بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز تابعی

رساله دکتری

ریختی های مشتق و نمایش در C^*- جبرهای موضعی

نگارنده: سارا کریمی

استادان راهنما

دکتر احمد زیره
دکتر کامران شریفی

استادان مشاور

دکتر مسعود امینی
دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان

بهمن ۱۳۹۵

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود خانم **سارا کریمی** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض (آنالیز تابعی)** به شماره دانشجویی **۹۱۲۴۷۳۵** ورودی مهر ماه سال **۹۱** در تاریخ **۱۳۹۵/۱۱/۲۰** از رساله خود با

عنوان : ریختیهای مشتق و نمایش در *C- جبرهای موضعی

دفاع و با اخذ نمره .... ۱۹/۸۶ به درجه : .... عالی .... نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷☐
ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹ – ۱۵☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتراحمد زیره	استاد راهنمای اول	دانشیار	
۲	دکترکامران شریفی	استاد راهنمای دوم	دانشیار	
۳	دکتر مسعود امینی	استاد مشاور اول	استاد	
۴	دکترغلامرضا عباسپور	استاد مشاور دوم	استادیار	
۵	دکتر علی غفاری	داور	استاد	
۶	دکتر شیرین حجازیان	داور	استاد	
۷	دکتر مهدی ایرانمنش	داور	دانشیار	
۸	دکتر مهدی قوتمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید.

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران:

تاریخ و امضاء:

تقدیم به روح پاک مادرم،
به ستایش محبت های بی اندازه اش و
به وسعت همه خوبیهایش

سپاس گزاری

با سپاس و قدردانی از استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر کامران شریفی که همواره با سعه ی صدر پاسخ گوی پرسش هایم بودند و با راهنمایی های دلسوزانه شان مرا در گردآوری این پایان نامه یاری نمودند. هم چنین از استاد عزیزم جناب آقای دکتر احمد زیره که در طی مراحل تحصیل، اینجانب را یاری نمودند، کمال تشکر را دارم.

سارا کریمی

بهمن ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **سارا کریمی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **ریختی های مشتق و نمایش در C^*- جبرهای موضعی** ، تحت راهنمایی **احمد زیره** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سارا کریمی
بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله ابتدا نمایش القایی مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی را معرفی کرده و سپس با معرفی هم ارزی موریتا، حالت مدولی قضیه ی غیر اولیه را برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی نتیجه می گیریم. سپس به تعمیم ساختار GNS پشکی برای نگاشت های به طور کامل مثبت روی C^*- جبرهای موضعی می پردازیم. این تعمیم ما را قادر می سازد تا به اثبات دیگری برای قضیه ی استاین اسپرینگ برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی دست یابیم و به کمک نمایش القایی، قضیه ی استاین اسپرینگ برای C^*- جبرهای موضعی را از ساختار GNS پشکی نتیجه بگیریم. هم چنین این قضیه را برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی اثبات کرده و قضیه ی رادون-نیکودیم را برای نگاشت های به طورکامل مثبت روی مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی نتیجه می گیریم. در پایان به بررسی مشتق روی جبر عملگرها در مدولهای هیلبرت و دو-مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی پرداخته و شرایطی را بررسی می کنیم که تحت آن شرایط، مشتق درونی یا صفر می شود.

کلمات کلیدی: C^*- جبر موضعی، مدول هیلبرت، مشتق روی جبر عملگرها، نمایش

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

مقالات چاپ شده در مجلات ISI:

1. Kh. Karimi and K. Sharifi, Induced representations of Hilbert modules over locally C*-algebras and the imprimitivity theorem, *Math. Commun.* **21** 2016, 85–96.

2. Kh. Karimi and K. Sharifi, Completely positive maps on Hilbert modules over pro-C*-algebras, to appear *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, available at arXiv: 1611.04759v1, Nov. 2016.

3. Kh. Karimi and K. Sharifi, Some remarks on derivations on the algebra of operators in Hilbert pro-C*-bimodules, to appear *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* DOI 10.1007/s40840-016-0438-8, available at arXiv: 1612.03282v1, Dec. 2016.

مقالات چاپ شده در خلاصه مقالات کنفرانسها:

1. Kh. Karimi and K. Sharifi, Linear extension of completely additive measures, *The* 21^{st} *Seminar on Mathematical Analysis and its Applications*, Islamic Azad University, Hamedan, Iran, November 2014, 408–410.

2. Kh. Karimi and K. Sharifi, Derivations on the algebra of operators in Hilbert modules over locally C^*-algebras, 48^{th} *Annual Iranian Mathematics Conference*, Yazd University, Iran, August 2015, 401–404.

3. Kh. Karimi and K. Sharifi, Derivations of operators on Hilbert pro-C*-bimodules, *The* 4^{th} *Seminar on Functional Analysis and its Applications*, Ferdowsi University of Mashhad, Iran, March 2016, 318–321.

پیش گفتار

واژه ی C^*- جبر موضعی[۱] منسوب به اینو [۲] [؟] است و به یک $*$-جبر توپولوژیکی اطلاق می شود که توپولوژی آن توسط یک خانواده از C^*- شبه نرم ها القاء می شود. چنین جبرهایی همواره به صورت حد وارون C^*- جبرها بیان می شوند. C^*- جبرهای موضعی با نام های مختلفی مورد مطالعه قرار گرفته اند. این جبرها توسط لسنر[۳][؟] و شموجن [۴][؟]، LMC^*- جبرها [۵] و توسط آرویسون[۶][؟] و ویکلسکو[۷][؟]، $pro-C^*$- جبرها [۸] نامیده شدند. در حالت متریک پذیر بودن (شمارا پذیر بودن C^*- شبه نرم ها) این جبرها را $\sigma-C^*$- جبر[۹] می نامند. فیلیپس [۱۰] را می توان اولین کسی دانست که نقش این جبرها را در مسائل گوناگون مربوط به C^*- جبرها بررسی کرد. او به کمک روابط و مولدها، جبر تانژانت[۱۱] یک C^*- جبر را به عنوان یک $\sigma-C^*$- جبر ساخت [؟]. هم چنین، فیلیپس دریافت که ضربگرهای[۱۲] ایده ال پدرسن[۱۳] یک C^*- جبر، یک C^*- جبرموضعی است [؟]. به بیان دقیق تر، پدرسن برای یک C^*- جبر (غیر یکدار) مانند A، ایده ال موروثی چگال مینیمالی مانند K_A را ساخت. این ایده ال در میان همه ی ایده ال های چگال در A مینیمال است. لزر [۱۴]و تیلور[۱۵] به طور ممتد به مطالعه ی $\Gamma(K_A)$، جبر ضربگر A پرداختند ولی نتوانستند به توپولوژی طبیعی که روی این جبر وجود دارد، پی ببرند. فیلیپس با در نظرگرفتن این توپولوژی، به ساختار $\Gamma(K_A)$ به عنوان یک $pro-C^*$- جبر پی برد و به این ترتیب بسیاری از نتایج مهمی که لزر و تیلور برای $\Gamma(K_A)$ بدست آوردند از خواص کلی $pro-C^*$- جبرها نتیجه شد. از موارد دیگری که فیلیپس، C^*- جبرهای موضعی را به کار گرفت می توان به ساختن نظیر ناجابجایی گروه های لی غیر فشرده، ساختن فضای حلقه ای ناجابجایی یک C^*-جبر و مقایسه ی K- نظریه ی ضرب های متقاطع از طریق عمل های هموتوپی گروه های لی فشرده اشاره کرد [؟]، بخش

---

[۱] locally C^*-algebra
[۲] Inoue
[۳] Lassner
[۴] Schnudgen
[۵] LMC*-algebras
[۶] Arveson
[۷] Voiculescu
[۸] pro-C^*-algebras
[۹] $\sigma-C^*$-algebras
[۱۰] Phillips
[۱۱] tangent algebra
[۱۲] multipliers
[۱۳] Pedersen 's ideal
[۱۴] Lazar
[۱۵] Taylor

۲.۶]. این پایان نامه مشتمل بر ۴ فصل است.

فصل اول شامل مفاهیم و قضایای مورد نیاز برای مطالعه ی این پایان نامه است. در این فصل ابتدا C^*- جبر موضعی را به عنوان یک $*$- جبر توپولوژیکی معرفی کرده و به بیان چند مثال از این گونه جبرها می پردازیم. سپس به کمک حد وارون، نشان می دهیم که هر C^*- جبر موضعی، حد وارون یک دستگاه از C^*- جبرها است. در این فصل به تعریف مفاهیمی چون طیف یک عنصر، یکه دار شده ی یک C^*- جبر موضعی، عناصر خودالحاق و مثبت می پردازیم. در این بخش، به یکی از بارزترین تفاوت های بین C^*- جبر و C^*- جبرهای موضعی اشاره می شود. با یک مثال نشان می دهیم که طیف یک عنصر در یک C^*- جبر موضعی، لزوماً کراندار یا بسته نیست. قضیه حسابان تابعی[۱۶] که یک قضیه بنیادی در C^*- جبر محسوب می شود را برای C^*- جبرهای موضعی تعمیم می دهیم. سپس با استفاده از مفهوم فضای شبه توپولوژیکی و نگاشت های شبه پیوسته، یک هم ارزی رده ای پادوردا بین فضاهای شبه توپولوژیکی به طور کامل هاسدورف و C^*- جبرهای موضعی جابجایی و یکدار بیان می کنیم. در بخش دوم این فصل، مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی را به همراه چند مثال تعریف کرده و نشان می دهیم هر مدول هیلبرت روی این گونه از جبرها را می توان به صورت حد وارون C^*- مدولهای هیلبرت در نظر گرفت. مفاهیمی چون عملگرهای الحاقی، عملگرهای فشرده، نمایش القایی و هم ارزی موریتا را برای C^*- جبرها تعریف می کنیم. در پایان این بخش ضرب تانسوری مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی را به اختصار بیان می کنیم. بخش سوم این فصل به نمایش القایی C^*- جبرهای موضعی اختصاص می یابد. نمایش های ناتباهیده، نمایش های القایی، نمایش های به طور یکانی معادل و هم ارزی موریتا را برای این گونه جبرها تعمیم داده و به بیان مختصری از نمایش القایی ریفل در C^*- جبرهای موضعی می پردازیم. در انتهای این بخش قضیه معروف غیر اولیه را برای این گونه جبرها بیان می کنیم.

هم ارزی موریتا و نمایش القایی C^*- جبرها، اولین بار توسط ریفل [؟، ؟] معرفی شد. به C^*- جبرهای A و B هم ارز موریتا گوییم، اگر یک A- مدول هیلبرت کامل مانند E وجود داشته باشد به طوری که B با $K_A(E)$، C^*- جبر عملگرهای فشرده روی E، یکریخت باشد. برخی از خواص C^*- جبرها که تحت هم ارزی موریتا حفظ می شوند در [؟، ؟، ؟، ؟] بررسی شده است. ریفل، نمایش القایی C^*- جبرها را به کمک ضرب تانسوری مدولهای هیلبرت تعریف کرد. این نمایش به نمایش القایی ریفل [۱۷] معروف است. او ثابت کرد بین رده ی نمایش های ناتباهیده C^*- جبرهایی که هم ارز موریتا هستند، یک تناظر یک به یک برقرار است. جویتا [؟، ؟] مفاهیم هم ارز موریتا و نمایش القایی را در رده ی C^*- جبرهای موضعی تعریف کرد. اخیراً، جویتا و مصلحیان [؟] و اسکاید [؟] هم ارزی موریتا را در ی C^*- مدولهای هیلبرت به دو روش متفاوت معرفی کرده اند. به مفهوم جویتا و مصلحیان، دو C^*- مدول هیلبرت V و W به ترتیب روی C^*- جبرهای A و B، هم ارز موریتا نامیده می شوند اگر $K_A(V)$ و $K_B(W)$ به عنوان C^*- جبر، هم ارز موریتای قوی باشند.

فصل دوم این پایان نامه به بررسی مفهوم هم ارزی موریتا در مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای

[۱۶] functional calculus

[۱۷] Rieffel induced representation

موضعی اختصاص می یابد. اسکاید [؟] ثابت کرد که اگر E یک مدول هیلبرت روی C^*- جبر A باشد، آن گاه هر نمایش از A، نمایشی برای E القا می کند. ما با به کار بردن این نمایش، نمایش القابی C^*- مدولهای هیلبرت و برخی از خواص آن را که در [؟] بررسی شده است، را با روشی کوتاه تر بدست می آوریم و سپس نمایش القابی مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی را معرفی می کنیم. هم چنین، مفهوم هم ارزی موریتا را برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی بیان کرده و ثابت می کنیم مدولهای هیلبرت کامل روی C^*- جبرهای موضعی، هم ارز موریتا هستند اگر و فقط اگر C^* - جبرهای موضعی آن ها هم ارز موریتای قوی باشند. در پایان فصل، حالت مدولی قضیه غیر اولیه را نتیجه می گیریم. بنا به این قضیه، برای مدولهای هیلبرت V و W به ترتیب روی C^*- جبرهای موضعی A و B که هم ارز موریتا هستند، یک تناظر یک به یک بین رده های هم ارزی نمایش های ناتباهیده ی V و W وجود دارد.

نگاشت های به طور کامل مثبت، تعمیمی از تابعک های خطی مثبت می باشند. بنا به ساختار معروف گلفاند- نیمارک- سگال[18] (ساختار GNS[19])، اگر A یک C^*- جبر باشد، آن گاه بین نمایش های دوری A [20] روی فضاهای هیلبرت و تابعک های خطی مثبت روی A تناظری یک به یک برقرار است. این قضیه ی بنیادی، توسط استاین اسپرینگ[21] و پشکی [22] برای نگاشت های خطی به طور کامل مثبت تعمیم یافت. استاین اسپرینگ نشان داد که یک نگاشت خطی به طور کامل مثبت از A به $B(H)$ مانند φ، به صورت $V_\varphi^*\pi_\varphi(\cdot)V_\varphi$ است که در آن π_φ یک نمایش از A روی فضای هیلبرت H_φ و V_φ یک عملگر خطی کراندار است. پشکی، ساختار GNS را برای نگاشت های خطی به طور کامل مثبت از A به یک C^*- جبر مانند B، تعمیم داد و نمایشی از A را روی یک B- مدول هیلبرت بدست آورد. قضیه ی استاین اسپرینگ برای رده ای از نگاشت های به طور کامل مثبت که روی مدولهای هیلبرت بر روی C^*- جبرهای یکدار تعریف می شوند، بررسی شده است [؟، ؟]. اسکاید [؟] به کمک نمایش های القابی C^*- مدولهای هیلبرت، اثبات کوتاهی از نتیجه ی [؟] بدست آورد. نظریه ی نگاشت های به طور کامل مثبت روی C^*- جبرهای موضعی، توسط جویتا در کتاب [؟] و مقاله ی [؟] بررسی شده است. ملیو [23] و پیلیو [24] [؟] با تعمیم دادن روش های [؟] از حالت C^*- جبرها به حالت C^*- جبرهای موضعی، قضیه ی استاین اسپرینگ را برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی نتیجه گرفتند.

فصل سوم را به بررسی نگاشت های به طور کامل مثبت در مدولهای هیلبرت بر روی C^*- جبرهای موضعی اختصاص می دهیم. در این فصل، ابتدا به تعمیم ساختار GNS پشکی برای نگاشت های به طور کامل مثبت روی C^*– جبرهای موضعی می پردازیم. این تعمیم، ما را قادر می سازد تا به اثبات دیگری برای قضیه ی استاین اسپرینگ برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی دست یابیم. ما به کمک مفهوم نمایش های القابی C^*- مدولهای هیلبرت، قضیه ی استاین اسپرینگ برای C^*-

[18] Gelfand- Naimark-Segal construction

[19] GNS-construction

[20] cyclic representations

[21] Stinespring

[22] Paschke

[23] Maliev

[24] Pliev

جبرهای موضعی را از ساختار GNS پشکی نتیجه می گیریم. سپس نمایش استاین اسپرینگ را برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی بدست می آوریم.
روی مجموعه ی همه ی نگاشت های به طور کامل مثبت و عملگر مقدار روی C^*- جبرها، یک ترتیب جزئی طبیعی وجود دارد، به این صورت که $\varphi \leq \psi$ اگر $\psi - \varphi$ به طور کامل مثبت باشد. آرویسون[۲۵] این رابطه را بر اساس ساختار استاین اسپرینگ متناظر با هر نگاشت به طور کامل مثبت، توصیف کرد و مفهومی از مشتق رادون-نیکودیم را برای نگاشت های به طور کامل مثبت روی C^*- جبرها معرفی کرد. در واقع، او نشان داد که $\varphi \leq \psi$ اگر و فقط اگر یک تابع انقباضی [۲۶] مثبت یکتا مانند $\Delta_\varphi(\psi)$ (مشتق رادون-نیکودیم ψ نسبت به φ) در جابجاگر [۲۷] $\pi_\varphi(A)$ وجود داشته باشد به طوری که $\psi(\cdot) = V_\varphi^* \Delta_\varphi(\psi)\pi_\varphi(\cdot)V_\varphi$. جویتا [۲۸] یک رابطه ی پیش ترتیب[۲۹]، در مجموعه ی همه ی نگاشت های به طور کامل مثبت روی C^*- مدولهای هیلبرت تعریف کرد و قضیه ی رادون-نیکودیم را برای این گونه نگاشت ها تعمیم داد. در بخش آخر این فصل، به تعمیم قضیه ی رادون-نیکودیم برای نگاشت های به طور کامل مثبت روی مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی می پردازیم.

