

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

پایداری سیستم‌های خطی کسری با پس خورد خروجی

نگارنده: مرضیه مهرورز

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

بهمن ۱۳۹۵



فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خباوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم مرضیه مهرورز به شماره دانشجویی ۹۳۱۶۹۷۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان: پایداری سیستم های خطی کسری با پس خورد خروجی که در تاریخ ۱۳۹۵/۱۱/۲۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: بسیار خوب امتیاز: ۱۸/۹۹) دفاع مجدد مردود

نوع تحقیق: نظری عملی

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	دانشیار	دکتر حجت احسنی طهرانی	۱- استادارهنمای اول
	استاد	دکتر ابراهیم هاشمی	۲- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر مهدی قوتمند	۳- استاد ممتحن اول
	استادیار	دکتر محمد مهدی نوری اسکندری	۴- استاد ممتحن دوم

رئیس دانشکده:

سنگر و سپاس بی پایان مخصوص خدایی است که بشر را آفرید و به او قدرت اندیشیدن داده و توانایی‌های بالقوه را در وجودشان قرار داد و او را امر به تلاش و کوشش نمود و راهنمایی را برای هدایت بشر فرستاد.

پس از ارادت خاضعانه به درگاه خداوند بی‌همتا لازم است از استاد ارجمند جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی به خاطر سه صدر و سه نمودهای دلسوزانه که در تهیه این رساله مرا مورد لطف خود قرار دادند و راهنمایی‌های لازم را نمودند تشکر و قدردانی دارم.

از دوستان مهربان و همیشه همراهم سرکار خانم سکینه میراسدی و سرکار خانم زکس طهاسی به دلیل یاری‌ها و راهنمایی‌های بدون چشمداشت ایشان که بسیاری از سختی‌ها را بر ایمنم آسانتر نمودند، سپاسگزارم.

بی‌شک آرزوی رضایت پروردگار متعال و آرامش خیال؛ خود بهترین و ارزشمندترین تشکر و قدردانی است.

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام

زینبی ام است

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز او بی که همیشه برایم می ماند

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بگو شدم قطره ای از دریای بی

کران مهربانیان را پاس نتوانم بگویم.

امروز، مستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما

ره آوردی کران سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد

که حاصل تلاشم نسیم کوزه غبار خشکیان را برزاید.

بوسه بردستان پر مهرتان

تعمدنامه

اینجانب مرضیه مهرورز دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آنالیز عددی ریاضی و کاربردی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان پایداری سیستم‌های خطی کسری با پس خورد خروجی، تحت راهنمایی دکتر حجت احسنی طهرانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مرضیه مهرورز

بهمن ۱۳۹۵

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه پایداری سیستم‌های خطی گسسته زمانی با پس‌خورد خروجی از طریق دو روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی و روش پارامتری غیرخطی مورد بررسی قرار دادیم.

پیاده‌سازی عملگرهای مرتبه کسری زمان گسسته در صنعت خصوصاً مهندسی رباتیک و سایر شاخه‌های مهندسی برق و مکانیک بسیار حایز اهمیت است. گام کلیدی در پیاده‌سازی دیجیتال تابع انتقال مرتبه کسری، محاسبه عددی یا گسسته‌سازی مشتق‌گیری مرتبه کسری است. روش‌های زیادی برای گسسته‌سازی وجود دارد که متناسب با نوع سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مسائل مقدار ویژه معکوس در بسیاری از علوم مثل طراحی کنترل، ژئوفیزیک، نظریه مدار و ... کاربرد دارد. یکی از مهم‌ترین کاربردهای این مسئله، استفاده از آن در مبحث تخصیص مقادیر ویژه در نظریه کنترل است. در این پایان‌نامه روشی جدید برای حل مسئله تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی و روش پارامتری غیرخطی بر پایه فرم همدم برداری بیان شده است و سپس به دست آوردن ماتریس پس‌خورد خروجی سیستم‌های کسری برای اولین بار با استفاده از این روش مطرح گردید. در پایان مثال‌هایی برای کارایی روش‌های ذکر شده با استفاده از نرم‌افزار متلب ارائه کرده‌ایم.

در ادامه این رساله در حال حاضر یک روش محاسباتی برای حل معادلات کنترل بهینه و کنترل میان‌گر نوسان‌گر ارائه می‌دهیم. این روش بر پایه پارامترسازی حالت است. در واقع متغیرهای حالت سیستم کنترلی ما به وسیله چند جمله‌ای‌های بابکر با ضرایب ناشناخته تقریب زده می‌شوند. معادله حرکت، شاخص عملکرد و شرایط مرزی به بعضی از معادلات جبری تبدیل می‌شوند. بنابراین یک مسئله کنترل بهینه به مسائل بهینه‌سازی تبدیل می‌شوند که بعد از آن به راحتی با استفاده از مفاهیم بهینگی قابل حل می‌باشند. با این روش ارزش عددی شاخص عملکرد به دست آمده است.

همچنین متغیرهای کنترل و متغیرهای حالت را می‌توان به عنوان تابعی از زمان تقریب زد. همگرایی این الگوریتم ثابت شده است. نتایج عددی بدست آمده از چند نمونه آزمون برای نشان دادن کارایی و کاربرد روش نیز ارائه شده است.

کلمات کلیدی: مسائل کنترل بهینه، مسائل مقدار ویژه معکوس ماتریسی، پس‌خورد، پس‌خورد خروجی، سیستم‌های کسری، کسر، تخصیص مقادیر ویژه، پایداری، کنترل خطی و کنترل میان‌گر نوسان‌ساز، طرح بسط چند جمله‌ای بابکر، مسائل بهینه‌سازی، تئوری تقریب و ایرشتراس

فهرست مطالب

ج	لیست تصاویر
ب	لیست جداول
۱	آشنایی با پس‌خورد و نظریه‌های کنترل
۱	۱.۰.۱ سیستم‌های دیفرانسیلی
۲	۱.۱ تعاریف و پیش‌نیازهای کنترل
۴	۱.۱.۱ مدل‌سازی سیستم‌های فضای حالت
۶	۲.۱.۱ ناورداهای کرونگر
۷	۲.۱ تأخیرهای زمانی
۸	۱.۲.۱ کنترل سیستم‌های خطی گسسته زمانی با تأخیر زمانی
۹	۲.۲.۱ تعاریف و پیش‌نیازهای ریاضی
۹	۳.۲.۱ مقادیر ویژه و بردار ویژه
۱۱	۳.۱ تعاریف مورد نیاز برای مشتق کسری
۱۱	۱.۳.۱ مشتق و انتگرال از مرتبه کسری
۱۳	۲.۳.۱ برخی دیگر از مفاهیم مورد نیاز
	۲ یک روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از طرح بسط چندجمله‌ای بابکر
۱۷	۱.۲ مقدمه
۱۷	۱.۱.۲ معرفی کنترل بهینه
۱۹	۲.۲ شرح مسئله
۲۰	۱.۲.۲ مسائل کنترل بهینه درجه دوم
۲۱	۲.۲.۲ کنترل نوسان خطی
۲۳	۳.۲.۲ چندجمله‌های بابکر
۲۴	۳.۲ حل عددی مسائل کنترل بهینه با استفاده از چندجمله‌ای بابکر
۲۵	۱.۳.۲ یک الگوریتم کارآمد
۲۷	

۲۷	مثال‌ای برای مطالعه	۲.۳.۲
۳۰	بررسی همگرایی طرح چندجمله‌ای‌های بابکر	۳.۳.۲
۳۲	مثال‌های عددی	۴.۲
۴۳		پس خورد خروجی یک سیستم با استفاده از مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس و روش پارامتری	۳
۴۳	روش پارامتری برای تخصیص مقادیر ویژه	۱.۳
۴۴	کنترل بهینه زمانی سیستم‌های خطی گسسته‌زمانی با پس خورد خروجی	۱.۱.۳
۴۵	تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از تبدیلات تشابهی	۲.۱.۳
۴۸	روش پارامتری برای تخصیص مقادیر ویژه به وسیله پس خورد خروجی	۲.۳
۴۸	تخصیص مقادیر ویژه به وسیله ماتریس پس خورد حالت	۱.۲.۳
۵۱	روش پارامتری برای پس خورد حالت و تبدیل به پس خورد خروجی	۲.۲.۳
۵۶	کنترل معکوس یک سیستم	۳.۳
۵۶	تاریخچه	۱.۳.۳
۵۸	ارتباط بین مسأله مقدار ویژه معکوس و مسأله تخصیص مقادیر ویژه	۲.۳.۳
۶۱	مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی	۳.۳.۳
۶۴	الگوریتم روش مقدار ویژه معکوس	۴.۳.۳
۶۶	الگوریتم روش جدید	۵.۳.۳
۷۵		کنترل معکوس سیستم‌های مشتق کسری گسسته	۴
۷۵	پس خورد	۱.۴
۷۵	تاریخچه	۱.۱.۴
۷۷	سیستم‌های کسری	۲.۴
۷۷	مقدمه	۱.۲.۴
۷۹	انتگرال و مشتق کسری	۲.۲.۴
۸۰	مشتق مرتبه کسری گرونوالد-لتنیکوف	۳.۲.۴
۸۲	تبدیل سیستم‌های گسسته کسری به سیستم‌های استاندارد	۴.۲.۴
۹۶	کنترل سیستم‌های گسسته کسری با استفاده از روش پارامترسازی غیر خطی	۵.۲.۴
۱۰۰	روش پارامتری غیر خطی برای کنترل پس خورد سیستم‌های کسری	۶.۲.۴
۱۰۳		روشی جدید جهت محاسبه ماتریس پس خورد حالت با استفاده از پس خورد خروجی	۵
۱۰۴	طرح مسئله	۷.۰.۵
۱۰۵	مقدار ویژه معکوس	۸.۰.۵
۱۱۱		نتیجه‌گیری	۶
۱۱۳			۷

لیست تصاویر

۷۲	مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۱.۳
۷۲	مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۲.۳
۷۳	مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۳.۳
۷۳	مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۴.۳
۷۳	مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۵.۳
۷۴	مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۶.۳
۷۶	سیستم‌های حلقه باز و حلقه بسته	۱.۴
۹۵	مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۲.۴
۹۵	مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۳.۴
۹۶	مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۴.۴
۹۶	مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۵.۴
۱۰۸	مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۱.۵
۱۰۹	مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۲.۵
۱۰۹	مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۳.۵
۱۰۹	مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند	۴.۵

لیست جداول

۳۴	جدول ۱	۱.۲
۳۵	جدول ۲	۲.۲
۳۷	جدول ۳	۳.۲
۳۸	جدول ۴	۴.۲
۴۰	جدول ۵	۵.۲
۴۱	جدول ۶	۶.۲
۴۱	جدول ۷	۷.۲

فصل ۱

آشنایی با پس خورد و نظریه‌های کنترل

۱.۰.۱ سیستم‌های دیفرانسیلی

بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را می‌توان با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به فرم زیر توصیف کرد

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f(x_2(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(x_n(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)\end{aligned}$$

(۱.۱)

در معادلات بالا تغییرات حالت یک سیستم را با استفاده از تابعی از ورودی‌ها، حالت سیستم و البته مدت زمان مورد نظر هر تغییر فرمول نویسی کردیم. با استفاده از این تکنیک می‌توان وقایع طبیعی و تغییرات حالت یک سیستم را به صورت معادله‌ای از عوامل موثر و محرک که معادلات حالت و البته استعدادهای فطری نهفته در هر واقعه به عنوان معادلات ورودی نوشت. در معادلات (۱.۱) به $x_i(t)$ متغیر حالت سیستم در زمان t و $u_i(t)$ متغیر ورودی در زمان t هستند. اگر قرار دهیم:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

آنگاه معادلات (۱.۱) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\dot{x}(t) = F[x(t), u(t), t] \quad (۲.۱)$$

که در آن t متغیر زمان و $X(t)$ یک بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت و $U(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل می‌باشد که در با زمان تغییر می‌کند و f تابعی از فضای $R^{n+m+1} \rightarrow R^n$ می‌باشد.

معادله فوق را معادله دیفرانسیل حالت سیستم می‌نامیم که معمولاً از قوانین فیزیکی حاکم بر سیستم بدست می‌آید.

تعریف ۱.۰.۱. معادلات خروجی سیستم

فرض کنید که $y(t)$ یک بردار با بعد r باشد. r تعداد متغیرهای خروجی است) که با زمان تغییر می‌کند و بصورت زیر به $x(t)$ و $u(t)$ وابسته است.

$$y(t) = g(x(t), u(t), t). \quad (۳.۱)$$

سیستمی که با معادلات (۲.۱) و (۳.۱) توصیف شود؛ یک سیستم با بعد متناهی یا بطور خلاصه یک سیستم دیفرانسیل ورودی-خروجی نامیده می‌شود و معادلات دیفرانسیلی سیستم می‌نامیم.

۱.۱ تعاریف و پیش‌نیازهای کنترل

تعریف ۱.۱.۱. سیستم دیفرانسیل خطی

اگر در معادلات (۲.۱) و (۳.۱) توابع f و g خطی باشند، در این صورت سیستم دیفرانسیل ورودی-خروجی را خطی می‌نامیم. در این صورت معادلات دیفرانسیل سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (۴.۱)$$

اگر A, B, C, D مستقل از زمان باشند و یا ثابت، در این صورت معادلات خطی مستقل از زمان (ناوردای زمانی) گویند و می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (۵.۱)$$

تفاوت معادلات دینامیکی و سیستم در چیست؟

یک معادله دینامیکی، سیستمی است که رفتارش در هر لحظه از زمان در پاسخ به یک محرک خارجی یا نیروی خارجی تغییر می‌کند. سیستم، آرایشی است از تجهیزات فیزیکی مرتبط با یکدیگر، به نحوی که به شکل ابزاری منظم و هدف‌دار به کار خود ادامه دهد.

تعریف ۲.۱.۱. نظریه کنترل

در معادله خطی دینامیکی (۵.۱) که در آن $x(t) \in R^n$ حالت یک سیستم فیزیکی معین توسط ورودی $u(t) \in R^m$ مشخص می‌شود. دو ماتریس $A \in R^{n \times n}$ و $B \in R^{n \times m}$ مستقل از زمان هستند. یک مساله کلاسیک در نظریه کنترل، انتخاب ورودی $u(t)$ است، که با استفاده از دو قانون کنترل حالت یا خروجی تعریف می‌شود. در حالت کلی، دو نوع کنترل وجود دارد که هر دوی آنها در شرایط مختلفی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در کنترل پس‌خورد حالت، ورودی $u(t)$ به عنوان یک تابع خطی حالت $x(t)$ انتخاب شده است. یعنی:

$$u(t) = Fx(t), \quad (۶.۱)$$

به این ترتیب سیستم (۵.۱) به سیستم حلقه بسته‌ی زیر تبدیل می‌شود؛

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t). \quad (۷.۱)$$

هدف اصلی در کنترل بدست آوردن ماتریس $F \in R^{n \times n}$ برای رسیدن به نقطه تعادل مورد نظر و البته سرعت بخشیدن به پاسخ سیستم است. قابل توجه است نقطه تعادل و رسیدن به پایداری سیستمی محاسبات دیگری را نیز در پی دارد از جمله بررسی انواع پایداری‌ها و اثبات همگرایی و بدست آوردن مجموعه جواب‌های عمومی است.

در نظریه کنترل انتخاب F از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است که، تخصیص مقادیر ویژه‌ی ماتریس $(A + BF)$ متناسب با نوع سیستم یکی از شیوه‌های حل می‌باشد. این مسائل را تخصیص مقادیر ویژه می‌نامند. در بعضی موارد بردار حالت $x(t)$ به طور مستقیم قابل مشاهده نیست، و فقط خروجی $y(t)$ در دسترس است که با قانون زیر تعریف می‌شود؛

$$y(t) = Cx(t), \quad (۸.۱)$$

که در آن ماتریس معلوم است. در این نوع کنترل ورودی $u(t)$ به عنوان یک تابع خطی از خروجی $y(t)$ انتخاب می‌شود؛

$$u(t) = Ky(t) \quad (۹.۱)$$

که سیستم دینامیکی حلقه بسته به فرم زیر، تبدیل می‌شود؛

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) \quad (۱۰.۱)$$

حال هدف، انتخاب ماتریس پس‌خورد خروجی K ، با ابعاد $(m \times r)$ است، به طوری که مقادیر ویژه دلخواه و از قبل تعیین شده، به ماتریس $(A + BKC)$ تخصیص پیدا کند. به این گونه مسائل تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی گویند که، یک نوع خاصی از مسائل مقدار ویژه‌ی معکوس (بدون محدودیت روی فرم ساختاری ماتریس K) است.

تعریف ۳.۱.۱. انواع سیستم

سیستم‌ها را به دو نوع تقسیم می‌کنیم:

* پیوسته

* گسسته

ملاحظه ۰۴.۱.۱. بعضی از سیستم‌ها ذاتاً گسسته می‌باشند و تغییر حالت فقط در نقاط زمانی خاصی مانند t_i صورت می‌گیرد. نمونه‌ای از سیستم‌های ذاتاً گسسته قطره چکان است که خروجی سیستم گسسته می‌باشد.

۱.۱.۱ مدل‌سازی سیستم‌های فضای حالت

گفتیم که در روش‌های مبتنی بر کنترل مدرن، مدل‌سازی سیستم بر اساس فضای حالت است. برای سیستم‌های خطی ناوردای زمانی^۱ (تغییر ناپذیر با زمان) معادلات به صورت (۵.۱) نمایش می‌دهیم: که در آن

- t متغیر زمان،

- $x(t)$ یک بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت،

- $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل،

- $y(t)$ یک بردار r بعدی متغیر با زمان به نام بردار خروجی

هستند.

تعریف ۰۵.۱.۱. اگر همه‌ی ماتریس‌های سیستم ثابت باشند، آنگاه سیستم را یک سیستم کنترل ناوردای زمانی گوئیم. در این‌جا سیستم‌های خطی ناوردای زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرند و برای سهولت تنها به واژه سیستم بسنده می‌کنیم.

برای برخی از سیستم‌ها، بردار حالت یا ورودی و یا هر دو در هر لحظه از زمان قابل محاسبه یا اندازه‌گیری نیستند، بلکه در دنباله‌ای از نقاط t_i ($i = 0, 1, \dots, n$)، این کمیت‌ها در دسترس است. در این موارد، معادله دیفرانسیل حالت سیستم به‌طور هم‌ارز به صورت معادله تفاضلی مرتبه اول زیر است:

$$\begin{cases} x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) = Cx(i) + Du(i) \end{cases} \quad (11.1)$$

که در آن $x(i)$ و $u(i)$ و $y(i)$ به ترتیب، بردارهای حالت و ورودی و خروجی در زمان t_i هستند.

^۱Linear Time Invariant

ملاحظه ۶.۱.۱. برخی از سیستم‌ها به‌طور ذاتی گسسته زمانی هستند و تغییر حالت سیستم فقط در نقاط زمانی خاصی صورت می‌پذیرد. در این حالت، سیستم به‌صورت گسسته خطی زیر است:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \quad (12.1)$$

متغیرهای حالت می‌توانند تعبیر فیزیکی داشته باشند و قابل اندازه‌گیری با حسگر^۲ باشند. مانند ولتاژ، جریان، دما، سرعت و جابجایی. همچنین می‌توانند کمیت‌های ریاضی باشند و تعبیر فیزیکی نداشته باشند که علت استفاده از آن‌ها ساده‌سازی محاسبات ریاضی است.

تعریف ۷.۱.۱. کنترل پذیری

معادلات سیستم را کنترل پذیر گوئیم، هرگاه بتوان حالت سیستم را از بردار دلخواه اولیه $x(t_0)$ به بردار دلخواه دیگری مانند $x(t_\vartheta)$ یا $x(\vartheta)$ بنام حالت تعادل رساند. برای مثال حرکت ربات و هدایت آن از یک نقطه به نقطه دیگر.

ملاحظه ۸.۱.۱. نقطه تعادل را صفر یا مبدا مختصات در نظر می‌گیریم. اگر نقطه تعادل صفر نبود، از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم؛

$$z(\vartheta) = x(\vartheta) - x_e \quad (13.1)$$

ملاحظه ۹.۱.۱. توجه کنید که حالت تعادل سیستم به حالتی گویند که، در آن سیستم به فرم استاندارد تبدیل می‌گردد و تمامی نتایج حاصل از کنترل بدست آمده است و هدف مورد بررسی در حالت پایداری و با سرعت ثابت در حال حرکت است و یا اینکه کنترل سیستم با موفقیت تمام شده و سیستم متوقف شده است. (برای مثال باز کردن لوله آب گرم و سرد، با هدف رسیدن به آب با دمای نرمال. بعد از حصول نتیجه سیستم با سرعت ثابت در حال حرکت است)

قضیه ۱۰.۱.۱. مشاهده پذیری

ماتریس $A_{n \times n}$ و ماتریس رتبه کامل $C_{r \times n}$ و با این شرط که $r \leq n$ را در نظر بگیرید؛ به جفت (A, C) کاملاً مشاهده‌پذیر گویند اگر ماتریس:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

رتبه کامل باشد که این معادل است با اینکه ماتریس

$$\begin{bmatrix} A - SI_n \\ C \end{bmatrix}, \quad (14.1)$$

^۲Sensor

برای هر $S \in \sigma(A)$ رتبه کامل باشد، در این صورت به ماتریس (14.1) ماتریس مشاهده پذیر می‌گوییم.

ملاحظه ۱۱.۱.۱. جفت (A, B) را کاملاً کنترل پذیر گویند هرگاه جفت ماتریس‌های (A^t, B^t) کاملاً مشاهده پذیر باشد.

۲.۱.۱ ناوردهای کرونکر

ماتریس کنترل پذیری

$$Q = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (15.1)$$

را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم b_1, b_2, \dots, b_m به ترتیب ستون‌های اول تا m ام ماتریس B باشند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q = [b_1 \quad \dots \quad b_m \quad Ab_1 \quad \dots \quad Ab_m \quad \dots \quad A^{n-1}b_1 \quad \dots \quad A^{n-1}b_m] \quad (16.1)$$

از آن جایی که دستگاه کنترل پذیر است، پس می‌توان n ستون از اولین ستون‌های ماتریس Q را طوری به دست آورد که مستقل خطی باشند. برای نمایش آسان‌تر، ستون‌های Q را در یک بلوک مستطیلی که n سطر و m ستون دارد به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$Q = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m \\ Ab_1 & \dots & Ab_m \\ A^2b_1 & \dots & A^2b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{n-1}b_1 & \dots & A^{n-1}b_m \end{bmatrix} \quad (17.1)$$

با شروع از گوشه سمت چپ بالای بلوک به طرف راست و پایین، بردارهایی که با بردار قبلی وابسته خطی‌اند، از بلوک حذف می‌کنیم و اگر بردار حذف شد همه‌ی بردارهای واقع در زیر آن بلوک حذف می‌شوند و این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که تعداد بردارهای مستقل خطی n بردار باشد. در این حالت همه‌ی بردارهای باقی‌مانده غیر از n بردار به دست آمده را از بلوک حذف می‌کنیم. اگر این n بردار مستقل خطی را به ترتیب ستون‌های ماتریس P قرار دهیم آنگاه P معکوس پذیر خواهد بود و تبدیل مورد نظر به دست می‌آید.

$$P = [b_1 \quad \dots \quad b_m \quad Ab_1 \quad \dots \quad Ab_m \quad \dots \quad A^{p_1-1}b_1 \quad \dots \quad A^{p_m-1}b_m] \quad (18.1)$$

تعریف ۱۲.۱.۱. در رابطه (17.1) به هر ستون از بلوک متناظر ستونی از ماتریس B عددی صحیح مانند p_i مربوط می‌شود که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$1 \leq p_i \leq n \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (19.1)$$

این p_i ها را ناوردهای کرونکر می‌نامیم. از طرفی p_i تعداد بردارهای باقی‌مانده در ستون i ام بلوک است، پس تعداد بردارهای واقع در ستون‌های بلوک برابر است با:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m \quad (20.1)$$

از طرفی این تعداد برابر n است، در نتیجه

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = n \quad (21.1)$$

در کنترل بهینه به دنبال ماتریس F به گونه‌ای هستیم که حالت دستگاه را در کوتاه‌ترین زمان (کمترین مرحله) مانند v به صفر (به حالت تعادل) برساند. v را اندیس کنترل‌پذیری می‌نامیم، و تعریف می‌کنیم:

$$v = \max \{p_i | i = 1, \dots, m\} \quad (22.1)$$

تعریف ۱۳.۱.۱. حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی، حالتی است که در صورت نبود ورودی و اغتشاش، خروجی در آن حالت باقی بماند.

تعریف ۱۴.۱.۱. ناوردهای کرونگر (B, A) را منظم گوئیم هرگاه اختلاف بین \max و \min آن‌ها حداکثر یک باشد. در غیر این صورت ناوردهای کرونگر را نامنظم گوئیم.

۲.۱ تأخیرهای زمانی

مسأله بررسی سیستم‌های تأخیری سال‌ها مورد توجه محققان قرار گرفته است. تأخیر زمانی اغلب در سیستم‌های متنوعی مانند سیستم‌های بیولوژیکی، زیستی، صنعتی، الکتریکی، هوایی، اقتصادی، اجتماعی، فرایندهای شیمیایی، شبکه‌های هیدرولیکی، شبکه‌های ارتباطی و ... در بین مسیر ورودی و خروجی سیستم اتفاق می‌افتد، به طوری که وجود تأخیر در این سیستم‌ها باعث عملکرد نامناسب آن‌ها می‌شود. به‌عنوان مثال، برنامه‌های کاربردی مهندسی را در نظر بگیرید که در آن‌ها تأخیرهای زمانی می‌تواند شامل تأخیرهای اندازه‌گیری، تأخیرهای انتقال و تأخیرهای محاسبه باشند. این سیستم‌ها توسط معادلات دیفرانسیل تأخیری نشان داده می‌شوند که این معادلات به‌طور گسترده‌ای در دهه‌های گذشته مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۴۵]. تأخیر در هر یک از اجزای ساختار یک سیستم می‌تواند به‌وجود آید. وجود تأخیر باعث می‌شود معادله مشخصه سیستم تأخیری تعداد نامتناهی ریشه داشته باشد و همین مسأله باعث می‌شود تحلیل این سیستم‌ها با روش‌های کلاسیک مخصوصاً در بررسی پایداری و طراحی کنترل‌کننده پس‌خورد مشکل باشد.

اولین رساله در تجزیه و تحلیل و سنتز سیستم‌های کنترل با تأخیر توسط گوریک^۲ در سال (۱۹۸۹) در [۲۱] منتشر شده است. در طی سه دهه اخیر مسأله تحلیل پایداری این سیستم‌ها مورد توجه قرار گرفته و مقالات زیادی در این زمینه مطرح شده است [۲۲]. همچنین روش‌هایی مانند روش پیش‌بینی اسمیت^۴ در [۴۸] و روش تخصیص طیف متناهی^۵ (FSA) در [۵۶]، با تبدیل مسأله به یک سیستم بدون تأخیر، برای پایدار کردن سیستم‌های تأخیری استفاده شده است.

^۲Gorecki

^۴Smith predictor

^۵Finite Spectrum Assignment

۱.۲.۱ کنترل سیستم‌های خطی گسسته زمانی با تأخیر زمانی

تأخیرهای زمانی معمولاً در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی در بین مسیر ورودی و خروجی سیستم رخ می‌دهد. بنابراین مدل‌های سیستم حساب برای این تأخیرهای زمانی به منظور پیش‌بینی قدرت تحرک و پویایی واقعی سیستم ضروری است. به نظر می‌رسد که کارزوتیل^۶ برای اولین بار سازنده روش سنتز مستقیم برای کنترل زمان بهینه از سیستم‌های نمونه‌برداری داده با تأخیر زمانی در ورودی است. بعد از آن کاپچه^۷ روش بردار حالت افزوده برای سیستم‌های تأخیر زمانی را مطرح کرد، و پس از آن تعداد دیگری از محققان از ایده کاپچه در قوانین کنترل برای سیستم‌های تأخیر زمانی استفاده کرده‌اند.

در این جا هدف ما این است که ماتریس پس خورد حالت برای سیستم افزوده را به گونه‌ای محاسبه کنیم که سیستم حلقه بسته مقادیر ویژه صفر یا حداقل نزدیک به صفر را اختیار کند. بر این اساس یک سنتز طبق بسط بردار حالت (بردار حالت افزوده) ارائه شده است.

در این بخش سیستم‌های گسسته زمانی با یک یا چند تأخیر در بردار حالت و ورودی را در نظر می‌گیریم. ما در این جا به بیان انواع تأخیری در بردار حالت، ورودی و یا هر دو می‌پردازیم. \triangleleft سیستم‌های گسسته زمانی چند متغیره خطی با تأخیر زمانی را به سه دسته تقسیم‌بندی می‌کنند.

دسته اول: شامل سیستم‌هایی است که در آن تمام ورودی‌ها دارای تأخیرهای یکسان یا متفاوت به خارج قسمت عدد صحیح از تأخیر زمانی است و فرمی به صورت زیر دارند:

$$x(k+1) = A_0 x(k) + \sum_{j=1}^r B_j u(k-j)$$

دسته دوم: شامل سیستم‌هایی است که در آن متغیرهای حالت دارای تأخیرهایی با مقادیر یکسان یا متفاوت باشند، و دارای فرمی به صورت:

$$x(k+1) = A_0 x(k) + \sum_{j=1}^r A_j x(k-j) + B_0 u(k)$$

هستند.

دسته سوم: این دسته شامل سیستم‌هایی است که دارای تأخیر با مقادیر یکسان یا متفاوت در بردار حالت و ورودی است، و فرمی به صورت زیر دارند.

$$x(k+1) = A_0 x(k) + \sum_{j=1}^r A_j x(k-j) + B_0 u(k) + \sum_{j=1}^r B_j u(k-j), \quad (23.1)$$

در نظر می‌گیرند، که $x \in \mathbb{R}^n$ و $u \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب بردارهای حالت و ورودی، ماتریس‌های A_0, A_j ماتریس‌های $n \times n$ و ماتریس‌های B_0, B_j ماتریس‌های $n \times m$ هستند. $(j = 1, \dots, r)$

^۶Kurzweil

^۷Koepcke

۲.۲.۱ تعاریف و پیش نیازهای ریاضی

۳.۲.۱ مقادیر ویژه و بردار ویژه

تعریف ۱.۲.۱. مقدار ویژه

عدد $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه ماتریس A نامیده می‌شود، اگر بردار $X \neq 0$ یافت شود به طوری که؛

$$AX = \lambda X \quad (24.1)$$

که در این حالت λ را مقدار ویژه ماتریس گویند و چون برای هر بردار خاص است به مقدار ویژه معروف است. در ادامه X را بردار ویژه نظیر آن می‌نامیم؛ به عبارتی ساده‌تر X بردار ویژه ماتریس A است، اگر AX مضربی از X باشد.

تعریف ۲.۲.۱. طیف یک ماتریس و شعاع طیفی

مجموعه همه مقادیر ویژه را طیف ماتریس A نامیده می‌شود و به بزرگترین آن از نظر قدر مطلق شعاع طیفی گویند.

تعریف ۳.۲.۱. چندجمله‌ای مشخصه

چندجمله‌ای که ریشه‌های آن مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد، چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A می‌گوییم.

تعریف ۴.۲.۱. نکاتی عمومی درباره مقادیر ویژه

* اگر λ مختلط باشد؛ بردار ویژه هم حتما مختلط می‌شود:

$$\lambda X - AX = 0$$

$$(\lambda I - A)X = 0 \quad X \neq 0$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

* چون ضرایب c_i ها حقیقی هستند اگر مقدار ویژه ای مختلط باشد، حتما مزدوج آن نیز در مجموعه جواب‌های سیستم وجود دارد زیرا؛

$$\begin{cases} \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n = 0 \\ \overline{\lambda}^n + c_1 \overline{\lambda}^{n-1} + c_2 \overline{\lambda}^{n-2} + \dots + c_n = 0 \end{cases}$$

که ریشه $\bar{\lambda}$ جواب مجموعه بالاست، در کل داریم؛

$$\lambda \in \Gamma \implies \bar{\lambda} \in \Gamma$$

* ماتریس‌ها حتما باید مربعی باشند و از طرفی برای هر ماتریس $A^{n \times n}$ دقیق n تا مقدار ویژه دارد.

* در چندجمله‌ای مشخصه که ضریب λ^n باید ۱ باشد.

* اگر X بردار ویژه ماتریس A باشد، هر مضربی از X نیز بردار ویژه A می‌شود؛

$$AX = \lambda X$$

$$PAX = P\lambda X \rightarrow A(PX) = \lambda(PX) \rightarrow PX = Y \rightarrow AX = \lambda Y$$

* اگر مقادیر ویژه متمایز باشند، بردارهای ویژه نظیر آنها مستقل خطی هستند. دقت شود که می‌توانیم بی‌نهایت بردار ویژه داشته باشیم ولی شرط استقلال خطی برایمان مهم است.

ملاحظه ۵.۲.۱. برای ماتریس حقیقی $A_{n \times n}$ معادله مشخصه $\det(\lambda I - A) = 0$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه به صورت حقیقی یا به صورت مزدوج مختلط $\alpha \pm i\beta$ است.

برای ماتریس حقیقی $A_{n \times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ درمینان و اثر ماتریس به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\text{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

چندجمله‌ای مشخصه برای هر ماتریس $A_{n \times n}$ یک چندجمله‌ای از مرتبه n است. این چندجمله‌ای را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه هستند که می‌توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند. حال اگر در رابطه فوق $\lambda = 0$ را قرار دهیم، مقدار $\det(A)$ به دست می‌آید:

$$\det(A) = (-\lambda_1)(-\lambda_2) \cdots (-\lambda_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

ملاحظه ۶.۲.۱. در ماتریس‌های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند.

۳.۱ تعاریف مورد نیاز برای مشتق کسری

۱.۳.۱ مشتق و انتگرال از مرتبه کسری

با توجه به این که مفهوم مشتقات و انتگرال کسری از مشتقات و انتگرال صحیح نتیجه می‌شود. بنابراین در این بخش پس از چند تعریف به معرفی مشتقات و انتگرال کسری کاپوتو^۸ و ریمان-لیوویل می‌پردازیم. تعاریف استفاده شده در این بخش در مرجع [۲۳] آمده است.

