بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضیات مالی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

مینیمم‌سازی موضعی ریسک قیمت‌گذاری اختیارمعامله در بازارهای ناکامل مارکوفی

نگارنده: شیوا نمازی

استادان راهنما

دکتر الهام دسترنج

دکتر سید مجتبی میرلوحی

خرداد ۱۳۹۶

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **شیوا نمازی** به شماره دانشجویی **۹۴۱۸۳۱۴** رشته **ریاضی** گرایش **ریاضیات مالی** تحت عنوان **مینیمم‌سازی موضعی ریسک قیمت‌گذاری اختیارمعامله در بازارهای ناکامل مارکوفی** که در تاریخ **۱۳۹۶/۰۳/۰۸** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه : عالی امتیاز ۱۹/۷۵) ☐	دفاع مجدد ☐	مردود ☐
نوع تحقیق: نظری ☑	عملی ☐	

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹)　　۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶)　　۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	دکتر سید مجتبی میرلوحی	استادیار	
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر عبدالله آل‌هوز	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر احمد زیره	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر احمدرضا یزدانیان	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

اگر شایسته باشد تقدیم به

مقدس ترین واژه در لغت نامه دلم، مادر مهربانم

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم

به همسرم، به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که محیطی سرشار از امنیت و آرامش و آسایش را برایم فراهم کرده است.

سپاس‌گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام برسانم، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، **سرکار خانم دکتر الهام دسترنج** قدردانی نمایم که نحوه‌ی صحیح پژوهش کردن را به بنده آموخت و نگارش این پایان‌نامه جز با راهنمایی‌های ارزنده و حمایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود. همچنین از **جناب آقای دکتر سید مجتبی میرلوحی** که با پیشنهاد سازنده خود، سهم به سزایی در بهتر شدن این پایان‌نامه داشتند، سپاس‌گزاری می‌نمایم.

در پایان، از خانواده‌ام، به ویژه همسرم که در تمام دوران زندگی همواره مشوق بنده بودند و بی‌شک حمایت ایشان باعث تحقق این مهم گردید، نهایت سپاس و قدرشناسی را دارم.

شیوا نمازی
خرداد ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **شیوا نمازی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مینیمم‌سازی موضعی ریسک قیمت‌گذاری اختیارمعامله در بازارهای ناکامل مارکوفی** ، تحت راهنمایی **الهام دسترنج** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام '' دانشگاه صنعتی شاهرود '' یا '' Shahrood University of Technology '' به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

شیوا نمازی
خرداد ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

ریسک یکی از دغدغه‌های مهم سرمایه‌گذار است. اصولا هر فعالیت اقتصادی با درجه‌ای از ریسک همراه است که هیچ‌گاه نمی‌توان آن را کاملا حذف کرد و تنها راه ممکن مدیریت آن است. در این پایان‌نامه، روش مینیمم‌سازی موضعی ریسک را برای مینیمم کردن ریسک سبد تحت یک مدل رژیم‑سوئیچینگ مارکوف زمان پیوسته بررسی می‌کنیم. در اینجا فرض می‌کنیم سرمایه‌گذار فقط در بازار پول و سهام می‌تواند سرمایه‌گذاری کند و فرایند قیمت سهام از مدل رژیم‑سوئیچینگ مارکوف حرکت براونی هندسی تبعیت می‌کند. نرخ بهره، نرخ رانش و تلاطم قیمت سهام با زنجیر مارکوف زمان پیوسته مدل بندی شده است. پس از قیمت‌گذاری اختیارمعامله‌های اروپایی در این بازار، استراتژی بهینه را به طور یکتا مشخص می‌کنیم.

کلمات کلیدی: رژیم سوئیچینگ، فرایندهای پرش‑انتشار، تلاطم تصادفی، مینیمم‌سازی موضعی ریسک، قیمت‌گذاری.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Namazi. S, Dastranj. E, (2016), ”Power Options Pricing in a Financial Market with stochastic Analysis Tools”, 47th Annual Iranian Mathematics conference Kharazmi university.

2. Namazi. S, Dastranj. E, (2017), ”Locally risk minimizing option pricing under the Markovian incomplete markets”, 22th Seminar on Mathematical Analysis and its Applications, Bonab university.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات

۱.۱ مقدمه

در این فصل برآنیم که برای درک بهتر این پایان‌نامه، به‌طور خلاصه به بیان برخی مفاهیم و اصطلاحات اولیه بپردازیم. مطالب ارائه‌شده در این فصل به جز مواردی که به روشنی مشخص شده است، از مراجع [۲]، [۸]، [۲۷] و [۳۰] گرفته شده اند.

۲.۱ مفاهیم نظریه اندازه و احتمال

نظریه احتمال، مطالعه‌ی رویدادهای تصادفی است. به عبارت دیگر، نظریه احتمال شاخه‌ای از ریاضیات است که با تحلیل وقایع تصادفی سروکار دارد. هسته‌ی تئوری احتمال را متغیرهای تصادفی، فرایندهای تصادفی و پیشامدها تشکیل می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{F}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد، $\mathcal{F}$ یک σـ**میدان**[۱] روی Ω است هرگاه

۱. $\Omega \in \mathcal{F}$،

۲. اگر $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A^c \in \mathcal{F}$،

[۱] σ-field

۳. اگر $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ آنگاه $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

تعریف ۲.۲.۱. اگر $\Omega = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و $\mathcal{F}$ دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد، σـ میدان تولید شده توسط $\mathcal{F}$ را σـ **میدان بورل** [۲] گویند و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۲.۱. هر دسته‌ی صعودی از σـ میدان‌ها را یک **فیلتر** [۳] گویند و با نماد $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ نمایش می‌دهند که در آن I مجموعه‌ی اندیس‌گذار است که می‌تواند شمارش‌پذیر یا شمارش‌ناپذیر باشد.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک σـ میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω باشد، تابع μ، $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ را یک **اندازه** [۴] گوییم هرگاه

۱. برای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $0 \leq \mu(A) \leq \infty$،

۲. اگر $\{A_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای از اعضای دو به دو جدا از هم $\mathcal{F}$ باشند به‌طوری‌که $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$، آن‌گاه داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{F}$، σـ میدانی از زیرمجموعه‌های آن باشد، زوج مرتب $(\Omega, \mathcal{F})$ را یک **فضای اندازه‌پذیر** [۵] گویند.
اگر μ اندازه‌ای روی $\mathcal{F}$ باشد آن‌گاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ را **فضای اندازه** [۶] می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. **اندازه دیراک** [۷] (جرم نقطه‌ای دیراک) مربوط به یک نقطه $x \in E$ برای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{B}$، σـ میدان بورل روی $\mathbb{R}^d$ باشد و $E \subset \mathbb{R}^d$. **اندازه رادن** [۸] روی $(E, \mathcal{B})$ یک اندازه μ است به‌طوری‌که برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر فشرده $B \in \mathcal{B}$، $\mu(B) < \infty$.

تعریف ۸.۲.۱. اندازه μ روی مجموعه‌ی اندازه‌پذیر $E \subset \mathbb{R}^d$، σـ **متناهی** [۹] نامیده می‌شود هرگاه افراز $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$ از E به مجموعه‌های بورل وجود داشته باشد به گونه‌ای که $\mu(E_i) < \infty$.

---

[۲] Borel
[۳] Filter
[۴] Measure
[۵] Measurable space
[۶] Measure space
[۷] Dirac measure
[۸] Radon measure
[۹] σ-finite

تعریف ۹.۲.۱. تابع حقیقی مقدار f، $f:(\Omega,\mathcal{F})\to(Y,\mathcal{B})$ را **اندازه‌پذیر**[۱۰] گوییم هرگاه برای هر B از σـ میدان $\mathcal{B}$ داشته باشیم

$$f^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:f(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}.$$

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ یک فضای اندازه باشد، تابع اندازه‌پذیر $f:\Omega\to C$ را $\mathcal{L}^2$**ـ انتگرال‌پذیر** یا **انتگرال‌پذیر مربعی**[۱۱] می‌نامیم هرگاه

$$\int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}\mu<\infty.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید $(\Omega,\mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. یک **اندازه علامت‌دار**[۱۲] روی $(\Omega,\mathcal{F})$ تابعی چون $\nu:\mathcal{F}\to[-\infty,\infty]$ است هرگاه

۱. $\nu(\varnothing)=0$،

۲. ν حداکثر یکی از مقادیر $\pm\infty$ را می‌پذیرد،

۳. اگر $\{A_n\}_{n\geq1}$ دنباله‌ای از اعضای دو به دو جدا از هم در $\mathcal{F}$ باشند به‌طوری‌که $\bigcup\limits_{n\geq1}A_n\in\mathcal{F}$، آن‌گاه داشته باشیم

$$\nu(\bigcup_{n\geq1}A_n)=\sum_{n\geq1}\nu(A_n).$$

بنابراین هر اندازه، یک اندازه علامت‌دار است.

مثال ۱.۲.۱. اگر μ_1 و μ_2 دو اندازه روی $(\Omega,\mathcal{F})$ بوده و حداقل یکی از آن‌ها متناهی باشد، آنگاه $\nu=\mu_1-\mu_2$ یک اندازه علامت‌دار است.

مثال ۲.۲.۱. اگر μ یک اندازه روی $(\Omega,\mathcal{F})$ باشد و $f:\Omega\to[-\infty,\infty]$ تابعی باشد به قسمی‌که یکی از $\int f^+\mathrm{d}\mu$ و $\int f^-\mathrm{d}\mu$ متناهی باشد آنگاه $\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$ یک اندازه علامت‌دار است.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک σـ میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω باشد، تابع P، $P:\mathcal{F}\to[0,1]$ را یک **اندازه احتمال**[۱۳] گوییم هرگاه

۱. $P(\Omega)=1$،

۲. اگر $\{A_n\}_{n\geq1}$ دنباله‌ای از اعضای دو به دو جدا از هم در $\mathcal{F}$ باشند به‌طوری‌که $\bigcup\limits_{n\geq1}A_n\in\mathcal{F}$، آن‌گاه داشته باشیم

$$P(\bigcup_{n\geq1}A_n)=\sum_{n\geq1}P(A_n).$$

---
[۱۰] Measurable function
[۱۱] Square integrable
[۱۲] Signed measure
[۱۳] Probability measure

سه‌تایی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ را **فضای احتمال**[۱۴] می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۳. فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},P)$ مجهز شده به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ را یک **فضای احتمال فیلترشده**[۱۵] می‌نامند و با $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},P)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید $(\Omega,\mathcal{F},P)$ یک فضای احتمال و Q اندازه احتمال دیگری روی این فضا باشد،
اگر برای هر $A\in\mathcal{F}$

$$P(A)=0\Rightarrow Q(A)=0,$$

آنگاه Q نسبت به P **مطلقا پیوسته**[۱۶] است و می‌نویسیم $Q\ll P$. همچنین اگر برای هر $A\in\mathcal{F}$

$$P(A)=0\Leftrightarrow Q(A)=0,$$

گوییم Q و P اندازه‌های **معادل**[۱۷] هستند و می‌نویسیم $Q\sim P$.

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. در این صورت تابع مشخصه A در X، یعنی $1_A: X\to\{0,1\}$ را برای هر $x\in X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$1_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A,\\ 0 & x\in X-A.\end{cases}$$

البته انتخاب مجموعه $\{0,1\}$ هر چند معمول‌تر است ولی الزامی نیست و می‌توان هر مجموعه دو عضوی دیگر را نیز انتخاب کرد. این تابع به هر عضو مجموعه A عدد یک و به هر عضو $X-A$ یعنی عناصری که متعلق به X هستند ولی به A تعلق ندارند مقدار صفر رانسبت می‌دهد.

۱.۳ مفاهیم فرایندهای تصادفی

۱.۳.۱ فرایند تصادفی

تعریف ۱.۳.۱. هر تابع اندازه‌پذیر از فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},P)$ به فضای اندازه‌پذیر $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ را یک **متغیر تصادفی**[۱۸] گوییم.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی باشد، σـ میدان تولید شده توسط X که با نماد $\mathcal{F}(X)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{F}(X)=\{X^{-1}(A): A\in\mathcal{B}\}.$$

[۱۴] Probability space
[۱۵] Filtered probability space
[۱۶] Absolutely continuous measure
[۱۷] Equivalent measure
[۱۸] Random variable

تعریف ۳.۳.۱. هر خانواده (شمارا یا ناشمارا) از متغیرهای تصادفی، یک **فرایند تصادفی** نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $\{X_t\}_{t\geq 0}$ فرایند تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F})$ باشد. برای هر $\omega \in \Omega$، مسیر $X(\omega) : t \to X_t(\omega)$ تابعی از زمان را تعریف می‌کند که **مسیر** فرایند نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۳.۱. فرایند تصادفی X را **کادلاگ**[۱۹] می‌نامیم اگر مسیرهای آن قریب به یقین از راست پیوسته و دارای حد چپ باشد.

تعریف ۶.۳.۱. تابع کادلاگ $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. اگر $t \in [0, T]$ یک نقطه ناپیوستگی تابع f باشد، مقدار $\Delta f(t) = f(t) - f(t_-)$ **پرش**[۲۰] تابع f در نقطه t نامیده می‌شود.
تابع کادلاگ f حداکثر می‌تواند در یک مجموعه شمارا ناپیوسته باشد، یعنی مجموعه $\{t \in [0, T], f(t) - f(t_-) \neq 0\}$ شمارش‌پذیر است [۱۳].

تعریف ۷.۳.۱. فرایند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ را نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_t$ **سازگار**[۲۱] می‌گوییم هرگاه برای هر $t \geq 0$، X_t نسبت به $\mathcal{F}_t$، اندازه‌پذیر باشد.

فیلتر طبیعی، کوچک‌ترین فیلتری است که فرایند تصادفی X نسبت به آن سازگار است.

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و $\mathcal{D}$ یک زیر σـمیدان از $\mathcal{F}$ و Z متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. امید Z به شرط $\mathcal{D}$ یک متغیر تصادفی $\mathcal{D}$ـ اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است که آن را با $E(Z|\mathcal{D})$ نشان می‌دهیم و برای هر $D \in \mathcal{D}$ داریم

$$\int_D E(Z|\mathcal{D}) \, \mathrm{d}P = \int_D Z \, \mathrm{d}P.$$

تعریف ۹.۳.۱. فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. متغیر تصادفی T روی $(\Omega, \mathcal{F})$ که مقادیر خود را در $[0, \infty]$ اختیار می‌کند، یک **زمان توقف**[۲۲] نسبت به $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $t \geq 0$ داشته باشیم $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنیم $\{X_t\}$ یک فرایند تصادفی و برای هر n، $n \geq 1$، T_n نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ زمان توقف باشد. فرایند متوقف شده با T_n را با نماد $X^{T_n}(t)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad X^{T_n}(\omega) = X_{T_n \wedge t}(\omega).$$

---

[۱۹] Cadlag Process
[۲۰] Jump
[۲۱] Adapted to the filtration
[۲۲] Stopping time

تعریف ۱.۳.۱۱. فرض کنید $P = \{a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = b\}$ یک افراز از $[a,b] \subset \mathbb{R}$ باشد. تغییر تابع f بر P به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Var_P(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

اگر $\sup_P Var_P(f)$ متناهی باشد آنگاه تابع f بر بازه $[a,b]$ **باتغییر متناهی**[۲۳] نامیده می‌شود. اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ یا $\mathbb{R}$ تعریف شده و بر هر بازه، باتغییر متناهی باشد آنگاه تابع f باتغییر متناهی است.
فرایند تصادفی را باتغییر متناهی گویند هرگاه مسیرهای آن با احتمال یک، باتغییر متناهی باشد در غیر این صورت فرایند باتغییر نامتناهی خوانده می‌شود.

۱.۳.۲ مارتینگل‌ها

تعریف ۱.۳.۱۲. فرایند تصادفی $\{M_t\}_{t\in\mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{Z}^+}$ **مارتینگل**[۲۴] گوییم هرگاه

۱. $\{M_t\}_{t\in\mathbb{Z}^+}$ نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{Z}^+}$ سازگار باشد،

۲. برای هر t، M_t انتگرال‌پذیر باشد،

۳. برای هر $t \geq 1$ داشته باشیم $E(M_{t+1}|\mathcal{F}_t) = M_t, \quad \text{a.s.}.$[۲۵]
به بیان دیگر، بهترین پیشگو برای مقدار آینده یک مارتینگل، مقدار فعلی آن است.

تعریف ۱.۳.۱۳. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ یک مارتینگل در این فضا باشد. اگر Q اندازه احتمال دیگری روی این فضا باشد به‌طوری‌که $P \sim Q$، Q یک **اندازه احتمال مارتینگل معادل**[۲۶] P است هرگاه فرایند $\{M_t\}_{t\in[0,T]}$ نسبت به Q نیز مارتینگل باشد.

تعریف ۱.۳.۱۴. فرایند تصادفی حقیقی مقدار $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را یک **مارتینگل موضعی**[۲۷] گوییم هرگاه دنباله‌ای صعودی از زمان‌های توقف مانند $\{T_n\}_{n\geq 1}$، موجود باشد به‌طوری‌که، $T_n \nearrow T$، و برای هر n، فرایند متوقف شده $X^{T_n}(t)$ مارتینگل باشد.

روشن است که هر مارتینگل یک مارتینگل موضعی است اما مارتینگل‌های موضعی وجود دارند که مارتینگل نیستند.

---
[۲۳] Finite variation
[۲۴] Martingale
[۲۵] Almost surely
[۲۶] Equivalent martingale measure
[۲۷] Local martingale

تعریف ۱.۳.۱۵. فرایند سازگار X را یک **نیم‌مارتینگل**[۲۸] گویند هرگاه، مارتینگل موضعی M و فرایند باتغییر متناهی A وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t), \qquad M(0) = A(0) = 0.$$

به طور کلی اثبات نیم‌مارتینگل بودن یک فرایند با استفاده از تعریف، آسان نیست. برای شناسایی نیم‌مارتینگل‌ها قضایایی ثابت شده است که کار تشخیص را ساده‌تر می‌کند.
در ادامه به معرفی پاره‌ای از این قضایا می‌پرازیم.

- اگر S یک فرایند سازگار با مسیرهای کادلاگ تغییر متناهی روی مجموعه فشرده باشد آنگاه S یک نیم مارتینگل است [۱۶].
- اگر S یک مارتینگل انتگرال‌پذیر با مسیرهای کادلاگ باشد آنگاه S یک نیم‌مارتینگل است [۱۶].
- اگر S یک مارتینگل موضعی انتگرال‌پذیر مربعی با مسیرهای کادلاگ باشد آنگاه S یک نیم‌مارتینگل است [۱۶].

با توجه به گزاره‌هایی که در ادامه می‌آید، تمامی فرایندهایی که در این پایان‌نامه به آن‌ها می‌پردازیم نیم‌مارتینگل هستند.

گزاره ۱.۳.۱. هر فرایند تغییر متناهی یک نیم‌مارتینگل است.

برهان. به [۲۸] رجوع کنید. □

گزاره ۲.۳.۱. هر مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی یک نیم‌مارتینگل است.