یک مشتق روی جبر A، یک نگاشت خطی مانند $D : A \to A$ است به طوری که به ازای هر $a, b \in A$، $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. مشتق D را درونی می گوییم، اگر $x \in A$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $D(a) = [a, x] = ax - xa$. سوال مهمی که در بحث مشتق مطرح می شود این است که روی کدام جبرها و تحت چه شرایطی، مشتق درونی یا صفر است. در سال ۱۹۵۵، سینگر و ورمر [؟] ثابت کردند که هر مشتق روی جبر باناخ جابجایی، جبر را به رادیکال آن می نگارد. به خصوص، هر مشتق پیوسته روی جبر نیم ساده، صفر است. در حالت کلی قضیه ی سینگر-ورمر برای جبرهای توپولوژیکی برقرار نیست [؟، نتیجه۲.۲.۴]. در سال ۱۹۹۲، بکر [؟] مطالعه ی مشتق روی رده های خاص از جبرهای توپولوژیکی موسوم به C^*- جبرهای موضعی را آغاز کرد و ثابت کرد قضیه ی سینگر-ورمر برای C^*- جبرهای موضعی جابجایی برقرار است. او ثابت کرد که هر مشتق روی C^*- جبر موضعی، پیوسته است [؟، گزاره ۲] و C^*- جبرهای موضعی جابجایی، مشتق غیر صفر ندارند [؟، نتیجه ۳]. هم چنین او ثابت کرد که اگر A یک C^*- جبر موضعی باشد به طوری که به ازای هر $p \in S(A)$، هر مشتق روی A_p درونی باشد، آن گاه هر مشتق D روی A، تقریباً درونی [۳۰] است، یعنی تور $\{h_i\}_{i \in I}$ در A وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $D(a) = \lim_i [h_i, a]$. در سال ۱۹۹۵، فیلیپس با به کار بردن تکنیکی جالب، توانست نتایج قوی تری از بکر بدست آورد. او فرض درونی بودن مشتق روی A_p را حذف کرد و ثابت کرد هر مشتق روی C^*- جبر موضعی، تقریباً درونی است [؟، قضیه ۳]. مشتق روی جبر عملگرهایی که روی C^*- مدولهای هیلبرت تعریف می شوند، در مقاله های [؟، ؟، ؟] بررسی شده است. لی و همکارانش رابطه ی بین درونی بودن مشتق روی $K_A(E)$ و $L_A(E)$ را مورد بررسی قرار

[۲۵] Arveson
[۲۶] contraction
[۲۷] commutant
[۲۸] Joita
[۲۹] preorder relation
[۳۰] approximately inner

دادند و ثابت کردند اگر A یک $\sigma - C^*$- جبر یکدار و جابجایی باشد و E یک A- مدول هیلبرت کامل باشد آن گاه درونی بودن مشتق روی $K_A(E)$، درونی بودن مشتق روی $L_A(E)$ را ایجاب می کند.

فصل چهارم به بررسی مشتق روی جبر عملگرها در مدولهای هیلبرت و دو-مدولهای هیلبرت روی C^*- جبر های موضعی اختصاص می یابد. در بخش دوم این فصل، به بیان نتایج و قضایایی می پردازیم که توسط بکر و فیلیپس برای مشتق روی C^*- جبرهای موضعی بدست آمده است. سپس به کمک این قضایا در بخش سوم، شرایطی را بررسی می کنیم که تحت آن شرایط هر مشتق روی $L_A(E)$، درونی است. هم چنین نشان می دهیم که اگر هر مشتق روی $K_A(E)$، درونی باشد، آن گاه هر مشتق روی $L_A(E)$ درونی است. در بخش پایانی این فصل، ابتدا دو-مدول هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی را تعریف کرده و سپس شرایطی را بررسی می کنیم که تحت آن شرایط، هر مشتق روی $K_A(E)$ و $L_A(E)$ صفر شود.

فهرست مطالب

فصل ۱

C^*- جبرهای موضعی

در این فصل، ابتدا به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه درباره ی C^*- جبرهای موضعی می پردازیم. در بخش دوم، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی را بیان کرده و در بخش پایانی، نمایش القایی و هم ارزی موریتا را در C^*- جبرهای موضعی مورد بررسی قرار می دهیم. مطالب این فصل برگرفته از [؟]، [؟] و [؟] است.

۱.۱ C^*- جبرهای موضعی

تعریف ۱.۱.۱. یک جبر توپولوژیکی[۱] مانند A، یک فضای برداری توپولوژیکی است که عمل ضرب در آن، به طور جداگانه پیوسته[۲] است. به این معنی که اگر (x_α) توری در A باشد که $x_\alpha \to x$ آن گاه به ازای هر $y \in A$، $x_\alpha y \to xy$ و $yx_\alpha \to yx$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. یک برگشت[۳] روی A، نگاشتی خطی-مزدوج[۴] مانند $* : A \to A$ است که به ازای هر $x, y \in A$،

- $(x^*)^* = x$،

[۱] topological algebra
[۲] separately continuous
[۳] involution
[۴] conjugate-linear

- $(xy)^* = y^*x^*$.

جبر A به همراه برگشت $*$ را یک جبر برگشت پذیر[۵] یا $*$- جبر [۶] گوییم.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای به طور موضعی فشرده و $C(X)$ مجموعه همه توابع پیوسته ی مختلط مقدار روی X باشد. در این صورت $C(X)$ همرا با برگشت $* : C(X) \to C(X)$ که به صورت زیر تعریف می شود، یک $*$-جبر است.

$$f \to f^*, \;\; f^*(x) = \overline{f(x)}, \;\; x \in X.$$

تعریف ۴.۱.۱. یک $*$- جبر توپولوژیکی، [۷] عبارت است از یک جبر توپولوژیکی به همراه یک برگشت پیوسته روی آن.

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $L(H)$ جبر همه ی عملگرهای کراندار روی H باشد. در این صورت $L(H)$ همرا با نرم توپولوژی و برگشت $* : L(H) \to L(H)$ که به صورت زیر تعریف می شود یک $*$-جبر توپولوژیکی است.

$$T \to T^*, \;\; \langle T^*(\xi), \eta\rangle = \langle \xi, T(\eta)\rangle, \;\; \xi, \eta \in H.$$

تعریف ۶.۱.۱. یک C^*-شبه نرم[۸] روی یک $*$- جبر توپولوژیکی مانند A، یک شبه نرم مانند p روی A است به طوری که به ازای هر $a, b \in A$، در خواص زیر صدق کند.

- خاصیت زیرضربی[۹]: $p(ab) \leq p(a)p(b)$،
- خاصیت حافظ $*$[۱۰]: $p(a^*) = p(a)$،
- خاصیت C*[۱۱]: $p(a^*a) = p(a)^2$.

یک دستگاه وارون[۱۲] (دستگاه تصویری[۱۳]) از مجموعه ها، متشکل است از یک مجموعه ی جهتدار مانند Λ، مجموعه های X_λ به ازای هر $\lambda \in \Lambda$ و توابع $\pi_{\lambda\mu} : X_\lambda \to X_\mu$ به ازای هر $\lambda, \mu \in \Lambda$ که $\mu \leq \lambda$ و در شرایط زیر صدق می کند

- به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $\pi_{\lambda\lambda} = id_{X_\lambda}$،
- به ازای هر $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ که $\nu \leq \mu \leq \lambda$، $\pi_{\mu\nu} \circ \pi_{\lambda\mu} = \pi_{\lambda\nu}$.

---

[۵] involutive algebra
[۶] *-algebra
[۷] topological *-algebra
[۸] C^*-seminorm
[۹] submultiplicative
[۱۰] *-preserving
[۱۱] C*-property
[۱۲] inverse system
[۱۳] projective system

حد وارون [۱۴](حد تصویری[۱۵]) دستگاه $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$، یک مجموعه مانند X به همراه توابع $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ است به طوری که به ازای هر $\mu \leq \lambda$، $\pi_\mu = \pi_\lambda \circ \pi_{\lambda\mu}$ و در خاصیت جهانی [۱۶] صدق کند. به این معنی که اگر Y یک مجموعه به همراه توابع $\varphi_\lambda : Y \to X_\lambda$ باشد به طوری که به ازای هر $\lambda, \mu \in \Lambda$ که $\mu \leq \lambda$، $\pi_{\lambda\mu} \circ \varphi_\lambda = \varphi_\mu$، آن گاه تابع یکتای $\varphi : Y \to X$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $\varphi_\lambda = \pi_\lambda \circ \varphi$.

حد وارون $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ را با نماد $\varprojlim_\lambda X_\lambda$ نمایش می دهیم. به آسانی می توان بررسی کرد که حد وارون در حد یکریختی، یکتا است. حد وارون دستگاه $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ وجود دارد زیرا می توان آن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$X = \{(x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : \ \pi_{\lambda\mu}(x_\lambda) = x_\mu \ , \ \ \mu \leq \lambda \text{ که } \lambda, \mu \in \Lambda \text{ به ازای هر }\}. \qquad (۱.۱)$$

اگر P_λ نگاشت تصویر از $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ به X_λ باشد، آن گاه نگاشت π_λ با تحدید کردن P_λ به X بدست می آید. به این ترتیب هر عضو $\varprojlim_\lambda X_\lambda$ را می توان به صورت یک دنباله ی مرتبط[۱۷] مانند $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ در نظر گرفت به طوری که به ازای هر $\lambda, \mu \in \Lambda$ که $\mu \leq \lambda$، $\pi_{\lambda\mu}(x_\lambda) = x_\mu$.

تعریف حد وارون را می توان به هر رده ای [۱۸] تعمیم داد و با ساختاری مشابه ساختار بالا، حد وارون را در رده ی گروه های آبلی و همریختی ها، رده ی فضاهای توپولوژیکی روی $\mathbb{C}$ و نگاشت های پیوسته و رده ی $*$- جبرهای توپولوژیکی و $*$- همریختی های پیوسته تعمیم داد. اگر X_λ دارای توپولوژی بوده و $\pi_{\lambda\mu}$ پیوسته باشد، آن گاه X نیز با تحدید توپولوژی حاصل ضربی، دارای توپولوژی است و نگاشت های π_λ پیوسته می باشند. در واقع، این توپولوژی روی X، ضعیف ترین توپولوژی است که به ازای آن همه نگاشت های π_λ پیوسته است. به علاوه، اگر $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ یک دستگاه وارون از حلقه ها به همراه همریختی های حلقه ای $\pi_{\lambda\mu} : R_\lambda \to R_\mu$ باشد و $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ یک دستگاه وارون از گروه های آبلی به همرا همریختی های گروهی $\sigma_{\lambda\mu} : M_\lambda \to M_\mu$ باشد به طوری که هر M_λ، یک R_λ- مدول باشد و به ازای هر $r \in R_\lambda$ و هر $m \in M_\lambda$، $\sigma_{\lambda\mu}(rm) = \pi_{\lambda\mu}(r)\sigma_{\lambda\mu}(m)$، آن گاه $\varprojlim_\lambda M_\lambda$ یک $(\varprojlim_\lambda R_\lambda)$- مدول است.

تعریف ۷.۱.۱. یک C^*-جبر موضعی مانند A، یک $*$- جبر توپولوژیکی مختلط، کامل و هاسدورف است که توپولوژی آن توسط C^*- شبه نرم های پیوسته القاء می شود. به بیان دیگر، یک تور مانند $(a_i)_{i\in I}$ در A به صفر همگرا است اگر و فقط اگر به ازای هر C^* - شبه نرم پیوسته مانند p، تور $(p(a_i))_{i\in I}$ به صفر همگرا باشد.

اگر توپولوژی یک C^*-جبر موضعی توسط یک خانواده شمارا از C^*- شبه نرم ها القاء شود، آن C^*-جبر موضعی را $\sigma - C^*$- جبر [۱۹] یا C^*-جبر موضعی فرشه [۲۰] گوییم.

[۱۴] inverse limit

[۱۵] projective limit

[۱۶] universal property

[۱۷] coherent sequence

[۱۸] category

[۱۹] $\sigma - C^* - algebra$

[۲۰] Fréchet locally C^*- algebra

مثال ۸.۱.۱. هر C^*- جبر، یک C^*- جبر موضعی است.

مثال ۹.۱.۱. هر $*$- زیرجبر بسته از C^*- جبر موضعی، یک C^*- جبر موضعی است.

مثال ۱۰.۱.۱. اگر $\{A_\lambda \ : \ \pi_{\lambda\mu}\}_{\lambda\leq\mu,\ \lambda,\mu\in\Lambda}$ یک دستگاه وارون از C^*- جبرها باشد آن گاه $\varprojlim_\lambda A_\lambda$ همراه با توپولوژی که توسط خانواده C^*- شبه نرم های $\{p_\lambda\}_{\in\Lambda}$ به صورت زیر تعریف می شود، یک C^*- جبر موضعی است.

$$p_\lambda((a_\mu)_\mu) = \|a_\lambda\|_\lambda, \ \ \lambda \in \Lambda,$$

که در آن $\|.\|_\lambda$ همان C^*- نرم روی A_λ است.

مثال ۱۱.۱.۱. اگر X یک فضای به طور فشرده تولید شده [۲۱] باشد آن گاه مجموعه همه ی توابع مختلط مقدار و پیوسته روی X همراه با توپولوژی همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه های فشرده ی X، یک C^*- جبر موضعی است.

مثال ۱۲.۱.۱. فرض کنید Λ یک مجموعه ی جهتدار و $(H_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ یک خانواده از فضاهای هیلبرت باشد به طوری که به ازای هر $\lambda,\mu\in\Lambda$ که $\lambda\leq\mu$ داشته باشیم $H_\lambda\subseteq H_\mu$ و $\langle .,.\rangle_\lambda = \langle .,.\rangle_{\mu|_{H_\lambda}}$. به ازای هر $\lambda,\mu\in\Lambda$ که $\lambda\leq\mu$، فرض کنید $i_{\lambda\mu}$ نگاشت شمول $H_\lambda \hookrightarrow H_\mu$ و $P_{\lambda\mu}$ تصویر از H_μ به روی H_λ باشد. $H=\cup_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda$ به همراه توپولوژی حد استقرایی [۲۲] (ظریف ترین توپولوژی به طور موضعی محدب روی H، که به ازای هر $\lambda\in\Lambda$ توابع یک به یک طبیعی $i_\lambda : H_\lambda \to H$ پیوسته می باشند) را یک فضای به طور موضعی هیلبرت [۲۳] می نامیم. فرض کنید

$$L(H) = \{T : H\to H;\ \ T = \varinjlim_\lambda T_\lambda,\ T_\lambda\in L(H_\lambda),\ P_{\lambda\mu}T_\mu = T_\lambda P_{\lambda\mu},\ \lambda\leq\mu,\ \lambda,\mu\in\Lambda\}.$$

در این صورت $L(H)$ همراه با توپولوژی تولید شده توسط C^*- شبه نرم های $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ که به ازای هر $\lambda\in\Lambda$، $p_\lambda(T)=\|T_\lambda\|_\lambda$ ($\|.\|_\lambda$، C^*- نرم روی $L(H_\lambda)$ است) یک C^*- جبر موضعی است.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید A و B دو C^*- جبر موضعی باشند. یک $*$- همریختی [۲۴] از A به B یک نگاشت خطی مانند $\Phi : A\to B$ است به طوری که به ازای هر $a,b\in A$ ، $\Phi(ab)=\Phi(a)\Phi(b)$ و $\Phi(a^*)=\Phi(a)^*$.

برخلاف C^*- جبرها، یک $*$- همریختی از C^*- جبرهای موضعی، لزوماً پیوسته نیست ([؟]، مثال ۲.۱۱]). یک همریختی از C^*- جبر موضعی A به C^*- جبر موضعی B، یک $*$- همریختی پیوسته از A به B است. یک یکریختی [۲۵] از A به B یک همریختی یک به یک و پوشا مانند $\Phi : A\to B$ است به طوری که $\Phi^{-1} : B\to A$ یک همریختی از C^*- جبر های موضعی باشد. دو C^*- جبر موضعی A و B را یکریخت گوییم اگر یک یکریختی از A به B وجود داشته باشد.

[۲۱] compactly generated

[۲۲] inductive limit topology

[۲۳] locally Hilbert space

[۲۴] $*$-homomorphism

[۲۵] isomorphism

قضیه ۱۴.۱.۱. اگر A یک C^*- جبر موضعی و B یک $C^*-\sigma$- جبر باشد، آن گاه هر $*$- همریختی از A به B یک همریختی است.