تعریف ۱.۳.۱. تابع حقیقی $f(x) \in C_\mu$ ، برای $x > 0$ ، $\mu \in \mathbb{R}$ است، اگر یک عدد حقیقی $p > \mu$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$f(x) = x^p f_1(x)$$

$$f_1(x) \in C[0, \infty]$$

تعریف ۲.۳.۱. تابع حقیقی $f(x) \in C_\mu^m$ ، $x > 0$ و $x > 0$ است، آن‌گاه:
 $f^{(m)}(x) \in C_\mu$ ، $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

انتگرال کسری

اگر تابع $f(x)$ برای $x > 0$ تعریف شده باشد. انتگرال زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(I)(f(x)) = \int_0^x f(t) dt \quad (25.1)$$

در این صورت

$$(I^2 f)(x) = \int_0^x (If)(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(s) ds \right) dt \quad (26.1)$$

با ادامه این روند برای $n \in \mathbb{N}$ و $x > 0$ داریم:

$$(I^n f)(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t) dt \cdots dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (27.1)$$

این فرمول به فرمول کوشی^۹ معروف است. مشکل اصلی در رابطه (۲۷.۱) تابع فاکتوریل است که برای اعداد غیر صحیح بی‌معنی است. اما با توجه به تعریف تابع گاما این محدودیت رفع می‌شود، و با استفاده از تابع گاما به جای تابع فاکتوریل، می‌توان شرط $n \in \mathbb{N}$ را جایگزین کرد. بنابراین با توجه به فرمول کوشی، تعریف عملگر انتگرال ریمان-لیوویل در ادامه بیان می‌شود.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید $f \in C_\mu$ ، $\mu \geq -1$ در این صورت عملگر انتگرال ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(I^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, x > 0 \quad (28.1)$$

^۸Caputo

^۹Cauchy Formula

◀ برخی از خواص I^α :

برای $\alpha, \beta \geq 0$ و $f \in C_\mu$ ($\mu \geq -1$) و $\gamma > -1$ داریم [۴۰]:

$$\begin{aligned} I^\circ f(x) &= f(x) \\ I^\alpha I^\beta f(x) &= I^{\alpha+\beta} f(x) \\ I^\alpha I^\beta f(x) &= I^\beta I^\alpha f(x) \\ I^\alpha x^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma} \\ I^\alpha \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right) &= \sum_{i=1}^n c_i I^\alpha f_i(x) \end{aligned} \quad (29.1)$$

مشتق کسری کاپوتو و ریمان-لیوویل

در این قسمت دو روش اصلی برای تعریف مشتق کسری بیان می‌کنیم. در اولین روش مشتق و انتگرال به‌عنوان حدهایی از تفاضلات متناهی و تعمیمی از آن فرض می‌شود. برای به‌دست آوردن مشتق کسری ریمان-لیوویل یک تابع، فرمول زیر را با استفاده از رابطه‌ی (۲۸.۱) در حالت $\alpha > 0$ به‌دست آورد.

$$D^\alpha f(x) = D^m I^{m-\alpha} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right] \quad (30.1)$$

که در آن $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha < m$

همچنین برای مشتق مرتبه n یعنی D^n به‌این نکته توجه داریم که:

$$D^n I^n = I, \quad I^n D^n \neq I, \quad n \in \mathbb{N} \quad (31.1)$$

تعریف دیگری که برای مشتق کسری وجود دارد، روش کاپوتو است که این عملگر توسط کاپوتو ریاضیدان ایتالیایی در سال ۱۹۶۷ معرفی شد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $f \in C_{-1}^m$ و $m \in \mathbb{N}$ ، در این صورت مشتق کسری کاپوتو تابع $f(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_*^\alpha f(x) = \begin{cases} I^{m-\alpha} D^m f(x) = \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \right], & m-1 < \alpha < m \\ \frac{d^m f(x)}{dx^m}, & \alpha = m \end{cases} \quad (32.1)$$

تعریف مشتق کسری کاپوتو و ریمان-لیوویل برای مقادیر $\alpha < 0$ نیز به‌صورت زیر قابل تعریف

است:

$$D_*^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha < 0 \quad (33.1)$$

۲.۳.۱ برخی دیگر از مفاهیم مورد نیاز

• اصل ماکزیمم سازی پونتریاگین [۴۲]

دستگاه کنترلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) \quad (۳۴.۱)$$

می‌خواهیم دستگاه را از (x_1^0, x_2^0) در زمان $t = t_0$ به (x_1^1, x_2^1) در زمان غیر مشخص t_1 و با استفاده از توابع کنترل قابل قبول $(u(t))$ که قطعه به قطعه پیوسته کراندار هستند، هدایت کنیم به طوری که:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, u) \quad (۳۵.۱)$$

نیز کمینه باشد. نظریه کلاسیک پیشنهاد می‌کند که، رفتار تابع عددی

$$H = \psi_0 f_0(x_1, x_2) + \psi_1 f_1(x_1, x_2) + \psi_2 f_2(x_1, x_2)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم که ψ_i ها در معادلات زیر صدق می‌کنند

$$\psi_i = -\frac{\delta H}{\delta x_i} \quad i = 0, 1, 2 \quad (۳۶.۱)$$

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنیم $u^*(t)$ یک کنترل قابل قبول باشد و مسیر متناظر آن نیز $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ باشد که دستگاه را از x_0 در زمان غیر مشخص t_1 هدایت می‌کند. برای این که u^* و x^* بهینه باشد. (یعنی شاخص عملکرد را کمینه کند) لازم است که بردار غیر صفر $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$ که در (۳۶.۱) صدق می‌کند و نیز تابع عددی

$$H(\psi, x, u) = \psi^0 f_0(x, u) + \psi^1 f_1(x, u) + \psi^2 f_2(x, u)$$

موجود باشند به طوری که

• (الف) به ازای هر $t_0 \leq t \leq t_1$ ، H به بیشینه خود نسبت به u در $u = u^*(t)$ برسد.

• (ب) همچنین $H(\psi^*, x^*, u^*) = 0$ و در $t = t_1$ ، $\psi_0 \leq 0$ ، که $\psi_*(t)$ جواب (۳۶.۱) به ازای $u = u^*$ می‌باشد. در ادامه $H(\psi^*, x^*, u^*) = C$ و نیز $\psi_0(t) = C$ بنابراین به ازای هر نقطه روی مسیر بهینه، H و $\psi_0(t) \leq 0$ خواهیم داشت.

• شبه معکوس ماتریس مور-پنروز

برای ماتریس $A_{m \times n}$ ، شبه معکوس، ماتریس منحصر به فرد $A_{n \times m}^\dagger$ است به طوری که، در همه شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}
 AA^\dagger A &= A \\
 A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger \\
 (AA^\dagger)^H &= AA^\dagger \\
 (A^\dagger A)^H &= A^\dagger A
 \end{aligned}$$

• فضای پوچی ماتریس A فرض کنید A ماتریس $m \times n$ روی میدان \mathcal{F} باشد، در این صورت، فضای جواب دستگاه $AX = 0$ در \mathcal{F} را فضای پوچی A می‌نامیم و بعد فضای پوچی A را با $null(A)$ نمایش می‌دهیم. همچنین رابطه‌ی زیر را داریم:

$$rank(A) + null(A) = n \quad (۳۷.۱)$$

ملاحظه ۶.۳.۱. در مراحل از حل مثال‌های موجود در نگارش متن پایان‌نامه، با ماتریس‌هایی در ابعاد زیاد مواجه شدیم، به دلیل این‌که در چهارچوب واقع شوند تنظیمات این ماتریس‌ها را تغییر دادیم.

تعریف ۷.۳.۱. تجزیه QR

برای ساختن یک دسته بردار متعامد توسط یک مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ می‌توان از این روش استفاده کرد. حال اگر فرض کنیم ستون‌های ماتریس A مجموعه بردارهای $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ باشند و در ادامه می‌توان ماتریس A را به صورت $A = QR$ تجزیه نمود که Q متعامد و R بالا مثلثی است. قابل ذکر است که Q همان دسته بردارهای متعامد و مستقل خطی می‌باشند.

$$A = QR = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad (۳۸.۱)$$

تعریف ۸.۳.۱. تابع قطعه‌وار پیوسته

در ریاضیات یک تابع بر روی اعداد حقیقی تابع پله‌ای خوانده می‌شود، اگر بتوان آن را به صورت ترکیب خطی متناهی از توابع مشخصی از فاصله‌ها نوشت. به بیان ساده‌تر یک تابع پله‌ای؛ یک تابع ثابت تکه‌ای است که تعداد این تکه‌ها متناهی می‌باشد. فاصله‌های مطرح شده دارای خواص مهمی هستند:

(الف) فاصله‌ها گسسته می‌باشند.

(ب) اتحاد فاصله‌ها برابر با کل محور حقیقی است. در واقع، اگر نقطه شروع متفاوت باشد،

تابع هویساید $H(x)$ یک تابع پله‌ای مهم است. در صورتی که توابع تکه‌ای دارای شرط پیوستگی باشند؛ به توابع پیوسته تکه‌ای معروف می‌شوند. به طور کلی اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ به جز در چند نقطه محدود قابل شمارش پیوسته باشد، به آن تابع تکه‌ای پیوسته می‌گویند.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

فصل ۲

یک روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از طرح بسط چندجمله‌ای بابکر

۱.۲ مقدمه

مسائل کنترل بهینه نقش مهمی را در طیف مختلفی از بخش‌های کاربردی، مهندسی، اقتصاد و حتی امور مالی ایفا می‌کند.

تئوری کنترل بهینه شاخه‌ای از تئوری برنامه‌ریزی خطی است که با مینیمم‌کردن یک مقدار و یا ماکزیمم‌کردن یک هزینه دریافتی سروکار دارد.

هدف روشی که ما در کنترل بهینه به دنبال آن هستیم، پیدا کردن یک حلقه باز کنترل $u^*(x)$ یا پیدا کردن کنترل پس‌خورده^۱ $u^*(t, x)$ که دستگاه دینامیکی ما در جهتی صدق کند که تابع هدف یا شاخص عملکرد ما در همان جهت بهینه گردد.

در این مقاله ما دو روش عمومی برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه خواهیم کرد. این روش‌ها شامل سطوحی از روش‌های مستقیم و روش‌های غیرمستقیم می‌باشد.

در روش غیرمستقیم این‌گونه مسائل با استفاده از تبدیلات ویژه‌ای به فرم دیگری قبل از حل تبدیل می‌شوند و به گروه‌هایی از دو کتگوری تقسیم می‌شوند:

۰.۱ برنامه‌های دینامیکی بلمن^۲

۰.۲ اصل ماکزیمم‌سازی پوینت‌ریاگین^۳

بلمن پیشگام فعالیت روی برنامه‌های دینامیکی هست که شرایط کافی برای استفاده بهینه از معادله‌های بلمن-ژاکوبی-همیلتون HJB را مهیا می‌کند. در حقیقت یک شرط ضروری برای حل بهینه مسئله

^۱Feedback

^۲Bellman

^۳Pontryagin

کنترل بهینه معادله‌های (HJB) هست. نوعی معادله دیفرانسیلی جزئی مرتبه دوم که برای پیدا کردن قانون کنترل پس‌خورد غیرخطی استفاده می‌شود.

در اصل ماکزیم‌سازی پونت‌ریاگین، از شرایط ضروری برای وجود بهینه استفاده می‌کنیم. این اصل مسائل کنترل بهینه اولیه را به مسائل کران‌دار مقداری تبدیل می‌کند که با استفاده از تکنیک‌های شناخته شده برای معادله‌های دیفرانسیلی قابل حل است. البته یک جواب تحلیلی از مسائل کنترل بهینه همیشه در دسترس نیست بنابراین یافتن یک راه‌حل عددی برای حل مسائل کنترل بهینه منطقی‌ترین راه است و مینیم یک فضا برای بحث پیرامون آن‌ها و شرط‌گذاری روی آن‌ها برای پژوهشگران علم ریاضیات فراهم کرده است.

در سال‌های اخیر، روش‌های محاسباتی عددی مختلف و الگوریتم‌های کارآمد برای حل مشکلات و مسائل کنترل بهینه استفاده شده است. در روش مستقیم جواب‌های بهینه به‌وسیله به مینیم رساندن مستقیم شاخص عملکرد موضوع مورد نظرمان نسبت به محدودیت‌ها به‌دست می‌آید. در واقع مسائل کنترل بهینه به مسائل برنامه‌ریزی غیر خطی تبدیل می‌شوند.

روش مستقیم به‌طور معمول با استفاده از تکنیک پارامترسازی قابل اجراست، در سه طریق مختلف:

۱. پارامترسازی کنترل

۲. پارامترسازی حالت کنترل

۳. پارامترسازی حالت

که نوعی تبدیل مسئله پارامترسازی حالت به مسئله‌های برنامه‌ریزی غیرخطی است؛ که در آن ما به دنبال یافتن ضرایب مجهول چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n هستیم، در سری به فرم $\sum_{i=0}^K a_i t^i$ برای اینکه به راه‌حل بهینه برسیم. پارامترسازی کنترل و پارامترسازی بردار حالت کنترل به صورت گسترده برای حل مسائل کنترل بهینه مورد استفاده قرار گرفته است. روش‌های عددی متعددی برای حل محدود و نامحدود مسائل کنترل بهینه ارائه شده است و بعد از آن ایده‌های خود را برای حل مسائل کنترل بهینه غیرخطی با قیدهای بردار حالت پایانی و قیدهای بردار کنترل نابرابر و تعریف کران‌هایی برای متغیر حالت گسترش دادند. گیندی^۴ یک راه‌حل عددی برای حل مسائل کنترل بهینه و کنترل نوسانگر با استفاده از یک روش جدید برگرفته از چندجمله‌های چپیشف طیفی در سال (۱۹۷۵) ارائه داده است [۲۸].

در [۱۳] نیز یک روش عددی برای کنترل این‌گونه نوسان‌سازها بیان شده است، که در آن متغیرهای کنترل و متغیر حالت توسط سری چپیشف تقریب زده می‌شوند. در [۱۲] یک الگوریتم برای حل مسائل کنترل و کنترل میان‌گر نوسان‌سازها ارائه شده است. در این الگوریتم راه حل در پارامترسازی متغیر حالت است، به طوری که متغیر حالت به عنوان یک ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های چپیشف با ضرایب ناشناخته بیان می‌شود و در مرحله بعدی متغیر حالت و پارامترسازی آن برای حل مسائل کنترل بهینه غیرخطی و کنترل نوسان‌سازها بسط داده می‌شود. [۲۶]

این فصل به بخش‌های زیر که معرفی کوتاهی از مقدمه آن ارائه دادیم سازمان یافته است. در بخش (۲) فرمول‌های ریاضی مربوط را معرفی می‌کنیم. بخش (۳) در مورد چندجمله‌های بابکر می‌باشد و در

^۴Gindy

مورد مشتق و همگرایی و طرح مسئله آن در بخش (۴) بحث می‌کنیم. در بخش (۵) ما چند مثال عددی برای نشان دادن کارایی و قابلیت اطمینان از روش گفته شده ارائه داده‌ایم.

۱.۰۱.۲ معرفی کنترل بهینه

دستگاهی را در نظر می‌گیریم که رفتار آن به وسیله مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می‌گردد. در واقع ساده‌ترین دستگاه‌هایی هستند که می‌توان با آن‌ها کار کرد. البته برای مدل‌سازی رفتار بعضی از دستگاه‌ها به معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی یا حتی معادلات انتگرالی نیاز داریم. فرض کنیم بردار n تایی $x(t)$ مشخص‌کننده متغیرهای مکانی و بردار m تایی $u(t)$ نشان‌گر متغیرهای کنترلی باشند و فرض کنیم رفتار سیستم با دستگاه زیر توصیف گردد:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1.2)$$

که f یک تابع برداری n بعدی از x و u و نقطه (\circ) شروع‌کننده مشتق‌گیری نسبت به متغیر زمان t می‌باشد.

فرض کنیم که f دارای مشتقات از هر مرتبه نسبت به کلیه متغیرهایش باشد و $u(t)$ به اندازه کافی خوش رفتار باشد. همچنین فرض کنیم که دستگاه در لحظه $t = t_0$ در موضعی خاص است، مثلاً $x(t_0) = x^0$ و می‌خواهیم آن را طوری کنترل کنیم تا به موضع داده شده دیگری در زمان $t = t_1$ برسد، مثلاً $x(t_1) = x_1$. هر انتخاب $u(t)$ در $t_0 \leq t \leq t_1$ جواب متفاوتی از $x(t)$ که در شرایط اولیه $x(t_0) = x^0$ نیز صدق می‌کند، به دست می‌دهد. بعضی از این مسیرها ممکن است از $x = x^1$ بگذرند و بعضی خیر.

در اینجا با اولین مشکل روبه‌رو می‌شویم. ممکن است که هیچ تابع کنترلی نتواند دستگاه را از x^0 به x^1 هدایت کند.

دستگاه دو بعدی با یک متغیر کنترلی زیر را که با معادله دیفرانسیل

$$\dot{x}_1 = x_1 \quad \dot{x}_2 = u_1$$

همراه می‌شود در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم آن را از نقطه $x_1 = 1, x_2 = 2$ در زمانی دیرتر به نقطه $(0, 0)$ هدایت کنیم. هیچ تابع کنترلی $u_1(t)$ نمی‌توان پیدا کرد که دستگاه را از $(1, 2)$ به $(0, 0)$ ببرد، زیرا مقدار u_1 بر رفتار x_1 اثری نمی‌گذارد.

هر جوابی که از $x_1 = 1$ شروع شود باید

$$x_1 = e^t$$

را در ازای $t \geq 0$ حاصل کند. بنابراین x_1 هرگز صفر نخواهد شد و لذا دستگاه کنترل‌ناپذیر است. قبل از اینکه در مورد کنترل بهینه برای یک دستگاه بحث کنیم، باید تأیید کنیم که، دستگاه از نقطه اولیه داده شده به نقطه انتهایی خواسته شده کنترل‌پذیر می‌باشد. اگر بتوانیم دستگاه را از x_0 به x_1 به راه‌های گوناگونی کنترل کنیم، آن‌گاه این حق را داریم که هر یک از این راه‌ها را انتخاب نماییم. بعضی از

این دستگاه‌ها زمان خیلی زیادی را تا رسیدن به x° هدر می‌دهد و سایر راه‌ها ممکن است که، در انرژی مصرفی پر هزینه باشند.

بنابراین به اندازه‌گیری هزینه متحمل شده در انتقال نیاز داریم. یک روش طبیعی برای اندازه‌گیری هزینه مطرح کردن انتگرالی است که، بر حسب متغیرهای مکانی و متغیرهای کنترلی باشد. بنابراین انتگرال هزینه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u) dt, \quad (2.2)$$

حال در پی تابع کنترلی هستیم که این انتگرال را کمینه کند. قابل ذکر است که انتخاب تابع f_0 بستگی به نوع مساله دارد.

۲.۲ شرح مسئله

معادلات کنترل بهینه با مشکل یافتن قانون کنترلی مناسب برای سیستم داده شده زیر مواجه هستند.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in I^\circ \quad (3.2)$$

که f یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر و حقیقی مقدار است، $f : I \times E \times U \rightarrow R^n$. همچنین $I = [t_0, t_1]$ برای هر بازه باز داریم، $u(t) : I \rightarrow R^m$ برای متغیر کنترل و $x(t) : I \rightarrow R^n$ برای متغیر حالت مورد استفاده قرار می‌گیرد. متناسب با هر تابع کنترلی جواب نیز تغییر می‌کند، زیرا که معادلات دیفرانسیلی تغییر می‌کند. هدف ما یافتن کنترل پیوسته تکه‌ای u^* و پیوند آن با متغیر کنترل $x^*(t)$ است، به طوری که تابع هدف یا شاخص عملکرد ما در جهت‌های مختلفی بهینه شود. تابع شاخص عملکرد برای به دست آوردن کنترل بهینه سیستم‌های دیفرانسیلی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$J(t_0, x_0; u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt, \quad (4.2)$$

با اعمال شرایط مرزی زیر و با توجه به معادله (۳.۲):

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{and} \quad x(t_1) = x_1, \quad (5.2)$$

که، x_0 و x_1 متغیر حالت با شرایط اولیه و پایانی در R^n هستند که امکان دارد ثابت یا آزاد باشد. کنترل u^* در مفهوم همان کنترل بهینه سیستم و متغیر حالت x^* مسیر بهینه هستند. همچنین، $L : I \times E \times U \rightarrow R$ توابعی پیوسته مشتق‌پذیر در هر سه آرگومان فرض شده است. مسائل برنامه‌ریزی خطی با شاخص عملکرد به صورت (۴.۲) به مسائل لاگرانژ^۵ معروف هستند و به

^۵Lagrange

این نام شناخته می‌شوند. دو مسئله بهینه سازی معادل دیگر وجود دارند که مسائل بولزا^۶ و مایر^۷ نامیده می‌شوند [۲۹]. به ویژه در مسائل کنترل بهینه L می‌تواند یک تابع انرژی یا سوخت باشد به صورت زیر [۱۹]

$$L(t, x(t), u(t)) = \frac{1}{\gamma} (x^2(t) + u^2(t)),$$

$$L(t, x(t), u(t)) = |x(t)| + |u(t)|.$$

به طور کلی J ممکن است که یک تابع چند هدفی و یا چند عنصری باشد؛ برای مثال می‌تواند تابعی برای مینیمم کردن مقدار سوخت سیستم و یا برای ماکزیمم کردن سود و منفعت معاملات باشد.

۱۰.۲.۲ مسائل کنترل بهینه درجه دوم

تعداد زیادی از مسائل طراحی در مهندسی یک مسئله برنامه ریزی خطی است. این گونه مسائل، مسائل تنظیم کننده^۸ نامیده می‌شوند. فرض کنید $A(t) \rightarrow A$ و $M(t) \rightarrow M$ و $D(t) \rightarrow D$ ماتریس‌هایی $n \times n$ و $B(t) \rightarrow B$ و $n \times m$ ماتریس‌هایی $n \times m$ و N ماتریسی $m \times m$ از توابع پیوسته باشند. همچنین فرض کنید $u(t)$ روی بازه ثابت $[t_0, t_1]$ تعریف شود، که یک تابع برداری تکه‌ای پیوسته در فضای m بعدی است. بردار حالت $x(t) \in R^n$ می‌باشد که، جواب آن به مقدار مسئله اولیه مربوط است؛

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (۶.۲)$$

در مسائل کنترل بهینه ما به دنبال یافتن $u(t)$ هستیم به طوری که شاخص عملکرد ما به کمترین مقدار خود برسد.

$$J = x(t)' D x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (x(t)' M(t) x(t) + u(t)' N(t) u(t)) dt. \quad (۷.۲)$$

در اینجا $M(t)$ و $N(t)$ و D متقارن می‌باشد، و ماتریس‌های D غیرمنفی متناهی و $N(t)$ مثبت متناهی هستند. فرض کنید که $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ و سپس با استفاده از معادله‌های همیلتون - ژاکوبی - بلمن با شرایط نهایی خواهیم داشت:

$$(HJB) \begin{cases} V_1 + \min_{u \in U} \{v_x(Ax + Bu) + (x'Mx + u'Nu)\} = 0 \\ V(t_1, x) = x'Dx. \end{cases}$$

^۶Bolza

^۷Mayer

^۸Regulator

در مورد مسائل کنترل بهینه درجه دوم (۷.۲) - (۶.۲) اگر مقدار $V(t, x) = x'K(t)x$ را در فرمول HJB جایگزاری کنیم، که $K(t)$ ماتریسی متقارن و عضو مجموعه C^1 هست و همچنین $K(t_1) = D$ ، پس از آن معادله HJB منجر به قانون کنترلی به شکل زیر می‌شود:

$$u(t) = -N^{-1}(t)B(t)'K(t)x(t).$$

که $K(t)$ در معادله ماتریس ریکاتی صدق می‌کند [۴۶].

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -A(t)'K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)N^{-1}(t)B(t)'K(t) - M(t), \\ K(t_1) = D. \end{cases}$$

معادله پایای ریکاتی [۴۲]

معادله پایای ریکاتی، معادله‌ای است که با فرض t_1 نامتناهی، تابع K باید در آن صدق کند. البته J و اگر خواهد شد مگر این که X و U در ازای مقادیر بزرگ t به صفر همگرا گردند، بررسی می‌کنیم که برای:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (X^T P X + 2 X^T Q U + U^T R U) dt,$$

با تابع K ای که در آن $t_1 \rightarrow \infty$ ، چه روی خواهد داد. فرض کنیم $\varphi = t_1 - t$ بنابراین K در معادله زیر صدق خواهد کرد:

$$\frac{dK}{d\varphi} = -\frac{dK}{dt} = (KB - Q)R^{-1}(B^T K - Q^T) + KA + A^T K - P,$$

که معادله دیفرانسیل فوق معادله‌ای برای K به عنوان تابعی از φ است که شرط اولیه $K = 0$ در $\varphi = 0$ ، برقرار می‌باشد. اکنون t را ثابت اختیار می‌کنیم و فرض می‌کنیم t_1 به بی‌نهایت میل کند. آن‌گاه φ به بی‌نهایت میل می‌کند، و K یا متناهی است یا همراه φ به بی‌نهایت میل خواهد کرد. یک مقدار نامتناهی برای K منجر به یک مقدار نامتناهی برای K و U خواهد شد و حاصل آن یک انتگرال و اگر برای J است. بنابراین مسأله بی‌معنی خواهد شد مگر این که K با نامتناهی شدن φ ، کماکان متناهی باقی بماند. این حالت تنها هنگامی اتفاق می‌افتد که $\frac{dK}{d\varphi} = 0$. بنابراین برای کمینه کردن

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (X^T P X + 2 X^T Q U + U^T R U) dt,$$

باید K در معادله جبری زیر صدق کند:

$$(KB - Q)R^{-1}(B^T K - Q^T) + KA + A^T K - P = 0.$$

این معادله پایایی ریکاتی است و در حالت کلی دارای دو جواب برای K است. یادآوری می‌کنیم که جواب بهینه برای X باید در معادله زیر صدق کند:

$$\dot{x} = Ax(t) + BU^*(t),$$

که در آن

$$U^*(t) = R^{-1}(B^T K - Q^T X(t)).$$

بنابراین

$$\dot{X}(t) = (A + BR^{-1}(B^T K - Q^T))X(t).$$

اکنون اگر $t \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه $x(t) \rightarrow 0$ ، بنابراین مقادیر ویژه ماتریس سمت راست در معادله بالا باید همه آن‌ها دارای جز حقیقی منفی باشند. این معیار، K مناسب را محاسبه می‌کند.

۲.۲.۲ کنترل نوسان خطی

کنترل نوسان خطی را به وسیله معادله‌های دیفرانسیلی زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(t) = \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t), \quad t \in [-T, 0] \quad (۸.۲)$$

که در آن T مشخص شده است. معادله (۸.۲) با معادلات حالت پویا زیر برابر است.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega^2 x_1(t) + u(t), \end{aligned}$$

با شرایط مرزی

$$\begin{aligned} x_1(-T) &= x_0, \quad x_2(-T) = \dot{x}_0, \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (۹.۲)$$

کنترل حالت این ویژگی در تاسیسات مختلف مورد نظر ماست به طوری که، شاخص عملکرد آن

$$J = \frac{1}{2} \int_{-T}^0 u^2(t) dt, \quad (۱۰.۲)$$

بیش از همه توابع کنترل مجاز $u(t)$ به مینیمم برسد. روش اصل ماکزیمم‌سازی پونت‌ریاگین اعمال شده در مسائل کنترل بهینه منجر به راه‌حل تحلیلی زیر می‌شود.

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{1}{\omega^2} [A\omega t \sin \omega t + B(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)], \\x_2(t) &= \frac{1}{\omega} [A(\omega t \sin \omega t + \omega t \cos \omega t) + B\omega t \sin \omega t] \\u(t) &= A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\J &= \frac{1}{\omega} [2\omega T(A^2 + B^2) + (A^2 - B^2) \sin 2\omega T - 4AB \sin^2 \omega T].\end{aligned}$$

که داریم

$$\begin{aligned}A &= \frac{2\omega [x_0 \omega^2 T \sin \omega T - \dot{x}_0 (\omega T \cos \omega T - \sin \omega T)]}{\omega^2 T^2 - \sin^2 \omega T}, \\B &= \frac{2\omega^2 [\dot{x}_0 T \sin \omega T + x_0 (\omega T \cos \omega T + \sin \omega T)]}{\omega^2 T^2 - \sin^2 \omega T}.\end{aligned}$$

۳.۲.۲ چندجمله‌های بابکر

چندجمله‌های بابکر برای اولین بار توسط بابکر و همکارانش برای حل معادلات حرارت در کنار مدل فیزیکی‌شان ثابت شده است. در حقیقت در یک محاسبه پله‌ای در طول فرآیند تفکیک‌پذیری، با محاسبه دنباله‌ای متناوب و غیر پیوسته یک فرمول بازگشتی جالب براساس کلاس یا رده‌ای از توابع چندجمله‌ای بدست می‌آوریم. [۲۶] این روش بر پایه پارامترسازی حالت است. در واقع متغیر حالت به‌وسیله چندجمله‌ای بابکر با ضرایب ناشناخته تقریب‌زده می‌شود، معادله حرکت، شاخص عملکرد، شرایط مرزی به بعضی از معادلات جبری تبدیل می‌شوند، بنابراین یک مسئله کنترل بهینه به مسائل برنامه‌ریزی خطی تبدیل شده است، که پس از آن می‌توان به راحتی حل شوند. با این روش، ارزش عددی شاخص عملکرد به دست می‌آید.

تعریف ۱.۲.۲. چندجمله‌ای بابکر

نخستین تک‌جمله‌ای تعریف شده برای چندجمله‌های بابکر به صورت زیر معرفی شده است:

$$B_n(x) = \sum_{p=0}^{\zeta(n)} \left[\frac{(n-4p)}{(n-p)} C_{n-p}^p \right] \cdot (-1)^p \cdot X^{n-2p}$$

که

$$\zeta(n) = \left[\frac{n}{2} \right] = \frac{2n + ((-1)^n - 1)}{4}.$$

و ضرایب آن‌ها می‌تواند از طریق یک فرمول بازگشتی تعریف شود.

ملاحظه ۲.۲.۲. یک رابطه بازگشتی در چندجمله‌ای‌های بابکر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} B_0(t) = 1, \\ B_1(t) = t, \\ B_2(t) = t^2 + 2, \\ B_m(t) = tB_{m-1}(t) - B_{m-2}(t), \quad \text{for } m > 2, \end{cases}$$

معادله دیفرانسیلی مشخصه چندجمله‌ای بابکر نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$A_n Y'' + B_n Y' - C_n Y = 0,$$

که

$$\begin{aligned} A_n &= (x^2 - 1)(3nx^2 + n - 2), \\ B_n &= 3x(nx^2 + 2n - 2), \\ C_n &= -n(3n^2x^2 + n^2 - 6n + 8). \end{aligned}$$

برخی از قوانین حساب و خاصیت‌های انتگرالی چندجمله‌ای بابکر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} B_n(0) &= 2 \cos\left(\frac{n+2}{2}\pi\right), \quad n \geq 1 \\ B_n(-t) &= (-1)^n B_n(t). \end{aligned}$$

۳.۲ حل عددی مسائل کنترل بهینه با استفاده از چندجمله‌ای بابکر

در این قسمت یک روش پارامترسازی با استفاده از چندجمله‌ای بابکر، برای به دست آوردن یک روش قوی برای حل عددی مسائل کنترل بهینه معرفی شده ارائه می‌دهیم. در حقیقت ما می‌توانیم تابع حالت و تابع کنترل را با فقط تعداد کمی از پارامترها با دقت نشان دهیم. ابتدا از معادله (۳.۲) برای بیان $u(t)$ به عنوان تابعی از زمان t و $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ استفاده شده است، به عبارت دیگر:

$$u(t) = \phi(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad (11.2)$$

فرض کنید $Q \subset C^1([0, 1])$ مجموعه‌ای از همه توابعی باشد که در شرایط اولیه (۵.۲) صدق کند. با جایگذاری (۱۲.۲) در معادله (۴.۲) نشان می‌دهیم که شاخص عملکرد (۴.۲) می‌تواند تابعی از x را بیان

کند. سپس کنترل بهینه (۴.۲) و (۵.۲) را برای مینیمم‌سازی از (J) روی مجموعه Q در نظر می‌گیریم. پارامترسازی حالت معمولاً می‌تواند با استفاده از توابع پایه‌ای مختلفی صورت گیرد [۲۵]. در این بخش چندجمله‌ای بابکر با معرفی یک الگوی جدید برای حل عددی مسائل کنترل بهینه بررسی می‌شود. فرض می‌گیریم $Q_n \subset Q$ کلاسی از ترکیبات چندجمله‌ای بابکر از درجه حداکثر n باشد و همچنین مینیمم مقدار J روی Q_n با $(a_k)_{k=0}^n$ که به عنوان مجهولات در نظر گرفته‌ایم؛ شامل شود. در حقیقت متغیر حالت تقریبی به صورت زیر است:

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k B_k(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12.2)$$

که متغیر کنترل از سیستم معادله حالت (۹.۲) به عنوان تابعی از پارامترهای مجهول از متغیر حالت تعیین می‌شود.

$$u_n(t) = \phi(t, \sum_{k=0}^n a_k B_k(t), \sum_{k=0}^n a_k \dot{B}_k(t)). \quad (13.2)$$

با جایگزاری این تقریب از متغیر حالت (۱۲.۲) و متغیرهای کنترل (۱۳.۲) در تابع هدف (۴.۲) به شاخص عملکرد زیر می‌رسیم:

$$\hat{J} = (a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \sum_{k=0}^n a_k B_k(t), \phi(t, \sum_{k=0}^n a_k B_k(t), \sum_{k=0}^n a_k \dot{B}_k(t))) dt. \quad (14.2)$$

بنابراین این مسئله به تعیین پارامترهای مجهول a_i تبدیل می‌شود. شرایط اولیه به وسیله محدودیت‌ها یا قیدهای مساوی به صورت زیر جانشین می‌شود:

$$x_n(t_0) = \sum_{k=0}^n a_k B_k(t)|_{t=t_0} = x_0 \quad (15.2)$$

$$x_n(t_1) = \sum_{k=0}^n a_k B_k(t)|_{t=t_1} = x_1$$

و به مسئله سیمپلکسی به صورت زیر می‌رسیم:

$$\min_{a \in R^{n+1}} \{a'Ha\}. \quad (16.2)$$

با اعمال شرایط اولیه و نهایی قیدهای (۱۵.۲) معادلات خطی خبری بر حسب پارامتر a_i به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Pa = b \quad (17.2)$$

در حقیقت، این مسئله برنامه‌ریزی خطی در فضای $(n + 1)$ بعدی است و $J(x_n)$ به صورت $\hat{J}(a') = \hat{J}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ که \hat{J} تقریبی از J در نظر گرفته می‌شود. مقدار بهینه را می‌توان از بردار a^* با استفاده از روش استاندارد برنامه‌ریزی مربعی به دست آورد.

