درست باشد؟ یک فرمول از منطق گزاره‌ای صدق‌پذیر است اگر به متغیرهای آن بتوان مقادیر منطقی داد تا فرمول همواره درست باشد. مسئلهٔ صدق‌پذیری دودویی یک ان‌پی کامل است. مسئلهٔ صدق‌پذیری گزاره‌ای، (PSAT) که مشخص می‌کند آیا یک فرمول گزاره‌ای صدق‌پذیر هست یا نه، مهمترین مسئله در حوزه‌های مختلف علوم رایانه است؛ نظیر علوم نظری رایانه، الگوریتم‌ها، هوش مصنوعی، طراحی پردازنده، اتوماسیون طراحی الکترونیکی و تایید.
یک متغیر یا خود آن متغیر و یا نقیضش است. به طور مثال $x_۱$ یک متغیر مثبت و $\sim x_۲$ یک متغیر منفی است. یک عبارت فصل منطقی از متغیرهاست. به طور مثال $x_۱ \vee \sim x_۲$ یک عبارت است.

[۸] Satisfiability

در بعضی حالت‌های مسئله صدق‌پذیری دودویی، نیاز است که فرمول عطف منطقی چند عبارت باشد. حالتی که صدق‌پذیری یک فرمول به شکل عطف معمولی را بررسی می‌کنیم که هر عبارت حداکثر دارای سه متغیر باشد، ان‌پی کامل است؛ این مسئله ''۳SAT'' یا ''۳CNFSAT'' یا ''۳ـ صدق‌پذیری'' نامیده می‌شود. حالتی که فرمول موردبررسی دارای عبارت‌هایی با حداکثر دو متغیر باشد، ان‌ال کامل است؛ این مسئله ''۲SAT'' نامیده می‌شود. حالتی که فرمول موردبررسی دارای عبارت‌های هورن (که حداکثر یک متغیر مثبت دارند.) باشد، پی کامل است؛ این مسئله صدق‌پذیری هورن نامیده می‌شود.
قضیه کوک لوین عنوان می‌کند که مسئله دودویی صدق‌پذیری یک ان‌پی کامل است، در واقع این اولین مسئله‌ایست که اثبات شده ان‌پی کامل است. همانطور که استفن کوک در سال ۱۹۷۱ اثبات کرد، مسئلهٔ SAT اولین مسئلهٔ ان‌پی کامل شناخته شد. (اثبات را در قضیه کوک لوین ببینید.) تا آن زمان مفهومی به نام ان‌پی کامل وجود نداشت. این مسئله ان‌پی کامل باقی می‌ماند هرچند که همهٔ عبارات به صورت عطفی معمولی با سه متغیر در هر عبارت (۳-CNF) باشند؛ یعنی عبارت به شکل زیر است:

$$(x_{۱۱} \vee x_{۱۲} \vee x_{۱۳}) AND$$

$$(x_{۲۱} \vee x_{۲۲} \vee x_{۲۳}) AND$$

$$(x_{۳۱} \vee x_{۳۲} \vee x_{۳۳}) AND...$$

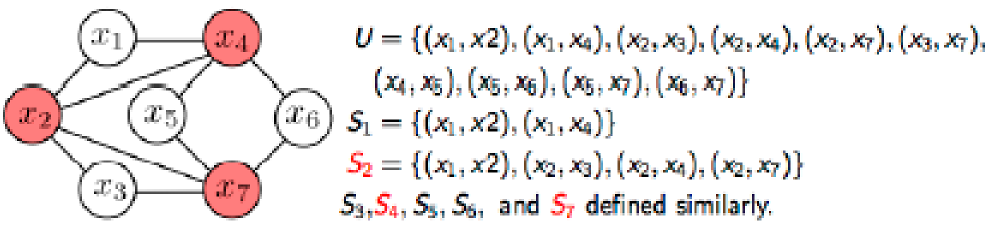
در اینجا هر x یک ''متغیر'' است و هر متغیر می‌تواند چندبار در عبارت تکرار شوند.
یک ویژگی مهم اختصار کوک آن است که تعداد جواب‌های درست را نگه می‌دارد. به طور مثال اگر یک گراف ۱۷ رنگ‌آمیزی سه‌گانه معتبر داشته باشد، قاعدهٔ SAT دارای ۱۷ واگذاری ارضاپذیر است.
ان‌پی کامل فقط به زمان اجرا در بدترین حالت ارجاع می‌دهد. بسیاری از مواردی که در کاربردهای عملی اتفاق می‌افتند می‌توانند خیلی سریعتر حل شوند.
مسئلهٔ SAT آسانتر است اگر فرمول‌ها به صورت فصلی معمولی باشند، یعنی بین عبارات OR و در هر عبارت بین متغیرها AND قرار گرفته باشد. این فرمول‌ها صدق‌پذیر هستند اگر و تنها اگر حداقل یکی از عبارات آن صدق‌پذیر باشند، و یک عبارت صدق‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر متغیر x هم خودش و هم NOT آن را دربرنداشته باشد. این موضوع می‌تواند در زمان چندجمله‌ای بررسی شود.
۳ـ صدق‌پذیری [۹] یک حالت خاص از k-SAT یا به طور ساده‌شده SAT است که هر عبارت دقیقاً k = ۳ متغیر را شامل می‌شود. این یکی از ۲۱ مسئله ان‌پی‌ـ کامل کارپ است.
در اینجا یک مثال می‌زنیم: ($\sim$ نشان‌دهندهٔ نقیض است.)