برهان. [؟، قضیه ۵.۲] $\square$

فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی باشد. مجموعه ی همه C^*- شبه نرم های پیوسته روی A را با نماد $S(A)$ نشان می دهیم. برای هر p در $S(A)$، مجموعه $N_p=\{a\in A:\ p(a)=0\}$ یک $*$- ایده آل بسته در A است. فرض کنید A_p، $*$ - جبر خارج قسمتی A/N_p باشد. در این صورت A_p همرا با نرم $\|.\|_p$ که به صورت $\|a+N_p\|_p=p(a)$ تعریف می شود، یک پیش- C^*- جبر [۲۶] است. بنا بر [؟، نتیجه ۱.۱۲]، A_p کامل بوده و در نتیجه یک C^*- جبر است. نگاشت طبیعی از A به A_p را با π_p نشان می دهیم. با در نظر گرفتن ترتیب $q\leq p$ اگر $p(a)\leq q(a)$ به ازای هر a در A، می توان $S(A)$ را مجموعه ای جهتدار در نظر گرفت. فرض کنید p و q در $S(A)$ و $q\leq p$ باشد. در این صورت یک $*$- همریختی طبیعی پوشا مانند $\pi_{pq}:A_p\to A_q$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a\in A$، $\pi_{pq}(\pi_p(a))=\pi_q(a)$. دستگاه $\{A_p;\pi_{pq}\}_{p,q\in S(A),\,p\geq q}$ یک دستگاه وارون از C^*- جبرها و $*$- همریختی ها است و بنا به گزاره زیر $A\cong\varprojlim_p A_p$.

گزاره ۱۵.۱.۱. فرض کنید A یک $*$- جبر توپولوژیکی مختلط باشد. در این صورت A به عنوان $*$- جبر توپولوژیکی با حد وارون C^*- جبرها یکریخت است اگر و فقط اگر A هاسدورف و کامل باشد و توپولوژی آن توسط همه ی C^*- شبه نرم های پیوسته روی A تعیین شود.

برهان. [؟، گزاره ۱.۱.۱] $\square$

اگر A یک C^*- جبر موضعی یکدار باشد آن گاه به ازای هر $p\in S(A)$، C^*- جبر A_p یکدار است. به علاوه اگر ۱ عضو همانی A باشد آن گاه به ازای هر $p\in S(A)$، $\pi_p(1)$ عضو همانی A_p است. عضو a در A را وارون پذیر گوییم اگر عضوی در A مانند a^{-1} وجود داشته باشد به طوری که $aa^{-1}=a^{-1}a=1$. مجموعه ی همه ی عضوهای وارون پذیر A را با نماد $Inv(A)$ نشان می دهیم.

ملاحظه ۱۶.۱.۱. فرض کنیم A یک C^*- جبر موضعی یکدار باشد و $a\in A$. در این صورت a وارون پذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر $p\in S(A)$، $\pi_p(a)$ وارون پذیر باشد. به علاوه، به ازای هر $p\in S(A)$، $\pi_p(a)^{-1}=\pi_p(a^{-1})$.

فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی غیر یکدار باشد و $A^+=A\oplus\mathbb{C}$. در این صورت A^+ با در نظر گرفتن ضرب

$$(a,\lambda)(b,\mu)=(ab+\lambda b+\mu a,\lambda\mu) \qquad (۲.۱)$$

و برگشت

$$(a,\lambda)^*=(a^*,\bar{\lambda}) \qquad (۳.۱)$$

[۲۶] pre-C^*-algebra

یک جبر برگشت پذیر است. هر C^*- شبه نرم پیوسته مانند p را می توان به صورت زیر به یک C^*- شبه نرم مانند p^+ روی A^+، توسعه داد.

$$p^+((a,\lambda)) = p(a) + |\lambda|. \tag{۴.۱}$$

به این ترتیب A^+ همراه با توپولوژی تولید شده توسط خانواده C^*- شبه نرم های $\{p^+ : p \in S(A)\}$، یک C^*- جبر موضعی است. به علاوه $A^+ = \varprojlim_p A_p^+$ که در آن به ازای هر $p \in S(A)$، A_p^+ یکه دار شده ی [۲۷] A_p است.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی یکدار باشد و $a \in A$. مجموعه ی زیر را طیف [۲۸] عنصر a می نامیم.

$$sp(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin Inv(A)\}. \tag{۵.۱}$$

اگر A غیر یکدار باشد، تعریف فوق را در A^+ در نظر می گیریم.

برخلاف C^*- جبرها، طیف یک عنصر در C^*-جبر موضعی، لزوماً کراندار یا بسته نیست. در واقع اگر $S \subset \mathbb{C}$ هر زیرمجموعه ی ناتهی باشد، آن گاه $C(S)$ یک C^* -جبر موضعی است. (S متریک پذیر و در نتیجه به طور فشرده تولید شده است.) تابع همانی $z : S \to \mathbb{C}$ عضوی از $C(S)$ است و $sp(z) = S$. بنا به لم زیر می توان نتیجه گرفت که طیف یک عنصر در یک C^*-جبر موضعی، ناتهی است.

لم ۱۸.۱.۱. فرض کنید $A = \varprojlim_p A_p$ و نگاشت های $\pi_{pq} : A_p \to A_q$ یکدار باشند. در این صورت اگر $a \in A$ آن گاه

$$sp(a) = \cup_p sp(\pi_p(a)) \tag{۶.۱}$$

برهان. [؟، لم ۱.۶]. □

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی باشد و $a \in A$. در این صورت

- عنصر a را خودالحاق [۲۹] گوییم اگر $a^* = a$.
- عنصر a را مثبت [۳۰] گوییم و می نویسیم $a \geq 0$، اگر عضوی مانند b در A وجود داشته باشد به طوری که $a = b^*b$. به خصوص اگر $a, b \in A$ و $a - b \geq 0$، می نویسیم $a \geq b$. مجموعه ی همه ی عناصر مثبت A را با نماد $P(A)$ نشان می دهیم.
- عنصر a را نرمال [۳۱] گوییم اگر $a^*a = aa^*$.

ملاحظه ۲۰.۱.۱. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی باشد و $a \in A$. در این صورت بنا به لم ؟؟، گزاره های زیر معادلند:

---

[۲۷] unitization

[۲۸] spectrum

[۲۹] selfadjoint

[۳۰] positive

[۳۱] normal

- a خود الحاق است،
- $sp(a) \subseteq \mathbb{R}$،
- به ازای هر $p \in S(A)$، $\pi_p(a)$ خودالحاق است.

هم چنین این لم، معادل بودن گزاره های زیر را نیز ایجاب می کند:

- $a \geq 0$،
- به ازای یک h در A، $a = h^2$،
- $sp(a) \subseteq [0, \infty]$.

گزاره زیر نظیر حسابان تابعی در C^*- جبرها است.

گزاره ۲۱.۱.۱. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی و $a \in A$ عنصر نرمال باشد. در این صورت یک همریختی یکتا از C^*- جبر موضعی $\{f \in C(sp(a)) : f(0) = 0\}$ به A وجود دارد به طوری که نگاشت همانی را به a می نگارد. اگر A یکدار باشد، آن گاه این همریختی به طور یکتا به یک همریختی از $C(sp(a))$ به A توسیع می یابد که تابع ثابت ۱ را به عضو همانی ۱ در A می نگارد.

برهان. [؟، گزاره ۱.۸] □

در [؟] فیلیپس با استفاده از مفهوم فضای شبه توپولوژیکی، [۳۲] توانست نتایجی برای C^*- جبرهای موضعی جابجایی و یکدار بدست آورد.

تعریف ۲۲.۱.۱. یک شبه توپولوژی روی مجموعه X، تخصیص دادن به هر فضای هاسدورف و فشرده مانند K، مجموعه ی $Q(K, X)$ متشکل از توابع از K به X است به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $Q(K, X)$ همه توابع ثابت از K بهX را شامل می شود.

۲. اگر $f : K_1 \to K_2$ پیوسته باشد و$g \in Q(K_2, X)$ آن گاه $g \circ f \in Q(K_1, X)$.

۳. اگر K اجتماع مجزایی از فضاهای هاسدورف و فشرده ی K_1 و K_2 باشد، آن گاه $f \in Q(K, X)$ اگر به ازای هر $i = 1, 2$، $f_{|K_i} \in Q(K_i, X)$.

۴. اگر $f : K_1 \to K_2$ پیوسته و پوشا باشد و $g : K_2 \to X$ تابعی باشد که $g \circ f \in Q(K_1, X)$، آن گاه $g \in Q(K_2, X)$.

تعریف ۲۳.۱.۱. اگر X و Y فضاهای شبه توپولوژی باشند، آن گاه تابع $h : X \to Y$ را شبه پیوسته[۳۳] گوییم، اگر برای هر فضای هاسدورف و فشرده ی K و هر $f \in Q(K, X)$، تابع $h \circ f$ تابعی در $Q(K, Y)$ باشد.

[۳۲] quasitopological space

[۳۳] quasicontinuous

مثال ۲۴.۱.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد و $Q(K,X)$ مجموعه ی همه ی توابع پیوسته از فضای فشرده ی K به X باشد. در این صورت X یک فضای شبه توپولوژیکی است.

مثال ۲۵.۱.۱. فضاهای به طور فشرده تولید شده یک زیر رده ی کامل از رده ی فضاهای شبه توپولوژیکی و توابع شبه پیوسته می باشند ([؟، بخش ۱۱]).

تعریف ۲۶.۱.۱. فضای (شبه) توپولوژیکی X را به طور کامل هاسدورف [۳۴] گوییم اگر برای هر دو نقطه متمایز $x,y \in X$، تابع (شبه) پیوسته $f : X \to [0,1]$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x)=0$ و $f(y)=1$.

واضح است که این شرط، قوی تر از شرط هاسدورف و ضعیف تر از شرط به طور کامل منظم [۳۵] است.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید X یک فضای شبه توپولوژیکی باشد. در این صورت $C(X)$، $*$- جبر همه ی توابع شبه پیوسته $f : X \to \mathbb{C}$ است که توپولوژی آن توسط شبه نرم های $\|f\|_{K,g} = \|f \circ g\|_\infty$ به ازای هر فضای هاسدورف و فشرده ی K و هر $g \in Q(K,X)$ تعریف می شود.

لم ۲۸.۱.۱. اگر X یک فضای شبه توپولوژیکی باشد آن گاه $C(X)$ یک C^*- جبر موضعی است.

برهان. [؟، لم ۲.۴] □

قضیه ۲۹.۱.۱. تابعگون [۳۶] $X \longmapsto C(X)$ یک هم ارزی رده ای پادوردا [۳۷] از رده ی فضاهای شبه توپولوژیکی به طور کامل هاسدورف به رده ی C^*- جبرهای موضعی جابجایی یکدار و همریختی های یکانی است.

برهان. [؟، قضیه ۲.۷] □

فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی باشد . مجموعه ی همه ی عناصر کراندار A را با نماد $b(A)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$b(A) = \{a \in A : \|a\|_\infty = \sup\{p(a) : p \in S(A)\} < \infty\}. \qquad (۷.۱)$$

گزاره ۳۰.۱.۱. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی باشد. در این صورت

- $b(A)$ با $\|\cdot\|_\infty$ یک C^*- جبر است.
- اگر $a \in A$ نرمال باشد و $f \in C(sp(a))$ کراندار باشد آن گاه $f(a) \in b(A)$.
- اگر $a \in A$ نرمال باشد آن گاه $a \in b(A)$ اگر و فقط اگر $sp(a)$ کراندار باشد.

[۳۴] completely Hausdorff
[۳۵] complete regular
[۳۶] functor
[۳۷] contravariant category equivalence

- $b(A)$ در A چگال است.
- اگر $a \in b(A)$ آن گاه $sp_{b(A)}(a) = \overline{sp_A(a)}$.
- اگر $q \in S(A)$ آن گاه نگاشت از $b(A)$ به A_q پوشا است.

برهان. [؟، گزاره ۱.۱۱]. □

نتیجه ۳۱.۱.۱. فرض کنید $\varphi : A \to B$ یک $*$- همریختی (نه لزوماً پیوسته) بین C^*- جبرهای موضعی A و B باشد. در این صورت φ یک همریختی از $b(A)$ به $b(B)$ تعریف می کند.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی باشد. یک واحد تقریبی [۳۸] برای A، یک تور صعودی مانند $(e_i)_{i\in I}$ از عناصر مثبت A است به طوری که به ازای هر $p \in S(A)$ و هر $i \in I$، $p(e_i) \leq ۱$ و برای هر $a \in A$ و هر $p \in S(A)$، $p(a - ae_i) \to ۰$.

ملاحظه ۳۳.۱.۱. هر C^*- جبر موضعی دارای واحد تقریبی است.

برهان. [؟، نتیجه ۳.۱۲]. □

۲.۱ مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی

C^*- مدولهای هیلبرت تعمیمی از فضاهای هیلبرت هستند که مقادیر ضرب داخلی آن ها به جای اعداد مختلط، در یک C^*- جبر قرار می گیرد. مفهوم مدول هیلبرت روی C^*- جبر جابجایی، اولین بار توسط کاپلانسکی[۳۹] [؟] معرفی شد. او به کمک C^*- مدولهای هیلبرت ثابت کرد که مشتق روی AW^*- جبرهای نوع I، درونی است. نظریه C^*- مدولهای هیلبرت توسط پشکی[۴۰] [؟] و ریفل [۴۱] [؟] مورد مطالعه قرار گرفت. کتاب [؟] مرجع مناسبی برای مطالعه ی C^*- مدولهای هیلبرت است. مدولهای به طور متناهی تولید شده که ضرب داخلی آن ها در یک $*$- جبر توپولوژیکی قرار می گیرد و مدول هیلبرت استاندارد H_A روی یک C^*- جبر موضعی، اولین بار توسط مالیوس[۴۲] [؟] مورد بررسی قرار گرفت. او به کمک این مدولها، نظریه ی اندیس [۴۳] را برای عملگرهای بیضوی [۴۴] روی C^*- جبرهای موضعی بررسی کرد. بسیاری از مفاهیم مانند C^*- مدولهای هیلبرت[۴۵]، عملگرهای الحاقی[۴۶]، عملگرهای فشرده[۴۷]،

[۳۸] approximate unit
[۳۹] Kaplansky
[۴۰] Paschke
[۴۱] Rieffel
[۴۲] Mallios
[۴۳] index theory
[۴۴] ellitic operators
[۴۵] Hilbert C^*-modules
[۴۶] adjointable operators
[۴۷] compact operators

نمایش القایی [۴۸]، هم ارزی موریتا[۴۹] را می توان برای C^* - جبرهای موضعی نیز تعریف کرد. بسیاری از خواص C^*- مدولهای هیلبرت برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی برقرار است اما اثبات ها معمولاً مستقیم و ساده نیستند. کتاب [؟] مرجع مناسبی برای مطالعه مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی است.

تعریف ۱.۲.۱. یک پیش- A- مدول هیلبرت [۵۰] (راست) روی C^*- جبر موضعی A، یک A- مدول راست مانند E، سازگار با ساختار جبری مختلط (یعنی به ازای هر $a \in A$، $x \in E$ و $\lambda \in \mathbb{C}$، $(\lambda(xa) = (\lambda x)a = x(\lambda a)$)، به همراه یک ضرب داخلی A- مقدار مانند $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to A$ است که روی مولفه ی دوم خطی بوده و در روابط زیر صدق کند:

- به ازای هر x و y در E، $\langle x, y\rangle^* = \langle y, x\rangle$،
- به ازای هر x در E، $\langle x, x\rangle \geq ۰$،
- به ازای هر x در E، $\langle x, x\rangle = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

به ازای هر $p \in S(A)$، نگاشت $\overline{p}_E : E \to [۰, \infty)$، $\overline{p}_E(\xi) = \sqrt{p(\langle \xi, \xi\rangle)}$ یک شبه نرم روی E است و در روابط زیر صدق می کند:

- به ازای هر $\xi \in E$ و $a \in A$، $\overline{p}_E(\xi a) \leq \overline{p}_E(\xi)p(a)$،
- $\overline{p}_E(\xi) = \sup\{p(\langle \xi, \eta\rangle) : \ \bar{p}(\eta) \leq ۱\}$،
- اگر به ازای هر $p \in S(A)$، $\overline{p}_E(\xi) = ۰$ آن گاه $\xi = ۰$.

[؟، نتیجه ۱.۲.۳].

تعریف ۲.۲.۱. یک A- مدول هیلبرت، یک پیش- A- مدول هیلبرت مانند E است که نسبت به توپولوژی تولید شده توسط خانواده شبه نرم های $\{\overline{p}_E\}_{p\in S(A)}$ کامل باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید E و F دو مدول هیلبرت روی C^*- جبر موضعی A باشند. در این صورت E و F را یکریخت گوییم، اگر یک همریختی مدولی مانند $\Phi : E \to F$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in E$ داشته باشیم

$$\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

تعریف ۴.۲.۱. عنصر ξ در E را کراندار [۵۱] گوییم اگر

$$\|\xi\|_\infty = \sup\{\overline{p}_E(\xi) : \ p \in S(A)\} < \infty.$$

مجموعه ی همه ی عناصر کراندار E را با $b(E)$ نشان می دهیم.