۱.۳.۲ یک الگوریتم کارآمد

نتیجه فوق در الگوریتم زیر خلاصه شده است. ایده اصلی این الگوریتم به این صورت است که مسئله کنترل بهینه (۳.۲) و (۴.۲) به مسائل برنامه‌ریزی خطی (۱۶.۲) و (۱۷.۲) تبدیل می‌شوند و سپس این مسئله بهینه را با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی حل می‌کنیم.

• الگوریتم

ورودی: ورودی ما در این گونه مسائل بنا بر آنچه که در بالا گفته شد مسائل کنترل بهینه (۳.۲) و (۴.۲) می‌باشد.

خروجی: مسیر بهینه تقریبی، کنترل بهینه تقریبی و شاخص عملکرد تقریبی J می‌باشد.
گام اول: به وسیله n امین مرحله سری بابکر از معادله (۱۲.۲) تقریبی از معادله حالت بدست می‌آید.
گام دوم متغیر کنترل را به عنوان تابعی از متغیر حالت و تقریبی از معادله (۱۳.۲) می‌یابیم.
گام سوم: شاخص عملکرد \hat{J} را با استفاده از معادله (۱۴.۲) می‌یابیم و ماتریس H را با توجه به معادله ۱۶.۲ به دست می‌آوریم.

گام چهارم: مجموعه‌ای از محدودیت‌های برابر تعیین می‌کنیم و ماتریس P را طبق معادله ۱۷.۲ در جهت شرایط اولیه و پایانی پیدا می‌کنیم.

گام پنجم: پارامتر بهینه a^* را به وسیله حل مسئله برنامه‌ریزی خطی (۱۵.۲) و (۱۶.۲) پیدا می‌کنیم و این پارامترها را در معادلات (۱۲.۲) و (۱۳.۲) و (۱۴.۲) برای پیدا کردن مسیر تقریبی بهینه، کنترل بهینه تقریبی و شاخص عملکرد تقریبی J به ترتیب جایگزین می‌کنیم.

۲.۳.۲ مثال‌ای برای مطالعه

مثال ۱.۳.۲. این مثال مفاهیم ارائه شده در این فصل را برای ما روشن می‌کند. در این مثال هدف یافتن شاخص عملکرد $u^*(t)$ به طوری که مینیمم شود.

$$J = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 5u^2(t)) dt, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (18.2)$$

با توجه به اینکه

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (19.2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u,$$

با شرایط اولیه

$$x_1(0) = 0 \quad (20.2)$$

$$x_2(0) = -1,$$

گام اول در حل این مسئله روش تابع هدف است؛ که به وسیله تقریب $x_1(t)$ با استفاده از سری چندجمله‌ای‌های بابکر از مرتبه ۵ از پارامترهای به صورت زیر مجهول به دست می‌آید، که در ادامه ما می‌رسیم به :

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^5 a_k B_k(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + (a_3 - a_5) t^3 + a_2 t^2 + (a_1 + a_3 - 3a_5) t + a_0 + 2a_2 - 2a_4. \quad (21.2)$$

سپس $\dot{x}_1(t)$ را محاسبه می‌کنیم و به دنبال آن $\dot{x}_2(t)$ را تعیین می‌کنیم:

$$x_2(t) = 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + (3a_3 - 3a_5) t^2 + 2a_2 t + a_1 + a_3 - 3a_5. \quad (22.2)$$

حال متغیر کنترل که از معادله حالت (۱۹.۲) بدست می‌آید عبارت است از:

$$u(t) = 5a_5 t^4 + (4a_4 + 20a_5) t^3 + (3a_3 + 12a_4 - 3a_5) t^2 + (2a_2 + 6a_3 - 6a_5) t + a_1 + 2a_2 + a_3 - 3a_5 \quad (23.2)$$

باجگزین کردن (۲۱.۲) و (۲۲.۲) به جای (۱۸.۲) عبارت زیر را می‌توان برای \hat{J} بدست آورد:

$$\begin{aligned} \hat{J} = & a_0^2 + a_0 a_1 + \frac{13}{3} a_0 a_2 + \frac{3}{2} a_0 a_3 - \frac{18}{5} a_0 a_4 - \frac{19}{6} a_0 a_5 + \frac{803}{600} a_1^2 + \frac{453}{100} a_1 a_2 + \frac{307}{60} a_1 a_4 \\ & - \frac{5687}{700} a_1 a_5 + \frac{1037}{150} a_2^2 + \frac{5399}{600} a_2 a_3 - \frac{12788}{2625} a_2 a_4 - \frac{1631}{120} a_2 a_5 + \frac{122539}{21000} a_3^2 + \frac{593}{150} a_3 a_4 \\ & - \frac{461117}{31500} a_3 a_5 + \frac{45929}{7875} a_4^2 + \frac{263}{600} a_4 a_5 + \frac{8841737}{693000} a_5^2 \quad (24.2) \end{aligned}$$

معادله بالا به شکل ماتریسی می‌نویسیم:

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{3}{3} & -\frac{9}{5} & -\frac{19}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{803}{600} & \frac{453}{300} & \frac{307}{120} & \frac{23}{120} & -\frac{5687}{14000} \\ \frac{7}{3} & \frac{453}{300} & \frac{1037}{150} & \frac{5399}{1200} & -\frac{12877}{5250} & -\frac{1631}{240} \\ \frac{3}{3} & \frac{307}{120} & \frac{5399}{1200} & \frac{122529}{21000} & \frac{593}{300} & -\frac{461117}{63000} \\ -\frac{9}{5} & \frac{23}{120} & -\frac{12877}{5250} & \frac{593}{300} & \frac{45929}{7875} & \frac{563}{1200} \\ -\frac{19}{12} & -\frac{5687}{14000} & -\frac{1631}{240} & -\frac{461117}{63000} & \frac{563}{1200} & \frac{8841737}{963000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (25.2)$$

از شرایط اولیه (۲۵.۲) معادله دیگری به نمایندگی معادله حالت اولیه به صورت زیر بدست آمده است:

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_2 - 2a_4 &= 0, \\ a_1 + a_3 - 3a_5 &= -1, \end{aligned} \quad (26.2)$$

این بدان معناست که

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (27.2)$$

مسئله کنترل بهینه پویا را به وسیله مسئله برنامه ریزی درجه دوم تقریب زدیم. هدف مسئله جدید به مینیمم رساندن (۲۵.۲) با محدودیت‌های در معادله (۲۷.۲) است. ارزش بهینه بردار a^* را میتوان با استفاده از روش استاندارد برنامه‌زیری درجه دوم بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100962514997240}{1272469563233} \\ \frac{1281600273247307}{445364347131655} \\ \frac{61331171268920}{1272469563233} \\ -\frac{5637856545521764}{445364347131655} \\ \frac{111812421767540}{1272469563233} \\ -\frac{1303620641719934}{445364347131655} \end{bmatrix} \quad (28.2)$$

حال متغیر حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ تقریبی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$x_1(t) = -t + \frac{61331171268920}{12724695632333}t^2 - \frac{866445180763766}{89072869426331}t^3 \\ + \frac{111812428767540}{12724695632333}t^4 - \frac{1303630641719934}{445364347131655}t^5,$$

و

$$x_2(t) = -1 + \frac{122662342537840}{12724695632333}t - \frac{2600535542291298}{89072869426331}t^2 \\ + \frac{447249715070160}{12724695632333}t^3 - \frac{1303630641719934}{89072869426331}t^4,$$

و لذا $u(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(t) = \frac{109937646905507}{12724695632333} - \frac{4342434686117716}{89072869426331}t + \frac{6791708474182062}{89072869426331}t^2 \\ - \frac{2082774561388616}{89072869426331}t^3 - \frac{1303630641719934}{89072869426331}t^4.$$

همچنین با جایگزینی پارامترهای بهینه (۲۸.۲) با (۲۵.۲) مقدار تقریبی بهینه را می‌توان بدست آورد. برای این مثال مقدار بهینه را $J = 0.0759522$ بدست آوردیم. این قضیه همچنین به وسیله تقریب زدن $x(t)$ با سری بابکر از مرتبه ۹ از پارامترهای مجهول تقریب زده می‌شود. مقدار بهینه که از این روش بدست می‌آوریم برابر است 0.0693689 که بسیار نزدیک به هر دو مقدار دقیق 0.06936094 و نتیجه به دست آمده با استفاده از سری چپیشف از مرتبه ۹ که برابر است با 0.0693689 . توضیحاتی پیرامون تقریب چپیشف در ادامه ارائه می‌دهیم زیرا که در مثال‌های مطرح شده با تقریب چپیشف سروکار داریم.

۳.۳.۲ بررسی همگرایی طرح چندجمله‌ای‌های بابکر

تجربه و تحلیل همگرایی روش مورد بحث بر پایه قضیه تقریب و ایرشتراس^۹ می‌باشد.

قضایای و ایرشتراس [۹]

^۹Weierstrass

(۱) اگر $f(x)$ در فاصله متناهی $I = [a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه برای عدد مفروض $\varepsilon > 0$ ، وجود دارد یک n که وابسته به ε است و یک چندجمله‌ای $P_n(x)$ از درجه n به طوری که:

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon \quad x \in [a, b],$$

(۲) اگر $f(t)$ یک تابع متناوب پیوسته با دوره تناوب 2π باشد، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ مفروض وجود دارد یک n و یک چندجمله‌ای مثلثاتی

$$g_n(t) = \frac{1}{\pi} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

به طوری که برای تمام مقادیر t داریم:

$$|f(x) - g_n(t)| < \varepsilon$$

قضیه ۲.۳.۲.

فرض کنیم $f \in C([a, b], R)$ آنگاه یک دنباله‌ای از چندجمله‌هایی که همگرایی متقارن است با $F(X)$ روی $[a, b]$ وجود دارد.

لم ۳.۳.۲.

اگر $a = \inf_{P_n} J$ برای $n \in N$ که P_n زیرمجموعه‌ای از Q است و از همه چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n تشکیل شده است، سپس:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

که

$$a = \inf_Q J.$$

□

برهان. به [۶] مراجعه کنید.

قضیه بعدی همگرایی روش ارائه شده برای به دست آوردن شاخص عملکرد مطلوب را تضمین می‌کند.

قضیه ۴.۳.۲.

اگر J دارای مشتق اولیه پیوسته باشد و برای $n \in N$ داشته باشیم $Y_n = \inf_{Q_n} J$. آنگاه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$$

که

$$Y = \inf_Q J$$

برهان. اگر ما تعریف کنیم $Y_n = \min_{a_n \in R^{n+1}} J(a_n)$ آن‌گاه :

$$Y_n = J(a_n^*), \quad a_n^* \in \text{Argmin} \{J(a_n) : a_n \in R^{n+1}\}.$$

حال فرض کنید:

$$x_n^* \in \text{Argmin} \{J(x(t)) : x(t) \in Q_n\}$$

که

$$J(x_n^*(t)) = \min_{x(t) \in Q_n} J(x(t)),$$

که Q_n کلاس مرکبی از چندجمله‌ای‌های بابکر در t از درجه n است، بنابراین $Y_n = J(x_n^*(t))$. به علاوه طبق اینکه $Q_n \in Q_{n+1}$ ما داریم :

$$\min_{x(t) \in Q_{n+1}} J(x(t)) \leq \min_{x(t) \in Q_n} J(x(t))$$

بنابراین خواهیم داشت $Y_{n+1} \leq Y_n$ ، به این معنی که Y_n یک دنباله نزولی است. حال براساس لم قبل این برهان کامل می‌باشد و وجود دارد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \min_{x(t) \in Q} J(x(t))$$

□

توجه شود که این قضیه زمانی که Q_n یک کلاس از ترکیبات چندجمله‌ای چپیشف است نیز ثابت می‌شود.

۴.۲ مثال‌های عددی

برای نشان دادن بهره‌روی از روش ارائه شده، مثال‌های زیر را در نظر می‌گیریم. همه مثال‌های در نظر گرفته شده دارای کنترل بهینه مطلوب هستند و همچنین به شیوه تحلیلی قابل حل هستند. این اعتبارسنجی روش مورد بحث و مقایسه آن با نتایج حاصل از راه‌های دقیق را نشان می‌دهد.

توجه دارید که روش ارائه شده بر پایه پارامترسازی حالت است و ما به دنبال مقایسه این روش با روش‌های قبل و همچنین مقایسه بین مسیر تقریبی و دقیق $x(t)$ و متغیر کنترل $u(t)$ و شاخص عملکرد J در جدول‌های ۲ و ۶ هستیم.

مثال ۱.۴.۲

هدف ما در این مثال پیدا کردن کنترل بهینه است، بطوری‌که شاخص عملکرد زیر به مینیمم برسد.

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t)) dt, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (29.2)$$

زمانیکه

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 1 \quad (30.2)$$

ما می‌توانیم به وسیله اصل ماکزیمم‌سازی پونت‌ریاگین که در [۱۲] به آن اشاره کرده‌ایم، جواب تحلیلی را به دست آوریم.

$$x(t) = Ae^{\sqrt{2}t} + (1 - A)e^{-\sqrt{2}t}$$

$$u(t) = A(\sqrt{2} + 1)e^{\sqrt{2}t} - (1 - A)(\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}t},$$

و

$$J = \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left((\sqrt{2} + 1)(e^{4\sqrt{2}} - 1)A^2 + (\sqrt{2} - 1)(e^{2\sqrt{2}} - 1)(1 - A)^2 \right),$$

که $A = \frac{2\sqrt{2}-3}{-e^{2\sqrt{2}}+2\sqrt{2}-3}$. با استفاده از سری بابکر مرتبه دوم پارامترهای مجهول $x(t)$ را تقریب می‌زنیم و می‌رسیم به:

$$x(t) = \sum_{k=2}^2 a_k B_k(t) \quad (31.2)$$

و سپس متغیر کنترل به دست آمده از معادله حالت (۳۰.۲) به شرح زیر است.

$$u(t) = +a_2 t^2 + (a_1 + 2a_2)t + a_0 + a_1 + 2a_2. \quad (32.2)$$

در ادامه با جایگزینی (۳۱.۲) و (۳۲.۲) به جای (۲۹.۲) عبارت زیر را برای \hat{J} به دست می‌آوریم.

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{17}{6} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{13}{4} \\ \frac{17}{6} & \frac{13}{4} & \frac{17}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (33.2)$$

جدول ۱.۰۲: جدول ۱

n	J	خطا
۳	۰.۱۹۲۹۳۱۶۰۵۶	$۲.۲ e^{-۵}$
۴	۰.۱۹۲۹۰۹۴۴۵۰	$۱.۷ e^{-۷}$
۵	۰.۱۹۲۹۰۹۲۹۹۰	$۸.۶ e^{-۱۰}$

از شرایط اولیه (۳۰.۲) معادله دیگری به نمایندگی از حالت اولیه بدست می‌آید.

$$a_0 + 2a_2 = 1 \quad (۳۴.۲)$$

مسائل کنترل بهینه پویا به وسیله مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم تقریب زده می‌شود. مسئله جدید این است که (۳۳.۲) را در معرض قیدهای مساوی (۳۴.۲) به مینیمم رسانده شود. مقدار بهینه بردار a^* را می‌توان با استفاده از روش برنامه‌ریزی درجه دوم به دست آورد. با جایگزین کردن این پارامترهای بهینه به (۳۳.۲) مقدار بهینه تقریبی را می‌توان به دست آورد. تابع مقدار بهینه J که به وسیله روش ارائه شده به دست آوردیم، برای n های مختلف در جدول ۱ نشان داده شده است.

جواب دقیق برای شاخص عملکرد $J = ۰/۱۹۲۹۰۹۲۹۷۸$ است. مقدار تابع بهینه J که با استفاده از روش ارائه شده برای $n = ۴$ به دست آوردیم، مقدار تقریبی بسیار نزدیک به جواب دقیق است. این روش به یافتن مقدار تقریبی متغیر حالت و متغیر کنترل به صورت زیر می‌شود:

$$x(t) = ۱/۰ - ۱/۳۸t + ۰/۹۸۲t^2 - ۰/۴۰۳t^3 + ۰/۰۸۷۱t^4$$

و

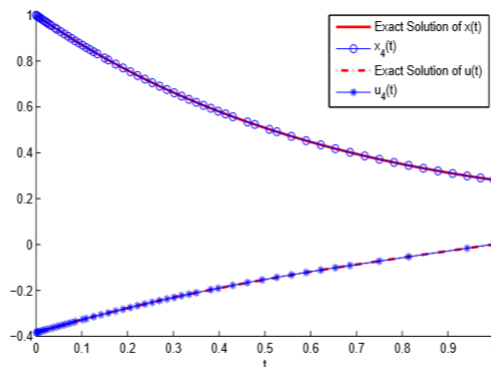
$$u(t) = -۰/۳۸۴ + ۰/۵۷۹t - ۰/۲۲۷t^2 - ۰/۰۵۴۲t^3 + ۰/۰۸۷۱t^4$$

راه حل به دست آمده و راه حل تحلیلی در شکل ۱ رسم شده است.

شکل ۱: راه حل مثال (۱.۰۴.۲). راه حل تقریبی با راه حل واقعی برای $n = ۴$ مقایسه میشود.

جدول ۲.۲: جدول ۲

n	$\ x(t) - x_n(t)\ _\infty$	$\ u(t) - u_n(t)\ _\infty$	$ J - \hat{J} $
۱	$1.2e^{-1}$	$6.3e^{-1}$	$5.7e^{-2}$
۲	$9.5e^{-3}$	$5.5e^{-2}$	$1.3e^{-3}$
۳	$1.0e^{-3}$	$8.0e^{-3}$	$2.2e^{-5}$
۴	$6.4e^{-5}$	$1.5e^{-3}$	$1.7e^{-7}$
۵	$4.0e^{-6}$	$4.8e^{-5}$	$8.6e^{-10}$
۶	$1.9e^{-7}$	$7.6e^{-6}$	$2.3e^{-12}$
۷	$9.3e^{-9}$	$1.6e^{-7}$	$7.6e^{-15}$
۸	$3.3e^{-10}$	$6.8e^{-9}$	$1.3e^{-17}$
۹	$1.2e^{-11}$	$2.5e^{-10}$	$2.4e^{-20}$
۱۰	$1.1e^{-11}$	$2.3e^{-10}$	$2.2e^{-20}$



شکل ۱: جواب مثال (۱.۴.۲). جواب تقریبی و جواب واقعی برای $n = 4$ با هم مقایسه شده‌اند.

قابل توجه است که مثال قبلی همچنین به وسیله بسط $x(t)$ با سری چندجمله‌ای بابکر از مرتبه ۱۰ نیز قابل حل می‌باشد، مقدار بهینه بدست آمده $1929092981/10$ که بسیار نزدیک به مقدار دقیق J و نتایج به دست آمده در [۱۰] و [۴۴]، با سه تکرار از این الگوریتم به ترتیب $193828723/10$ و $192909776/10$ داریم.

خطای ماکزیمم مطلق متغیر حالت $\|x(t) - x_n(t)\|_\infty$ و برای متغیر کنترل $\|u(t) - u_n(t)\|_\infty$ و شاخص عملکرد $|J - J_n|$ می‌باشد، که در جدول ۲ برای n های مختلف الگوریتم ارائه شده، لیست شده‌اند. جدول ۲ خطای ماکزیمم مطلق برای شاخص عملکرد و متغیر حالت و متغیر کنترل برای n های مختلف در مثال (۱.۴.۲)

مثال ۲.۴.۲

مانند مثال قبلی هدف یافتن کنترل بهینه است، به طوری که شاخص عملکرد ما در زیر به مینیمم برسد.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (35.2)$$

زمانی که

$$u(t) = \dot{x}(t) + \ddot{x}(t), \quad (36.2)$$

و با شرایط

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \quad (37.2)$$

$$x(2) = 5, \dot{x}(2) = 2$$

که جواب تحلیلی به صورت زیر است:

$$x(t) = -6/103 + 7/289t + 6/696e^{-t} - 0/593e^t$$

و

$$u(t) = 7/289 - 1/186e^t.$$

بنابراین مقدار دقیق شاخص عملکرد $J = 16/74543860$ است. با استفاده از تقریب $x(t)$ به وسیله سری مرتبه سوم از چندجمله‌ای‌های بابکر از ضرایب مجهول خواهیم داشت:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{k=3} a_k B_k(t), \quad (38.2)$$

و سپس متغیر کنترل از معادله حالت (36.2) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(t) = a_1 + 2a_2 + a_3 + (2a_2 + 6a_3)t + 3a_3t^2, \quad (39.2)$$

با جایگزینی (39.2) با (35.2) عبارت زیر را توانستیم برای J به دست بیاوریم:

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 4 & \frac{52}{3} & 52 \\ 11 & 52 & \frac{849}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (40.2)$$

از شرایط مرزی (37.2) معادله دیگری به نمایندگی از معادله حالت اولیه به دست می‌آید به صورت

زیر:

جدول ۳.۲: جدول ۳

n	J	خطا
۴	۱۶.۷۶۳۰۴۳۴۸	$۱.۸ e^{-۲}$
۵	۱۶.۷۵۰۷۳۳۴۵	$۵.۳ e^{-۳}$
۶	۱۶.۷۵۰۷۲۵۲۶	$۵.۲ e^{-۳}$

$$a_0 + 2a_2 = 0 \quad (۴۱.۲)$$

$$a_0 + 2a_1 + 6a_2 + 10a_3 = 5$$

$$a_1 + a_3 = 0$$

$$a_1 + 4a_2 + 13a_3 = 2.$$

مسائل کنترل بهینه پویا را می‌توان با مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم تقریب زد. مسئله جدید به مینیمم رساندن (۴۰.۲) با هدف برابری قیدهای (۴۱.۲) می‌باشد. مقدار بهینه بردار a^* را می‌توان با استفاده از روش استاندارد برنامه نویسی درجه دوم به دست آورد. با جایگزینی این پارامترهای بهینه با (۴۰.۲) می‌توانیم مقدار بهینه را محاسبه کنیم. مقدار بهینه تابع J که با استفاده از روش ارائه شده به دست آوردیم در جدول ۳ برای n های مختلف نشان داده‌ایم.

برای $n = 5$ مقدار متغیر حالت و متغیر کنترل تقریبی محاسبه شده است به صورت زیر می‌باشد:

$$x(t) = 3/05t^2 - 1/19t^2 + 0/218t^4 - 0/0359t^5$$

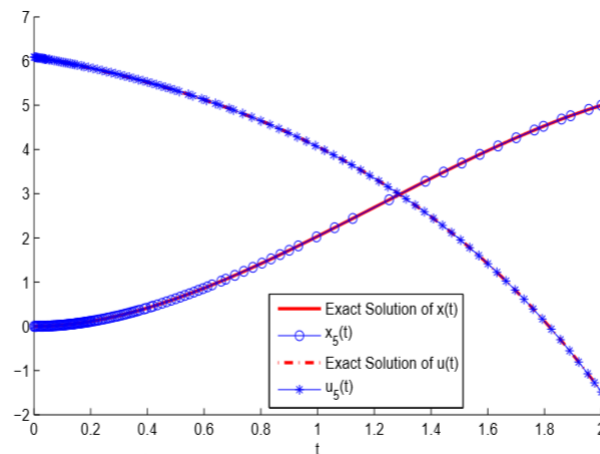
و

$$u(t) = 6/09 - 1/04t - 0/957t^2 + 0/152t^3 - 0/180t^4$$

جواب به دست آمده و جواب تحلیلی در شکل ۲ رسم شده است.

جدول ۴.۲: جدول ۴

t	$x(t)$	$x_n(t)$	$u(t)$	$u_n(t)$
۰.۰۰	۰.۰	۰.۰	۶.۱۰۳	۶.۱۰۴۸۲۶۸۰۴
۰.۲۵	۰.۱۷۲۶۷۲۹۷۱۷	۰.۱۷۲۷۲۳۰۸۱۸	۵.۷۶۶۱۴۵۸۵۵	۵.۷۶۷۶۹۹۱۰۱
۰.۷۵	۱.۲۷۱۳۳۵۴۲۷	۱.۲۷۱۶۷۲۰۰۵	۴.۷۷۸۲۳۷۹۸۰	۴.۷۷۸۹۸۷۸۱۱
۱.۰۰	۲.۰۳۷۳۷۹۶۱۴	۲.۰۳۷۸۸۲۸۴۴	۴.۰۶۵۱۱۷۷۵۲	۴.۰۶۵۲۸۷۳۳۸
۱.۲۵	۲.۸۵۶۹۱۲۷۴۶	۲.۸۵۷۵۵۳۶۲۷	۳.۱۴۹۴۵۳۲۵۳	۳.۱۴۸۸۷۸۲۱۷
۱.۵۰	۳.۶۶۶۹۳۷۹۳۳	۳.۶۶۷۶۵۲۲۷۵	۱.۹۷۳۷۱۶۷۶۳	۱.۹۷۲۱۸۵۳۰۵
۱.۷۵	۴.۴۰۳۸۶۰۹۳۹	۴.۴۰۴۵۴۵۲۹۹	۰.۴۶۴۰۴۱۲۲۶	۰.۴۶۱۲۸۱۶۹۰۳
۲.۰۰	۴.۹۹۹۴۹۴۷۸۹	۴.۹۹۹۹۹۹۹۹۶	-۱.۴۷۴۴۲۰۵۳۳	-۱.۴۷۸۷۵۷۰۹۳



شکل ۲: جواب مثال (۱.۵). جواب تقریبی و جواب واقعی برای $n = 5$ با هم مقایسه شده‌اند.

دقت روش ارائه شده به صورت عددی برای تعیین خطاهای مطلق $|x(t) - x_n(t)|$ و $|u(t) - u_n(t)|$ برای $n = 5$ در جدول ۴ داده شده است.

توجه داشته باشید که، مسئله قبلی نیز با استفاده از بسط $x(t)$ با سری چندجمله‌ای بابکر از مرتبه ۷ حل می‌شود و مقدار بهینه $۱۶/۷۵۰۷۲۳۴۰$ پیدا می‌کنیم، که بسیار نزدیک به مقدار دقیق $۱۶/۷۴۵۴۳۸۶۰$ و نتیجه بدست آمده در [۵۲] که $۱۶/۷۴۵۳۱۷۱۷$ برای سه تکرار از این الگوریتم است.

مثال ۳.۴.۲.

(کنترل خطی و نوسانی میانگر)

مسئله کنترل خطی و نوسانی بخش $۲/۲/۲$ را در نظر بگیرید و فرض کنید:

$$\omega = 1, T = 2, x_0 = 0/5, \dot{x}_0 = -0/5,$$

هدف پیدا کردن کنترل بهینه است که، به مینیمم می‌رساند؛

$$J = \frac{1}{4} \int_{-2}^0 u(t)^2 dt, \quad -2 \leq t \leq 0 \quad (42.2)$$

زمانی که

$$u(t) = \ddot{x}(t) + x(t), \quad (43.2)$$

و

$$x(-2) = 0.5, x(0) = 0 \quad (44.2)$$

$$\dot{x}(-2) = -0.5, \dot{x}(0) = 0$$

مقدار تقریبی $x(t)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{i=3} a_i B_i(t), \quad (45.2)$$

و سپس متغیر کنترل به دست آمده از معادله حالت (۴۳.۲) به صورت زیر است:

$$u(t) = 4a_2 + 7a_2 t + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (46.2)$$

با جایگزینی (۴۶.۲) با (۴۲.۲) عبارت زیر را برای J می‌توانیم به دست آوریم:

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{22}{6} & -9 \\ -1 & \frac{4}{3} & -6 & \frac{276}{30} \\ \frac{22}{6} & -6 & \frac{448}{15} & \frac{-222}{6} \\ -9 & \frac{276}{30} & \frac{-222}{6} & \frac{12524}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (47.2)$$

از شرایط مرزی (۴۴.۲) معادله دیگری به نمایندگی حالت اولیه به دست می‌آوریم که به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$a_0 - 2a_1 + 6a_2 - 10a_3 = \frac{1}{4}, \quad (48.2)$$

$$a_0 + 2a_2 = 0,$$

$$a_1 - 4a_2 - 13a_3 = -\frac{1}{4},$$

$$a_1 + a_3 = 0,$$

جدول ۵.۲: جدول ۵

n	J	خطا
۴	۰.۱۸۴۹۱۶۸۹۱۳	$۵.۸ e^{-۵}$
۵	۰.۱۸۴۸۷۳۵۲۹۶	$۱.۵ e^{-۵}$
۶	۰.۱۸۴۸۵۸۵۷۴۰	$۵.۲ e^{-۸}$

مسأله را می‌توان با مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم تقریب زد. مسئله جدید به مینیمم رساندن (۴۷.۲) با هدف برابری قیدهای (۴۸.۲) است. مقدار بهینه بردار a^* را می‌توان با استفاده از روش استاندارد برنامه‌ریزی درجه دوم به دست آورد. با جایگزینی این پارامترهای بهینه با (۴۷.۲) می‌توانیم مقدار بهینه را محاسبه کنیم. مقدار بهینه تابع J که با استفاده از روش ارائه شده به دست آوریم در جدول ۵ برای n های مختلف نشان داده‌ایم.

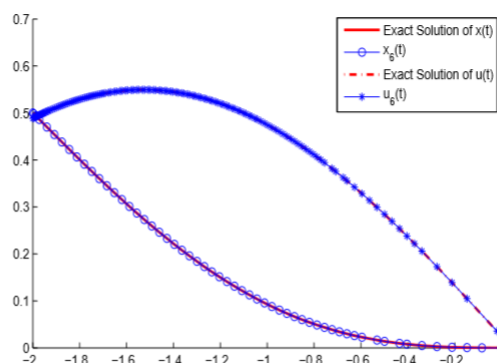
جواب دقیق برای شاخص عملکرد $J = ۰.۱۸۴۸۵۸۵۴۲۲$ است. مقدار بهینه تابع J بدست آمده با استفاده از روش پیشنهاد شده برای $n = ۶$ تقریبی بسیار دقیق از جواب دقیق می‌باشد. این امر متغیرهای حالت و کنترل را به صورت زیر بیان می‌کند:

$$x(t) = ۰.۱۲۵t^۲ - ۰.۰۸۹۵t^۳ + ۰.۰۰۱۸۴t^۴ + ۰.۰۱۲۷t^۵ + ۰.۰۰۱۷۴t^۶,$$

و

$$u(t) = ۰.۲۵۰ - ۰.۵۳۷t + ۰.۳۴۶t^۲ + ۰.۱۶۵t^۳ + ۰.۰۵۴t^۴ + ۰.۰۱۲۷t^۵ + ۰.۰۰۱۷۴t^۶,$$

جواب بدست آمده و جواب تحلیلی در نمودار ۳ رسم شده است.



شکل ۳: جواب مثال (۱.۵). جواب تقریبی و جواب واقعی برای $n = ۶$ با هم مقایسه شده‌اند.

همچنین مثال قبلی به وسیله بسط $x(t)$ با سری چندجمله‌ای بابکر از مرتبه ۱۰ قابل حل می‌باشد و مقدار بهینه $J = ۰.۱۸۴۸۵۸۵۴۲۴$ را پیدا کردیم که بسیار نزدیک به مقدار دقیق ۰.۱۸۴۸۵۸۵۴۲۲

جدول ۶.۲: جدول ۶

n	$\ x(t) - x_n(t)\ _\infty$	$\ u(t) - u_n(t)\ _\infty$	$ J - \hat{J} $
۲	$۳.۳e^{-۲}$	$۱.۱e^{-۱}$	$۱.۱e^{-۲}$
۳	$۳.۲e^{-۲}$	$۱.۰e^{-۱}$	$۱.۰e^{-۲}$
۴	$۶.۹e^{-۴}$	$۷.۷e^{-۳}$	$۵.۸e^{-۵}$
۵	$۳.۰e^{-۴}$	$۵.۲e^{-۳}$	$۱.۵e^{-۵}$
۶	$۶.۹e^{-۶}$	$۱.۹e^{-۴}$	$۳.۲e^{-۸}$
۷	$۱.۱e^{-۶}$	$۷.۰e^{-۵}$	$۲.۳e^{-۹}$
۸	$۳.۳e^{-۸}$	$۲.۲e^{-۶}$	$۲.۲e^{-۱۰}$
۹	$۲.۶e^{-۹}$	$۳.۴e^{-۷}$	$۲.۱e^{-۱۰}$
۱۰	$۹.۵e^{-۱۰}$	$۸.۵e^{-۹}$	$۲.۰e^{-۱۰}$

جدول ۷.۲: جدول ۷

n	روش ارائه شده		
	$\varepsilon=۰.۱۵$	$\varepsilon=۰.۵$	$\varepsilon=۰.۷۵$
۳	۰.۱۹۹۲۸۲۹۹۵۶	۰.۲۰۷۵۴۲۵۴۴۳	۰.۲۱۳۶۲۲۵۱۰۳
۴	۰.۱۸۷۵۲۹۲۱۶۶	۰.۱۹۳۷۰۸۰۴۷۶	۰.۱۹۸۱۹۲۳۰۱۰
۵	۰.۱۸۷۴۹۷۰۴۲۵	۰.۱۹۳۶۳۰۳۲۱۱	۰.۱۹۸۰۶۶۸۵۹۶

است. نتایج در [۴۹] و [۲] به ترتیب $۱۸۴۸۵۸۵۷۶/۰$ و $۱۸۴۸۹۷۹۲۶/۰$ برای سه تکرار به دست آمده است. خطای ماکزیمم مطلق از متغیر حالت $(\|x(t) - x_n(t)\|_\infty)$ و متغیر کنترل $\|u(t) - u_n(t)\|_\infty$ و برای شاخص عملکرد $|J - J_n|$ در جدول ۶ برای n های مختلف الگوریتم پیشنهاد شده، لیست شده است.

• کنترل میانگر نوسان ساز

در ادامه کنترل نوسان میانی را بررسی می‌کنیم. همانطور که قبلاً اشاره شده، راه حل دقیق در این مورد شناخته شده نیست. در جدول ۷ مقدار بهینه از هزینه کاربردی J برای مقادیر گوناگون از ε برای n های مختلف کنترل میانگر نوسانی لیست شده است.

با مقایسه داده‌ها صحت الگوریتم پیشنهاد شده، مشخص می‌شود.

• نتیجه گیری

در این فصل، یک روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه غیرخطی و کنترل میانگر نوسان ساز به عنوان کلاس خاصی از مسائل کنترل بهینه ارائه دادیم، که راه حل های آن بر پایه پارامترسازی حالت است و تقریبی دقیق نسبت به جواب واقعی با استفاده از ضرایب مجهول تولید می‌کند.

