

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

روش شبه طیفی چبیشف برای حل مسائل کنترل بهینه کسری

نگارنده: مرضیه حبیب‌الی

استادان راهنما

دکتر علیرضا ناظمی
دکتر محمدهادی نوری اسکندری

شهریور ۱۳۹۶

تقدیم بہ مریم ام ؛

کہ نہ توان پاشکو پی مادرانہ ہائش را دارم

و نہ یار امی اعادہ آن ؛

ومن ، تا آخر و تا بعد از ابد ، رہین منت

اویم ...

تہایک چیز برائش دارم کہ می دانم

هر آنچه در مورد آن اتفاق بیفتد، در سراسر
جهان اثر دارد و آن عشق است...

To my Maryam;

I have no potency to be responsible of your
maternities and also no power to offset.

Just one thing I have as a gift which is the
basis of the universe of my heart; and it is
the sheer Love...

Till after ay, I'm debtor to you, mom...

سپاس‌گزاری...

سپاس بی‌پایان از خداوند حکیم و علیم که انسان را عقل قرار داد و من را در این مسیری که هستم.

تکلیف خود می‌دانم که از زحمات زیاد استاد راهنمای گرانقدر خود، دکتر علیرضا ناظمی تشکر فراوان داشته باشم و همچنین از زحمات بی‌دریغ و لطف‌های بسیار زیاد استاد راهنمای عالیقدر خود، دکتر محمدهادی نوری‌اسکندری قدردانی ویژه داشته باشم که با متانت اصیل، راهنمایی‌های بجا و دقیقشان، مقام استادی را در حق من تمام کردند که از این روی، همیشه مدیون ایشان هستم. از اساتید داور ارجمند که قبول زحمت مطالعه این پایان‌نامه را پذیرفته‌اند، کمال امتنان را دارم. و در آخر، می‌فشارم دستان تک‌تک اعضای خانواده‌ام را که بدون وجودشان، این مجموعه آغازی نداشت که پایانی داشته باشد و تشکر فراوان از تک‌تک عزیزانی که مرا در این مسیر یاریگر بوده‌اند.

مرضیه حبیب‌لی

شهریور ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب مرضیه حبیب‌لی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان روش شبه‌طیفی چبیشف برای حل مسائل کنترل بهینه کسری، تحت راهنمایی علیرضا ناظمی و محمدهادی نوری اسکندری متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مرضیه حبیب‌لی

شهریور ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، ما دو روش جدید مختلف را برای حل مسائل کنترل بهینه کسری ارائه می‌کنیم. روش اول ما، یک روش غیرمستقیم است که در آن متغیرهای وضعیت و کنترل مسأله را در نقاط چبیشف-گاوس تقریب می‌زنیم. برای این منظور، تابع درون‌یاب لاگرانژ کسری را تعریف کرده و به کار می‌بریم. همچنین شرایط لازم بهینگی کسری را بیان و اثبات می‌کنیم. با بکارگیری شرایط لازم بهینگی، مسأله کنترل بهینه کسری به یک دستگاه معادلات غیرخطی تبدیل می‌شود. اما روش دوم، یک روش مستقیم است که در آن مسأله کنترل بهینه کسری را به یک مسأله حساب تغییرات کسری معادل تبدیل می‌کنیم و سپس با استفاده از فرمول کلنشاو-کورتیس و نقاط چبیشف-گاوس-لوباتو، مسأله را به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کنیم.

سازماندهی پایان‌نامه بدین صورت است که ابتدا تعاریف و مفاهیم مقدماتی را بیان می‌کنیم. سپس، به معرفی مسأله کنترل بهینه کسری می‌پردازیم و شرایط لازم بهینگی کسری را بیان و اثبات می‌کنیم. پس از آن، یک روش شبه‌طیفی غیرمستقیم را برای حل مسأله کنترل بهینه کسری ارائه می‌کنیم. در ادامه، به بیان یک روش مستقیم بر پایه فرمول کلنشاو-کورتیس برای حل مسائل کنترل بهینه کسری می‌پردازیم و در نهایت، نتایج و پیشنهادات را ارائه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: روش شبه‌طیفی چبیشف، کنترل بهینه کسری، شرایط لازم بهینگی کسری، فرمول کلنشاو-کورتیس، مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مرضیه حبیبلی، علیرضا ناظمی، محمدهادی نوری اسکندری، « یک رهیافت تقریبی برای حل رده‌ای خاص از مسائل کنترل بهینه کسری»، «۴۸امین کنفرانس ریاضی ایران، ۳۱ مرداد تا ۳ شهریور، دانشگاه بوعلی سینا، همدان».
2. M. Habibli, M. H. Noori Skandari, "Fractional Chebyshev Pseudospectral Method for Fractional Optimal Control Problems", Submitted.
3. M. H. Noori Skandari, M. Habibli, A. Nazemi, "A Direct Method Based on the Clenshaw-Curtis Formula for Fractional Optimal Control Problems", Submitted.

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ مفاهیم و مقدمات اولیه
۱	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ چند جمله‌ای‌های متعامد
۳	۳.۱ چند جمله‌ای چبیشف
۳	۴.۱ نقاط درونیابی
۴	۵.۱ فرمول کلنشاو- کورتیس
۴	۶.۱ مسأله حساب تغییرات و کنترل بهینه کلاسیک
۴	۱.۶.۱ تابعی
۵	۲.۶.۱ مسأله حساب تغییرات کلاسیک
۵	۳.۶.۱ مسأله کنترل بهینه کلاسیک
۵	۷.۱ معادله اویلر- لاگرانژ
۶	۱.۷.۱ اصل بیشینه پونتریاگین
۶	۲.۷.۱ روش مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه
۷	۳.۷.۱ روش غیرمستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه
۷	۸.۱ تابع گاما
۷	۱.۸.۱ برخی خواص تابع گاما
۸	۹.۱ تابع بتا
۸	۱.۹.۱ برخی خواص تابع بتا
۸	۱۰.۱ حساب کسری (انتگرال‌ها و مشتقات مرتبه کسری)
۸	۱.۱۰.۱ انتگرال کسری ریمان- لیوویل
۹	۲.۱۰.۱ مشتق کسری ریمان- لیوویل
۱۰	۳.۱۰.۱ برخی خواص مشتق کسری چپ ریمان- لیوویل

۱۰	۴.۱۰.۱	مشتق کسری کاپوتو
۱۳		۲	مسأله کنترل بهینه کسری و شرایط لازم بهینگی کسری
۱۳	۱.۲	مسأله کنترل بهینه کسری
۱۴	۲.۲	شرایط لازم بهینگی کسری
۱۹		۳	یک روش شبه‌طیفی چبیشف غیرمستقیم برای حل مسأله کنترل بهینه کسری
۱۹	۱.۳	مقدمه
۲۰	۲.۳	چندجمله‌ای چبیشف شیفت داده شده
۲۰	۳.۳	تابع درون‌یاب لاگرانژ کسری
۲۱	۴.۳	پیاده‌سازی روش
۲۲	۵.۳	نتایج عددی
۳۳		۴	یک روش تقریبی مستقیم بر پایه فرمول کلنشاو- کورتیس
۳۳	۱.۴	مسأله کنترل بهینه کسری
۳۴	۲.۴	پیاده‌سازی روش
۳۷	۳.۴	نتایج عددی
۴۹		۵	نتایج و پیشنهادات
۴۹	۱.۵	نتایج
۵۰	۲.۵	پیشنهادات
۵۱			مراجع
۵۵			واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۵۷			واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۲۴	متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۱ برای $N = ۸$	۱.۳
۲۴	متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۱ برای $N = ۸$	۲.۳
۲۵	خطای مطلق متغیر وضعیت مثال ۱ برای $N = ۸$ و $\alpha = ۵\%$	۳.۳
۲۵	خطای مطلق متغیر کنترل مثال ۱ برای $N = ۸$ و $\alpha = ۵\%$	۴.۳
۲۷	متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۲ برای $N = ۸$	۵.۳
۲۷	متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۲ برای $N = ۸$	۶.۳
۲۸	خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۲ برای $N = ۸$ و $\alpha = ۵\%$	۷.۳
۳۰	متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۳ برای $N = ۸$	۸.۳
۳۰	متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۳ برای $N = ۸$	۹.۳
۳۱	خطای مطلق متغیر وضعیت مثال ۳ برای $N = ۸$ و $\alpha = ۵\%$	۱۰.۳
۳۱	خطای مطلق متغیر کنترل مثال ۳ برای $N = ۸$ و $\alpha = ۵\%$	۱۱.۳
۳۸	متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۱ برای $N = ۴$	۱.۴
۳۹	متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۱ برای $N = ۴$	۲.۴
۳۹	خطای مطلق متغیر وضعیت مثال ۱	۳.۴
۴۰	خطای مطلق متغیر کنترل مثال ۱	۴.۴
۴۲	متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۲ برای $N = ۶$	۵.۴
۴۲	متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۲ برای $N = ۶$	۶.۴
۴۳	خطای مطلق متغیر وضعیت مثال ۲	۷.۴
۴۳	خطای مطلق متغیر کنترل مثال ۲	۸.۴
۴۵	متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۳ برای $N = ۶$	۹.۴
۴۵	متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۳ برای $N = ۶$	۱۰.۴
۴۶	خطای مطلق متغیر وضعیت مثال ۳	۱۱.۴
۴۶	خطای مطلق متغیر کنترل مثال ۳	۱۲.۴

فهرست جداول

۲۴	مقادیر بهینه تابع هدف مثال ۱ برای $N = 8$	۱.۳
۲۶	ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و متغیر کنترل مثال ۱ برای $N = 8$	۲.۳
۲۸	مقدار بهینه تابع هدف مثال ۲ برای $N = 8$	۳.۳
۲۸	..	ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۲ برای $N = 8$	۴.۳
۲۹	مقدار بهینه تابع هدف مثال ۳ برای $N = 8$	۵.۳
۳۰	..	ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۳ برای $N = 8$	۶.۳
۳۹	مقدار بهینه تابع هدف مثال ۱ برای $N = 4$	۱.۴
۴۰	..	ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۱ برای $N = 4$	۲.۴
۴۲	..	ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۲ برای $N = 6$	۳.۴
۴۳	مقدار بهینه تابع هدف مثال ۲ برای $N = 6$	۴.۴
۴۶	..	ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۳ برای $N = 6$	۵.۴
۴۷	مقدار بهینه تابع هدف مثال ۳ برای $N = 6$	۶.۴

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

۱.۱ مقدمه

مفهوم و ایده‌ی حساب کسری در سال ۱۶۹۵ توسط لایب‌نیتز^۱ طی یادداشتی به هوییتال ارائه شد که در آن معنا و مفهوم مشتق مرتبه $\frac{1}{p}$ مطرح شد. بعد از آن، ریاضیدانان و محققان زیادی در این زمینه کار کردند که می‌توان به مطالعات اوایلر (۱۷۳۰)، لاگرانژ (۱۷۷۲)، لاپلاس (۱۸۱۲)، لارنت (۱۸۱۴)، نکراسو (۱۸۱۸)، فوریه (۱۸۲۲)، آبل (۱۸۲۳)، لیوویل (۱۸۳۲)، ریمان (۱۸۴۷)، گریر (۱۸۵۹)، گرانوالد (۱۸۶۷)، لتنیکوف (۱۹۶۸)، سانین (۱۸۶۹)، هادامارد (۱۸۹۲)، پنیچرل (۱۹۰۲)، هاردی و لیتل‌وود (۱۹۱۷)، ویل (۱۹۱۹)، لوی (۱۹۲۳)، داویس (۱۹۲۴)، زیگموند (۱۹۳۵)، لاو (۱۹۳۸)، اردلی (۱۹۳۹)، کابر (۱۹۴۰)، وایدنر (۱۹۴۱)، ریس (۱۹۴۹) و فلر (۱۹۵۲) اشاره کرد [۲۸].

اولین کاربرد مشتق کسری (مشتق از مرتبه $\frac{1}{p}$) توسط آبل در سال ۱۸۲۳ انجام گرفت [۲۰]. در طی سه قرن، نظریه‌ی مشتقات کسری اساساً فقط از جنبه محض پیشرفت کرد و به همین دلیل تنها برای شاخه‌ی ریاضیات مفید واقع شد. در دو دهه اخیر، پیشرفت‌های قابل توجهی در زمینه مفهوم حساب کسری انجام شده است و کتاب‌های بسیار غنی در این زمینه وجود دارد از جمله [۲۴]، [۲۲]، [۲۰]، [۱۷]. در دنیای واقعی، مشتقات و انتگرال‌های کسری نسبت به مشتقات و انتگرال‌های مرتبه صحیح، مدل‌های دقیق‌تری را برای دستگاه‌های فیزیکی و

^۱Leibniz

پدیده‌های طبیعی بدست می‌دهد.

کنترل بهینه، یک شاخه از ریاضیات است که طی سال‌های زیادی توسعه یافته است. اما می‌توان گفت که نظریه کنترل بهینه کسری یک موضوع نسبتاً جدید است که طی سال‌های اخیر مورد توجه محققان رشته‌های گوناگون علوم قرار گرفته است. کنترل بهینه کسری، تعمیمی از کنترل بهینه کلاسیک تحت سیستم‌های دینامیکی کسری می‌باشد که با توجه به تعاریف متفاوتی که از مشتقات مرتبه کسری داریم، تعریف می‌شود. با توجه به کارهای ارائه شده این‌طور برمی‌آید که مهم‌ترین نوع مشتقات مرتبه کسری، ریمان-لیوویل^۲ و کاپوتو^۳ می‌باشد. در سال‌های اخیر، کارهای بسیاری در این زمینه توسط محققان ارائه شده است. به عنوان مثال، آگراوال^۴ [۴] شرایط لازم بهینگی را برای مسائل کنترل بهینه کسری با مفهوم ریمان-لیوویل ارائه کرده است و در [۵] به فرمول مشابه برای مسائل کنترل بهینه کسری با مفهوم کاپوتو رسید. پوسه^۵ و همکاران [۲۳] مسائل کنترل بهینه کسری‌ای را حل کردند که سیستم دینامیکی آن، هم دارای مشتق کسری و هم مشتق معمولی است. سویلیم^۶ و همکاران [۲۵] دو روش متفاوت بر پایه چندجمله‌ای‌های چبیشف^۷ را برای حل مسائل کنترل بهینه کسری ارائه دادند. روش اول آن‌ها یک روش غیرمستقیم است که در آن از شرایط لازم بهینگی کسری برای حل مسأله استفاده می‌کنند و روش دوم، یک روش مستقیم بر پایه فرمول کلنشاو-کورتیس^۸ می‌باشد که در آن مسأله کنترل بهینه کسری به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی تقلیل می‌یابد. آلمدیا^۹ و تورس^{۱۰} [۷] یک روش مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه کسری ارائه دادند که در آن مسأله کنترل بهینه کسری را به یک نوع جدید آن که فقط شامل مشتقات معمولی می‌باشد، تبدیل می‌کنند. لطفی و همکاران [۱۶] یک روش مستقیم بر پایه چندجمله‌ای‌های لژاندر ارائه دادند. کشاورز و همکاران [۱۴] نیز یک روش مستقیم بر پایه چندجمله‌ای‌های برنولی ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از خواص چندجمله‌ای برنولی، مسأله بهینه‌سازی خود را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کنند. از جمله کارهای دیگر در این زمینه می‌توان [۸]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۷] را نام برد. ذکر این نکته حائز اهمیت است که مسائل کنترل بهینه کسری در بسیاری از زمینه‌های علوم کاربرد دارد که از آن جمله می‌توان مدل‌های هوافضا [۳]، رباتیک [۱۲]، اقتصاد [۹] و پزشکی [۱۰] را نام برد.

^۲Riemann-Liouville

^۳Caputo

^۴Agrawal

^۵Pooseh

^۶Sweilam

^۷Chebyshev polynomials

^۸Clenshaw-Curtis

^۹Almedia

^{۱۰}Torres

۲.۱ چندجمله‌ای‌های متعامد

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید (a, b) یک بازه‌ی باز متناهی یا نامتناهی در \mathbb{R} باشد. یک دستگاه (یا مجموعه) از چندجمله‌ای‌های $\{P_n(x)\}$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$ را نسبت به وزن $w(x) \geq 0$ روی (a, b) متعامد گویند، هرگاه

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = 0,$$

که در آن $n \neq m$. در این جا $w(x)$ ، پیوسته یا قطعه‌قطعه پیوسته یا انتگرال‌پذیر متناظر چندجمله‌ای $P_n(\cdot)$ است.

۳.۱ چندجمله‌ای چبیشف

تعریف ۱.۳.۱. چندجمله‌ای‌های چبیشف، دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که در نظریه تقریب از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول روی بازه $[-1, 1]$ طبق رابطه بازگشتی زیر تعریف می‌شوند [۲]

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_{N+1}(x) = 2xP_N(x) - P_{N-1}(x), \quad N = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.1)$$

فرم مثلثاتی چندجمله‌ای چبیشف از درجه N بصورت زیر می‌باشد

$$P_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & |x| \leq 1, \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & x \geq 1, \\ (-1)^n \cosh(n \cosh^{-1}(-x)), & x \leq -1. \end{cases}$$

۴.۱ نقاط درونیابی

در بحث تقریب توابع و مسائل پیوسته زمانی با روش‌های طیفی و شبه‌طیفی، یکی از انواع نقاط زیر استفاده می‌شود

(الف) نقاط چبیشف-گوس؛ که بصورت $t_k = -\cos(\frac{2k+1}{N}\pi)$ برای $k = 0, 1, \dots, N$ روی بازه $(-1, 1)$ تعریف می‌شود و ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف $P_N(\cdot)$ می‌باشد.