[۴۸] induced representation

[۴۹] Morira equivalence

[۵۰] pre-Hilbert-module

[۵۱] bounded

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید E یک A- مدول هیلبرت باشد. در این صورت

- $b(E)$ یک $b(A)$- مدول هیلبرت است.
- $b(E)$ در E چگال است.

برهان. [؟، قضیه ۱.۳.۲] □

تعریف ۶.۲.۱. یک A- مدول هیلبرت مانند E را کامل [۵۲] گوییم، اگر ایده آل دو طرفه
$$\langle E, E\rangle = \text{span}\{\langle x, y\rangle \;\; x, y \in E\}$$
در A چگال باشد.

فرض کنید E یک A- مدول هیلبرت باشد. به ازای هر $p \in S(A)$، مجموعه
$$N_p^E = \{\xi \in E : \; \bar{p}_E(\xi) = \circ\}$$
یک زیر مدول بسته از E است و $E_p = E/N_p^E$، با در نظر گرفتن ضرب مدولی
$$(\xi + N_p^E)\pi_p(a) = \xi a + N_p^E$$
و ضرب داخلی $\langle \xi + N_p^E, \eta + N_p^E\rangle = \pi_p(\langle \xi, \eta\rangle)$، یک A_p- مدول هیلبرت است. نگاشت طبیعی از E به روی E_p را با نماد σ_p^E نشان داده و مقدار $\sigma_p^E(\xi)$ را با نماد ξ_p نشان می دهیم. فرض کنید $p, q \in S(A)$ و $q \le p$. در این صورت نگاشت $\sigma_{pq}^E : E_p \to E_q$ که به صورت $\sigma_{pq}^E(\sigma_p^E(\xi)) = \sigma_q^E(\xi)$ تعریف می شود یک همریختی پوشاست و دستگاه $\{E_p;\; A_p;\; \sigma_{pq}^E,\; \pi_{pq}\}_{p,q \in S(A),\, q \le p}$ یک دستگاه وارون از C^*- مدولهای هیلبرت است که در روابط زیر صدق می کند:

- به ازای هر $p, q \in S(A)$ که $q \le p$، $a_p \in A_p$ و $\xi_p \in E_p$، $\sigma_{pq}^E(\xi_p a_p) = \sigma_{pq}^E(\xi_p)\pi_{pq}(a_p)$؛
- به ازای هر $p, q \in S(A)$ که $q \le p$ و $\xi_p, \eta_p \in E_p$، $\langle \sigma_{pq}^E(\xi_p), \sigma_{pq}^E(\eta_p)\rangle = \pi_{pq}(\langle \xi_p, \eta_p\rangle)$؛
- به ازای هر $p, q, r \in S(A)$ که $r \le q \le p$، $\sigma_{qr}^E \circ \sigma_{pq}^E = \sigma_{pr}^E$؛
- به ازای هر $p \in S(A)$ و $\xi \in E$، $\sigma_{pp}^E(\xi_p) = \xi_p.$

به علاوه $\varprojlim_p E_p$، یک A- مدول هیلبرت است که با E یکریخت است.

مثال ۷.۲.۱. هر C^*- جبر موضعی A همراه با ضرب داخلی $\langle a, b\rangle = a^* b$، یک A- مدول هیلبرت است.

مثال ۸.۲.۱. فرض کنید $\{E_n\}_n$ یک مجموعه شمارا از A- مدولهای هیلبرت باشد و $\oplus_n E_n$ مجموعه ی همه ی دنباله هایی به صورت $(\xi_n)_n$ باشد که در آن به ازای هر n، $\xi_n \in E_n$ و $\sum_n \langle \xi_n, \xi_n\rangle$ یک سری همگرا در A باشد. در این صورت $\oplus_n E_n$ با در نظر گرفتن ضرب مدولی $(\xi_n)_n a = (\xi_n a)_n$ و ضرب داخلی $\langle (\xi_n)_n, (\eta_n)_n\rangle = \sum_n \langle \xi_n, \eta_n\rangle$ یک A- مدول هیلبرت است.

---
[۵۲] full

لم ۹.۲.۱. فرض کنید $\{E_\alpha, A_\alpha, f_{\alpha\beta} : E_\beta \to E_\alpha\}_{\alpha,\beta\in I, \alpha\leq\beta}$ یک دستگاه وارون از مدولهای هیلبرت، $(E = \varprojlim_\alpha E_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in I}$ حد وارون این دستگاه و F یک زیرفضای برداری از E باشد. در این صورت

$$\overline{F} = \cap_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(F)}) = \varprojlim_\alpha \overline{f_\alpha(F)}.$$

اگر F بسته باشد آن گاه

$$F = \varprojlim_\alpha f_\alpha(F) = \varprojlim_\alpha \overline{f_\alpha(F)}. \qquad (۸.۱)$$

برهان. [؟، فصل III لم ۳.۲] □

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید E و F، A- مدول هیلبرت باشند. نگاشت A- مدولی $T : E \to F$ را کراندار گوییم اگر به ازای هر $p \in S(A)$، عدد $k_p > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in E$، داشته باشیم $\bar{p}_F(Tx) \leq k_p\, \bar{p}_E(x)$.

نگاشت A- مدولی T را الحاق پذیر گوییم، هرگاه نگاشت A- مدولی مانند $T^* : F \to E$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in E$ و $y \in F$، داشته باشیم $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$. هر نگاشت الحاق پذیر، کراندار است. مجموعه ی همه ی نگاشت های A- مدولی الحاق پذیر از E به F را با نماد $L_A(E,F)$ نشان می دهیم. به ازای هر $p \in S(A)$، نگاشت $(\pi_p)_* : L_A(E,F) \to L_{A_p}(E_p, F_p)$ را به صورت $(\pi_p)_*(T)(\xi + N_p^E) = T\xi + N_p^F$ تعریف می کنیم. لذا $\tilde{p}(T) = \|(\pi_p)_*(T)\|_{L_{A_p(E_p,F_p)}}$ یک شبه نرم روی $L_A(E,F)$ است و $L_A(E,F)$ همراه با توپولوژی تولید شده توسط $\{\tilde{p}\}_{p\in S(A)}$، یک فضای به طور موضعی محدب [۵۳] است. فرض کنید $p, q \in S(A)$ و $q \leq p$ باشد. همریختی $(\pi_{pq})_* : L_{A_p}(E_p, F_p) \to L_{A_q}(E_q, F_q)$ را به صورت $(\pi_{pq})_*(T_p)(\sigma_q^E(\xi)) = \sigma_{pq}^F(T_p(\sigma_p^E(\xi)))$ در نظر می گیریم. در این صورت دستگاه $\{L_{A_p}(E_p, F_p);\ (\pi_{pq})_*\}_{p,q\in S(A), q\leq p}$، یک دستگاه وارون از فضاهای باناخ است و $\varprojlim_p L_{A_p}(E_p, F_p)$ با $L_A(E,F)$ یکریخت است. اگر $E = F$ باشد، $L_A(E,E)$ که آن را با نماد $L_A(E)$ نشان می دهیم، یک C^*- جبر موضعی است. به ازای هر $x, y, \xi \in E$، عملگر $\theta_{x,y}$ را به صورت $\theta_{x,y}(\xi) = x\langle y, \xi\rangle$ تعریف می کنیم. مجموعه ی همه ی عملگرهای تولید شده توسط $\{\theta_{x,y} :\ x, y, \xi \in E\}$ را عملگرهای فشرده نامیده و با نماد $K_A(E)$ نشان می دهیم. $K_A(E)$ یک C^*- زیر جبر موضعی و یک ایده آل دوطرفه از $L_A(E)$ است و داریم $K_A(E) = \varprojlim_p K_{A_p}(E_p)$.

نتیجه ۱۱.۲.۱. اگر E یک A- مدول هیلبرت کامل باشد، آن گاه $K_A(E,A)$ یک $K_A(E)$- مدول هیلبرت کامل است.

برهان. [؟، نتیجه ۳.۳] □

لم ۱۲.۲.۱. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی و E و F، A- مدول هیلبرت باشند. اگر E کامل باشد، آن گاه C^* - جبرهای موضعی $L_A(F)$ و $L_B(E)$ (هم چنین $K_A(F)$ و $K_B(G)$) یکریخت هستند که در آن $G = K_A(E,F)$ و $B = K_A(E)$.

برهان. [؟، لم ۴.۲] □

---

[۵۳] locally convex

ملاحظه ۱۳.۲.۱. فرض کنید A و B، C^*- جبرهای موضعی، $\varphi : B \to A$ یک یکریختی از C^*-جبرهای موضعی و E یک A- مدول هیلبرت باشد. در این صورت E همراه با ضرب مدولی $(x,b) \longmapsto x\varphi(b)$ و ضرب داخلی $\langle x,y\rangle_B = \varphi^{-1}(\langle x,y\rangle_A)$ یک B- مدول هیلبرت است. به علاوه، C^*- جبرهای موضعی $L_A(E)$ و $L_B(E)$ و نیز $K_A(E)$ و $K_B(E)$ یکریخت هستند.

برهان. [؟، ملاحظه ۴.۳] □

فرض کنید E و F، مدولهای هیلبرت به ترتیب روی C^*- جبرهای موضعی A و B باشند و $\Psi : A \to L(F)$ یک $*$- همریختی پیوسته باشد. با در نظرگرفتن ضرب مدولی $(a,y) \to \Psi(a)y$ که در آن $a \in A$ و $y \in F$، می توان F را به عنوان یک A- مدول چپ در نظر گرفت. فرض کنید N_Ψ، زیر فضای $E \otimes_{alg} F$، تولید شده توسط $\{xa\otimes y - x\otimes\Psi(a)y, \;\; a\in A,\; x\in E, y\in F\}$ باشد. در این صورت فضای خارج قسمتی $E\otimes_A F = (E\otimes F_{alg})/N_\Psi$ با در نظر گرفتن ضرب داخلی $\langle x\otimes y, z\otimes t\rangle = \langle y, \Psi(\langle x,z\rangle)t\rangle$، یک پیش- B- مدول هیلبرت است. تکمیل شده ی $E\otimes_A F$ را با نماد $E\otimes_\Psi F$ نشان می دهیم. برای مطالعه ی جزئیات بیشتر در ضرب تانسوری مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی، می توان به مرجع [؟] مراجعه کرد.

۳.۱ نمایش القابی C^*- جبرهای موضعی

تعریف ۱.۳.۱. یک نمایش[۵۴] از C^*- جبر موضعی A، یک $*$- همریختی پیوسته مانند $\varphi : A \to B(H)$ است که در آن $B(H)$، C^*- جبر همه ی نگاشت های خطی و کراندار روی فضای هیلبرت H است.

اگر (φ, H) یک نمایش از A باشد، بنا به پیوستگی φ، $p \in S(A)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $\|\varphi(a)\| \le p(a)$. نمایش (φ_p, H) از A_p که در آن $\varphi_p \circ \pi_p = \varphi$، نمایش A_p نظیر (φ, H) نامیده می شود. نمایش (φ, H) را ناتباهیده[۵۵] گوییم اگر $\varphi(A)H$ در H چگال باشد. واضح است که (φ, H) ناتباهیده است اگر و فقط اگر (φ_p, H) ناتباهیده باشد. دو نمایش (φ_1, H_1) و (φ_2, H_2) از A را به طور یکانی معادل [۵۶] گوییم اگر عملگر یکانی U از H_1 به روی H_2 وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$، داشته باشیم $U\circ\varphi_1(a) = \varphi_2(a)\circ U$.

فرض کنید A و B، C^*- جبرهای موضعی، E یک B- مدول هیلبرت و نگاشت $\Phi : A \to L_B(E)$ یک $*$- همریختی پیوسته و ناتباهیده باشد. فرض کنید (φ, H) یک نمایش ناتباهیده از B باشد. این نمایش، نمایش ناتباهیده ای مانند $(\varphi^A_{E}, {}_E H)$ برای A القاء می کند که نمایش القابی ریفل [۵۷] از B به A توسط E نامیده می شود. در ادامه به اختصار، روش ساختن این نمایش را از مقاله [؟] بیان می کنیم. مقاله [؟] مرجع مناسبی برای این نمایش در حالت C^*-جبرها است.

[۵۴] representation

[۵۵] non-degenerate

[۵۶] unitarily equivalent

[۵۷] Rieffel-induced representation

با مفروضات بالا، فرض کنید $\langle .,. \rangle$ ضرب داخلی در H باشد. فرم یک و نیم خطی [۵۸] $\langle .,. \rangle^{\varphi}_{\circ}$ را روی فضای برداری $E \otimes_{alg} H$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\langle \xi \otimes h_1, \eta \otimes h_2 \rangle^{\varphi}_{\circ} = \langle h_1, \varphi(\langle \xi, \eta \rangle) h_2 \rangle.$$

اگر N_{φ} زیر فضای برداری $E \otimes_{alg} H$، تولید شده توسط $\{\xi \otimes h \in E \otimes H : \ \langle \xi \otimes h, \xi \otimes h \rangle^{\varphi}_{\circ} = 0\}$ باشد، آن گاه $(E \otimes_{alg} H)/N_{\varphi}$ با ضرب داخلی

$$\langle \xi \otimes h_1 + N_{\varphi}, \eta \otimes h_2 + N_{\varphi} \rangle^{\varphi} = \langle \eta \otimes h_1, \eta \otimes h_2 \rangle^{\varphi}_{\circ}$$

یک فضای پیش هیلبرت است. تکمیل شده ی $(E \otimes_{alg} H)/N_{\varphi}$ با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle^{\varphi}$ را با نماد $_E H$ نشان می دهیم. فرض کنید $T \in L_B(E)$. نگاشت خطی $_E\varphi(T)$ را از $E \otimes_{alg} H$ به $E \otimes_{alg} H$ به صورت

$$_E\varphi(T)(\xi \otimes h) = T\xi \otimes h$$

در نظر بگیرید. اگر $(_E\varphi, H)$، نمایش B_q نظیر (φ, H) باشد آن گاه می توان نشان داد که به ازای هر $\xi \in E$ و $h \in H$،

$$\langle _E\varphi(T)(\xi \otimes h), \ _E\varphi(T)(\xi \otimes h) \rangle^{\varphi}_{\circ} \leq \tilde{q}(T) \langle \xi \otimes h, \xi \otimes h \rangle^{\varphi}_{\circ}.$$

لذا می توان نتیجه گرفت که $_E\varphi(T)$ قابل توسیع به یک عملگر خطی و کراندار مانند $_E\varphi$ روی $_E H$ است که ما آن را مجدداً با نماد $_E\varphi$ نشان می دهیم. اکنون اگر $_E\varphi$ را به عنوان نگاشتی از $L_B(E)$ به $B(_E H)$ در نظر بگیریم آن گاه $(_E\varphi, _E H)$ نمایش ناتباهیده ای از $L_B(E)$ بوده و در نتیجه $_E\varphi \circ \Phi$ یک نمایش ناتباهیده از A روی $_E H$ است که آن را با نماد $^A_E\varphi$ نشان می دهیم.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید A و B، C^*- جبرهای موضعی باشند. A و B را هم ارز موریتای قوی[۵۹] (هم ارز موریتا) گوییم و می نویسیم $A \sim_M B$ اگر یک A- مدول هیلبرت مانند E وجود داشته باشد به طوری که C^*- جبرهای موضعی B و $K_A(E)$ یکریخت باشند.

ملاحظه ۳.۳.۱. هم ارزی موریتای قوی، یک رابطه ی هم ارزی در مجموعه ی همه ی C^*- جبرهای موضعی است [؟، گزاره ۴.۴] .

گزاره ۴.۳.۱. فرض کنید (φ, H) یک نمایش ناتباهیده از B باشد. اگر (φ_q, H) نمایش ناتباهیده ای از B_q نظیر (φ, H) باشد آن گاه $p \in S(A)$ وجود دارد به طوری که A_p به طور ناتباهیده روی E_q عمل می کند و نمایش های $(^A_E\varphi, _E H)$ و $(^{A_p}_{E_q}\varphi_q \circ \pi_{p}, _{E_q} H)$ از A به طور یکانی معادلند.

برهان. [؟، گزاره ۳.۴] $\square$

لم ۵.۳.۱. اگر $A \sim_M B$، آن گاه برای هر $p \in S(A)$، $q_p \in S(B)$ وجود دارد به طوری که $A_p \sim_M B_{q_p}$.

برهان. [؟، لم ۴.۱] $\square$

[۵۸] sesquillinear form

[۵۹] strongly Morita equivalent

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنید A و B، C^*- جبرهای موضعی باشند. اگر $A \sim_M B$، آن گاه یک تناظر یک به یک بین کلاس های هم ارزی نمایش های ناتباهیده ی A و B وجود دارد.

برهان. [؟، قضیه ۴.۴]. □

فصل ۲

نمایش القابی مدولهای هیلبرت بر روی C^*- جبرهای موضعی و هم ارزی موریتا

۱.۲ مقدمه

در بخش دوم این فصل، به معرفی نمایش C^*- مدولهای هیلبرت و تعاریفی مانند نمایش های ناتباهیده و نمایش های به طور یکانی معادل می پردازیم. سپس به کمک نمایش القابی اسکاید، تعمیمی از نمایش القابی ریفل، از حالت C^*- جبرها به حالت C^*- مدولهای هیلبرت بدست می آوریم. در انتهای این بخش، نمایش القابی ریفل را برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی بررسی می کنیم. در بخش سوم این فصل، مفهوم هم ارزی موریتا را برای مدولهای هیلبرت که روی C^*- جبرهای موضعی قرار دارند، معرفی کرده و حالت مدولی قضیه غیر اولیه را ارائه می دهیم.