تاکید می‌کنیم، که این روش برای همه مسائل کنترل بهینه کارایی دارد. در واقع هدف روش مستقیم ارائه شده، محاسبه متغیر کنترل و متغیر حالت به عنوان تابعی از زمان است. همچنین با این روش مقدار عددی برای شاخص عملکرد به آسانی به دست می‌آید. این روش یک راه ساده برای تنظیم و به دست آوردن کنترل بهینه مسائل فراهم می‌کند، طوری که مسائل ترکیبی را به راحتی با این روش می‌توانیم به دست بیاوریم. همگرایی این الگوریتم اثبات شده است. از مزایای این روش همگرایی سریع آن است. برخی از مثال‌هایی که به وسیله این روش حل کردیم، گویا این امر است. نتایج نشان داده است که روش ارائه شده یک روش قوی است و فاکتور مهمی در انتخاب روش برای کاربردهای مهندسی است.

• ایده‌ای تازه برای ادامه

به عنوان طرحی نو برای ادامه روند بررسی چندجمله‌ای‌های بابکر پیشنهاد می‌شود؛ پس خورد خروجی و پس خورد حالت برای این چندجمله‌ای‌ها محاسبه و مقایسه شود. همان‌طور که مشاهده شد، این چندجمله‌ای شناخته شده نسبت به سایر چندجمله‌ای‌ها از جمله چپیشف کارایی بیشتری دارد. همچنین می‌توان برای چندجمله‌ای بابکر ماتریس ورودی و حالت را تشکیل دادیم. در نتیجه می‌توان ماتریس پس خورد حالت و پس خورد خروجی را با تکیه بر قواعد و اصول کنترل به دست آورد. که بررسی‌ها برای حصول به این نتیجه شروع شده است.

فصل ۳

پس خورد خروجی یک سیستم با استفاده از مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس و روش پارامتری

۱.۳ روش پارامتری برای تخصیص مقادیر ویژه

هدف اصلی برای کنترل یک سیستم دینامیکی، انتخاب ماتریس پس خورد مناسب $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ برای رسیدن به تعادل و ثبات و سرعت بخشیدن به پاسخ سیستم است. برای رسیدن به این هدف، مسئله می‌تواند به انتخاب F برای تخصیص مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه بسته $A + BF$ تبدیل شود. این مسائل را، مسائل تخصیص مقادیر ویژه^۱ می‌نامند.

کنترل پس خورد خروجی^۲ یک سیستم با n حالت، m ورودی و r خروجی که به وسیله معادلات

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.3)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.3)$$

تعریف می‌شود. در بعضی از این سیستم‌ها بردار حالت $x(t)$ به طور مستقیم قابل مشاهده نیست و فقط خروجی $y(t)$ در دسترس است. به طور دقیق ما به دنبال کنترل سیستم بر پایه داده‌های خروجی هستیم. قانون زیر را تعریف می‌کنیم:

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.3)$$

که $C \in \mathbb{R}$ ماتریسی معلوم است. ورودی $u(t)$ باید به عنوان یک تابع خطی از خروجی $y(t)$ انتخاب شود:

^۱Pole Assignment Problem

^۲Output Feedback

$$u(t) = Ky(t) \quad (۴.۳)$$

سیستم دینامیکی حلقه بسته به فرم زیر، تبدیل می‌شود:

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) \quad (۵.۳)$$

حال هدف، انتخاب ماتریس پس خورد خروجی K ، با ابعاد $(m \times r)$ است، به طوری که مقادیر ویژه دلخواه و از قبل تعیین شده، به ماتریس $A + BKC$ تخصیص پیدا کند. مسائل تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی^۳ نوع خاصی از مسائل مقدار ویژه معکوس بدون محدودیت روی فرم ساختاری ماتریس K است.

۱.۱.۳ کنترل بهینه زمانی سیستم‌های خطی گسسته‌زمانی با پس خورد خروجی

برای کنترل بهینه زمانی یک سیستم با پس خورد خروجی، ورودی $u(i)$ را در لحظه‌ی t_i متناسب با خروجی تعیین می‌کنند. یک روش تعیین $u(i)$ به صورت زیر است:

$$u(i) = Ky(i) \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (۶.۳)$$

که در آن K ماتریس $m \times n$ حقیقی با درایه‌های ثابت است و ماتریس پس خورد خروجی نامیده می‌شود و با جایگزینی

$$y(i) = Cx(i) \quad (۷.۳)$$

در رابطه‌ی (۶.۳) که قانون کنترل خروجی نامیده می‌شود در معادله حالت سیستم داریم:

$$x(i+1) = Ax(i) + BKCx(i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (۸.۳)$$

در این جا ماتریس $A + BKC$ ماتریس حلقه بسته سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه بسته سیستم می‌نامند. در واقع با تعیین ماتریس K ورودی‌های سیستم متناسب با خروجی‌های آن تعیین می‌شوند.

در مسائل کنترل معکوس ما به دنبال یافتن ماتریس پس خورد K هستیم، به طوری که سیستم حلقه بسته مورد نظر متناسب با ماهیت خود (پیوسته یا گسسته) پایدار گردد.

^۳Output Feedback Assignment Problem

ملاحظه ۱۰۱.۳. سیستم‌های پیوسته در صورتی پایدار می‌باشند که مقادیر ویژه در سمت چپ صفحه مختلط اختصاص یابند. برای سیستم‌های گسسته در صورتی پایدار خواهد بود که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته در داخل دایره واحد واقع گردد. [۳۱]

در این فصل با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس به دنبال کنترل پس‌خورد خروجی می‌باشیم. در ابتدا ارتباط بین تخصیص مقادیر ویژه یک سیستم دینامیکی و مسئله مقدار ویژه معکوس بررسی می‌کنیم. سپس یک مسئله مقدار ویژه معکوس را به یک مسئله تخصیص مقادیر ویژه و برعکس آن تبدیل می‌کنیم. همچنین روشی جدید برای تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی ارائه می‌دهیم.

در ابتدا توضیحاتی مختصر پیرامون تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از فرم استاندارد اشلون و فرم همدم برداری ارائه می‌دهیم.

۲.۱.۳ تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از تبدیلات تشابهی

اساس حل مسائل کنترلی در فرم استاندارد اشلون و فرم همدم برداری برای زوج (A, B) استفاده از ماتریس‌های تبدیل مربعی است. زیرا که دارای معکوس می‌باشد و می‌توانیم از آن‌ها در تجزیه ماتریسی بهره ببریم. به همین دلیل تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از تبدیلات تشابهی نام نهادیم.

تعریف ۲.۱.۳. فرم استاندارد/اشلون

فرض کنید که T تبدیل تشابهی باشد که بر فضای \mathbb{R}^n تعریف شده است. معادله حالت سیستم پیوسته زمانی معمولی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۹.۳)$$

حال فرض می‌کنیم بردار حالت دستگاه توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود، یعنی:

$$\hat{x}(t) = T^{-1}x(t) \quad \text{or} \quad x(t) = T\hat{x}(t) \quad (۱۰.۳)$$

با جایگزاری رابطه (۱۰.۳) در معادله حالت (۹.۳) داریم:

$$\begin{aligned} T\dot{\hat{x}}(t) &= AT\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \Rightarrow \dot{\hat{x}}(t) &= T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \end{aligned} \quad (۱۱.۳)$$

حال با در نظر گرفتن $\hat{A} = T^{-1}AT$ و $\hat{B} = T^{-1}B$ در معادله (۱۱.۳) داریم:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (۱۲.۳)$$

ماتریس تبدیل T را می‌توان به صورت منحصر به فردی با استفاده از ماتریس کنترل‌پذیری مشخص کرد.

به این ترتیب که اولین n ستون مستقل خطی ماتریس کنترل‌پذیری Q را، ستون‌های ماتریس تبدیل T قرار می‌دهیم، در این صورت فرم استاندارد اشلون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = [b_1 \quad b_2 \cdots b_m \quad A^{q-1}b_1 \cdots A^{q-1}b_r \quad A^{q-1}b_{r+1} \cdots A^{q-1}b_m \quad A^qb_1 \cdots A^qb_r]$$

ماتریس افزوده $[B, A]$ ، که دارای n و $n + m$ ستون است را تشکیل می‌دهیم. اگر ماتریس $[T^{-1}B, T^{-1}AT]$ را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T^{-1}[B, A] &= T^{-1}[b_1 b_2 b_m A b_1 \cdots A^q b_1 \cdots A^q b_r A^q b_{r+1} \cdots A^q b_m A^{q+1} b_1 \cdots A^{q+1} b_r] \\ &= T^{-1}[T, A^q b_{r+1} \cdots A^{q+1} b_r] = [I, T^{-1}A^q b_{r+1} \cdots T^{-1}A^{q+1} b_r] = [I_{n \times n}, V_{n \times n}] \end{aligned} \quad (۱۳.۳)$$

به دست آوردن ماتریس همانی و تبدیلات تشابه‌ی و رسیدن به فرم استاندارد اشلون نیازمند عملیات‌های سطری و ستونی نظیر می‌باشد. این عملیات‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

.۱

$$r(i) \longleftrightarrow r(j)$$

$$c(i) \longleftrightarrow c(j)$$

.۲

$$r(i) \longleftrightarrow ar(i)$$

$$c(i) \longleftrightarrow \frac{1}{a}c(i)$$

.۳

$$r(i) \longleftrightarrow r(i) + kr(j)$$

$$c(j) \longleftrightarrow c(j) - kc(i)$$

در صورتی که بخواهیم زوج (A, B) را به فرم استاندارد اشلون $[I, V]$ تبدیل نماییم، ابتدا ماتریس افزوده $Q = [B, A, I]$ را تشکیل می‌دهیم، سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس Q و ستونی نظیر روی ماتریس A حاصل در هر مرحله، n ستون اول ماتریس Q را به I تبدیل می‌کنیم، در این صورت ماتریس افزوده \hat{Q} به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] = [I_n, V_{n \times m}, T^{-1}] \quad (14.3)$$

که ماتریس‌های \hat{B} و \hat{A} به صورت زیر هستند:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \circ_{m \times m} & \circ & \cdots & \circ_{m \times r} & v_{m \times m}^{(1)} \\ I_m & \circ & \cdots & \circ & v_{m \times m}^{(2)} \\ \circ_{m \times m} & I_m & \cdots & \circ & v_{m \times m}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & v_{m \times m}^{(q)} \\ \circ_{r \times m} & \circ_{r \times m} & \cdots & I_r & v_{r \times m}^{(q+1)} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ \circ_{m \times m} \\ \circ_{m \times m} \\ \circ_{m \times m} \\ \circ_{r \times m} \end{bmatrix}. \quad (15.3)$$

تعریف ۳.۱۰۳. فرم همدم برداری

یک ماتریس تبدیل خطی تشابهی مانند S را در نظر می‌گیریم که بر فضای \mathbb{R} تعریف شده است. اکنون بردار حالت سیستم را که قبلاً بنابر توضیحات ارائه شده به فرم استاندارد اشلون نوشتیم، توسط ماتریس تبدیل S^{-1} به فضای جدید تبدیل می‌گردد:

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}T^{-1}x(t) \quad (16.3)$$

با جایگزاری معادله (۱۶.۳) در معادله (۱۲.۳) خواهیم داشت:

$$S\dot{\hat{x}} = \hat{A}S\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (17.3)$$

$$\Rightarrow \tilde{\dot{x}} = S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t) \quad (18.3)$$

با در نظر گرفتن $\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS$ و $\tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B$ در معادله (۱۷.۳) داریم:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (19.3)$$

زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) ، فرم همدم برداری زوج (B, A) است [۱۷].

ملاحظه ۴.۱۰۳. دو فرم همدم برداری و استاندارد اشلون هم‌ارز یکدیگر هستند و جواب آن‌ها نیز یکسان است.

تعریف ۵.۱۰۳. به دست آوردن فرم همدم برداری به روش عددی

اگر ناوردهای کرونکر منظم باشد، با استفاده از عملیات ستونی مقدماتی روی ماتریس \hat{A} و سطری مقدماتی نظیر آن روی کل ماتریس \hat{Q} ، می‌توان فرم همدم برداری و ماتریس تبدیل آنرا به صورت زیر به دست آورد:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 & \\ & \dots \\ & & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (20.3)$$

که G_0 یک ماتریس $m \times n$ و B_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی است. حال اگر ناوردهای کرونکر نامنظم باشند، برخی از ستون‌های I_{n-m} از ماتریس \tilde{A} ، در پایین قطر اصلی پخش می‌شوند.

۲.۳ روش پارامتری برای تخصیص مقادیر ویژه به وسیله پس خورد خروجی

در این بخش، یک روش پارامتری برای کنترل سیستم‌های با پس خورد خروجی ارائه شده است. برای حل و به دست آوردن کنترل‌گر مناسب در این روش، مجموعه‌ای از معادلات غیر خطی بر حسب پارامترهای آزاد به دست می‌آید که در آخر با استفاده از نرم افزارهای مناسب به حل این معادلات می‌پردازیم. در ابتدا به وسیله پارامترهای مفروض، ماتریس پس خورد حالت را به دست آورده، و در ادامه به وسیله عملیات تشابهی مناسب ماتریس پس خورد خروجی محاسبه می‌شود. از ویژگی‌های این روش می‌توان به دو مزیت کلی اشاره کرد:

- ۱- منحصر به فرد نبودن ماتریس پس خورد کنترلی
- ۲- انتخاب ماتریس پس خورد کنترلی مورد نظر با کمترین نرم ممکن

۱.۲.۳ تخصیص مقادیر ویژه به وسیله‌ی ماتریس پس خورد حالت

معادله حالت سیستم پیوسته زمانی

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (21.3)$$

را در نظر بگیرید. قانون کنترل پس خورد حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = Fx(t) \quad (22.3)$$

با انجام عملیات‌های سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی نظیر روی معادله (۲۱.۳) و همچنین با استفاده از ماتریس‌های تشابهی به فرم همدم برداری برای حالت سیستم به صورت زیر می‌رسیم:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (23.3)$$

به همان صورت برای قانون کنترل $u(t) = \tilde{F}\tilde{x}(t)$ را خواهیم داشت، که در آن \tilde{F} ماتریس پس خورد حالت سیستم تبدیل شده به فرم همدم برداری است. با جایگزاری فرم همدم برداری $\tilde{x}(t)$ و با استفاده از ماتریس‌های تبدیل تشابهی به دست می‌آوریم:

$$u(t) = \tilde{F}S^{-1}T^{-1}x(t) \quad F = \tilde{F}S^{-1}T^{-1} \quad (24.3)$$

فرم همدم برداری به دست آمده برای ماتریس‌های A و B نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_o & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_o & \\ & \dots \\ & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (25.3)$$

ماتریس پس خورد حالتی که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p$ را به صفر می‌برد، ماتریس پس خورد حالت اولیه می‌نامند و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{F}_p = -B_o^{-1}G_o \quad (26.3)$$

لذا برای ماتریس پس خورد حالت اولیه سیستم استاندارد داریم:

$$F = \tilde{F}_p S^{-1} T^{-1} = -B_o^{-1} G_o S^{-1} T^{-1} \quad (27.3)$$

نشان می‌دهیم که مقادیر ویژه سیستم همدم برداری یعنی $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p$ همگی صفر هستند.

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} &= \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p \\ &= \begin{bmatrix} G_o & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ & \dots \\ & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} (-B_o^{-1}G_o) \\ &= \begin{bmatrix} G_o & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_o \\ & \dots \\ & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \circ & & \\ I & & \circ \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \text{eig}(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p) = \circ \end{aligned}$$

با تعریف F_p به همین صورت اثبات می‌شود که مقادیر ویژه ماتریس سیستم استاندارد $\Gamma = A + BF$ نیز صفر است. چون $\tilde{\Gamma}$ و Γ متشابه‌اند، لذا مقادیر ویژه آن‌ها با هم برابرند.

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} &= \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p \\ &= S^{-1}T^{-1}ATS + S^{-1}T^{-1}BFTS = (TS)^{-1}(A + BF)TS \\ &= (TS)^{-1}\Gamma(TS)\end{aligned}$$

هدف از کنترل یک سیستم، رسیدن به پایداری است، این مهم در صورتی عملی می‌شود که ماتریس پس‌خورد حالت و یا پس‌خورد خروجی یافت شود، به‌گونه‌ای که مقادیر ویژه‌ی ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ در مجموعه از پیش تعیین شده $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ، موسوم به طیف مقادیر ویژه باشند. با این خاصیت مهم که λ_i ها حقیقی یا به صورت زوج‌های مزدوج مختلط هستند. در ادامه روش جدیدی برای به دست آوردن ماتریس حلقه بسته سیستم در حالت اولیه ارائه می‌دهیم. ابتدا زوج (A, B) به فرم همدم برداری (\tilde{A}, \tilde{B}) تبدیل می‌کنیم. سپس با تعریف

$$\tilde{F}_p = -B_o^{-1}G_o \quad (28.3)$$

ماتریس حلقه بسته اولیه که به فرم زیر است:

$$\tilde{\Gamma}_o = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p \quad (29.3)$$

$$= \begin{bmatrix} O_{m \times n} \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (30.3)$$

را با ماتریس قطری $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ جمع می‌کنیم، بدیهی است که مقادیر ویژه ماتریس مجموع، همان مقادیر ویژه ماتریس D خواهد بود:

$$A_\lambda = \tilde{\Gamma}_o + D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (31.3)$$

حال اگر عملیات تشابهی ستونی و سطری نظیر را روی A_λ انجام دهیم، به طوری که A_λ به فرم همدم برداری \tilde{A}_λ تبدیل می‌شود:

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_\lambda \\ \dots\dots\dots \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (32.3)$$

واضح است که A_λ و \tilde{A}_λ متشابه‌اند، لذا مقادیر ویژه \tilde{A}_λ همان مجموعه \mathcal{L} است. با تعریف ماتریس پس خورد حالت به فرم زیر؛

$$\tilde{F} = B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda) = -B_o^{-1}G_o + B_o^{-1}G_\lambda = \tilde{F}_p + \tilde{F}_\lambda \quad (33.3)$$

می توان نشان داد که، ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ برابر با ماتریس \tilde{A}_λ است:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_c &= \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} \\ &= \begin{bmatrix} G_o & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ o \end{bmatrix} (B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda)) \\ &= \begin{bmatrix} G_\lambda & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} = \tilde{A}_\lambda \end{aligned}$$

دقت شود مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ نیز در مجموعه \mathcal{L} قرار می‌گیرد و همچنین زوج‌های مختلط مزدوج در ماتریس قطری D ، به صورت یکی در میان قرار می‌گیرند تا تبدیلات آسان‌تر شوند و G_λ حقیقی به دست آید. در آخر برای ماتریس پس خورد حالت سیستم استاندارد رابطه‌ی $F = \hat{F}S^{-1}T^{-1} = \tilde{F}T^{-1}$ را داریم. روش ارائه شده برای سیستم گسسته زمانی نیز برقرار می‌باشد.

۲.۲.۳ روش پارامتری برای پس خورد حالت و تبدیل به پس خورد خروجی

سیستم خطی مستقل از زمان، کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر تعریف شده توسط معادله حالت ورودی و خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (34.3)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (35.3)$$

که در آن بردار حالت $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و بردار ورودی $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$ به ترتیب ماتریس‌های حلقه باز، ورودی و خروجی هستند. فرض می‌کنیم $rank B = m$ ، $r \leq n$ و $m \leq n$ ، $mr \geq n$ ، $rank C = r$ ، طراحی ماتریس پس خورد خروجی K ، برای تولید سیستم حلقه بسته با مقادیر ویژه‌ی مطلوب می‌باشیم. در پس خورد خروجی داریم:

$$u(t) = Ky(t) \quad (36.3)$$

فرض کنید K ماتریس کنترل‌گر با ابعاد $m \times n$ طوری انتخاب شود که ماتریس حلقه بسته‌ی

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) = \Gamma_c x(t) \quad (37.3)$$

دارای مقادیر ویژه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد.
ماتریس پس خورد حالت در تخصیص مقدار ویژه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = Fx(t) \quad (38.3)$$

و برای معادله سیستم حلقه بسته در حالت استاندارد داریم:

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) = \Gamma_c x(t) \quad (39.3)$$

که مقادیر ویژه‌ی Γ_c در طیف مقادیر ویژه از پیش تعیین شده توسط $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ قرار دارند. از مقایسه معادله‌های (۳۷.۳) و (۳۹.۳) داریم:

$$F = KC \quad (40.3)$$

با توجه به اینکه C یک ماتریس مستطیلی است و منفرد می‌باشد، نمی‌توان ماتریس K را از روش معکوس ماتریس C به دست آورد. به دنبال یافتن روشی هستیم که بتوان ماتریس پس خورد خروجی K را با استفاده از ماتریس پس خورد حالت به دست آوریم. ابتدا فرم همدم برداری (\tilde{B}, \tilde{A}) را در نظر بگیرید:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 & \\ & \dots \\ & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (41.3)$$

که در آن B_0 یک ماتریس $(m \times m)$ بالا مثلثی معکوس‌پذیر با عناصر قطری واحد و G_0 یک ماتریس $(m \times n)$ است، بنا بر روش ارائه شده در (۴۲.۳) خواهیم داشت:

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_\lambda & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (42.3)$$

G_λ یک زیر ماتریس با درایه‌های پارامتری $(m \times n)$ به دست می‌آید:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{m1} & \dots & g_{mn} \end{bmatrix} \quad (43.3)$$

همچنین بنا بر بخش قبل، مقادیر ویژه‌ی \tilde{A}_λ در $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ می‌باشد. برای یافتن ارتباط بین پارامترهای g_{ij} و سیستم حلقه بسته کنترلی، چند جمله‌ای مشخصه را می‌نویسیم:

$$p_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \quad (44.3)$$

با مساوی قرار دادن رابطه (۴۳.۳) و (۴۴.۳) می‌توان ضرایب c_i برای $i = 1, 2, \dots, n$ را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} c_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \\ c_2 &= (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n) \\ &\vdots \\ c_k &= (-1)^k \sum \lambda_i\lambda_j \cdots \lambda_l \\ c_n &= (-1)^n \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

سپس با محاسبه $\det(\tilde{A}_\lambda - I_\lambda)$ و روابط فوق، n معادله به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f_1(g_{11}, \dots, g_{mn}) &= c_1 \\ f_2(g_{11}, \dots, g_{mn}) &= c_2 \\ &\vdots \\ f_n(g_{11}, \dots, g_{mn}) &= c_n \end{aligned}$$

که در آن $f: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ یک مجموعه n معادله‌ای با $(n \times m)$ مجهول که غیر خطی‌اند، به دست می‌آید. حال باید $(m-1)n$ مجهول آن‌را به صورت دلخواه انتخاب کرد تا بتوان n مجهول دیگر را محاسبه کرد. پارامترهای آزاد، امکان رسیدن به جواب‌های زیادی را به ما می‌دهد. با این روش آیا ماتریس K به دست آمده یکتاست؟ اگر نه پس چه مزیتی دارد؟

حال ماتریس پس خورد حالت پارامتری را که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ را به همان طیف تعریف شده \mathcal{L} اختصاص می‌دهد، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda)T^{-1} \quad (45.3)$$

قضیه ۱۰۲.۳. برای زوج کنترل‌پذیر (A, B) و زوج مشاهده‌پذیر (A, C) در حالتی که شرط $rm \geq n$ برقرار باشد، همواره یک ماتریس پس خورد خروجی وجود دارد؟ [۳۱]

برهان. اگر جفت (A, B) کنترل‌پذیر باشند، آنگاه یک ماتریس پس خورد حالت F وجود دارد به طوری که همه n مقدار ویژه‌ی سیستم حلقه بسته $\Gamma = A + BF$ می‌توانند از یک مجموعه‌ی دلخواه مثل \mathcal{L} باشند [۴۰]. برای یک سیستم قابل مشاهده یک ماتریس پس خورد خروجی K وجود دارد به طوری که همه‌ی n مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته‌ی $\Gamma = A + BF$ در مجموعه‌ی دلخواه باشند.

با توجه به شرایط بالا و از قبل داشتیم $F = KC$. اگرچه از آنجایی که K ، F و C معمولاً ماتریس‌هایی مستطیلی هستند، ماتریس K نمی‌تواند از معکوس ماتریس C به دست بیاید. با استفاده از روند زیر ماتریس K به دست می‌آوریم.

فرض کنید E ماتریس یکه $n \times n$ باشد، چون ماتریسی مربعی می‌باشد، می‌توان نوشت $FE = KCE$. حال عملیات ستونی روی ماتریس C انجام دهیم و آن‌ها را در E ذخیره کنیم، به گونه‌ای که CE تبدیل به ماتریس بلوکی یکه گردد:

$$CE = [I_r \quad o] \quad (۴۶.۳)$$

آنگاه بدیهی است که عملیات ستونی روی F به صورت زیر انجام می‌شود:

$$F_e = FE = KCE = K[I_r | o] = [K | o] \Rightarrow [F_{e_r} | F_{e_r}] = [k | o] \quad (۴۷.۳)$$

پارامترها را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $F_{e_r} = o$ باشد و معادلات غیر خطی نیز برقرار باشد. □

الگوریتم زیر روش یافتن کنترل‌گر K از ماتریس پس خورد حالت F می‌باشد

* الگوریتم

هدف: یافتن پارامترهای g_{ij} با شرط اینکه مقادیر ویژه‌ی سیستم حلقه بسته‌ی Γ در مجموعه از پیش تعیین شده‌ی \mathcal{L} باشد.

ورودی: ماتریس‌های سیستم مشاهده‌پذیر و کنترل‌پذیر (A, B, C) و مقادیر ویژه \mathcal{L} که روی اعداد مختلط بسته است.

خروجی: ماتریس پس خورد خروجی K ، که مقادیر ویژه مورد نظر را تخصیص دهد.

۱- ابتدا B^{-1} و G و T^{-1} را می‌یابیم.

۲- ضرایب چندجمله‌ای مشخصه‌ای که ریشه‌ی آن‌ها برابر با طیف مقادیر ویژه‌ی مجموعه Λ باشد را تعیین کنید.

۳- چندجمله‌ای مشخصه‌ی P_λ را محاسبه کنید.

۴- سیستم پارامترهای g_{ij} را به وسیله معادل قرار دادن ضرایب چندجمله‌ای مشخصه به دست آمده در گام ۲ و ۳ به دست آورید.

۵- ماتریس E را به وسیله عملیات ستونی مقدماتی روی C به طوری که $CE = [I_r \quad O_{r,n-r}]$ مشخص کنید و فرمول زیر را محاسبه کنید:

$$FE = KCE = B^{-1}(-G_o + G_\lambda)T^{-1}E = [K \quad O_{r,n-r}]$$

۶- $m(n-r)$ معادله باقیمانده را به وسیله معادل قرار دادن آخرین $(n-r)$ ستون حاصل ضرب $B^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1}$ تا صفر بیاید.

۷- حال $n + m(n-r) \leq nm$ مجموعه معادلات غیر خطی را به وسیله الگوریتم نیوتن حل کنید.

۸- این پارامترها را در G_λ قرار داده و K را محاسبه کنید.

ملاحظه ۲.۲.۳. الگوریتم فوق جهت سیستم‌های گسسته زمانی نیز به کار گرفته می‌شود.

مثال ۳.۲.۳. سیستم کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر (۶۴.۳) را با ماتریس‌های زیر در نظر بگیرید، میخواهیم ماتریس پس خورد خروجی به روش پارامتری به دست آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴۸.۳)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

که در آن $\tilde{C} = CT$ می‌باشد. در ادامه خواهیم داشت:

$$B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

در ادامه ماتریس E از مرتبه n را با استفاده از عملیات‌های سطری به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$E = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 & -4/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال مقادیر ویژه $\Lambda = -1, -2, -3, -4$ را به این سیستم اختصاص می‌دهیم، بنا بر فرمول ارائه شده ضرایب مرتبط با این مقادیر ویژه ارائه شده را به دست می‌آوریم که برابر است با:

$$\det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = \begin{cases} -g_{11} - g_{22} = 10 \\ g_{11} - g_{12}g_{21} - g_{13} - g_{24} = 35 \\ g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23} + g_{11}g_{24} - g_{14}g_{21} = 50 \\ g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23} = 24 \end{cases}$$

$$B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)E =$$

$$\begin{bmatrix} -1 + g_{11} & 1 + g_{12} & g_{13} & -1 + g_{14} \\ -1 + g_{21} & -2 + g_{22} & 1 + g_{23} & 2 + g_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 & -4/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مجموعه معادله‌های غیر خطی شرح داده شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} -4g_{11} + 2g_{12} - 5g_{13} + 3g_{14} = -3 \\ -4g_{21} + 2g_{22} - 5g_{23} + 3g_{24} = 1 \end{cases}$$

با فرض $g_{11} = -5$ و $g_{12} = 0$ سایر پارامترها را می‌یابیم:

$$\begin{cases} g_{13} = -93/0714, g_{14} = -162/7857, g_{21} = 0 \\ g_{22} = -5, g_{23} = 47/6429, g_{24} = 83/0714 \end{cases} \quad (49.3)$$

حال ماتریس پس خورد خروجی به دست آمده از فرمول $B_0^{-1}(G_0 + G_\lambda)E$ به صورت زیر می‌باشد:

$$K = \begin{bmatrix} -28/2571 & 93/0714 & -35/2571 \\ 11/2143 & -48/6429 & 18/2143 \end{bmatrix}$$

۳.۳ کنترل معکوس یک سیستم

۱.۳.۳ تاریخچه

مسائل معکوس برای اولین بار توسط فیزیک‌دان ارمنی-شوروی به نام ویکتور امبارتسویان^۴ کشف و معرفی شد. در حالی که او فقط یک دانش‌آموز بود، نظریه ساختار اتم، تشکیل سطوح انرژی، معادله

^۴Viktor Ambartsumian

شرویدینگر و خواص آنرا به طور کامل مطالعه کرده بود و زمانی که روی نظریه مقادیر ویژه‌ی معادلات دیفرانسیل تسلط پیدا کرد، به شباهت ظاهری بین سطوح گسسته‌ی انرژی و مقادیر ویژه‌ی معادلات دیفرانسیل اشاره کرد.

او این سوال را مطرح کرد، « یک مجموعه از مقادیر ویژه داده شده است، آیا ممکن است یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل یافت شود که مقادیر ویژه‌ی آنها همان مقادیر ویژه‌ی داده شده است، باشد؟ »

در واقع، امبارتسومیان به یک مسأله‌ی معکوس اشتورم-لیوویل^۵ که مربوط به تعیین معادلات ارتعاشات ریسمان است، پرداخته است. این مقاله در سال ۱۹۲۹ در یک مجله فیزیکی^۶ منتشر شد و طی یک زمان طولانی به فراموشی سپرده شد. امبارتسومیان پس از چندین دهه در توصیف این فراموشی گفت: « اگر یک ستاره شناس، یک مقاله ریاضی را در یک مجله‌ی فیزیک منتشر کند، اتفاقی جز فراموشی برای آن نخواهد افتاد. »

با این حال، در اواخر جنگ جهانی دوم، این مقاله ویکتور بیست ساله، توسط ریاضیدانان سوئدی یافت شد و به نقطه‌ی شروعی برای مطالعه روی مسائل معکوس تبدیل شد. در سال ۱۹۹۸ پارلت^۷ گفت: « ارتعاشات و مقادیر ویژه‌ی مرتبط با آنها، در همه جا هستند. » این دیدگاه جالب در مورد مقادیر ویژه، خبر از نقش مهم مقادیر ویژه در تحقیقات آینده می‌دهد. به همین دلیل تلاش‌های قابل توجهی در محاسبه‌ی مقادیر ویژه، به خصوص در زمینه ماتریسی انجام شد.

یک مسأله‌ی مستقیم، در واقع فرآیند تجزیه و تحلیل و استخراج اطلاعات طیفی از یک سیستم و در نتیجه تعیین رفتار دینامیکی یک سیستم از پارامترهای فیزیکی معلوم قبلی است، مانند جرم، طول، کشش، خازن و ...

مسأله‌ی معکوس، تعیین و تخمین و کنترل کردن درستی عناصر یک سیستم با توجه به رفتار از قبل تعیین شده‌ی آن سیستم است. به خصوص در بحث ماتریسی، یک مسأله‌ی معکوس ماتریسی، ساخت یک ماتریس با ویژگی‌های از پیش تعیین شده می‌باشد.

یک مسأله مقدار ویژه معکوس^۸، ساخت یک ماتریس با اطلاعات طیفی از قبل تعیین شده می‌باشد. این داده‌های طیفی ممکن از شامل اطلاعات کامل و یا جزئی از مقادیر ویژه یا بردارهای ویژه ماتریس باشند. هر مسأله مقدار ویژه معکوس با دو سوال اساسی همراه است، یکی مسأله نظری روی حل‌پذیری و دیگری مسأله‌ی عملی روی محاسبه‌پذیری می‌باشد. حل‌پذیری، وجود یک شرط لازم یا یک شرط کافی است که تحت آن مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس یک جواب داشته باشد و محاسبه‌پذیری، توسعه‌ی فرآیند ساخت ماتریس به صورت عددی، با دانش به اینکه مسأله‌ی مورد نظر حل‌پذیر است، می‌باشد. با ایجاد شروط متفاوت و فرمول سازی مختلف، مطالعات روی این مسأله برای دستیابی به یک راه حل عملی برای دنیای واقعی، بسیار پراکنده می‌باشد و با وجود تلاش‌های زیاد، فقط قسمتی از مسائل مطرح شده در مبحث مقدار ویژه معکوس به طور کامل تشریح و حل شده است. هدف این است که به طور خلاصه

^۵Strum-Lioவில் inverse problem

^۶Zeschrift Fur

^۷Parlett

^۸Inverse Eigenvalue problem

اقدامات انجام شده در هر دو زمینه‌ی نظریه و الگوریتم‌های عددی این مسأله را بیان کنیم. مطالعات اولیه در این زمینه عبارتند از کتاب گلدون^۹ در سال ۱۹۸۶، که در آن تاکید بر یک مکانیسم کاربردی است. کتاب بولی گلوب^{۱۰} در سال ۱۹۸۷ تاکید بر محاسبات عددی کرده است. در کتاب ژو و دای^{۱۱} در سال ۱۹۹۱ به نشریات زیادی به زبان چینی پیرامون این موضوع اشاره شده است که برای سایر ملل ناشناخته بود.