[۹] 3-Satisfiability

$$E = (x_۱ \vee \sim x_۲ \vee \sim x_۳) \wedge (x_۱ \vee x_۲ \vee x_۴)$$

E دارای دو عبارت (که با پرانتز مشخص شده‌اند)، چهار متغیر $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴$ و $k = ۳$ (سه متغیر در هر عبارت) می‌باشد. برای آنکه این مثال از مسئلهٔ تصمیم‌گیری را حل کنیم باید مشخص کنیم که آیا یک جدول درستی برای متغیرها وجود دارد به طوری که کل عبارت همواره درست باشد یا خیر. در این مثال با ''درست'' قرار دادن همه متغیرها، می‌توان E را همواره درست در نظر گرفت. واگذاری‌های متنوعی می‌توان انجام داد. اگر هیچ واگذاری‌ای امکان‌پذیر نبود، جواب ''خیر'' خواهد بود.
۳-SAT ان‌پی کامل است و به عنوان یک نقطهٔ شروع برای اثبات آنکه بقیهٔ مسائل هم ان‌پی سخت هستند استفاده می‌شود. این عمل با محدودیت زمانی چندجمله‌ای قابل انجام است. ۳-SAT می‌تواند به یک‌ــ درــ سه ۳ــ صدق‌پذیری محدود شود که در آن ما دقیقاً می‌پرسیم که آیا یکی از متغیرها در هر عبارت درست هست یا خیر، به جای اینکه حداقل یک متغیر را بررسی کنیم. این محدودیت نیز ان‌پی کامل باقی می‌ماند.

بر اساس نظر شونینگ (۱۹۹۰) یک الگوریتم سادهٔ تصادفی وجود دارد که در زمان $(۴/۳)^n$ اجرا می‌شود n تعداد عبارات. این الگوریتم به احتمال قوی موفق می‌شود تا دربارهٔ ۳-SAT درست تصمیم بگیرد. فرضیهٔ نمایی زمان آن است که هیچ الگوریتمی نمی‌تواند ۳-SAT را در زمان $\exp(o(n))$ حل کند.



مثال آ.۳.۲. مساله‌ی ۳ــ صدق‌پذیری به این صورت می‌باشد:
گزاره‌های $C_۱, C_۲, \ldots, C_k$ داده شده است. هر گزاره شامل ۳متغیر (عادی یا نقیض) است که با یکدیگر «یا» شده اند. متغیرها از مجموعه‌ی $X = \{x_۱, \ldots, x_n\}$ انتخاب شده اند. آیا یک مقداردهی (۰ و ۱) به متغیرها وجود دارد که مقدار تمام گزاره‌ها درست شود (مقدار true بگیرد)؟ نشان می‌دهیم: مجموعه مستقل $\preceq_p$ ۳ــ صدق‌پذیری
فرض کنید یک نمونه از مساله‌ی ۳ــ صدق‌پذیری به شما داده شده است. گراف زیر را از روی این نمونه بسازید:

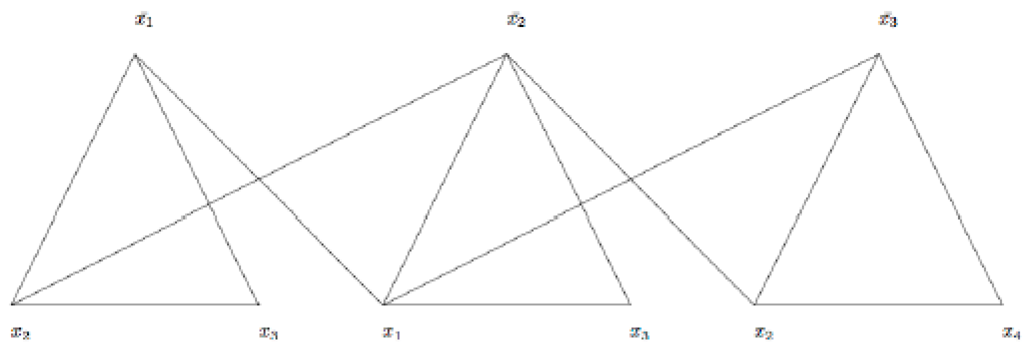
۱. به ازای هر گزاره ۳ راس ایجاد می‌کنیم که هر کدام مربوط به یکی از متغیرها می‌باشد.

۲. هر سه راس مربوط به یک گزاره را به هم متصل می‌کنیم.

۳. هر متغیر را به تمام نقیض‌هایش متصل می‌کنیم (مانند شکل ۲)

حال فرض کنید در گراف به دست آمده یک مجموعه مستقل با اندازه‌ی k وجود داشته باشد. چون تعداد گزاره‌ها برابر با k است، در این صورت مشخصا از راس‌های مربوط به هر گزاره یک راس انتخاب شده است و ضمنا هیچ دو راس انتخاب شده‌ای نقیض یکدیگر نیستند چون راس‌های نقیض به یکدیگر متصل بوده‌اند. بنابراین، کافی است متغیرهای مربوط به k راسی که در جواب مساله‌ی مجموعه مستقل راسی هستند را مقدار true بدهیم.

$$EX : \Phi = (\bar{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2} \vee x_3) \wedge (\bar{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$



تاکنون دیده‌ایم که (پوشش مجموعه‌ای $\preceq_p$ پوشش راسی) و (پوشش راسی $\equiv_p$ مجموعه مستقل) و همینطور (مجموعه مستقل $\preceq_p$ ۳ـ صدق‌پذیری). خاصیت تراگذر در کاهش برقرار می‌باشد و برای مثال می‌توان نتیجه گرفت: (پوشش مجموعه‌ای $\preceq_p$ ۳ـ صدق‌پذیری). بنابراین وجود یک الگوریتم چندجمله‌ای برای مساله پوشش مجموعه‌ای باعث می‌شود مساله‌ی پوشش راسی مجموعه مستقل و ۳ـ صدق‌پذیری نیز حل شوند.

۳.آ NP-Complete

تا به حال با دسته‌های P و NP و رابطه‌ی بین آن‌ها و همینطور تکنیک کاهش چند جمله‌ای آشنا شده‌اید. در این بخش به اصلی‌ترین نتیجه‌ای که در این زمینه وجود دارد می‌پردازیم. ابتدا دسته‌ی مساله‌های NP-Complete را تعریف می‌کنیم:

تعریف آ.۳.۱. مساله‌یX یک مساله‌ی NP-Complete است اگر:

۱. $X \in NP$

۲. به ازای هر مساله‌ی $Y \in NP$، مساله‌ی Y در زمان چند جمله‌ای به مساله‌یX کاهش پیدا کند. به عبارتی داشته باشیم: $Y \preceq_p X$.

مسلما اگر چنین مساله‌ای وجود داشته باشد، اگر بتوانیم این مساله را در زمان چند جمله‌ای حل نماییم (یعنی این مساله عضو P باشد) در این صورت تمام مساله‌های عضو NP را می‌توانیم در زمان چند جمله‌ای حل کنیم و این یعنی $P = NP$. بنابراین بهتر است که تمرکز خود را بر روی چنین مسائلی قرار دهیم. اما آیا چنین مساله‌ای وجود دارد؟ قضیه‌ی زیر وجود چنین مساله‌ای را نشان می‌دهد.