۲.۲ نمایش القابی مدولهای هیلبرت

فرض کنیم H و K فضاهای هیلبرت باشند و $B(H,K)$ فضای همه عملگرهای کراندار از H به K باشد. با در نظرگرفتن ضرب مدولی به صورت $(T,S) \to TS$ که در آن $T \in B(H,K)$ و $S \in B(H)$ و ضرب داخلی به صورت $\langle T,S\rangle = T^*S$ که در آن $T,S \in B(H,K)$ می توان $B(H,K)$ را به عنوان یک $B(H)$- مدول در نظر گرفت. مورفی [1] [؟] نشان داد که برای هر C^*- مدول هیلبرت، فضاهای

[1] Murphy

هیلبرت H و K وجود دارند به طوری که می توان آن را به صورت یک زیرمدول از مدول هیلبرت $B(H,K)$ در نظر گرفت. از این رو می توان مفهوم نمایش را از C^* جبرها به هیلبرت C^*- مدولها گسترش داد.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید V و W به ترتیب مدولهای هیلبرت بر روی C^*- جبرهای A و B باشند و $\varphi : A \to B$ مورفیسمی از C^*- جبرهای موضعی باشد. نگاشت $\Phi : V \to W$ را یک φ- مورفیسم [۲] گوییم، اگر به ازای هر $x,y \in V$ داشته باشیم $\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle = \varphi(\langle x,y\rangle)$. اگر $\varphi : A \to B(H)$ یک نمایش از C^*- جبر A باشد، آن گاه φ- مورفیسم $\Phi : V \to B(H,K)$ را یک نمایش از V می نامیم.

اگر Φ نمایشی از V باشد، نمایش وابسته به آن برای A را با حرف کوچک φ در نظر می گیریم.

تعریف ۲.۲.۲. نمایش $\Phi : V \to B(H,K)$ را یک نمایش ناتباهیده گوییم اگر $\overline{\Phi(V)(H)} = K$ و $\overline{\Phi(V)^*(K)} = H$.

تعریف ۳.۲.۲. نمایش های $\Phi_i : V \to B(H_i, K_i)$، $i = ۱,۲$ را به طور یکانی معادل گوییم اگر عملگرهای یکانی [۳] مانند $U_۱ : H_۱ \to H_۲$ و $U_۲ : K_۱ \to K_۲$ وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر $v \in V$، داشته باشیم $U_۲\Phi_۱(v) = \Phi_۲(v)U_۱$.

لم ۴.۲.۲. فرض کنید V یک A- مدول هیلبرت کامل، $\Phi_۱ : V \to B(H_۱, K_۱)$ و $\Phi_۲ : V \to B(H_۲, K_۲)$ دو نمایش ناتباهیده از V باشند. اگر $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ به طور یکانی معادل باشند آن گاه $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ نیز به طور یکانی معادل هستند.

برهان. عملگرهای یکانی $U_۱ : H_۱ \to H_۲$ و $U_۲ : K_۱ \to K_۲$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $x \in V$، $U_۲\Phi_۱(x) = \Phi_۲(x)U_۱$. برای هر $x,y \in V$ و $h \in H_۱$ داریم

$$U_۱\varphi(\langle x,y\rangle)h = U_۱\Phi_۱(x)^*\Phi_۱(y)h = \Phi_۲(x)^*\Phi_۲(y)U_۱h = \varphi_۲(\langle x,y\rangle)U_۱h. \quad (۱.۲)$$

حال از کامل بودن V می توان نتیجه گرفت که $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ نیز به طور یکانی معادل هستند. □

در [؟] اسکاید نشان داد که هر A- مدول هیلبرت E را می توان به صورت یک زیرمدول پایینی [۴] در یک C^*-جبر ماتریسی [۵] نشاند. او ثابت کرد هر نمایش از B، یک نمایش برای E القا می کند. در ادامه به توضیح ساختار این نمایش القایی می پردازیم.

ساختار ۵.۲.۲. فرض کنید B یک C^*- جبر، E یک B- مدول هیلبرت و $\varphi : B \to B(H)$ یک نمایش از B باشد. فرم یک و نیم خطی $\langle .,. \rangle$ را روی فضای برداری $E \otimes_{alg} H$ به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\langle x \otimes h, y \otimes k\rangle = \langle h, \varphi(\langle x,y\rangle)k\rangle_H. \quad (۲.۲)$$

[۲] φ- morphism

[۳] unitary operators

[۴] lower submodule

[۵] matrix C^*-algebra

منظور از $\langle .,. \rangle_H$ ضرب داخلی در فضای هیلبرت H است. بنا به [؟، گزاره ۳.۸] این فرم، یک فرم مثبت است و لذا $E \otimes_{alg} H$ یک فضای شبه هیلبرت [۶] است. فرض کنید N_φ زیرفضای برداری $E \otimes_{alg} H$ تولید شده توسط $\{x \otimes h \in E \otimes_{alg} H : \langle x \otimes h, x \otimes h \rangle = 0\}$ باشد. در این صورت $(E \otimes_{alg} H)/N_\varphi$ همراه با ضرب داخلی

$$\langle x \otimes h + N_\varphi \ , \ y \otimes k + N_\varphi \rangle = \langle x \otimes h, y \otimes k \rangle,$$

یک فضای پیش هیلبرت [۷] است. تکمیل شده فضای $(E \otimes_{alg} H)/N_\varphi$ همراه با ضرب داخلی فوق را با نماد $_E H$ نشان می دهیم. منظور ما از $x \otimes h$، همان کلاس هم ارزی $x \otimes h + N_\varphi \in \ _E H$ است. فرض کنید $x \in E$ و $L_x h = x \otimes h$. در این صورت $\|L_x h\|^2 = \langle h, \varphi(\langle x, x \rangle) h \rangle \leq \|h\|^2 \|x\|^2$ و درنتیجه $L_x \in B(H, \ _E H)$. نگاشت $\eta_\varphi : E \to B(H, _E H)$ را به صورت $\eta_\varphi(x) = L_x$ تعریف می کنیم. در این صورت برای هر $x, x' \in E$، $h, h' \in H$ و $b \in B$ داریم $\langle \eta_\varphi(x), \eta_\varphi(x') \rangle = \varphi(\langle x, x' \rangle)$ و $\eta_\varphi(xb) = \eta_\varphi(x)\varphi(b)$. بنابراین η_φ یک نمایش از E است.

لم ۶.۲.۲. فرض کنید $\varphi_1 : B \to B(H_1)$ و $\varphi_2 : B \to B(H_2)$ دو نمایش ناتباهیده از B باشند. اگر φ_1 و φ_2 به طور یکانی معادل باشند آن گاه η_{φ_1} و η_{φ_2} نیز به طور یکانی معادل هستند.

برهان. فرض کنید $U : H_1 \to H_2$ عملگر یکانی باشد به طوری که به ازای هر $b \in B$، داشته باشیم $U\varphi_1(b) = \varphi_2(b)U$. در این صورت نگاشت $id_E \otimes U : E \otimes_{alg} H_1 \to E \otimes_{alg} H_2$، $x \otimes h_1 \mapsto x \otimes Uh_1$ را می توان به عملگر یکانی مانند V از $_E H_1$ به $_E H_2$ توسیع داد به طوری که به ازای هر $x \in E$، $V\eta_{\varphi_1}(x) = \eta_{\varphi_2}(x)U$. در نتیجه η_{φ_1} و η_{φ_1} به طور یکانی معادل هستند. □

بحث فوق ما را قادر می سازد که نمایش القایی ریفل را از حالت C^*- جبرها به حالت هیلبرت C^*- مدولها تعمیم دهیم. برای این منظور، فرض کنید V و W به ترتیب دو مدول هیلبرت روی C^*- جبرهای A و B باشند، E یک B- مدول هیلبرت باشد و A به صورت عملگرهای الحاق پذیر روی C^*- مدول هیلبرت E عمل کند. فرض کنید $\Phi : W \to B(H, K)$ یک نمایش ناتباهیده از W باشد. بنا به [؟، گزاره ۲.۶۶]، تساوی $^A_E\varphi(a)(x \otimes h) = (a.x) \otimes h$ را می توان به یک نمایش (القایی ریفل) از A به صورت عملگرهای کراندار روی فضای هیلبرت $_E H$ توسیع داد. با در نظر گرفتن ساختار ؟؟ نمایش $^A_E\varphi : A \to B(_E H)$ از C^* - جبر A، نمایش $\eta_{^A_E\varphi} : V \to B(_E H, \ _V(_E H))$ از V را القا می کند. این نمایش القا شده را نمایش القایی ریفل از W به V توسط E نامیده و آن را با نماد $^V_E\Phi$ نشان می دهیم. در [؟، گزاره ۳.۳]، نمایش القایی ریفل برای C^*- مدول های هیلبرت بررسی شده است اما به نظر می رسد استدلال ما کوتاه تر باشد. نتایج زیر به ترتیب نظیر [؟، گزاره ۳.۳ و نتیجه ۳.۴] می باشند که ما آن ها را به کمک لم های ؟؟ و ؟؟ به دست می آوریم.

لم ۷.۲.۲. فرض کنید W یک B- مدول هیلبرت کامل باشد و $\Phi_i : W \to B(H_i, K_i)$، $i = 1, 2$ دو نمایش ناتباهیده از W باشند. اگر Φ_1 و Φ_2 دو نمایش به طور یکانی معادل باشند آن گاه $^V_E\Phi_1$ و $^V_E\Phi_2$ نیز به طور یکانی معادل هستند.

---
[۶] semi-Hilbert space

[۷] pre-Hilbert space

نتیجه ۸.۲.۲. اگر $\Phi : W \to B(H,K)$ و $\oplus_{i\in I}\Phi_i : W \to B(\oplus_{i\in I}H_i, \oplus_{i\in I}K_i)$ به طور یکانی معادل باشند آن گاه ${}_E^V\Phi$ و $\oplus_{i\in I}\, {}_E^V\Phi_i$ به طور یکانی معادل هستند.

حال مفهوم نمایش مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرها را به نمایش مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی تعمیم می دهیم. فرض کنید V و W دو مدول هیلبرت، به ترتیب بر روی C^*- جبرهای موضعی A و B باشند و $\varphi : A \to B$ یک همورفیسم از C^*- جبرهای موضعی باشد. در این صورت نگاشت $\Phi : V \to W$ را یک φ- مورفیسم گوییم اگر به ازای هر $x,y \in V$ داشته باشیم $\langle\Phi(x),\Phi(y)\rangle = \varphi(\langle x,y\rangle)$. یک φ- مورفیسم مانند $\Phi : V \to B(H,K)$ که $\varphi : A \to B(H)$ یک نمایش از A باشد را یک نمایش از V می گوییم. مفاهیمی نظیر نمایش های ناتباهیده و نمایش های به طور یکانی معادل را می توان مشابه حالت C^*- مدولهای هیلبرت برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی تعریف کرد.

ملاحظه ۹.۲.۲. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی، V یک A- مدول هیلبرت و $\varphi : A \to B(H)$ یک نمایش از A روی فضای هیلبرت H باشد. فرض کنید $p \in S(A)$ و φ_p نمایش A_p نظیر φ باشد. در این صورت فضای هیلبرت K و نمایش $\Phi_p : V_p \to B(H,K)$ از V_p وجود دارد به طوری که یک φ_p- مورفیسم است. برای جزییات بیشتر به اثبات قضیه [؟، قضیه ۳.۱] رجوع شود. واضح است که نگاشت $\Phi : V \to B(H,K)$ با ضابطه ی $\Phi(v) = \Phi_p(\sigma_p^V(v))$ یک φ- مورفیسم بوده و در نتیجه یک نمایش از V است.

لم ۱۰.۲.۲. فرض کنید V یک مدول هیلبرت روی C^*- جبر موضعی A و $\Phi : V \to B(H,K)$ یک نمایش از V باشد. اگر $p \in S(A)$ و φ_p نمایش A_p نظیر φ باشد، آن گاه نگاشت $\Phi_p : V_p \to B(H,K)$ با ضابطه $\Phi_p(\sigma_p^V(v)) = \Phi(v)$، یک φ_p- مورفیسم است. به خصوص، Φ_p یک نمایش از V_p بوده و Φ ناتباهیده است اگر و فقط اگر Φ_p ناتباهیده باشد. نمایش Φ_p را نمایش V_p نظیر Φ می گوییم.

برهان. فرض کنید $v, v' \in V$ و $\bar{p}_V(v-v') = 0$. به ازای هر $a \in A$ داریم $\|\varphi(a)\| \leq p(a)$ لذا $\langle\Phi(v-v'),\Phi(v-v')\rangle = \varphi(\langle v-v', v-v'\rangle) = 0$. بنابراین Φ_p خوش تعریف است. هم چنین

$$\begin{aligned}\langle\Phi_p(\sigma_p^V(v)),\Phi_p(\sigma_p^V(v'))\rangle = \langle\Phi(v),\Phi(v')\rangle = \varphi(\langle v,v'\rangle) &= \varphi_p\circ\pi_p(\langle v,v'\rangle)\\ &= \varphi_p(\langle\sigma_p^V(v),\sigma_p^V(v')\rangle).\end{aligned}$$

با توجه به تعریف Φ_p، نمایش Φ ناتباهیده است اگر و فقط اگر Φ_p ناتباهیده باشد. $\square$

فرض کنید V و W دو مدول هیلبرت کامل، به ترتیب روی C^*- جبرهای موضعی A و B باشند. فرض کنید E یک B- مدول هیلبرت، $\Psi : A \to L_B(E)$ یک $*$- همورفیسم پیوسته و ناتباهیده و $\Phi : W \to B(H,K)$ یک نمایش ناتباهیده از W باشد. این نمایش، نمایش ناتباهیده ای برای V القا می کند که در ادامه به بررسی ساختار این نمایش القایی می پردازیم.

ساختار ۱۱.۲.۲. مشابه ساختار ؟؟، فرم یک و نیم خطی $\langle .,. \rangle$ را روی فضای برداری $E \otimes_{alg} H$ به صورت $\langle x \otimes h, y \otimes k \rangle = \langle h, \varphi(\langle x, y \rangle) k \rangle_H$ تعریف کرده و فضای هیلبرت ${}_E H$ را در نظر می گیریم. نگاشت ${}^A_E\varphi : A \to B({}_E H)$ که به صورت زیر تعریف می شود، یک نمایش از A است.

$$ {}^A_E\varphi(a)(x \otimes h) = \Psi(a)x \otimes h, \;\; a \in A, \; x \in E, \; h \in H. $$

نمایش $({}_E H, {}^A_E\varphi)$، نمایش القایی ریفل از B به A توسط E نامیده می شود. برای جزییات بیشتر به مقاله [؟] رجوع شود. از آن جایی که A به صورت عملگرهای خودالحاق روی B- مدول هیلبرت E عمل می کند، می توان ضرب تانسوری درونی[۸] $V \otimes_\Psi E$ را به عنوان یک B- مدول هیلبرت در نظر گرفت. لذا می توان فضای ${}_{V \otimes_\Psi E} H$ را مشابه ${}_E H$ ساخت. فرض کنید $v \in V$. نگاشت $E \times H \to {}_{V \otimes_\Psi E} H$ که در آن $(x, h) \mapsto v \otimes x \otimes h$ را در نظر بگیرید. این نگاشت یک فرم دوخطی[۹] است و از این رو تبدیل خطی یکتای ${}_E\Phi(v) : E \otimes_{alg} H \to {}_{V \otimes_\Psi E} H$ وجود دارد که می توان آن را به عملگر خطی و کراندار ${}^V_E\Phi(v)$ از ${}_E H$ به ${}_{V \otimes_\Psi E} H$ توسیع داد. برای این منظور، فرض کنید $q \in S(B)$، $x \in E$، $h \in H$ و (φ_q, H) یک نمایش از B_q نظیر (φ, H) باشد. در این صورت

$$
\begin{aligned}
\langle {}_E\Phi(v)(x \otimes h) \quad , \quad {}_E\Phi(v)(x \otimes h) \rangle &= \langle v \otimes x \otimes h, v \otimes x \otimes h \rangle \\
&= \langle h, \varphi(\langle v \otimes x, v \otimes x \rangle) h \rangle_H \\
&= \langle h, \varphi(\langle x, \Psi(\langle v, v \rangle) x \rangle) h \rangle_H \\
&= \langle h, \varphi_q \circ \pi_q(\langle \Psi(\langle v, v \rangle)^{۱/۲} x, \Psi(\langle v, v \rangle)^{۱/۲} x \rangle) h \rangle_H \\
&= \langle h, \varphi_q(\langle \sigma_q(\Psi(\langle v, v \rangle)^{۱/۲} x), \sigma_q(\Psi(\langle v, v \rangle)^{۱/۲} x) \rangle) h \rangle_H \\
&= \langle h, \varphi_q(\langle (\pi_q)_*(\Psi(\langle v, v \rangle)^{۱/۲})(\sigma_q(x)), (\pi_q)_*(\Psi(\langle v, v \rangle)^{۱/۲})(\sigma_q(x)) \rangle) h \rangle_H \\
&\leq \tilde{q}(\Psi \langle v, v \rangle) \langle h, \varphi_q(\langle \sigma_q(x), \sigma_q(x) \rangle) h \rangle_H \\
&= \tilde{q}(\Psi \langle v, v \rangle) \langle h, (\varphi_q \circ \pi_q)(\langle x, x \rangle) h \rangle_H \\
&= \tilde{q}(\Psi \langle v, v \rangle) \langle h, \varphi(\langle x, x \rangle) h \rangle_H \\
&= \tilde{q}(\Psi \langle v, v \rangle) \langle x \otimes h, x \otimes h \rangle.
\end{aligned}
$$