برهان. به [۲۸] رجوع کنید. □

۳.۳.۱ حرکت براونی: تعریف و ویژگی‌ها

حرکت براونی از اساسی‌ترین فرایندهای تصادفی و سنگ بنای نظریه‌ی احتمال مدرن، آنالیز تصادفی و معادلات دیفرانسیل است. حرکت نامنظم گرده گیاهان که در آب معلق هستند را به افتخار روبرت براون [۲۹]، گیاه‌شناس اسکاتلندی که برای نخستین بار در تابستان ۱۸۲۷ میلادی حرکت نامنظم گرده گیاهان معلق در آب را مشاهده کرد، حرکت براونی [۳۰] نامیدند. در سال ۱۹۰۵ میلادی آلبرت انیشتن [۳۱] علت این حرکت را بمباران دانه‌های گرده از سوی ملکول‌های

[۲۸] Semi martingale
[۲۹] Robert Brown
[۳۰] Brownian motion
[۳۱] Albert Einstein

مایع معرفی کرد. به عبارت دیگر، ذرات و مولکول‌های موجود در گازها و یا مایعات دارای حرکت نامنظمی هستند، یعنی در هر راستایی می‌توانند حرکت کنند و با برخورد با یکدیگر تغییر جهت دهند به این حرکت، حرکت براونی می‌گویند. پس از آن دامنه کاربرد حرکت براونی بسیار فراتر رفته و حتی وارد مباحث ریاضیات مالی مانند مدل‌سازی قیمت سهام نیز شده است. در سال ۱۹۱۸ میلادی نوربرت وینر [۳۲] ریاضی‌دان برجسته و نابغه آمریکایی، الگوی حرکت براونی را به‌طور کامل بررسی کرد. وی در سال ۱۹۲۳ میلادی فرایند مطلوب حرکت براونی را که امروز فرایند وینر نیز گفته می‌شود را به فرم ریاضی ساخت که به صورت زیر قابل بیان است [۳].

تعریف ۱۶.۳.۱. فرایند تصادفی $\{W_t\}_{t\geq 0}$ بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را یک **فرایند براونی استاندارد**[۳۳] یا حرکت براونی استاندارد گوییم هرگاه در ویژگی‌های زیر صدق کند

۱. $W_0 = 0$،

۲. به ازای هر t و s که $s \leq t$، متغیر تصادفی $W_t - W_s$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t-s$ باشد،

۳. متغیرهای تصادفی $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \ldots, W_{t_2} - W_{t_1}$ برای $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$، مستقل و هم‌توزیع باشند.

دو ویژگی اساسی فرایند براونی به شرح زیر است.

۱. حرکت براونی یک مارتینگل است به این معنی که برای هر $0 \leq s \leq t$، داریم

$$E[W_t|\mathcal{F}_s] = W_s.$$

برهان.

$$\begin{aligned} E[W_t|\mathcal{F}_s] &= E[W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s], \\ &= E[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] + E[W_s|\mathcal{F}_s], \\ &= 0 + W_s = W_s. \end{aligned}$$

□

و همچنین برای هر $0 \leq s \leq t$، $E[W_sW_t] = min\{s,t\}$.

برهان. برای $s < t$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E[W_tW_s] &= E[(W_t - W_s + W_s)W_s], \\ &= E[W_t - W_s]E[W_s] + E[W_s^2], \\ &= 0 + s = s. \end{aligned}$$

[۳۲] Norbert Wiener

[۳۳] Standard Brownian motion

بنابراین $E[W_tW_s] = t \wedge s$ که در آن $t \wedge s = min\{s,t\}$. □

۲. حرکت براونی دارای مسیرهای پیوسته است. مسیرهای حرکت براونی بسیار نامنظم و غیرقابل پیش‌بینی اند. برای مثال مشتق‌پذیر نیست و مسیرهای آن تغییر نامتناهی اند.

۴.۳.۱ فرایند پواسون: تعریف و ویژگی‌ها

تعریف ۱۷.۳.۱. فرایند تصادفی $\{N_t\}_{t\geq 0}$ را یک **فرایند شمارشی** گوییم، هرگاه N_t تعداد کل پیشامدهایی باشد که تا زمان t رخ داده‌اند و در شرایط زیر صدق کند.

۱) N_t مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کند،

۲) اگر $s \leq t$ آنگاه $N_s \leq N_t$،

۳) برای $s < t$، $N_t - N_s$ برابر تعداد پیشامدهایی است که در فاصله زمانی $(s,t]$ رخ می‌دهند.

تعریف ۱۸.۳.۱. فرایند شمارشی $\{N_t\}_{t\geq 0}$ را یک **فرایند پواسون**[۳۴] با پارامتر $\lambda \geq 0$ گوییم هرگاه داشته باشیم

۱) $N_0 = 0$،

۲) فرایند N_t دارای نموهای مانا باشد یعنی برای هر مقدار صحیح k و هر مقدار زمانی $s \leq t$ و $\Delta > 0$ داشته باشیم $P[N_{t+\Delta} - N_t = k] = P[N_{s+\Delta} - N_s = k]$,

۳) فرایند N_t دارای نموهای مستقل باشد یعنی برای هر مقدار صحیح $k > 0$ و مقادیر زمانی $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ متغیرهای تصادفی $N_{t_1} - N_{t_0}$ و $N_{t_2} - N_{t_1}$ و ... و $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ دو به دو از هم مستقل باشند.

گزاره ۳.۳.۱. فرض کنید N_t یک فرایند پواسون باشد، آنگاه

۱. برای هر $t > 0$، N_t متناهی است $P\{N_t < \infty\} = 1$.

۲. برای هر ω، مسیر $t \to N_t(\omega)$ تابعی قطعه قطعه ثابت و اندازه‌ی پرش یک است.

۳. مسیرهای $t \to N_t(\omega)$، از راست پیوسته و دارای حد چپ است. (کادلاگ).

۴. برای هر $t > 0$، $P\{N_t = N_{t_-}\} = 1$.

۵. N_t در احتمال پیوسته است،

$$\forall t > 0, \quad N_s \xrightarrow[s\to t]{P} N_t.$$

[۳۴] Poisson Process

۶. برای هر $t > 0$، N_t، دارای توزیع پواسون با پارامتر λt است.

۷. N_t دارای ویژگی مارکوف است، یعنی

$$\forall s < t \quad E[f(N_t)|N_u, u \leq s] = E[f(N_t)|N_s].$$

برهان. به [۳۶] رجوع کنید. □

ملاحظه ۱.۳.۱. ویژگی‌های (۲)،(۳) و (۴) متناقض به نظر می‌رسند، از یک سو با احتمال یک ثابت می‌شود که هر مسیر از فرایند پواسون ناپیوسته است (در واقع فرایند تنها با پرش‌ها تغییر وضعیت می‌یابد) و از سوی دیگر در هر نقطه داده شده t، N_t با احتمال یک پیوسته است! این نکته در برخورد با تمامی فرایندهای پرشی قابل توجه و ناشی از این حقیقت است که نقاط ناپیوستگی فرایند، مجموعه‌ای با اندازه صفر است.

۵.۳.۱ فرایند پواسون مرکب

تعریف ۱۹.۳.۱. فرایند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ را یک **فرایند پواسون مرکب** [۳۵] گوییم، هرگاه بتوان آن را به ازای هر $t \geq 0$ به‌صورت $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ نشان داد، که در آن N_t یک فرایند پواسون و $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ خانواده‌ای از متغیرهای مستقل و هم‌توزیع هستند، و فرایند N_t و دنباله $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ مستقل فرض می‌شوند.

۶.۳.۱ فرایند پواسون جبران یافته

تعریف ۲۰.۳.۱. نسخه مرکزی شده فرایند پواسون N_t را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\widetilde{N}_t = N_t - \lambda t,$$

$\{\widetilde{N}_t\}_{t\geq 0}$ **فرایند پواسون جبران یافته**[۳۶] و $\{\lambda t\}_{t\geq 0}$ جبران‌گر N_t نامیده می‌شود.

مانند فرایند پواسون، $\widetilde{N}_t$ نموهای مستقل دارد و داریم

$$\begin{aligned} E[N_t|N_s, s \leq t] &= E[N_t - N_s + N_s|N_s], \\ &= E[N_t - N_s|N_s] + N_s, \\ &= \lambda(t-s) + N_s. \end{aligned}$$

لذا $\widetilde{N}_t$ مارتینگل است. فرایند پواسون جبران یافته، صحیح مقدار نیست و برخلاف فرایند پواسون، فرایند شمارشی نخواهد بود.

[۳۵] Compound Poisson Process

[۳۶] Compensated Poisson process

۷.۳.۱ اندازه‌های تصادفی

فرایند شمارشی پواسون N_t را در نظر بگیرید. اگر $T_1, T_2, \dots$ دنباله زمان‌های پرش باشد آنگاه N_t تعداد پرش‌های بین صفر و t است و $N_t - N_s$ تعداد پرش‌ها در $[s,t]$ را می‌شمارد. این نوع شمارش، یک اندازه پرش تصادفی M، روی $[0,T]$ به صورت زیر تعریف می‌کند، برای هر مجموعه اندازه‌پذیر $A \subset \mathbb{R}^+$ فرض کنید

$$M(\omega, A) = \#\{i \geq 1, T_i(\omega) \in A\}.$$

آنگاه $M(\omega, .)$ یک اندازه مثبت و صحیح مقدار است. $M(A)$ برای هر مجموعه کراندار A با احتمال یک، متناهی است. اندازه $M(\omega, .)$ به ω وابسته است بنابراین یک اندازه تصادفی است. شدت λ ی فرایند پواسون، متوسط مقدار اندازه تصادفی M است، یعنی $E[M(A)] = \lambda|A|$ که در آن $|A|$ اندازه لبگ A است. حال فرایند پواسون N_t را با استفاده از اندازه پرش تصادفی M تعریف می‌کنیم

$$N_t(\omega) = M(\omega, [0,t]) = \int_{[0,t]} M(\omega, \mathrm{d}s).$$

ویژگی‌های فرایند پواسون به ویژگی‌های اندازه پرش M قابل انتقال است. برای فواصل مجزای $[t_1, t_1'], \dots, [t_n, t_n']$ داریم

۱. $M([t_k, t_k'])$ تعداد پرش‌های فرایند پواسون در $[t_k, t_k']$ می‌باشد و یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda(t_k' - t_k)$ است.

۲. برای دو فاصله مجزای $[t_i, t_i']$ و $[t_j, t_j']$، $i \neq j$، متغیرهای تصادفی $M([t_i, t_i'])$ و $M([t_j, t_j'])$ مستقل هستند.

۳. به طور کلی برای هر مجموعه اندازه پذیر A، $M(A)$ دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda|A|$ است که $|A| = \int_A \mathrm{d}x$ اندازه لبگ A است.

به طور مشابه می‌توان یک اندازه تصادفی به فرایند پواسون جبران یافته $\tilde{N}_t$ مرتبط ساخت

$$\widetilde{M}(\omega, A) = M(\omega, A) - \int_A \lambda \mathrm{d}t = M(\omega, A) - \lambda|A|.$$

ملاحظه می‌کنیم که $E[\widetilde{M}(A)] = 0$. بر خلاف M، $\widetilde{M}$ نه صحیح مقدار (اندازه شمارشی) است و نه مثبت، بلکه یک اندازه علامت‌دار است.

تعریف ۲۱.۳.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال، $E \subset \mathbb{R}^d$ و μ اندازه رادن (مثبت) روی $(E, \mathcal{A})$ باشد. یک **اندازه تصادفی پواسون**[۳۷] روی E با اندازه شدت μ، اندازه تصادفی

[۳۷] Poisson random measure

صحیح مقداری چون

$$M : \Omega \times \mathcal{A} \to \mathbb{N},$$
$$(\omega, A) \to M(\omega, A),$$

است به‌طوری‌که

۱. برای (تقریبا) همه $\omega \in \Omega$، $M(\omega, .)$ یک اندازه رادن صحیح مقدار روی E است. برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر کراندار $A \subset E$، $M(A) < \infty$ یک متغیر تصادفی صحیح مقدار است.

۲. برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر $A \subset E$، $M(., A) = M(A)$ یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\mu(A)$ است.

۳. برای مجموعه‌های اندازه‌پذیر جدا از هم $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$، $M(A_1), M(A_2), \ldots, M(A_n)$ مستقل هستند.

در واقع هر اندازه تصادفی پواسون روی E را می‌توان به صورت اندازه شمارشی وابسته به یک دنباله تصادفی از نقاط در E نشان داد.
دنباله $\{T_i(\omega), i \geq 1\}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $A \in \mathcal{A}$، $M(\omega, A) = \sum_{i\geq 1} 1_A(T_i(\omega))$. بنابراین M یک مجموع از جرم‌های نقطه‌ای دیراک واقع در نقاط تصادفی $\{T_i\}_{i\geq 1}$ است، یعنی

$$M = \sum_{i\geq 1} \delta_{T_i(\omega)}.$$

تعریف ۲۲.۳.۱. اندازه تصادفی پواسون جبران یافته[۳۸] $\widetilde{M}$، از تفریق اندازه شدت μ از اندازه M حاصل می‌شود یعنی

$$\widetilde{M}(A) = M(A) - \mu(A).$$

از تعریف اندازه تصادفی پواسون نتیجه می‌شود که برای مجموعه‌های فشرده مجزای $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$، $\widetilde{M}(A_1), \widetilde{M}(A_2), \ldots, \widetilde{M}(A_n)$ مستقل هستند [۴].

۸.۳.۱ فرایندهای پرش_انتشار

تعریف ۲۳.۳.۱. فرض کنید $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ یک فرایند تصادفی به فرم زیر است.

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t g(s)\mathrm{d}W_s + \int_0^t \int_E h(s, y)p(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y),$$

که در آن W_t یک حرکت براونی مستقل از اندازه تصادفی پواسون $p(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y)$ است. $f(t)$ و $g(t)$ فرایندهای پیوسته‌ی غیرقابل پیش‌بینی هستند و داریم $E\left[\int_0^T g(s)^2\mathrm{d}t\right] < \infty$. $h(s, y)$ یک فرایند قابل پیش‌بینی انتگرال‌پذیر است. در این صورت X_t یک فرایند پرش_انتشار نامیده می‌شود.

[۳۸] Compensated Poisson random measure

۹.۳.۱ تغییرات مربعی

تعریف ۲۴.۳.۱. **تغییرات مربعی** نیم‌مارتینگل X فرایند کادلاگ سازگاری است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\langle X, X\rangle_t := |X_t|^2 - 2\int_0^t X_{u-}\,\mathrm{d}X_u.$$

همچنین تغییرات مربعی نیم‌مارتینگل‌های X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\langle X, Y\rangle_t := XY - \int_0^t X_{u-}\,\mathrm{d}Y_u - \int_0^t Y_{u-}\,\mathrm{d}X_u.$$

قضیه ۱.۳.۱. فرایند تغییرات مربعی X یک فرایند کادلاگ، سازگار و افزایشی است. به‌علاوه

۱. $\langle X, X\rangle_0 = X_0^2$.

۲. $\Delta\langle X, X\rangle = (\Delta X)^2$.

۳. اگر $\pi^n = (t_0^n = 0 < t_1^n < \cdots < t_{n+1}^n = T)$ دنباله‌ای از افرازهای $[0, T]$ باشد به طوری‌که وقتی $n \to \infty$، $|\pi^n| = \sup_k |t_k^n - t_{k-1}^n| \to 0$ آنگاه همگرایی

$$\sum_{t_i \in \pi^n}^{0 \le t_i \le t} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \to \langle X, X\rangle_t\,,$$

نسبت به t یکنواخت است.

برهان. به [۲۸] رجوع کنید. □

تعریف ۲۵.۳.۱. برای نیم‌مارتینگل X، فرایند $\langle X, X\rangle^c$ بیانگر بخش پیوسته $\langle X, X\rangle$ است و داریم

$$\langle X, X\rangle_t = \langle X, X\rangle_t^c + \sum_{0 \le s \le t} (\Delta X(s))^2.$$

گزاره ۴.۳.۱. **ویژگی‌های تغییرات مربعی**

- $(\langle X, X\rangle_t)_{t\in[0,T]}$ یک فرایند افزایشی است.
- پرش‌های $\langle X, X\rangle$ با رابطه $\Delta\langle X, X\rangle_t = |\Delta X_t|^2$ به پرش‌های X وابسته است.
- $\langle X, X\rangle$ دارای مسیرهای پیوسته است اگر و تنها اگر X پیوسته باشد.
- اگر X پیوسته و مسیرهای با تغییر متناهی داشته باشد آنگاه $\langle X, X\rangle = 0$.
- اگر X یک مارتینگل و $\langle X, X\rangle = 0$ آنگاه تقریبا $X = X_0$، a.s.

برهان. به [۲۸] رجوع کنید. □

گزاره ۵.۳.۱ (تغییرات مربعی حرکت براونی). اگر $B_t = \sigma W_t$، آنگاه $\langle B, B\rangle_t = \sigma^2 t$ که در آن W فرایند براونی استاندارد است.

برهان. به [۲۸] رجوع کنید. □

مثال ۱.۳.۱ (تغییرات مربعی فرایند پواسون). اگر N، یک فرایند پواسون باشد از تعریف (۲۴.۳.۱) به سادگی دیده می‌شود که $\langle N, N\rangle_t = N_t$.

مثال ۲.۳.۱ (تغییرات مربعی انتگرال پواسون). اندازه تصادفی پواسون M روی $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ با شدت $\mu(\mathrm{d}s\mathrm{d}y)$ و تابع تصادفی $\psi : [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. فرایند X را به عنوان انتگرال ψ نسبت به M تعریف می‌کنیم.

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \psi(s,y) M(\mathrm{d}s\mathrm{d}y).$$

تغییرات مربعی X به صورت زیر داده می‌شود.

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\psi(s,y)|^2 M(\mathrm{d}s\mathrm{d}y).$$

۴.۱ حسابان ایتو

۱.۴.۱ انتگرال ایتو

می‌خواهیم معادله حرکت ذره‌ای که در سطح آب جوی حرکت می‌کند را نسبت به زمان به‌دست آوریم. از آن‌جا که مکان ذره در لحظه t، $t\in[0,T]$ و $(T>0)$، به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول‌های آب به آن وارد می‌کند مشخص نیست (تصادفی است)، معادله آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = b(t,X_t) + \sigma(t,X_t)(\text{نوفه}), \tag{۱.۱}$$

که در آن b و σ توابع حقیقی داده شده روی $[0,\infty)\times\Omega$ هستند و نوفه فرایند تصادفی مانند Z_t است که در سه شرط زیر صدق می‌کند.

- برای هر $t_1, t_2 \in [0,T]$ که $t_1 \neq t_2$، Z_{t_1} و Z_{t_2} مستقل از هم باشند.
- توزیع توام متغیرهای تصادفی $Z_{t_1+t}, \dots, Z_{t_n+t}$، $t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n \le T$ به t بستگی نداشته باشد.
- برای هر $t\in(0,T]$، $E(Z_t)=0$.

فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ افرازی از فاصله $[0, T]$ است. با گسسته‌سازی رابطه (۱.۱) داریم

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})\Delta t_k Z_k.$$

تنها فرایندی با این ویژگی‌ها که دارای مسیرهای پیوسته است فرایند براونی است. لذا می‌توان نوشت

$$X_t = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta W_j.$$

اگر حد طرف راست عبارت بالا وقتی $\Delta t \to 0$ وجود داشته باشد خواهیم داشت

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, \omega)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, \omega)\mathrm{d}W_s.$$

بنابراین به روشنی برای پیدا کردن فرایند X_t لازم است به محاسبه انتگرال‌هایی به فرم زیر بپردازیم

$$\int_s^T f(t, \omega)\mathrm{d}W_t(\omega),$$

که $W_t(\omega)$ فرایند براونی یک بعدی استاندارد و f تابعی حقیقی روی $\Omega \times [0, \infty)$ است. برای رسیدن به این هدف گام‌های زیر را برمی‌داریم.