یک مسأله $NP-hard$ است اگر یک الگوریتم زمان_چندجمله‌ای برای یک مسأله، بتواند یک الگوریتم زمان_چندجمله‌ای برای هر مسأله NP بسازد. مسأله $NP - hard$ حداقل به‌سختی، سخت‌ترین مسائل NP هستند. به بیان دیگر یک مسأله H ، $NP - hard$ است. اگر هر مسأله L در NP بتواند در زمان_چند جمله‌ای به H کاهش یابد.
یک مسأله $NP - Complete$ است اگر یک مسأله $NP - hard$ باشد و این مسأله متعلق به کلاس NP باشد. سخت‌ترین مسائل مجموعه NP (به لحاظ زمانی) مجموعه $NP-Complete$ هستند. دراین مسائل تابه حال الگوریتم شناخته شده قابل اجرادرزمان چندجمله‌ای برایشان ارئه نشده و معمولا حدپایین نمایی برای زمان حل آن‌ها تعریف می‌شوند.
اغلب مسائل مجموعه NP ، درمجموعه $NP - Complete$ قرار دارند. به عنوان مثال اگر شما پسورد ایمیلتان را وارد کنید با یک مسأله‌ای از نوع p سروکار دارین ولی اگر پسورد ایمیلتان را ندانید و بخواهید یکی یکی امتحان کنید با یک ممسأله ازنوع $NP - Complete$ طرف هستید.
اگر نتوانستیم پیچیدگی الگورتیم را با ابزارها و ماشین تورینگ محاسبه کنیم، می‌توانیم مسائل بزرگتر را به مسائلی با کلاس پیچیدگی معلوم کاهش دهیم یعنی ساختار یک مسأله بزرگتر که پیچیدگی مشخص دارد را به مسأله کوچکتر تقلیل بدهیم. به‌طوری‌که تناظر یک به یک برقرار باشد. یک تبدیل از مسأله A به مسأله B ، یک فرآیندی است که مثال A به مثال B تبدیل می‌شود. پس جواب A در حالت کلی جوابی از B در مثال تبدیلی است. اگر ما یک تبدیل (زمان_چندجمله‌ای) مناسب از A به B داشته باشیم و هم‌چنین یک الگورتیم مناسب برای B داشته باشیم. آن‌گاه یک الگورتیم مناسب برای A خواهیم داشت. در این حالت می‌گوییم A به B کاهش یافته و یا تبدیل شده است. اگر مسأله A به مسأله B کاهش یابد و مسأله B درزمان p حل شود. آن‌گاه می‌توان گفت که مسأله A هم در زمان p قابل حل است. به‌علاوه اگر مسأله A به مسأله B کاهش یابد و مسأله A در زمان p حل نشود. می‌توان نتیجه گرفت که مسأله B در زمان p حل نخواهد شد. اگر A در $NP - hard$ باشد و توانسته باشیم با یک تبدیل زمان_چندجمله‌ای A را به B کاهش دهیم. آن‌گاه B یک مسأله $NP - hard$ است (یک الگوریتم چندجمله‌ای برای B ، یک الگوریتم چندجمله‌ای برای A نتیجه دهد)

قضیه آ.۳.۱ (کوک). مساله صدق‌پذیری مداری یک مساله‌ی $NP - Compelet$ است.

از تعریف مساله صدق‌پذیری مداری و اثبات قضیه کوک صرف نظر می‌کنیم. قضیه بعدی راه را برای مسائل $NP - Compelet$ بیشتر باز می‌کند:

قضیه آ.۳.۲. ۳_صدق‌پذیری $\preceq_p$ صدق‌پذیری مداری

این قضیه نشان می‌دهد که اگر مسال ۳ـ صدق‌پذیری در زمان چند جمله‌ای حل شود، مساله‌ی صدق پذیری مداری و در نتیجه تمام مساله‌های NP در زمان چند جمله‌ای حل خواهند شد. بنابراین مساله ۳ـ صدق‌پذیری یک مساله‌ی $NP - Compelet$ است. همچنین با توجه به کاهش‌هایی که در قسمت قبل انجام دادیم، تمام مساله‌های پوشش مجموعه‌ای، پوشش راسی و مجموعه مستقل نیز مساله‌های $NP - Compelet$ هستند. مسائل زیادی در این دسته وجود دارند. برای مثال مساله‌ی پیدا کردن دور یا مسیر همیلتونی در یک گراف نیز یک مساله‌ی $NP - Compelet$ است.