۲.۳.۳ ارتباط بین مسأله مقدار ویژه معکوس و مسأله تخصیص مقادیر ویژه

قضیه ۱.۳.۳. قضیه وجود [۳۶]

برای هر مجموعه‌ی \mathcal{L} داده شده، اگر یک جفت از ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ کاملاً کنترل‌پذیر باشند، آنگاه یک ماتریس حقیقی $K \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که:

$$\sigma(A + BK) = \mathcal{L} \quad (۵۰.۳)$$

همچنین اگر جفت $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ کاملاً مشاهده‌پذیر باشند، آنگاه یک ماتریس حقیقی $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ وجود دارد به طوری که:

$$\sigma(A + KC) = \mathcal{L} \quad (۵۱.۳)$$

تعریف ۲.۳.۳. مسأله مقدار ویژه معکوس ماتریسی [۳۶]

دو مجموعه مستقل خطی از بردارهای n بعدی حقیقی X_1, X_2, \dots, X_p و y_1, y_2, \dots, y_p که در آن $p \leq n$ و مجموعه داده شده $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را داریم؛ مسأله مقدار ویژه معکوس ماتریسی یافتن ماتریس A است به طوری که:

$$Ax_i = y_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (۵۲.۳)$$

و همچنین طیف مقادیر ویژه‌ی ماتریس A برابر با مجموعه داده شده \mathcal{L} باشد:

$$\sigma(A) = \mathcal{L}$$

و در آن فرض می‌کنیم که مجموعه‌ی X_1, X_2, \dots, X_p مستقل خطی و \mathcal{L} تحت اعداد مختلط بسته است؛

$$\lambda \in \mathcal{L} \iff \bar{\lambda} \in \mathcal{L}$$

^۹Gladwell

^{۱۰}Boley and Golub

^{۱۱}Zhou and D ai

در قضیه زیر [۳۶]، یک مسأله مقدار ویژه معکوس را به یک مسأله تخصیص مقادیر ویژه تبدیل می‌کنیم.

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید $X = [x_1, \dots, x_n]$ ، $Y = [y_1, \dots, y_n]$ و X ماتریس رتبه کامل باشد، آنگاه مسأله معکوس مقادیر ویژه ماتریس قابل حل است؛ اگر ماتریس $Y - SX$ برای $S \in \sigma(YX^t)$ رتبه کامل باشد. [۳۶]

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم مسأله معکوس مقدار ویژه قابل حل است، یعنی A ای موجود باشد که:

$$AX = Y \quad (53.3)$$

با فرض برقراری تساوی زیر داریم:

$$A = YX^t + W \quad (54.3)$$

که در آن W ماتریس دلخواه $n \times n$ و $WX = 0$ است. برای ساختن W ابتدا با تجزیه QR داریم:

$$X = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (55.3)$$

قرار می‌دهیم $W = ZQ_2^t$ ، در نتیجه داریم:

$$A = YX^t + ZQ_2^t \quad (56.3)$$

حال اگر ثابت کنیم جفت ماتریس‌های YX^t و Q_2^t کاملاً مشاهده پذیرند، بنا به قضیه (۱.۳.۳)، ماتریس $K = Z$ موجود است، به طوری که:

$$\sigma(YX^t + ZQ_2^t) = \sigma(A) = \mathcal{L} \quad (57.3)$$

و در نتیجه ماتریس A پیدا شده و مسأله مقدار ویژه معکوس حل می‌شود. ماتریس مشاهده‌پذیر (۵۶.۴) را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} YX^t - SI_n \\ Q_2^t \end{bmatrix} \quad (58.3)$$

رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} Y - SX & * \\ \circ & I_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YX^t - SI_n \\ Q_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Q_2 \end{bmatrix} \quad (۵۹.۳)$$

حال با توجه به اینکه $[X \quad Q_2]$ رتبه کامل است، می‌دانیم رتبه کامل بودن ماتریس (۵۶.۴) بستگی به رتبه کامل بودن $Y - SX$ دارد. پس اگر $Y - SX$ رتبه کامل باشد، آنگاه جفت ماتریس‌های YX^t و Q_2^t کاملاً مشاهده‌پذیر است و در نتیجه مقدار ویژه معکوس قابل حل است.

□

مشاهده می‌شود که ابتدا یک مسأله مقدار ویژه معکوس را به یک مسأله تخصیص مقدار ویژه تبدیل شده و سپس شرط حل‌پذیری این مسائل را بیان کردیم. قابل توجه است که یک مسأله تخصیص مقدار ویژه نیز می‌تواند به یک مسأله مقدار ویژه معکوس تبدیل شود. فرض کنید جفت ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ کاملاً کنترل‌پذیر و رتبه کامل باشد. با تجزیه QR ماتریس B داریم:

$$B = \begin{bmatrix} U_0 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ \circ \end{bmatrix} \quad (۶۰.۳)$$

که در آن $[U_0 \quad U_1]$ ماتریس‌هایی متعامد و R ماتریس بالامثلثی نامنفرد است و U_1^t بردارهای پایه فضای بوج ماتریس B^t هستند. معادله زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} * & A^t U_1 - S U_1 \\ I_m & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t - S I_n \\ B^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & U \end{bmatrix} \quad (۶۱.۳)$$

چون $[B \quad U_1]$ رتبه کامل و ماتریس مشاهده‌پذیری A و B نیز رتبه کامل است، $A^t U_1 - S U_1$ نیز رتبه کامل است. بنا به قضیه (۳.۳.۳) مسأله مقدار ویژه معکوس برای ماتریس $A^t U_1$ و ماتریس رتبه کامل U_1 و مقادیر ویژه $\sigma(A^t U_1 U_1^t) = \sigma(A^t)$ قابل حل است. یعنی ماتریس \tilde{A} موجود است به طوری که:

$$\begin{cases} \tilde{A} U_1 = A^t U_1 \\ \sigma(\tilde{A}) = \mathcal{L} \end{cases}$$

حال سیستم $\tilde{A} = A + BK$ را در نظر می‌گیریم، که در آن ماتریس A و B کاملاً کنترل‌پذیراند. ماتریس پس‌خورد حالت برای این سیستم حلقه بسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K = B^\dagger (\tilde{A} + A) \quad (۶۲.۳)$$

که در آن B^\dagger معکوس مورپنروز ماتریس B است. محاسبات مستقیم زیر به ما ثابت می‌کند که K همان ماتریس مورد نیاز است.

$$\begin{aligned} A + BK &= A + BB^\dagger(\tilde{A} - A) & (۶۳.۳) \\ &= A + U_0 U_0^t (\tilde{A} - A) \\ &= A + \tilde{A} - A \\ &= \tilde{A} \end{aligned}$$

که در آن $B^\dagger = R^{-1}U_0^t$ ، $B = U_0 R$ و رابطه $UU_0 = I$ برقرار می‌باشد. در بخش بعدی، ابتدا مسأله تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی و مسأله مقدار ویژه معکوس را برای چهار مجموعه مستقل خطی بررسی می‌کنیم، و سپس روش حل خود با استفاده از مسائل مقدار ویژه معکوس را ارائه می‌دهیم.

۳.۳.۳ مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی

[۳۷]

سیستم کنترل‌پذیر خطی مستقل از زمان با پس‌خورد خروجی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= Ax(i) + Bu(i) & (۶۴.۳) \\ y(i) &= Cx(i) \end{aligned}$$

به طوری که بردار حالت $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و بردار ورودی $u(t) \in \mathbb{R}^m$ و بردار خروجی $y(t) \in \mathbb{R}^r$ باشند. با فرض $1 \leq m \leq n$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ، به ترتیب ماتریس حالت، ورودی و خروجی هستند.

مسئله تخصیص مقادیر ویژه، یافتن ماتریس پس‌خورد خروجی K است، به طوری که سیستم حلقه بسته

$$x(i+1) = (A + BKC)x(i) \quad (۶۵.۳)$$

دارای قطب‌های از پیش تعیین شده در مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشند.

تعریف ۴.۳.۳. مسأله مقدار ویژه معکوس ماتریسی برای چهار مجموعه از بردارها [۳۷]

چهار مجموعه‌ی مستقل خطی از بردارهای n -بعدی حقیقی

$$x_1, x_2, \dots, x_p \quad y_1, y_2, \dots, y_p$$

$$x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q} \quad y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{p+q}$$

که در آن $p+q \leq n$ است و مجموعه‌ی داده شده‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را در نظر بگیرید، در یک مسأله مقدار ویژه معکوس ماتریسی هدف یافتن ماتریس K است که:

$$Ax_i = y_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (۶۶.۳)$$

$$A^t x_j = y_j \quad j = p+1, \dots, p+q \quad (۶۷.۳)$$

و طیف مقادیر ویژه‌ی ماتریس A برابر با مجموعه‌ی داده شده‌ی \mathcal{L} باشد:

$$\sigma(A) = \mathcal{L} \quad (۶۸.۳)$$

و در آن فرض می‌کنیم که \mathcal{L} تحت اعداد مختلط بسته است:

$$\lambda \in \mathcal{L} \iff \bar{\lambda} \in \mathcal{L} \quad (۶۹.۳)$$

اگر قرار دهیم

$$X_r = [x_1, \dots, x_n]$$

$$X_l = [x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}]$$

$$Y_r = [y_1, y_2, \dots, y_p]$$

$$Y_l = [y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{p+q}]$$

در صورت وجود ماتریس A آنگاه شرط سازگاری زیر باید برقرار باشد:

$$X_l^t Y_r = Y_l^t X_r \quad (۷۰.۳)$$

قضیه ۵.۳.۳. اگر شرط (۷۰.۳) برقرار باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای وجود ماتریس A این است که بردارهای S_u^i و S_v^i و $u_i \in S_u^i$ و $v_i \in S_v^i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ موجود باشد [۳۷]؛ به طوری که

$$u_i^t v_j = \sigma_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (۷۱.۳)$$

که در آن S_u^i و S_v^i به ترتیب فضای پوچ $(\lambda_i X_l^t - Y_l^t)$ و $(\lambda_i X_r^t - Y_r^t)$ است. اگر U_i موجود باشد آنگاه برای به دست آوردن ماتریس A داریم:

$$A = T \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} T^{-1} \quad (۷۲.۳)$$

$$T = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (73.3)$$

$$T^{-1} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (74.3)$$

اگر بردارهای پایه S_u^i و S_v^i را به ترتیب ماتریس S_u^i و S_v^i بنامیم، آنگاه بردار u_i به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_i = S_u^i x_i \quad (75.3)$$

$$v_i = S_v^i y_i \quad (76.3)$$

از معادله (71.3) به دست می‌آوریم:

$$x_i^t (S_u^i)^t S_v^j y_j = \sigma_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (77.3)$$

به این ترتیب، توانستیم مسأله مقدار ویژه معکوس را به یک سیستم با n^2 معادله‌ی غیر خطی تبدیل کنیم. اگر این سیستم غیر خطی را به یک سیستم با n^2 معادله خطی تبدیل کنیم، آنگاه مسأله مقدار ویژه معکوس را حل نمویم. در ادامه با شرح روشی به دنبال رسیدن به این مهم می‌باشیم. بعد ماتریس S_u^i برابر با $(n - q)$ است و بعد ماتریس S_v^j برابر با $(n - p)$ می‌باشد، برای تعداد اسکالرهای معادله (77.3) داریم که:

$$n(n - q) + n(n - p) = 2n^2 - n(q + p) \quad (78.3)$$

با توجه به شرط $(q + p) \leq n$ ، تعداد اسکالرهای مجهول محاسبه شده در (78.3) از n^2 بزرگتر می‌باشند و معادله‌ی (77.3) دارای جواب خواهد بود. [۱۸]

حال باید به دنبال تبدیل مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی به یک مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس باشیم. یک سیستم حلقه بسته کنترلی برای سیستم‌های گسسته خطی را با معادله $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ نمایش می‌دهیم.

ماتریس پس‌خورد خروجی یک سیستم را با $u(x) = KC$ تعریف می‌کنیم. با جایگزینی شرط پس‌خورد خروجی در سیستم حلقه بسته معادله کلی $\Gamma = (A + BKC)$ خواهیم داشت؛ در بخش بعد مقادیر ویژه این سیستم یعنی $\Gamma = \tilde{A}$ بررسی می‌شود.

قابل ذکر است که، در مسائل پس‌خورد خروجی هدف به دست آوردن ماتریس K به طوری که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته پایدار گردد. حال در ادامه اگر ماتریس U_1 و V_1 که به ترتیب ماتریس‌های به دست آمده از بردارهای پایه‌ی فضای پوچ B_t و C می‌باشد و با فرض $\tilde{A} = A + BKC$ که در آن $A + BKC$ ماتریس حلقه بسته است، به دست می‌آوریم:

$$\tilde{A}V_1 = (A + BKC)V_1 = AV_1 \quad (79.3)$$

$$U_1^t \tilde{A} = U_1^t (A + BKC) = U_1^t A \quad (80.3)$$

با قرار دادن $X_r = V_1$ ، $X_l = U_1$ و $Y_r = AV_1$ و $Y_l = A^t U_1$ ، داشتن مجموعه‌ی \mathcal{L} مسأله‌ی تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی، به مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس ماتریسی تبدیل می‌شود که هدف آن، یافتن ماتریس \tilde{A} است، به طوری که مقادیر ویژه ماتریس \tilde{A} ، مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد. با بررسی شرط سازگاری زیر:

$$X_l^t Y_r = X_l^t A V_1 = U_1^t A V_1 = Y_l^t X_r \quad (۸۱.۳)$$

می‌بینیم که ماتریس‌های U_1 و V_1 در تجزیه QR ماتریس‌های A و B صدق می‌کند:

$$B = \begin{bmatrix} U_0 & U_1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^t \\ V_1^t \end{bmatrix} \quad (۸۲.۳)$$

که در آن $[U_0 \ U_1]$ و $[V_0^t \ V_1^t]$ ماتریس‌هایی متعامد هستند. در صورت وجود \tilde{A} پس خورد خروجی K به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = B^\dagger (\tilde{A} - A) C^\dagger \quad (۸۳.۳)$$

از معادله‌های $B^\dagger = R^{-1} U_0^t$ و $C^\dagger = V_0 S^{-1}$ و ماتریس حلقه بسته زیر، مقادیر ویژه تخصیص می‌یابند:

$$\begin{aligned} A + BK &= A + BB^\dagger (\tilde{A} - A) \\ &= A + U_0 U_0^t (\tilde{A} - A) \\ &= A + \tilde{A} - A \\ &= \tilde{A} \end{aligned}$$

۴.۳.۳ الگوریتم روش مقدار ویژه معکوس

جواب‌های مسأله‌ی مقدار ویژه معکوس ماتریسی یا تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی، به حل سیستم معادلات خطی زیر بستگی دارد:

$$\begin{aligned} x_i^t (S_u^i)^t S_v^j y_j &= \sigma_{ij} & i, j &= 1, \dots, n \\ x_i^t S_{ij} y_j &= \sigma_{ij} & i, j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

که در آن $(S_u^i)^t S_v^i = S_{i,j}$ است. برای حل دستگاه بالا به صورت تصادفی برای y_i ها مقادیر اولیه تعیین می‌کنیم، آنگاه دستگاه فوق به n سیستم معادلات خطی با یک مجهول تبدیل می‌شود:

$$x_i^t [S_{i,1}y_1, S_{i,2}y_2, \dots, S_{i,n}y_n] = e_i^t \quad (۸۴.۳)$$

$$x_i^t A_i = e_i^t \quad (۸۵.۳)$$

که در آن e_i ، i مین ستون از ماتریس همانی I است. این احتمال وجود دارد که، معادلات بالا دارای جواب نباشند یا بی‌نهایت جواب داشته باشند، اما با استفاده از معکوس مور-پنروز می‌توانیم بهترین جواب تقریبی را به دست آوریم: [۲۰]

$$x_i^t = e_i^t A_i^\dagger \quad (۸۶.۳)$$

اگر در مرحله اول از x_i و y_i محاسبه شده در یک تکرار، جواب معادله‌ی (۷۷.۳) باشند، فرآیند را متوقف می‌کنیم. در غیر این صورت، x_i های به دست آمده به وسیله‌ی مقادیر تقریبی را در (۷۸.۳) جایگزین کرده و n سیستم از معادلات خطی زیر با y_i های مجهول را حل می‌کنیم:

$$[x_1^t S_{1,j}, x_2^t S_{2,j}, \dots, x_n^t S_{n,j}] y - j = e_j \quad (۸۷.۳)$$

$$B_i y_i = e_i \quad (۸۸.۳)$$

همانند قبل، بهترین تقریب برای y_i ها را، با استفاده از معکوس مور-پنروز به دست می‌آوریم:

$$y_j = B_j^\dagger e_j \quad (۸۹.۳)$$

این فرآیند، تا جایی که مقدار خطا کمتر از رابطه زیر شود، ادامه می‌دهیم:

$$E = \sum_i \sum_j [(x_i^t S_{i,j} y_j - \sigma_{ij})^2]^\dagger \quad (۹۰.۳)$$

ملاحظه ۶.۳.۳. همان‌طور که بررسی کردیم، در تبدیل مسائل تخصیص مقدار ویژه با پس‌خورد خروجی به مسائل مقدار ویژه معکوس، به دو دلیل فضای پوچ B^t و C نقش مهمی دارند.

۱- مقدار ماتریس K مهم نیست، زیرا در معادله (۷۹.۳) حذف می‌شود:

$$\tilde{A}V_1 = AV_1 \quad (۹۱.۳)$$

$$\tilde{A}^t U_1 = A^t U_1 \quad (۹۲.۳)$$

۲- اگر بردار ویژه‌ی A در یکی از این فضاها باشد، آنگاه مقدار ویژه مربوط به این بردار ویژه در کنترل پس‌خورد تغییر نمی‌کند. اگر $AV = \mu V$ و $V \in \text{null}(C)$ و یا $V \in \text{null}(B)$ باشد، آنگاه

$$\tilde{A}V = AV + BKCV = AV = \mu V$$

بنابراین برای برقراری شرط پایداری سیستم باید شروطی را اعمال کنیم. بنا به قضیه‌ی زیر اگر سیستم کنترل‌پذیر یا مشاهده‌پذیر باشد پایداری تضمین خواهد شد.

قضیه ۰۷.۳.۳. سیستم (۶۴.۳) کنترل‌پذیر است، اگر و فقط اگر، هیچ بردار ویژه‌ی چپ ناصفر A موجود نباشد، به طوری که در فضای پوچ B^t قرار داشته باشد و مشاهده‌پذیر است اگر و فقط اگر هیچ بردار ویژه‌ی راست ناصفر A موجود نباشد به طوری که در فضای پوچ C قرار داشته باشد.

برهان. اگر یک بردار ویژه‌ی ناصفر U موجود باشد، به طوری که $U^t A = \lambda U^t$ و $U^t B = 0$ داریم که:

$$U^t [B, AB, \dots, A^{n-1} B] = [U^t B, \lambda U^t B, \dots, \lambda^{n-1} U^t B] = 0 \quad (۹۳.۳)$$

اگر ماتریس کنترل‌پذیری $[B, AB, \dots, A^{n-1} B]$ رتبه کامل باشد، سیستم کنترل‌پذیر است. اما در سیستم بالا رتبه ماتریس کمتر از n است، در نتیجه ماتریس کنترل‌پذیر نیست. برعکس، اگر سیستم کنترل‌پذیر نباشد، می‌توان یک بردار غیر صفر بیابیم به طوری که:

$$U^t [B, AB, \dots, A^{n-1} B] = [U^t B, U^t AB, \dots, U^t A^{n-1} B] = 0 \quad (۹۴.۳)$$

که تمام U ها، یک زیرفضای خطی که تحت A^t ثابت هستند را می‌سازند. در حقیقت خواهیم داشت:

$$(A^t U)^t [B, AB, \dots, A^{n-1} B] = [U^t AB, U^t A^2 B, \dots, U^t A^n B] = 0 \quad (۹۵.۳)$$

در ادامه با توجه قضیه‌ی کیلی-همیلتون:

$$A^n = a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_n I \quad (۹۶.۳)$$

می‌توان نتیجه گرفت که، $A^t \cdot U^t A^n B = 0$ یک تبدیل خطی در این زیر فضا به دست می‌دهد، بنابراین باید یک بردار ویژه‌ی چپ A در این فضا باشد که $U^t B = 0$. قسمت دوم به همین صورت اثبات می‌شود.

□

۵.۳.۳ الگوریتم روش جدید

* هدف: حل مسأله تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی (تعیین ماتریس پس خورد K)

* گام اول: (ورودی داده‌ها)

* گام دوم: (آماده سازی)

ماتریسهای X_r و X_l که به ترتیب پایه‌ی فضای پوچ B^t و C هستند را بیابید. سپس $Y_i = A^t X_l$ و $Y_r = A^t X_r$ را محاسبه کرده و فضای پوچ $(\lambda_i X_r - Y_r)$ و $(\lambda_i X_l - Y_l)$ را بیابید.

* گام سوم: (فرآیند تکرار)

با مقدار دهی تصادفی به y_i ، فرآیند تا جایی که خطا به اندازه مورد نظر کوچک شود، ادامه دهید.

* گام چهارم: (ماتریس پس خورد خروجی)

از ماتریس $T = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ ، ماتریسهای

$$\tilde{A} = T \text{diag} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n T^{-1}$$

$$K = B^\dagger (\tilde{A} - A) C^\dagger$$

را بیابید.

با استفاده از یک مثال عددی روند کلی ارائه شده را توضیح می‌دهد.

مثال ۳.۳.۳. سیستم مشاهده‌پذیر و کنترل‌پذیر (۶۴.۳) با ماتریس‌های زیر در نظر بگیرید؛ می‌خواهیم کنترل معکوس سیستم را با استفاده از روش ارائه شده به دست آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$S_v^1 = \begin{bmatrix} 0,5797 & 0,5767 \\ 0,7711 & -0,6053 \\ -0,2452 & -0,5401 \\ 0,0547 & 0,0544 \\ 0,0727 & -0,0571 \\ -0,0231 & -0,0509 \\ 0,0133 & 0,0132 \\ 0,0177 & -0,0139 \\ -0,0056 & -0,0124 \end{bmatrix}, \quad S_v^2 = \begin{bmatrix} -0,0875 & -0,5424 \\ -0,9260 & 0,2401 \\ 0,3516 & 0,7608 \\ -0,0073 & -0,0456 \\ -0,0778 & 0,0286 \\ 0,0295 & 0,0639 \\ 0,0058 & 0,0358 \\ 0,0611 & -0,0224 \\ -0,0232 & -0,0502 \end{bmatrix}$$

$$S_v^3 = \begin{bmatrix} -0,2643 & -0,4655 \\ -0,7299 & 0,5414 \\ 0,4793 & 0,5678 \\ -0,1173 & -0,2067 \\ -0,3241 & 0,2404 \\ 0,2128 & 0,2521 \\ -0,0174 & -0,0307 \\ -0,0482 & 0,0357 \\ 0,0316 & 0,0375 \end{bmatrix}, \quad S_v^4 = \begin{bmatrix} -0,3467 & -0,3693 \\ 0,8895 & -0,4187 \\ 0,2949 & 0,8287 \\ 0,0099 & 0,0105 \\ -0,0254 & 0,0119 \\ -0,0084 & -0,0236 \\ 0,0099 & 0,0105 \\ -0,0253 & 0,0119 \\ -0,0084 & -0,0236 \end{bmatrix},$$

$$S_v^5 = \begin{bmatrix} 0,5825 & 0,5876 \\ 0,7763 & -0,5959 \\ -0,2229 & -0,5396 \\ 0,0520 & 0,0525 \\ 0,0693 & -0,0532 \\ -0,0199 & -0,0482 \\ 0,0128 & 0,0129 \\ 0,0171 & -0,0131 \\ -0,0049 & -0,0119 \end{bmatrix}, \quad S_v^6 = \begin{bmatrix} 0,4940 & 0,6380 \\ 0,8415 & -0,5058 \\ -0,1933 & -0,5715 \\ 0,0495 & 0,0640 \\ 0,0844 & -0,0507 \\ -0,0194 & -0,0573 \\ 0,0118 & 0,0153 \\ 0,0202 & -0,0121 \\ -0,0046 & -0,0137 \end{bmatrix},$$

$$S_v^y = \begin{bmatrix} -0,1430 & -0,6403 \\ -0,9493 & 0,2031 \\ 0,1445 & 0,7008 \\ -0,0348 & -0,1557 \\ -0,2308 & 0,0494 \\ 0,0351 & 0,1704 \\ -0,0064 & -0,0286 \\ -0,0424 & 0,0091 \\ 0,0065 & 0,0313 \end{bmatrix}, \quad S_v^{\lambda} = \begin{bmatrix} 0,5474 & 0,4530 \\ -0,5828 & 0,7908 \\ -0,5736 & -0,3713 \\ 0,0968 & 0,0801 \\ -0,1031 & 0,1399 \\ -0,1015 & -0,0657 \\ 0,0197 & 0,0163 \\ -0,0210 & 0,0285 \\ -0,0207 & -0,0134 \end{bmatrix},$$

$$S_v^{\eta} = \begin{bmatrix} 0,1529 & 0,6895 \\ -0,9460 & 0,2628 \\ -0,2203 & -0,6499 \\ 0,0277 & 0,1251 \\ -0,1717 & 0,0477 \\ -0,0400 & -0,1179 \\ 0,0056 & 0,0253 \\ -0,0347 & 0,0096 \\ -0,0081 & -0,0238 \end{bmatrix}, \quad S_v^{\lambda} = \begin{bmatrix} 0,5474 & 0,4530 \\ -0,5828 & 0,7908 \\ -0,5736 & -0,3713 \\ 0,0968 & 0,0801 \\ -0,1031 & 0,1399 \\ -0,1015 & -0,0657 \\ 0,0197 & 0,0163 \\ -0,0210 & 0,0285 \\ -0,0207 & -0,0134 \end{bmatrix},$$

$$S_u^{\lambda} = \begin{bmatrix} 0,2353 & -0,0223 \\ 0,3048 & -0,0409 \\ 0,0460 & 0,3850 \\ 0,3268 & -0,0310 \\ 0,4233 & -0,0568 \\ 0,0639 & 0,5347 \\ 0,4539 & -0,0430 \\ 0,5879 & -0,0789 \\ 0,0888 & 0,7426 \end{bmatrix}, \quad S_u^{\tau} = \begin{bmatrix} 0,0353 & -0,0238 \\ 0,0477 & 0,0038 \\ 0,0119 & 0,0555 \\ -0,1412 & 0,0952 \\ -0,1908 & -0,0153 \\ -0,0474 & -0,2220 \\ 0,5650 & -0,3810 \\ 0,7633 & 0,0614 \\ 0,1896 & 0,8882 \end{bmatrix},$$

$$S_u^r = \begin{bmatrix} 0,0369 & -0,0184 \\ 0,0473 & 0,0049 \\ 0,0078 & 0,0574 \\ 0,1476 & -0,0736 \\ 0,1893 & 0,0197 \\ 0,0310 & 0,2298 \\ 0,5906 & -0,2943 \\ 0,7573 & 0,0789 \\ 0,1240 & 0,9192 \end{bmatrix}, \quad S_u^f = \begin{bmatrix} 0,1316 & -0,1604 \\ 0,2237 & -0,0112 \\ 0,1034 & 0,2285 \\ -0,2269 & 0,2765 \\ -0,2857 & 0,0194 \\ -0,1782 & -0,3940 \\ 0,3913 & -0,4768 \\ 0,6651 & -0,0334 \\ 0,3073 & 0,6793 \end{bmatrix},$$

$$S_u^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0,2446 & -0,0502 \\ 0,3146 & -0,0850 \\ 0,0979 & 0,3983 \\ 0,2262 & -0,0669 \\ 0,4195 & -0,1133 \\ 0,1306 & 0,5311 \\ 0,4349 & -0,0892 \\ 0,5593 & -0,1511 \\ 0,1741 & 0,7081 \end{bmatrix}, \quad S_u^{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0,2174 & -0,0443 \\ 0,2811 & -0,0614 \\ 0,0757 & 0,3553 \\ 0,3160 & -0,0644 \\ 0,4085 & -0,0893 \\ 0,1100 & 0,5165 \\ 0,4593 & -0,0936 \\ 0,5938 & -0,1298 \\ 0,1599 & 0,7507 \end{bmatrix},$$

$$S_u^Y = \begin{bmatrix} 0,0753 & -0,0306 \\ 0,0990 & -0,0066 \\ 0,0241 & 0,1228 \\ 0,2040 & -0,0828 \\ 0,2684 & -0,0180 \\ 0,0653 & 0,3328 \\ 0,5529 & -0,2244 \\ 0,7274 & -0,0488 \\ 0,1769 & 0,9018 \end{bmatrix}, \quad S_u^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0,1169 & -0,0120 \\ 0,1463 & 0,0147 \\ -0,0040 & 0,1864 \\ 0,2553 & -0,0261 \\ 0,3194 & 0,0320 \\ -0,0087 & 0,4069 \\ 0,5575 & -0,0570 \\ 0,6975 & 0,0699 \\ -0,0191 & 0,8885 \end{bmatrix},$$

$$S_u^q = \begin{bmatrix} 0,1130 & -0,0158 \\ 0,1421 & 0,0102 \\ 0,0019 & 0,1806 \\ 0,2511 & -0,0352 \\ 0,3158 & 0,0227 \\ 0,0042 & 0,4014 \\ 0,5581 & -0,0782 \\ 0,7019 & 0,0504 \\ 0,0093 & 0,8919 \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2,2552 & 1,7793 & 3,0188 & 2,6523 & 3,2057 & 1,7759 \\ -2,4510 & -1,8521 & -3,2222 & -2,9122 & -3,4945 & -2,1673 \\ -0,8268 & -0,4966 & -0,8080 & -0,9324 & -1,4996 & -0,6245 \\ -0,3279 & -0,2155 & -0,1698 & 0,1525 & -0,0712 & -0,1186 \\ 0,4239 & 0,3102 & 0,4616 & 0,3376 & 1,1190 & 0,3104 \\ -0,1692 & -0,1251 & -0,3027 & -0,1449 & -0,5324 & 0,2335 \end{bmatrix}.$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0,1255 & -0,0247 & 0,0753 & 0 & 0 & 0 & 0,0818 & 0 \\ 0 & -0,1102 & 0,0339 & 0,0247 & 0 & 0 & 0 & 0,0662 & 0 \end{bmatrix}.$$

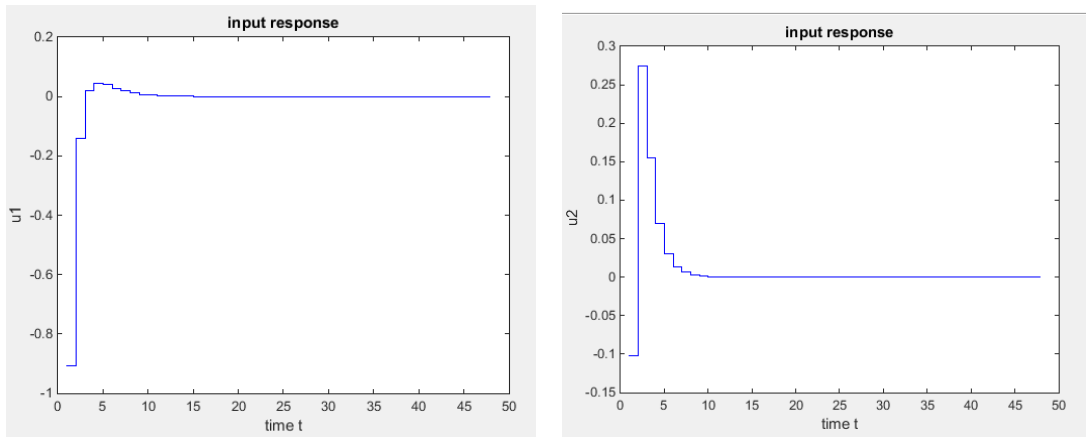
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2,4501 & 1,1955 & 0,6074 & 0 & 0 & 0 & 0,3525 & 0 \\ 0 & 2,1472 & 0,8050 & 0,1135 & 0 & 0 & 0 & -0,1702 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$K_r = \begin{bmatrix} -2,1995 & -1,1005 & -3,8117 & 0,6670 & 2,2557 & 2,1749 \\ -0,5588 & -2,5379 & -4,0638 & 0,4250 & 5,7864 & 2,6011 \\ 3,0812 & 7,4229 & 10,4183 & -1,6652 & -14,0634 & -7,4381 \\ -2,1569 & -2,1571 & -4,073 & 0,2441 & 5,7131 & 3,0273 \\ -0,8411 & -8,1685 & -11,4175 & 2,0765 & 15,7972 & 7,3790 \\ 2,6617 & 6,8170 & 15,8889 & -2,0520 & -15,6397 & -9,8882 \end{bmatrix}.$$

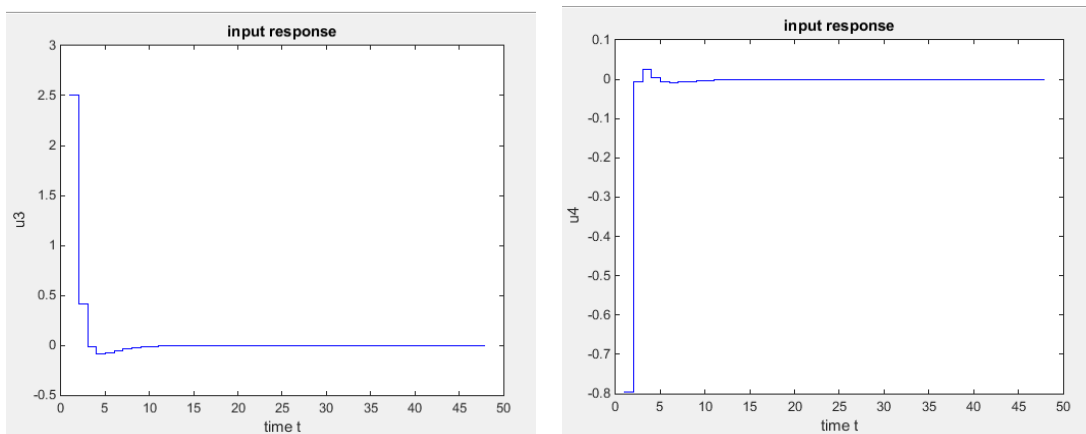
مشاهده می‌کنیم که، مقادیر ویژه سیستم حلقه و \tilde{A} برابر می‌باشند:

$$\tilde{A} = \tilde{\Gamma} = (A + BKC) \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,5 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}$$

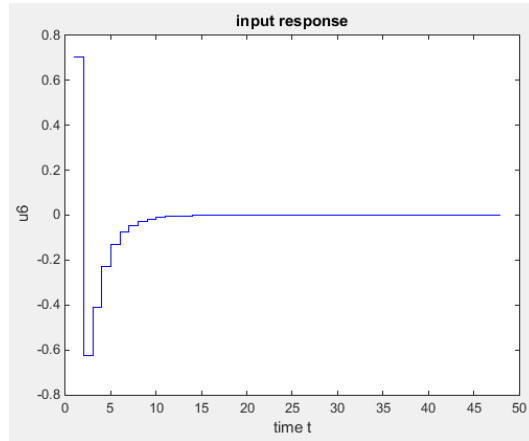
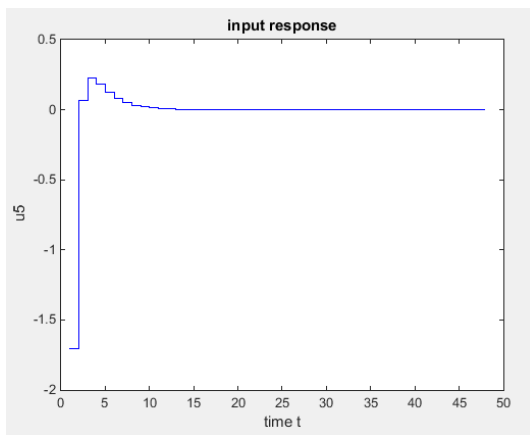
در شکل‌های زیر به ترتیب همگرایی مؤلفه‌های ورودی u_i و مؤلفه‌های حالت x_i به نقطه‌ی تعادل صفر نمایش داده شده است.