گام اول: فرض کنیم $\phi : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ تابعی ابتدایی [۳۹] باشد یعنی

$$\phi(t, \omega) = X(\omega)1_{(a,b]}(t), \quad a, b \in [0, \infty).$$

در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t \phi(s, \omega)\mathrm{d}W_s = \int_a^t X(\omega)1_{[a,b)}\mathrm{d}W_s(\omega) = X(\omega)[W_{b\wedge t}(\omega) - W_{a\wedge t}(\omega)],$$

که در آن برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

گام دوم: فرض کنیم f تابعی ساده [۴۰] روی $\Omega \times [0, \infty)$ باشد. یعنی

$$f = \sum_{j=0}^{n} \phi_i,$$

که ϕ_i ها توابع ابتدایی هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t f\mathrm{d}W_s = \sum_{j=0}^{n} \int_a^t \phi_i \mathrm{d}W_s. \tag{۲.۱}$$

تعریف ۱.۴.۱. رده‌ی $\mathcal{P}_2$ از توابع $f(t, \omega)$ روی مجموعه‌ی $\Omega \times [0, \infty)$، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است

[۳۹] Elimintary function

[۴۰] Simple function

- تابع $(t,\omega) \to f(t,\omega)$، $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$ـ اندازه‌پذیر است،
- به ازای هر t، تابع $f(t,.)$، $\mathcal{F}_t$ـ اندازه‌پذیر باشد،
- برای هر $T \geq 0$، $E\left[\int_0^T f^2(s,\omega)\mathrm{d}s\right] < \infty$.

لم ۱.۴.۱ (لم ایزومتری ایتو). اگر تابع $\phi(t,\omega)$ کران‌دار و ابتدایی باشد، آن‌گاه

$$E\left[\left(\int_s^T \phi(t,\omega)\mathrm{d}W_t(\omega)\right)^2\right] = E\left[\int_s^T \phi^2(t,\omega)\mathrm{d}t\right].$$

برهان. به [۲۷] رجوع کنید. □

لم ۲.۴.۱. اگر $f \in \mathcal{P}_2$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{\phi_n\}_n$ از توابع ساده وجود دارد به‌طوری‌که

$$E\left[\int_0^T |\phi(s) - f_n(s)|^2\mathrm{d}s\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

برهان. به [۲۷] رجوع کنید. □

گام سوم: اکنون می‌توانیم $\int_s^T f(t,\omega)\mathrm{d}W_t$ را برای هر $f \in \mathcal{P}_2$ تعریف کنیم زیرا برای $f \in \mathcal{P}_2$، با توجه به لم قبل دنباله‌ای از توابع ابتدایی مانند $\{\phi_n\}_n$ موجود است که به f میل می‌کند. پس می‌توان تعریف کرد

$$\int_0^T f\mathrm{d}W_t = \lim_{n\to\infty}\int_0^T \phi_n\mathrm{d}W_t.$$

که انتگرال اخیر را **انتگرال ایتو**[۴۱] نامند.

۲.۴.۱ فرمول ایتو

فرمول ایتو در حالت یک بعد

یک فرایند تصادفی بر پایه‌ی یک حرکت براونی در حالت کلی دارای معادله دیفرانسیل تصادفی

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t,t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t,t)\mathrm{d}W_t,$$

است که در آن $\mu(X_t,t)$ و $\sigma(X_t,t)$ فرایندهای سازگار با فیلتر ایجاد شده توسط حرکت براونی W_t می‌باشند. اگر f تابعی باشد که $f(x,t) \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$ [۴۲]، آنگاه فرایند $f(X_t,t)$ دارای معادله دیفرانسیل تصادفی زیر می‌باشد که به **فرمول ایتو**[۴۳] شناخته می‌شود

$$\mathrm{d}f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)(\mathrm{d}X_t)^2.$$

---

[۴۱] Itö integral

[۴۲] یعنی f روی $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر است.

[۴۳] Itôs formula

که $(\mathrm{d}X_t)^2 = (\mathrm{d}X_t).(\mathrm{d}X_t)$ مطابق قوانین زیر محاسبه می‌شود

$$\mathrm{d}W_t.\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}t.\mathrm{d}t = \mathrm{d}t.\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}W_t.\mathrm{d}t = 0.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\mathrm{d}f(x,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}W_t.$$

فرمول ایتو در حالت کلی

فرض کنید X یک فرایند تصادفی برداری به صورت زیر باشد

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix},$$

که در آن هر مؤلفه‌ی X_i از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی می‌کند

$$\mathrm{d}X_i = \mu_i(X_t,t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(X_t,t)\mathrm{d}W_j(t),$$

اگر

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_d \end{bmatrix},$$

را یک حرکت براونی برداری، و

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix},$$

را بردار رانش، همچنین ماتریس

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nd} \end{bmatrix},$$

را ماتریس انتشار تعریف کنیم، آنگاه می‌توان فرایند تصادفی برداری X را به صورت زیر نشان داد

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\mathrm{d}W_t,$$

اکنون تابع f را به‌گونه‌ای فرض می‌کنیم که $f(x,t) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ باشد، آنگاه فرایند $f(X_t, t)$ دارای معادله دیفرانسیل تصادفی زیر می‌باشد که به **فرمول ایتو چند بعدی** شناخته می‌شود

$$\mathrm{d}f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}X_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_j.$$

با فرض مستقل بودن حرکت‌های براونی، یعنی

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}W_i.\mathrm{d}W_i = \mathrm{d}t, && i = 1, 2, \ldots, d, \\ &\mathrm{d}W_i.\mathrm{d}W_j = 0, && i \neq j. \end{aligned}$$

فرمول ایتو به صورت زیر در می‌آید

$$\mathrm{d}f(x,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}W_i.$$

که در آن σ_i با ماتریس

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \ldots & \sigma_{id} \end{bmatrix},$$

و اگر σ^t را ترانهاده ماتریس σ قرار دهیم، C نیز با ماتریس $C = \sigma\sigma^t$ تعریف می‌شود.

ولی اگر حرکت‌های براونی وابسته باشند، یعنی

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}W_i.\mathrm{d}W_i = \mathrm{d}t, && i = 1, 2, \ldots, d, \\ &\mathrm{d}W_i.\mathrm{d}W_j = \rho_{ij}\mathrm{d}t, && i \neq j. \end{aligned}$$

در این حالت فرمول ایتو به صورت زیر تغییر می‌یابد

$$\mathrm{d}f(x,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}W_i.$$

فرمول ایتو برای فرایندهای پرش_انتشار

فرض کنید X یک فرایند انتشار با پرش به صورت زیر باشد

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t g(s)\mathrm{d}W_s + \int_0^t \int_E h(s,y)p(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y).$$

بنابراین برای هر تابع $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متعلق به $C^{1,2}$ داریم

$$f(t,X_t)-f(0,X_0)=\int_0^t\left(\frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s)+\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)f(s)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)g^2(s)\right)\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)g(s)\mathrm{d}W_s+\sum_{i=1}^{N_t}(f(t_i,X_{t_{i-}}(1+h(t_i,Y_i)))-f(t_i,X_{t_{i-}})).$$

۳.۴.۱ تغییر اندازه

قضیه ۱.۴.۱. فرض کنیم $(\Omega,\mathcal{F},P)$ یک فضای احتمال و Z یک متغیر تصادفی نامنفی با $E[Z]=1$ باشد. برای $A\in\mathcal{F}$ تعریف می‌کنیم

$$\widetilde{P}(A)=\int_A Z\,\mathrm{d}P.$$

آنگاه $\widetilde{P}$ یک اندازه احتمال است. علاوه بر این، اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد، آنگاه

$$\widetilde{E}[X]=E[XZ].$$

همچنین اگر Z متغیر تصادفی مثبت باشد، داریم

$$\widetilde{E}[Y]=E\left[\frac{Y}{Z}\right].$$

برهان. به [۳۳] رجوع کنید. □

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم $(\Omega,\mathcal{F},P)$ یک فضای احتمال و $\widetilde{P}$ اندازه احتمال معادل P باشد. اگر Z متغیر تصادفی مثبتی باشد که

$$\widetilde{P}(A)=\int_A Z\,\mathrm{d}P.$$

آنگاه Z را **مشتق رادون‌ـ‌نیکودیم**[۴۴] $\widetilde{P}$ نسبت به P می‌نامیم و می‌نویسیم

$$Z=\frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}P}.$$

قضیه ۲.۴.۱ (رادون‌ـ‌نیکودیم). اگر P و $\widetilde{P}$ اندازه‌های احتمال معادل تعریف شده روی $(\Omega,\mathcal{F})$ باشند، آنگاه متغیر تصادفی مثبت Z وجود دارد به‌طوری‌که $E[Z]=1$ و

$$\widetilde{P}(A)=\int_A Z\,\mathrm{d}P,\quad \forall A\in\mathcal{F}.$$

برهان. به [۳۳] رجوع کنید. □

لم ۳.۴.۱. اگر P و Q اندازه‌های احتمال معادل تعریف شده روی $(\Omega,\mathcal{F})$ باشند و فرض کنید $Z_t=E^P\left[\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}|\mathcal{F}\right]$. آنگاه فرایند کادلاگ و سازگار M یک Qـ مارتینگل است اگر وتنها اگر MZ یک Pـ مارتینگل باشد.

[۴۴] Radon-Nikodym

برهان. به [۲۸] رجوع کنید. □

قضیه ۳.۴.۱ (گیرسانوف [۴۵] تک بعدی). فرض کنیم $W(t)$، $0 \leq t \leq T$، یک حرکت براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{F}(t)$، $0 \leq t \leq T$، یک فیلتر برای حرکت براونی باشد. همچنین فرض کنیم $\theta(t)$ یک فرایند $\mathcal{F}(t)$ سازگار باشد و تعریف کنیم

$$\begin{aligned}
Z(t) &= \exp\left\{-\int_0^t \theta(u)\mathrm{d}W(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)\mathrm{d}u\right\}, \\
\widetilde{W}(t) &= \int_0^t \theta(u)\mathrm{d}u + W(t).
\end{aligned}$$

اگر

$$E\left[\int_0^t \theta^2(u)Z^2(u)\mathrm{d}u\right] < \infty,$$

و قرار دهیم $Z = Z[T]$، آنگاه تحت اندازه احتمال P، $E[Z] = 1$، تحت اندازه احتمال $\widetilde{P}$، $\widetilde{W}$ یک حرکت براونی است.

برهان. به [۳۳] رجوع کنید. □

قضیه ۴.۴.۱ (گیرسانوف dـ بعدی). فرض کنیم $W(t) = \Big(W_1(t), W_2(t), \ldots, W_d(t)\Big)$، $0 \leq t \leq T$، یک حرکت براونی dـ بعدی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{F}(t)$، $0 \leq t \leq T$، یک فیلتر برای حرکت براونی باشد. همچنین فرض کنیم $\theta(t) = \Big(\theta_1(t), \theta_2(t), \ldots, \theta_d(t)\Big)$، یک فرایند dـ بعدی $\mathcal{F}(t)$ سازگار باشد و تعریف کنیم

$$\begin{aligned}
Z(t) &= \exp\left\{-\int_0^t \theta(u)\mathrm{d}W(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)\mathrm{d}u\right\}, \\
\widetilde{W}_j(t) &= \int_0^t \theta_j(u)\mathrm{d}u + W_j(t).
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن شرایط قضیه (۳.۴.۱) تحت اندازه احتمال $\widetilde{P}$، $\widetilde{W}$ یک حرکت براونی است.

برهان. به [۳۳] رجوع کنید. □

قضیه ۵.۴.۱ (گیرسانوف ـ میر [۴۶]). اگر P و Q اندازه‌های احتمال معادل و X تحت P یک نیم‌مارتینگل با تجزیه $X = M + A$ باشد، آنگاه X یک نیم‌مارتینگل تحت Q خواهد بود و تجزیه‌ای به فرم $X = L + C$ دارد که در آن

$$L_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s}\mathrm{d}\left\langle Z, M\right\rangle_s,$$

یک Qـ مارتینگل و $C = X - L$ تحت Q یک فرایند با تغییرات متناهی است.

[۴۵] Girsanov

[۴۶] Girsanov-Meyer

۴.۴.۱ قضیه‌های فاینمن_ کاک

قضیه ۶.۴.۱ (فاینمن_ کاک[۴۷]). فرض کنیم F جوابی برای مسئله‌ی مقدار مرزی زیر باشد

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)=0, \\ F(T,x)=\phi(x). \end{cases}$$

همچنین فرض کنیم که فرایند

$$\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s),$$

متعلق به $\mathcal{L}^2$ [۴۸] است که در آن X جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر است.

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_s=\mu(X_s,s)\mathrm{d}s+\sigma(X_s,s)\mathrm{d}W_s, \\ X_t=x. \end{cases}$$

در این صورت F دارای نمایشی به صورت زیر می‌باشد.

$$F(t,x)=E[\phi(X_T)|X_t=x].$$

برهان. به [۲۳] رجوع کنید. □

قضیه ۷.۴.۱ (فاینمن_ کاک تنزیل شده). فرض کنیم F جوابی برای مسئله‌ی مقدار مرزی زیر باشد

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)-rF(t,x)=0, \\ F(T,x)=\phi(x). \end{cases}$$

همچنین فرض کنیم که فرایند

$$\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s),$$

متعلق به $\mathcal{L}^2$ است که در آن X جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر است.

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_s=\mu(X_s,s)\mathrm{d}s+\sigma(X_s,s)\mathrm{d}W_s, \\ X_t=x. \end{cases}$$

---

[۴۷] Feynman-Kac

[۴۸] فرایند f متعلق به کلاس $\mathcal{L}^2[a,b]$ است، هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

- $\int_a^b E[f^2(s)]\mathrm{d}s<\infty$
- فرایند f با فیلتر $\mathcal{F}_t^W$ سازگار باشد.

در این صورت F دارای نمایشی به صورت زیر می‌باشد.

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}E[\phi(X_T)|X_t = x].$$

برهان. به [۲۳] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۸.۴.۱ (کاربرد فاینمن ـ کاک). فرض کنیم V قیمت یک اختیار اروپایی باشد که در مسئله‌ی مقدار مرزی زیر صدق می‌کند

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t,s) + \mu(t,s)\frac{\partial V}{\partial s}(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,s)\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(t,s) = 0, \\ V(T,s) = P(s). \end{cases}$$

که در آن $P(s)$ بازده اختیار در زمان T است. اگر W_t فرایند براونی استاندارد باشد و قیمت دارایی پایه از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی کند

$$\mathrm{d}S_t = \mu(t,S_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,S_t)\mathrm{d}W_t,$$

آنگاه V دارای نمایشی به صورت زیر است.

$$V(t,S_t) = E[P(S_T)|S_t = s].$$

برهان. بنابر فرمول ایتو برای V، داریم

$$\mathrm{d}V(t,S_t) = \frac{\partial V(t,S_t)}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(t,S_t)}{\partial S_t^2}(\mathrm{d}S_t)^2.$$

با توجه به معادله دیفرانسیل تصادفی $\mathrm{d}S_t$، و جایگذاری آن در معادله فوق نتیجه می‌گیریم

$$\mathrm{d}V(t,S_t) = \left(\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial t} + \mu(t,S_t)\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,S_t)\frac{\partial^2 V(t,S_t)}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma(t,S_t)\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S_t}\mathrm{d}W_t.$$

با توجه به فرض

$$\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial t} + \mu(t,S_t)\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,S_t)\frac{\partial^2 V(t,S_t)}{\partial S_t^2} = 0.$$

بنابراین

$$\mathrm{d}V(t,S_t) = \sigma(t,S_t)\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S_t}\mathrm{d}W_t,$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف تساوی می‌توان نوشت

$$V(t,S_t) = V(T,S_T) - \int_t^T \sigma(u,S_u)\frac{\partial V(u,S_u)}{\partial S_u}\mathrm{d}W_u,$$

با توجه به اینکه $\sigma(t,S_t)\frac{\partial V(t,S_t)}{\partial S_t} \in \mathcal{L}^2$ و $\mathrm{d}W_t \sim N(0,\mathrm{d}t)$ داریم

$$E\left[\int_t^T \sigma(u,S_u)\frac{\partial V(u,S_u)}{\partial S_u}\mathrm{d}W_u | S_t = s\right] = 0,$$

و بنابراین
$$V(t,S_t)=E[V(T,S_T)|S_t=s].$$
با توجه به اینکه $V(T,S_T)=P(S_T)$، داریم
$$V(t,S_t)=E[P(S_T)|S_t=s].$$
□

فرمول نمایی دولینز_ دید [۴۹]

قضیه ۹.۴.۱. فرض کنید X یک نیم‌مارتینگل باشد، $X_0=0$، در اینصورت نیم‌مارتینگل Z که در معادله
$$Z_t=1+\int_0^t Z_{s_-}\mathrm{d}X_s$$
صدق می‌کند وجود دارد (منحصربه‌فرد است) و داریم
$$Z_t=\exp\left\{X_t-\frac{1}{2}\left\langle X,X\right\rangle_t\right\}\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta X_s)\exp\left\{-\Delta X_s+\frac{1}{2}(\Delta X_s)^2\right\}.$$
که در آن حاصلضرب متناهی آن‌ها همگراست.

برهان. به [۲۸] رجوع کنید. □

تعریف ۳.۴.۱. نمایی تصادفی نیم‌مارتینگل X، $X_0=0$، که با $\varepsilon(X)$ نشان می‌دهیم، نیم‌مارتینگل Z است که جواب معادله
$$Z_t=1+\int_0^t Z_{s_-}\mathrm{d}X_s$$
می‌باشد. قضیه فوق یک فرمول کلی برای $\varepsilon(X)$ مشخص می‌کند. نمایی تصادفی با عنوان دولینز_دید تصادفی نیز شناخته می‌شود.

۵.۱ مفاهیم مالی

۱.۵.۱ اختیارمعامله

فرض کنید در لحظه $t=0$، سهامی را به قیمت S_0 بخرید و قصد داشته باشید آن را تا زمان T نگه دارید و سپس به قیمت S_T بفروشید. از آنجایی که نوسانات قیمت سهام تصادفی است، در لحظه $t=0$، مقدار S_T معلوم نیست. پس این امکان وجود دارد که به علت کاهش قیمت سهام متضرر شوید.

[۴۹] Doléans-Dade exponential

یک قرارداد مالی بدین صورت در نظر بگیرید: اگر در لحظه $t = 0$، مبلغ π_0 را بپردازید، در لحظه T می‌توانید (در صورت تمایل) سهام خود را به قیمت از پیش تعیین شده K بفروشید. در صورت انعقاد چنین قراردادی، در لحظه T، دو حالت ممکن است

۱. اگر $S_T < K$، سهام را به قیمت K به طرف قرارداد می‌فروشید و با پرداخت مبلغ S_T سهام را از بازار خریداری می‌کنید و سود $K - S_T$ عایدی شما خواهد بود.

۲. چنانچه $S_T \geq K$، قرارداد را اعمال نخواهید کرد و عایدی شما برابر صفر خواهد بود.

به عبارت دیگر با پرداخت مبلغ تعیینی π_0 در زمان $t = 0$، مبلغ تصادفی $\max\{K - S_T, 0\}$ را در زمان T دریافت خواهید کرد. چنین قراردادی در ریاضیات مالی، اختیار فروش اروپایی نامیده می‌شود. به طور کلی منظور ما از **اختیار معامله**[۵۰] قراردادی است که به دارنده آن، حق (نه الزام) خرید یا فروش دارایی موضوع قرارداد را به قیمت معین در تاریخ مشخص می‌دهد. می‌توان اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد، **اختیار خرید**[۵۱] و **اختیار فروش.**[۵۲] اختیارخرید (فروش) به دارنده آن این حق را می‌دهد که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن خریداری کند (بفروشد). هر یک از اختیارهای خرید و فروش را می‌توان به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم کرد. **اختیار اروپایی**[۵۳] فقط در تاریخ سررسید قابل اجرا است، در حالی که **اختیار آمریکایی**[۵۴] را می‌توان در هر زمان قبل از سررسید، و یا در سررسید اجرا کرد.

در بازارهای مالی علاوه بر دارایی پایه نظیر سهام و اوراق قرضه، اختیار معامله نیز خرید و فروش می‌شود. منظور از حل مسأله قیمت گذاری اختیار معامله، تعیین قیمت عادلانه‌ی آن در لحظه‌ی $t \in [0, T]$ است که با π_t نشان داده می‌شود.