[۸] interior tensor product

[۹] bilinear form

تساوی های زیر برای هر $v, v' \in V$، $x, x' \in E$ و $h, h' \in H$ برقرار است:

$$\begin{aligned}
\langle x\otimes h\ ,\ {}^V_E\Phi^*(v)\ {}^V_E\Phi(v')(x'\otimes h')\rangle &= \langle {}^V_E\Phi(v)(x\otimes h)\ ,\ {}^V_E\Phi(v)(x'\otimes h')\rangle\\
&= \langle v\otimes x\otimes h\ ,\ v'\otimes x'\otimes h'\rangle\\
&= \langle h, \varphi(\langle v\otimes x, v'\otimes x'\rangle)h\rangle_H\\
&= \langle h, \varphi(\langle x, \Psi(\langle v, v'\rangle)x'\rangle)h'\rangle_H\\
&= \langle x\otimes h\ ,\ \Psi(\langle v, v'\rangle)x'\otimes h'\rangle\\
&= \langle x\otimes h\ ,\ {}^A_E\varphi(\langle v, v'\rangle)(x'\otimes h')\rangle,
\end{aligned}$$

بنابراین $\langle {}^V_E\Phi(v), {}^V_E\Phi(v')\rangle = {}^V_E\Phi^*(v)\ {}^V_E\Phi(v') = {}^A_E\varphi(\langle v, v'\rangle)$ و این یعنی نگاشت
$${}^V_E\Phi : V \to B({}_EH,\ {}_{V\otimes_\Psi E}H)$$
یک ${}^A_E\varphi$- مورفیسم است و در نتیجه یک نمایش از V است. حال ثابت می کنیم ${}^V_E\Phi$ ناتباهیده است. تساوی های $\overline{\Psi(A)(E)} = E$ و $\overline{\langle V, V\rangle} = A$ ایجاب می کنند $\overline{\Psi(\langle V, V\rangle)(E)} = E$. فرض کنید $x, x' \in E$ و $h \in H$. در این صورت

$$\begin{aligned}
\|(x-x')\otimes h\|^2 &= \langle h, \varphi(\langle x-x', x-x'\rangle)h\rangle_H\\
&\leq \|h\|^2\|\varphi(\langle x-x', x-x'\rangle)\|\\
&\leq \|h\|^2 q(\langle x-x', x-x'\rangle) = \|h\|^2\bar{q}_E(x-x').
\end{aligned}$$

برای $\epsilon > 0$ دلخواه، $v_i, v_i' \in V$ و $x_i \in E$ وجود دارند به طوری که $\bar{q}_E(\sum_i \Psi(\langle v_i, v_i'\rangle)x_i - x) < \epsilon$. بنابراین عبارت $\sum_i \Psi(\langle v_i, v_i'\rangle)x_i\otimes h$، عنصر $x\otimes h$ را در ${}_EH$ تقریب می زند. از سوی دیگر داریم

$$\begin{aligned}
\sum_i \Psi(\langle v_i, v_i'\rangle)x_i\otimes h &= \sum_i {}^A_E\varphi(\langle v_i, v_i'\rangle)(x_i\otimes h)\\
&= \sum_i {}^V_E\Phi^*(v_i)\ {}^V_E\Phi(v_i')(x_i\otimes h)\\
&= \sum_i {}^V_E\Phi^*(v_i)(\ v_i'\otimes x_i\otimes h),
\end{aligned}$$

که ایجاب می کند $\overline{{}^V_E\Phi(V)^*({}_{V\otimes_\Psi E}H)} = {}_EH$. تساوی $\overline{{}^V_E\Phi(V)({}_EH)} = {}_{V\otimes_\Psi E}H$ از تعریف ${}^V_E\Phi$ نتیجه می شود. بنابراین ${}^V_E\Phi$ ناتباهیده است.

تعریف ۱۲.۲.۲. نمایش ${}^V_E\Phi$ درساختار ؟؟ نمایش القایی ریفل از W به V توسط E نامیده می شود.

قضیه ۱۳.۲.۲. فرض کنید V و W دو مدول هیلبرت به ترتیب روی C^*- جبرهای موضعی A و B باشند. فرض کنید E یک B- مدول هیلبرت، $\Psi : A \to L_B(E)$ یک $*$- همورفیسم پیوسته ی ناتباهیده و $q \in S(B)$ و (φ_q, H) یک نمایش ناتباهیده از B_q نظیر (φ, H) باشد، آن گاه $p \in S(A)$ وجود دارد به طوری که A_p به طور ناتباهیده روی E_q عمل می کند و نمایش های ${}^V_E\Phi$ و ${}^{V_p}_{E_q}\Phi_q \circ \sigma^V_p$ از V به طور یکانی معادل هستند.

برهان. بنا به پیوستگی Ψ، $p \in S(A)$ وجود دارد که به ازای هر $a \in A$، $\tilde{q}(\Psi(a)) \leq p(a)$.
بنابراین $\Psi_p : A_p \to L_{B_q}(E_q)$، $\Psi_p(\pi_p(a)) = (\pi_q)_*(\Psi(a))$ یک $*$- همورفیسم از C^*- جبرها است.
هم چنین Ψ_p ناتباهیده است زیرا

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi_p(A_p)(E_p)} = \overline{\Psi_p(\pi_p(A))(\sigma_p^E(E))} &= \overline{(\pi_q)_*(\Psi(A)\sigma_q^E(E))} \\
&= \sigma_q^E\, \overline{(\Psi(A)(E))} \\
&= \sigma_q^E(E) = E_q.
\end{aligned}$$

اگر Φ_q نمایش ناتباهیده از W_q نظیر Φ باشد، آن گاه ${}^{V_p}_{E_q}\Phi_q : V_p \to B({}_{E_q}H\ ,\ {}_{V_p\otimes_{\Psi_q}E_q}H)$ که به صورت ${}^{V_p}_{E_q}\Phi_q(\sigma_p^V(v))(\sigma_q^E(x)\otimes h) = \sigma_p^V(v)\otimes\sigma_q^E(x)\otimes h$ تعریف می شود، یک نمایش ناتباهیده از V_p است که یک ${}^{A_p}_{E_q}\varphi_q$- مورفیسم نیز می باشد. در واقع ${}^{V_p}_{E_q}\Phi_q$، نمایش القایی ریفل از W_q به V_p توسط E_q بوده و در نتیجه ${}^{V_p}_{E_q}\Phi_q \circ \sigma_p^V$ یک نمایش ناتباهیده از V و یک ${}^{A_p}_{E_q}\varphi_q \circ \pi_p$ - مورفیسم است. بنا به [؟، گزاره ۳.۴]، نمایش های $({}^{A}_{E}\varphi\ ,\ {}_EH)$ و $({}^{A_p}_{E_q}\varphi_q\ \circ\ \pi_p\ ,\ {}_{E_q}H)$ از A به طور یکانی معادل هستند.
نگاشت خطی $U_1 : E\otimes_{alg} H \to E_q \otimes_{alg} H$ را به صورت $U_1(x\otimes h) = \sigma_q^E(x)\otimes h$ تعریف می کنیم. به ازای هر $x \in E$ و $h \in H$ داریم

$$\begin{aligned}
\langle U_1(x\otimes h), U_1(x\otimes h)\rangle &= \langle \sigma_q^E(x)\otimes h, \sigma_q^E(x)\otimes h\rangle \\
&= \langle h, \varphi_q(\langle \sigma_q^E(x), \sigma_q^E(x)\rangle)h\rangle_H \\
&= \langle h, \varphi_q(\pi_q(\langle x, x\rangle))h\rangle_H \\
&= \langle h, \varphi(\langle x, x\rangle)h\rangle_H \\
&= \langle x\otimes h, x\otimes h\rangle,
\end{aligned}$$

بنابراین U_1 می تواند به یک عملگر خطی و کراندار از ${}_EH$ به ${}_{E_q}H$ که مجدداً آن را با U_1 نشان می دهیم، توسیع یابد. به آسانی می توان دید که U_1 یک عملگر یکانی است. نگاشت خطی

$$U_2 : V\otimes_{alg} E\otimes_{alg} H \to V_p\otimes_{alg} E_q\otimes_{alg} H$$

را به صورت $U_2(v\otimes x\otimes h) = \sigma_p^V(v)\otimes\sigma_q^E(x)\otimes h$ تعریف می کنیم. برای هر $v\in V$، $x\in E$ و

$h \in H$ داریم

$$\begin{aligned}
\langle U_۲(v\otimes x\otimes h), U_۲(v\otimes x\otimes h)\rangle &= \langle \sigma_p^V(v)\otimes\sigma_q^E(x)\otimes h, \sigma_p^V(v)\otimes\sigma_q^E(x)\otimes h\rangle \\
&= \langle h, \varphi_q\Big(\langle \sigma_p^V(v)\otimes\sigma_q^E(x), \sigma_p^V(v)\otimes\sigma_q^E(x)\rangle\Big)h\rangle_H \\
&= \langle h, \varphi_q\Big(\langle \sigma_q^E(x), \Psi_p(\langle\sigma_p^V(v), \sigma_p^V(v)\rangle)\sigma_q^E(x)\rangle\Big)h\rangle_H \\
&= \langle h, \varphi_q\Big(\langle \sigma_q^E(x), \Psi_p(\pi_p(\langle v, v\rangle))\sigma_q^E(x)\rangle\Big)h\rangle_H \\
&= \langle h, \varphi_q\Big(\langle \sigma_q^E(x), (\pi_q)_*(\Psi(\langle v, v\rangle))\sigma_q^E(x)\rangle\Big)h\rangle_H \\
&= \langle h, \varphi_q\Big(\langle \sigma_q^E(x), \sigma_q^E(\Psi(\langle v, v\rangle)x)\rangle\Big)h\rangle_H \\
&= \langle h, \varphi_q\Big(\pi_q(\langle x, \Psi(\langle v, v\rangle)x)\Big)h\rangle_H \\
&= \langle h, \varphi(\langle x, \Psi(\langle v, v\rangle)x)h\rangle_H \\
&= \langle v\otimes x\otimes h, v\otimes x\otimes h\rangle.
\end{aligned}$$

بنابراین $U_۲$ می تواند به عملگر خطی و کراندار $U_۲$ از $_{V\otimes_\Psi E}H$ به $_{V_p\otimes_{\Psi_q}E_q}H$ توسیع یابد. به آسانی می توان دید که $U_۲$ عملگری یکانی بوده و به ازای هر $v \in V$، $U_۲\ {}^V_E\Phi(v) = ({}^{V_p}_{E_q}\Phi_q \circ \sigma_p^V)\ U_۱(v)$.
بنابراین نمایش های ${}^V_E\Phi$ و ${}^{V_p}_{E_q}\Phi_q \circ \sigma_p^V$ به طور یکانی معادل هستند. □

قضیه ۱۴.۲.۲. فرض کنید $\Phi_۱ : W \to B(H_۱, K_۱)$ و $\Phi_۲ : W \to B(H_۲, K_۲)$ دو نمایش ناتباهیده از W باشند. اگر $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ به طور یکانی معادل باشند، آن گاه ${}^V_E\Phi_۱$ و ${}^V_E\Phi_۲$ به طور یکانی معادل هستند.

برهان. فرض کنید $q, q' \in S(B)$، $(\varphi_{۱q}, H_۱)$ نمایش B_q نظیر $\varphi_۱$ و $(\varphi_{۲q'}, H_۲)$ نمایش $B_{q'}$ نظیر $\varphi_۲$ باشد. فرض کنید $r \in S(B)$ و $q, q' \leq r$. بنا به قضیه ؟؟، $p \in S(A)$ وجود دارد به گونه ای که A_p به طور ناتباهیده روی E_r عمل می کند و به ازای $i = ۱, ۲$، نمایش ${}^V_E\Phi_i$ به طور یکانی با نمایش ${}^{V_p}_{E_r}\Phi_{ir} \circ \sigma_p^V$ معادل است. با توجه به این که $\Phi_{۱r}$ و $\Phi_{۲r}$ نمایش های به طور یکانی معادل از W_r هستند، لم ؟؟ ایجاب می کند که نمایش های ${}^{V_p}_{E_r}\Phi_{۱r}$ و ${}^{V_p}_{E_r}\Phi_{۲r}$ به طور یکانی معادل باشند. □

نتیجه ۱۵.۲.۲. اگر $\Phi : W \to B(H, K)$ و $\oplus_{i\in I}\Phi_i : W \to B(\oplus_{i\in I}H_i, \oplus_{i\in I}K_i)$ به طور یکانی معادل باشند آن گاه ${}^V_E\Phi$ و $\oplus_{i\in I}\ {}^V_E\Phi_i$ به طور یکانی معادل هستند.

برهان. فرض کنید $q \in S(B)$ و $\Phi_q : W_q \to B(H, K)$ یک نمایش از W_q نظیر Φ باشد. برای هر $i \in I$، نگاشت $\Phi_{iq} : W_q \to B(H_i, K_i)$ را به صورت $\Phi_{iq}(\sigma_q^W(w)) = \Phi_i(w)$ تعریف می کنیم. اگر $\sigma_q^W(w) = ۰$ آن گاه $\Phi_q(\sigma_q^W(w)) = ۰$ و در نتیجه $\Phi(w) = ۰$. از آن جایی که Φ و $\oplus_{i\in I}\Phi_i$ به طور یکانی معادل هستند، می توان نتیجه گرفت که $\oplus_{i\in I}\Phi_i(w) = ۰$ و از این رو به ازای هر $i \in I$، $\Phi_i(w) = ۰$. بنابراین به ازای هر $i \in I$، Φ_{iq} خوش تعریف است. به آسانی می توان دید که Φ_q و $\oplus_{i\in I}\Phi_{iq}$ به طور یکانی معادل هستند. بنا به قضیه ؟؟، $p \in S(A)$ وجود دارد به طوری که A_p به طور ناتباهیده روی E_q عمل می کند و نمایش های ${}^V_E\Phi$ و ${}^{V_p}_{E_q}\Phi_q \circ \sigma_p^V$ از V به طور یکانی معادل هستند. به ازای هر $i \in I$، نمایش های ${}^V_E\Phi_i$ و ${}^{V_p}_{E_q}\Phi_{iq} \circ \sigma_p^V$ به طور یکانی معادل هستند. از سوی دیگر، نتیجه

؟؟ ایجاب می کند که نمایش های ${}^{V_p}_{E_q}\Phi_q$ و $\oplus_{i\in I}\, {}^{V_p}_{E_q}\Phi_{i\,q}$ از V_p به طور یکانی معادل باشند. در نتیجه نمایش های $\sigma_p^V \circ {}^{V_p}_{E_q}\Phi_q$ و $\oplus_{i\in I}({}^{V_p}_{E_q}\Phi_{i\,q} \circ \sigma_p^V)$ از V به طور یکانی معادل هستند. □

۳.۲ قضیه غیر اولیه برای مدولهای هیلبرت

فرض کنید A و B، C^*- جبرهای موضعی به طور قوی هم ارز موریتا باشند و E، A- مدول هیلبرت به دست آمده از هم ارزی موریتای قوی بین A و B باشد. در این صورت فضای برداری $\tilde{E} := K_A(E, A)$، با در نظر گرفتن ضرب مدولی و ضرب داخلی زیر یک $K_A(E)$- مدول هیلبرت کامل است.

$$\begin{aligned} (T, S) &\to TS, \quad S \in K_A(E),\ T \in K_A(E, A), \\ \langle T, S\rangle &= T^*S, \quad T, S \in K_A(E, A). \end{aligned}$$

از آن جایی که C^*- جبرهای موضعی B و $K_A(E)$ یکریخت هستند، $\tilde{E}$ را می توان به عنوان یک B- مدول هیلبرت در نظر گرفت. به علاوه بنا به [؟، لم ۴.۲ و ملاحظه ۴.۳]، نگاشت خطی α که از A به $K_B(\tilde{E})$ به صورت $\alpha(a)(\theta_{b,x}) = \theta_{ab,x}$ تعریف می شود، یک یکریختی از C^*- جبرهای موضعی است. به آسانی می توان دید که به ازای هر $p \in S(A)$، نگاشت خطی $U_p : (\tilde{E})_p \to \tilde{E}_p$ که به صورت $U_p(T + N_p^{\tilde{E}}) = (\pi_p)_*(T)$ تعریف می شود، یکانی بوده و $K_{A_p}(E_p)$- مدولهای هیلبرت $(\tilde{E})_p$ و $\tilde{E}_p$ یکسان هستند.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید V و W مدولهای هیلبرت به ترتیب روی C^*- جبرهای موضعی A و B باشند. مدولهای هیلبرت V و W را هم ارز موریتا گوییم اگر $K_A(V)$ و $K_B(W)$ به عنوان C^*- جبرهای موضعی به طور قوی هم ارز موریتا باشند. در این حالت می نویسیم $V \sim_M W$.