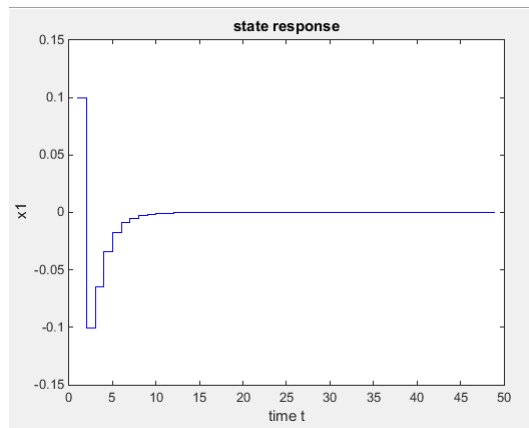
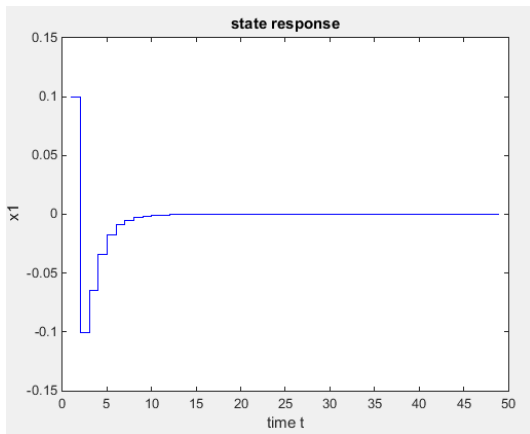
شکل ۱.۳: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



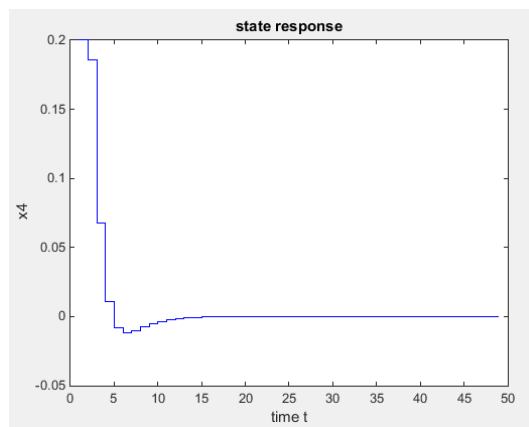
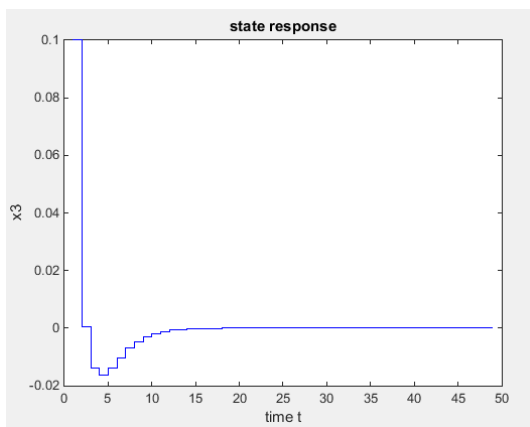
شکل ۲.۳: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



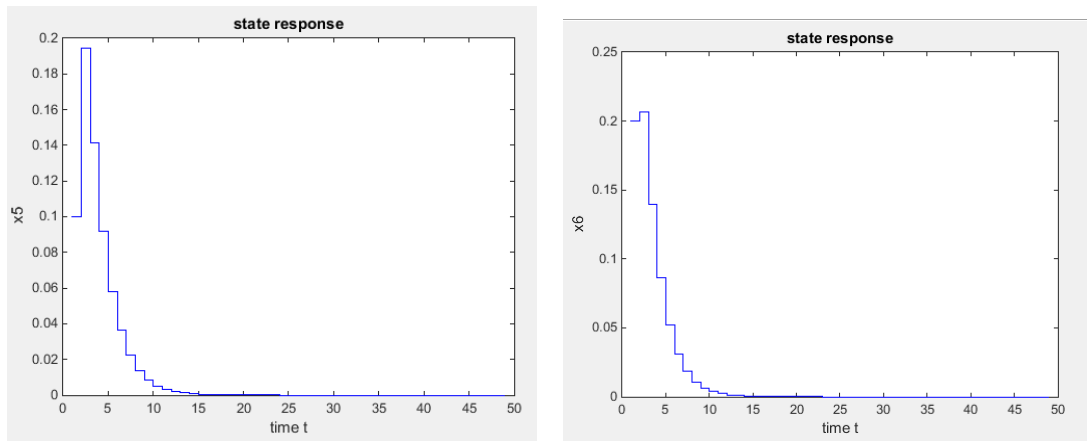
شکل ۳.۳: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



شکل ۴.۳: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



شکل ۵.۳: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



شکل ۶.۳: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند

فصل ۴

کنترل معکوس سیستم‌های مشتق کسری گسسته

۱.۴ پس خورد

۱.۱.۴ تاریخچه

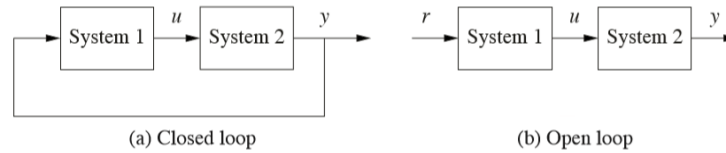
می‌توان گفت که پس خورد^۱ یکی از ویژگی‌های اصلی زندگی است. در این فصل ما مقدمه‌ای بر مفهوم اساسی پس خورد و البته نظم مهندسی مرتبط با کنترل ارائه می‌دهیم. این سوال که چگونه رشد می‌کنیم، پاسخ به استرس‌ها و چالش‌های موجود و تنظیم عواملی مانند درجه حرارت بدن، فشار خون و تنظیم سطح کلسترول و ... همه و همه از طریق پس خورد قابل اجرا می‌باشد. اگر بخواهیم کمی دقیق و از ابعاد ریزتر موضوع را مورد بررسی قرار دهیم حتی تعامل بین پروتئین‌ها در سلول‌ها و گسترش آن به تعامل بین موجودات در اکوسیستم‌های پیچیده از طریق پس خورد قابل اجرا می‌باشد.

پس خورد چیست

سیستم‌های دینامیکی به سیستم‌هایی گویند که رفتار و تغییرات آن‌ها در طول زمان مورد بررسی قرار می‌گیرد و اغلب در پاسخ به تحرک خارجی و یا اجبار ذاتی صورت می‌گیرد. پس خورد اشاره به موقعیتی دارد که در آن دو یا بیشتر سیستم‌های دینامیکی به هم متصل هستند به طوری که هر سیستم اثر می‌گذارد بر دیگری و پویایی خود را قویا به همراه دارد. اینکه در مورد پس خورد استدلال ساده‌ای داشته باشیم بسیار مشکل است؛ زیرا که سیستم اولی بر دومی اثرگذار است و سیستم دومی بر دیگری که منجر به تولید یک سیستم دورانی و یا بازگشتی و اثرگذار بر همدیگر می‌گردد. این استدلال بر اساس رابطه‌ی علت و معمولی است و لازم است که سیستم‌های دارای خواص پس خورد به عنوان یک سیستم کلی مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد.

^۱Feedback

نتیجه این است که رفتار سیستم پس‌خورد اغلب متضاد است و از آن‌رو ضروری است که به روش‌های تفصیلی مراجعه کنیم تا روابط بین آنها قابل درک باشد. در شکل زیر آن را مورد بررسی قرار دادیم.



شکل ۱.۴: سیستم‌های حلقه باز و حلقه بسته

شکل (a) به عنوان یک سیستم حلقه بسته شناخته می‌شود چرا؟ زیرا که خروجی سیستم (۱) به عنوان ورودی سیستم (۲) شناخته می‌شود و خروجی سیستم (۲) به عنوان ورودی سیستم (۱).

شکل (b) اتصال بین سیستم (۲) و (۱) حذف شده است و به سیستم‌های حلقه باز معروف اند. به عنوان نقل قول خوبی نشان می‌دهیم که یک منبع اصلی از سیستم پس‌خورد در زیست‌شناسی می‌باشد. سیستم‌های بیولوژیکی در مقیاس‌های مختلفی و طیف‌های متفاوتی مانند «از مولکول به سلول و از سلول به موجودات زنده و در نهایت به اکوسیستم» استفاده می‌شود. یکی از نمونه‌های تنظیم گلوکز در جریان خون از طریق تولید انسولین و گلوکاگون که توسط لوزالمعده است. هنگامی که سطح گلوکز افزایش می‌یابد (بعد از خوردن غذا) هورمون انسولین آزاد می‌شود و در ادامه بدن برای ذخیره گلوکز در کبد عکس‌العمل نشان داده و سریعاً اقدام می‌کند. و هنگامی که سطح گلوکز پایین است، لوزالمعده هورمون گلوکاگون که دارای اثر مخالف است تولید می‌کند و در جهت عکس عمل می‌کند. (سیستم حلقه بسته)

به این ترتیب خروجی از کبد غلظت اضافی گلوکز در خون است و خروجی از پانکراس میزان انسولین یا گلوکاگون تولید شده است. این فعل و انفعال بین انسولین و گلوکاگون در طول روز به حفظ غلظت ثابت و نرمال خون کمک می‌کند که چیزی در حدود ۹۰ میلی‌لیتر در هر ۱۰۰ میلی‌لیتر از خون است. یک نکته قابل توجه این است که پس‌خورد سیستمی انعطاف پذیر نسبت به تاثیرات خارجی نیز می‌باشد. همچنین می‌تواند برای ایجاد رفتار خطی از اجزای غیرخطی مورد استفاده قرار گیرد، مانند رویکرد عمده‌ای که در الکترونیک دارد.

پس‌خورد در همه سیستم‌ها اعم از سیستم‌های طبیعی و مهندسی کاربردهای بسیاری دارد که نمونه‌هایی از آنها را در ادامه می‌بینید؛ سیستم‌های کنترل و حفظ محیط زیست، نور و قدرت در ساختمان‌ها و کارخانه‌ها، تنظیم عملکرد اتومبیل‌ها، لوازم الکترونیکی مصرفی و فرآیندهای تولید آنها، سیستم‌های حمل و نقل و ارتباطات، افزایش چشمگیر دقت در ابزارهایی مانند میکروسکوپ‌های نیروگاه اتمی (AFMS) و تلسکوپ فراهم می‌آورد، کاربردها در طبیعت؛ در سیستم‌های بیولوژیکی حفظ حرارت، شیمیایی و شرایط بیولوژیکی پیچیده از طریق پس‌خورد انجام پذیر است.

از سوی دیگر مقیاس‌های اندازه و اندازه‌گیری، دینامیک جهانی آب و هوا بر تعاملات پس‌خورد بین

جو، اقیانوس‌ها، زمین و خورشید بستگی دارد. اکوسیستم‌ها نیز با نمونه‌هایی از پس‌خورد به دلیل فعل و انفعال‌های بین حیوانات و حیات گیاهی برخورد می‌کند. در نهایت حتی پویایی اقتصاد در پس‌خورد بین افراد و شرکت‌ها از طریق بازار و مبادله کالا و خدمات است.

۲.۴ سیستم‌های کسری

۱.۲.۴ مقدمه

دانشجویان علوم ریاضی و علوم مهندسی، با عمل‌گرهای دیفرانسیلی $\frac{d}{dx}$ و $\frac{d^2}{dx^2}$ ، سر و کار دارند؛ اما احتمالاً عده‌ی کمی از آن‌ها راجع به اینکه « آیا لازم است مرتبه‌ی مشتق‌گیری، یک عدد صحیح باشد ». فکر می‌کنند و می‌پرسند که چرا مرتبه‌ی مشتق یک عدد گویا، کسری، گنگ یا حتی یک عدد مختلط نیست؟ در بدو پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال فعلی، لایبنیز^۲، خودش در نامه‌ای به هوییتال در ۱۶۹۵، این سوال را مطرح کرد: « می‌توان مفهوم مشتقات با مرتبه‌ی صحیح را به مشتقات با مرتبه غیر صحیح تعمیم داد؟ » هوییتال^۳، تا حدی راجع به مرتبه کسری کنجکاو بود و در سوالی دیگر به لایبنیز پاسخ داد: « اگر مرتبه $\frac{1}{2}$ باشد، چه می‌شود؟ » لایبنیز، در نامه‌ای به تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ پاسخ داد: « این سبب یک تناقض می‌شود که روزی نتایج مفیدی را در پی خواهد داشت ». سوال مطرح شده توسط لایبنیز در مورد مشتق مرتبه غیر صحیح، موضوعی است که حدود بیش از ۳۰۰ سال در حال توسعه است، به آن حسابان کسری می‌گویند که تعمیمی از دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری معمولی از مرتبه دلخواه (غیر صحیح) است. [۳]

*** کاربرد سیستم‌های مرتبه‌ی کسری اعم از گسسته و پیوسته

** پیاده‌سازی عمل‌گرهای مرتبه کسری زمان گسسته در صنعت خصوصاً مهندسی رباتیک و سایر شاخه‌های مهندسی برق و مکانیک بسیار حایز اهمیت است. گام کلیدی در پیاده‌سازی دیجیتالی تابع انتقال مرتبه کسری، محاسبه عددی یا گسسته سازی مشتق‌گیر مرتبه کسری است. روش‌های زیادی برای گسسته سازی وجود دارد که متناسب با نوع سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برازش حوزه فرکانس در حوزه زمان پیوسته، گسسته کردن برازش یک تابع تبدیل، بسط کسری پیوسته‌ی عمل‌گر توستین از روش‌های گسسته سازی سیستم‌های کسری و استفاده از آن‌ها می‌باشد. به این صورت که اگر پاسخ فرکانسی عمل‌گر مرتبه کسری داده شده باشد، پیاده‌سازی به روش گسسته به راحتی با استفاده از روش‌های مختلف به دست می‌آید. چندین روش برای به دست یافتن تقریب‌های تابع تبدیل ورودی - خروجی گسسته زمانی برای کنترل کننده‌های مرتبه کسری وجود دارد. استفاده از تابع متلب (*invfreqe*)^۴ برای تقریب مستقیم اطلاعات پاسخ فرکانسی داده

^۲Leibniz

^۳Hopital

^۴invfreqe

شده است. ابتدا تقریب پیوسته زمانی به دست می‌آید، سپس با استفاده از تابع تبدیل $c2d()$ ، پیاده سازی گسسته زمانی به دست می‌آید.

به طور کلی توابع کسری اعم از پیوسته و گسسته کاربردهای حقیقی زیادی در صنعت دارند مثل؛ شناسایی حوزه فرکانس سیستم‌های مرتبه نسبی، در فرآیندهای الکتروشیمیایی، کنترل موقعیت ربات‌های انعطاف پذیر تک رابط، طراحی کنترل کننده‌های بیرونی، برای حذف اغتشاش‌ها، کنترل خودکار کانال‌های هیدرولیکی با استفاده از کنترل کننده ای - پی - آی مرتبه کسری، مکترونیک، تنظیم خودکار و تجربی سکوها آزمایشگاهی، کنترل سیستم‌های مرتبه کسری برای مبدل‌های کاهنده الکترونیک قدرت.

مرور تاریخی کوتاه

در قرن هجدهم، اویلر و لاگرانژ اولین نظریه‌ای که به این حوزه کمک کرد را مطرح کردند و به نظر می‌رسد، اولین مطالعات قاعده مند در اوایل و اواسط قرن نوزدهم، توسط لوویل، ریمان و هولمگرن صورت پذیرفته است.

لیوویل، اولین کسی بود که توابع را به صورت مجموعه‌ای از نمایی‌ها بسط داد و مشتق مرتبه‌ی n -ام آن را به صورت مشتق‌گیری جمله به جمله با فرض صحیح و مثبت بودن n گسترش داد. ریمان تعریفی متفاوت را با استفاده از انتگرال معین، روی سری‌های توانی با توان‌های غیر صحیح، پیشنهاد نمود. گرونوالد و کراگ، اولین کسانی بودند که نتایج لیوویل و ریمان را ترکیب نمودند. گرونوالد با مراجعه به منابع اصلی و استفاده از تعریف حدی مشتق و رسیدن به تعریف انتگرال معین، مشتق مرتبه n -ام را فرمول کرد. کراگ، با کار کردن روی رابطه‌ی انتگرالی کوشی برای مشتقات معمولی، نشان داد که انتگرال معین ریمان، باید به صورت حد پایین متناهی تفسیر شود؛ در حالی که تعریف لیوویل، حد پایین $-\infty$ را نشان داد. [۳۸]

اول، در سال ۱۸۲۳ اولین کاربرد حسابان کسری را ارائه کرد. او کشف کرد که حل معادله‌ی انتگرالی برای مسأله هم‌زمانی^۵، از طریق انتگرال به شکل مشتق مرتبه‌ی نهم، به دست می‌آید. بعدها در قرن نوزدهم، انگیزه‌ی مهم برای استفاده از حسابان کسری، با روش‌های نمادین بول، برای حل معادلات دیفرانسیلی خطی با ضرایب ثابت و یا حسابان عملیاتی توسعه یافته‌ی هویساید، برای حل مشکلات خاص در نظریه‌ی الکترومغناطیسی مثل خطوط انتقال مطرح شده است.

در قرن بیستم دانشمندان سرشناسی هم چون ویل و هاردی، اردلی، رایسز، اسکات بلر، الدهام اسپاینز به نظریه‌ها و کاربردهای حسابان کسری پرداخته‌اند. [۴۱]

در دهه‌های پایانی قرن گذشته، رشد و کاربردهای حسابان کسری، بیشتر در زمینه کاربردهای مهندسی در حوزه‌های کنترل پس خورد، نظریه سیستم‌ها و پردازش سیگنال‌ها بوده است.

به طور کلی حسابان کسری، دارای تاریخچه‌ای همانند به حسابان مرتبه صحیح است؛ اما به کارگیری آن در مهندسی کنترل، دارای سابقه کوتاهی است. با توجه به ادعای بعضی شرکت‌ها؛ مبنی بر تولید عناصر مرتبه کسری احتمال دارد که در دهه آینده همه سیستم‌ها در فرض اولیه با معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری مدل، با عناصر مرتبه کسری محقق و با کنترل کننده‌های مرتبه کسری، کنترل شوند. [۱۱]

^۵Tautochrone

چرا مرتبه کسری؟

در کنترل پس‌خورد سیستم‌های دینامیکی، بررسی حوزه فرکانسی رفتارهای کنترلی و اثرات آن در رفتار سیستم مورد کنترل رایج است. روشن است که این رفتارها، تحت عناوین تناسبی^۶، مشتقی^۷، انتگرالی^۸، هستند که تاثیراتی روی رفتار سیستم تحت کنترل دارند [۹]:

* تاثیر کنترل‌کننده‌ی تناسبی، افزایش سرعت پاسخ و کاهش خطای حالت ماندگار و پایداری نسبی است.

* تاثیر مشتق افزایش پایداری و حساسیت به نویز است.

* تاثیر انتگرال، حذف خطای حالت ماندگار و کاهش پایداری نسبی است.

۲.۲.۴ انتگرال و مشتق کسری

مشتق کسری تعمیمی از مشتق معمولی است و البته مهمترین خصوصیت این مشتقات، دربرگرفتن تعریف مشتق معمولی است. سیستم‌های با مرتبه مشتق کسری به علت فراهم آوردن خاصیت حافظه سیستم و افزایش کیفیت خروجی و افزایش درجه آزادی در طراحی، اخیراً در بررسی‌های دینامیکی مورد توجه قرار گرفته است.

چندین تعریف متفاوت برای مشتقات کسری مرتبه α وجود دارد که به سادگی می‌توان هر یک از این تعاریف را برحسب دیگری نوشت. مشتق α ام یک تابع به تمامی نقاط قبل از آن نقطه بستگی دارد که، این خاصیت را خاصیت حافظه مشتق گوئیم. با استفاده از تعریف انتگرال مرتبه کسری تعریف شده توسط ریمان-لیوویل، مشتقات مرتبه کسری توسط ریمان-لیوویل و کاپوتو بدست می‌آید. انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_{x_0}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^t (t-z)^{\alpha-1} f(z) dz$$

و برای مشتق مرتبه α ریمان-لیوویل داریم:

$$D_{x_0}^{\alpha} f(t) = D^m (J_{x_0}^{m-\alpha} f(t)) = D^m \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{x_0}^t (t-z)^{m-\alpha-1} f(z) dz \right)$$

و همچنین مشتق α کاپوتو:

$$D_{x_0}^{\alpha} f(t) = J_{x_0}^{m-\alpha} (D^m f(t)) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{x_0}^t (t-z)^{m-\alpha-1} f(z)^m dz \quad m-1 < \alpha \leq 0$$

$$D_{x_0}^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.4)$$

^۶Proportional

^۷Derivative

^۸Integral

۳.۲.۴ مشتق مرتبه کسری گرونوالد-لتنیکوف

برای تعریف سیستم‌های گسسته کسری از مشتق کسری تعریف شده توسط گرونوالد-لتنیکوف استفاده می‌کنیم، که به صورت زیر می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۴. گرونوالد-لتنیکوف [۴۰]

در این قسمت مشتق توابع گرونوالد-لتنیکوف^۹ را معرفی می‌کنیم. یک عملگر مهم در دیفرانسیل کسری بر پایه دیفرانسیل سازی تابع $y(x)$ از مرتبه $n \in \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y^n(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^n y)(x)}{h^n} \quad (2.4)$$

که $\Delta_h^n y$ دیفرانسیلی محدود از مرتبه $n \in \mathbb{N}$ از تابع $y(t)$ و همچنین $h \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}$ تعریف شده است. ویژگی‌های (۲.۴) به وسیله جابه‌جایی مستقیم $n \in \mathbb{N}$ با $\alpha > 0$ برای تعریف مشتق کسری نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه با استفاده از جابه‌جایی h^n به وسیله h^α ، تفاضل متناهی $(\Delta_h^n y)(x)$ به تفاضل کسری $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ از مرتبه $\alpha \in \mathbb{R}$ تبدیل شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\Delta_h^n y)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh) \quad (x, h \in \mathbb{R}, \alpha > 0) \quad (3.4)$$

که $\binom{\alpha}{k}$ ضرایب ترکیب دوجمله‌ای می‌باشند، زمانی که $h > 0$ تفاضل (۳.۴) را تفاضل سمت چپ و برای $h < 0$ تفاضل سمت راست گوئیم. سری (۳.۴) مطلقاً همگراست و برای هر $\alpha > 0$ و برای هر تابع مرزی $y(x)$ برقرار است. برخی از خواص تفاضل کسری $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ را در ادامه می‌آوریم:

الف. اگر $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ آنگاه

$$(\Delta_h^\alpha \Delta_h^\beta y)(x) = (\Delta_h^{\alpha+\beta} y)(x)$$

که برای هر تابع مرز $f(x)$ معتبر است.

ب. اگر $\alpha > 0$ و $y(x) \in L_1(R)$ سپس با استفاده از تبدیل فوریه خواهیم داشت:

$$\mathbf{F} \Delta_h^\alpha y(x) = (1 - e^{ixh})^\alpha (\mathbf{F}y)(x)$$

ج.

$$(\Delta_h^\alpha f)(x) = f(x) \quad \forall \alpha = 0$$

^۹Grunwald-Letnikov

با استفاده از تعاریف بالا مشتق سمت چپ و سمت راست گرونوالد-لتنیکوف تعریف می‌شود:

$$y_+^\alpha(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_h^\alpha y(x)}{h^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad (4.4)$$

$$y_-^\alpha(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_{-h}^\alpha y(x)}{h^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad (5.4)$$

برای هر $y(x) \in L_p \mathbb{R}$ که $(1 \leq p < \infty)$ اگر تابع $y(x)$ داده شده در بازه محدود $[a, b]$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) = (\Delta_h^\alpha y^*)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y^*(x - kh) \quad (x, h \in \mathbb{R}; \alpha > 0) \quad (6.4)$$

با شرایطی که

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x) & , x \in [a, b] \\ 0 & , x \notin [a, b] \end{cases}$$

این قابل قبول است که برای بازنویس تفاضل کسری (۶.۴) در اصطلاحاتی از خود تابع $y(x)$ دوری می‌کنیم. در ادامه به عنوان فرم دیگری از تابع در زیر مشاهده می‌کنید:

$$(\Delta_{h,a+}^\alpha y)(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh) \quad (x \in \mathbb{R}; h > 0; \alpha > 0) \quad (7.4)$$

و همچنین:

$$(\Delta_{h,b-}^\alpha y)(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-x}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x + kh) \quad (x \in \mathbb{R}; h > 0; \alpha > 0) \quad (8.4)$$

سپس با مقایسه (۴.۴) سمت چپ و راست مشتق کسری تابع گرونوالد-لتنیکوف از مرتبه $a > 0$ روی بازه محدود $[a, b]$ به ترتیب زیر تعریف می‌شود:

$$y_{a+}^\alpha(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_{h,a+}^\alpha y)(x)}{h^\alpha} \quad (9.4)$$

$$y_{b-}^\alpha(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_{h,b-}^\alpha y)(x)}{h^\alpha} \quad (10.4)$$

مشتق کسری گرونوالد-لتنیکوف را می‌توان مصادف با مشتق کسری ماچوت^{۱۰} دانست، در فرم زیر آن را نشان می‌دهیم:

^{۱۰}Marchaud

$$y_{a^+}^\alpha(x) = \frac{y(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y(x)-y(t)}{(t-x)^{1+\alpha}} dt \quad (0 < \alpha < 1) \quad (11.4)$$

و:

$$y_{b^-}^\alpha(x) = \frac{y(x)}{\Gamma(1-\alpha)(b-x)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y(x)-y(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \quad (0 < \alpha < 1) \quad (12.4)$$

اکنون این برابری درک مفهوم از همگرایی ویژه در نرم $L_p(a, b)$ می‌باشد. از (۱۱.۴) و (۱۲.۴) فرمول‌های زیر بدست می‌آید:

$$I_{a^+}^\alpha = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (13.4)$$

$$I_{b^-}^\alpha = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{b-x}{h}} (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (14.4)$$

۴.۲.۴ تبدیل سیستم‌های گسسته کسری به سیستم‌های استاندارد

* تبدیل سیستم‌های پیوسته کسری به سیستم‌های گسسته کسری

تعریف دیگری از مشتق کسری که توسط گرونوالد-لتینکوف ارائه شده، به صورت زیر می‌باشد:

$$D^\alpha f(t)|_{t=kh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f((k+1-j)h) \quad (15.4)$$

و تقریب آن بدون استفاده از حد به صورت زیر است:

$$D^\alpha f(t)|_{t=kh} \cong \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f((k+1-j)h) \quad (16.4)$$

با جایگذاری این عملگر در سیستم کسری پیوسته (۱۰.۴)، سیستم متناظر گسسته را بدست می‌آوریم.

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k+1-j} \approx Ax_k + Bu_k \quad (17.4)$$

با انتقال h به سمت راست خواهیم داشت؛

$$\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k+1-j} \approx (h^\alpha A)x_k + (h^\alpha B)u_k \quad (18.4)$$

در ادامه از تعریف عملگر Δ

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k+1-j} \quad (19.4)$$

برای مشتق سیستم‌های گسسته زمانی کسری استفاده می‌شود، که $a \in \mathbb{R}$ مرتبه کسری و

$$\binom{\alpha}{i} = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-i+1)}{i!} & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (20.4)$$

سیستم خطی گسسته کسری با معادلات فضای حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \Delta^\alpha x_{k+1} \cong Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (21.4)$$

که $x_k \in \mathbb{R}^n$ ، $u_k \in \mathbb{R}^m$ و $y_k \in \mathbb{R}^p$ بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند و $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

تعریف ۲۰۲۰۴. جواب سیستم مشتق کسری گسسته

طبق رابطه (۲۱.۴) و همچنین تعریف عملگر $\Delta^\alpha x_{k+1}$ در (۲۰.۴) می‌توانیم معادله سیستم گسسته کسری را به صورت زیر بنویسیم:

$$x_{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \binom{\alpha}{i} x_{k-i+1} = Ax_k + Bu_k \quad (22.4)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (23.4)$$

[۳۳] جوابی از معادله (۲۲.۴) به صورت:

$$x_k = \phi_k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \phi_{k-j-1} B u_j \quad (24.4)$$

است، که در آن ϕ_k توسط معادله زیر تعیین می‌شود:

$$\phi_{k+1} = (A + I_n \alpha) \phi_k + \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j+1} \binom{\alpha}{j} \phi_{k-j+1} \quad (25.4)$$

با ساده‌سازی معادلات خواهیم داشت:

$$x_{k+1} = (A + \alpha I) x_k + \sum_{j=2}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} + B u_k \quad (26.4)$$

با تعریف

$$c_j = (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (27.4)$$

سیستم کسری گسسته به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$x_{k+1} = (A + \alpha I) x_k + \sum_{j=2}^k c_j x_{k-j+1} + B u_k \quad (28.4)$$

به طوری که

$$A_\alpha = A + I_n \alpha$$

توجه داشته باشیم که معادله (۲۸.۴) توصیف یک سیستم استاندارد شده خطی گسسته با تاخیر زمانی در حالت است.

ملاحظه ۳.۲.۴. از رابطه (۲۰.۴) نتیجه می‌گیریم که ضرایب c_j با افزایش j به شدت کاهش می‌یابند.

حال با تعریف بردار حالت

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (29.4)$$

معادله (۲۸.۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A} x_k + \bar{B} u_k \quad (30.4)$$

$$y_k = \bar{C} x_k + \bar{D} u_k, \quad (31.4)$$

و با بکارگیری اصول ضرب ماتریسی خواهیم داشت و با استفاده از معادله (۲۸.۴) با تغییر متغیر (۲۷.۴) سیستم گسسته کسری با مشتق صحیح به صورت سیستم استاندارد با بعد بینهایت بازنویسی می‌شود:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A + \alpha I & c_1 I & c_2 I & \dots \\ I & \circ & \circ & \dots \\ \circ & I & \circ & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (32.4)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \circ \\ \circ \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C \ \circ \ \circ \ \dots], \quad \bar{D} = D \quad (33.4)$$

اما در اینجا با توجه به صعودی بودن بعد ماتریس و متغیرها، این تغییر متغیر نمی‌تواند کمکی به ما کند. برای تبدیل سیستم به صورت یک سیستم استاندارد با بعد متناهی، به طوری که قابل کنترل باشد، تعریف پایداری عملی^{۱۱} که توسط^{۱۲} کاکزورک پیشنهاد شده، [۳۳] در نظر می‌گیریم. در اولین گام با توجه به نزولی بودن ضرایب c_i در (۲۸.۴) با تقریب c_{h+1} به ازای h بزرگ، سیستم را به صورت زیر می‌نویسیم؛

$$x_{k+1} = (A + \alpha I)x_k + \sum_{j=2}^h (-1)^j c_j x_{k-j+1} + Bu_k \quad (34.4)$$

حال با تغییر متغیرها بدست می‌آوریم:

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \\ x_{k-h} \end{bmatrix} \quad (35.4)$$

که

^{۱۱}practical stability

^{۱۲}Kaczorek

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A + \alpha I & c_1 I_n & c_2 I_n & \cdots & c_h I_n \\ I_n & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & I_n & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & I_n & \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}, \bar{B}_k = \begin{bmatrix} B_k \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times m} \quad (36.4)$$

و همچنین

$$\bar{C} = [C \quad \circ \quad \cdots \quad \circ] \in \mathbb{R}^{p \times \bar{n}} \quad \bar{D} = D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

ملاحظه ۴.۲.۴. در تبدیل معادلات گسسته کسری به حالت استاندارد، ابعاد ماتریس با شرط

$$\bar{n} = (1 + h)n$$

بزرگ می‌شود.

توجه داشته باشیم که معادله (۳۴.۴) توصیف یک سیستم استاندارد شده گسسته کسری زمانی با h تاخیر در حالت است.