(ب) نقاط چبیشف-گوس-لوباتو؛ که بصورت $t_k = \cos(\frac{N-k}{N}\pi)$ برای $k = 0, 1, \dots, N$ روی بازه $[-1, 1]$ تعریف می‌شود. این نقاط ریشه‌های $(1-t^2)\frac{d}{dt}P_N(t)$ می‌باشد که $P_N(\cdot)$ چندجمله‌ای چبیشف می‌باشد.

(ج) نقاط چبیشف-گوس-رادو؛ که جواب‌های معادله زیر می‌باشد

$$P_{N-1}(t) + P_N(t) = 0.$$

۵.۱ فرمول کلنشاو-کورتیس

تعریف ۱.۵.۱. یکی از روش‌های تقریب انتگرال، فرمول کلنشاو-کورتیس می‌باشد. فرض کنید $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. فرمول کلنشاو-کورتیس به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{j=0}^N w_j f(t_j). \quad (2.1)$$

در رابطه (۲.۱)، t_j ریشه‌های $(1-t^2) \frac{d}{dt} P_N(t)$ می‌باشد و $P_N(t)$ چندجمله‌ای‌های چبیشف از مرتبه N می‌باشد و w_j برای $j = 0, 1, \dots, N$ ، وزن‌های مربع‌سازی تقریب عددی هستند. برای N زوج، وزن‌ها به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{cases} w_0 = w_N = \frac{1}{(N^2-1)}, \\ w_s = w_{N-s} = \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{1-4j^2} \cos\left(\frac{2\pi js}{N}\right), \quad s = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, \end{cases}$$

و برای N فرد داریم

$$\begin{cases} w_0 = w_N = \frac{1}{(N^2)}, \\ w_s = w_{N-s} = \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{1-4j^2} \cos\left(\frac{2\pi js}{N}\right), \quad s = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}. \end{cases}$$

علامت زگوند در وزن‌های مربع‌سازی نشان می‌دهد که اولین و آخرین عناصر در مجموع باید نصف شوند. [۱۱]

برای $N+1$ نقطه درونیابی، فرمول تقریب انتگرال کلنشاو-کورتیس برای هر چندجمله‌ای از مرتبه N دقیق است و برای هر تابع پیوسته همگرا می‌باشد. ترفتن^{۱۱} [۲۶] دقت بسیار بالای فرمول کلنشاو-کورتیس را ارائه کرده و بعلاوه تأکید کرده است که دقت فرمول کلنشاو-کورتیس به اندازه انتگرال‌گیری گوس مربع‌سازی می‌باشد.

۶.۱ مسأله حساب تغییرات و کنترل بهینه کلاسیک

۱.۶.۱ تابعی

یک تابع است که بر یک یا مجموعه‌ای از توابع عمل می‌کند و مجموعه اعداد متناظرش را به عنوان تولید می‌کند. [۲۱]

^{۱۱}Trefethen

۲.۶.۱ مسأله حساب تغییرات کلاسیک

حساب تغییرات نامی است که به نظریه بهینه‌سازی انتگرال‌ها اطلاق می‌شود. یکی از اولین مسائل در این زمینه، می‌نیمم کردن یک انتگرال است که به وسیله جان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۷) در سال ۱۶۹۴ مطرح شد. ساده‌ترین نوع مسأله بدین صورت می‌باشد که هدف پیدا کردن منحنی $x = x(t)$ است که نقطه ثابت $(t, x) = (a, b)$ را به نقطه ثابت $(t, x) = (c, d)$ وصل می‌کند و به تابعی

$$J(x(\cdot)) = \int_a^c F(t, x, \dot{x}) dt$$

کم‌ترین مقدار را نسبت می‌دهد [۲۱].

۳.۶.۱ مسأله کنترل بهینه کلاسیک

نظریه کنترل بهینه، یک نسخه جدید از نظریه حساب تغییرات است که در آن، قیدها به صورت دینامیکی و پیچیده‌تر ظاهر می‌شوند. تنظیم صورت هر مسأله کنترل بهینه احتیاج به موارد زیر دارد [۱۵]

۱. بیان ریاضی یا مدل سیستمی که باید کنترل شود،

۲. بیان محدودیت‌های فیزیکی،

۳. تعیین نحوه عملکرد سیستم.

یک مسأله کنترل بهینه می‌تواند به صورت زیر بیان شود

$$\text{Minimize } J(x, u) = \psi(b, x(b)) + \int_a^b g(t, x(t), u(t)) dt \quad (۳.۱)$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)), \quad (۴.۱)$$

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta. \quad (۵.۱)$$

که در آن $u(\cdot)$ متغیر کنترل، $x(\cdot)$ متغیر وضعیت و $\dot{x}(t)$ مشتق معمولی متغیر وضعیت می‌باشد و $F, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ و $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی مشتق‌پذیر هستند.

۷.۱ معادله اویلر- لاگرانژ

مسأله حساب تغییرات زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J(x) = \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (۶.۱)$$

$$\text{subject to } x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta, \quad (۷.۱)$$

اگر $x(t)$ جواب بهینه مسأله (۶.۱) و (۷.۱) باشد و a, b, α و β معلوم باشد، آن گاه

$$F_x(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 0. \quad (۸.۱)$$

معادله دیفرانسیل (۸.۱) شرط لازم بهینگی برای مسأله حساب تغییرات (۶.۱) و (۷.۱) می باشد و معادله اوایلر-لاگرانژ نامیده می شود. [۲۱]

۱.۷.۱ اصل بیشینه پونتریاگین

قضیه ۱.۷.۱. فرض کنیم $u^*(\cdot)$ یک کنترل قابل قبول برای دستگاه (۴.۱) باشد به طوری که مسیر متناظر آن نیز $x^*(\cdot) = (x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot))$ باشد که دستگاه را از x^0 در زمان $t = t_0$ به x^1 در زمان غیرمشخص t_1 هدایت می کند. برای اینکه u^* و x^* بهینه باشد (یعنی J را کمینه کند) لازم است که بردار غیرصفر $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)^T$ که در $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ صدق می کند و نیز تابع عددی

$$H(\psi, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u)$$

موجود باشد به طوری که

(الف) به ازای هر $t_0 \leq t \leq t_1$ ، H به بیشینه خود نسبت به u در $u = u^*(t)$ برسد.

(ب) $H(\psi^*, x^*, u^*) = 0$ و در $t = t_1$ ، $\psi_0 \leq 0$ ، که $\psi^*(t)$ جواب $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ به ازای $u = u^*(t)$ می باشد.

بعلاوه می توان نشان داد که

$$H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \text{عدد ثابت}$$

و نیز، عدد ثابت $\psi_0(t) = 0$ ، بنابراین به ازای هر نقطه روی مسیر بهینه، $H = 0$ و $\psi_0(t) \leq 0$.

□

برهان. به [۲۱] مراجعه شود.

۲.۷.۱ روش مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه

روش مستقیم، مسائل کنترل بهینه را برای سیستم های غیرخطی و کاملاً پیوسته حل می کند که بر پایه یک گسسته سازی نسبت به زمان است. این بدان معناست که مسأله برای یافتن متغیرهای کنترل و وضعیت بهینه، به برنامه ریزی غیرخطی با ارزش گذاری مقادیر کنترل و وضعیت فقط در یک تعداد متناهی از نمونه های زمان تبدیل می شود. با تغییر دادن مقادیر کنترل و وضعیت در آن نمونه ها، تابع هزینه بطور مستقیم بهینه می شود. مسأله بدست آمده می تواند با روش های برنامه ریزی غیرخطی حل شود.

۳.۷.۱ روش غیرمستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه

در این روش، به جای می‌نیمم کردن تابع هزینه در روش مستقیم، جواب بهینه از صادق بودن در شرایط بهینگی بدست می‌آید. با توجه به مسأله کنترل بهینه داده شده، شرایط بهینگی منجر به دستیابی به مسأله با مقادیر کران دونقطه‌ای و یا چندنقطه‌ای می‌شود که شامل معادلات دیفرانسیل برای متغیر وضعیت پیوسته و متغیرهای الحاقی پیوسته، معادله جبری برای کنترل پیوسته و شرایط کران‌داری برای متغیرهای وضعیت، متغیرهای الحاقی و زمان است. در برخی موارد خاص پیوستگی کامل سیستم‌های خطی و هزینه‌های درجه دوم، می‌توان یک راه‌حل تحلیلی برای مسئله با شرایط مرزی پیدا کرد.

۸.۱ تابع گاما

یکی از توابع پایه‌ای حساب کسری، تابع گامای اوایلر $\Gamma(z)$ است. این تابع تعمیمی از تابع $n!$ می‌باشد و n اعداد ناصحیح و حتی مختلط را نیز اختیار می‌کند و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

که در نیمه راست صفحه مختلط ($Re(z) > 0$) به یک انتگرال ناسره همگرا می‌شود. همچنین تابع گاما را می‌توان به صورت حدی زیر نیز تعریف کرد [۲۲]

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad Re(z) > 0.$$

۱.۸.۱ برخی خواص تابع گاما

برخی از خواص تابع گاما به صورت زیر است

$$1. \Gamma(1) = 1$$

$$2. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$3. \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad Re(z) > 0$$

$$4. \Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$5. \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad Re(z) > -n, n \in \mathbb{N}, z \notin \{0, -1, \dots\}$$

در خاصیت آخر، $(z)_n$ نماد پوکهامر می‌باشد و برای $z \in \mathbb{C}$ و عدد صحیح نامنفی n به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1).$$

۹.۱ تابع بتا

در بسیاری از موارد از تابعی به نام تابع بتا، به جای ترکیب خاصی از مقادیر تابع گاما مناسب‌تر است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0). \quad (9.1)$$

۱.۹.۱ برخی خواص تابع بتا

$$1. \quad B(x, y) = B(y, x)$$

$$2. \quad B(x, y+1) = \frac{y}{x} B(x+1, y) = \frac{y}{x+y} B(x, y)$$

$$3. \quad B(x, y) B(x+y, z) = B(y, z) B(y+z, x) = B(z, x) B(z+x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(x+y+z)}$$

$$4. \quad B\left(\frac{x}{z}, y\right) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t^z)^{y-1} dt, \quad z > 0$$

۱۰.۱ حساب کسری (انتگرال‌ها و مشتقات مرتبه کسری)

حساب کسری، مبحث انتگرال‌ها و مشتق‌ها از مرتبه دلخواه حقیقی است. در این پایان‌نامه، مشتق از مرتبه دلخواه حقیقی را به اختصار مشتق کسری و انتگرال از مرتبه دلخواه حقیقی را انتگرال کسری می‌نامیم. تعاریف و خواص ذکر شده در این بخش از مراجع [۲۲]، [۲۸] و [۱] گردآوری شده‌اند.

۱.۱۰.۱ انتگرال کسری ریمان-لیوویل

فرض کنید $f(\cdot)$ روی بازه متناهی $[a, b]$ در \mathbb{R} تعریف شده باشد. انتگرال کسری چپ ریمان-لیوویل و انتگرال کسری راست ریمان-لیوویل تابع $f(\cdot)$ به ترتیب با نمادهای ${}_a I_t^{-\alpha} f(t)$ و ${}_t I_b^{-\alpha} f(t)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a I_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a, \quad (10.1)$$

$${}_t I_b^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t < b, \quad (11.1)$$

که در آن $\alpha > 0$ می‌باشد. انتگرال کسری ریمان-لیوویل دارای خاصیت زیر است

$${}_a I_t^{-\alpha} ({}_a I_t^{-\beta} f(t)) = {}_a I_t^{-\alpha-\beta} f(t),$$

که مشابه خاصیت معروف مشتق مرتبه صحیح است

$$\frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{d^m f(t)}{dt^m} \right) = \frac{d^{m+n} f(t)}{dt^{m+n}},$$

همچنین انتگرال کسری ریمان-لیوویل خاصیت جابجایی ندارد.

۲.۱۰.۱ مشتق کسری ریمان-لیوویل

فرض کنید $f(\cdot)$ روی بازه $[a, b]$ در \mathbb{R} پیوسته باشد. مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل و مشتق کسری راست ریمان-لیوویل تابع $f(\cdot)$ از مرتبه $\alpha > 0$ به ترتیب با نماد ${}_a D_t^\alpha f(t)$ و ${}_t D_b^\alpha f(t)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \right), \quad t > a, \quad (12.1)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds \right), \quad t < b, \quad (13.1)$$

که در آن $n = [\alpha] + 1$ می‌باشد. مشتق کسری چپ و راست ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ به ترتیب به صورت زیر نیز تعریف می‌شود

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t)), \quad (14.1)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_t D_b^{-(n-\alpha)} f(t)).$$

ملاحظه ۱.۱۰.۱. اگر $0 < \alpha < 1$ باشد، آن‌گاه

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right), \quad t > a, \quad (15.1)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_t^b (s-t)^{-\alpha} f(s) ds \right), \quad t < b, \quad (16.1)$$

و اگر $\alpha = 0$ یا $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه نتیجه مشابه با (۲۲.۱) به صورت زیر خواهیم داشت

$${}_a D_t^0 f(t) = {}_t D_b^0 f(t) = f(t),$$

$${}_a D_t^n f(t) = f^{(n)}(t),$$

$${}_t D_b^n f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t).$$

۳.۱۰.۱ برخی خواص مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل

- اولین و شاید مهم‌ترین خاصیت مشتق کسری ریمان-لیوویل این است که برای $\alpha > 0$ و $t > a$ داریم

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^{-\alpha} f(t)) = f(t), \quad (17.1)$$

- خاصیت (۱۷.۱) حالت خاصی از خاصیت عمومی‌تر

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^{-\beta} f(t)) = {}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t),$$

- می‌باشد، فرض می‌کنیم $f(t)$ پیوسته باشد و اگر $p \geq q \geq 0$ ، مشتق ${}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t)$ موجود باشد.

- مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل از مرتبه α تابع توانی به صورت $f(t) = (t-\alpha)^\nu$ برای ν حقیقی با استفاده از رابطه‌های ۹.۱ و ۱۴.۱ بدست می‌آید

$${}_a D_t^\alpha ((t-\alpha)^\nu) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-\alpha)} (t-\alpha)^{\nu-\alpha},$$

- تنها محدودیت برای $f(t) = (t-\alpha)^\nu$ ، انتگرال‌پذیری آن است، یعنی باید $\nu > -1$.

- در بسیاری از مسائل کاربردی، ترکیب مشتق کسری ریمان-لیوویل با مشتق مرتبه صحیح ظاهر می‌شود. عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه حقیقی α ${}_a D_t^\alpha$ با مشتق صحیح از مرتبه n $\frac{d^n}{dt^n}$ جابجا می‌شود، یعنی داریم

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{\alpha+n} f(t).$$

- همانند مشتق‌گیری از مرتبه صحیح، مشتق‌گیری مرتبه کسری ریمان-لیوویل خاصیت جابجایی ندارد، یعنی برای $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ ،

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^\beta) \neq {}_a D_t^\beta ({}_a D_t^\alpha).$$

۴.۱۰.۱ مشتق کسری کاپوتو

تعریف مشتق ریمان-لیوویل به شرایط اولیه‌ای شامل مشتق‌های کسری ریمان-لیوویل در نقطه ابتدایی منجر می‌شود. با وجودی که مسائل مقدار اولیه با چنین شرایطی می‌توانند به کمک قوانین ریاضی حل شوند، ولی عملاً جواب‌های آن‌ها بی‌فایده‌اند، چون تفسیر فیزیکی معلومی برای چنین شرایط اولیه‌ای وجود ندارد. تعریف ارائه شده توسط کاپوتو، امکان تنظیم شرایط اولیه برای مسائل مقدار اولیه مرتبه کسری در شکلی تنها شامل حد مقادیر مشتق‌های مرتبه صحیح در زمان اولیه را فراهم می‌کند. فرض کنید $f(\cdot)$ روی بازه $[a, b]$ در \mathbb{R} تعریف شده

حساب کسری (انتگرال‌ها و مشتقات مرتبه کسری) ۱۱

است. مشتق کسری چپ کاپوتو و مشتق کسری راست کاپوتو تابع $f(\cdot)$ از مرتبه $\alpha > 0$ به ترتیب با نماد ${}_a^C D_t^\alpha f(\cdot)$ و ${}_t^C D_b^\alpha f(\cdot)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds \right), \quad (18.1)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds \right), \quad (19.1)$$

که در آن $n = [\alpha] + 1$ و $[\alpha]$ جزء صحیح عدد α می‌باشد.

ملاحظه ۲.۱۰.۱. اگر $0 < \alpha < 1$ باشد، آن‌گاه

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \right), \quad t > a, \quad (20.1)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_t^b (s-t)^{-\alpha} f'(s) ds \right), \quad t < b, \quad (21.1)$$

و اگر $\alpha = 0$ و یا $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^0 f(t) &= {}_t^C D_b^0 f(t) = f(t), \\ {}_a^C D_t^n f(t) &= f^{(n)}(t), \\ {}_t^C D_b^n f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t), \end{aligned} \quad (22.1)$$

که در آن $f^{(n)}(\cdot)$ مشتق معمولی $f(\cdot)$ از مرتبه n می‌باشد.