لم ۲.۳.۲. فرض کنید V یک مدول هیلبرت کامل روی C^*- جبر موضعی A باشد. در این صورت $K_A(V)$ به طور قوی هم ارز موریتا با $\overline{\langle V, V\rangle}$ است.

برهان. بنا به نتیجه ؟؟ ، $\tilde{V} = K_A(V, A)$ یک $K_A(V)$- مدول هیلبرت کامل است. لذا [؟، لم ۴.۲] ایجاب می کند $K_{K_A(V)}(\tilde{V})$ و $K_A(A)$ یکریخت باشند. از آن جایی که

$$\overline{\langle V, V\rangle} = A \simeq K_A(A)$$

می توان نتیجه گرفت که C^*- جبرهای موضعی $K_A(V)$ و $\overline{\langle V, V\rangle}$ به طور قوی هم ارز موریتا هستند. □

نتیجه ۳.۳.۲. دو مدول هیلبرت کامل روی C^*- جبرهای موضعی، هم ارز موریتا هستند اگر و فقط اگر C^*- جبرهای موضعی آن ها به طور قوی هم ارز موریتا باشند.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید V و W دو مدول هیلبرت کامل به ترتیب روی C^*- جبرهای موضعی A و B باشند به طوری که $V \sim_M W$. اگر E، A- مدول هیلبرت به دست آمده از هم ارزی موریتای قوی بین A و B باشد و Φ یک نمایش ناتباهیده از V باشد، آن گاه Φ و ${}^{V}_{\tilde{E}}({}^{W}_{E}\Phi)$ به طور یکانی معادل هستند.

برهان. فرض کنید $p \in S(A)$ و Φ_p یک نمایش ناتباهیده از V_p نظیر Φ باشد. بنا به [؟، لم ۴.۱]، $q \in S(B)$ وجود دارد به طوری که $A_p \sim_M B_q$ و E_p، A_p- مدول هیلبرت به دست آمده در هم ارزی موریتای قوی بین A_p و B_q است. بنا به [؟، قضیه ۳.۲۹]، نمایش های φ_p و ${}^{A_p}_{\tilde{E}_p}({}^{B_q}_{E_p}\varphi_p)$ از A_p به طور یکانی معادل هستند. حال لم ؟؟ ایجاب می کند که نمایش های Φ_p و ${}^{V_p}_{\tilde{E}_p}({}^{W_q}_{E_p}\Phi_p)$ از V_p به طور یکانی معادل باشند و در نتیجه نمایش های ${}^{V_p}_{\tilde{E}_p}({}^{W_q}_{E_p}\Phi_p) \circ \sigma_p^V$ و $\Phi_p \circ \sigma_p^V = \Phi$ از V به طور یکانی معادل هستند. با در نظر گرفتن قضیه های ؟؟ و ؟؟ داریم

- نمایش های ${}^{W}_{E}\Phi$ و ${}^{W_q}_{E_p}\Phi_p \circ \sigma_q^W$ از W به طور یکانی معادل هستند،
- نمایش های ${}^{V}_{\tilde{E}}({}^{W}_{E}\Phi)$ و ${}^{V}_{\tilde{E}}({}^{W_q}_{E_p}\Phi_p \circ \sigma_q^W)$ از V به طور یکانی معادل هستند و
- نمایش های ${}^{V}_{\tilde{E}}({}^{W_q}_{E_p}\Phi_p \circ \sigma_q^W)$ و ${}^{V_p}_{\tilde{E}_P}({}^{W_q}_{E_p}\Phi_p \circ \sigma_q^W)_q \circ \sigma_p^V$ از V به طور یکانی معادل هستند.

با توجه به اینکه $({}^{W_q}_{E_p}\Phi_p \circ \sigma_q^W)_q = {}^{W_q}_{E_p}\Phi_p$، می توان قضیه را نتیجه گرفت. □

حال می خواهیم قضیه غیر اولیه را برای مدولهای هیلبرت بیان کنیم.

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنید V و W به ترتیب دو مدول هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی A و B باشند. اگر $V \sim_M W$، آن گاه یک تناظر یک به یک بین رده های هم ارزی نمایش های ناتباهیده V و W وجود دارد.

برهان. بدون آن که به کلیت مساله خللی وارد آید، می توان V و W را کامل فرض کرد. فرض کنید E A- مدول هیلبرتی باشد که از رابطه هم ارزی موریتای قوی بین A و B بدست می آید. در این صورت بنا به قضیه های ؟؟و ؟؟، نگاشت $\Phi \mapsto {}^{W}_{E}\Phi$ یک تناظر یک به یک بین رده های هم ارزی نمایش های ناتباهیده V و W است. □

فصل ۳

نگاشت‌های به طور کامل مثبت روی مدولهای هیلبرت بر روی C^*- جبرهای موضعی

۱.۳ مقدمه

در بخش دوم این فصل، ابتدا به تعمیم ساختار GNS پشکی برای نگاشت های به طور کامل مثبت روی C^*- جبرهای موضعی می پردازیم و سپس به کمک این ساختار و نمایش القایی C^*- مدولها، اثبات دیگری برای قضیه ی استاین اسپرینگ برای C^*- جبرهای موضعی ارائه داده و قضیه ی استاین اسپرینگ برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی را نتیجه می گیریم. در بخش آخر این فصل، ابتدا یک رابطه ی پیش ترتیب، در مجموعه ی همه ی نگاشت های به طور کامل مثبت روی مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی تعریف کرده و سپس قضیه ی رادون-نیکودیم را برای نگاشت های به طور کامل مثبت روی مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی نتیجه می گیریم.

۲.۳ قضیه نمایش استاین اسپرینگ

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید A و B دو C^*- جبر موضعی باشند. نگاشت خطی $\rho : A \to B$ را مثبت گوییم، اگر به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $\rho(a^*a) \geq 0$.

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید A و B دو C^*- جبر موضعی باشند. نگاشت خطی $\rho : A \to B$ را به طور

کامل مثبت [۱] گوییم اگر به ازای هر عدد مثبت n، نگاشت خطی $\rho^{(n)} : M_n(A) \to M_n(B)$ که به صورت

$$\rho^{(n)}([a_{ij}]_{i,j=1}^n) = [\rho(a_{ij})]_{i,j=1}^n$$

تعریف می شود، مثبت باشد.

مثال ۳.۲.۳. واضح است که هر همریختی از C^*- جبرهای موضعی، یک نگاشت پیوسته ی به طور کامل مثبت است.

لم ۴.۲.۳. فرض کنید E یک مدول هیلبرت روی C^*- جبر موضعی A باشد و $T \in L_A(E)$. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

- T یک عضو مثبت از $L_A(E)$ است.
- به ازای هر $\xi \in E$، $\langle \xi, T\xi \rangle$ یک عضو مثبت از A است.

برهان. [؟، لم ۳.۲.۵] □

گزاره ۵.۲.۳. فرض کنید A و B دو C^*- جبر موضعی باشند و E یک B- مدول هیلبرت باشد. نگاشت $\rho : A \to L_B(E)$ به طور کامل مثبت است اگر و فقط اگر به ازای هر n عضو $a_1, ..., a_n$ در A و هر n عضو $\xi_1, ..., \xi_n$ در E، $\sum_{i,j=1}^n \langle \xi_i, \rho(a_i^* a_j)\xi_j \rangle$ عنصر مثبتی از B باشد.

برهان. [؟، گزاره ۳.۲.۶] □

نتیجه ۶.۲.۳. فرض کنید A و B دو C^*- جبر موضعی و $\rho : A \to B$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد. در این صورت ρ به طور کامل مثبت است اگر و فقط اگر برای هر n عضو $a_1, ..., a_n$ در A و هر n عضو $b_1, ..., b_n$ در B، $\sum_{i,j=1}^n b_i^* \rho(a_i^* a_j) b_j$ عنصر مثبتی از B باشد.

برهان. [؟، نتیجه ۳.۲.۷] □

تعریف ۷.۲.۳. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی و E یک A- مدول هیلبرت باشد. توپولوژی اکید[۲] روی $L_A(E)$، توپولوژی تولید شده توسط خانواده ی شبه نرم های $\{\|.\|_{p,\xi}\}_{(p,\xi)\in S(A)\times E}$ است که در آن به ازای هر $T \in L_A(E)$، $\|T\|_{p,\xi} = \bar{p}_E(T\xi) + \bar{p}_E(T^*\xi)$.

تعریف ۸.۲.۳. فرض کنید A و B دو C^*- جبر موضعی باشند و E یک B- مدول هیلبرت باشد. نگاشت خطی پیوسته و به طور کامل مثبت $\rho : A \to L_B(E)$ را اکید [۳] گوییم اگر به ازای یک واحد تقریبی مانند $(e_i)_{i\in I}$ از A، $(\rho(e_i))_{i\in I}$ در $L_B(E)$ اکیداً کوشی [۴] باشد.

[۱] completely positive

[۲] strict topology

[۳] strict

[۴] strictly Cauchy

ملاحظه ۹.۲.۳. اگر A یکدار باشد یا $B = \mathbb{C}$، آن گاه شرط اکید بودن خود به خود برقرار است.

قضیه ۱۰.۲.۳. فرض کنید A و B دو C^*- جبر موضعی، E یک B- مدول هیلبرت و $\rho : A \to L_B(E)$ یک نگاشت پیوسته و اکید به طور کامل مثبت باشد. در این صورت

۱. B- مدول هیلبرت E_ρ، نمایش پیوسته ای از A روی E_ρ مانند $\Phi_\rho : A \to L_B(E_\rho)$ و عملگر V_ρ در $L_B(E, E_\rho)$ وجود دارند به طوری که

- به ازای هر $a \in A$، $\rho(a) = V_\rho^* \Phi_\rho(a) V_\rho$،
- $\Phi_\rho(A) V_\rho E$ در E_ρ چگال است.

۲. اگر F یک B- مدول هیلبرت باشد و $\Phi : A \to L_B(F)$ یک نمایش پیوسته از A روی F و W عملگری در $L_B(E, F)$ باشد به طوری که

- به ازای هر $a \in A$، $\rho(a) = W^* \Phi(a) W$،
- $\Phi(A) W E$ در F چگال باشد،

در این صورت عملگر یکانی مانند U در $L(E_\rho, F)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $\Phi(a) = U \Phi_\rho(a) U^*$ و $W = U V_\rho$

برهان. [؟، قضیه ۴.۶] □

در قضیه ی فوق سه تایی $(E_\rho, \Phi_\rho, V_\rho)$ را ساختار $KSGNS$ نظیر نگاشت خطی پیوسته و اکید به طور کامل مثبت ρ گوییم.

ملاحظه ۱۱.۲.۳. قضیه ی فوق تعمیم ساختار $KSGNS$ برای C^*- جبرها است. به خصوص، می توان از این قضیه ساختار GNS را بدست آورد.

فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی، E یک مدول هیلبرت روی C^*- جبر موضعی B و $\rho : A \to L_B(E)$ یک نگاشت خطی به طور کامل مثبت باشد. عمل B روی $A \otimes_{alg} E$ (ضرب تانسوری جبری A و E) را به صورت $(a \otimes \xi) b = a \otimes \xi b$ تعریف می کنیم. ضرب داخلی روی $A \otimes_{alg} E$ را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \xi_i, \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes \xi_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle \xi_i, \rho(a_i^* b_j) \xi_j \rangle$$

مدول خارج قسمتی $(A \otimes_{alg} E)/N_\rho$ که در آن $N_\rho = \{\xi \in A \otimes_{alg} E : \langle \xi, \xi \rangle = 0\}$، همراه با ضرب داخلی زیر، یک پیش- B- مدول هیلبرت است.

$$\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \xi_i + N_\rho, \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes \xi_j + N_\rho \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \xi_i, \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes \xi_j \rangle.$$

تکمیل شده ی [5] پیش- B- مدول هیلبرت $(A \otimes_{alg} E)/N_\rho$ را با نماد E_ρ نشان می دهیم.

[5] completion

قضیه ۱۲.۲.۳. فرض کنید A و B دو C^*- جبر موضعی یکدار باشند و $\varphi : A \to B$ یک نگاشت پیوسته ی به طور کامل مثبت باشد. در این صورت یک B- مدول هیلبرت مانند X، یک نمایش پیوسته ی یکانی مانند $\pi_\varphi : A \to L_B(X)$ و عنصر $\xi \in X$ وجود دارد به طوری که

- به ازای هر $a \in A$، $\varphi(a) = \langle \xi, \pi_\varphi(a)\xi \rangle$؛
- مجموعه ی $\chi_\varphi = \mathrm{span}\{\pi_\varphi(a)(\xi b) : a \in A, b \in B\}$ یک زیرفضای چگال از X است.

نمایش π_φ را ساختار GNS پشکی [۶] متناظر با نگاشت به طور کامل مثبت φ گوییم.

برهان. با در نظر گرفتن $E = B$ و $\xi = V_\varphi(1_B)$، می توان این قضیه را از قضیه ؟؟ نتیجه گرفت. ما به تفصیل به اثبات این قضیه می پردازیم. ابتدا فرض کنیم B یک C^*- جبر باشد. در این صورت $p \in S(A)$ و $M > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $\|\varphi(a)\| \leq Mp(a)$ و در نتیجه نگاشت خطی $\varphi_p : A_p \to B$، با ضابطه $\varphi_p \circ \pi_p = \varphi$ خوش تعریف است. از آن جایی که φ_p یک نگاشت به طور کامل مثبت بین C^*- جبرهای A_p و B است، بنا به ساختار GNS پشکی [؟، قضیه ۵.۲]، B- مدول هیلبرت X، بردار $\xi \in X$ و نمایش یکانی $\pi_{\varphi_p} : A_p \to L_B(X)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a_p \in A_p$، $\varphi_p(a_p) = \langle \xi, \pi_{\varphi_p}(a_p)\xi \rangle$ و $\mathrm{span}\{\pi_{\varphi_p}(a_p)(\xi b) : a_p \in A_p, b \in B\}$ زیر فضای چگالی از X است. نگاشت $\pi_\varphi : A \to L_B(X)$ را به صورت $\pi_\varphi(a) = (\pi_{\varphi_p} \circ \pi_p)(a)$ تعریف می کنیم. این نگاشت، یک نمایش یکانی از A روی X است که در شرایط (۱) و (۲) صدق می کند.

حال فرض کنید B یک C^*- جبر موضعی دلخواه باشد و $q \in S(B)$. از آن جایی که φ پیوسته است، $p_q \in S(A)$ و $M_q > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $q(\varphi(a)) \leq M_q p_q(a)$ و در نتیجه نگاشت $\varphi_q : A_{p_q} \to B_q$ وجود دارد به طوری که $\varphi_q \circ \pi_{p_q} = \pi_q \circ \varphi$. به وضوح $\varphi_q \circ \pi_{p_q} : A \to B_q$ یک نگاشت به طور کامل مثبت و پیوسته است و از این رو بنا به قسمت اول اثبات، B_q - مدول هیلبرت X_{φ_q}، بردار $\xi_q \in X_{\varphi_q}$ و نمایش یکانی $\pi_{\varphi_q} : A \to L_{B_q}(X_{\varphi_q})$ از A روی X_{φ_p} وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $\varphi_q \circ \pi_{p_q}(a) = \langle \xi_q, \pi_{\varphi_q}(a)\xi_q \rangle$ و $\chi_{\varphi_q} = \mathrm{span}\{\pi_{\varphi_q}(a)(\xi_q b_q) : a \in A,\ b_q \in B_q\}$ در X_{φ_q} چگال است.