مثال ۵.۲.۴. سیستم کسری زیر را به سیستم استاندارد تبدیل کنید:

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad \alpha = 0.9, \quad h = 2$$

که در آن تعریف می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

برهان. در این مثال ابعاد $n = 3$ و $m = 3$ و $h = 2$ می‌باشد، بنابراین برای تعیین بعد \bar{n} خواهیم داشت:

$$\bar{n} = (1 + h).n = 9$$

$$c_1 = (1)^{-1} \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} = 0.045 \quad c_2 = 0.165$$

بنابر روش ارائه شده برای A_α داریم:

$$A_\alpha = A + I_n \alpha$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} + I_{0,9} = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & 2 & 3 \\ -2 & 1/9 & -1 \\ 4 & -1 & 2/9 \end{bmatrix}$$

در ادامه \bar{A} و \bar{B} به دست می‌آوریم:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1/9 & 2 & 3 & 0,045 & 0 & 0 & 0,0165 & 0 & 0 \\ -2 & 1/9 & -1 & 0 & 0,045 & 0 & 0 & 0,0165 & 0 \\ 4 & -1 & 2/9 & 0 & 0 & 0,045 & 0 & 0 & 0,0165 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} ۱,۵۶ & ۸ & ۶,۳ & ۰,۰۴۵۰ & ۰ & ۰ & ۰,۰۱۶۵ & ۰ & ۰ \\ -۰,۶۶۶۷ & ۱,۹۰ & -۱,۳ & ۰ & ۰,۰۴۵ & ۰ & ۰ & ۰,۰۱۶۵ & ۰ \\ -۴,۳ & -۳,۰ & -۳,۷۶۶۷ & ۰ & ۰ & ۰,۰۴۵۰ & ۰ & ۰ & ۰,۰۱۶۵ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

حال مطابق با روش ارائه شده در فصل ۳ به روش مقدار ویژه معکوس پس خورد خروجی سیستم استاندارد شده گسسته کسری را می‌یابیم. ماتریس C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۳ \\ ۱ & ۴ & -۴ \\ -۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

حال برای C استاندارد کسری با تغییر ابعاد داریم:

$$C = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & -۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۵ & -۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$S_u^1 = \begin{bmatrix} ۰,۰۰۰۹۹ & ۰,۰۰۰۰ & -۰,۰۰۰۰ \\ -۰,۰۰۰۰ & ۰,۰۰۰۹۹ & -۰,۰۰۰۰ \\ ۰,۰۰۰۰ & ۰,۰۰۰۰ & ۰,۰۰۰۹۹ \\ ۰,۰۹۹۵ & ۰,۰۰۰۰ & -۰,۰۰۰۰۵ \\ -۰,۰۰۰۰ & ۰,۰۹۹۵ & -۰,۰۰۰۰ \\ ۰,۰۰۰۰۵ & ۰,۰۰۰۰ & ۰,۰۹۹۵ \\ ۰,۹۹۵۰ & ۰,۰۰۰۰۵ & -۰,۰۰۰۰۵ \\ -۰,۰۰۰۰۵ & ۰,۹۹۵۰ & -۰,۰۰۰۰۵ \\ ۰,۰۰۰۰۵ & ۰,۰۰۰۰۵ & ۰,۹۹۵۰ \end{bmatrix}$$

$$S_u^r = \begin{bmatrix} 0,0392 & 0,0002 & -0,0008 \\ -0,0002 & 0,0392 & -0,0002 \\ 0,0008 & 0,0002 & 0,0392 \\ 0,1959 & 0,0008 & -0,0040 \\ -0,0008 & 0,1960 & -0,0008 \\ 0,0040 & 0,0008 & 0,1959 \\ 0,9796 & 0,0038 & -0,0200 \\ -0,0039 & 0,9798 & -0,0038 \\ 0,0200 & 0,0039 & 0,9796 \end{bmatrix}$$

$$S_u^r = \begin{bmatrix} 0,0858 & 0,0011 & -0,0040 \\ -0,0012 & 0,0859 & -0,0011 \\ 0,0040 & 0,0012 & 0,0858 \\ 0,2859 & 0,0037 & -0,0134 \\ -0,0039 & 0,2862 & -0,0037 \\ 0,0134 & 0,0039 & 0,2859 \\ 0,9532 & 0,0122 & -0,0447 \\ -0,0128 & 0,9541 & -0,0122 \\ 0,0445 & 0,0128 & 0,9532 \end{bmatrix}$$

$$S_u^r = \begin{bmatrix} 0,1463 & 0,0042 & -0,0125 \\ -0,0047 & 0,1468 & -0,0042 \\ 0,0124 & 0,0047 & 0,1463 \\ 0,3659 & 0,0107 & -0,0314 \\ -0,0116 & 0,3670 & -0,0107 \\ 0,0310 & 0,0116 & 0,3659 \\ 0,9147 & 0,0267 & -0,0784 \\ -0,0291 & 0,9175 & -0,0267 \\ 0,0775 & 0,0291 & 0,9147 \end{bmatrix}$$

$$S_u^{\delta} = \begin{bmatrix} 0,2159 & 0,0116 & -0,0298 \\ -0,0133 & 0,2175 & -0,0116 \\ 0,0291 & 0,0133 & 0,2159 \\ 0,4317 & 0,0233 & -0,0596 \\ -0,0267 & 0,4350 & -0,0233 \\ 0,0582 & 0,0267 & 0,4317 \\ 0,8634 & 0,0465 & -0,1192 \\ -0,0533 & 0,8700 & -0,0465 \\ 0,1162 & 0,0533 & 0,8634 \end{bmatrix}$$

$$S_u^{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0,0099 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & 0,0099 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & 0,0099 \\ -0,0995 & -0,0000 & -0,0005 \\ 0,0000 & -0,0995 & -0,0000 \\ 0,0005 & 0,0000 & -0,0995 \\ 0,9950 & 0,0005 & 0,0050 \\ -0,0005 & 0,9950 & 0,0005 \\ -0,0050 & -0,0005 & 0,9950 \end{bmatrix}$$

$$S_u^{\gamma} = \begin{bmatrix} 0,0392 & 0,0002 & 0,0008 \\ -0,0002 & 0,0392 & 0,0002 \\ -0,0008 & -0,0002 & 0,0392 \\ -0,1959 & -0,0008 & -0,0040 \\ 0,0008 & -0,1960 & -0,0008 \\ 0,0040 & 0,0008 & -0,1959 \\ 0,9796 & 0,0038 & 0,0200 \\ -0,0039 & 0,9798 & 0,0038 \\ -0,0200 & -0,0039 & 0,9796 \end{bmatrix}$$

$$S_u^\wedge = \begin{bmatrix} 0,0858 & 0,0011 & 0,0040 \\ -0,0012 & 0,0859 & 0,0011 \\ -0,0040 & -0,0012 & 0,0858 \\ -0,2859 & -0,0037 & -0,0134 \\ 0,0039 & -0,2862 & -0,0037 \\ 0,0134 & 0,0039 & -0,2859 \\ 0,9532 & 0,0123 & 0,0447 \\ -0,0128 & 0,9541 & 0,0123 \\ -0,0445 & -0,0128 & 0,9532 \end{bmatrix}$$

$$S_u^q = \begin{bmatrix} 0,1463 & 0,0043 & 0,0125 \\ -0,0047 & 0,1468 & 0,0043 \\ -0,0124 & -0,0047 & 0,1463 \\ -0,3659 & -0,0107 & -0,0314 \\ 0,0116 & -0,3670 & -0,0107 \\ 0,0310 & 0,0116 & -0,3659 \\ 0,9147 & 0,0267 & 0,0784 \\ -0,0291 & 0,9175 & 0,0267 \\ -0,0775 & -0,0291 & 0,9147 \end{bmatrix}$$

$$S_v^\wedge = \begin{bmatrix} -0,4076 & -0,0240 & -0,1311 \\ -0,1326 & 0,0290 & 0,4068 \\ -0,0139 & 0,4272 & -0,0350 \\ -0,8560 & -0,0503 & -0,2754 \\ -0,2784 & 0,0609 & 0,8543 \\ -0,0291 & 0,8971 & -0,0735 \\ -0,0673 & -0,0040 & -0,0216 \\ -0,0219 & 0,0048 & 0,0671 \\ -0,0023 & 0,0705 & -0,0058 \end{bmatrix}$$

$$S_v^r = \begin{bmatrix} -0,7149 & 0,2998 & -0,3266 \\ -0,4165 & -0,6665 & 0,2998 \\ 0,1519 & -0,4165 & -0,7149 \\ -0,4557 & 0,1911 & -0,2082 \\ -0,2655 & -0,4249 & 0,1911 \\ 0,0968 & -0,2655 & -0,4557 \\ -0,0590 & 0,0247 & -0,0269 \\ -0,0344 & -0,0550 & 0,0247 \\ 0,0125 & -0,0344 & -0,0590 \end{bmatrix}$$

$$S_v^r = \begin{bmatrix} -0,8317 & 0,3662 & -0,2679 \\ -0,4482 & -0,7500 & 0,3662 \\ 0,0705 & -0,4482 & -0,8317 \\ -0,2772 & 0,1221 & -0,0893 \\ -0,1494 & -0,2500 & 0,1221 \\ 0,0235 & -0,1494 & -0,2772 \\ -0,0457 & 0,0201 & -0,0147 \\ -0,0247 & -0,0413 & 0,0201 \\ 0,0039 & -0,0247 & -0,0457 \end{bmatrix}$$

$$S_v^f = \begin{bmatrix} -0,8487 & 0,3992 & -0,2728 \\ -0,4812 & -0,7504 & 0,3992 \\ 0,0464 & -0,4812 & -0,8487 \\ -0,1830 & 0,0861 & -0,0588 \\ -0,1038 & -0,1618 & 0,0861 \\ 0,0100 & -0,1038 & -0,1830 \\ -0,0350 & 0,0165 & -0,0113 \\ -0,0199 & -0,0310 & 0,0165 \\ 0,0019 & -0,0199 & -0,0350 \end{bmatrix}$$

$$S_v^{\Delta} = \begin{bmatrix} -0,8359 & 0,4279 & -0,3055 \\ -0,5245 & -0,7191 & 0,4279 \\ 0,0371 & -0,5245 & -0,8359 \\ -0,1304 & 0,0667 & -0,0477 \\ -0,0818 & -0,1122 & 0,0667 \\ 0,0058 & -0,0818 & -0,1304 \\ -0,0276 & 0,0141 & -0,0101 \\ -0,0173 & -0,0237 & 0,0141 \\ 0,0012 & -0,0173 & -0,0276 \end{bmatrix}$$

$$S_v^{\epsilon} = \begin{bmatrix} -0,5619 & 0,1824 & 0,2372 \\ 0,2567 & 0,5533 & 0,1824 \\ -0,1539 & 0,2567 & -0,5619 \\ -0,6743 & 0,2189 & 0,2847 \\ 0,3080 & 0,6640 & 0,2189 \\ -0,1847 & 0,3080 & -0,6743 \\ 0,0927 & -0,0301 & -0,0391 \\ -0,0423 & -0,0913 & -0,0301 \\ 0,0254 & -0,0423 & 0,0927 \end{bmatrix}$$

$$S_v^{\gamma} = \begin{bmatrix} -0,9797 & -0,0001 & 0,0000 \\ -0,0001 & 0,9797 & -0,0001 \\ -0,0000 & -0,0001 & -0,9797 \\ -0,1837 & -0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & 0,1837 & -0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & -0,1837 \\ 0,0808 & 0,0000 & -0,0000 \\ 0,0000 & -0,0808 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0808 \end{bmatrix}$$

$$S_v^A = \begin{bmatrix} -0,9696 & 0,2290 & 0,0570 \\ -0,2360 & -0,9422 & -0,2290 \\ -0,0012 & 0,2360 & -0,9696 \\ -0,0323 & 0,0076 & 0,0019 \\ -0,0079 & -0,0314 & -0,0076 \\ -0,0000 & 0,0079 & -0,0323 \\ 0,0533 & -0,0126 & -0,0031 \\ 0,0130 & 0,0518 & 0,0126 \\ 0,0001 & -0,0130 & 0,0533 \end{bmatrix}$$

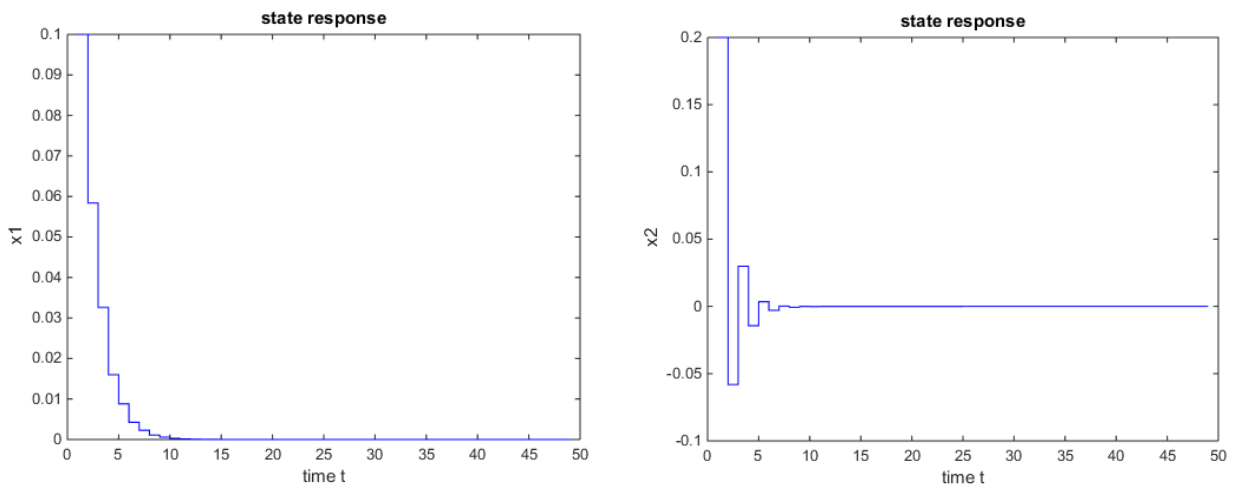
$$S_v^q = \begin{bmatrix} -0,9312 & 0,1476 & 0,3307 \\ -0,3618 & -0,4167 & -0,8329 \\ -0,0149 & 0,8960 & -0,4418 \\ 0,0087 & -0,0014 & -0,0031 \\ 0,0034 & 0,0039 & 0,0078 \\ 0,0001 & -0,0084 & 0,0041 \\ 0,0384 & -0,0061 & -0,0136 \\ 0,0149 & 0,0172 & 0,0344 \\ 0,0006 & -0,0370 & 0,0182 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -0,0403 & 0,0605 & 0,0263 & -0,0214 & 0,0000 & -0,0887 & 0,0763 & 0,0000 & -0,0323 \\ 0,0492 & 0,0775 & 0,0147 & 0,0097 & 0,0000 & 0,1033 & 0,0348 & 0,0000 & -0,0109 \\ -0,0162 & -0,0096 & -0,0445 & -0,0274 & 0,0000 & -0,1121 & 0,0301 & 0,0000 & 0,0382 \end{bmatrix}$$

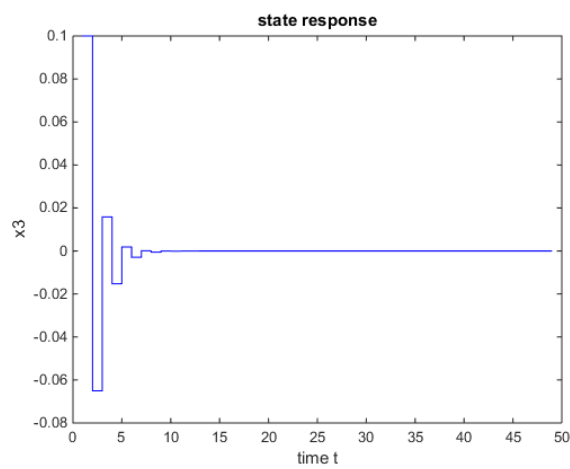
$$y = \begin{bmatrix} 23,9247 & -4,2144 & -29,6647 & 65,6605 & -0,0026 & -22,2423 & 81,2481 & -0,0000 & 142,0456 \\ 15,8573 & -39,7067 & -18,7678 & -7,5073 & -0,0009 & -22,4669 & -122,5031 & -0,0000 & -15,1133 \\ 23,0691 & -36,7121 & 84,2423 & 17,0427 & 0,0000 & -20,2565 & 46,5806 & -0,0000 & -55,5384 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0,2535 & 0,4529 & 1,2580 & -0,1318 & 0,2155 & -0,0306 & 0,0123 & -0,0585 & -0,1086 \\ -0,0953 & 0,5321 & 1,0549 & -0,1770 & 0,2271 & 0,0051 & 0,0250 & -0,0543 & -0,1087 \\ 0,2466 & -0,2388 & -0,2856 & 0,0266 & -0,0175 & 0,1001 & -0,0101 & 0,0124 & 0,0310 \\ 1,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ 0,0000 & -0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 1,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 1,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 1,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}$$

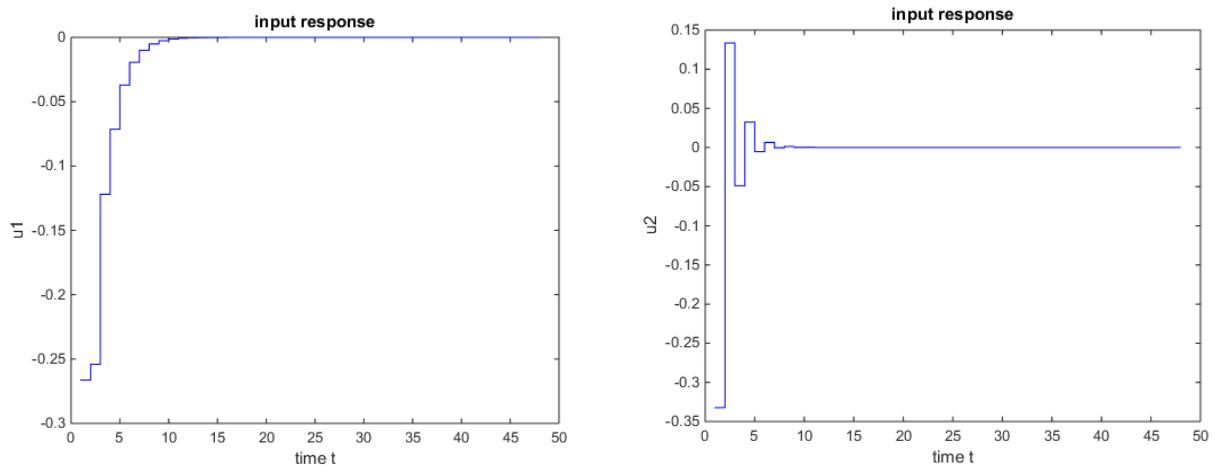
$$K = \begin{bmatrix} -1,9784 & -0,4018 & -0,5190 \\ -0,1169 & 0,0308 & -0,2891 \\ 0,8571 & 0,3075 & 0,0009 \end{bmatrix}$$



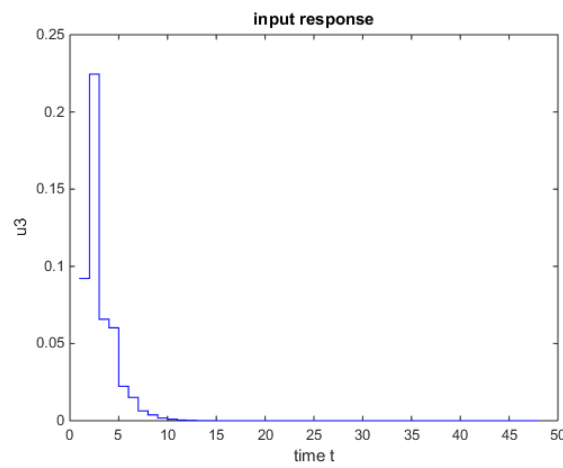
شکل ۲.۴: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



شکل ۳.۴: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



شکل ۴.۴: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



شکل ۵.۴: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند

□

۵.۲.۴ کنترل سیستم‌های گسسته کسری با استفاده از روش پارامترسازی غیر خطی

در فصل ۲ با معادله سیستم گسسته زمانی زیر آشنا شدیم:

$$x_{k+1} = Ax + Bu_k \quad (۳۷.۴)$$

از بخش قبل می‌دانیم که در حالتی که کسری باشد، با تبدیل به سیستم استاندارد ابعاد ماتریس‌های A, B, C و D تغییر می‌کند بنابراین برای معادله حالت سیستم گسسته زمانی کسری خواهیم داشت:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k \quad (38.4)$$

ماتریس پس‌خورد حالت

$$u_k = F\bar{x}_k \quad (39.4)$$

که در آن $F \in \mathbb{R}^{m \times \bar{n}}$ است، در نظر می‌گیریم؛ با جایگزاری (39.4) در (38.4):

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}F\bar{x}_k \quad (40.4)$$

$$= (\bar{A} + \bar{B}F)\bar{x}_k = \Gamma\bar{x}_k \quad (41.4)$$

که Γ ماتریس حلقه بسته سیستم استاندارد می‌باشد. در ابتدای فصل ۲ مسائل تخصیص مقادیر ویژه را مطرح کردیم، یک سیستم گسسته خطی و استاندارد در صورتی پایدار خواهد شد که؛ طیف مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته که با $\Lambda(\Gamma)$ نشان می‌دهیم کنترل گردد و این مهم در صورتی عملی است که در دایره واحد قرار بگیرند.

فرم استاندارد اشلون و فرم همدم برداری برای به دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت را توضیح دادیم.

ماتریس T را ماتریس تبدیل در این عملیات‌ها می‌نامیم، که با انجام عملیات‌های ستونی روی A و ستونی نظیر روی Q به دست می‌آید. همانند مراحل تعریف شده برای سیستم‌های استاندارد برای سیستم‌های گسسته کسری به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \tilde{x} &= S^{-1}T^{-1}\bar{x} \\ \tilde{A} &= S^{-1}T^{-1}\bar{A} \\ \tilde{B} &= S^{-1}T^{-1}\bar{B} \end{cases} \quad (42.4)$$

فرم همدم برداری ماتریس‌های \tilde{A} و \tilde{B} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & & \\ & \dots & \\ I_{\bar{n}-m} & O_{(\bar{n}-m) \times m} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 & \\ & \dots \\ & O_{(\bar{n}-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (43.4)$$

که B_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی است.

ملاحظه ۶.۲.۴. وجود ناورداهای کرونکر باعث آشفتگی در ماتریس همانی $I_{\bar{n}-m}$ خواهد شد، در صورتی نامنظم باشند، بعضی از سطرهای $I_{\bar{n}-m}$ در ماتریس \tilde{A} به صورت نامنظم بخش می‌شوند.

حال ماتریس پس‌خورد حالت در فرم همدم برداری برای سیستم گسسته کسری استاندارد شده را بررسی می‌کنیم:

$$u = -B_o^{-1} G_o \tilde{x} = \tilde{F}_p \tilde{x} \quad (44.4)$$

که \tilde{F}_p ماتریس پس‌خورد حالت اولیه است و ماتریس پس‌خورد حالت سیستم حلقه بسته برابر است:

$$F_p = \tilde{F}_p S^{-1} T^{-1} = -B_o^{-1} G_o S^{-1} T^{-1} \quad (45.4)$$

و برای ماتریس حلقه بسته اولیه نیز؛

$$\tilde{\Gamma}_o = \tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F}_p = \begin{bmatrix} \circ_{m \times n} \\ I_{\tilde{n}-m} \quad \circ_{(\tilde{n}-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (46.4)$$

حال تعریف می‌کنیم $D = \text{diag}\{\lambda_o, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ بنا بر روشی که قبلاً ارائه کردیم $A_\lambda = \tilde{\Gamma}_o + D$ را به دست می‌آوریم و با استفاده از عملیات‌های تشابهی آن را به فرم همدم برداری تبدیل می‌کنیم.

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_o \\ \dots \\ I_{\tilde{n}-m} \quad O_{(\tilde{n}-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (47.4)$$

و سپس ماتریس پس‌خورد حالت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{F} = B_o^{-1} (-G_o + G_\lambda) = -B_o^{-1} G_o + B_o^{-1} G_\lambda F = F S^{-1} T^{-1} = \tilde{F} T^{-1} \quad (48.4)$$

در ادامه روش حل پس‌خورد خروجی را به روش پارامترسازی غیر خطی برای سیستم‌های کسری شرح می‌دهیم. سیستم خطی گسسته زمانی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (49.4)$$

ماتریس پس‌خورد خروجی را به صورت زیر:

$$u_k = y(k) \quad (50.4)$$

در نظر می‌گیریم. با جایگزاری معادله (۵۰.۴) در (۴۹.۴) خواهیم داشت:

$$u_k = KCx_k \quad (51.4)$$

از برابری معادله‌های پس‌خورد حالت $u_k = Fx_k$ و معادله (51.4) به دست می‌آوریم:

$$F = KC \quad (52.4)$$

با تشکیل \tilde{A}_λ ، زیر ماتریس G_λ را تشکیل می‌دهیم:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1\bar{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{m\bar{n}} \end{bmatrix} \quad (53.4)$$

برای چندجمله‌ای مشخصه این سیستم استاندارد شده کسری خواهیم داشت:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda^{\bar{n}} + a_1 \lambda^{\bar{n}-1} + \cdots + a^{\bar{n}-1} \lambda + a^{\bar{n}}) \quad (54.4)$$

می‌دانیم که ریشه‌های این چندجمله‌ای مشخصه مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته می‌باشد.

$$p_{\bar{n}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_{\bar{n}}) \quad (55.4)$$

برای به دست آوردن ضرایب a_i بنا بر فرمول بندی‌های رایج داریم که:

$$\begin{cases} a_1 = (-1)(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{\bar{n}}) \\ a_2 = (-1)^2 \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \\ \vdots \\ a_k = (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \lambda_i \\ \vdots \\ a_{\bar{n}} = (-1)^{\bar{n}} \prod_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i \end{cases} \quad (56.4)$$

با محاسبه چندجمله‌ای مشخصه، ضرایب a_i بر حسب توابعی از پارامترهای آزاد به دست می‌آید؛

$$f_1(g_{11} \cdots g_{m\bar{n}}) = a_1$$

$$\vdots$$

$$f_{\bar{n}}(g_{\bar{n}1} \cdots g_{m\bar{n}}) = a_{\bar{n}}$$

که دستگامی با \bar{n} معادله و $m\bar{n}$ مجهول غیر خطی می‌باشد. راه‌های زیادی برای به دست آوردن این توابع غیر خطی وجود دارد، که می‌توان با استفاده از نرم افزار میپل و متلب آن را حل نمود.

۶.۲.۴ روش پارامتری غیر خطی برای کنترل پس خورد سیستم‌های کسری

ماتریس پس خورد حالت سیستم‌های گسسته کسری استاندارد به صورت زیر می‌باشد:

$$F = B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda) \quad (57.4)$$

بنا بر رابطه (۵۲.۴) هدف یافتن ماتریس پس خورد خروجی K می‌باشد به طوری که سیستم حلقه بسته استاندارد گردد. چون K ماتریس مربعی نیست، ماتریس مربعی $E_{\bar{n} \times \bar{n}}$ را در دو طرف رابطه ضرب می‌کنیم

$$FE = KCE \quad (58.4)$$

اگر در معادله (۵۸.۴) CE همانی گردد، بدیهی است که ماتریس K به دست می‌آید. بنابراین با انجام عملیات ستونی روی C ، ماتریس بلوکی یکه CE می‌نویسیم:

$$CE = [I_r, O] \quad (59.4)$$

و با انجام دوباره عملیات ستونی روی F خواهیم داشت:

$$F_e = FE = KCE = K[I_r \quad 0] = [K \quad O] \quad (60.4)$$

$$[F_{e1} \quad F_{e2}] = [K \quad O] \quad (61.4)$$

با توجه به این که درایه‌های F_{e2} پارامتری می‌باشند لذا می‌توان پارامترها را به گونه‌ای محاسبه نمود تا علاوه بر برقراری دستگاه معادلات غیر خطی به دست آمده $F_{e2} = 0$ گردد، ماتریس K یا ماتریس پس خورد خروجی به دست می‌آید.

* الگوریتم روش جدید

- ۱- ابتدا B_o^{-1} و G_o و T^{-1} را می‌یابیم.
- ۲- ضرایب چندجمله‌ای مشخصه‌ای که ریشه‌ی آن‌ها برابر با طیف مقادیر ویژه‌ی مجموعه Λ باشد را تعیین کنید.
- ۳- چندجمله‌ای مشخصه‌ی P_λ را محاسبه کنید.
- ۴- سیستم غیر خطی پارامترهای g_{ij} را به وسیله معادل قرار دادن ضرایب چندجمله‌ای مشخصه بدست آمده در گام ۲ و ۳ به دست آورید.

۵- ماتریس E را به وسیله عملیات ستونی مقدماتی روی C به طوری که $CE = [I_r \quad O_{r, \bar{n}-r}]$ را مشخص کنید و فرمول زیر را محاسبه کنید:

$$FE = KCE = B^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1}E = [K \quad O_{r, \bar{n}-r}]$$

۶- $m(\bar{n} - r)$ معادله باقیمانده را به وسیله معادل قرار دادن آخرین $(\bar{n} - r)$ ستون حاصل ضرب $B^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1}$ تا صفر بیابید.

۷- حال $\bar{n} + m(\bar{n} - r) \leq \bar{n}m$ مجموعه معادلات غیر خطی را به وسیله الگوریتم نیوتن حل کنید.

۸- این پارامترها را در G_λ قرار داده و K را محاسبه کنید.

مثال ۷.۲.۴. سیستم کسری $\Delta^\alpha = Ax_K + Bu_k$ را با $\alpha = 1/6$ و $h = 2$ ماتریس‌های زیر در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های استاندارد شده متناظر با این سیستم به صورت زیر می‌باشند:

$$A = \begin{bmatrix} -1/4 & 2 & 1/12 & 0 & 1/056 & 0 \\ 3 & -1/4 & 0 & 1/12 & 0 & 1/056 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار متلب B_0 و G_0 و T^{-1} به دست می‌آوریم:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G_0 = \begin{bmatrix} -3/15 & 6/25 & 1/12 & 0 & 1/056 & 0 \\ 1/025 & 2/35 & 0 & 1/12 & 0 & 1/056 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} /25 & -/75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ /25 & /25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & /25 & -/75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & /25 & /25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & /25 & -/75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & /25 & /25 \end{bmatrix}$$

مجموعه مقادیر ویژه را به صورت $\mathcal{L} = \{/1, /2, 3-/1-/2-/3\}$ در نظر می‌گیریم. سپس برای $i = 1, \dots, 6$ خواهیم داشت: $C_1 = 0$ و برای C_4 و $C_2 = -0/14, C_3 = 0, C_5 = 0, C_6 = -3/6 \times 10^{-5}$ و در ادامه به دست می‌آوریم:

$$\det(\tilde{A}_\lambda - I\lambda) \begin{bmatrix} g_{11} - \lambda & g_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ g_{21} & g_{22} - \lambda & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} \end{bmatrix}$$

در این قسمت ماتریس C را یکه می‌کنیم:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

متناسب با فرمول $F = B_0^{-1}(G_\lambda + G_0)T^{-1}$ و معادلاتی بر حسب پارامترها به دست می‌آوریم. در ادامه با حل ۱۴ معادله و ۱۲ مجهول داریم:

$$\begin{bmatrix} g_{11} = 5/3286 & g_{12} = -2/111 & g_{13} = 0/1053 & g_{14} = 0/0041 & g_{15} = -0/0566 \\ g_{21} = 13/4795 & g_{22} = -5/3286 & g_{23} = -0/0018 & g_{24} = 0/0969 & g_{25} = -0/0032 \end{bmatrix}$$

با جایگزینی پارامترهای فوق معادله پس خورد خروجی به صورت یر به دست می‌آید:

$$K = \begin{bmatrix} 3/1544 & -5/324 \\ 1/3877 & -11/8417 \end{bmatrix}$$

فصل ۵

روشی جدید جهت محاسبه ماتریس پس خورد حالت با استفاده از پس خورد خروجی

مساله تخصیص مقدار ویژه سیستم‌های خطی با پس خورد حالت پارامتری در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. در مقاله دکتر کرباسی و طهرانی^۱ در سال ۲۰۰۲ روش بیان شده در مقاله کرباسی و بل^۲ در سال ۱۹۹۳ توسعه یافته و یک روش جدید برای پارامتر سازی ماتریس پس خورد حالت در تخصیص مقادیر ویژه معرفی شده است، و نشان می‌دهد که یک سیستم از معادلات خطی می‌تواند از برابر قرار دادن چند جمله‌ای مشخصه فرم همدم برداری ماتریس حلقه بسته سیستم با چند جمله‌ای ساخته شده توسط مقادیر ویژه دلخواه به وجود بیاید. در مقاله کرباسی [۳۱] همان ایده برای پارامتری کردن ماتریس پس خورد خروجی که مقادیر ویژه دلخواه را به ماتریس حلقه بسته تخصیص می‌دهد، پیشنهاد شده است.

این روش قبلاً در مقاله ایچیکاوا و کاتایاما^۳ بیان شده است. در این مقاله، ماتریس پس خورد خروجی را تحت شروط معینی از ماتریس پس خورد حالت به دست می‌آورد. این فرمول در حالات خاصی کاربرد دارد و در عمل بسیار محدود است. در مقاله کرباسی این محدودیت‌ها برداشته شده است. مشاهده کردیم که سیستم گسسته کسری به سیستم خطی تبدیل کردیم، در ادامه با بررسی این سیستم خطی در حالت کلی به کنترل آن می‌پردازیم. سیستم خطی مستقل از زمان کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر تعریف شده توسط معادله خروجی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \quad (1.5)$$

$$y(i) = Cx(i) \quad (2.5)$$

که در آن $x(i) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $u(i) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی و $y(i) \in \mathbb{R}^m$ بردار خروجی، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

^۱Karbassi and Tehrani

^۲Karbassi and Bell

^۳Ichikawa and Katayama

، $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به ترتیب ماتریس حلقه باز، ورودی و خروجی هستند، و همچنین فرض می‌کنیم $rank C = r$ ، $rank B = m$ ، $m \leq n$ و $mr \geq n$.

هدف این روش، طراحی ماتریس کنترل‌گر پس خورد حالت F ، برای تولید یک سیستم حلقه بسته با مقادیر ویژه مطلوب است. به این منظور، ابتدا با استفاده از تبدیلات تشابهی بیان شده در [۳۱]، ماتریس پس خورد خروجی حالت F ، را فرمول‌بندی کرده سپس با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی، ماتریس حلقه بسته با پس خورد خروجی سیستم را به گونه‌ای محاسبه می‌کنیم که دارای مقادیر ویژه دلخواه از قبل تعیین شده است. در واقع روش بیان شده در [۳۱] بهبود یافته است و نتیجه‌ی آن حذف معادلات غیر خطی می‌باشد. به این ترتیب، این روش برای مسائل با ابعاد بزرگ مفید است. در آخر یک الگوریتم برای نمایش ترتیب مراحل، و یک مثال عددی برای نمایش نتایج این روش ارائه گردیده است.

۷.۰.۵ طرح مسئله

سیستم خطی مستقل از زمان کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر تعریف شده توسط معادله حالت و خروجی (۱.۵) را در نظر بگیرید:

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)y(i) = Cx(i)$$

هدف، یافتن ماتریس کنترل‌گر پس خورد حالت F برای تولید یک سیستم حلقه بسته با مقادیر ویژه مطلوب است. فرض کنید

$$u(i) = Ky(i) \quad (3.5)$$

که در آن، ماتریس کنترل‌گر K با ابعاد $(m \times r)$ طوری انتخاب می‌شود، که ماتریس حلقه بسته‌ی Γ_c

$$x(i+1) = (A + BKC)x(i) = \Gamma_c x(i) \quad (4.5)$$

دارای مقادیر ویژه $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد. ابتدا فرم همدم برداری (\tilde{B}, \tilde{A}) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_o & \\ I_{n-m} & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

که در آن B_o یک ماتریس $(m \times m)$ بالامثلثی و معکوس‌پذیر با عناصر قطری واحد و G_o یک ماتریس $(m \times n)$ است. همانطور که در [۳۱] نشان داده شده است، ماتریس پس خورد حالت به صورت زیر دست می‌آید:

$$F = B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda)\tau^{-1} \quad (6.5)$$

که در آن، G_λ یک زیر ماتریس پارامتری $(m \times m)$ از ماتریس زیر است:

$$\tilde{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} G_\lambda & \\ I_{n-m} & O_{n-m,m} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

و مقادیر ویژه $\tilde{\Gamma}_c$ در $\mathcal{L} = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ می‌باشد. حال باید ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}_c$ را طوری بیابیم، که دارای مقادیر ویژه از پیش تعیین شده Γ باشد. اگر $\tilde{\Gamma}_c$ موجود باشد. می‌توان ماتریس G_λ را بدست آورد. در بخش بعدی، چگونگی استفاده از روش مقدار ویژه معکوس برای یافتن ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}_c$ را توضیح می‌دهیم.