اکنون می‌خواهیم با توجه به تصادفی بودن قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید، بازده‌ی سرمایه‌ی سرمایه‌گذار در اختیارمعامله‌های اروپایی را در حالت کلی بررسی کنیم. فرض می‌کنیم که مبلغ اولیه سرمایه‌گذاری در اینجا دخیل نمی‌باشد. اگر K را قیمت توافقی و S_T را قیمت دارایی پایه در زمان سررسید بدانیم، بازده حاصل از موقعیت خرید در یک اختیار خرید اروپایی عبارت است از

$$\max\{S_T - K, 0\}.$$

بازده سرمایه‌گذاری که موقعیت فروش در یک اختیار خرید اروپایی اتخاذ کرده است به ترتیب زیر خواهد بود

$$-\max\{S_T - K, 0\} = \min\{K - S_T, 0\}.$$

[۵۰] Option

[۵۱] Call option

[۵۲] Put option

[۵۳] European option

[۵۴] American option

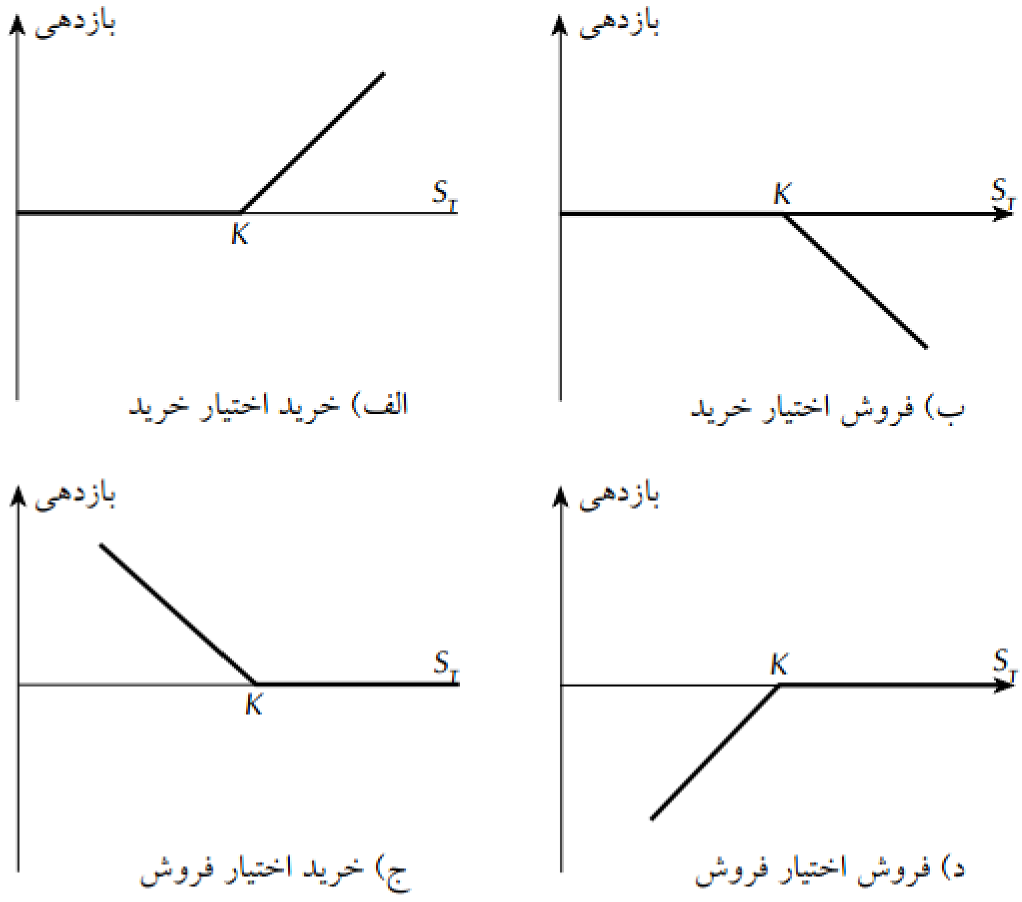
به این ترتیب بازده سرمایه‌گذاری که موقعیت خرید در یک اختیار فروش اروپایی اتخاذ کرده است به صورت زیر می‌باشد

$$\max\{K - S_T, 0\}.$$

همچنین بازده دارنده موقعیت فروش در قرار داد اختیار فروش اروپایی به صورت زیر است.

$$-\max\{K - S_T, 0\} = \min\{S_T - K, 0\}.$$

نمودارهای شکل (۱.۱) این حالات را نشان می‌دهند. علاوه بر اختیارمعامله‌های استاندارد،



شکل ۱.۱: بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معاملات اروپایی.

اختیارمعامله‌های غیراستاندارد نیز وجود دارد. قراردادهای اختیارمعامله غیر استاندارد یا نامتعارف، اختیاراتی هستند که با استفاده از یک سری قواعد، بازده‌هایی را به دست می‌دهند که محاسبه این بازده‌ها همچون اختیارمعامله استاندارد ساده و آسان نیست. از جمله اختیارات

غیر استاندارد می‌توان اختیار آسیایی [۵۵]، اختیار متکی به گذشته [۵۶] و مانع [۵۷] را نام برد.
دسته‌ای دیگر از اختیارات غیر استاندارد، اختیار معاملات توان [۵۸] می‌باشند. اختیار معامله توان استاندارد، اختیاری است که بازدهی آن، وابسته به قیمت دارایی پایه با توانی از $m > 0$ است. اگر S_T قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید $T > 0$ و K را قیمت توافقی بدانیم، بازده حاصل از اختیار خرید توان mـ ام استاندارد عبارت است از

$$\max\{S_T^m - K^m, 0\}.$$

و به همین ترتیب، بازده حاصل از اختیار فروش توان mـ ام استاندارد عبارت است از

$$\max\{K^m - S_T^m, 0\}.$$

اختیارمعامله‌های توان به دلیل قدرت نفوذ قابل توجه‌ای که نسبت به اختیار معامله‌های معمولی دارند، توجه خریداران اختیار معامله و سرمایه‌گذاران را جلب نموده‌اند. زیرا برای یک سرمایه‌گذار تیزبین در بازار، اختیارمعامله‌های توان به دلیل داشتن بازدهی بهتر بخصوص در بازار تبادلات ارز خارجی و شاخص‌ها، توانمندتر از اختیار معامله‌های معمولی عمل می‌کند.

تعریف ۱.۵.۱. یک **مشتق مالی استاندارد**، قراردادی است که به موجب آن دارایی پایه در زمان معلوم با قیمت توافق شده مشخص مورد معامله قرار گیرد. قرارداد اختیار معامله یکی از انواع مشتقات مالی است.

تعریف ۲.۵.۱. به‌طور کلی **ریسک**[۵۹] احتمالی است که انجام یا عدم انجام کاری مشخص منجر به زیان و پیامدهای ناخوشایند و ناخواسته گردد. در ادبیات مالی ریسک را به عنوان رویدادهای غیر منتظره‌ای تعریف می‌کنند که معمولا باعث تغییر در ارزش دارایی‌ها یا بدهی‌ها می‌شود.

تعریف ۳.۵.۱. دارایی‌هایی را که میزان سود آن‌ها در سررسید به‌طور قطع از قبل مشخص نباشد مانند سهام و اختیارمعامله **دارایی‌های ریسکی** می‌نامند.

تعریف ۴.۵.۱. **دارایی بدون ریسک**، دارایی است که هنگام سرمایه‌گذاری میزان سود آن در سررسید به‌طور قطع مشخص می‌شود مانند سپرده‌های سرمایه‌گذاری اشخاص در بانک‌ها و اوراق قرضه.

[۵۵] Asian option
[۵۶] Look back option
[۵۷] Barrier option
[۵۸] Power option
[۵۹] Risk

۲.۵.۱ سبد سهام

تعریف ۵.۵.۱. مجموعه سرمایه‌گذاری، مجموعه‌ای از اوراق بهادار و مشتقات مالی است که این اوراق و مشتقات هر کدام دارای بازده و ریسک جداگانه‌ای هستند. به مجموعه سرمایه‌گذاری در اصطلاح مالی، **سبد مالی** یا پرتفوی [۶۰] گفته می‌شود.

فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فضای نمونه‌ای Ω متناهی باشد. با گذشت زمان اطلاعات ما راجع به بازار افزایش می‌یابد و ما این جریان اطلاعات را با فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ نشان می‌دهیم. به لحاظ شهودی $\mathcal{F}_t$ عبارت است از اطلاعات ما از بازار تا زمان t. معمولا فرض می‌شود $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ و $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
همچنین فرض می‌کنیم در بازار تنها دو دارایی خرید و فروش می‌شود، یکی دارایی بدون ریسک (مثلا ورق قرضه) و دیگری دارایی ریسکی (مثلا سهام). قیمت این دو دارایی را به ترتیب با فرایندهای تصادفی مثبت و $\mathcal{F}_t$ـ سازگار $S_t^{(0)}$ و $S_t^{(1)}$ نشان می‌دهیم. در اینجا تنها یک دارایی ریسکی در نظر گرفته‌ایم در حالی که می‌توان تمام نتایج را به حالتی که در بازار بیش از یک دارایی ریسکی موجود است تعمیم داد. معمولا برای سهولت بازار را نرمال می‌کنند، یعنی تمام قیمت‌ها را به قیمت دارایی بدون ریسک تقسیم می‌کنند. بدین‌ترتیب قیمت نرمال‌شده‌ی دارایی بدون ریسک همواره برابر یک و قیمت نرمال‌شده‌ی دارایی ریسکی برابر $S_t = \frac{S_t^{(1)}}{S_t^{(0)}}$ است. از این پس منظور ما از قیمت، قیمت نرمال‌شده خواهد بود.
یک سبد مالی فرایند تصادفی پیش‌بینی‌پذیری چون $\varphi = \{\varphi_t\}_{t\in[0,T]}$ است که $\varphi_t = (\xi_t, \eta_t)$. در زمان t، ξ_t تعداد سهام و η_t تعداد اوراق قرضه موجود در سبد مالی را نشان می‌دهد. پیش‌بینی‌پذیر بودن φ یعنی $\varphi_t \in \mathcal{F}_{t-1}$ برای هر $t \in [0,T]$.
ارزش سبد مالی عبارت است از فرایند تصادفی $V = \{V_t\}_{t\in[0,T]}$ که $V_t = \xi_t S_t + \eta_t$. در لحظه t پس از مشاهده قیمت‌ها، با استفاده از پیش‌بینی‌پذیر بودن φ، φ_{t+1} تعیین می‌شود که ارزش آن برابر $\xi_{t+1}S_t + \eta_{t+1}$ است. در لحظه $t+1$ پس از مشاهده قیمت‌ها و قبل از تعیین سبد سرمایه جدید، ارزش سبد مالی $\xi_{t+1}S_{t+1} + \eta_{t+1}$ می‌باشد. پس عایدی حاصل از این سبد مالی روی بازه $(t, t+1]$ برابر است با $\xi_{t+1}(S_{t+1} - S_t)$. بنابراین تعریف عایدی به عنوان فرایند تصادفی $G = \{G_t\}_{t\in[0,T]}$ که $G_T(\varphi) = \sum_{i=0}^{t-1} \xi_{i+1}(S_{i+1} - S_i)$ مناسب به نظر می‌رسد.

تعریف ۶.۵.۱. منظور از یک استراتژی **خودتأمین**، سبد مالی‌ای است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها منحصر به خرید سهام و اوراق قرضه و درآمدها ناشی از فروش سهام و اوراق قرضه باشد.

برای فرمول‌بندی ریاضی این مفهوم توجه می‌کنیم که ارزش سبد مالی در لحظه t برابر است با $\xi_t S_t + \eta_t$ و این مبلغ صرف تشکیل سبد مالی جدید به ارزش $\xi_{t+1}S_t + \eta_{t+1}$ می‌شود، سبد مالی $\varphi = (\xi, \eta)$ را خودتأمین می‌گوییم هرگاه

$$\forall t \in [0,T], \qquad \Delta\xi_t S_t + \Delta\eta_t = 0,$$

[۶۰] Portfolio

که $\Delta\xi_t = \xi_{t+1} - \xi_t$. به آسانی می‌توان بررسی کرد که این تعریف معادل است با ثابت بودن فرایند هزینه‌ی $C(\varphi) := V(\varphi) - G(\varphi)$. به عبارت دقیق‌تر، خودتأمین بودن سبد مالی معادل است با این که بنویسیم

$$\forall t \in [0,T], \qquad C_t(\varphi) = \text{ثابت} = V_0(\varphi).$$

۳.۵.۱ آربیتراژ

تعریف ۷.۵.۱. یک **فرصت آربیتراژ**[۶۱]، عبارت است از سبد مالی خودتأمین φ که برای هر $t \in [0,T]$،

$$P(V_t(\varphi) \geq 0) = 1,$$
$$P(V_T(\varphi) > V_0(\varphi)) \neq 0.$$

به طور شهودی فرصت آربیتراژ، امکان به‌دست آوردن سود، بدون متحمل شدن ریسک است. آربیتراژ یک استراتژی جذاب برای سرمایه‌گذاران است. اگر سهامی در یک بورس با یک قیمت و در بورسی دیگر با قیمت متفاوت به فروش رسد، آربیتراژکننده به جنب و جوش می‌افتد، که به قیمت پایین بخرد و با قیمت بالا بفروشد، درنتیجه قیمت‌های پایین افزایش و قیمت بالا کاهش می‌یابد و این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که قیمت‌ها به تعادل برسند. قاعدتا سبدهای یکسان باید دارای قیمت یکسان باشند وگرنه آربیتراژکننده‌ها به سرعت وارد عمل شده و عملکرد آن‌ها، قیمت‌ها را به تعادل می‌رساند.

تعریف ۸.۵.۱. یک **ادعای مشروط**[۶۲]، چیزی نیست جز یک متغیر تصادفی نامنفی و $\mathcal{F}_T$–اندازه‌پذیر.

تعریف ۹.۵.۱. ادعای مشروط H را **دست‌یافتنی**[۶۳] می‌نامیم هرگاه سبد مالی خودتأمین φ موجود باشد که

$$V_T(\varphi) = H, \quad a.s.$$

در این صورت φ یک **پوشش ریسک**[۶۴] برای H نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۵.۱. بازار را کامل می‌نامیم هرگاه هر ادعای مشروط، دست‌یافتنی باشد. در غیر این صورت بازار ناکامل است.

قضیه ۱.۵.۱ (قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری). مدل عاری از آربیتراژ است اگر و فقط اگر اندازه احتمال مارتینگل موجود باشد.

[۶۱] Arbitrage opportunity
[۶۲] Contingent claim
[۶۳] attainable
[۶۴] Hedging

برهان. به [۵] رجوع کنید. □

این قضیه بین یک مفهوم اقتصادی (وجود بازار بدون آربیتراژ) و یک مفهوم ریاضی (وجود اندازه احتمال مارتینگل) ارتباط ایجاد می‌کند.

قضیه ۲.۵.۱ (قضیه اساسی دوم قیمت‌گذاری)**.** فرض کنیم بازار عاری از آربیتراژ باشد، آنگاه بازار کامل است اگر و تنها اگر اندازه احتمال مارتینگل منحصربفرد باشد.

برهان. به [۵] رجوع کنید. □

تعریف ۱۱.۵.۱. تلاطم[۶۵] یک سهم، معیاری برای اندازه‌گیری عدم اطمینان در مورد بازده‌های آن سهم است. در واقع تلاطم قیمت یک سهم انحراف معیار بازده سهم در طول یک سال است.

تعریف ۱۲.۵.۱. نرخ بهره[۶۶]، نرخی است که توسط قرض‌گیرنده، بابت استفاده از پولی که از قرض‌دهنده گرفته، پرداخت می‌شود. به طور خاص، هرگاه مبلغی پول برای مدت معینی وام داده شود، مبلغی که در آینده وام گیرنده به وام دهنده می‌پردازد، بیش از مبلغ دریافتی اولیه خواهد بود. این پرداخت اضافی یا نرخ بهره را می‌توان به صورت نسبت مابه‌التفاوت مبلغ دریافتی و مبلغ بازپرداخت در پایان یک دوره معین به کل پول دریافتی بیان کرد. بدین ترتیب هرگاه ۱۰۰ ریال وام داده شود و در پایان سال ۱۰۵ ریال دریافت گردد، نرخ بهره سالانه برابر خواهد بود با ۵ درصد. ۰/۰۵=۱۰۰/(۱۰۰-۱۰۵)
معمولا نرخ بهره برای یک سال محاسبه می‌شود و هرگاه مدت آن مشخص نشود، منظور همان دوره سالانه است.

تعریف ۱۳.۵.۱ (نرخ تنزیل)**.** پایه و اساس تجزیه و تحلیل‌های مالی درک مفهوم این جمله است که هر رقم پیش‌بینی شده برای قیمت دارایی در سال‌های آتی برابر یک سرمایه‌گذاری با نرخ سود سالانه در زمان حال می‌باشد. برای حذف عامل زمان در محاسبات، ارزش دارایی را که در سال‌های آتی کسب می‌گردد با استفاده از ضریب تنزیل e^{-rt} به ارزش روز تبدیل می‌نماییم. در این حالت نرخ بهره سالانه r که در محاسبات به عنوان نرخ بهره سرمایه‌گذاری در یک بازار بورس بدون ریسک می‌باشد را به عنوان **نرخ تنزیل** در نظر می‌گیرند [۲۵]. لذا فرض کنید نرخ بهره، یک فرایند سازگار $R(t)$ باشد. فرایند تنزیل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s)\mathrm{d}s}.$$

تعریف ۱۴.۵.۱. اندازه احتمال Q را **اندازه ریسک خنثی**[۶۷] گوییم هرگاه داشته باشیم

[۶۵] Volatility
[۶۶] Interest rate
[۶۷] Risk neutral measure

۱. Q و P دو اندازه احتمال معادل باشند.

۲. فرایند قیمت دارایی تنزیل شده $D(t)S(t)$ تحت Q مارتینگل باشد.

در صورت ثابت بودن نرخ بهره، نرخ تنزیل e^{-rt} می‌باشد.

فصل ۲

قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل رژیم سوئیچینگ

۱.۲ پیشینه تحقیق

در سال‌های اخیر اکثر مطالعات تجربی بر روی شکست‌های ساختاری بازار دارایی پایه (سهام) تمرکز یافته است. افزایش قیمت نفت خام (۱۹۷۴-۱۹۷۳)، ورشکستگی بازار سهام (۱۹۷۸)، حمله عراق به کویت(۱۹۹۰) و یا بحران مالی در کشورهای آسیای شرقی(۱۹۹۷)، نمونه‌ای از رخدادهایی است که موجب تغییر در فرایند سری زمانی مالی می‌شود. مدلی که می‌تواند این تغییر را توضیح دهد و اندازه‌گیری کند مدل رژیم سوئیچینگ است.

مدل رژیم سوئیچینگ به‌طور موثر خواص سری‌های زمانی پیچیده از چندین متغیر مهم، از جمله نرخ بهره و نرخ ارز و غیره را محاسبه می‌کند. تحقیقات و پژوهش‌های رسیده، اقتصاد سنجی را با مدل‌های رژیم سوئیچینگ توسعه داده و برتری این مدل را نسبت به سایر مدل‌ها ثابت کرده است.

بدین ترتیب مدل رژیم سوئیچینگ به طور گسترده در بازارهای سهام و مشتقات مورد استفاده قرار گرفت. ایده‌ی اصلی، در نظر گرفتن تغییرات رفتار رژیم است. هیشیما [1] وجود احتمالی رژیم سوئیچینگ را در بازده‌ی بازار سهام پنج اقتصاد توسعه یافته بررسی کرد و تغییر

[1] Hichima

رفتار رژیم را در تمامی نوسانات بازارهای سهام تشخیص داد. نتایج حاصله از مقاله‌ی ارایه شده توسط وانگ [۲] یک مدرک قوی برای وجود بیش از یک رژیم در هر بازار مالی می‌باشد. او بیان کرد که: انصافا، تغییرات پویای قیمت‌های دارایی‌های پایه به وسیله مدل‌هایی که با یک مولفه‌ی رژیم سوئیچینگ ترکیب شده‌اند، بهتر می‌توانند توصیف شوند. در نتیجه حضور رژیم سوئیچینگ در پویایی بازار به خوبی تصدیق شده است. بارها این پدیده مشاهده شده است که یک مرحله تغییر بین بحران و توسعه چرخه تجارت معمولا به یک تغییر معناداری در بازگشتی سهام، نرخ بهره و دیگر شاخص‌های مالی منجر می‌شود. این تغییرات نشان‌دهنده‌ی الگوهای چرخه‌ای و دوره‌ای معین است.