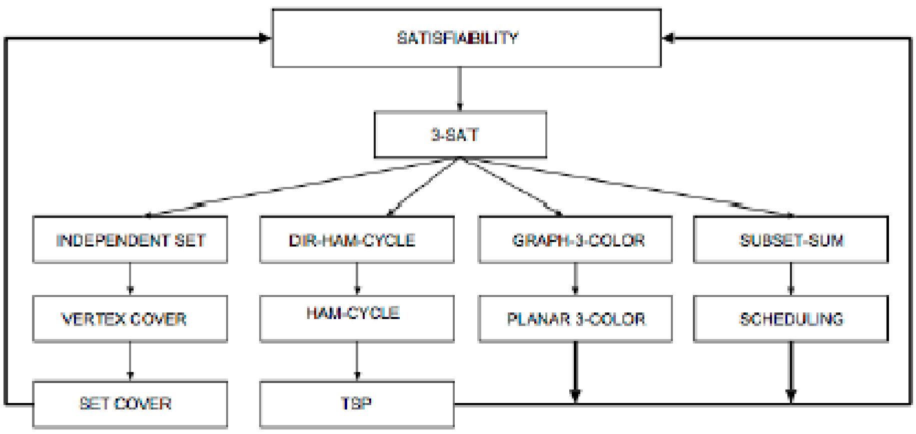
مثال آ.۱.۳. مساله جمع زیرمجموعه‌ها به این صورت است: مجموعه‌یN شامل n عدد داده شده است. آیا زیر مجموعه‌ای از این اعداد وجود دارد که جمع آنها دقیقا برابر باW شود؟
نشان می‌دهیم این مساله یک مساله‌ی $NP - Compelet$ است. برای این کار نشان می‌دهیم: (جمع زیرمجموعه‌ها $\preceq_p$ ۳ـ صدق پذیری) برای این کار فرض کنید یک نمونه از مساله ۳ـ صدق پذیری شامل k گزاره $C_1, \ldots, C_k$ داده شده است. فرض کنید متغیرها از مجموعه X شامل n متغیر باشد. حال یک نمونه از مساله‌ی جمع زیرمجموعه‌ها را شامل $2n+2k$ عدد که هر کدام از آن‌ها $n+k$ رقم هستند را به این صورت که در مثال نشان داده شده است بسازید:

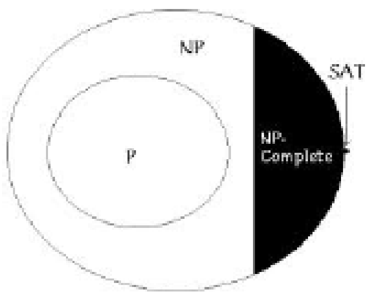
- $C_1 = \bar{x} \vee y \vee z$
- $C_2 = x \vee \bar{y} \vee z$
- $C_3 = x \vee y \vee \bar{z}$

	x	y	z	C_1	C_2	C_3	w_i
x	1	0	0	0	1	0	100,110
¬x	1	0	0	1	0	1	100,001
y	0	1	0	1	0	0	10,000
¬y	0	1	0	0	1	1	100,001
z	0	0	1	1	1	0	1,010
¬z	0	0	1	0	0	1	1,101
	0	0	0	1	0	0	100
	0	0	0	2	0	0	200
	0	0	0	0	1	0	10
	0	0	0	0	2	0	20
	0	0	0	0	0	1	1
	0	0	0	0	0	2	2
W	1	1	1	4	4	4	111,444

این جدول به این صورت ساخته شده که n سطر اول مربوط به متغیرها و نقیض آنها است. به ازای هر متغیر ستون مربوط به آن متغیر برابر با یک است. همچنین ستونی که مربوط به گزاره‌ای است که شامل آن متغیر می‌باشد نیز یک است. k سطر آخر هم سطرهای اضافه است که با آنها بتوانیم جمع یک ستون را به مقدار ۴ برسانیم. حال کافی است مقدار W خود را برابر با ۴...۱۴۴...۱۱ که در آن تعداد یک‌ها برابر با تعداد متغیرها و تعداد ۴ها برابر با تعداد گزاره‌ها است. یک‌های ابتدایی نشان می‌دهد که از هر متغیر خودش و یا نقیضش باید انتخاب شده باشد و۴ نشان می‌دهد که هر گزاره باید ارضا شده باشد. توجه کنید که هر تعداد از متغیرهای یک گزاره که برابر با ۱ باشند، با استفاده ۴k سطر آخر می‌توان مقدار ستون مربوط به آن را به ۴ رساند.

تا کنون هیچ الگوریتم چند جمله‌ای برای مساله‌های $NP-Compelet$ داده نشده است و به نظر هم نمی‌رسد که چنین الگوریتم‌هایی وجود داشته باشد.دو تصویر، یکی نمودار ون مربوط به مجموعه‌های P, NP و دیگری نمودار کاهش مساله‌های به یکدیگر را می‌توانید مشاهده کنید. یال جهت دار ازX به Y یعنی $X \preceq_p Y$. خاصیت تراگذری نشان می‌دهد که تمام مسائل $NP-Compelet$ نشان داده شده دارای درجه سختی یکسانی می‌باشند. اگر ثابت بشود که یکی از مساله‌های NP − complete در زمان چند جمله‌ای راه حل دارد، نمودار ون تغییر می‌کند و تمام مجموعه‌های P و NP و$NP-Compelet$ تبدیل به یک مجموعه می‌شود. این اتفاق تا امروز نیافتاده است.





واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

برگ . . . . Leaf
پوشش رأسی . . . . Vertex covering
پوشش یالی . . . . Edge covering
تاج . . . . Corona
تطابق . . . . Matching
تنها . . . . single
جامع . . . . Exhaustive
جنگل . . . . Forest
خروج از مرکز . . . . Eccentricity
خوشه . . . . Clique
درجه . . . . Degree
درخت . . . . Tree
دور . . . . Cycle
دوربدون وتر . . . . Cordless Cycle
دور همیلتونی . . . . Hamiltonian cycle
رأس پایانی . . . . End-vertex
ریشه . . . . Stem
زوج ستاره . . . . Duoble star
زیر تقسیم . . . . Subdivision
زیر گراف . . . . Subgragh
زیر گراف القایی . . . . Induced Subgragh
شعاع . . . . Radius
گراف . . . . Gragh
گراف بدیهی . . . . Trival graph
گراف تاج . . . . Corona of two graphr
گراف تهی . . . . Empty graph

گراف پترسن .... Petersen Graph
گراف چرخ .... wheel graph
گراف چند بخشی .... Multi-part graph
گراف دو بخشی .... Bipartite graph
گراف ساده .... Simple graph
گراف ستاره .... Star graph
گراف غیر بدیهی .... Nontrival graph
گراف کامل .... Complete graph
گراف متناهی .... Finite graph
گراف منتظم .... Regular graph
گراف نامتناهی .... Infinite graph
گراف ناهمبند .... Disconnected graph
گراف وتری .... Chordal graph
گراف همبند .... Connected graph
گراف همیلتونی .... Hamiltonian graph
گذر .... Trail
گشت .... Walk
طوقه .... Loop
غیر جامع .... non-exhaustive
فاصله .... Distance
فرم نرمال عطفی .... Conjunctive normal from
قطر .... Diameter
عدد احاطه‌گری تام مجزا .... disjoint total domination number
عدد احاطه‌گری مستقل مجزا .... disjoint independent domination number
عدد احاطه‌گرواحاطه‌گری مستقل مجزا .... Disjoint dominating and independent dominating number
عدد احاطه‌گری مجزا .... disjoint domination number
متمم .... Complementary
مرتبه .... Order
مجاور .... adjacent
مجموعه احاطه‌گر .... Dominating set
مجموعه احاطه‌گر تام .... Total dominating set
مجموعه احاطه‌گر مستقل .... Independent dominating set
مجموعه احاطه‌گر تام معکوس .... Inverse total dominating set

مجموعه احاطه‌گر معکوس .... Inverse dominating set
مجموعه مستقل .... independent set
مجموعه مستقل ماکسیمال .... Maximal independent set
مستقل یالی .... independent edge
مسیر .... Path
مسیر همیلتونی .... Hamiltonian Path
مکمل .... Complementary
همسایگی باز .... Open neighbourhood
همسایگی بسته .... Closed neighbourhood
یال برشی .... Bridge
یال های چندگانه .... Multiple edges

Aabstract

A set $D \subseteq V$ of vertices in a graph $G = (V, E)$ is a dominating set if every vertex in $V - D$ is adjacent to a vertex in D. The minimum cardinality of a dominating set is called the domination number of G and is denoted by $\gamma(G)$. A set $D \subseteq V$ of vertices in a graph G is a total dominating set if every vertex in V is adjacent to a vertex in D. The minimum cardinality of atotal dominating set is called the total domination number of G and is denoted by $\gamma_t(G)$. The disjoint total domination number$\gamma_t\gamma_t(G)$ of graph G is defined as follows:

$$\gamma_t\gamma_t(G) = \min\{|D_1| + |D_2| : D_1, D_2 \quad \text{are disjoint total dominating sets of G}\}$$

In this thesis, We study disjoint total dominating sets in graphs and obtion several exact valuse, Bounds and caracterizations.
Keywords: domination number, inverse domination number, total domination number, inverse total domination number, disjoint domination number, disjoint total domination number

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and combinatorics

Disjoint total dominination number of graphs

By: Parinaz Soltan

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

Advisor

Seyed Reza Musawi

September 2017