۸.۰.۵ مقدار ویژه معکوس

حال اگر U_1 و V_1 به ترتیب ماتریس‌های تشکیل شده از بردارهای پایه‌ی پوچ \tilde{B}^t و \tilde{C} باشند، با فرض $\tilde{\Gamma}_c = \tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C}$ داریم:

$$\tilde{\Gamma}_c V_1 = (\tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C})V_1 = \tilde{A}V_1 \quad (۸.۵)$$

$$U_1^t \tilde{\Gamma}_c = U_1^t (\tilde{A} + \tilde{B}K\tilde{C}) = U_1^t \tilde{A} \quad (۹.۵)$$

حال با توجه به قضیه (۵.۳.۳)، با قرار دادن $X_R = V_1$ ، $X_L = U_1$ ، $Y_r = \tilde{A}^t V_1$ و $Y_l = \tilde{A}^t U_1$ ، می‌توان ماتریس $\tilde{\Gamma}$ را طوری یافت که طیف مقادیر ویژه‌ی آن مجموعه‌ی \mathcal{L} باشد.

• الگوریتم

(۱) یافتن ماتریس پس‌خورد حالت F

(۲) ماتریس A و B و مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را وارد کنید.

(۳) ماتریس‌های \tilde{A} ، \tilde{B} ، \tilde{C} ، T را بیابید.

(۴) فضای پوچ \tilde{B}^t و \tilde{C} که به ترتیب X_r ، X_l است و $Y_r = AX_r$ و $Y_l = \tilde{A}^t X_l$ و سپس فضای پوچ $(\lambda_i X_r - Y_r)$ و $(\lambda_i X_l - Y_l)$ را بیابید.

(۵) بردارهای X_i و y_i و سپس ماتریس T و $T^{-1} = T \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} T^{-1}$ را محاسبه کنید.

(۶) ماتریس G_λ را بدست آورید.

(۷) ماتریس پس‌خورد حالت را از رابطه $F = B^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T$ محاسبه می‌کنیم.

مثال ۸.۰.۵. سیستم زیر را در نظر بگیرید. هدف به دست آوردن ماتریس پس‌خورد F با استفاده از مقدار ویژه معکوس برای سیستم‌های کسری استاندارد می‌باشد به طوری که مقادیر $\mathcal{L} = \{-0.3, 0, 0.1\}$ به ماتریس حلقه بسته تخصیص داده شود.

$$A = \begin{bmatrix} ۸ & ۹ & ۲ \\ ۹ & ۶ & ۵ \\ ۱ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۷ & ۰ \\ ۹ & ۸ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} ۳۵,۷۲ & ۷۳,۲۲ & -۵۴۵,۷ \\ ۰ & -۱۲,۷۲ & ۹۱,۲۴ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱,۷۷ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} -۰,۴۴ & ۱,۰۸ & -۰,۹۳ \\ -۰,۳۵ & ۰,۵۰ & -۰,۳۳ \end{bmatrix}$$

$$X_l = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad X_r = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad Y_l = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad Y_r = \begin{bmatrix} ۳۵,۷۲۰۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$S_v^l = \begin{bmatrix} ۰ & -۰,۰۲۷۸ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰,۹۹۹۶ \end{bmatrix} \quad S_v^r = \begin{bmatrix} ۰ & -۰,۰۲۸۰ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰,۹۹۹۶ \end{bmatrix} \quad S_v^r = \begin{bmatrix} ۰ & -۰,۰۲۸۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰,۹۹۹۶ \end{bmatrix}$$

$$S_u^l = \begin{bmatrix} ۰ & -۰,۰۲۸۷۳ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰,۹۵۷۸ \end{bmatrix} \quad S_u^r = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad S_u^r = \begin{bmatrix} ۰ & -۰,۰۹۹۵ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰,۹۹۵ \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -۰,۶۱۴۷ & -۰,۷۵۴۱ & ۰,۳۹۳۳ \\ -۰,۱۰۵۵ & -۰,۵۴۴۵ & ۱,۲۳۳۵ \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} ۰,۹۴۴۳ & ۰,۸۰۸۱ & ۰,۴۵۰۵ \\ ۰,۴۵۸۳ & ۰,۱۴۲۸ & ۰,۹۳۰۴ \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} ۰,۰۳۰۳ & ۰ & ۰,۱۲۲۷ \\ -۰,۶۱۴۷ & -۰,۷۵۴۱ & ۰,۳۹۳۳ \\ -۰,۱۰۱۰ & -۰,۵۴۴۵ & ۱,۲۲۷۴ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0,9482 & 0,0797 & -0,1103 \\ -11,9029 & -1,1482 & 1,5902 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0,0303 & 0 & 0,1227 \\ 0,14 & 0,52 & -4,71 \\ -0,02 & -0,06 & 0,62 \end{bmatrix}$$

در ادامه ماتریس پس‌خورد حالت سیستم استاندارد شده کسری را با استفاده از روش بیان شده در این فصل برای اولین بار در این زمینه محاسبه می‌کنیم.

متناسب با گام‌های الگوریتم به ماتریس‌های G_λ و G_0 و B_0^{-1} و T^{-1} نیازمندیم، که در فصل مقدار ویژه معکوس به طور کامل شرح داده‌ایم.

گام‌های (۲) و (۳) و (۴) را در برنامه مقدار ویژه معکوس محاسبه کردیم، حال G_λ را با استفاده از \tilde{A} به دست می‌آوریم:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0,2535 & 0,4529 & 1,2580 & -0,1318 & 0,2155 & -0,0306 & 0,0123 & -0,0585 & -0,1086 \\ -0,0953 & 0,5321 & 1,0549 & -0,1770 & 0,2271 & 0,0051 & 0,0250 & -0,0543 & -0,1087 \\ 0,2466 & -0,2388 & -0,2856 & 0,0266 & -0,0175 & 0,1001 & -0,0101 & 0,0124 & 0,0310 \\ 1,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ 0,0000 & -0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 1,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 1,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 1,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}$$

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} 0,4487 & 1,3138 & 1,1221 & -0,0520 & -0,3919 & -0,3546 & -0,0124 & -0,0514 & -0,0534 \\ 1,0139 & 1,8289 & 2,1392 & -0,1165 & -0,4468 & -0,4527 & -0,0226 & -0,0623 & -0,0973 \\ -0,8843 & -1,5313 & -1,7776 & 0,1016 & 0,4871 & 0,5066 & 0,0228 & 0,0616 & 0,0908 \end{bmatrix}$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 1,5667 & 8 & 6,23 & 0,0450 & 0 & 0 & 0,0165 & 0 & 0 \\ -0,6667 & 1,9 & -1,23 & 0 & 0,0450 & 0 & 0 & 0,0165 & 0 \\ -4,23 & -3 & -3,7667 & 0 & 0 & 0,0450 & 0 & 0 & 0,0165 \end{bmatrix}$$

$$B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{-1} = \begin{bmatrix} -0,3333 & -0,33 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3333 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6667 & -0,33 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,33 & -0,33 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,33 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6667 & -0,3333 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3333 & -0,33 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,33 & 0,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6667 & -0,33 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -۲٫۹۹۶۹ & ۲٫۲۱۴۳ & -۲٫۹۰۶۷ & -۰٫۳۳۴۷ & ۰٫۰۱۹۹ & ۰٫۲۵۷۶ & -۰٫۰۴۳۱ & ۰٫۰۱۰۳ & ۰٫۰۲۴۵ \\ ۱٫۷۳۱۱ & -۱٫۷۴۱۴ & -۱٫۷۹۲۰ & -۰٫۴۲۶۹ & ۰٫۰۲۵۸ & ۰٫۳۳۶۲ & -۰٫۰۸۳۶ & ۰٫۰۱۳۷ & ۰٫۰۷۴۷ \\ ۰٫۶۶۵۹ & -۱٫۳۳۳۱ & ۱٫۴۶۰۰ & ۰٫۴۳۶۲ & -۰٫۰۲۵۴ & -۰٫۳۶۰۰ & ۰٫۰۶۲۵ & -۰٫۰۱۱۸ & -۰٫۰۵۱۵ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Gamma} = (A + BF) = \begin{bmatrix} ۰٫۴۹۹۱ \\ ۰٫۴۰۰۰ \\ ۰٫۲۹۹۸ \\ ۰٫۲۰۲۱ \\ ۰٫۰۹۸۹ \\ -۰٫۴۰۰۷ \\ -۰٫۲۹۹۷ \\ -۰٫۱۹۹۵ \\ -۰٫۱۰۰۰ \end{bmatrix}$$

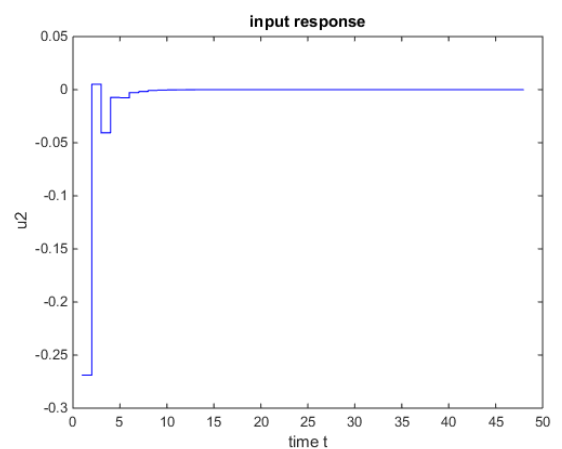
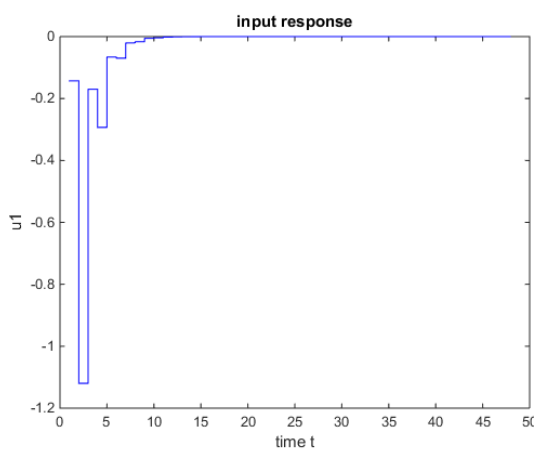
مشاهده می‌کنیم که مقادیر ویژه حاصل بسیار نزدیک به مقادیر ویژه اختصاص شده یعنی

$$\Gamma = \{ /۱, /۲, /۳, /۴, /۵, -/۱, -/۲, -/۳, -/۴ \}$$

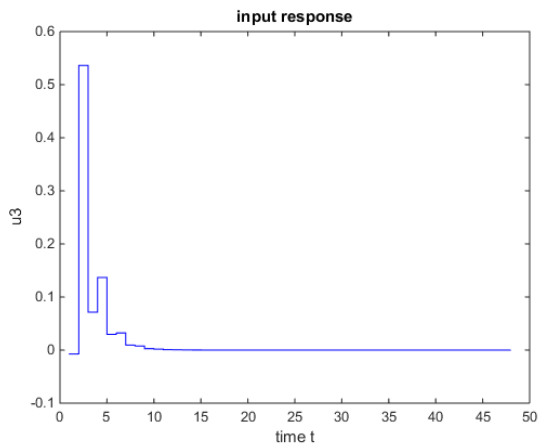
می‌باشد.

با استفاده از نرم افزار متلب همگرایی ماتریس ورودی و ماتریس حالت را به سمت صفر نمایش

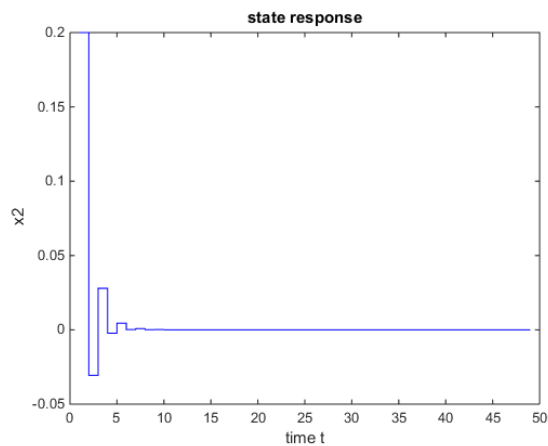
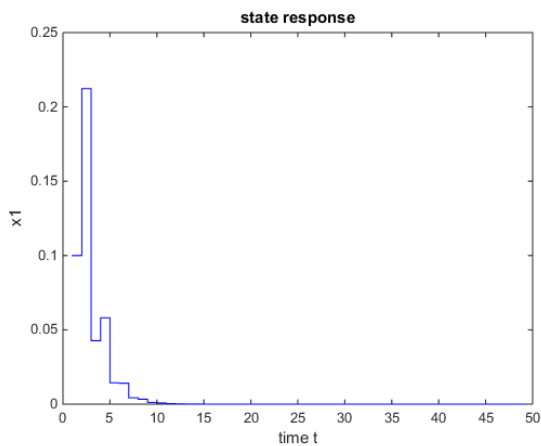
می‌دهیم.



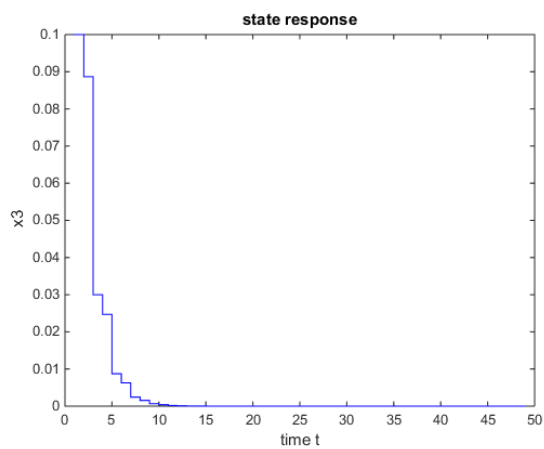
شکل ۱۰۵: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



شکل ۲.۵: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



شکل ۳.۵: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند



شکل ۴.۵: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل همگرا می‌شوند

فصل ۶

نتیجه‌گیری

در فصل سوم روشی را پیشنهاد دادیم که می‌توان با استفاده از آن سیستم‌های گسسته زمانی خطی کسری را به سیستم استاندارد تبدیل کرد. بدین ترتیب ابتدا، تاخیرهای زمانی یک سیستم گسسته زمانی خطی کسری با تاخیر را توسط برخی اعداد طبیعی مانند h محدود کرده و با تعریف یک بردار حالت جدید، سیستم را به یک سیستم در ظاهر بدون تاخیر یا سیستم استاندارد تبدیل کردیم. در ادامه به دنبال کنترل این سیستم در دو حالت می‌باشیم:

(۱) کنترل پس‌خورد حالت

(۲) کنترل پس‌خورد خروجی

مشکل کنترل سیستم‌های کسری در دو نوع گسسته و پیوسته همیشه وجود داشته است، چرا که؛ در آزمایش‌های انجام شده به نتایجی مابین نتایج به دست آمده نیاز پیدا می‌کنیم، که می‌باید مشتق و انتگرال مرتبه کسری برای آن تعریف کنیم در غیر این صورت نمی‌توان داده‌های مورد نیاز را تعریف کرد و به کنترل آن‌ها پرداخت.

حال در ادامه با دو مشکل مواجه می‌شویم:

* اگر سیستم کسری مورد نظر از نوع خطی باشد؛ می‌توان بنا بر روش‌های ارائه شده در این فصل به سیستم استاندارد تبدیل کرده و پیرامون کنترل آن بنا بر روش‌های ارائه شده در ادامه بحث کرد.

* اگر سیستم از نوع غیرخطی باشد؛ در کنترل آن نیاز به المان‌هایی داریم که در این رساله به آن پرداخته نشده است. به عنوان ایده‌ای جهت ارائه برای دانشجویان این رشته، پیشنهاد می‌شود؛ در ادامه این پایان‌نامه با همکاری دانشجویان مهندسی برق به کنترل سیستم‌های غیرخطی پرداخت.

در فصل‌های بعدی؛ روش‌هایی برای پس‌خورد خروجی سیستم ارائه کردیم که هر کدام دارای مزایایی می‌باشد.

روش اول : کنترل معکوس

عموما در روند حل یک سیستم کنترلی یا یک دستگاه معادلات فیزیکی با ماتریس‌های مواجه می‌شویم که منفرد هستند و یا ناسازگارند، بنابراین معکوس پذیر نمی‌باشند و قادر نخواهیم بود به ساده سازی‌های ریاضی بپردازیم. این عدم ناسازگاری مشکلات زیادی برای کنترل انواع سیستم‌ها به همراه دارد.

برای یک دانشجوی ریاضیات این مفهوم معنایی ندارد زیرا که روش‌های زیادی برای تبدیل این ماتریس و معکوس گرفتن از آن وجود دارد. در روش ارائه شده این مشکل بر طرف شده و برای هر نوع ماتریسی روش مورد نظر آزمایش شده و پاسخ‌گو بوده و عملیات کنترل با موفقیت صورت گرفته است.

روش دوم : روش پارامتری غیرخطی برای پس‌خورد خروجی در این روش، یک چهار چوب کلی برای کنترل‌گر پس‌خورد خروجی در تخصیص مقادیر ویژه دلخواه، برای سیستم خطی کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر، بر پایه ساختار فرم همدم برداری پارامتری (G_λ) ، به‌دست آمده است. در واقع یک گسترش روی ماتریس پس‌خورد حالت می‌باشد.

در ادامه ماتریس پس‌خورد خروجی را با استفاده از رابطه‌های موجود به‌دست آوردیم. این روش جدید نشان می‌دهد که ماتریس پس‌خورد خروجی همواره می‌تواند از رابطه‌ی $C = [I_n \quad O]$ محاسبه شود. البته نیاز به دانستن اطلاعاتی از قبل پیرامون مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز ندارد و هیچ محدودیتی روی مکان، نوع و تعدد مقادیر ویژه نیست.

قابل توجه است که این روش برای سیستم‌های کوچک ($n \leq 5$) به خوبی جواب می‌دهد و همه صورت‌های پارامتری را ارائه می‌دهد. به دلیل رابطه بین پارامترهای غیرخطی، این روش به آشفتگی‌های بسیار حساس است.

فصل ۷

کد متلب

```
%Eigenvalue Assignment in Systems with Output Feedback Matrix
clear Bplus Cplus U1 V1 Xl Xr Yl Yr n SV SU S x y a a1 T2 Gama2 K2 ii iii

% clear
% clc
% A=[2 4 1 3 -2 5;-1 1 -1 -7 1 3;2 1 0 -2 -4 7;1 2 0 1 0 0; 2 0 1 0 0 0;3 1 0 2 1 0];
% B=[1 -2 2 1 4 1;-1 3 1 4 0 1;-1 2 0 0 1 0;2 2 1 0 1 1;1 0 1 0 1 0;1 0 0 0 0 0];
% C=[1 1 0 1 1 0;0 1 0 2 0 1;1 0 1 0 0 0;1 0 2 0 1 2;0 0 0 1 0 0;1 1 1 0 0 0];
% L=[.1 .2 .3 .4 .5 .6];
% n=length(L);

Bplus=pinv(B);
Cplus=pinv(C);
U1=null(B');
V1=null(C);
Xl=U1;
Xr=V1;
Yl=A'*U1;
Yr=A*V1;
n=length(L);
for ii=1:n
SV(:, :, ii)=null((((L(ii)).*Xr)-Yr)');
SU(:, :, ii)=null((((L(ii)).*Xl)-Yl)');
end
[r,f]=size(SU(:, :, 1));
y=rand(f,r);
% y=[ 0.9724 0.1262 -0.4019 0.5758 -0.1108 0.1068 0.5013 -0.0894 -0.1620
% -0.1207 -0.6361 -0.0410 0.3231 0.1355 0.6294 0.4212 0.0659 -0.4964
% 0.5195 0.6656 0.2545 -0.6616 -0.4084 0.3636 -0.3198 0.0347 -0.2143];
```



```

% y=[0.4065 0.9514 0.8867 0.5205 0.2158 0.6029 0.7922 0.2038 0.1669
% 0.9518 0.3460 0.2100 0.9055 0.0787 0.3775 0.3335 0.9587 0.4428
% 0.9120 0.2902 0.1309 0.4025 0.9331 0.6649 0.6927 0.7118 0.6330]

x=zeros(f,r);
e=eye(n);
for iii=1:100
    iii;
    for ii=1:n
        for jj=1:n
            S=SU(:, :, ii)'*SV(:, :, jj);
            a(:, jj)=S*y(:, jj);
            end
            a1=pinv(a);
            x(:, ii)=e(ii, :)*a1;
            end
            for jj=1:n
                for ii=1:n
                    S=SU(:, :, ii)'*SV(:, :, jj);
                    a(:, ii)=S*x(:, ii);
                    end
                    a1=pinv(a);
                    y(:, jj)=a1'*e(:, jj);
                    end
                    error=0;
                    for jj=1:n
                        for ii=1:n
                            S=SU(:, :, ii)'*SV(:, :, jj);
                            error=(((x(:, ii)'*S)*y(:, jj))-e(ii, jj))^2);
                            end
                            end
                            error=sqrt(error);
                            if error<10^(-100)
                                error;

```

```
iteration=iii;
x;
y;
error;
break
end
end
% y
for ii=1:n
T2(:,ii)=SU(:, :, ii)*x(:, ii);
% T1=SV(:, :, ii)*y(:, ii);
end
T2;
Gama2=((T2)*(diag(L)))*inv(T2);
K2=Bplus*(Gama2-A)*Cplus;
xx=[];
uu=[];
x0=[.1 .2 .1 .2 .1 .2 .1 .2 .1];
xx(:,1)=x0;
l=2;
while l<50
xx(:,l)=Gama2*xx(:,l-1);
uu(:,l-1)=K2*C*xx(:,l-1);
yy(:,l)=C*xx(:,l-1);
l=l+1;
end
clf

stairs(xx(1,:), 'b')
xlabel('time t')
ylabel('x1')
title('state response')
figure

stairs(xx(2,:), 'b')
```

```

xlabel('time t')
ylabel('x2')
title('state response')
figure

stairs(xx(3,:), 'b')
xlabel('time t')
ylabel('x3')
title('state response')
figure

stairs(uu(1,:), 'b')
xlabel('time t')
ylabel('u1')
title('input response')
figure

stairs(uu(2,:), 'b')
xlabel('time t')
ylabel('u2')
title('input response')
figure

stairs(uu(3,:), 'b')
xlabel('time t')
ylabel('u3')
title('input response')
figure

disp(' Eigenvalue Assignment in Systems with Output Feedback Matrix ')
disp(' *****')

%FOTD systems with output feedback assignment AA,BB
%Example 1
%  $(\Delta^{0.25})x(i+1)=A_0*x(i)+B_0*u(i)$  &  $x_0=[-1;0.5;3]$ ;

```

```
%FOTD systems with state feedback assignment AA,BB
%Example 1
% (delta^0.25)x(i+1)=A0*x(i)+B0*u(i) & x0=[-1;0.5;3];
clear
clc
AA=[1 2 3;-2 1 -1;4 -1 2];
BB=[1 2 1;-1 1 -1;1 1 0];
%BB=[1 2 1;-1 1 -1]';
CC=[2 1 -1;-3 4 5;3 -4 -2]';

% AA=[1 2 3;-2 1 1;4 -5 2];
% BB=[1 2 1;-1 1 -1;1 1 0];
% CC=[2 3 -4;-3 4 5;3 -4 -2]';

alpha=0.9;
[n,m]=size(BB);
[p,n]=size(CC);
%alpha=0.9; h=2
%X1(i+1)=A*X1(i)+B*U(i)
%X1(i)=[x(i);x(i-1); x(i-2)]
C1=0.045;
C2=0.0165;
A=[AA+alpha*eye(n) C1*eye(n) C2*eye(n);eye(n) zeros(n) zeros(n); zeros(n) eye(n) zeros(n)]
B=[BB;zeros(n,m);zeros(n,m)];
C=[CC zeros(p,n) zeros(p,n)];
L=[.1 .2 .3 .4 .5 -.1 -.2 -.3 -.4];

% eig(A A)
% rank([BB AA*BB AA^2*BB AA^3*BB AA^4*BB AA^5*BB AA^6*BB AA^7*BB AA^8*BB ])
% A=AA;B=BB;C=CC;
%{-0.9,0.7,-0.7,-0.5,0.5,0.3,0.1,0,-0.1}
%reg111
%EIGEN1
%gama=A+B*Kp;
%Eigenvalue Assignment in Systems with Output Feedback Matrix
```

```
% clear Bplus Cplus U1 V1 Xl Xr Yl Yr n SV SU S x y a a1 T2 Gama2 K2 ii iii
outout
```

```
disp(' FOTD systems with output feedback assignment AA,BB ')
disp(' *****')
```

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate. RCOND
1.305334e-17.
```

```
> In outout at 80
```

```
In FRAC at 41
```

```
xx=[];
```

```
uu=[];
```

```
x0=[.1 .2 .1 .2 .1 .2 .1 .2 .1];
```

```
xx(:,1)=x0;
```

```
l=2;
```

```
while l<50
```

```
xx(:,l)=Gama*xx(:,l-1);
```

```
uu(:,l-1)=FF*xx(:,l-1);
```

```
l=l+1;
```

```
end
```

```
stairs(xx(1,:), 'b')
```

```
xlabel('time t')
```

```
ylabel('x1')
```

```
title('state response')
```

```
figure
```

```
stairs(xx(2,:), 'b')
```

```
xlabel('time t')
```

```
ylabel('x2')
```

```
title('state response')
```

```
figure
```

```
stairs(xx(1,:), 'b')
```

```
xlabel('time t')
```

```
ylabel('x1')
```

```
title('state response')
```

```
figure
```

```
stairs(xx(2,:), 'b')
xlabel('time t')
ylabel('x2')
title('state response')
figure
```

```
stairs(xx(3,:), 'b')
xlabel('time t')
ylabel('x3')
title('state response')
figure
```

```
stairs(uu(1,:), 'b')
xlabel('time t')
ylabel('u1')
title('input response')
figure
```

```
stairs(uu(2,:), 'b')
xlabel('time t')
ylabel('u2')
title('input response')
figure
```

```
stairs(uu(3,:), 'b')
xlabel('time t')
ylabel('u3')
title('input response')
figure
```

```
disp(' *****')
```


مراجع

- [1] A. Anatoly , Kilbas , M. Srivastava Hari , and J.J. Trujillo. Preface. North-Holland mathematics studies 204 .2006
- [2] M. Agida, and A.S. Kumar, A Boubaker Polynomials Expansion Scheme solution to random Love equation in the case of a rational kernel, El, .2010
- [3] K.J. Aström and Richard M. Murray. Feedback systems: an introduction for scientists and engineers. Princeton university press,2010
- [4] O. Awojoyogbe, and K. Boubaker, A solution to Bloch NMR flow equations for the analysis of hemodynamic functions of blood flow system using m-Boubaker polynomials,2009
- [5] A.E Bryson and Ho, YC. Applied Optimal Control,1975
- [6] K. Boubaker, The Boubaker polynomials, a new function class for solving bi-varied second order differential equations,2008
- [7] K.P. Badakhshan, and A.V. Kamyad, Numerical solution of nonlinear optimal control problems using nonlinear programming,2007
- [8] S. Berkani, and F. Manseur, and A. Maida, Optimal control based on the variational iteration method,2012
- [9] L. Chen, E. V. Krishnamurthy, and Iain Macleod. Generalised matrix inversion and rank computation by successive matrix powering. Parallel Computing 20.3, 297-311 .1994
- [10] T. Duncan, and and B. Pasik-Duncan, Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. Theory,2000
- [11] S. Dugowson. Les différentielles métaphysiques: histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation.1994
- [12] M. El-Kady, and E.M. Elbarbary, A Chebyshev expansion method for solving nonlinear optimal control problems,2002

- [13] S. Effati, and , H. Saberi Nik, Solving a class of linear and non-linear optimal control problems by homotopy perturbation method,2011
- [14] T.M. El-Gindy, and H.M. El-Hawary, and M.S. Salim, and M. El-Kady, A Chebyshev approximation for solving optimal control problems,1995
- [15] P.A. Frick, and D.J. Stech, Solution of optimal control problems on a parallel machine using the Epsilon method,1995
- [16] W.H Fleming, and Rishel, Raymond ,Springer Science and Business Media,2012
- [17] M. Fateh and H. Tehrani, and Seyed Mehdi Karbassi. Repetitive control of electrically driven robot manipulators. International Journal of Systems Science 44.4,775-785 .2013
- [18] C. B. Garcia, and T. Y. Li. On the number of solutions to polynomial systems of equations. SIAM Journal on Numerical Analysis 17.4,540-546 .1980
- [19] D. Gottlieb, and C.g. Shu, On the Gibbs phenomenon and its resolution, 1997
- [20] H. Gene Golub, and F. Van Loan Charles. Matrix computations. Vol. 3. JHU Press,2012
- [21] H. Guretskiy, Analysis and synthesis of control systems with delay, *Mashinostroenie*, 1974
- [22] J.K. Hale and S.M.V. Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, *Springer Science & Business Media*,99.1993.
- [23] A. Jajarmi, and N. Pariz, and A. Vahidian and S. Effati, A novel modal series representation approach to solve a class of nonlinear optimal control problems,..2011.Application of variational iteration method for Hamilton–Jacobi–Bellman equations,2013
- [24] H.M. Jaddu, Numerical Methods for solving optimal control problems using chebyshev polynomials,1998
- [25] H. Jaddu, Direct solution of nonlinear optimal control problems using quasilinearization and Chebyshev polynomials,2002
- [26] B. Kafash, and A. Delavarkhalafi, and S M. Karbassi, Application of Chebyshev polynomials to derive efficient algorithms for the solution of optimal control problems,2012
- [27] B. Kafash, Numerical solution of nonlinear optimal control problems based on state parametrization,2014

- [28] B. Kafash, and A. Delavarkhalafi, and S.M. Karbassi, A Numerical Approach for Solving Optimal Control Problems Using the Boubaker Polynomials Expansion Scheme,2014
- [29] D.E Kirk, Optimal control theory,introductionPrentice-Hall,1970
- [30] M.Keyanpour, and M. Azizsefat, Numerical solution of optimal control problems by an iterative scheme,2011
- [31] S. M. Karbassi, and F. Saadatjou. A parametric approach for eigenvalue assignment by static output feedback. Journal of the Franklin Institute. 346.4, 289-300 .2009
- [32] S. Kenneth , Miller, and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations,1993
- [33] T. Kaczorek. Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems. Bull. 56.4 .2008
- [34] T. Kaczorek, Stabilization of fractional positive continuous-time linear systems with delays in sectors of left half complex plane by state-feedbacks, *Control and Cybernetics*, 39.3, 783–795.2010
- [35] W.K. Liu, and S. Li, and T. Belytschko, Moving least-square reproducing kernel methods methodology and convergence,1997
- [36] N, Li. A matrix inverse eigenvalue problem and its application. Linear Algebra and Its Applications 266,143-152 .1997
- [37] N. Li, I. A. N. An iterative method for pole assignment. Linear Algebra and Its applications 23,77-102 .2001
- [38] K.S. Miller, and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations,1993
- [39] F. Mainardi, eds. Fractals and fractional calculus in continuum mechanics. Vol. 378. Springer, 2014
- [40] K. Nichols Kautsky, Jaroslav, , and P. Van Dooren, Kautsky, Jaroslav. Robust pole assignment in linear state feedback. International Journal of Control 41.5,1129-1155 .1985
- [41] K. Oldham and J. Spanier. The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. 111.1974
- [42] E.R Pinch, Optimal control and the calculus of variations,1993

- [43] I. Podlubny, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Vol. 198. Academic press, 1998
- [44] J.E Rubio, Control and Optimization: the linear treatment of nonlinear problems,1986
- [45] J.P. Richard, Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica*,39,10, 1667–1694, 2003.
- [46] G.J Schulz, Resonance in the elastic scattering of electrons in helium,1963
- [47] H. Saberi Nik and S. Effati and M. Shirazian, An approximate-analytical solution for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation via homotopy perturbation method.2012
- [48] O. Smith, Closer control of loops with dead time, 217–219. 1957
- [49] I. Troch and F. Breiteneker and M. Graeff Computing optimal controls for systems with state and control constraints.1989
- [50] J. Vlassenbroeck, A Chebyshev polynomial method for optimal control with state constraints.1988
- [51] J. Vlassenbroeck, and R. Van Dooren, A Chebyshev technique for solving nonlinear optimal control problems.1988
- [52] O. Von Stryk, and R. Bulirsch, Direct and indirect methods for trajectory optimization.1992
- [53] A. Yildirim, and S.T. Mohyud-Din, and D.H. Zhang, Analytical solutions to the pulsed Klein–Gordon equation using modified variational iteration method .MVIM. and Boubaker polynomials expansion scheme .BPES.2010
- [54] S.A. Yousefi, and M. Dehghan, and A. Lotfi, Finding the optimal control of linear systems via He’s variational iteration method.2010
- [55] D.H. Zhang, Study of a non-linear mechanical system using Boubaker polynomials expansion scheme BPES.2011
- [56] Q.C. Zhong, Robust control of time-delay systems, *Springer Science & Business Media*.2006.

Aabstract

In this thesis stability of discrete-time linear systems with output feedback via two special values and parametric nonlinear inverse matrix evaluated. Implementation of discrete-time fractional operators in robotics engineering and other branches of industry, especially electrical and mechanical engineering is very important. A key step in the implementation of the fractional digital transfer function, or discrete numerical calculation of fractional differentiation. There are many methods for discrete accordance with the type of system will be included. Reverse particular value problems in several disciplines such as design control, geophysics, circuit theory and applications. This is one of the most important applications, especially in the amounts allocated to it in the context of control theory. In this thesis a new method to solve the allocation problem eigenvalues of matrix inversion using eigenvalues and parametric nonlinear vector is based companion form And then gaining feedback matrix switcher output deficit for the first time using this method was introduced. In the end, the examples listed for the effectiveness of using MATLAB software we offer. Later in the thesis, we present a computational method for solving optimal control problems and the controlled Duffng oscillator. This method is based on state parametrization. In fact, the state variable is approximated by Boubaker polynomials with unknown coefficients. The equation of motion, performance index and boundary conditions are converted into some algebraic equations. Thus,an optimal control problem converts to a optimization problem,which can then be solved easily. By this method,the numerical value of the performance index is obtained. Also,the control and state variables can be approximated as functions of time. Convergence of the algorithms is proved. Numerical results are given for several test examples to demonstrate the applicability and efficiency of the method.

keywords: Optimal control issues Matrix Special Matrix Matters Feedback output feedback systems fractional fractional Assignment Eigenvalue Stability linear control and Oscillator controller Boubaker Polynomials Expansion Scheme Optimal Control Problems Weierstrass approximation theory



University of Shahrood

Applied Mathematics

MSc Thesis in: Partial Differential equations

**Stability of linear systems fractional with
output feedback**

By: Marzia Mehrvarz

Supervisor

dr.Hojjat Ahsani Tehrani

2016