اما در ارزیابی اختیارات با رژیم سوئیچینگ توجه کمتری شده است. خطای قیمت‌گذاری با معادله بلک‌ـشولز زمانی که یک فرایند رژیم سوئیچینگ بازدهی دارایی پایه را کنترل می‌کند، به خوبی نشان داده می‌شود. به علاوه، قیمت‌گذاری اختیارات با رژیم سوئیچینگ اثر تلاطم در اکثر مطالعات تجربی را نشان می‌دهد. این نتایج حمایت‌های دلگرم کننده‌ی را تدارک می‌بینند که این تکنیک ارزیابی، پر اهمیت است و به اندازه‌ی کافی در محاسبه‌ی اجزای اصلی معاملات قیمت اختیار غنی است.

بینش پشت سر مدل‌های رژیم سوئیچینگ واضح است. پژوهش‌های گذشته روش‌های اقتصادی را برای تخمین پارامترهای مدل رژیم سوئیچینگ توسعه داده‌اند. در این پژوهش‌ها ثابت شده است که مدل‌های رژیم سوئیچینگ رفتار سری‌های زمانی از چندین متغیر را نسبت به مدل تک رژیمی بهتر توصیف می‌کنند. همیلتون [۳] بر روی یک مدل رژیم سوئیچینگ با گام‌های ثابت در هر رژیم مطالعه کرد. او یک تابع درست نمایی لگاریتمی را بر پایه‌ی احتمال در رژیم‌ها برای تخمین پارامترها ساخت و سپس آن را ماکسیمم کرد. همیلتون و گرای [۴] با دوباره مدل کردن مسئله، تخمین را برحسب احتمال بودن در رژیم خاص به صورت شرطی روی داده‌های قابل مشاهده، ساده کردند.

گرای (۱۹۹۶) بر روی نرخ‌های بهره، مطالعه کرد و نشان داد که مدل رژیم سوئیچینگ، پیش‌بینی‌های نوسانات را بهتر از مدل‌هایی که در آن واریانس ثابت است و یا یک مدل گارچ [۵] تک رژیمی نشان می‌دهد. نتایج او نشان داد که قیمت‌گذاری دقیق اختیارات نیازمند یک فرایند رژیم سوئیچینگ برای بازگشتی دارایی پایه است زیرا که پیش‌بینی نوسانات کلید ورودی برای همه‌ی روش‌های ارزیابی مشتقات است.

بولن [۶] یک درخت پنج جمله‌ای را برای حالت دو رژیم که برای تقریبی از قیمت اختیار اروپایی وآمریکایی می‌تواند استفاده شود، طراحی کرد. بافینگتون و الیوت [۷] بر روی اختیارات

[۲] Wang

[۳] Hamilton

[۴] Gray

[۵] Garch

[۶] Bollen

[۷] Buffingron and Elliott

اروپایی و آمریکایی با مدل رژیم سوئیچینگ مطالعه کردند و به یک سیستم از معادلات دیفرانسیل جزئی شبیه معادله بلک شولز در قیمت اختیار با بکارگیری اصل قیمت‌گذاری ریسک خنثی دست یافتند. یاو [۸] بر روی سیستمی از معادله دیفرانسیل جزئی که با دقت شرایط کران هموار را برای تقریب قیمت اختیار انتخاب می‌کند، بررسی کرده و به توسعه‌ی روش‌های تقریبی پرداخته است.

۲.۲ مقدمه

همان‌گونه که در فصل اول اشاره کردیم، قیمت‌گذاری اختیارات [۹] از مباحث اصلی در تجزیه و تحلیل مشتقات مالی است. از آن‌جا که مدل‌سازی اختیارات بر مدل دارایی پایه استوار است لذا، نخست با استفاده از خواص فرایند مارکوف و مفهوم رژیم‌های اقتصادی، رفتار قیمت دارایی پایه (سهام) را مدل‌سازی می‌کنیم و مدل بدست‌آمده را مدل رژیم سوئیچینگ [۱۰] می‌نامیم سپس با بستن یک اختیار توان روی دارایی پایه‌ی مذکور، یک مدل پویا و نوین در بازار مشتقات بدست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم مدل مذکور در یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی [۱۱] صادق است.

۳.۲ زنجیر مارکوف زمان پیوسته

فرض کنید X_t، برای هر $t \geq 0$، یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد و مقادیر خود را از مجموعه S بگیرد. در این صورت مجموعه‌ی $\{X_t, t \geq 0\}$ یک فرایند تصادفی روی فضای حالت S است.

یک فرایند تصادفی $\{X_t, t \geq 0\}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$، با مقادیرش در مجموعه‌ی شمارشی S (که **فضای حالت**[۱۲] نامیده می‌شود)، **زنجیر مارکوف زمان پیوسته**[۱۳] است، اگر برای هر دنباله‌ی متناهی از زمان‌های $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ و مجموعه‌ی متناظر از حالات $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i, j$ در S، رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i) = P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i) \qquad (۱.۲)$$

که در آن

$$P(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_n} = i) > 0.$$

[۸] Yao et al
[۹] Option pricing
[۱۰] Regime switching
[۱۱] Partial differential equation
[۱۲] State space
[۱۳] Continuous-time Markov chain

رابطه (۱.۲) خاصیت مارکوف نامیده می‌شود و برای هر s، t، $0 \leq s \leq t$،

$$P(s,i,t,j) := P(X_t = j | X_s = i), \quad i,j \in S, \tag{۲.۲}$$

تابع (احتمال) انتقال زنجیر [۱۴] می‌باشد. $P(s,i,t,j)$ بیانگر احتمال انتقال فرایند به حالت j در زمان t است وقتی که در زمان s در حالت i باشد.

گزاره ۱.۳.۲. فرض کنید $P(s,i,t,j)$ تابع انتقال از یک زنجیر مارکوف باشد. برای هر $i,j \in S$ و $0 \leq s \leq t$ داریم

۱. $P(s,i,t,j) \geq 0$

۲. $\sum_{j \in S} P(s,i,t,j) = 1$

۳. $P(s,i,t,j) = \delta_{ij}$

۴. برای هر $i,j \in S$، و $0 \leq s \leq v \leq t$ داریم

$$P(s,i,t,j) = \sum_{k \in S} P(s,i,v,j) P(v,k,t,j)$$

از آن‌جا که تابع احتمال انتقال زمان پیوسته در بیشتر موارد قابل محاسبه نیست، معمولا زنجیر مارکوف زمان پیوسته بر حسب نرخ‌های انتقال [۱۵] مشخص می‌شود نه تابع احتمال انتقال آن.

تعریف ۱.۳.۲. یک تابع انتقال استاندارد [۱۶] است، اگر علاوه بر شرایط گزاره (۱.۳.۲) در شرط زیر نیز صادق باشد

$$\lim_{t \downarrow s} P(s,i,t,j) = \delta_{ij}.$$

حال فرض کنید $P(s,i,t,j)$ یک تابع استاندارد باشد، آنگاه برای هر دو حالت $i \neq j$ و $s \geq 0$ خواهیم داشت

۱. $q_{ii} = \lim_{t \to s^+} \frac{P(s,i,t,j)-1}{t-s}$ موجود و منفی است.

۲. $q_{ij} = \lim_{t \to s^+} \frac{P(s,i,t,j)}{t-s}$ موجود، نامنفی و متناهی است.

۳. $\sum_{j \neq i} q_{ij}(s) < q_i(s)$، که $q_i(s) := -q_{ii}(s) > 0$. (q_{ij} نرخ انتقال نامیده می‌شود).

تعریف ۲.۳.۲. برای هر $i,j \in S$، فرض کنید q_{ij} تابع حقیقی مقدار تعریف شده روی $[0,\infty[$ باشد. ماتریس $Q(t) := [q_{ij}]$، **ماتریس نرخ انتقال ناهمگن** است اگر برای هر i,j و $t \geq 0$

[۱۴] The chain's transition (probability) function

[۱۵] The transition rates

[۱۶] Standard transition function

۱. $q_{ij}(t) \geq 0 \quad i \neq j,$

۲. $0 \leq q_i(t) := -q_{ii}(t) < \infty,$

۳. $\sum_{j \in S} q_{ij}(t) \leq 0.$

اگر $i \in S$ و $t \geq 0$، $\sum_{j \in S} q_{ij}(t) = 0$، آنگاه تابع $Q(t)$ را محافظه‌کار [۱۷] گوییم.
اگر هر مولفه‌ی q_{ij} برای $Q(t)$ مستقل از t باشد (یعنی $q_{ij}(t) = q_{ij}$)، آن‌گاه ماتریس Q، همگن نامیده می‌شود و داریم $Q := [q_{ij}]$. در این پایان‌نامه نیز از یک ماتریس نرخ انتقال همگن محافظه‌کار با شرایط زیر استفاده شده است.

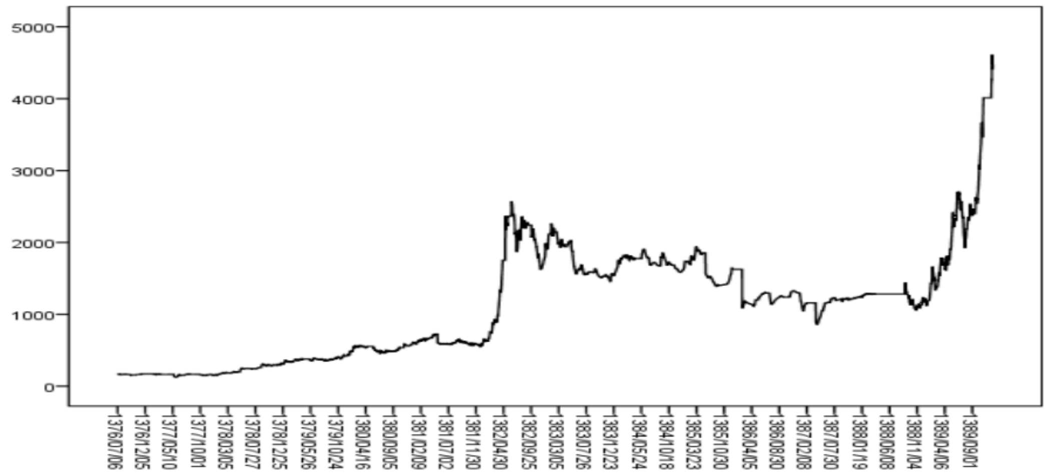
$$q_{ij} \geq 0, \qquad i \neq j, \tag{۳.۲}$$

$$q_{ii} \geq 0, \qquad q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}. \tag{۴.۲}$$

۴.۲ رژیم سوئیچینگ

بسیاری از پارامترها دستخوش حوادثی می‌شوند که به واسطه آن دینامیک دارایی پایه (رفتار سری) به طور چشم‌گیری تغییر می‌کند.
این مطلب در هر اقتصاد کلانی و در سری‌های زمانی مالی برای دوره‌های به اندازه کافی طولانی دیده می‌شود. چنین تغییراتی در فرایند سری زمانی می‌تواند در نتیجه رخدادهایی چون جنگ، بحران‌های مالی، تغییرات مهم در سیاست‌های حکومتی و غیره پدید آید [۲۹]. بی‌ثباتی در مدل، اغلب به عنوان سوییچ در یک معادله از یک رژیم به رژیم دیگر تعریف شده است. در اکثر تحقیقات ممکن است اطلاعات کمی در مورد زمان‌هایی که پارامترها تغییر می‌کنند وجود داشته باشد. در ابتدا برخی محققین مدل‌هایی را در نظر گرفتند که فقط یک رژیم را در سری داده‌ها دارا باشد، سپس مدل‌هایی با بیش از یک رژیم طراحی شد که احتمال سوییچ در آن‌ها وابسته است و این وابستگی با مدل رژیم سوئیچینگ معرفی شد. این مدل قابلیت آن را دارد که تغییرات متناوب و تکراری رژیم‌های اقتصادی را در نظر بگیرد [۲۲]. نخست ایده‌ی کار را با یک مثال نشان می‌دهیم و سپس مدل را در حالت کلی بیان می‌کنیم. شرکت ایران‌خودرو برای افزایش میل افراد به خرید محصولاتشان تدابیری اندیشید که همانطور که در شکل ۱.۲ می‌بینید منجر به شکست چشم‌گیری در دینامیک قیمت سهام این شرکت شد.

[۱۷] Conservative



شکل ۱.۲: سهام شرکت ایران‌خودرو طی سال‌های ۱۳۹۰-۱۳۷۶

حال فرض کنید که رفتار قیمت این سهم را با فرایند براونی هندسی زیر توصیف کنیم.

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t \tag{۵.۲}$$

که در آن μ نرخ بهره و σ نوسان‌پذیری دارایی پایه و W فرایند براونی هندسی می‌باشد. در اینجا نرخ بهره و نوسان‌پذیری را ثابت فرض کردیم.
سوالی که به ذهن می‌رسد آن است که چگونه باید شکست موجود در نمودار فوق را در مدل‌سازی لحاظ کنیم؟
می‌توانیم بگوییم که طی این حادثه مولفه‌ها تغییر کرده‌اند، عموما داده‌ها تا قبل از سال ۱۳۸۲ از مدل زیر تبعیت می‌کنند.

$$\mathrm{d}S_t = \mu_1 S_t \mathrm{d}t + \sigma_1 S_t \mathrm{d}W_t \tag{۶.۲}$$

و بعد از سال ۱۳۸۲، داده‌ها به صورت زیر مدل می‌شوند.

$$\mathrm{d}S_t = \mu_2 S_t \mathrm{d}t + \sigma_2 S_t \mathrm{d}W_t \tag{۷.۲}$$

لذا، دینامیک‌های فوق توصیف خوبی برای نمودار می‌باشد اما نحوه‌ی پیش‌بینی در این مدل‌ها معلوم نیست. اگر یک فرایند در گذشته تغییر کرده، واضح است که در آینده نیز می‌تواند تغییر کند و این باید در پیش‌بینی در نظر گرفته شود. بنابراین می‌توان تغییر در رژیم را به عنوان یک متغیر تصادفی در نظر گرفت.
فرض کنیم فرایند تحت تأثیر متغیر تصادفی غیر قابل مشاهده‌ی X_t قرار گرفته است، که رژیم نامیده می‌شود. در این صورت $X_t = 1$ یعنی فرایند در رژیم اول می‌باشد و $X_t = 2$ بدین معناست که فرایند در رژیم دوم قرار دارد. با این توضیحات، معادلات (۶.۲) و (۷.۲) را

می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dS_t = \mu_{X_t} S_t dt + \sigma_{X_t} S_t dW_t \qquad (۸.۲)$$

که در آن μ_{X_t} و σ_{X_t} در رژیم اول به ترتیب برابر μ_1 و σ_1 و در رژیم دوم به ترتیب برابر μ_2 و σ_2 می‌باشد.
بدین ترتیب دینامیک دارایی پایه را برای دو رژیم به صورت بالا طراحی کردیم و می‌توانیم دینامیک دارایی پایه را برای هر تعداد متناهی رژیم نیز به صورت زیر به دست آوریم

$$dS_t = \mu_{X_t} S_t dt + \sigma_{X_t} S_t dW_t$$

حال نیازمند توصیف فرایندی برای متغیر تصادفی X_t هستیم. ساده‌ترین مدل برای یک متغیر تصادفی مقدار ـ گسسته زنجیر مارکوف است.
در این پایان‌نامه X_t را یک متغیر تصادفی زمان پیوسته ـ مقدار گسسته در نظر می گیریم.
بحث تکمیلی در این زمینه را می‌توانید در منابع [۱] و [۱۸] بیابید.

۵.۲ قیمت‌گذاری اختیار توان تحت مدل رژیم سوئیچینگ

فرض می‌کنیم که بازار کارا [۱۸] است، یعنی فرصت آربیتراژ وجود ندارد. طبق قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری، عدم فرصت آربیتراژ با وجود یک اندازه مارتینگل معادل، هم ارز است. فرض می‌کنیم فضای احتمال ریسک خنثی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ داده شده است، همچنین بازار مالی شامل دو دارایی، یکی دارایی ریسکی S_t و دیگری دارایی غیرریسکی B_t به صورت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} dB_t &= r_{X_t} B_t dt \\ dS_t &= r_{X_t} S_t dt + \sigma_{X_t} S_t dW_t \end{aligned} \qquad (۹.۲)$$

که در آن‌ها، وضعیت‌های اقتصادی با زنجیر مارکوف زمان پیوسته ـ متناهی مقدار $\{X_t, t \geq 0\}$ معین می‌گردد. حال بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض می‌کنیم که

$$X_t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_M\}, \qquad e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in R^M$$

ودارای دینامیک زیر می‌باشد

$$X_t = X_0 + \int_0^t QX_s \, ds + M_t, \qquad (۱۰.۲)$$

عبارت (۱۰.۲) نمایش نیم ـ مارتینگل زمان پیوسته برای X_t می‌باشد. همچنین، در رابطه (۹.۲) نرخ بهره و نوسان‌پذیری به $\{X_t, t \geq 0\}$ از اقتصاد بستگی دارند که به صورت زیر نمایش

[۱۸] efficient

داده می‌شوند

$$r_{X_t} = (r_1, r_2, \dots, r_M)$$
$$\sigma_{X_t} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$$

در زمان $t \in [0, T]$، قیمت یک اختیار خرید توان با سررسید T و قیمت توافقی K به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} V(S_t, t, T, X_t) &= E^Q[e^{-\int_t^T r_u \,\mathrm{d}u} V(T) \mid S_t = s, X_t = x], \\ &= E^Q[e^{-\int_t^T r_u \,\mathrm{d}u} ({S_T}^m - K^m)^+ \mid S_t = s, X_t = x]. \end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

حال فرض کنیم $\tilde{V}(S_t, t, X_t) = e^{-\int_0^T r_u \,\mathrm{d}u} V(S_t, t, T, X_t)$، داریم

$$\begin{aligned} \tilde{V}(S_t, t, X_t) &= E^Q[e^{-\int_0^T r_u \,\mathrm{d}u} ({S_t}^m - K^m)^+ \mid S_t = s, X_t = x], \\ &= E^Q[e^{-\int_0^T r_u \,\mathrm{d}u} ({S_t}^m - K^m)^+ \mid G_t], \end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

که در آن $G_t = \sigma\{S_u, X_u : u \le t\}$. در نتیجه $\tilde{V}$ یک مارتینگل تحت اندازه Q است [۹].

قرار می‌دهیم

$$\tilde{V}(S_t, t) = (\tilde{V}(S_t, t, e_1), \dots, \tilde{V}(S_t, t, e_M)),$$

بنابراین $\tilde{V}(S_t, t, X_t) =< \tilde{V}(S_t, t), X_t >$، (که در آن $< ., . >$ نماد ضرب داخلی است).

با به کار بردن فرمول ایتو برای $\tilde{V}$ داریم

$$\begin{aligned} \tilde{V}(S_t, t, X_t) =& \tilde{V}(S_t, 0, X_t) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u} \,\mathrm{d}u + \int_0^t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} (r_u S_u \,\mathrm{d}u + \sigma_u S_u \mathrm{d}W_u) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} (\sigma_u S_u)^2 \,\mathrm{d}u + \int_0^t < \tilde{V}, \mathrm{d}X_s > . \end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

به عبارت دیگر

$$\mathrm{d}\tilde{V}_t = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} dt + r_t S_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} \mathrm{d}t + \frac{1}{2} {\sigma_t}^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} \mathrm{d}t + \sigma_t S_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} \mathrm{d}W_t + < \tilde{V}, \mathrm{d}X_t > . \tag{۱۴.۲}$$

لم ۱.۵.۲. فرایند تصادفی X که دارای نمایش دیفرانسیلی (تصادفی) است، مارتینگل است اگر و فقط اگر نمایش دیفرانسیل تصادفی آن به صورت زیر باشد

$$dX_t = g(t) \mathrm{d}W_t$$

یعنی عبارتی برحسب $\mathrm{d}t$ نداشته باشد.