ملاحظه ۳.۱۰.۱. مشتقات کسری کاپوتو و ریمان-لیوویل با استفاده از رابطه‌ی زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} f(a)(t-a)^{-\alpha} + {}_a^C D_t^\alpha f(t), \quad (23.1)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} f(b)(b-t)^{-\alpha} + {}_t^C D_b^\alpha f(t). \quad (24.1)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ می‌باشد.

مشابه خواص ذکر شده برای مشتق کسری ریمان-لیوویل می‌توان آن‌ها را برای مشتق کسری کاپوتو نیز تعمیم داد.

ملاحظه ۴.۱۰.۱. مشابه مشتقات مرتبه صحیح، مشتقات کسری از مرتبه α نیز عملگر خطی هستند، یعنی

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t).$$

فصل ۲

مسأله کنترل بهینه کسری و شرایط لازم بهینگی کسری

۱.۲ مسأله کنترل بهینه کسری

مسأله کنترل بهینه کسری، تعمیمی از مسأله کنترل بهینه کلاسیک است که تحت سیستم‌های دینامیکی شامل مشتقات کسری می‌باشد. در این فصل، ابتدا فرم کلی مسأله کنترل بهینه کسری را تعریف می‌کنیم و سپس قضایای شرایط بهینگی را بیان می‌کنیم.

هدف ما در این پایان‌نامه، تقریب زدن جواب کنترل بهینه کسری به فرم کلی زیر است

$$\text{Minimize } J(x, u) = \psi(T, x(T)) + \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1.2)$$

$$\text{subject to } M\dot{x}(t) + N {}^C D_t^\alpha x(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (3.2)$$

که در آن $1 < \alpha < \infty$ ، $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ، $M, N \in \mathbb{R}^n$ و $(M, N) \neq (0, 0)$ می‌باشند و $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ و $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی مشتق‌پذیر می‌باشند. در این‌جا، $x(\cdot)$ و $u(\cdot)$ به ترتیب متغیرهای وضعیت و کنترل را نشان می‌دهند و بعلاوه $\dot{x}(t)$ مشتق معمولی و ${}^C D_t^\alpha x(t)$ مشتق کسری چپ کاپوتو از مرتبه α را نشان می‌دهند.

در مسأله (۳.۲)–(۱.۲)، T و $x(T)$ می‌توانند ثابت و یا آزاد باشند. بنابراین توجه ما در این مسأله، علاوه بر متغیر وضعیت $x(\cdot)$ و متغیر کنترل $u(\cdot)$ ، روی زمان نهایی T موردنظر نیز معطوف است که بتوانیم تابعی J را با توجه به حالت های T و $x(T)$ بهینه کنیم. در مسأله (۳.۲)–(۱.۲)، توجه داریم که اگر $N = \circ$ باشد مسأله کنترل بهینه کلاسیک را خواهیم داشت.

۲.۲ شرایط لازم بهینگی کسری

برای اینکه شرایط لازم بهینگی نتیجه شود یعنی جواب بهینه سه‌تایی (x, u, T) در مسأله کنترل بهینه کسری (۳.۲)–(۱.۲) صدق کند، ضریب لاگرانژ $\lambda(\cdot)$ را به کار می‌بریم و تابع هامیلتونی H را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u). \quad (۴.۲)$$

لم ۱.۲.۲. فرض کنید $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد و به ازای هر تابع پیوسته $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\int_0^T \eta(t)g(t)dt = \circ, \quad (۵.۲)$$

در این صورت به ازای هر $t \in [0, T]$ داریم $g(t) = \circ$.

برهان. به برهان خلف فرض می‌کنیم به ازای یک $\bar{t} \in [0, T]$ داشته باشیم $g(\bar{t}) \neq \circ$. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $g(\bar{t}) > \circ$. چون $g(\cdot)$ پیوسته است پس بازه‌ای مانند $[\alpha, \beta] \subset [0, T]$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $t \in [\alpha, \beta]$ داریم $g(t) > \circ$ و بعلاوه $\alpha < \bar{t} < \beta$. حال تابع پیوسته $\bar{\eta}(\cdot)$ را روی بازه $[0, T]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} (t - \alpha)^3(\beta - t)^3, & t \in [\alpha, \beta], \\ \circ, & t \notin [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

داریم

$$\int_0^T \bar{\eta}(t)g(t)dt = \int_\alpha^\beta (t - \alpha)^3(\beta - t)^3 g(t)dt > \circ,$$

که با (۵.۲) در تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و به ازای هر $t \in [0, T]$ باید داشته باشیم $g(t) = \circ$. \square

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید (x, u, T) جواب بهینه برای مسأله (۳.۲)–(۱.۲) باشد. در این صورت تابع $\lambda(\cdot)$ وجود دارد به طوری که سه‌تایی (x, u, λ) در شرایط زیر صدق می‌کند

(الف) دستگاه همیلتونی

$$M\dot{\lambda}(t) - N_t D_T^\alpha \lambda(t) = \frac{-\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \quad t \in [0, T], \quad (6.2)$$

$$M\dot{x}(t) + N_t^C D_t^\alpha x(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \quad t \in [0, T], \quad (7.2)$$

(ب) شرایط ایستایی

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (8.2)$$

(ج) شرایط تراگردی

$$\begin{aligned} & \left[H((t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t) {}^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0, \\ & \left[M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0, \end{aligned} \quad (9.2)$$

که در آن همیلتونی H در (۴.۲) تعریف شده است.

برهان. در ابتدا، مسأله اولیه را به مسأله زیر تبدیل می‌کنیم

$$\mathcal{J}(x, u, T, \lambda) = \int_0^T [H(t, x, u, \lambda) - \lambda(t)[M\dot{x}(t) + N {}^C D_t^\alpha x(t)]] dt + \psi(T, x(T)),$$

سپس، متغیرهایی به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$x + \delta x, \quad u + \delta u, \quad T + \delta T, \quad \lambda + \delta \lambda$$

که با توجه به شرایط اولیه (۳.۲) برای شدنی بودن متغیر $x + \delta x$ فرض می‌کنیم که $\delta x(0) = 0$. با توجه به اینکه در روند می‌نیم‌سازی اولین تغییر تابعی \mathcal{J} باید صفر شود، داریم

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^T \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \delta \lambda - \partial \lambda (M\dot{x}(t) + N {}^C D_t^\alpha x(t)) - \lambda(t) (M\delta \dot{x}(t) \right. \\ & \left. + N {}^C D_t^\alpha \delta x(t)) \right) dt + \delta T [H(t, x, u, \lambda) - \lambda(t) (M\dot{x}(t) \\ & \left. + N {}^C D_t^\alpha x(t))]_{t=T} + \frac{\partial \psi}{\partial t}(T, x(T)) \delta T + \frac{\partial \psi}{\partial x}(T, x(T)) (\dot{x}(T) \delta T + \delta x(T)), \end{aligned} \quad (10.2)$$

که از مشتقات جزئی H در $(t, x(t), u(t), \lambda(t))$ حاصل می‌شود. از طرفی داریم

$$\int_0^T \lambda(t) \delta \dot{x}(t) dt = - \int_0^T \delta x(t) \dot{\lambda}(t) dt + \delta x(T) \lambda(T) \quad (11.2)$$

و

$$\int_0^T \lambda(t) {}^C D_t^\alpha \delta x(t) dt = \int_0^T \delta x(t) {}_t D_T^\alpha \lambda(t) dt + \delta x(T) [{}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t)]_{t=T}. \quad (12.2)$$

با جایگذاری (۱۱.۲) و (۱۲.۲) در (۱۰.۲) رابطه زیر به دست می‌آید

$$\int_0^T \left[\delta x \left(\frac{\partial H}{\partial x} + M\dot{\lambda}(t) - N_t D_T^\alpha \lambda(t) \right) + \delta u \frac{\partial H}{\partial u} + \delta \lambda \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - M\dot{x}(t) - N^C D_t^\alpha x(t) \right) \right] dt \\ - \delta x(T) \left[M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} + \delta T \left[H(t, x, u, \lambda) - \lambda(t) \right. \\ \left. \left[M\dot{x}(t) + N^C D_t^\alpha x(t) \right] + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \dot{x}(t) \right]_{t=T} = 0.$$

حال متغیر جدید δx_T را تعریف می‌کنیم

$$\delta x_T = (x + \delta x)(T + \delta T) - x(T).$$

از آن جایی که $\delta x(T)$ دلخواه است، در حالت خاص می‌توان تابع‌های تغییر را طوری در نظر گرفت که در آن $\delta x(T) = 0$ باشد. با استفاده از قضیه تیلور داریم

$$(x + \delta x)(T + \delta T) - (x + \delta x)(T) = \dot{x}(T)\delta T + \mathcal{O}(\delta T^2),$$

از طرفی $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\xi)}{\xi} = 0$ متناهی است، لذا $\delta x(T) = \delta x_T - \dot{x}(T)\delta T + \mathcal{O}(\delta T^2)$. در نتیجه بسط زیر را خواهیم داشت

$$\delta T \left[H(t, x, u, \lambda) - N\lambda(t) {}_t^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} \\ + \int_0^T \left[\delta x \left(\frac{\partial H}{\partial x} + M\dot{\lambda}(t) - N_t D_T^\alpha \lambda(t) \right) + \delta \lambda \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - M\dot{x}(t) - N^C D_t^\alpha x(t) \right) \right. \\ \left. + \delta u \frac{\partial H}{\partial u} \right] dt - \delta x_T \left[M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} + \mathcal{O}(\delta T^2) = 0.$$

از طرفی چون تابع‌های تغییر دلخواه در نظر گرفته می‌شوند، با توجه به لم (۱.۲.۲) قضیه ثابت می‌شود. \square

با توجه به زمان نهایی T و مکان نهایی $x(T)$ ، حالت‌های خاص جالبی برای شرایط بهینگی به وجود می‌آید که نتیجه زیر چند مورد از این حالت‌ها را شامل می‌شود.

نتیجه ۱.۲.۲. فرض کنید (x, u) ، جواب بهینه برای مسأله کنترل بهینه کسری (۳.۲) – (۱.۲) باشد

(الف) اگر T ثابت و $x(T)$ آزاد باشد، آنگاه قضیه ۱.۲.۲ با شرایط تراگردی زیر برقرار است که جایگزین (۹.۲) می‌شود

$$\left[M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0. \quad (۱۳.۲)$$

(ب) اگر T آزاد و $x(T)$ ثابت باشد، آنگاه قضیه ۱.۲.۲ با شرایط تراگردی زیر برقرار است که جایگزین (۹.۲) می‌شود

$$\left[H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t) {}_t^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0. \quad (۱۴.۲)$$

(ج) اگر T و $x(T)$ هر دو ثابت باشند، آن گاه قضیه ۱.۲.۲ بدون شرایط تراگردی برقرار خواهد بود.

(د) اگر مکان نهایی متعلق به یک منحنی ثابت باشد یعنی $x(T) = \gamma(T)$ ، که در آن γ منحنی مشتق پذیر است، آن گاه قضیه ۱.۲.۲ با شرایط تراگردی زیر برقرار است که جایگزین (۹.۲) می شود

$$\left[H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t) {}^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) - \dot{\gamma}(t) \left(M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right) \right]_{t=T} = 0. \quad (15.2)$$

(ه) اگر T ثابت و $x(T) \geq K$ برای برخی مقادیر $K \in \mathbb{R}$ باشد، آن گاه قضیه ۱.۲.۲ با شرایط تراگردی زیر برقرار است که جایگزین (۹.۲) می شود

$$\left[M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} \leq 0, \quad (16.2)$$

$$(x(T) - K) \left[M\lambda(t) + N {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0.$$

(و) اگر $x(T)$ ثابت باشد و $T \leq K$ برای برخی مقادیر $K \in \mathbb{R}$ باشد، آن گاه قضیه ۱.۲.۲ با شرایط تراگردی زیر برقرار است که جایگزین (۹.۲) می شود

$$\left[H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t) {}^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} \geq 0,$$

$$\left[H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) - N\lambda(t) {}^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t) {}_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} \times (T - K) = 0. \quad (17.2)$$

فصل ۳

یک روش شبه‌طیفی چبیشف غیرمستقیم برای حل مسأله کنترل بهینه کسری

۱.۳ مقدمه

در این فصل، مسأله کنترل بهینه کسری (۳.۲)–(۱.۲) تعریف شده در فصل ۲ را با استفاده از روش شبه‌طیفی چبیشف بطور غیر مستقیم حل می‌کنیم. برای این منظور، تابع درون‌یاب لاگرانژ کسری را معرفی می‌کنیم و با استفاده از قضیه ۱.۲.۲ و نتیجه ۱.۲.۲ از فصل ۲ و تابع درون‌یاب لاگرانژ کسری، مسأله را در نقاط چبیشف–گوس گسسته‌سازی می‌کنیم و به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌کنیم که با حل آن، جواب بهینه مسأله اصلی را تقریب می‌زنیم. در آخر، با ارائه سه مثال عددی، کارایی روش را نشان می‌دهیم.

۲.۳ چندجمله‌ای چبیشف شیفت داده شده

چندجمله‌ای چبیشف روی بازه $[-1, 1]$ تعریف می‌شوند. برای درون‌یابی، از نقاط

$$\tau_k = -\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right), \quad k = 1, \dots, N,$$

استفاده می‌کنیم که ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف $P_N(\cdot)$ می‌باشند و نقاط چبیشف-گوس نامیده می‌شوند که روی بازه $(-1, 1)$ تعریف می‌شوند. ما نقاط $\tau = 1$ و $\tau = -1$ را به بازه $(-1, 1)$ اضافه می‌کنیم تا کل بازه $[-1, 1]$ را داشته باشیم. از طرفی، مسأله کنترل بهینه کسری (۳.۲)–(۱.۲) روی بازه $[0, T]$ تعریف شده است، از این رو، ما تغییر متغیر $t = \frac{T}{\tau} + \frac{T}{4}$ را بکار می‌بریم که در آن $\tau \in [-1, 1]$ می‌باشد و از چندجمله‌ای چبیشف شیفت داده شده استفاده می‌کنیم که به صورت زیر می‌باشد

$$\bar{P}_{i+1} = 2\left(\left(\frac{\tau t}{T} - 1\right)\bar{P}_i(t) - \bar{P}_{i-1}(t)\right), \quad i = 1, 2, \dots,$$

که در آن $\bar{P}_0(t) = 1$ و $\bar{P}_1(t) = \frac{\tau t}{T} - 1$. بنابراین نقاط چبیشف-گوس شیفت داده شده به صورت $t_k = \frac{T}{\tau} \tau_k + \frac{T}{4}$ می‌باشند که در آن $k = 0, 1, \dots, N+1$.