برهان. به [۵] رجوع کنید. □

با توجه به آن‌که

$$\mathrm{d}X_t = Q X_t \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}M_t \tag{۱۵.۲}$$

و M_t مارتینگل است، همچنین با توجه به لم (۱.۵.۲) استنباط می‌کنیم که عبارات بر حسب dt در رابطه (۱۴.۲) برابر صفر می‌باشند. لذا

$$\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t}+r_tS_t\frac{\partial\tilde{V}}{\partial S}+\frac{1}{2}{\sigma_t}^2S_t^2\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial S^2}+<\tilde{V},QX_t>=0. \qquad (۱۶.۲)$$

با جایگذاری $\tilde{V}=e^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u}V$، در رابطه اخیر داریم

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(e^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u}V)}{\partial t}+r_tS_t\frac{\partial(e^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u}V)}{\partial S}\\&+\frac{1}{2}{\sigma_t}^2S_t^2\frac{\partial^2(e^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u}V)}{\partial S^2}+<(e^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u})V),QX_t>=0.\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\frac{\partial(e^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u}V)}{\partial t}&=\frac{\partial(e^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u})}{\partial t}V+e^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u}\frac{\partial V}{\partial t}\\&=-r_tVe^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u}+e^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u}\frac{\partial V}{\partial t}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$e^{-\int_0^T r_u\,\mathrm{d}u}(-r_tV+\frac{\partial V}{\partial t}+r_tS_t\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}{\sigma_t}^2S_t^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+<V,QX_t>)=0. \qquad (۱۷.۲)$$

با در نظر گرفتن $X_t=e_i$ و

$$\begin{aligned}r_{X_i}&=r_i\\\sigma_{X_i}&=\sigma_i\end{aligned}$$

همچنین

$$V_i=V(S_t,t,T,e_i),\qquad \mathbf{V}=(V_1,V_2,\ldots,V_M)$$

$\mathbf{V}$ در معادله دیفرانسیل رژیم سوئیچینگ زیر صدق می‌کند.

$$-r_iV_i+\frac{\partial V_i}{\partial t}+r_iS_t\frac{\partial V_i}{\partial S}+\frac{1}{2}{\sigma_i}^2S_t^2\frac{\partial^2V_i}{\partial S^2}+<\mathbf{V},Qe_i>=0, \qquad (۱۸.۲)$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل جزیی سهموی خطی می‌باشد.

فصل ۳

مدل‌بندی مسئله مینیمم‌سازی موضعی ریسک

۱.۳ مقدمه

یکی از شناخته‌شده‌ترین مثال‌های بازار کامل، مدل بلک_شولز [۱] است. در این مدل فرض می‌شود قیمت دارایی بدون ریسک در معادله دیفرانسیل عادی $\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t$ صدق می‌کند که عدد ثابت r معرف نرخ بهره است. همچنین دینامیک قیمت دارایی ریسکی با معادله دیفرانسیل تصادفی

$$\mathrm{d}S_t = \alpha S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t,$$

توصیف می‌شود که در آن W_t یک فرایند براونی استاندارد روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است. $\alpha, \sigma > 0$ اعداد ثابت هستند که α نرخ بهره و σ تلاطم نامیده می‌شود. از محاسن مدل بلک_شولز این است که برای بسیاری از اختیار های معامله می‌توان تابع قیمت اختیار معامله را به طور تحلیلی بدست آورد. اما شواهد تجربی نشان می‌دهد که این مدل در همخوانی با واقعیت‌های بازار چندان موفق نیست. به همین علت در بسیاری از موارد تعمیم‌هایی از این مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد که از میان آن‌ها می‌توان به مدل تلاطم تصادفی اشاره کرد.

[۱] Black-Scholes

در این مدل تلاطم به عنوان یک فرایند تصادفی مثبت در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرض می‌شود که قیمت دارایی ریسکی در معادله دیفرانسیل تصادفی

$$\mathrm{d}S_t = \mu_t S_t \mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}W_t,$$

صدق می‌کند که در آن $\{\sigma_t\}_{0\leq t\leq T}$ خود، یک فرایند تصادفی مثبت است. با انتخاب‌های مختلف برای فرایند σ_t مدل‌های تلاطم تصادفی مختلفی بدست می‌آیند.

۲.۳ دینامیک قیمت دارایی

فرض می‌کنیم $T > 0$، و $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ فضای احتمال فیلتر شده باشد. مدل مالی زمان پیوسته متشکل از دو دارایی، حساب بازار پول [۲] و سهام [۳] را در نظر می‌گیریم.
فرض می‌کنیم $\{X_t, t \in [0,T]\}$ زنجیر مارکوف زمان پیوسته با فضای حالت متناهی $\chi := \{1, 2, \dots, N\}$ باشد که احتمال انتقال زنجیر آن به صورت زیر می‌باشد

$$P(X_{t+\delta t} = j \mid X_t = i) = q_{ij}\delta t + o(\delta t), \quad i \neq j;$$
$$P(X_{t+\delta t} = i \mid X_t = i) = 1 + q_{ii}\delta t + o(\delta t).$$

همچنین فرض کنید $Q = [q_{ij}]$ ماتریس نرخ انتقال همگن محافظه‌کار با شرایط زیر است

$$q_{ij} \geq 0, \qquad i \neq j,$$
$$q_{ii} \geq 0, \qquad q_{ii} = -\sum_{j=1}^{N} q_{ij}.$$

با توجه به توضیحات ارائه شده در مرجع [۱۵]، برای $i, j \in \chi$، که $i \neq j$، Δ_{ij} را به صورت بازه‌های متوالی کران چپ بسته و کران راست باز از اعدادحقیقی نشان می‌دهیم که هر یک دارای طولی برابر q_{ij} می‌باشد. تابع $h : \chi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(i,z) = \begin{cases} j - i, & z \in \Delta_{ij}, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

نمایشی از زنجیر مارکوف به صورت

$$\mathrm{d}X_t = \int_{\mathbb{R}} h(X_{u-}, z) P(\mathrm{d}z, \mathrm{d}t),$$

در نظر می‌گیریم، که در آن $P(\mathrm{d}z, \mathrm{d}t)$ یک اندازه تصادفی پواسون با شدت $m(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$ است که $m(\mathrm{d}z)$ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

[۲] Money market account
[۳] Stock

۱.۲.۳ مدل دارایی بدون ریسک

فرض می‌کنیم B_t دارایی بدون ریسک باشد. مدل حساب بازار پول را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathrm{d}B_t = r_t B_t \mathrm{d}t, \qquad B_0 = 1.$$

که در آن r_t نرخ بهره شناور است و بر حسب زنجیر مارکوف به صورت

$$r_{X_t} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$$

نوشته می‌شود که $r_i > 0$ برای هر $i = 1, 2, \dots, N$.

۲.۲.۳ مدل دارایی ریسکی

فرض می‌کنیم دارایی ریسکی S_t انتگرال‌پذیر مربعی باشد که قیمت آن از فرایند رژیم سوئیچینگ مارکوف تحت نوسانات تصادفی، پیروی می‌کند

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_t}{S_{t_-}} &= \mu_t \mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_t}\mathrm{d}W_t^1 + \int_{-1}^{\infty} y(N(\mathrm{d}y, \mathrm{d}t) - v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t), \qquad (۱.۳)\\ \mathrm{d}\sigma_t &= (\alpha - \lambda m)\sigma_t \mathrm{d}t + \beta\sigma_t \mathrm{d}W_t^2 + (e^J - 1)\sigma_{t_-}\mathrm{d}N_t,\end{aligned}$$

که در آن W_t^1 و W_t^2 دو حرکت براونی استاندارد با ضریب همبستگی ρ می‌باشند، همچنین $\alpha, \beta > 0$ و $\rho \in (-1, 1)$ مقادیر ثابت مفروض هستند. y یک تابع اندازه‌پذیر، معرف اندازه پرش و $\int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y) < \infty$. فرض می‌کنیم $f(y)$ توزیع اندازه پرش باشد. $N(\mathrm{d}y, \mathrm{d}t)$ اندازه تصادفی پواسون با اندازه شدت $v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t = \lambda f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$ می‌باشد. اگر قرار دهیم

$$\widetilde{N}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}t) = N(\mathrm{d}y, \mathrm{d}t) - v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t$$

آنگاه $\widetilde{N}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}t)$ اندازه تصادفی پواسون جبران‌یافته است. μ_t نرخ رانش قیمت سهام است و بر حسب زنجیر مارکوف به صورت $\mu_{X_t} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ نوشته می‌شود.

$\{N_t\}_{0 \le t \le T}$ با پارامتر تشدید λ، یک فرایند پواسون مستقل از حرکت‌های براونی است. همچنین e^{J_i} به ازای هر $1 \le i \le N_t$، دنباله‌ای از متغیر های تصادفی مستقل و هم‌توزیع، معرف اندازه پرش است که در آن J_i ها دارای توزیع نرمال با میانگین κ و واریانس γ^2 باشند. بنابراین e^{J_i} ها دارای توزیع لگ نرمال خواهند بود و $m = E[e^J - 1] = e^{\kappa + \frac{1}{2}\gamma^2} - 1$.

$P(\mathrm{d}z, \mathrm{d}t)$، $N(\mathrm{d}y, \mathrm{d}t)$ و X_t دو به دو مستقل هستند و همچنین مستقل از W_t^1 و W_t^2 می‌باشند.

$\mathcal{F}_t$ را فیلتر تولید شده توسط W^1 و W^2 در نظر می‌گیریم. اکنون به یافتن اندازه‌ی مارتینگل معادل می‌پردازیم زیرا طبق قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری، وجود اندازه‌ی مارتینگل معادل، وجود بازار بدون آربیتراژ را تضمین می‌کند بدین منظور باید با استفاده از قضیه گیرسانوف اندازه Q را به‌گونه‌ای بیابیم که ضریب رانش دینامیک S نسبت به Q صفر باشد. قضیه گیرسانوف

دینامیک W^1 را نسبت به Q به طور یکتا مشخص می‌کند اما دینامیک W^2 را نسبت به Q به طور یکتا تعیین نمی‌کند. بنابراین با انتخاب‌های مختلف برای ضریب رانش W^2 اندازه‌های مارتینگل متفاوتی بدست می‌آید. پس بنابر قضیه اساسی دوم قیمت‌گذاری، بازار در این مدل ناکامل است.

۳.۳ اندازه مارتینگل مینیمال

ابتدا ساختار اطلاعاتی مدل را تعیین می‌کنیم.فرض کنید $\{\mathcal{F}^S\}_{t\in[0,T]}$، $\{\mathcal{F}^\sigma\}_{t\in[0,T]}$ و $\{\mathcal{F}^X\}_{t\in[0,T]}$ فیلترهای طبیعی تولید شده توسط S، σ و X باشند. برای هر $t \in [0,T]$ قرار می‌دهیم $\mathrm{g}_t = \mathcal{F}_t{}^X \vee \mathcal{F}_t{}^\sigma$ و $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t{}^S \vee \mathrm{g}_T$. همچون گذشته فرض می‌کنیم فرایند حقیقی مقدار و $\mathcal{F}$ـ سازگار $\{S_t\}_{0\le t\le T}$ نشان‌دهنده‌ی قیمت نرمال‌شده‌ی دارایی ریسکی (سهام) باشد. از آن‌جا که S_t تحت P مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی است لذا طبق گزاره (۲.۳.۱) یک نیم مارتینگل خواهد بود. فرایند قیمت سهام تنزیل شده $\widetilde{S}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\widetilde{S}_t = e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} S_t,$$

که دارای تجزیه به فرم زیر می‌باشد

$$\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 + M_t + A_t,$$

با توجه به معادله (۱.۳) داریم

$$M_t = \int_0^t \widetilde{S}_{u-}\sqrt{\sigma_u}\mathrm{d}W_u^1 + \int_0^t\int_{-1}^\infty \widetilde{S}_{u-} y\widetilde{N}(\mathrm{d}y,\mathrm{d}u), \tag{۲.۳}$$

$$A_t = \int_0^t \tilde{S}_{u-}(\mu_u - r_u)\mathrm{d}u, \tag{۳.۳}$$

که M تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی است و $M_0 = 0$، A یک فرایند پیوسته و سازگار با تغییرات متناهی است و $A_0 = 0$.

تعریف ۱.۳.۳. فرض می‌کنیم $\hat{P}$ اندازه‌ی مارتینگل معادل P باشد با دو خاصیت زیر

۱. روی $\mathcal{F}_0$، $P = \hat{P}$.

۲. هر فرایند L که تحت P مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی و قویا عمود [۴] بر M است و $L_0 = 0$، یک $\hat{P}$ـ مارتینگل باشد. $\hat{P}$ را **اندازه مارتینگل مینیمال** [۵] می‌نامند.

[۴] یعنی حاصلضرب دو مارتینگل L و M یک مارتینگل است و داریم $\langle L, M\rangle = 0$.

[۵] Minimal martingale measure

می‌توان نشان داد که فرایند پیش‌بینی‌پذیر $\alpha = \{\alpha_t\}_{0\leq t\leq T}$ موجود است که $A_t = \int_0^t \alpha_u \mathrm{d}\langle M\rangle_u$ ([۱۱]).
از طرفی تغییرات مربعی مارتینگل M برابر است با

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_t &= \left\langle \int_0^t \widetilde{S}_{u-}\sqrt{\sigma_u}\mathrm{d}W_u^1 + \int_0^t\int_{-1}^{\infty} \widetilde{S}_{u-}y\widetilde{N}(\mathrm{d}y,\mathrm{d}u)\right\rangle \\ &= \int_0^t \widetilde{S}_{u-}^2\sigma_u \mathrm{d}t + \int_0^t\int_{-1}^{\infty}\widetilde{S}_{u-}^2 y^2 v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^t \widetilde{S}_{u-}^2\left(\sigma_u + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

که با نماد دیفرانسیلی به فرم زیر است

$$\mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_t = \widetilde{S}_{t-}^2\left(\sigma_t + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)\right)\mathrm{d}t$$

پس برای $\alpha_u = \frac{\mu_u - r_u}{\widetilde{S}_{u-}(\sigma_u + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y))}$، می‌توان نوشت $A_t = \int_0^t \alpha_u \mathrm{d}\langle M\rangle_u$.
قضیه زیر علاوه بر این‌که شرایطی را برای وجود و یکتایی $\hat{P}$ مشخص می‌کند، چگالی $\hat{P}$ را نیز نسبت به P مشخص می‌کند.

قضیه ۱.۳.۳. $\hat{P}$ موجود است اگر و تنها اگر

$$G_t = \exp\left(-\int_0^t \alpha_s \mathrm{d}M_s - \frac{1}{2}\int_0^t {\alpha_s}^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_u\right), \quad 0\leq t\leq T \tag{۴.۳}$$

یک Pــ مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی باشد. تحت این شرایط، $\hat{P}$ به‌طور یکتا به وسیله‌ی $\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}P} = G_T$ تعیین می‌شود.

برهان. به [۱۱] رجوع کنید. □

با جایگذاری α_u در (۴.۳) خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}G_t = \exp\Bigg\{ &-\int_0^t \frac{\mu_s - r_s}{\widetilde{S}_{s-}(\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y))}\left(\widetilde{S}_{s-}\sqrt{\sigma_s}\mathrm{d}W_s^1 + \int_{-1}^{\infty}\widetilde{S}_{s-}y(N(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) - v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s)\right) \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\mu_s - r_s)^2}{\widetilde{S}_{s-}^2(\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y))^2}\left(\widetilde{S}_{s-}^2\sigma_s \mathrm{d}s + \int_{-1}^{\infty}\widetilde{S}_{s-}^2 y^2 v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s\right)\Bigg\} \\ = \exp\Bigg\{ &\int_0^t \frac{-(\mu_s - r_s)\sqrt{\sigma_s}}{\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)}\mathrm{d}W_s^1 - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\mu_s - r_s)^2\sigma_s}{(\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y))^2}\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t\int_{-1}^{\infty}\frac{(\mu_s - r_s)y}{\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)}v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s - \int_0^t\int_{-1}^{\infty}\frac{(\mu_s - r_s)y}{\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)}N(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t\int_{-1}^{\infty}\frac{(\mu_s - r_s)^2 y^2}{(\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y))^2}v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s\Bigg\}.\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم G_t یک Pــ مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی است. برای این منظور فرض می‌کنیم یک اندازه مارتینگل مینیمال موجود است و آن را P^* می‌نامیم. طبق تعریف، P^* اندازه‌ی مارتینگل معادل P است و $\widetilde{S}$ تحت P^* مارتینگل است. همچنین

$$\frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}P} \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{H},P).$$

چنین اندازه مارتینگلی به وسیله‌ی مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی از راست پیوسته‌ی زیر تعیین می‌شود.

$$G_t = E\left[\frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}P}\middle|\mathcal{H}_t\right].$$

تحت P^*، تجزیه‌ی دوب_میر برای M به فرم $M = \widetilde{S} - \widetilde{S}_0 + (-A)$ است. از طرفی قضیه گیرسانوف_میر نشان می‌دهد که فرآیند پیش‌بینی‌پذیر با تغییرات متناهی می‌تواند بر حسب G_t محاسبه شود. یعنی

$$-A_t = \int_0^t \frac{1}{G_{s_-}}\mathrm{d}\left\langle M, G\right\rangle_s.$$

قضیه ۲.۳.۳ (تجزیه گالچوک_کونیتا_واتانابه [۶]). اگر S تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی باشد و $H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$، آنگاه P_مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی $L^H = \{L_t^H\}_{0\leq t\leq T}$ که $L_0^H = 0$ و فرایند پیش‌بینی‌پذیر θ^H که در شرط زیر صدق می‌کند

$$E\left[\int_0^t \theta_u^2 \mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_u + \left(\int_0^t |\theta_u \mathrm{d}A_u|\right)^2\right] < \infty. \tag{۵.۳}$$

موجودند به‌طوری‌که

$$H = H_0 + \int_0^T \theta_u^H \mathrm{d}S_u + L_T^H,$$

به‌علاوه L^H بر $\int \theta \mathrm{d}S$ قویا عمود است.