۳.۳ تابع درون‌یاب لاگرانژ کسری

تعریف ۱.۳.۳. در روش شبه‌طیفی چبیشف، برای گسسته‌سازی مسأله کنترل بهینه کسری و تقریب زدن جواب بهینه، تابع درون‌یاب لاگرانژ کسری زیر را تعریف می‌کنیم

$$h_j^\alpha(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N+1} \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha}, \quad j = 0, 1, \dots, N+1, \quad (1.3)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$. $h_j^\alpha(t)$ بر پایه نقاط چبیشف-گوس شیفت داده شده $\{t_k\}_{k=0}^{N+1}$ می‌باشد. ذکر این نکته مهم است که تابع لاگرانژ کسری در نقاط درون‌یابی موردنظر در خاصیت دلتای کرونکر صدق می‌کند، یعنی

$$h_j^\alpha(t_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

مشتق معمولی $h_j^\alpha(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید. داریم

$$h_j^\alpha(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N+1} \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha} = \left(\frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{t_j^\alpha - t_0^\alpha}\right) \left(\frac{t^\alpha - t_1^\alpha}{t_j^\alpha - t_1^\alpha}\right) \cdots \left(\frac{t^\alpha - t_{j-1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j-1}^\alpha}\right) \left(\frac{t^\alpha - t_{j+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j+1}^\alpha}\right) \cdots \left(\frac{t^\alpha - t_{N+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{N+1}^\alpha}\right),$$

بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 h_j^{\alpha'}(t) &= \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_0^\alpha} \left(\frac{t^\alpha - t_1^\alpha}{t_j^\alpha - t_1^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_2^\alpha}{t_j^\alpha - t_2^\alpha} \right) \cdots \left(\frac{t^\alpha - t_{j-1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j-1}^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_{j+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j+1}^\alpha} \right) \cdots \left(\frac{t^\alpha - t_{N+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{N+1}^\alpha} \right) \\
 &+ \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_1^\alpha} \left(\frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{t_j^\alpha - t_0^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_2^\alpha}{t_j^\alpha - t_2^\alpha} \right) \cdots \left(\frac{t^\alpha - t_{j-1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j-1}^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_{j+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j+1}^\alpha} \right) \cdots \left(\frac{t^\alpha - t_{N+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{N+1}^\alpha} \right) \\
 &+ \cdots + \\
 &+ \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_{N+1}^\alpha} \left(\frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{t_j^\alpha - t_0^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_1^\alpha}{t_j^\alpha - t_1^\alpha} \right) \cdots \left(\frac{t^\alpha - t_{j-1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j-1}^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_{j+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j+1}^\alpha} \right) \cdots \left(\frac{t^\alpha - t_{N-1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{N-1}^\alpha} \right) \\
 &= \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{N+1} \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_r^\alpha} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j \\ i \neq r}}^{N+1} \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha}.
 \end{aligned}$$

۴.۳ پیادهسازی روش

متغیرهای وضعیت $x(\cdot)$ ، کنترل $u(\cdot)$ و هم‌وضعیت $\lambda(\cdot)$ را به صورت زیر تقریب می‌زنیم

$$x(t) \approx \sum_{j=0}^{N+1} \bar{x}_j h_j^\alpha(t), \quad \lambda(t) \approx \sum_{j=0}^{N+1} \bar{\lambda}_j h_j^\alpha(t), \quad u(t) \approx \sum_{j=0}^{N+1} \bar{u}_j h_j^\alpha(t), \quad (۲.۳)$$

و با استفاده از خاصیت درونیابی داریم

$$x(t_k) \approx \bar{x}_k, \quad u(t_k) \approx \bar{u}_k, \quad \lambda(t_k) \approx \bar{\lambda}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N+1. \quad (۳.۳)$$

هم‌چنین داریم

$$\dot{x}(t) \approx \sum_{j=0}^{N+1} \bar{x}_j h_j^{\alpha'}(t), \quad \dot{\lambda}(t) \approx \sum_{j=0}^{N+1} \bar{\lambda}_j h_j^{\alpha'}(t), \quad (۴.۳)$$

که در آن

$$h_j^{\alpha'}(t) = \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{N+1} \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_r^\alpha} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq r \\ i \neq j}}^{N+1} \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha}. \quad (۵.۳)$$

علاوه‌براین

$${}^C D_t^\alpha x(t) \approx \sum_{j=0}^{N+1} \bar{x}_j {}^C D_t^\alpha h_j^\alpha(t), \quad (۶.۳)$$

و

$${}^C D_T^\alpha \lambda(t) \approx \sum_{j=0}^{N+1} \bar{\lambda}_j {}^C D_T^\alpha h_j^\alpha(t), \quad (۷.۳)$$

که در آن

$${}^C D_t^\alpha h_j^\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{h_j^{\alpha'}(t) dt}{(\tau-t)^\alpha}, \quad (۸.۳)$$

و

$${}^C D_T^\alpha h_j^\alpha(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T \frac{h_j^{\alpha'}(t) dt}{(t-\tau)^\alpha}. \quad (۹.۳)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۲۴.۱)، مشتقات کسری ریمان-لیوویل را در شرایط بهینگی کسری بر حسب مشتقات کسری کاپوتو می‌نویسیم. داریم

$${}_t D_T^\alpha \lambda(t) = \frac{\lambda(T)}{\Gamma(1-\alpha)(T-t)^\alpha} + {}^C D_T^\alpha \lambda(t), \quad t \in [0, T], \quad (۱۰.۳)$$

حال با جایگذاری (۷.۳)–(۲.۳) در معادلات (۸.۲)–(۶.۲) در قضیه ۱.۲.۲ و با استفاده از (۱۰.۳) و گسسته‌سازی معادلات به دست آمده در نقاط درونیابی t_k برای $k = 1, \dots, N$ ، به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی به شکل زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} & M \sum_{j=0}^{N+1} \bar{\lambda}_j h_j^{\alpha'}(t_k) - N \left(\frac{\lambda(T)}{\Gamma(1-\alpha)(T-t_k)^\alpha} + \sum_{j=0}^{N+1} \bar{\lambda}_j {}^C D_T^\alpha h_j^\alpha(t_k) \right) \\ &= \frac{-\partial H}{\partial x}(t_k, \bar{x}_k, \bar{u}_k, \bar{\lambda}_k), \quad k = 0, 1, \dots, N, \\ & M \sum_{j=0}^{N+1} \bar{x}_j h_j^{\alpha'}(t_k) - N \sum_{j=0}^{N+1} \bar{x}_j {}^C D_t^\alpha h_j^\alpha(t_k) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t_k, \bar{x}_k, \bar{u}_k, \bar{\lambda}_k), \quad k = 1, \dots, N+1 \\ & \frac{\partial H}{\partial u}(t_k, \bar{x}_k, \bar{u}_k, \bar{\lambda}_k) = 0, \quad t_k \in [0, T], \end{aligned} \quad (۱۱.۳)$$

حال با توجه به حالت‌های متفاوت زمان نهایی T و مکان نهایی $x(T)$ ، یکی از معادلات (۱۷.۲)–(۱۳.۲) نتیجه ۱.۲.۲ را استفاده می‌کنیم و فرم گسسته آن را به معادلات (۱۱.۳) اضافه می‌کنیم. با حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی بدست آمده، جواب‌های بهینه تقریبی را بدست می‌آوریم.

۵.۳ نتایج عددی

در این بخش، برای نشان دادن اعتبار و کارایی روش، سه مثال عددی ارائه می‌دهیم و برای حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی بدست آمده در مثال‌ها، از تابع FSOLVE در نرم‌افزار MATLAB استفاده می‌کنیم. برای بدست آوردن خطای مطلق متغیرهای وضعیت بهینه تقریبی و کنترل بهینه تقریبی به ترتیب از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} E_x(t) &= |x^*(t) - x(t)|, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ E_u(t) &= |u^*(t) - u(t)|, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (۱۲.۳)$$

که در آن $x^*(t)$ و $u^*(t)$ به ترتیب جواب‌های بهینه دقیق متغیر وضعیت و بهینه دقیق متغیر کنترل مسائل کنترل بهینه کسری می‌باشد.

مثال ۱.۵.۳. مسأله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر می‌گیریم [۲۳]

$$\text{Minimize } J(x(t), u(t)) = \int_0^1 (tu(t) - (\alpha + 2)x(t))^2 dt, \quad (13.3)$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) + {}^C D_t^\alpha x(t) = u(t) + t^2, \quad (14.3)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{2}{\Gamma(3 + \alpha)}. \quad (15.3)$$

و جواب‌های دقیق مسأله به صورت $(x^*(t), u^*(t)) = (\frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}, \frac{2t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)})$ داده شده است. با استفاده از قضیه ۱.۲.۲ و نتیجه ۱.۲.۲ شرایط بهینگی را برای مسأله (۱۵.۳)–(۱۳.۳)

می‌نویسیم

$$\dot{x}(t) + {}^C D_t^\alpha x(t) = u(t) + t^2, \quad (16.3)$$

$$-\dot{\lambda}(t) + {}_t D_1^\alpha \lambda(t) = \frac{\alpha + 2}{t} \lambda(t), \quad (17.3)$$

$$u(t) = \frac{-\lambda}{2t^2} + \frac{\alpha + 2}{t} x(t), \quad (18.3)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{2}{\Gamma(3 + \alpha)}, \quad (19.3)$$

با جایگذاری (۱۸.۳) در (۱۶.۳) و گسسته سازی توصیف شده در بخش قبلی روی معادلات (۱۹.۳)–(۱۶.۳) به دستگاه معادلات جبری غیرخطی زیر می‌رسیم

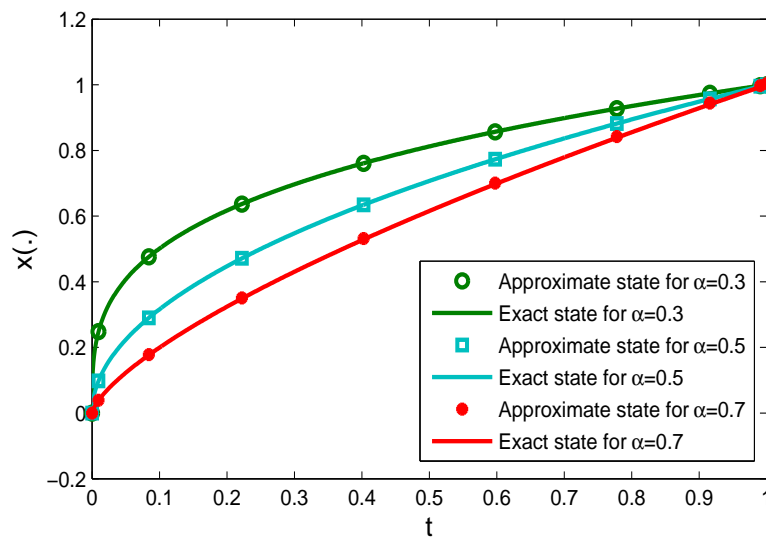
$$\sum_{j=1}^{N+1} \bar{x}_j h_j^{\alpha'}(t_k) + \sum_{j=1}^{N+1} \bar{x}_j {}^C D_t^\alpha h_j^\alpha(t_k) + \frac{\bar{\lambda}_k}{2t_k^2} - \frac{\alpha + 2}{t} \bar{x}_k - t_k^2 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (20.3)$$

$$-\sum_{j=1}^{N+1} \bar{\lambda}_j h_j^{\alpha'}(t_k) + \sum_{j=1}^{N+1} \bar{\lambda}_j \left(\frac{\lambda(1)}{\Gamma(1 - \alpha)(1 - t_k)^\alpha} + {}_t D_1^\alpha h_j^\alpha(t_k) \right) - \frac{\alpha + 2}{t_k} \bar{\lambda}_k = 0, \quad (21.3)$$

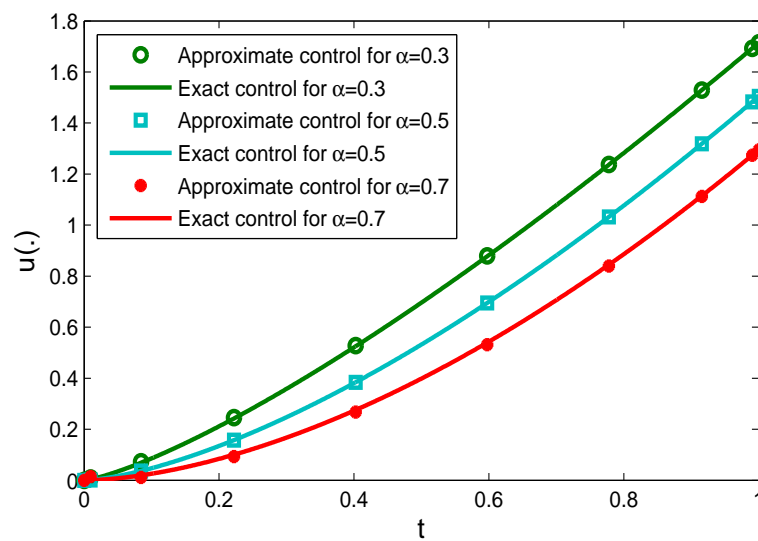
$$k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_{N+1} = \frac{2}{\Gamma(3 + \alpha)}, \quad (22.3)$$

که در آن t_k برای $k = 0, 1, \dots, N + 1$ نقاط درونیابی چیشف-گوس می‌باشند. با حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی (۲۲.۳)–(۲۰.۳) برای $N = 8$ و مقادیر مختلف $\alpha = 0.3$ ، $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 0.7$ به جواب‌های بهینه تقریبی (۲.۳) می‌رسیم که در شکل ۱.۳ و ۲.۳ نشان



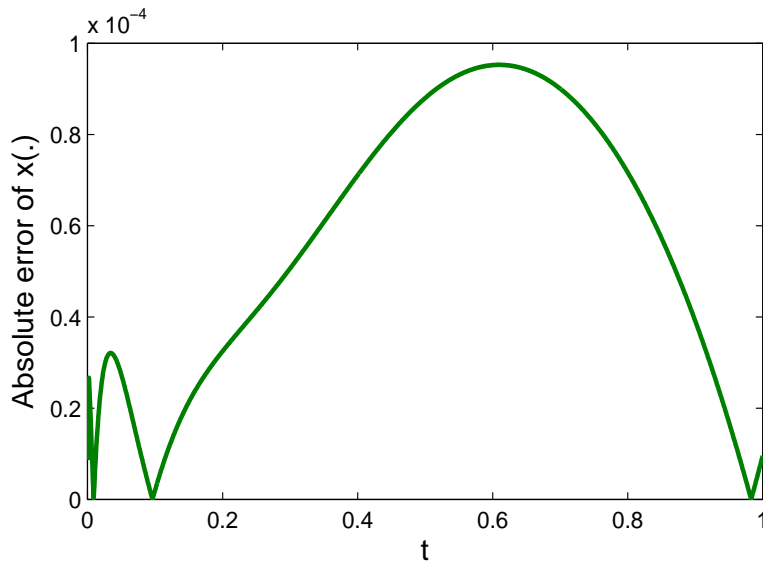
شکل ۱.۳: متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۱ برای $N = 8$



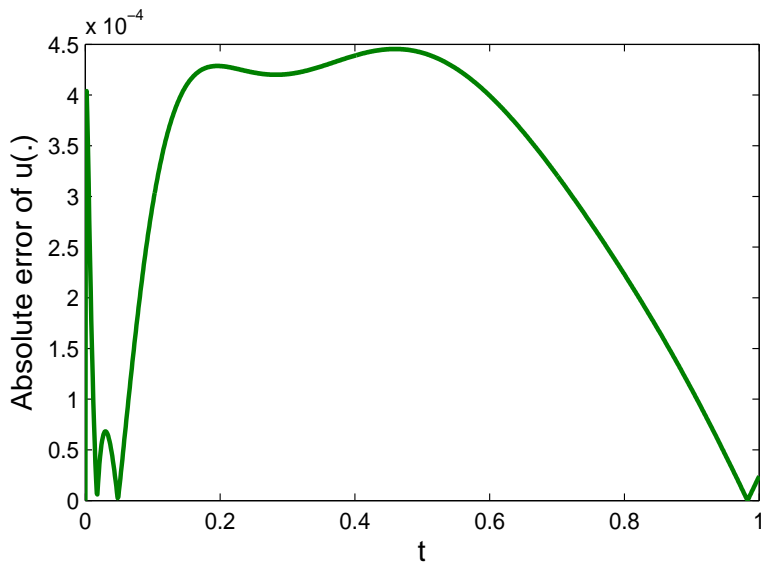
شکل ۲.۳: متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۱ برای $N = 8$

جدول ۱.۳: مقادیر بهینه تابع هدف مثال ۱ برای $N = 8$

$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.3$	
6.61100×10^{-3}	9.04207×10^{-10}	2.29922×10^{-7}	J^*



شکل ۳.۳: خطای مطلق متغیر وضعیت مثال ۱ برای $N = 8$ و $\alpha = 0.5$



شکل ۴.۳: خطای مطلق متغیر کنترل مثال ۱ برای $N = 8$ و $\alpha = 0.5$

داده شده‌اند. خطای مطلق متغیرهای وضعیت بهینه تقریبی و کنترل بهینه تقریبی برای $N = 8$ و $\alpha = 0.5$ نیز به ترتیب در شکل‌های ۳.۳ و ۴.۳ آورده شده‌اند. مقادیر بهینه تابع هدف را برای $N = 8$ و مقادیر مختلف $\alpha = 0.3$ ، $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 0.7$ در جدول ۱.۳ آورده‌ایم و جدول ۲.۳ نیز ماکسیمم خطای مطلق را برای تقریب‌های بدست آمده نشان می‌دهد.

جدول ۲.۳: ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و متغیر کنترل مثال ۱ برای $N = ۸$

$\alpha = ۰/۷$	$\alpha = ۰/۵$	$\alpha = ۰/۳$	
$۱/۶۹۹۴۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۹/۵۲۵۳۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۴۰۴۶۰ \times ۱۰^{-۳}$	$\text{Max}_t E_x(t) $
$۱/۴۸۸۱۸ \times ۱۰^{-۲}$	$۴/۴۵۳۹۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۲۱۶۷۸ \times ۱۰^{-۲}$	$\text{Max}_t E_u(t) $

مثال ۲.۵.۳. مسأله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید [۶]

$$\text{Minimize } J(x(t), u(t)) = \frac{1}{\Upsilon} \int_0^1 \left[(x(t) - t^\alpha)^2 + (u(t) - t^\alpha - \Gamma(\alpha + 1))^2 \right] dt,$$

$$\text{subject to } {}^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t),$$

$$x(0) = 0,$$

(۲۳.۳)

و جواب دقیق مسأله $(x^*(t), u^*(t) = (t^\alpha, t^\alpha + \Gamma(\alpha + 1)))$ می‌باشد. با استفاده از شرایط بهینگی در قضیه ۱.۲.۲ و نتیجه ۱.۲.۲ داریم

$${}_t D_t^\alpha \lambda(t) = -\Upsilon x(t) + \lambda(t) + \Upsilon t^\alpha, \quad (24.3)$$

$${}^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t), \quad (25.3)$$

$$u(t) = \frac{-\lambda(t)}{\Upsilon} + t^\alpha + \Gamma(\alpha + 1), \quad (26.3)$$

$$x(0) = 0, \quad \lambda(1) = 0. \quad (27.3)$$

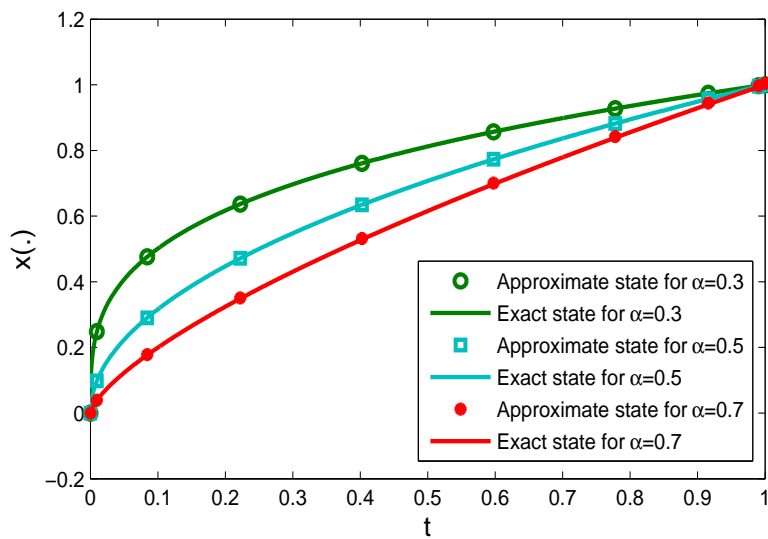
با جایگذاری (۲۶.۳) در (۲۵.۳) و انجام روند گسسته‌سازی توصیف شده در بخش ۴.۳ روی معادلات بدست آمده، معادلات جبری زیر حاصل می‌شود

(۲۸.۳)

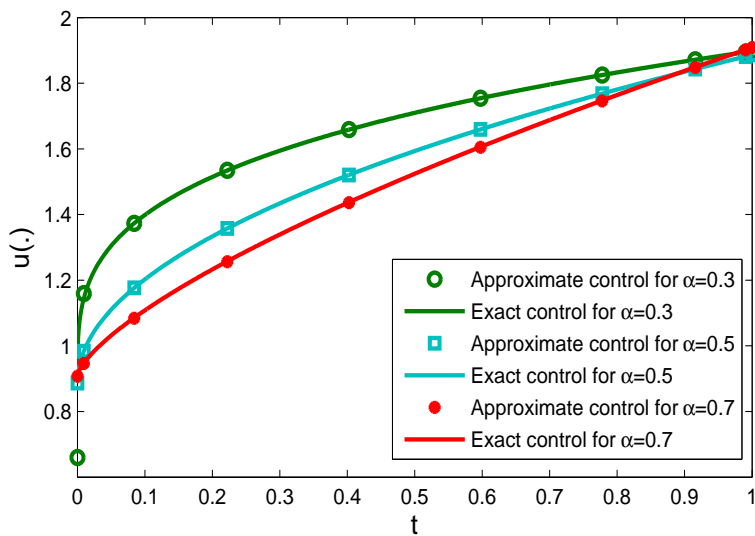
$$-\sum_{j=1}^{N+1} \bar{\lambda}_j \left(\frac{\lambda(1)}{\Gamma(1-\alpha)(1-t_k)^\alpha} + {}^C D_t^\alpha h_j^\alpha(t_k) \right) + \Upsilon \bar{x}_k - \bar{\lambda}_k - \Upsilon t_k^\alpha = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\sum_{j=1}^{N+1} \bar{x}_j {}^C D_t^\alpha h_j^\alpha(t_k) + \bar{x}_k + \frac{\bar{\lambda}_k}{\Upsilon} - t_k^\alpha - \Gamma(\alpha + 1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (29.3)$$

$$\bar{x}_0 = 0, \quad \bar{\lambda}_{N+1} = 0, \quad (30.3)$$

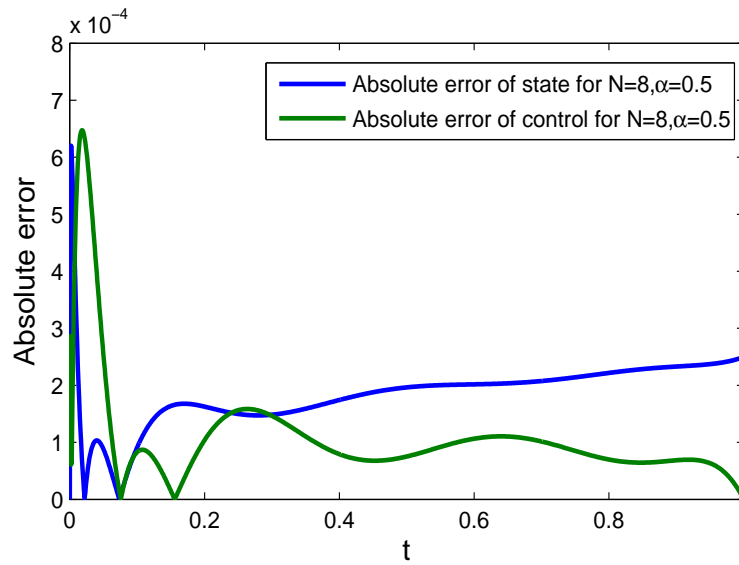


شکل ۵.۳: متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۲ برای $N = 8$



شکل ۶.۳: متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۲ برای $N = 8$

که در آن $k = 1, 2, \dots, N$. مسأله را برای $N = 8$ و $\alpha = 0.3$ ، $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 0.7$ حل می‌کنیم. شکل‌های ۵.۳ و ۶.۳ به ترتیب متغیر وضعیت بهینه تقریبی و متغیر کنترل بهینه تقریبی را نشان می‌دهند. خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل برای $N = 8$ و $\alpha = 0.5$ در شکل ۷.۳ آورده شده است. جدول‌های ۳.۳ و ۴.۳ به ترتیب مقادیر تابع هدف و ماکسیمم خطای مطلق متغیرهای وضعیت بهینه تقریبی و کنترل بهینه تقریبی را برای $N = 8$ و مقادیر مختلف $\alpha = 0.3$ ، $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 0.7$ نشان می‌دهند.



شکل ۷.۳: خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۲ برای $N = 8$ و $\alpha = 0.5$

جدول ۳.۳: مقدار بهینه تابع هدف مثال ۲ برای $N = 8$

$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.3$	
4.82348×10^{-6}	8.82618×10^{-8}	1.02057×10^{-4}	J^*

جدول ۴.۳: ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۲ برای $N = 8$

$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.3$	
4.25572×10^{-3}	6.20084×10^{-4}	1.85463×10^{-2}	$\text{Max}_t E_x(t) $
1.61795×10^{-3}	6.47358×10^{-4}	2.37666×10^{-1}	$\text{Max}_t E_u(t) $

مثال ۳.۵.۳. برای سومین مثال در این بخش، مسأله کنترل بهینه کسري زیر را در نظر گرفتیم [۲۵]

$$\text{Minimize } J(x(t), u(t)) = \int_0^1 (u(t) - x(t))^2 dt, \quad (31.3)$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) + {}^C D_t^\alpha x(t) = u(t) - x(t) + \frac{6t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + t^3, \quad (32.3)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)}. \quad (33.3)$$

و جواب دقیق این مسأله $(x^*(t), u^*(t)) = (\frac{6t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)}, \frac{6t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)})$ می‌باشد. شرایط لازم بهینگی را

با استفاده از قضیه ۱.۲.۲ و نتیجه ۱.۲.۲ برای مسأله (۳۳.۳)–(۳۱.۳) به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\dot{\lambda}(t) - {}_t D_1^\alpha = -\Upsilon x(t) - \Upsilon u(t) + \lambda(t), \quad (34.3)$$

$$\dot{x}(t) + {}^C D_1^\alpha x(t) = u(t) - x(t) + \frac{\epsilon t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + t^3, \quad (35.3)$$

$$\Upsilon u(t) + \Upsilon x(t) + \lambda(t) = 0, \quad (36.3)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+4)}. \quad (37.3)$$

با جایگذاری (۳۶.۳) در (۳۴.۳) و با انجام گسسته‌سازی روی معادلات (۳۷.۳)–(۳۴.۳) دستگاه معادلات جبری زیر را بدست می‌آوریم

$$\sum_{j=1}^{N+1} \bar{\lambda}_j h_j^{\alpha'}(t_k) - \sum_{j=1}^{N+1} \bar{\lambda}_j \left(\frac{\lambda(1)}{\Gamma(1-\alpha)(1-t_k)} + {}^C D_1^\alpha h_j^\alpha(t_k) \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (38.3)$$

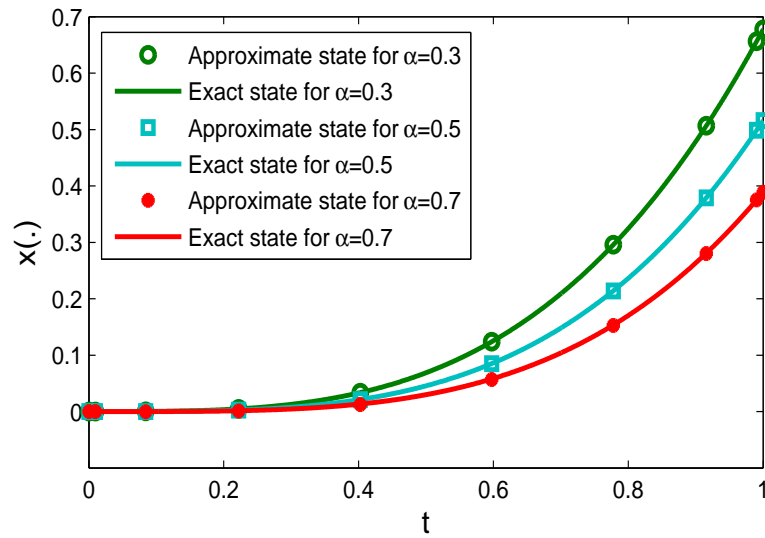
$$\sum_{j=1}^{N+1} \bar{x}_j h_j^{\alpha'}(t_k) - \sum_{j=1}^{N+1} \bar{x}_j {}^C D_t^\alpha h_j^\alpha(t_k) + \frac{\bar{\lambda}_k}{\Upsilon} - \frac{\epsilon t_k^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - t_k^3 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (39.3)$$

$$\bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_{N+1} = \frac{\Upsilon}{\Gamma(3+\alpha)}, \quad (40.3)$$

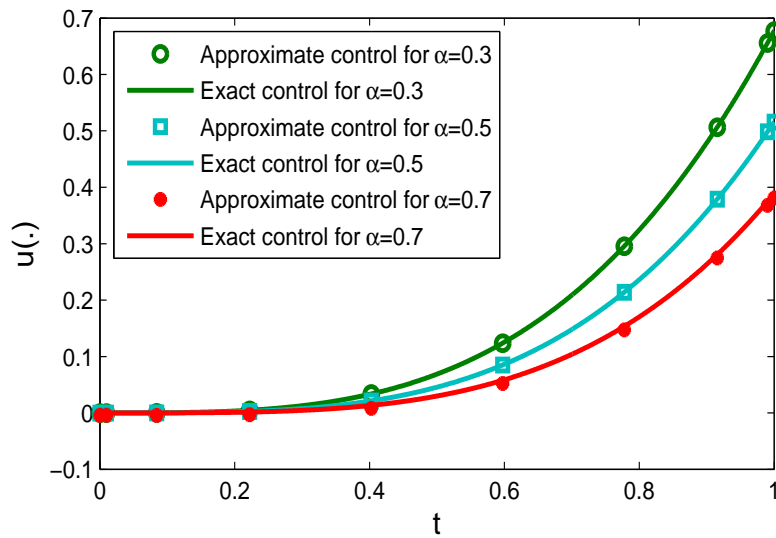
نتایج مشابه با مثال‌های قبلی در ادامه ارائه می‌شود. با حل دستگاه معادلات (۴۰.۳)–(۳۸.۳) برای $N = 8$ و مقدارهای $\alpha = 0.3$ ، $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 0.7$ متغیر وضعیت بهینه تقریبی و متغیر کنترل بهینه تقریبی را بدست می‌آوریم که به ترتیب در شکل‌های ۸.۳ و ۲۲.۴ نشان داده شده است. شکل‌های ۱۰.۳ و ۱۱.۳ نیز، به ترتیب خطای مطلق متغیرهای وضعیت بهینه تقریبی و کنترل بهینه تقریبی را برای $N = 8$ و $\alpha = 0.5$ نشان می‌دهند. مقادیر بهینه تابع هدف برای $N = 8$ و مقادیر $\alpha = 0.3$ ، $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 0.7$ را در جدول ۵.۳ آورده‌ایم و جدول ۶.۳ نیز ماکسیمم خطای مطلق را برای تقریب‌های بدست آمده نشان می‌دهد.

جدول ۵.۳: مقدار بهینه تابع هدف مثال ۳ برای $N = 8$

$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.3$	
$1/99045 \times 10^{-5}$	$7/58240 \times 10^{-8}$	$1/92835 \times 10^{-7}$	J^*



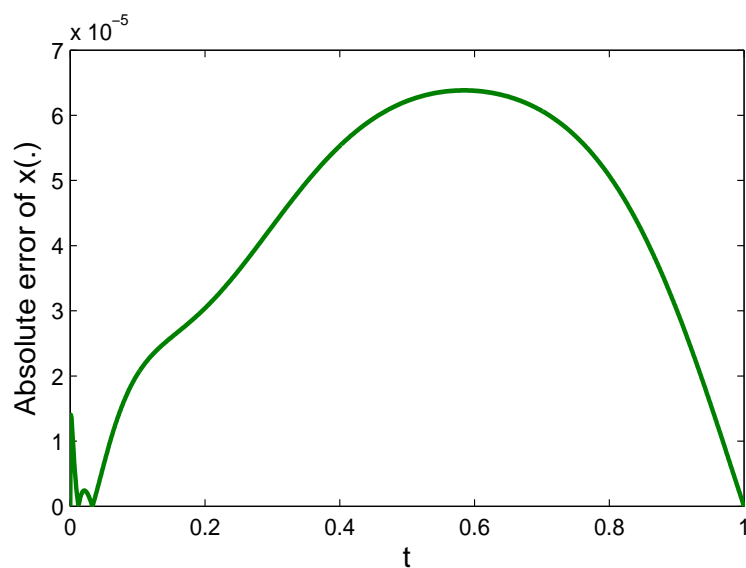
شکل ۸.۳: متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۳ برای $N = 8$



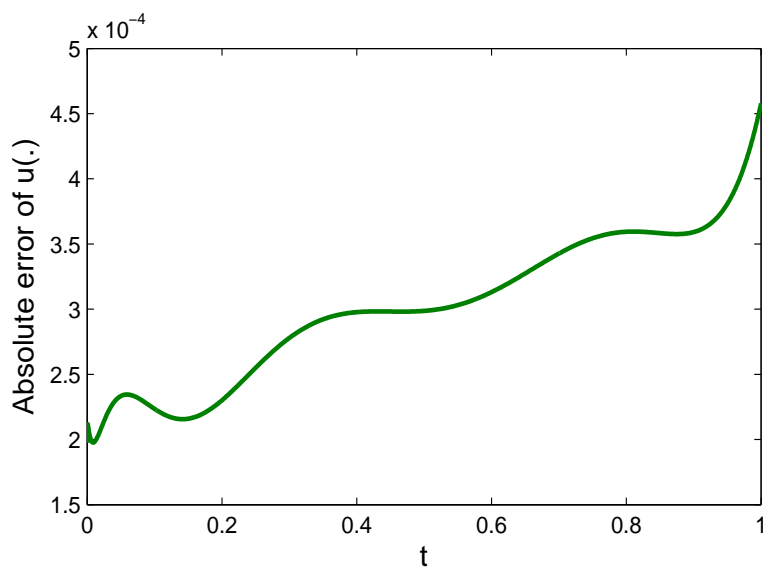
شکل ۹.۳: متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۳ برای $N = 8$

جدول ۶.۳: ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۳ برای $N = 8$

$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.3$	
1.12902×10^{-3}	6.38240×10^{-5}	4.36279×10^{-4}	$\text{Max}_t E_x(t) $
7.84979×10^{-3}	4.57806×10^{-4}	5.43759×10^{-4}	$\text{Max}_t E_u(t) $



شکل ۱۰.۳: خطای مطلق متغیر وضعیت مثال ۳ برای $N = 8$ و $\alpha = 0.5$



شکل ۱۱.۳: خطای مطلق متغیر کنترل مثال ۳ برای $N = 8$ و $\alpha = 0.5$

فصل ۴

یک روش تقریبی مستقیم بر پایه فرمول کلنشاو- کورتیس

در این فصل، رده خاصی از مسائل کنترل بهینه کسری را در نظر می‌گیریم و روش مستقیم جدیدی بر مبنای فرمول کلنشاو- کورتیس را برای حل آن پیاده‌سازی می‌کنیم. در این روش، ابتدا مسأله کنترل بهینه کسری موردنظر را به یک مسأله حساب تغییرات کسری معادل تبدیل می‌کنیم و سپس با استفاده از فرمول کلنشاو- کورتیس و نقاط گره‌ای چبیشف- گوس- لوباتو، مسأله بدست آمده را گسسته‌سازی می‌کنیم. با این روند، به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی دست می‌یابیم که با حل آن، جواب بهینه مسأله اصلی را تقریب می‌زنیم و با حل عددی سه مسأله، کارایی روش را تحقیق می‌کنیم.