برهان. به [۱۱] رجوع کنید. □

طبق تجزیه فوق، فرایند پیش‌بینی‌پذیر $\beta = (\beta_t)_{0\leq t\leq T}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$G_t = 1 + \int_0^t \beta_s \mathrm{d}M_s + L_t,$$

که L، P_مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی و قویا عمود بر M است. چون P^* یک اندازه مارتینگل مینیمال است، طبق تعریف اندازه مارتینگل مینیمال، L، P^*_مارتینگل است و طبق لم (۳.۴.۱)، LG، P_مارتینگل است. در نتیجه خواهیم داشت

$$\left\langle L, L\right\rangle = \left\langle L, G\right\rangle = 0,$$

بنابراین $L \equiv 0$ پس داریم

$$G_t = 1 + \int_0^t \beta_s \mathrm{d}M_s,$$

و

$$\mathrm{d}A_t = -\frac{\beta_t}{G_{t_-}}\mathrm{d}\left\langle M, M\right\rangle.$$

بنابراین

$$G_t = 1 - \int_0^t G_{s_-}\frac{\mathrm{d}A_s}{\mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_s}\mathrm{d}M_s.$$

[۶] Galtchouk-Kunita-Watanabe decomposition

قرار می‌دهیم

$$\mathrm{d}Y_s = -\frac{\mathrm{d}A_s}{\mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_s}\mathrm{d}M_s.$$

با جایگذاری (۲.۳) و (۳.۳) در رابطه فوق داریم

$$Y_t = \frac{-(\mu_t - r_t)\left(\sqrt{\sigma_t}\mathrm{d}W_t^1 + \int_{-1}^{\infty} y\widetilde{N}(dy,dt)\right)}{\sigma_t + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)},$$

پس خواهیم داشت

$$G_t = 1 + \int_0^t G_{s-}\mathrm{d}Y_s. \tag{۶.۳}$$

از فرمول نمایی دولینز–دید یک جواب یکتا برای (۶.۳) وجود دارد

$$G_t = e^{Y_t^c - \frac{1}{2}\langle Y^c, Y^c\rangle}\prod_{u\le t}(1+\Delta Y_u).$$

بنابراین G_t تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی است و طبق قضیه (۱.۳.۳)، $\hat{P}$ موجود است و به طور یکتا به وسیله‌ی $\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}P} = G_T$ تعیین می‌شود.
در ادامه نشان می‌دهیم $\hat{P}$ یک اندازه مارتینگل مینیمال است. به روشنی $\hat{P}$ یک اندازه‌ی مارتینگل معادل P است و فرض کنید L' $(L'_0 = 0)$، تحت P مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی و قویا عمود بر M باشد یعنی $\left\langle L', M\right\rangle = 0$.

$$\left\langle L', G\right\rangle_t = \int_0^t G_{S-}\mathrm{d}\left\langle L', Y\right\rangle_s = -\int_0^t G_{s-}\frac{\mathrm{d}A_s}{\mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_s}\mathrm{d}\left\langle L', M\right\rangle_s = 0.$$

طبق قضیه گیرسانوف–میر، L' تحت $\hat{P}$ یک مارتینگل است. بنابراین $\hat{P}$ یک اندازه مارتینگل مینیمال یکتا است.
از قضیه گیرسانوف داریم

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_{t-}} = \mu_t\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_t}\mathrm{d}\hat{W}_t^1 + \int_{-1}^{\infty} y(N(\mathrm{d}y,\mathrm{d}t) - v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t), \tag{۷.۳}$$

$$\mathrm{d}\sigma_t = (\alpha - \lambda m)\sigma_t\mathrm{d}t + \beta\sigma_t\mathrm{d}\hat{W}_t^2 + (e^J - 1)\sigma_{t-}\mathrm{d}N_t, \tag{۸.۳}$$

که در آن

$$\hat{W}_t^1 = W_t^1 + \int_0^t \frac{(\mu_s - r_s)\sqrt{\sigma_s}}{\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)}\mathrm{d}s,$$
$$\hat{W}_t^2 = W_t^2 + \rho\int_0^t \frac{(\mu_s - r_s)\sqrt{\sigma_s}}{\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)}\mathrm{d}s,$$

دو حرکت براونی استاندارد تحت $\hat{P}$ هستند.
برای اجتناب از علامت‌دارشدن اندازه مارتینگل مینیمال، باید شرط زیر برقرار باشد

$$\frac{(\mu_t - r_t)y}{\sigma_t + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)} < 1, \quad \text{for a.s. } t\in[0,T] \text{ and } y > -1. \tag{۹.۳}$$

۴.۳ استخراج فرمول قیمت‌گذاری

در این بخش به قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های اروپایی می‌پردازیم. فرض می‌کنیم فرصت آربیتراژ وجود ندارد. طبق قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری، عدم فرصت آربیتراژ با وجود یک اندازه مارتینگل معادل، هم‌ارز است. در اینجا، اندازه مارتینگل مینیمال را به عنوان اندازه معادل انتخاب می‌کنیم و معادله دیفرانسیل جزئی را بدست می‌آوریم.
در زمان t قیمت یک اختیار خرید اروپایی با سررسید T و قیمت توافقی K به صورت زیر است

$$C(t,T) = E^{\hat{P}}[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s}(S_T - K)^+ \mid \mathcal{H}_t].$$

حال فرض کنیم $V(t,S_t,\sigma_t,X_t) = e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} C(t,S_t,\sigma_t,X_t)$. با به کار بردن فرمول ایتو برای $V(t,S_t,\sigma_t,X_t)$ داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V(t,S_t,\sigma_t,X_t) =& - r_t e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} C(t,S_{t_-},\sigma_{t_-},X_{t_-})\mathrm{d}t + e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial t}\mathrm{d}t \\
&+ e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial S}\mathrm{d}S^c + e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial \sigma_t}\mathrm{d}\sigma_t + \frac{1}{2}e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\mathrm{d}\left\langle S^c, S^c\right\rangle \\
&+ \frac{1}{2}e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma_t^2}\mathrm{d}\left\langle \sigma_t, \sigma_t\right\rangle + e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma_t}\mathrm{d}\left\langle S^c, \sigma_t\right\rangle \\
&+ e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\sum_{u \le t}\Big(C(u,S_u,\sigma_u,X_u) - C(u,S_{u_-},\sigma_{u_-},X_{u_-})\Big) \\
=& - r_t e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} C(t,S_{t_-},\sigma_{t_-},X_{t_-})\mathrm{d}t + e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial t}\mathrm{d}t \\
&+ e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial S}\Big[\mu_t S_{t_-}\mathrm{d}t + \sqrt{\sigma_t}S_{t_-}\mathrm{d}\hat{W}_t^1 - \int_{-1}^{\infty} S_{t_-} y v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t\Big] \\
&+ e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial \sigma_t}\Big[(\alpha - \lambda m)\sigma_t \mathrm{d}t + \beta\sigma_t \mathrm{d}\hat{W}_t^2\Big] \\
&+ \frac{1}{2}e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_t S_t^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2}e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma_t^2}\beta^2\sigma_t^2\mathrm{d}t \\
&+ e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma_t}\rho\beta\sigma_t^{\frac{3}{2}}S_t \mathrm{d}t - e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial S}S_{t_-}\frac{(\mu_t - r_t)\sigma_t}{\sigma_t + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)}\mathrm{d}t \\
&- e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial \sigma_t}\rho\beta\frac{(\mu_t - r_t)\sigma_t^{\frac{3}{2}}}{\sigma_t + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)}\mathrm{d}t \\
&+ \int_{-1}^{\infty} e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}(C(t,S_{t_-}(1+y),\sigma_t,X_{t_-}) - C(t,S_{t_-},\sigma_{t_-},X_{t_-}))\tilde{v}(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t \\
&+ \int_{-1}^{\infty} e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}(C(t,S_{t_-}(1+y),\sigma_t,X_{t_-}) - C(t,S_{t_-},\sigma_{t_-},X_{t_-}))\hat{N}(\mathrm{d}y,\mathrm{d}t) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}(C(t,S_{t_-},\sigma_t,X_{t_-} + h(X_{t_-},z)) - C(t,S_{t_-},\sigma_{t_-},X_{t_-}))\tilde{P}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}t) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\sum_j C(t,S_{t_-},\sigma_{t_-},j)q_{X_{u_-},j}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

که در آن $\tilde{P}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}t) = P(\mathrm{d}y, \mathrm{d}t) - m(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$، اندازه تصادفی پواسون جبران‌یافته است و

$$\hat{N}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}t) = N(\mathrm{d}y, \mathrm{d}t) - \widetilde{v}(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t.$$

که در آن

$$\widetilde{v}(\mathrm{d}y)\mathrm{d}u = \left(1 - \frac{(\mu_u - r_u)y}{\sigma_u + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)}\right) v(\mathrm{d}y)\mathrm{d}u.$$

چون $V(t, S_t, \sigma_t, X_t)$ تحت $\hat{P}$ مارتینگل است، بنابراین معادله دیفرانسیل جزئی برای $C(t, S_t, \sigma_t, X_t)$ به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned}
&-r_t C(t, S_{t_-}, \sigma_{t_-}, X_{t_-}) + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S}\left(r_t + \int_{-1}^{\infty}\left(\frac{(\mu_t - r_t)y}{\sigma_t + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)} - 1\right) y v(\mathrm{d}y)\right) S_{t_-} \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} S_{t_-}^2 \sigma_t + \frac{\partial C}{\partial \sigma}\left((\alpha - \lambda m)\sigma_t - \frac{(\mu_t - r_t)\sigma_t^{\frac{3}{2}}}{\sigma_t + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)}\rho\beta\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}\beta^2\sigma_t^2 \\
&\quad + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma}\rho\beta\sigma_t^{\frac{3}{2}} S_{t_-} + \int_{-1}^{\infty}(c(t, S_{t_-}(1+y), \sigma_t, X_{t_-}) - c(t, S_{t_-}, \sigma_{t_-}, X_{t_-}))\widetilde{v}(\mathrm{d}y) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} C(t, S_{t_-}, \sigma_t, j) q_{X_{t_-}, j} = 0,
\end{aligned}$$

با شرایط مرزی $C(T, S_T, \sigma_T, X_T) = (S_T - K)^+$.

بنابراین قیمت تنزیل‌شده اختیار معامله اروپایی در معادله زیر صدق می‌کند

$$\begin{aligned}
V(t, S_t, \sigma_t, X_t) &= V(0, S_0, \sigma_0, X_0) + \int_0^t e^{-\int_0^u r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial S} S_u \sqrt{\sigma_u}\mathrm{d}\hat{W}_u^1 + \int_0^t e^{-\int_0^u r_s \mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial \sigma}\beta\sigma_u \mathrm{d}\hat{W}_u^2 \\
&+ \int_0^t \int_{-1}^{\infty} e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}(C(u, S_{u_-}(1+y), \sigma_u, X_{u_-}) - C(u, S_{u_-}, \sigma_{u_-}, X_{u_-}))\hat{N}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}u) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s}(C(u, S_{u_-}, \sigma_u, X_{u_-} + h(X_{u_-}, z)) - C(u_-, S_{u_-}, \sigma_{u_-}, X_{u_-}))\widetilde{P}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}u).
\end{aligned}$$

(۱۰.۳)

فصل ۴

پوشش ریسک در بازارهای ناکامل مارکوفی

۱.۴ مقدمه

برای پوشش ریسک در بازارهای ناکامل روش‌های مختلفی وجود دارد. فصل دهم از [۳۶] شامل بحثی خواندنی درباره این روش‌ها است.
در یک بازار ناکامل برای برخی ادعاهای مشروط مانند H، سبد مالی خودتامینی که در عین حال شرط $P(V_T = H) = 1$ را نیز برآورده کند، موجود نیست.
برای پوشش ریسک در این بازارها یک روش این است که برای ادعای مشروط داده شده‌ی H، سبدهای سرمایه خودتامین φ را در نظر بگیریم، که البته ممکن است هیچ یک از آن‌ها در شرط $V_T(\varphi) = H$ صدق نکنند. در این صورت یک سبد سرمایه‌ی خوب آن است که $V_T(\varphi) - H$ را نسبت به یک نرم مینیمم کند. هرگاه این نرم، نرم $\mathcal{L}^2(P)$ باشد مساله‌ی ما تبدیل به یافتن سبد سرمایه‌ی خودتامینی می‌شود که $E[(V_T(\varphi) - H)^2]$ را مینیمم کند. تحت شرایط مناسب این مساله مینیمم‌سازی جوابی مانند $\widetilde{\varphi}$ دارد. به علاوه اندازه مارتینگل معادل $\widetilde{P}$ موجود است که $V_0(\widetilde{\varphi}) = E^{\widetilde{P}}[H]$. این روش را پوشش میانگین–واریانس [۱] می‌نامند.
روش دیگر این است که فقط استراتژی‌هایی را در نظر بگیریم که ارزش نهایی آن‌ها برابر H

[۱] Mean-variance hedging

است، یعنی $V_T(\varphi) = H$ اما چون بازار ناکامل است چنین استراتژی ممکن است خودتامین نباشد، یعنی فرایند هزینه متناظر با آن ثابت نباشد. پس در این حالت یک استراتژی خوب آن است که «تغییرات فرایند هزینه‌اش کوچک باشد». در سال ۱۹۸۶ فولمر [۲] و ساندرمن [۳] $E\left[(C_T(\varphi) - C_t(\varphi))^2 | \mathcal{F}_t\right]$ را به عنوان معیاری از تغییرات فرایند هزینه به کار بردند و روش مینیمم‌سازی ریسک را برای حالتی که S یک Pـ مارتینگل است معرفی نمودند. این روش در سال ۱۹۹۱ توسط شوایتزر [۴] و با نام مینیمم‌سازی موضعی ریسک به حالتی که S تحت P یک نیم‌مارتینگل است تعمیم داده شد. اگر $\widetilde{\varphi}$ استراتژی به دست آمده از روش مینیمم‌سازی موضعی ریسک باشد، می‌توان $V_t(\widetilde{\varphi})$ را به عنوان ارزش H در لحظه t در نظر گرفت. تحت شرایط مناسب اندازه مارتینگل معادل $\hat{P}$ موجود است که $V_t(\widetilde{\varphi}) = E^{\hat{P}}(H|\mathcal{F}_t)$.
در مورد مدل‌های تصادفی غالبا استفاده از روش مینیمم‌سازی موضعی ریسک ساده‌تر است، چرا که چگالی $\hat{P}$ نسبت به P به‌طور صریح مشخص می‌شود و می‌توان با به کار بردن قضیه‌ی گیرسانوف، دینامیک تلاطم را تحت $\hat{P}$ به دست آورد. از این رو ما در ادامه، روش مینیمم‌سازی موضعی ریسک را در پیش می‌گیریم.

۲.۴ استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک

این بخش به تعریف استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک [۵] اختصاص دارد. قبل از بیان تعریف، ذکر برخی مقدمات لازم است. با نماد گذاری‌های فصل قبل داریم

$$\widetilde{S}_t = e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} S_t,$$

که دارای تجزیه به فرم $\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_0 + M_t + A_t$ است که در آن

$$M_t = \int_0^t \widetilde{S}_{u-} \sqrt{\sigma_u} \mathrm{d}W_u^1 + \int_0^t \int_{-1}^{\infty} \widetilde{S}_{u-} y \widetilde{N}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}u),$$

و

$$A_t = \int_0^t \widetilde{S}_{u-} (\mu_u - r_u) \mathrm{d}u.$$

تعریف ۱.۲.۴. یک **استراتژی سبد مالی** عبارت است از فرایند دوبعدی $\varphi = (\xi, \eta)$ به‌طوری‌که

۱. ξ یک فرایند پیش‌بینی‌پذیر باشد که در شرط زیر صدق می‌کند.

$$E\left[\int_0^t \xi_u^2 \mathrm{d}\left\langle M \right\rangle_u + \left(\int_0^t |\xi_u \mathrm{d}A_u|\right)^2\right] < \infty. \qquad (۱.۴)$$

[۲] Föllmer
[۳] Sondermann
[۴] Schweeizer
[۵] Locally risk-minimizing strategy

۲. η یک فرایند سازگار باشد که $E(\eta^2) < \infty$،

۳. فرایند ارزش $\{V_t\}_{0\leq t\leq T}$ از راست پیوسته و انتگرال‌پذیر مربعی باشد.

فرض کنید $\varphi = (\xi, \eta)$ یک استراتژی سبد مالی باشد که در زمان t، ξ_t تعداد سهام و η_t تعداد اوراق قرضه موجود در سبد را نشان می‌دهد. قیمت تنزیل شده سبد برابر است با $V_t = \xi_t\widetilde{S}_t + \eta_t$. فرض کنید ادعای مشروط H در زمان T انتگرال‌پذیر مربعی باشد. در یک بازار ناکامل به‌ازای برخی ادعاهای مشروط مانند H، سبد مالی خودتامینی که در عین حال شرط $P(V_T = H) = 1$ را نیز برآورده کند، موجود نیست، بنابراین به دنبال پیدا کردن سبد مالی خودتامینی هستیم که در هر زمان t، ریسک باقی‌مانده را با استفاده از رابطه زیر مینیمم کند

$$R_t(\varphi) = E\left[(C_T(\varphi) - C_t(\varphi))^2|\mathcal{H}_t\right], \quad t \leq T$$

$C_t(\varphi)$ مجموع هزینه‌های تنزیل شده تا زمان t است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_t(\varphi) = V_t(\xi) - \int_0^t \xi_s \mathrm{d}\tilde{S}_s.$$

تعریف ۲.۲.۴ (آشفتگی کوچک)**.** یک **آشفتگی کوچک** [۶] عبارت است از استراتژی $\Delta = (\delta, \epsilon)$ که در آن

۱. δ کران‌دار است،

۲. $\int_0^T |\delta_u \mathrm{d}A_u|$ کران‌دار است،

۳. $\delta_T = \varepsilon_T = 0$.

برای افراز $\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ از بازه $[0,T]$ اندازه افراز عبارت است از $|\tau| := \max_{t_i, t_{i+1}}(t_{i+1} - t_i)$. دنباله‌ی $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر n، $\tau_n \subset \tau_{n+1}$ و می‌گوییم این دنباله به همانی همگراست اگر $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$.
برای هر زیر بازه $(s,t]$ از $[0,T]$، آشفتگی کوچک Δ عبارت است از

$$\Delta \mid_{(s,t]} = (\delta I(s,t], \epsilon I(s,t]).$$

تعریف ۳.۲.۴ (موضعا مینیمم‌ساز ریسک)**.** برای استراتژی φ، آشفتگی کوچک Δ و افراز τ از $[0,T]$، تعریف می‌کنیم

$$r^\tau[\varphi, \Delta] := \sum_{t_i, t_{i+1}\in\tau} \frac{R_{t_i}(\varphi + \Delta\mid_{(t_i,t_{i+1})}) - R_{t_i}(\varphi)}{E\left[\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]} I_{(t_i,t_{i+1}]}.$$

استراتژی φ، را **موضعا مینیمم‌ساز ریسک** می‌نامیم هرگاه برای هر آشفتگی کوچک Δ و هر دنباله‌ی صعودی از افرازها که به همانی همگراست داشته باشیم

$$\lim \inf_{n\to\infty} r^\tau[\varphi, \Delta] \geq 0, \qquad P - a.s. \; on \; \Omega \times [0,T],$$

[۶] Small Perturbation

یعنی هر تغییری در استرتژی بهینه، دست‌کم به‌طور مجانبی باعث افزایش ریسک می‌شود.

تعریف ۴.۲.۴ (استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک نما). استراتژی φ، **استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک نما** [۷] است اگر فرایند هزینه $C(\varphi)$ تحت P مارتینگل باشد و بر قسمت مارتینگل $\widetilde{S}$ (یعنی M) قویا متعامد باشد (یعنی حاصلضرب دو مارتینگل $C(\varphi)$ و M یک مارتینگل است).

تعریف ۵.۲.۴ (تجزیه‌ی فولمر_شوایترز). اگر $\widetilde{H} = e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} H$ ادعای مشروط تنزیل شده باشد، $\widetilde{H}$ را می‌توان به صورت

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}_0 + \int_0^T \xi_s^H \mathrm{d}\widetilde{S}_s + L_T^H,$$

تجزیه کرد که $\widetilde{H}_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$، ξ^H فرایند پیش‌بینی‌پذیری است که در شرط (۱.۴) صدق می‌کند و L_T^H تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی و قویا عمود بر M است و $L_0^H = 0$. این تجزیه، تجزیه‌ی فولمر_شوایترز [۸] نامیده می‌شود.

در این صورت استراتژی $\varphi_t = (\xi^H, \widetilde{H}_0 + \int_0^t \xi_s^H \mathrm{d}\widetilde{S}_s + L_t^H - \xi_t^H \widetilde{S}_t)$ **موضعا مینیمم‌ساز ریسک است.**

در مرجع [۲۶] مشاهده می‌شود که استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک نما، یک استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک است اگر $\widetilde{S}$ در شرایط زیر صدق کند.

۱. اندازه $\langle M \rangle(\omega)$ روی $[0,T]$، قریب به یقین روی $[0,T]$ اکیدا صعودی است.