۱.۴ مسأله کنترل بهینه کسری

هدف، حل مسأله کنترل بهینه کسری بصورت زیر است

$$\text{Minimize} \quad J(X, U) = \int_0^T F(\tau, X(\tau), U(\tau)) d\tau, \quad (1.4)$$

$$\text{subject to} \quad M\dot{X}(\tau) + N {}^C D_\tau^\alpha X(\tau) = G(\tau, X(\tau)) + H(\tau, X(\tau))U(\tau), \quad (2.4)$$

$$E(X_0, X_N) = 0, \quad (3.4)$$

که در آن $\alpha \in (0, 1)$ و X_0, M, N و X_N در \mathbb{R}^n هستند. توابع $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ، $G, H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ مشتق پذیرند. فرض می‌کنیم که برای هر $(\tau, X(\tau))$ داشته باشیم $H(\tau, X(\tau)) \neq 0$ که $\tau \in [0, T]$ است. $X(\cdot)$ و $U(\cdot)$ به ترتیب متغیرهای وضعیت و کنترل می‌باشند. $\dot{X}(\tau)$ مشتق معمولی و ${}^C D_\tau^\alpha X(\tau)$ مشتق کسری چپ کاپوتو از مرتبه α می‌باشد.

۲.۴ پیاده‌سازی روش

در این روش، از نقاط درونیابی چبیشف-گائوس-لوباتو استفاده می‌کنیم که برای $k = 0, 1, \dots, N$ به صورت $t_k = \cos(\frac{N-k}{N}\pi)$ است که ریشه‌های $(1-t^2) \frac{d}{dt} P_N(t)$ می‌باشد. چندجمله‌ای چبیشف از مرتبه N می‌باشد. از آنجایی که $t_k \in [-1, 1]$ می‌باشد، در ابتدا، مسأله را با استفاده از تغییر متغیر $\tau = \frac{T}{2}(t+1)$ به بازه $[-1, 1]$ انتقال می‌دهیم که در آن $t \in [-1, 1]$. در این بخش از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتق پذیر باشد. تعریف می‌کنیم $x(t) = X(\frac{T}{2}(t+1))$ ، $t \in (-1, 1]$ آن‌گاه

$${}^C D_\tau^\alpha X(\tau) = (\frac{2}{T})^\alpha {}^C D_t^\alpha x(t). \quad (4.4)$$

برهان. فرض کنید $t \in (-1, 1]$ داده شده و $\tau = \frac{T}{2}(t+1)$. برای هر $\xi \in (-1, t]$ تعریف می‌کنیم $s = \frac{\tau}{1+t}(\xi+1)$ آن‌گاه

$$X'(s) = \frac{dX}{ds} = \frac{d\xi}{ds} \frac{dX}{d\xi} = \frac{1+t}{\tau} \frac{dx}{d\xi} = \frac{1+t}{\tau} x'(\xi). \quad (5.4)$$

داریم $ds = \frac{\tau}{1+t} d\xi$ و بعلاوه

$$\begin{aligned} {}^C D_\tau^\alpha X(\tau) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau \frac{X'(s) ds}{(\tau-s)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-1}^t \frac{\frac{1+t}{\tau} x'(\xi) (\frac{\tau}{1+t}) d\xi}{(\tau - \frac{\tau}{1+t}(\xi+1))^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-1}^t \frac{x'(\xi) d\xi}{(\frac{T}{2})^\alpha (t-\xi)^\alpha} = (\frac{2}{T})^\alpha \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-1}^t \frac{x'(\xi) d\xi}{(t-\xi)^\alpha} \\ &= (\frac{2}{T})^\alpha {}^C D_t^\alpha x(t). \end{aligned} \quad (6.4)$$

□

ملاحظه ۱.۲.۴. توجه داریم که

$$\dot{X}(\tau) = \frac{dX}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dX}{dt} = \frac{2}{T} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{T} \dot{x}(t). \quad (7.4)$$

با توجه به تغییر متغیر $\tau = \frac{T}{\Upsilon}(t + 1)$ و قضیه ۱.۲.۴، مسأله (۳.۴)–(۱.۴) به مسأله زیر تبدیل می‌شود

$$\text{Minimize} \quad J(x, u) = \frac{T}{\Upsilon} \int_{-1}^1 f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (۸.۴)$$

$$\text{subject to} \quad \frac{\Upsilon}{T} M \dot{x}(t) + \left(\frac{\Upsilon}{T}\right)^\alpha N_{-1}^C D_t^\alpha x(t) = g(t, x(t)) + h(t, x(t))u(t), \quad (۹.۴)$$

$$e(x_\circ, x_N) = \circ, \quad (۱۰.۴)$$

که در آن

$$x(t) = X(\tau), \quad u(t) = U(\tau),$$

$$g(t, x(t)) = G(\tau, X(\tau)), \quad h(t, x(t)) = H(\tau, X(\tau)), \quad e(x_\circ, x_N) = E(X_\circ, X_N).$$

حال با استفاده از رابطه (۹.۴) داریم

$$u(t) = \frac{\frac{\Upsilon}{T} M \dot{x}(t) + \left(\frac{\Upsilon}{T}\right)^\alpha N_{-1}^C D_t^\alpha x(t) - g(t, x(t))}{h(t, x(t))}, \quad t \in (-1, 1] \quad (۱۱.۴)$$

که در آن برای هر $t \in (-1, 1]$ داریم $h(t, x(t)) \neq \circ$. با جایگذاری (۱۱.۴) در (۸.۴)، مسأله کنترل بهینه کسری را به یک مسأله حساب تغییرات کسری معادل به صورت زیر تبدیل می‌کنیم

$$\text{Minimize} \quad I(x) = \frac{T}{\Upsilon} \int_{-1}^1 \tilde{f}(t, x(t), \dot{x}(t), {}_{-1}^C D_t^\alpha x(t)) dt, \quad (۱۲.۴)$$

$$\text{subject to} \quad x_\circ = \beta, \quad x_N = \gamma, \quad (۱۳.۴)$$

که در آن

$$\tilde{f}(t, x(t), \dot{x}(t), {}_{-1}^C D_t^\alpha x(t)) = f(t, x(t), \frac{\Upsilon}{T} M \dot{x}(t) + \left(\frac{\Upsilon}{T}\right)^\alpha N_{-1}^C D_t^\alpha x(t) - g(t, x(t))}{h(t, x(t))}. \quad (۱۴.۴)$$

درون‌یاب لاگرانژ کسری زیر را برای تقریب متغیر وضعیت به کار می‌بریم.

$$h_j^\alpha(t) = \prod_{\substack{i=\circ \\ i \neq j}}^N \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha}, \quad j = \circ, 1, \dots, N, \quad (۱۵.۴)$$

که در آن $\alpha \in (\circ, 1)$. فرض می‌کنیم

$$x(t) \approx \sum_{j=\circ}^N \bar{x}_j h_j^\alpha(t), \quad t \in [-1, 1], \quad (۱۶.۴)$$

و با استفاده از خاصیت درون‌یابی داریم

$$x(t_k) \approx \bar{x}_k, \quad k = \circ, 1, \dots, N. \quad (۱۷.۴)$$

همچنین داریم

$$\dot{x}(t) \approx \sum_{j=0}^N \bar{x}_j h_j^{\alpha'}(t), \quad (18.4)$$

که در آن

$$h_j^{\alpha'}(t) = \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^N \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_r^\alpha} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j \\ i \neq r}}^N \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha}, \quad (19.4)$$

علاوه بر این داریم

$${}_{-1}^C D_t^\alpha x(t) \approx \sum_{j=0}^N \bar{x}_j {}_{-1}^C D_t^\alpha h_j^\alpha(t),$$

که در آن

$${}_{-1}^C D_t^\alpha h_j^\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-1}^t \frac{h_j^{\alpha'}(\xi) d\xi}{(t-\xi)^\alpha}. \quad (20.4)$$

تعریف می کنیم

$$D_{kj} = h_j^{\alpha'}(t_k), \quad j, k = 0, 1, \dots, N,$$

$$\bar{D}_{kj} = {}_{-1}^C D_j^\alpha h_j(t_k), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

و قرار می دهیم

$$\theta = {}_{-1}^C D_t^\alpha x(t_0),$$

لذا داریم

$$x'(t_k) \approx \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

$${}_{-1}^C D_t^\alpha x(t_k) \approx \sum_{j=0}^N \bar{x}_j \bar{D}_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

حال با استفاده از فرمول کلنشاو- کورتیس و نقاط چبیشف- گاوس- لوباتو بدست می آوریم

$$\text{Minimize} \quad \frac{T}{\sqrt{\pi}} \left(w_0 \tilde{f}(t_0, \bar{x}_0, \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{0j}, \theta) + \sum_{k=1}^N w_k \tilde{f}(t_k, \bar{x}_k, \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj}, \sum_{j=0}^N \bar{x}_j \bar{D}_{kj}) \right), \quad (21.4)$$

$$\text{subject to} \quad e(\bar{x}_0, \bar{x}_N) = 0,$$

$\bar{x} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_N)$ و θ متغیرهای مسأله (۲۱.۴) می باشند. با حل مسأله برنامه ریزی غیرخطی (؟؟) - (۱۴.۲)، متغیر وضعیت بهینه تقریبی $x(\cdot)$ را از رابطه (۱۶.۴) بدست می آوریم و با استفاده از رابطه (۱۱.۴) متغیر کنترل بهینه تقریبی برای مسأله (۳.۴) - (۱.۴) حاصل می شود.

۳.۴ نتایج عددی

در این بخش، روش ارائه شده را برای حل سه مثال کاربردی پیاده می‌کنیم و کارایی روش را نشان می‌دهیم. در مثال‌های زیر برای حل مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی بدست آمده از گسسته‌سازی، از تابع FMINCON در نرم‌افزار MATLAB استفاده می‌کنیم. علاوه‌براین برای محاسبه خطای مطلق متغیرهای بهینه تقریبی وضعیت و کنترل به ترتیب از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$E_X(\tau) = |X^*(\tau) - X(\tau)|, \quad \tau \in [0, T], \quad (22.4)$$

$$E_U(\tau) = |U^*(\tau) - U(\tau)|, \quad \tau \in [0, T],$$

که در آن $U^*(\tau)$ و $X^*(\tau)$ به ترتیب، متغیرهای وضعیت دقیق و کنترل دقیق مسأله کنترل بهینه کسری موردنظر می‌باشند. در همه‌ی مثال‌های ارائه شده، مقدار تابع هدف بهینه‌ی مورد انتظار صفر می‌باشد.

مثال ۱.۳.۴. مسأله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Minimize} \quad J(X, U) = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 \left[(X(\tau) - \tau^\alpha)^2 + (U(\tau) - \tau^\alpha - \Gamma(\alpha + 1))^2 \right] d\tau, \quad (23.4)$$

$$\text{subject to} \quad {}^C D_\tau^\alpha X(\tau) = -X(\tau) + U(\tau) \quad (24.4)$$

$$X(0) = 0, \quad (25.4)$$

جواب دقیق این مسأله $(X^*(\tau), U^*(\tau)) = (\tau^\alpha, \tau^\alpha + \Gamma(\alpha + 1))$ می‌باشد. مسأله متناظر با (۱۰.۴)–(۸.۴) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\text{Minimize} \quad J(x, u) = \frac{1}{\Gamma} \int_{-1}^1 \left[(x(t) - (\frac{1}{\Gamma}(t+1))^\alpha)^2 + (u(t) - (\frac{1}{\Gamma}(t+1))^\alpha - \Gamma(\alpha + 1))^2 \right] dt, \quad (26.4)$$

$$\text{subject to} \quad {}^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t), \quad (27.4)$$

$$x(-1) = 0, \quad (28.4)$$

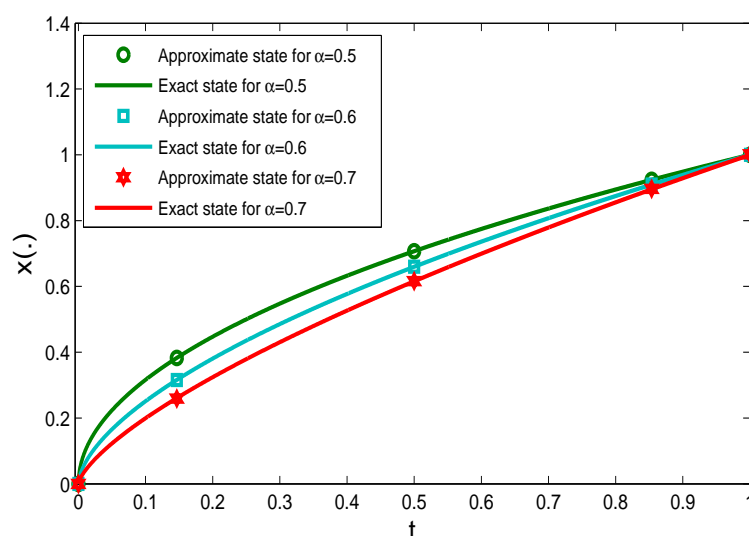
از رابطه (۲۷.۴) داریم

$$u(t) = {}^C D_t^\alpha x(t) + x(t), \quad (29.4)$$

حال با جایگذاری (۲۹.۴) در رابطه (۲۶.۴) به مسأله حساب تغییرات کسری زیر می‌رسیم

$$\text{Minimize} \quad I(x) = \frac{1}{\Gamma} \int_{-1}^1 \left[(x(t) - (\frac{1}{\Gamma}(t+1))^\alpha)^2 + ({}^C D_t^\alpha x(t) + x(t) - (\frac{1}{\Gamma}(t+1))^\alpha - \Gamma(\alpha + 1))^2 \right] dt, \quad (30.4)$$

$$\text{subject to} \quad x(-1) = 0.$$



شکل ۱.۴: متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۱ برای $N = 4$

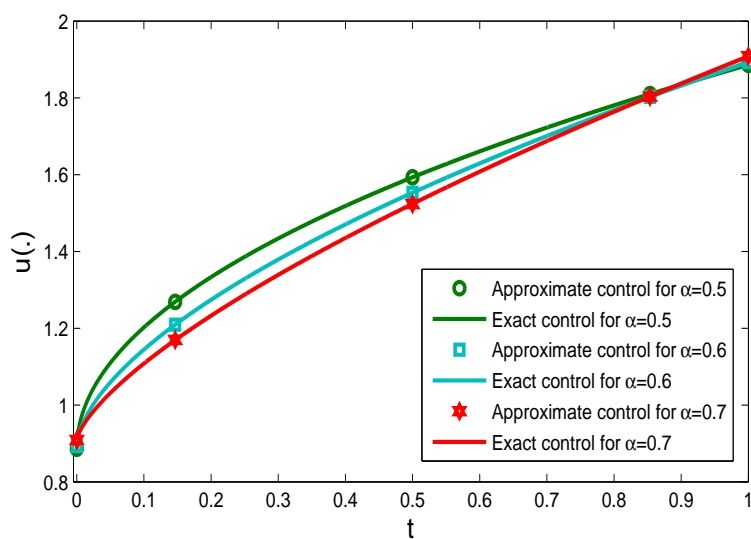
با فرض اینکه $x(t) \approx \sum_{j=0}^N \bar{x}_j h_j^\alpha(t)$ و بکارگیری فرمول کلنشاو- کورتیس به مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(w_0 \left[(\bar{x}_0 - (\frac{1}{\Gamma} (t_0 + 1))^\alpha)^2 + (\Gamma^\alpha \theta + \bar{x}_0 - (\frac{1}{\Gamma} (t_0 + 1))^\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. - \Gamma(\alpha + 1)) \right]^2 + \sum_{k=1}^N w_k \left[(\bar{x}_k - (\frac{1}{\Gamma} (t_k + 1))^\alpha)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + (\Gamma^\alpha \sum_{j=0}^N \bar{x}_j \bar{D}_{kj} + \bar{x}_k - (\frac{1}{\Gamma} (t_k + 1))^\alpha - \Gamma(\alpha + 1)) \right]^2 \right), \end{aligned}$$

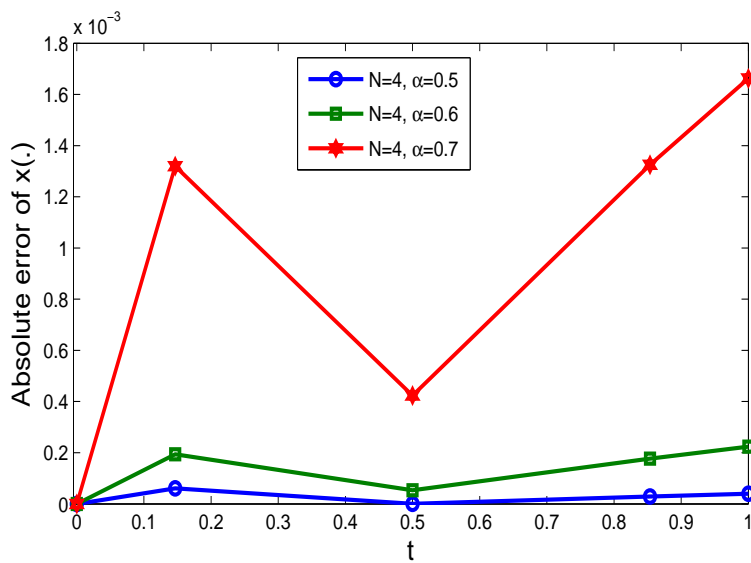
subject to $\bar{x}_0 = 0,$

(۳۱.۴)

که در آن t_k برای $k = 1, 2, \dots, N$ نقاط چبیشف- گاوس- لوباتو می‌باشند. با حل مسأله (۳۱.۴) برای $N = 4$ و مقادیر مختلف $\alpha = 0.5, \alpha = 0.6, \alpha = 0.7$ ، متغیر وضعیت بهینه را تقریب می‌زنیم که در شکل ۱.۴ نشان داده شده است و با استفاده از رابطه (۲۹.۴) متغیر کنترل بهینه را تقریب می‌زنیم که در شکل ۲.۴ نشان داده‌ایم. همچنین خطای مطلق متغیرهای وضعیت بهینه و کنترل بهینه را برای $N = 4$ و مقادیر مختلف $\alpha = 0.5, \alpha = 0.6, \alpha = 0.7$ به ترتیب در شکل‌های ۳.۴ و ۴.۴ آورده‌ایم. جدول ۲.۴ ماکسیمم خطای مطلق متغیرهای وضعیت بهینه و کنترل بهینه را نشان می‌دهد و در جدول ۱.۴ نیز مقدار بهینه تابع هدف را برای $N = 4$ و مقادیرهای $\alpha = 0.5, \alpha = 0.6, \alpha = 0.7$ ارائه شده است.



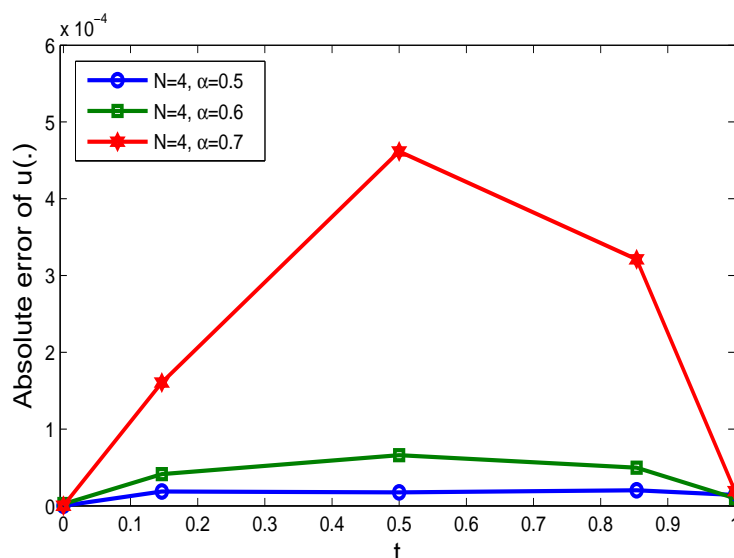
شکل ۲.۴: متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۱ برای $N = 4$



شکل ۳.۴: خطای مطلق متغیر وضعیت مثال ۱

جدول ۱.۴: مقدار بهینه تابع هدف مثال ۱ برای $N = 4$

$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$	
$6/080480 \times 10^{-7}$	$1/200881 \times 10^{-8}$	$7/986571 \times 10^{-10}$	J^*



شکل ۴.۴: خطای مطلق متغیر کنترل مثال ۱

جدول ۲.۴: ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۱ برای $N = 4$

$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$	
1.662597×10^{-3}	2.236463×10^{-5}	6.077585×10^{-5}	$\text{Max}_t E_x(t) $
4.616561×10^{-4}	6.593832×10^{-5}	2.031847×10^{-5}	$\text{Max}_t E_u(t) $

مثال ۲.۳.۴. مسأله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J(X, U) = \int_0^1 (U(\tau) - X(\tau))^2 d\tau \quad (32.4)$$

$$\text{subject to } \dot{X}(\tau) + {}^C D_{\tau}^{\alpha} X(\tau) = U(\tau) - X(\tau) + \frac{6\tau^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + \tau^3, \quad (33.4)$$

$$X(0) = 0, \quad X(1) = \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)}. \quad (34.4)$$

جواب دقیق مسأله بصورت $(X^*(\tau), U^*(\tau)) = (\frac{6\tau^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)}, \frac{6\tau^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)})$ می باشد. مسأله متناظر با (۱۰.۴) - (۸.۴) به صورت زیر بدست می آید

$$\text{Minimize } J(x, u) = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 (u(t) - x(t))^2 dt, \quad (35.4)$$

$$\text{subject to } 2\dot{x}(t) + 2{}^C D_{-1}^{\alpha} x(t) = u(t) - x(t) + \frac{6(\frac{1}{6}(t+1))^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + (\frac{1}{6}(t+1))^3, \quad (36.4)$$

$$x(-1) = 0, \quad x(1) = \frac{6}{\Gamma(\alpha + 3)}. \quad (37.4)$$

از رابطه (36.4) داریم

$$u(t) = 2\dot{x}(t) + 2^\alpha {}_C D_t^\alpha x(t) + x(t) - \frac{6(\frac{1}{\Gamma} (t+1))^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - (\frac{1}{\Gamma} (t+1))^3. \quad (38.4)$$

با جایگذاری (38.4) در (35.4) داریم

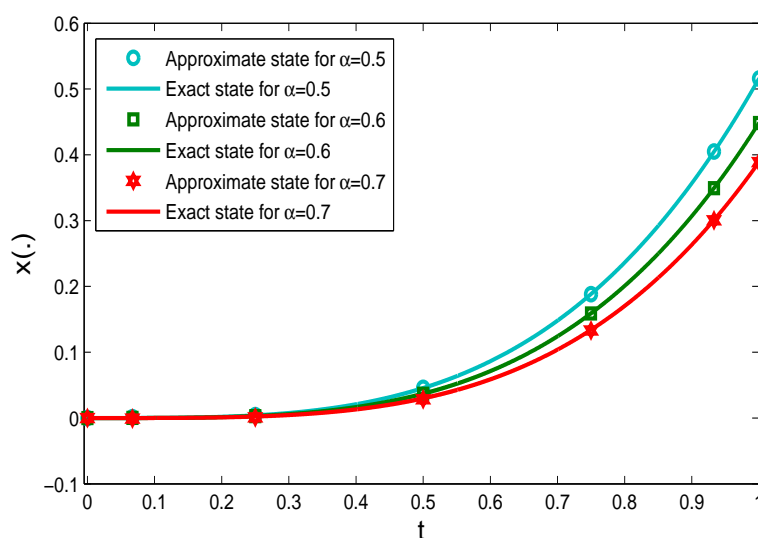
$$\text{Minimize} \quad I(x) = \frac{1}{\Gamma} \int_{-1}^1 (2\dot{x}(t) + 2^\alpha {}_C D_t^\alpha x(t) - \frac{6(\frac{1}{\Gamma} (t+1))^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - (\frac{1}{\Gamma} (t+1))^3)^2 dt, \quad (39.4)$$

$$\text{subject to} \quad x(-1) = 0, \quad x(1) = \frac{6}{\Gamma(\alpha+3)}. \quad (40.4)$$

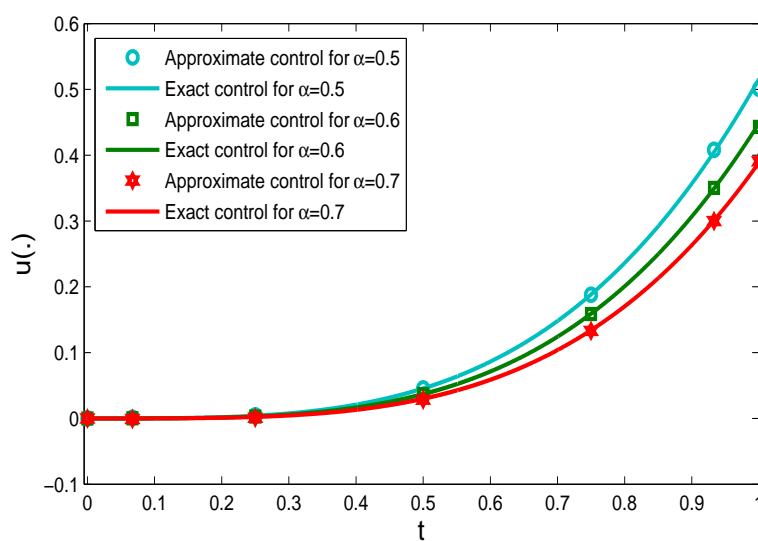
با بکارگیری فرمول کلنشاو- کورتیس به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad I(\bar{x}) = & \frac{1}{\Gamma} \left(w_0 \left(2 \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{\cdot j} + 2^\alpha \theta - \frac{6(\frac{1}{\Gamma} (t_0 + 1))^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right. \right. \\ & \left. \left. - (\frac{1}{\Gamma} (t_0 + 1))^3 \right)^2 + \sum_{k=1}^N w_k \left(2 \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2^\alpha \sum_{j=0}^N \bar{x}_j \bar{D}_{kj} - \frac{6(\frac{1}{\Gamma} (t_k + 1))^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - (\frac{1}{\Gamma} (t_k + 1))^3 \right)^2 \right), \\ \text{subject to} \quad & \bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_N = \frac{6}{\Gamma(\alpha+3)}, \end{aligned} \quad (41.4)$$

با حل مسأله (41.4) برای $N = 6$ و مقادیر مختلف $0.5, 0.6, 0.7$ برای α متغیر وضعیت بهینه تقریبی را بدست می‌آوریم و با استفاده از رابطه (38.4)، متغیر کنترل بهینه تقریبی حاصل می‌شود که به ترتیب در شکل‌های 5.4 و 6.4 نشان داده شده‌اند. خطای مطلق متغیر وضعیت بهینه و متغیر کنترل بهینه برای $N = 6$ و $\alpha = 0.5, \alpha = 0.6, \alpha = 0.7$ نیز به ترتیب در شکل‌های 7.4 و 8.4 آورده شده است. جدول 3.4 ماکسیمم خطای مطلق متغیرهای وضعیت بهینه تقریبی و کنترل بهینه تقریبی و جدول 4.4 مقادیر تابع هدف بهینه را برای $N = 6$ و $\alpha = 0.5, \alpha = 0.6, \alpha = 0.7$ نشان می‌دهد.



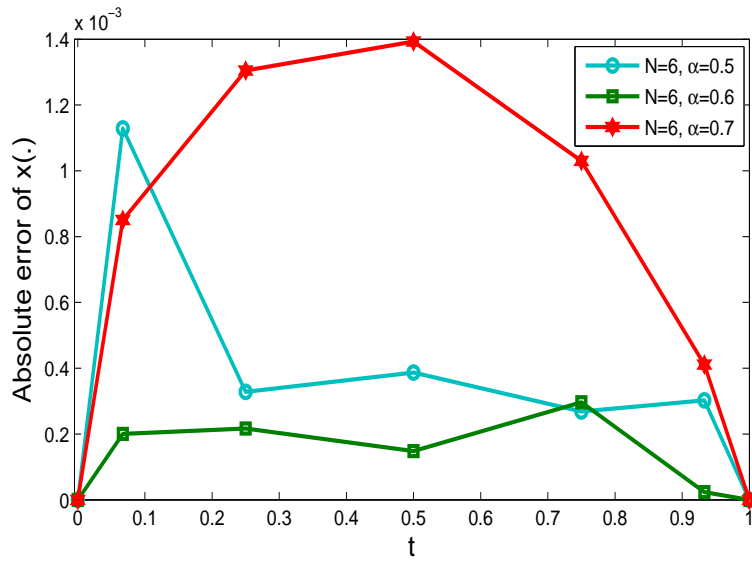
شکل ۵.۴: متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۲ برای $N = 6$



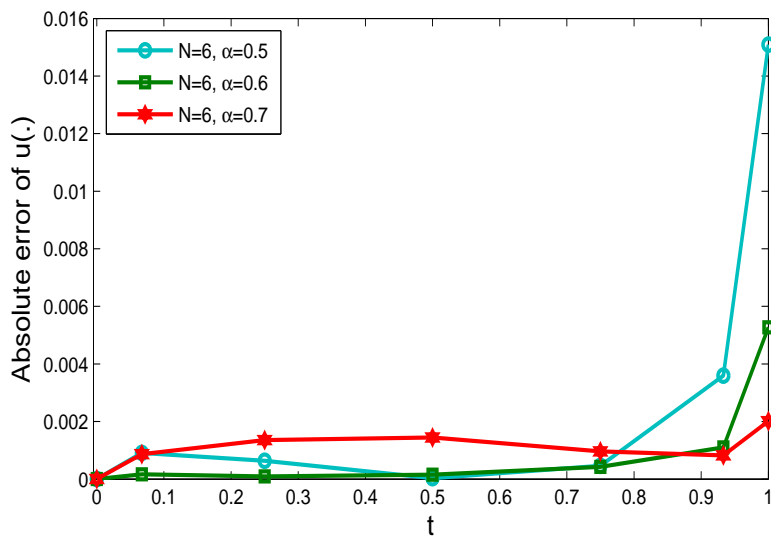
شکل ۶.۴: متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۲ برای $N = 6$

جدول ۳.۴: ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۲ برای $N = 6$

$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$	
1.393032×10^{-3}	2.967422×10^{-4}	1.128957×10^{-3}	$\text{Max}_t E_x(t) $
2.011737×10^{-3}	5.269326×10^{-3}	1.508986×10^{-2}	$\text{Max}_t E_u(t) $



شکل ۷.۴: خطای مطلق متغیر وضعیت مثال ۲



شکل ۸.۴: خطای مطلق متغیر کنترل مثال ۲

جدول ۴.۴: مقدار بهینه تابع هدف مثال ۲ برای $N = 6$

$\alpha = 0/7$	$\alpha = 0/6$	$\alpha = 0/5$	
$8/165173 \times 10^{-8}$	$5/516687 \times 10^{-7}$	$4/699837 \times 10^{-6}$	J^*

مثال ۳.۳.۴. مسأله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\text{Minimize } J(X, U) = \int_0^1 (\tau U(\tau) - (\alpha + 2)X(\tau))^2 d\tau, \quad (42.4)$$

$$\text{subject to } \dot{X}(\tau) + {}^C D_\tau^\alpha X(\tau) = U(\tau) - \tau^2, \quad (43.4)$$

$$X(0) = 0, \quad X(1) = \frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)}. \quad (44.4)$$

و جواب دقیق مسأله $(X^*(\tau), U^*(\tau)) = (\frac{2\tau^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}, \frac{2\tau^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)})$ می‌باشد. مسأله متناظر با (۸.۴) - (۱۰.۴) به صورت زیر است

$$\text{Minimize } J(x, u) = \frac{1}{\Gamma} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\Gamma} (t+1)u(t) - (\alpha + 2)x(t) \right)^2 dt, \quad (45.4)$$

$$\text{subject to } 2\dot{x}(t) + 2^\alpha {}^C D_t^\alpha x(t) = u(t) + \left(\frac{1}{\Gamma} (t+1) \right)^2 \quad (46.4)$$

$$x(-1) = 0, \quad x(1) = \frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)}. \quad (47.4)$$

از (۴۶.۴) داریم

$$u(t) = 2\dot{x}(t) + 2^\alpha {}^C D_t^\alpha x(t) - \left(\frac{1}{\Gamma} (t+1) \right)^2. \quad (48.4)$$

با جایگذاری (۴۸.۴) در (۴۵.۴) بدست می‌آوریم

$$\text{Minimize } I(x) = \frac{1}{\Gamma} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\Gamma} (t+1) \left(2\dot{x}(t) + 2^\alpha {}^C D_t^\alpha x(t) - \left(\frac{1}{\Gamma} (t+1) \right)^2 \right) - (\alpha + 2)x(t) \right)^2 dt, \quad (49.4)$$

$$\text{subject to } x(-1) = 0, \quad x(1) = \frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)}.$$

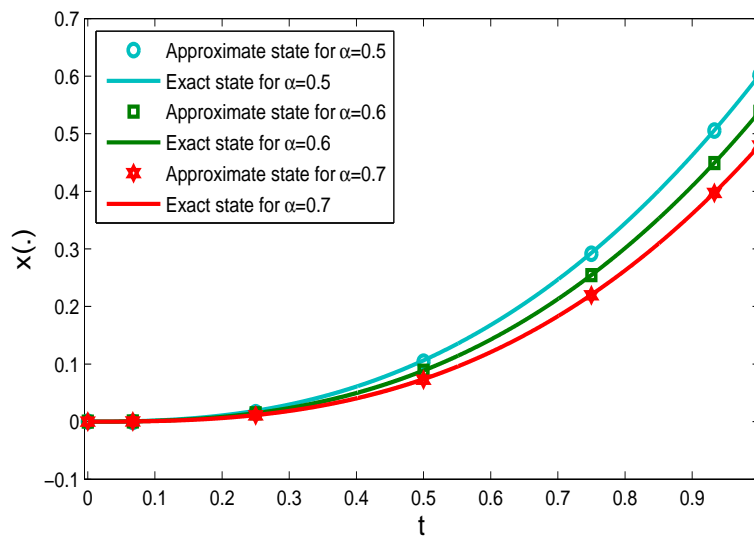
حال با استفاده از فرمول کلنشاو- کورتیس داریم

$$\text{Minimize } \frac{1}{\Gamma} \left[\left(w_0 \frac{1}{\Gamma} (t_0 + 1) \left(2 \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{0,j} + 2^\alpha \theta - \left(\frac{1}{\Gamma} (t_0 + 1) \right)^2 \right) - (\alpha + 2)\bar{x}_0 \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^N w_k \frac{1}{\Gamma} (t_k + 1) \left(2 \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{k,j} + 2^\alpha \bar{x}_k - \left(\frac{1}{\Gamma} (t_k + 1) \right)^2 \right) - (\alpha + 2)\bar{x}_k \right)^2 \right], \quad (50.4)$$