۲. A پیوسته است.

۳. A نسبت به $\langle M \rangle$ (با چگالی α) مطلقا پیوسته است که در آن $E\left[|\alpha \ln^+ |\alpha||\right] < \infty$. شرط کافی برای آن این است که داشته باشیم $E\left[\langle \int \alpha \mathrm{d}M \rangle\right] < \infty$.

اکنون شرایط فوق را برای $\widetilde{S}$ بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle_t &= \left\langle \int_0^t \widetilde{S}_{u-} \sqrt{\sigma_u} \mathrm{d}W_u^1 + \int_0^t \int_{-1}^\infty \widetilde{S}_{u-} y \widetilde{N}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}u) \right\rangle \\
&= \int_0^t \widetilde{S}_{u-}^2 \sigma_u \mathrm{d}u + \int_0^t \int_{-1}^\infty \widetilde{S}_{u-}^2 y^2 v(\mathrm{d}y) \mathrm{d}u \\
&= \int_0^t \widetilde{S}_{u-}^2 \left(\sigma_u + \int_{-1}^\infty y^2 v(\mathrm{d}y) \right) \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

چون $\widetilde{S}_{u-}^2 \left(\sigma_u + \int_{-1}^\infty y^2 v(\mathrm{d}y) \right) > 0$ لذا $\langle M \rangle_t$ برای هر $t \in [0,T]$ اکیدا صعودی است. پس شرط (۱) برقرار است.

فرایند پیش‌بینی‌پذیر با تغییر متناهی

$$A_t = \int_0^t \widetilde{S}_{u-} (\mu_u - r_u) \mathrm{d}u,$$

[۷] Pseudo locally risk-minimizing strategy

[۸] Föllmer-Schweizer decomposition

پیوسته است، زیرا اندازه لبگ زمان‌های پرش صفر است. بنابراین شرط (۲) نیز برقرار است. قرار می‌دهیم

$$\frac{\mathrm{d}A_s}{\mathrm{d}\langle M\rangle_s}=\frac{\mu_s-r_s}{\widetilde{S}_s(\sigma_s+\int_{-1}^{\infty}y^2v(\mathrm{d}y))},$$

و

$$\begin{aligned}E\left[\left\langle\int\frac{\mathrm{d}A_s}{\mathrm{d}\langle M\rangle_s}\mathrm{d}M_u\right\rangle\right]&=E\left[\int\frac{(\mu_s-r_s)^2}{\widetilde{S}_s^2(\sigma_s+\int_{-1}^{\infty}y^2v(\mathrm{d}y))^2}\mathrm{d}\langle M\rangle_u\right]\\&=E\left[\int\frac{(\mu_s-r_s)^2}{\widetilde{S}_s^2(\sigma_s+\int_{-1}^{\infty}y^2v(\mathrm{d}y))^2}\mathrm{d}\left(\widetilde{S}_{u-}^2\left(\sigma_u+\int_{-1}^{\infty}y^2v(\mathrm{d}y)\right)\mathrm{d}u\right)\right]\\&=E\left[\int\frac{(\mu_s-r_s)^2}{\sigma_s+\int_{-1}^{\infty}y^2v(\mathrm{d}y)}\mathrm{d}u\right].\end{aligned}$$

امید ریاضی فوق متناهی است زیرا

$$E\left[\int\frac{(\mu_s-r_s)^2}{\sigma_s+\int_{-1}^{\infty}y^2v(\mathrm{d}y)}\mathrm{d}u\right]<E\left[exp\int\frac{(\mu_s-r_s)^2}{\sigma_s}\right]<\infty.$$

در نتیجه شرط (۳) نیز برقرار است. بنابراین در مدل ما، استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک نما یک استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک می‌باشد. در ادامه، این استراتژی را می‌یابیم.

۳.۴ پوشش ریسک

تجزیه‌ی فولمر_شوایتزر برای پرتفوی تنزیل شده به صورت زیر است

$$V(\varphi)=V_0(\varphi)+\int_0^t\phi(s,u)\mathrm{d}\widetilde{S}_u+L_t, \tag{۲.۴}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$L_t=V_t-V_0-\int_0^t\phi(s,u)\mathrm{d}\widetilde{S}_u,$$

با جایگذاری (۱۰.۳) در رابطه اخیر خواهیم داشت

$$\begin{aligned}L_t&=V_t-V_0-\int_0^t\phi(s,u)\mathrm{d}\widetilde{S}_u\\&=\int_0^t e^{-\int_0^u r_s\mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial S}S_u\sqrt{\sigma_u}\mathrm{d}\hat{W}_u^1+\int_0^t e^{-\int_0^u r_s\mathrm{d}s}\frac{\partial C}{\partial\sigma}\beta\sigma_u\mathrm{d}\hat{W}_u^2\\&+\int_0^t\int_{-1}^{\infty}e^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}(C(u,S_{u-}(1+y),\sigma_u,X_{u-})-C(u,S_{u-},\sigma_{u-},X_{u-}))\hat{N}(\mathrm{d}y,\mathrm{d}u)\\&+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}e^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}(C(u,S_{u-},\sigma_u,X_{u-}+h(X_{u-},z))-C(u_-,S_{u-},\sigma_{u-},X_{u-}))\widetilde{P}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}u)\\&-\int_0^t\phi(s,u)\mathrm{d}\widetilde{S}_u.\end{aligned} \tag{۳.۴}$$

که در آن

$$\hat{W}_t^1 = W_t^1 + \int_0^t \frac{(\mu_s - r_s)\sqrt{\sigma_s}}{\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)} \mathrm{d}s,$$
$$\hat{W}_t^2 = W_t^2 + \rho \int_0^t \frac{(\mu_s - r_s)\sqrt{\sigma_s}}{\sigma_s + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)} \mathrm{d}s.$$

با جایگذاری $\hat{W}_t^1$ و $\hat{W}_t^2$ در (۳.۴) داریم

$$\begin{aligned}
L_t &= V_t - V_0 - \int_0^t \phi(s,u)\mathrm{d}\widetilde{S}_u \\
&= \int_0^t e^{-\int_0^u r_s \mathrm{d}s} \frac{\partial C}{\partial S} S_u \sqrt{\sigma_u} \mathrm{d}W_u^1 + \int_0^t e^{-\int_0^u r_s \mathrm{d}s} \frac{\partial C}{\partial S} S_u \frac{(\mu_u - r_u)\sigma_u}{\sigma_u + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)} \mathrm{d}t \\
&+ \int_0^t e^{-\int_0^u r_s \mathrm{d}s} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \beta \sigma_u \mathrm{d}W_u^2 + \int_0^t e^{-\int_0^u r_s \mathrm{d}s} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \rho\beta \frac{(\mu_u - r_u)\sigma_u^{\frac{3}{2}}}{\sigma_u + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)} \mathrm{d}t \\
&+ \int_0^t \int_{-1}^{\infty} e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} (C(u, S_{u_-}(1+y), \sigma_u, X_{u_-}) - C(u, S_{u_-}, \sigma_{u_-}, X_{u_-}))\hat{N}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}u) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} (C(u, S_{u_-}, \sigma_u, X_{u_-} + h(X_{u_-}, z)) - C(u_-, S_{u_-}, \sigma_{u_-}, X_{u_-}))\widetilde{P}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}u) \\
&- \int_0^t \phi(s,u)\mathrm{d}\widetilde{S}_u.
\end{aligned}$$

چون L_t تحت P یک مارتینگل است، تابع زیر انتگرال نسبت به $\mathrm{d}u$ باید صفر شود. بنابراین برای هر $u \in [0,T]$ داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial C}{\partial S} \widetilde{S}_u \frac{(\mu_u - r_u)\sigma_u}{\sigma_u + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \rho\beta \frac{(\mu_u - r_u)\sigma_u^{\frac{3}{2}}}{\sigma_u + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y)} e^{-\int_0^u r_s \mathrm{d}s} - \phi(s,u)(\mu_t - r_t)\widetilde{S}_u \\
&+ \int_{-1}^{\infty} e^{-\int_0^u r_s \mathrm{d}s} (C(u, S_{u_-}(1+y), \sigma_u, X_{u_-}) - C(u, S_{u_-}, \sigma_{u_-}, X_{u_-}))(v - \tilde{v})(\mathrm{d}y)\mathrm{d}u = 0
\end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\phi(s,u) = \frac{\frac{\partial C}{\partial S}\widetilde{S}_u \sigma_u + \rho\beta \frac{\partial C}{\partial \sigma} e^{-\int_0^u r_s \mathrm{d}s} \sigma_u^{\frac{3}{2}} + \int_{-1}^{\infty} e^{-\int_0^u r_s \mathrm{d}s} (C(u, S_{u_-}(1+y), \sigma_u, X_u) - C(u_-, S_{u_-}, \sigma_{u_-}, X_{u_-}))yv(\mathrm{d}y)}{\widetilde{S}_u(\sigma_u + \int_{-1}^{\infty} y^2 v(\mathrm{d}y))},$$

و $\eta(s,u) = V(\varphi) - \phi(s,u)\widetilde{S}_u$.

بنابراین $\varphi = (\phi(s,u), V(\varphi) - \phi(s,u)\widetilde{S}_u)$ استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک است.

مراجع

[۱] چمنی‌انباجی ر، (۱۳۹۰)، پایان‌نامه ارشد: ''روش‌های عددی نوین در قیمت‌گذاری اختیار معامله آمریکایی تحت دینامیک رژیم سوئچینگ''، دانشکده اقتصاد، دانشگاه علامه طباطبائی.

[۲] سیاح س و صالح‌آبادی ع، (۱۳۸۴)، **''مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک''** (ترجمه)، گروه رایانه تدبیر پرداز.

[۳] ظهوری زنگنه ب. و جهانی پور ر. ا.، (۲۰۰۴)، **''حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل ساز پدیده های طبیعی''**، فرهنگ و اندیشه ریاضی، صفحه ۲۰-۱.

[۴] Apostol T. M. ،(۱۹۷۴) ''**Mathematical analysis**،'' Vol. ،۲ Reading، MA: Addison-Wesley.

[۵] Björk T. ،(۲۰۰۹) ''**Arbitrage theory in continuous time**،'' Oxford university press.

[۶] Black F. and Scholes M.، ،(۱۹۷۳) ''The pricing of options and corporate liability'' **Journal of Political Economy**، ،۸۱ pp .۶۵۹–۶۳۷

[۷] Chan T. ،(۱۹۹۹) ''Pricing contingent claims on stocks driven by Lévy processes'' **Annals of Applied Probability**، ،۹ pp .۵۲۸–۵۰۴

[۸] Chung K. L. ،(۲۰۰۱) ''**A course in probability theory**، Academic press.

[۹] Elliott R. J.، Chan L. and Siu T. K. ،(۲۰۰۵) ''Option pricing and Esscher transform under regime switching'' **Annals of Finance**، ،(۴)۱ pp .۴۲۳-۴۳۲

[۱۰] Elliott R.J.، Siu T.K.، Chan L.L. and Lau J.W. ،(۲۰۰۷) ''Pricing options under a generalized Markov-modulated jump-diffusion model'' **Stochastic Analysis and Applications**، ،۲۵ pp .۸۴۳–۸۲۱

[۱۱] Föllmer H. and Schweizer M. ،(۱۹۹۰) ”Hedging of contingent claims under incomplete information” **Applied Stochastic Analysis**، Davis M. and Elliot R. eds.، Vol.۵، Gordon and Breach، London، pp .۳۸۹-۴۱۴

[۱۲] Frey R. ،(۲۰۰۰) ”Risk-minimization with incomplete information in a model for high-frequency data” **Mathematical Finance**، ،۱۰ pp .۲۲۵–۲۱۵

[۱۳] Fristedt B. E. and Gray L. F. ،(۲۰۱۳) ”**A modern approach to probability theory**، Springer Science and Business Media.

[۱۴] Gerber H.U. and Shiu E.S.W. ،(۱۹۹۴) ”Option pricing by Esscher transforms” **Transactions of the Society of Actuaries**، ،۴۶ pp –۹۹ .۱۹۱

[۱۵] Gopal K.B.، Mrinal K.G. and Anindya G.، ،(۲۰۱۱) ”Risk minimizing option for a class of exotic options in a Markov-modulated market” **Stochastic Analysis and Applications**، ،۲۹ pp .۲۸۱–۲۵۹

[۱۶] Grigoriu M. ،(۲۰۱۳) ”**Stochastic calculus: applications in science and engineering**،” Springer Science and Business Media.

[۱۷] Guo X. ،(۲۰۰۱) ”Information and option pricings” **Quantitative Finance** ،۱ pp .۴۴–۳۸

[۱۸] Hamilton J. D. ،(۱۹۹۴) ”**Time series analysis**،” Vol. ،۲ Princeton university press.

[۱۹] Harrison J.M. and Kreps D.M. ،(۱۹۷۹) ”Martingales and arbitrage in multiperiod security markets” **Journal of Economic Theory** ،۲۰ pp .۴۰۸–۳۸۱

[۲۰] Harrison J.M. and Pliska S.R. ،(۱۹۸۱) ”Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading” **Stochastic Processes and Their Applications** ،۱۱ pp .۲۶۰–۲۱۵

[۲۱] Heath D.، Platen E. and Schweizer M. ،(۲۰۰۱) ”A comparison of two quadratic approaches to hedging in incomplete markets” **Mathematical Finance**، ،(۴)۱۱ pp .۳۸۵-۴۱۳

[۲۲] Kim C. J. and Nelson C. R. ،(۱۹۹۹) ”**State-space models with regime switching**، The MIT Press، England.

[۲۳] Klebaner F. C. ،(۲۰۰۵) ”**Introduction to stochastic calculus with applications**،” World Scientific Publishing Co Inc.

[۲۴] Lee K. and Song S. ،(۲۰۰۷) ”Insiders’ hedging in a jump diffusion model” **Quantitative Fiance**، ۷ ،(۵) pp .۵۴۵–۵۳۷

[۲۵] Musiela M. and Rutkowski M. ،(۲۰۰۶) ”**Martingale methods in financial modelling**،” Vol. ،۳۶ Springer Science and Business Media.

[۲۶] Nele V. and Michèle V. ،(۲۰۰۸) ”A locally risk minimizing hedging strategy for unit-linked life insurance contracts in a Lévy process financial market” **Insurance Mathematics and Economics**، ،۴۲ pp .۱۱۳۷–۱۱۲۸

[۲۷] Oksendal B. ،(۲۰۰۳) ”**Stochastic differential equations**،” In Stochastic differential equations، Springer Berlin Heidelberg.

[۲۸] Protter P. E. ،(۲۰۱۳) ”**Stochastic Integration and Differential Equations**،” Vol. ،۲۱ Springer.

[۲۹] Raymond J. E. and Rich R. W. ،(۱۹۹۷) ”Oil and the macroeconomy: A Markov state-switching approach” **Journal of Money**، **Credit**، **and Banking**، pp .۱۹۳-۲۱۳

[۳۰] Rolski T.، Schmidli H.، Schmidt V. and Teugels J. ،(۲۰۰۹) ”**Stochastic processes for insurance and finance**،” Vol. .۵۰۵ John Wiley & Sons.

[۳۱] Schweizer M. ،(۱۹۹۱) ”Option hedging for semimartingales” **Stochastic Processes and Their Applications** ،۳۷ pp .۳۶۳–۳۳۹

[۳۲] Schweizer M. ،(۲۰۰۱) ”A guided tour through quadratic hedging approaches” In: Jounini، E.، Cvitanic، J.، Musiela، M. (Eds.)، Option Pricing، Interest Rates and Risk Management. Cambridge University press، pp .۵۷۴–۵۸

[۳۳] Shreve S. E. ،(۲۰۰۴) ”**Stochastic calculus for finance**،” Vol. ،۱۱ II: Continuous-time models،Springer Science and Business Media.

[۳۴] Siu T.K.، Yang H.L. and Lau J.W. ،(۲۰۰۸) ”Pricing currency options under two-factor Markov-modulated stochastic volatility models” **Insurance: Mathematics and Economics** ،۴۳ pp .۳۰۲–۲۹۵

[۳۵] Takuji A. ،(۲۰۰۴) ”Minimal martingale measures for jump diffusion processes” **Journal of Applied Probability**، ۴۱ ،(۱) pp .۲۷۰–۲۶۳

[۳۶] Tankov P. ،(۲۰۰۳) ”**Financial modelling with jump processes**،” Vol. ،۲ CRC press.

[۳۷] Yang J. and Xiao Q. ،(۲۰۱۰) ”Risk-minimizing hedging strategies with restricted information and cost”**Applied Stochastic Models in Business and Industry** ۲۶ ،(۴) pp .۴۱۵–۴۰۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

انتگرال‌پذیر مربعی .... Square integrable
اندازه .... Measure
اندازه احتمال .... Probability Measure
اندازه‌پذیر .... Measurable
اندازه تصادفی .... Random Measure
اندازه تصادفی پواسون .... Poisson Random Measure
اندازه تصادفی پواسون جبران یافته .... Compensated Poisson Random Measure
اندازه دیراک .... Dirac measure
اندازه رادون .... Radon measure
اندازه علامت‌دار .... Signed measure
اندازه مارتینگل می‌نیمال .... Minimal martingale measure
بردار تصادفی .... Random Vector
بورل .... Borel
پرش .... Jump
تغییر متناهی .... Finite variation
تقریبا مطمئن .... Almost surely
حرکت براونی .... Brownian motion
زمان تصادفی .... Random time
زمان توقف .... Stopping time
سازگار .... Adapted
فرایند پواسون .... Poisson process
فرایند پواسون جبران یافته .... Compensated Poisson process
فضای احتمال .... Probability space
فضای احتمال فیلترشده .... Absolutely continuous measure
فضای اندازه .... Measure space
فضای اندازه‌پذیر .... Measurable space

فیلتر	Filter
کادلاگ	Cadlag
مارتینگل	Martingale
مارتینگل موضعی	Local martingale
متغیر تصادفی	Random Variable
متناهی	finite
مطلقا پیوسته	Absolutely Variable
معادل	Equivalent
میدان	field
نمو مانا	Stationary Increment
نمو مستقل	Independent Increment
نیم‌مارتینگل	Semi martingale

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

American Option .... اختیار معامله آمریکایی
Arbitrageurs .... آربیتراژگران
Attainable .... دست‌یافتنی
Asian option .... اختیار آسیایی
Barrier option .... اختیار مانع
Call Option .... اختیار خرید
Contingent claim .... ادعای مشروط
Continuous-time Markov chain .... زنجیر مارکوف زمان پیوسته
European Option .... اختیار معامله اروپایی
Exercise date .... تاریخ اعمال
Exercise Price .... قیمت اعمال
Hedging .... پوشش ریسک
Interest rate .... نرخ بهره
Locally risk-minimizing strategy .... استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک
Look back option .... اختیار متکی به گذشته
Money market account .... حساب بازار پول
Option .... اختیار معامله
Partial differential equation .... معادله دیفرانسیل جزئی
Portfolio .... پرتفوی
Power option .... اختیار توان
Pseudo locally risk-minimizing strategy .... استراتژی موضعا مینیمم‌ساز ریسک نما
Put option .... اختیار فروش
Regime switching .... رژیم سویچینگ
Risk .... ریسک
Small Perturbation .... پریشیدگی کوچک
State space .... فضای حالت

سهام . . . . Stock
تلاطم . . . . Volatility

Aabstract

We address risk minimizing option pricing in a regime switching with stochastic volatility model when the underlying asset price follows a general state-dependent regime-switching jump-diffusion process. Using minimal martingale measure, an optimal hedging strategy is obtained by the local risk minimization.
Keywords: Regime switching, Jump-diffusion processes, Stochastic volatility, Local risk minimization, Option pricing.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Financial Mathematics

Locally risk minimizing option pricing under the Markovian incomplete markets

By: Shiva Namazi

Supervisors

Dr. Elham Dastranj
Dr. S. Mojtaba Mirlohi

May 2017