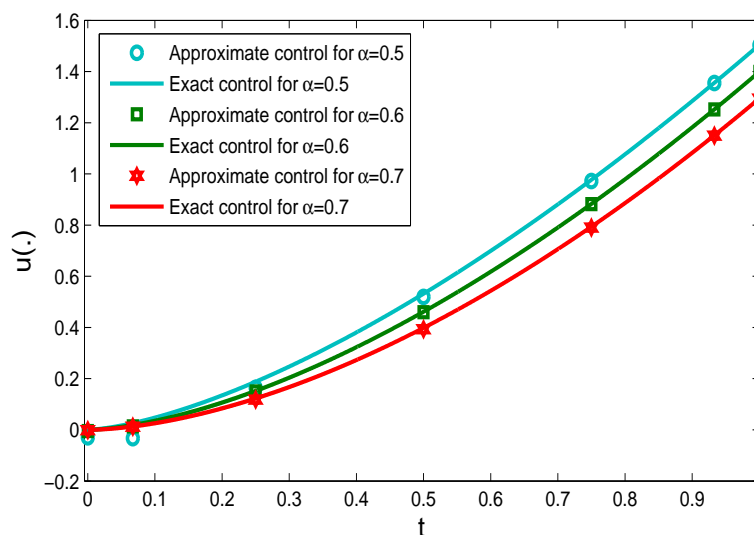
$$\text{subject to } \bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_N = \frac{6}{\Gamma(\alpha + 3)},$$

با حل (۵۰.۴) برای $N = 6$ و مقادیرهای مختلف $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.6$ و $\alpha = 0.7$, نتایج مشابه با مثال قبلی بدست می‌آید که در ادامه آورده شده است. متغیر وضعیت بهینه تقریبی و متغیر کنترل بهینه تقریبی را به ترتیب در شکل‌های ۹.۴ و ۱۰.۴ آورده‌ایم. شکل‌های ۱۱.۴ و ۱۲.۴

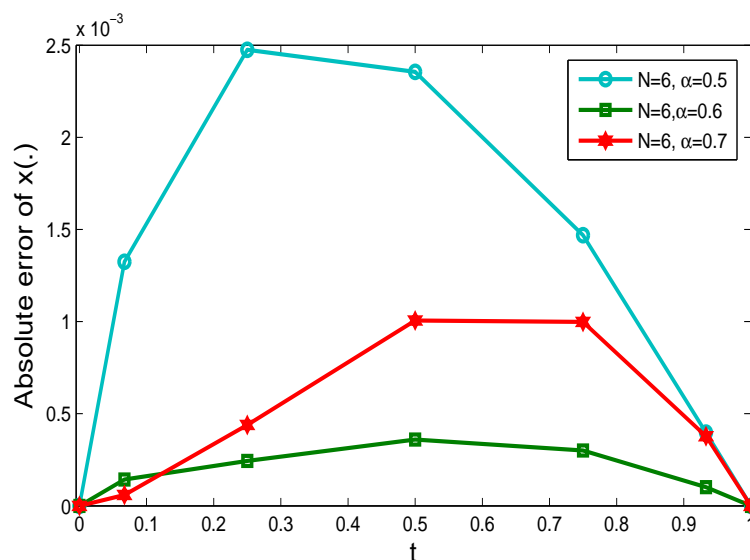
به ترتیب خطای مطلق متغیر وضعیت بهینه و متغیر کنترل بهینه را برای $N = 6$ و $\alpha = 0.5$ ، $\alpha = 0.6$ و $\alpha = 0.7$ نشان می‌دهد. همچنین جدول ۵.۴ ماکسیمم خطای مطلق متغیرهای وضعیت بهینه تقریبی و کنترل بهینه تقریبی و جدول ۶.۴ مقادیر تابع هدف را برای $N = 6$ و $\alpha = 0.5$ ، $\alpha = 0.6$ و $\alpha = 0.7$ نشان می‌دهد.



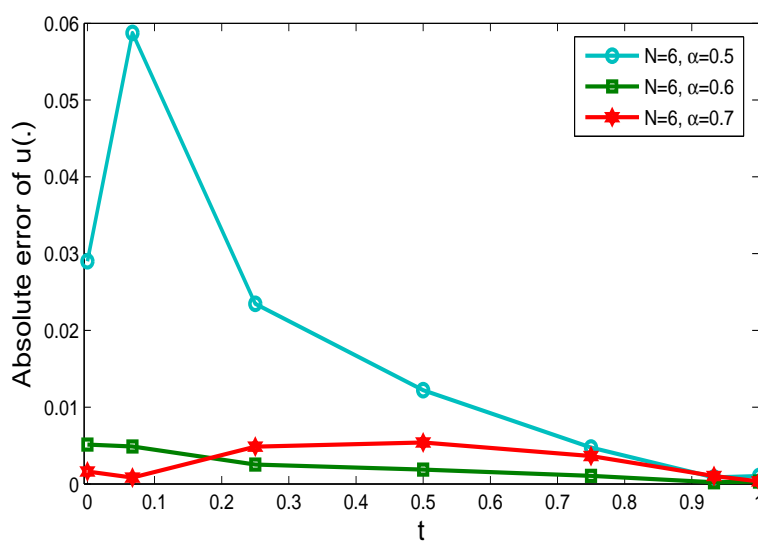
شکل ۹.۴: متغیر وضعیت بهینه دقیق و تقریبی مثال ۳ برای $N = 6$



شکل ۱۰.۴: متغیر کنترل بهینه دقیق و تقریبی مثال ۳ برای $N = 6$



شکل ۱۱.۴: خطای مطلق متغیر وضعیت مثال ۳



شکل ۱۲.۴: خطای مطلق متغیر کنترل مثال ۳

جدول ۵.۴: ماکسیمم خطای مطلق متغیر وضعیت و کنترل مثال ۳ برای $N = 6$

$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$	
1.005558×10^{-3}	3.593088×10^{-4}	2.475186×10^{-3}	$\text{Max}_t E_x(t) $
5.399343×10^{-3}	5.118654×10^{-3}	5.873404×10^{-2}	$\text{Max}_t E_u(t) $

جدول ۶.۴: مقدار بهینه تابع هدف مثال ۳ برای $N = 6$

$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$	
4.013053×10^{-9}	2.074337×10^{-9}	1.080409×10^{-7}	J^*

فصل ۵

نتایج و پیشنهادات

۱.۵ نتایج

از آنجا که حل تحلیلی مسائل کنترل بهینه کسری معمولاً دشوار است، استفاده از روش‌های عددی برای حل این مسائل ضرورت می‌یابد. در این پایان‌نامه، دو روش برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تحت سیستم دینامیکی با مشتق کسری چپ کاپوتو از مرتبه $0 < \alpha < 1$ ارائه کردیم. روش اول یک روش شبه‌طیفی غیرمستقیم است. در این روش، تابع درون‌یاب لاگرانژ کسری را معرفی کردیم و با بکارگیری آن، متغیرهای وضعیت، کنترل و هم‌وضعیت موجود در مسأله کنترل بهینه کسری را در نقاط چبیشف-گوس تقریب زدیم. علاوه‌براین، شرایط لازم بهینگی کسری را به صورت یک قضیه آورده و اثبات کردیم. روش دوم، یک روش مستقیم است که بر پایه فرمول کلنشاو-کورتیس می‌باشد. روند حل در این روش به اینگونه است که ابتدا مسأله کنترل بهینه کسری را به یک مسأله حساب تغییرات کسری معادل تبدیل کردیم و سپس با بکارگیری فرمول کلنشاو-کورتیس و نقاط چبیشف-گوس-لوباتو، مسأله حساب تغییرات کسری حاصل را به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی تقلیل دادیم که با حل آن، جواب بهینه مسأله اصلی را تقریب زدیم. و در آخر، برای نشان دادن کارایی و اعتبار روش‌ها، مثال‌های عددی ارائه دادیم.

۲.۵ پیشنهادات

- در این پایان‌نامه، مرتبه مشتق کسری در روش‌ها و مثال‌های عددی ارائه شده بین 0 و 1 می‌باشد، که پیشنهاد می‌شود روش‌های ارائه شده را برای حالتی که $n - 1 < \alpha < n$ برای $n \in \mathbb{N}$ نیز تعمیم داد.
- روش‌های ارائه شده در این پایان‌نامه برای مسائل کسری می‌باشد که مشتقات کسری کاپوتو و ریمان-لیوویل در آن ظاهر شده است. می‌توان این روش‌ها را برای مسائل کسری که مشتقات کسری دیگر در آن‌ها وجود دارد، نیز استفاده نمود و تعمیم داد.
- پیشنهاد می‌شود که با توجه به کارایی روش‌های ارائه شده، از آنها برای حل عددی و تقریبی سایر مسائل کسری از جمله کنترل بهینه کسری معادلات مشتقات جزئی استفاده شود.

مراجع

- [۱] جعفری ح، (۱۳۹۲)، ”مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل کسری” چاپ اول، مؤسسه انتشارات دانشگاه مازندران
- [۲] کرایه‌چیان ع.ا.، (۱۳۸۵)، ”آنالیز عددی ۱ (یک) برای دانشجویان علوم و مهندسی” چاپ اول، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد
- [3] Aboelela M.A., Ahmed M.F. and Dorrah H.T. (2012), ”Design of aerospace control systems using fractional PID controller” **Journal of Advanced Research**, 3(3), 225-232.
- [4] Agrawal O.P. (2004),” A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems” **Nonlinear Dynamics**, 38(1-4), 323-337.
- [5] Agrawal O.P. (2008), ”A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems” **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, 130(1), 011010.1-011010.6.
- [6] Alizadeh, A. and Effati, S. (2016), ”An iterative approach for solving fractional optimal control problems” **Journal of Vibration and Control**, DOI: 1077546316633391, 1-19.
- [7] Almedia R. and Torres D.F.M. (2015), ”A discrete method to solve fractional optimal control problems” **Nonlinear Dynamics**, 80(4), 1811-1816.
- [8] Beschi M., Padula F. and Visioli A. (2017), ”The generalised isodamping approach for robust fractional PID controllers design” **International Journal of Control**, 90(6), 1157-1164.
- [9] Bykadorov I., Ellero A., Funari S. and Moretti E. (2007), ”A fractional optimal control problem for maximizing advertising efficiency”, Supported by universita Ca' Foscari di Venezia.
- [10] Ding Y., Wang Z. and Ye, H. (2012), ”Optimal control of a fractional-order HIV-immune system with memory” **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, 20(3), 763-769.

- [11] Fahroo F. and Ross I.M. (2001), "Costate estimation by a Legendre pseudospectral method" **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, 24(2), 270-277.
- [12] Feliu-Talegon D. and Feliu-Batlle V. (2017), "Improving the position control of a two degrees of freedom robotic sensing antenna using fractional-order controllers" **International Journal of Control**, 90(6), 1256-1281.
- [13] Hugheus P.C. and Tanner J.M. (1973), "Title of paper should appear here" **Name of Journal should appear here**, 114(3), 444
- [14] Keshavarz E., Ordokhani Y. and Razzaghi M. (2016), "A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials" **Journal of Vibration and Control**, 22(18), 3889-3903.
- [15] Kirk D.E. (1970), "**Optimal Control Theory**", An Introduction Prentic, Hall.
- [16] Lotfi A., Dehghan M. and Yousefi S.A. (2011), "A numerical technique for solving fractional optimal control problems" **Computers and Mathematics with Applications**, 62(3), 1055-1067.
- [17] Miller K.S. and Ross B. (1993), "**An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations**", Wiley-Interscience publication.
- [18] Muresan C.I., Dutta A., Dulf E.H. Pinar, Z. Maxim A. and Ionescu C.M. (2016), "Tuning algorithms for fractional order internal model controllers for time delay processes" **International Journal of Control**, 89(3), 579-593.
- [19] Nemati A. (2017), "Numerical solution of 2D fractional optimal control problems by the spectral method combined with Bernstein operational matrix" **International Journal of Control**, Accepted, 1-20.
- [20] Oldham K. and Spanier J. (1974), "**The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order**", Elsevier.
- [21] Pinch E.R. (1995), "**Optimal control and the calculus of variations**", Oxford University Press.
- [22] Podlubny I. (1998), "**Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications**", Academic press.

- [23] Pooseh S., Almeida R. and Torres D.F. (2013), "A numerical scheme to solve fractional optimal control problems" **Conference Papers in Science. Hindawi Publishing Corporation**, Article ID 165298, 10 pages.
- [24] Samko S.G., Kilbas A. A. and Marichev O.I. (1993), "**Fractional integrals and derivatives Theory and Applications**", Gordon and Breach, Yverdon.
- [25] Sweilam N.H., Al-Ajami T. M. and Hoppe, R.H. (2013), "Numerical solution of some types of fractional optimal control problems" **The Scientific World Journal, Hindawi Publishing Corporation**, Article ID 306237, 9 pages.
- [26] Trefethen L.N. (2008), "Is Gauss quadrature better than Clenshaw-Curtis?", *SIAM Review*, 50(1), 67-68.
- [27] Trujillo J.J. and Ungureanu V.M. (2016), "Optimal control of discrete-time linear fractional-order systems with multiplicative noise" **International Journal of Control**, Published online: 29 Dec 2016, DOI: 10.1080/00207179.2016.1266520.
- [28] Zhou Y., Wang j. and Zhang L. (2016), "**Basic theory of fractional differential equations**", World Scientific.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Validity	اعتبار
Fractional Integral	انتگرال کسری
Recursive	بازگشتی
Nonlinear Programming	برنامه‌ریزی غیرخطی
Functional	تابع
Fractional Lagrange Interpolating Function	تابع درون‌یاب لاگرانژ کسری
Objective Function	تابع هدف
Approximation	تقریب
Chebyshev Polynomial	چندجمله‌ای چی‌بی‌شف
Shifted Chebyshev Polynomial	چندجمله‌ای چی‌بی‌شف شیفت داده شده
Orthogonal Polynomial	چندجمله‌ای متعامد
Calculus of Variations	حساب تغییرات
Fractional Calculus	حساب کسری
Absolute Error	خطای مطلق
Interpolation	درون‌یابی
System of Nonlinear Algebraic Equations	دستگاه معادلات جبری غیرخطی
Chebyshev Pseudospectral Method	روش شبه‌طیفی چی‌بی‌شف
Stationary conditions	شرایط ایستایی
Transversality conditions	شرایط تراگردی
Fractional Necessary Optimality Conditions	شرایط لازم بهینگی کسری
Piecewise Continuous	قطعه‌قطعه پیوسته
Efficiency	کارایی
Fractional Optimal Control	کنترل بهینه کسری
Discrete	گسسته کردن
Fractional Derivative	مشتق کسری
Optimal Value	مقدار بهینه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolute Error	خطای مطلق
Approximation	تقریب
Calculus of Variations	حساب تغییرات
Chebyshev Polynomials	چندجمله‌ای چی‌بی‌شف
Chebyshev Pseudospectral Method	روش شبه‌طیفی چی‌بی‌شف
Discrete	گسسته کردن
Efficiency	کارایی
Fractional Calculus	حساب کسری
Fractional Derivative	مشتق کسری
Fractional Integral	انتگرال کسری
Fractional Lagrange Interpolating Function	تابع درون‌یاب لاگرانژ کسری
Stationary conditions	شرایط ایستایی
Transversality conditions	شرایط تراگردی
Fractional Necessary Optimality Conditions	شرایط لازم بهینگی کسری
Fractional Optimal Control	کنترل بهینه کسری
Functional	تابع
Interpolation	درون‌یابی
Nonlinear Programming	برنامه‌ریزی غیرخطی
Objective Function	تابع هدف
Optimal Value	مقدار بهینه
Orthogonal Polynomial	چندجمله‌ای متعامد
Piecewise Continuous	قطعه‌قطعه پیوسته
Recursive	بازگشتی
Shifted Chebyshev Polynomial	چندجمله‌ای چی‌بی‌شف شیفت داده شده
System of Nonlinear Algebraic Equations	دستگاه معادلات جبری غیرخطی
Validity	اعتبار

Abstract

In present thesis, two direct and indirect methods have been considered to solve the fractional optimal control problems. In the indirect method, in order to approximate the existence variables at the Chebyshev-Gauss points, we introduce and utilize the fractional Lagrange interpolating function. Also, we express and prove the fractional necessary optimality conditions. In the direct method, we convert the fractional optimal control problem to a corresponding fractional calculus of variations problem. Then, by using the Clenshaw-Curtis formula and the Chebyshev-Gauss-Lobato points, we reduce the problem to a nonlinear programming problem.

The organization of the present thesis is as follows. At first, we express the preliminaries and the needed conceptions. Then, we introduce the fractional optimal control problems. Also, we present and prove the fractional necessary optimality conditions. Next, we present the indirect method to solve the fractional optimal control problems. Afterward, we bring the direct method based on Clenshaw-Curtis formula. Finally, the conclusions and the suggestions has been included in the last chapter.

Keywords: Chebyshev pseudospectral method, Fractional optimal control, Fractional necessary optimality condition, Clenshaw-Curtis formula, Nonlinear programming problem



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operation Research

**Fractional Chebyshev Pseudospectral
Method for Solving Fractional Optimal
Control Problems**

By: Marzieh Habibli

Supervisors

Dr. Alireza Nazemi

Dr. Mohammad Hadi Noori Skandari

September 2017