فرض کنید $r, q \in S(B)$ و $r \leq q$. از آن جایی که $r(\varphi(a)) \leq q(\varphi(a)) \leq M_q p_q(a)$، می توان فرض کرد $p_r \leq p_q$. نگاشت خطی $\tilde{\psi}_{qr} : \chi_{\varphi_q} \to \chi_{\varphi_r}$ که به ازای هر $a \in A$ و $b_q \in B_q$، به صورت $\tilde{\psi}_{qr}(\pi_{\varphi_q}(a)(\xi_q b_q)) = \pi_{\varphi_r}(a)(\xi_r b_r)$ تعریف می شود را در نظر می گیریم. برای هر $a, c \in A$ و هر $b_q, d_q \in B_q$ داریم

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\psi}_{qr}(\pi_{\varphi_q}(a)(\xi_q b_q)), \tilde{\psi}_{qr}(\pi_{\varphi_q}(c)(\xi_q d_q)) \rangle &= b_r^* \langle \xi_r, \pi_{\varphi_r}(a^*c)\xi_r \rangle d_r \\
&= \pi_r(b^*\varphi(a^*c)d) \\
&= (\pi_{qr} \circ \pi_q)(b^*\varphi(a^*c)d) \\
&= \pi_{qr}(\langle \pi_{\varphi_q}(a)(\xi_q b_q), \pi_{\varphi_q}(c)(\xi_q d_q) \rangle).
\end{aligned}$$

---
[۶] Paschke' s-GNS construction

بنابراین $\tilde{\psi}_{qr}$ را می توان به نگاشت خطی $\psi_{qr}: X_{\varphi_q} \to X_{\varphi_r}$ توسیع داد. به آسانی می توان دید که $\{X_{\varphi_q}, B_q, \psi_{qr}: X_{\varphi_q} \to X_{\varphi_r}\}_{r,q\in S(B), r\leq q}$ یک دستگاه وارون از C^*- مدولهای هیلبرت است. فرض کنید $X = \varprojlim_q X_{\varphi_q}$ و $r, q \in S(B)$ به طوری که $r \leq q$. در این صورت به ازای هر $x_{\varphi_q} \in X_{\varphi_q}$ و $b_r \in B_r$ داریم

$$\langle x_{\varphi_q}\otimes b_r, x_{\varphi_q}\otimes b_r\rangle = b_r^*\pi_{qr}(\langle x_{\varphi_q}, x_{\varphi_q}\rangle)b_r = \langle \psi_{qr}(x_{\varphi_q})b_r, \psi_{qr}(x_{\varphi_q})b_r\rangle.$$

بنابراین B_r- نگاشت خطی $U: X_{\varphi_q}\otimes_{\pi_{qr}} B_r \to X_{\varphi_r}$ که به صورت $U(x_{\varphi_q}\otimes b_r) = \psi_{qr}(x_{\varphi_q})b_r$ تعریف می شود، بنا به [؟، قضیه ۳.۵] عملگری یکانی است و درنتیجه بنا به گزاره ۴.۴ و ۴.۷ از [؟]، X یک B- مدول هیلبرت است و $L_B(X) \cong \varprojlim_q L_{B_q}(X_{\varphi_q})$. به آسانی می توان دید که به ازای هر $r, q \in S(B)$ که $r \leq q$، $\psi_{qr}(\xi_q) = \xi_r$ و در نتیجه $\xi = (\xi_q)_{q\in S(B)}$ یک عضو از X است. از آن جایی که به ازای هر $a \in A$ و هر $r, q \in S(B)$ که $r \leq q$، $\psi_{qr}\circ\pi_{\varphi_q}(a) = \pi_{\varphi_r}(a)\circ\psi_{qr}$، نگاشت $\pi_\varphi: A \to \varprojlim_q L_{B_q}(X_{\varphi_q})$ که به صورت

$$\pi_\varphi(a) = (\pi_{\varphi_q}(a))_{q\in S(B)}$$

تعریف می شود، خوش تعریف است. با توجه به این که به ازای هر $q \in S(B)$، π_{φ_q} یک نمایش پیوسته از A روی X_{φ_q} است، می توان نتیجه گرفت که π_φ یک نمایش پیوسته از A روی X است. به علاوه برای هر $a \in A$، $\varphi(a) = \langle \xi, \pi_\varphi(a)\xi\rangle$ و بنا به [؟، لم ۳.۲]، $\overline{\chi_\varphi} = \overline{\varprojlim_q \chi_{\varphi_q}} = \varprojlim_q \overline{\chi_{\varphi_q}} = X$. □

تعریف ۱۳.۲.۳. فرض کنید E و F به ترتیب مدول های هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی A و B باشند. در این صورت φ- مورفیسم $\Phi: E \to F$ را به طور کامل مثبت گوییم اگر $\varphi: A \to B$ یک نگاشت به طور کامل مثبت باشد.

لم ۱۴.۲.۳. فرض کنید E و F به ترتیب مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی A و B باشند و $\Phi: E \to F$ یک نگاشت به طور کامل مثبت باشد. فرض کنید X، ξ و π_φ مشابه قضیه ی قبل باشند. در این صورت یک ایزومتری [۷] مانند $v: E\otimes_{\pi_\varphi} X \to F$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $z \in E$، $v(z\otimes\xi) = \Phi(z)$.

برهان. فرض کنید $a, c \in A$، $b, d \in B$ و $z, w \in E$. در این صورت

$$\begin{aligned}
\langle z\otimes(\pi_\varphi(a)(\xi b)), w\otimes(\pi_\varphi(c)(\xi d))\rangle &= \langle \pi_\varphi(a)(\xi b), \pi_\varphi(\langle z, w\rangle)(\pi_\varphi(c)(\xi d))\rangle\\
&= b^*\langle \xi, \pi_\varphi(\langle za, wc\rangle)\xi\rangle d\\
&= b^*\varphi(\langle za, wc\rangle)d\\
&= b^*\langle \Phi(za), \Phi(wc)\rangle d\\
&= \langle \Phi(za)b, \Phi(wc)d\rangle.
\end{aligned}$$

بنا به ساختار GNS پشکی، $\mathrm{span}\{\pi_\varphi(a)(\xi b): a\in A,\ b\in B\}$ یک زیر فضای چگال از X است لذا نگاشت $z\otimes(\pi_\varphi(a)(\xi b)) \mapsto \Phi(za)b$ یک ایزومتری مانند $v: E\otimes_{\pi_\varphi} X \to F$ تعریف می کند. به خصوص، اگر قرار دهیم $a = 1_A$ و $b = 1_B$، آن گاه به ازای هر $z \in E$، $v(z\otimes\xi) = \Phi(z)$. □

[۷] isometry

قضیه زیر، قضیه نمایش استاین اسپرینگ برای C^*- جبرهای موضعی است . این قضیه را می توان حالت خاصی از ساختار $KSGNS$ برای نگاشت های به طور کامل مثبت روی C^*- جبرهای موضعی یکدار دانست. برای این منظور کافی است در قضیه ؟؟ قرار دهیم $B = \mathbb{C}$. ما این قضیه را به کمک مفهوم نمایش های القایی مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی ثابت می کنیم.

قضیه ۱۵.۲.۳. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی یکدار و $\varphi : A \to B(H)$ یک نگاشت به طور کامل مثبت و پیوسته باشد. در این صورت فضای هیلبرتی مانند H_φ، نمایش یکانی مانند $\pi_\varphi : A \to B(H_\varphi)$ و عملگر خطی و کرانداری مانند V_φ در $B(H, H_\varphi)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $\varphi(a) = V_\varphi^* \pi_\varphi(a) V_\varphi$.

برهان. فرض کنید π'_φ ساختار GNS پشکی نظیر φ وX ، χ_φ و ξ مشابه قضیه ؟؟ باشند. اگر نگاشت همانی ι روی $B(H)$ را به عنوان یک نمایش از $B(H)$ روی H در نظر بگیریم، بنا به ساختار ؟؟، فضای هیلبرت H_φ (متناظر با $X \otimes H$)، نمایش القابی $\eta_\iota : X \to B(H, H_\varphi)$ از X و نمایش $\rho_\varphi : L_{B(H)}(X) \to B(H_\varphi)$ از $L_{B(H)}(X)$ وجود دارند. با قرار دادن $V_\varphi := \eta_\iota(\xi)$ و $\pi_\varphi := \rho_\varphi \circ \pi'_\varphi$، برای هر $a \in A$ و هر $h \in H$، داریم

$$\begin{aligned} V_\varphi^* \pi_\varphi(a) V_\varphi(h) = V_\varphi^* \pi_\varphi(a)(\xi \otimes h) &= V_\varphi^*(\pi'_\varphi(a)\xi \otimes h) \\ &= \iota(\langle \xi, \pi'_\varphi(a)\xi \rangle)h = \varphi(a)h. \end{aligned}$$

از این رو به ازای هر $a \in A$، $\varphi(a) = V_\varphi^* \pi_\varphi(a) V_\varphi$. □

مثال ۱۶.۲.۳. فرض کنید X یک فضای هاسدورف و فشرده باشد و $C(X)$ ، C^*- جبر جابجایی و یکدار، متشکل از تمام توابع پیوسته ی مختلط مقدار روی X باشد. فرض کنید μ یک اندازه ی بورل مثبت روی X باشد. در این صورت می توان μ را به صورت یک تابعک خطی کراندار به صورت $\mu : C(X) \to \mathbb{C}$ با ضابطه

$$\mu(f) = \int_X f(x) d\mu(x), \quad f \in C(X), \tag{۱.۳}$$

در نظر گرفت. حال فضای هیلبرت $H_\mu = L^۲(X, \mu)$ و نمایش طبیعی $\pi_\mu : C(X) \to B(L^۲(X, \mu))$ با ضابطه

$$\pi_\mu(f) = M_f,$$

را در نظر می گیریم که در آن M_f، عملگر ضرب در f است و از این رو $M_f \in B(L^۲(X, \mu))$. فرض کنید $V_\mu : \mathbb{C} \to L^۲(X, \mu)$ عملگر خطی باشد که هر عدد مختلط α را به تابع ثابت روی X با مقدار α می نگارد. در این صورت (π_μ, H_μ, V_μ) را می توان نمایش استاین اسپرینگ از μ دانست.

در ادامه می خواهیم قضیه های ۲.۱ و ۲.۴ از [؟] را در حالت C^*-جبرهای موضعی اثبات کنیم.

قضیه ۱۷.۲.۳. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی یکدار و $\varphi : A \to B(H)$ یک نگاشت به طور کامل مثبت و پیوسته باشد. فرض کنید E یک A- مدول هیلبرت و $\Phi : E \to B(H, K)$ یک φ- مورفیسم باشد. در این صورت سه تایی های $(\pi_\varphi, V_\varphi, H_\varphi)$ و $(\pi_\Phi, W_\Phi, K_\Phi)$ وجود دارند به طوری که

۱. H_φ و K_Φ فضاهای هیلبرت هستند؛

۲. $\pi_\varphi : A \to B(H_\varphi)$ یک نمایش یکدار از A است؛

۳. $\pi_\Phi : E \to B(H_\varphi, K_\Phi)$ یک π_φ-مورفیسم است؛

۴. $V_\varphi : H \to H_\varphi$ و $W_\Phi : K \to K_\Phi$ عملگرهای خطی و کرانداری هستند به طوری که به ازای هر $a \in A$، $\varphi(a) = V_\varphi^* \pi_\varphi(a) V_\varphi$ و به ازای هر $z \in E$، $\Phi(z) = W_\Phi^* \pi_\Phi(z) V_\varphi$.

برهان. فرض کنید $\pi'_\varphi : A \to L_{B(H)}(X)$ ساختار GNS پشکی نظیر φ باشد. بنا به پیوستگی π'_φ، $M > 0$ و $p \in S(A)$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $a \in A$، $\|\pi'_\varphi(a)\| \leq Mp(a)$. فرض کنید $(\pi_\varphi, V_\varphi, H_\varphi)$ سه تایی استاین اسپرینگ برای φ باشد که از قضیه ؟؟ به دست می آید. از آن جایی که $\pi_\varphi = \rho_\varphi \circ \pi'_\varphi$، می توان $(\pi_\varphi)_p$ را به عنوان یک نمایش از A_p نظیر π_φ در نظر گرفت. بنا به ملاحظه ؟؟ نمایش استاین اسپرینگ π_φ، یک نمایش مانند $\pi_\Phi : E \to B(H_\varphi, K_\Phi)$ از E القا می کند که در آن K_Φ فضای هیلبرت متناظر با $E_p \otimes H_\varphi$ است. به علاوه لم ؟؟، وجود یک ایزومتری مانند$v : E \otimes_{\pi'_\varphi} X \to B(H, K)$ را ایجاب می کند که به ازای هر $x \in E$، $v(x \otimes \xi) = \Phi(x)$. حال نگاشت خطی $W_\circ : (E_p \otimes X) \otimes H \to K$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$W_\circ((\sigma_p^E(z) \otimes x) \otimes h) = v(z \otimes x)h,$$

که در آن $z \in E$ ، $x \in X$ و $h \in H$. فرض کنید $z \in E$ و $\sigma_p^E(z) = 0$. از آن جایی که $\|v(z \otimes x)\|^2 = \|z \otimes x\|^2 = \langle z \otimes x, z \otimes x \rangle = \langle x, \pi'_\varphi(\langle z, z \rangle) \rangle$، داریم $v(z \otimes x) = 0$. بنابراین $W_\circ$ خوش تعریف است. به علاوه

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^n (\sigma_p^E(z_i) \otimes x_i) \otimes h_i\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \langle h_i, \langle \sigma_p^E(z_i) \otimes x_i, \sigma_p^E(z_j) \otimes x_j \rangle h_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle h_i, \langle x_i, \pi'_\varphi(\langle z_i, z_j \rangle) x_j \rangle h_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle h_i, \langle z_i \otimes x_i, z_j \otimes x_j \rangle h_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle h_i, \langle v(z_i \otimes x_i), v(z_j \otimes x_j) \rangle h_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle v(z_i \otimes x_i) h_i, v(z_j \otimes x_j) h_j \rangle \\
&= \|\sum_{i=1}^n v(z_i \otimes x_i) h_i\|^2
\end{aligned}$$

که نشان می دهد $W_\circ$ یک ایزومتری است. از آن جابی که H_φ فضای هیلبرت نظیر $X \otimes H$ است، می توان $W_\circ$ را به یک عملگر خطی و کراندار مانند $W : K_\Phi \to K$ توسیع داد. حال قرار می دهیم

$W_\Phi := W^*$ در این صورت به ازای هر $z \in E$ و $h \in H$ داریم

$$\begin{aligned} W_\Phi^* \pi_\Phi(z) V_\varphi(h) &= W\pi_\Phi(z)(\xi \otimes h) \\ &= W(\pi_\Phi)_p(\sigma_p^E(z))(\xi \otimes h) \\ &= W(\sigma_p^E(z) \otimes (\xi \otimes h)) \\ &= W((\sigma_p^E(z) \otimes \xi) \otimes h) \\ &= v(z \otimes \xi)h = \Phi(z)h, \end{aligned}$$

در نتیجه به ازای هر $z \in E$، $\Phi(z) = W_\Phi^* \pi_\Phi(z) V_\varphi$. □

ملاحظه ۱۸.۲.۳. فرض کنید φ و Φ مشابه قضیه ی **؟؟** باشند و $q \in S(A)$.

(۱) در اثبات قضیه ی **؟؟** اگر $(\pi_\varphi)_q$ نمایشی از A_q نظیر π_φ باشد، آن گاه نمایشی مانند $\tilde{\pi}_\Phi : E \to B(H_\varphi, \tilde{K}_\Phi)$ به دست می آوریم که در آن $\tilde{K}_\Phi$، فضای هیلبرت متناظر با $E_q \otimes H_\varphi$ است. به آسانی می توان بررسی کرد که π_Φ و $\tilde{\pi}_\Phi$، دو نمایش به طور یکانی معادل از E می باشند.

(۲) عملگر خطی و کراندار $W_\Phi : K \to K_\Phi$ یک هم ایزومتری [۸] است ($W_\Phi W_\Phi^* = id_{K_\Phi}$). در واقع برای هر $z \in E$، $x \in X$ و $h \in H$ داریم

$$\begin{aligned} \langle W_\Phi^*(\sigma_p^E(z) \otimes x \otimes h), W_\Phi^*(\sigma_p^E(z) \otimes x \otimes h)\rangle &= \langle v(z \otimes x)h, v(z \otimes x)h\rangle \\ &= \langle v(z \otimes x)^* v(z \otimes x)h, h\rangle \\ &= \langle \langle v(z \otimes x), v(z \otimes x)\rangle h, h\rangle \\ &= \langle \langle z \otimes x, z \otimes x\rangle h, h\rangle \\ &= \langle h, \langle x, \pi_\varphi'(\langle z, z\rangle)x\rangle h\rangle \\ &= \langle x \otimes h, \pi_\varphi'(\langle z, z\rangle)x \otimes h\rangle \\ &= \langle x \otimes h, (\rho_\varphi \circ \pi_\varphi')(\langle z, z\rangle)(x \otimes h)\rangle \\ &= \langle x \otimes h, \pi_\varphi(\langle z, z\rangle)(x \otimes h)\rangle \\ &= \langle x \otimes h, (\pi_\varphi)_p(\langle \sigma_p^E(z), \sigma_p^E(z)\rangle)(x \otimes h)\rangle \\ &= \langle \sigma_p^E(z) \otimes x \otimes h, \sigma_p^E(z) \otimes x \otimes h\rangle. \end{aligned}$$

(۳) اگر E کامل باشد آن گاه $\pi_\Phi : E \to B(H_\varphi, K_\Phi)$ یک نمایش ناتباهیده از E است. برای این منظور، فرض کنید $z \in E$ و $h_\varphi \in H_\varphi$ در این صورت $\pi_\Phi(z)(h_\varphi) = \sigma_p^E(z) \otimes h_\varphi$. از آن جابی که K_Φ یک فضای هیلبرت نظیر $E_p \otimes H_\varphi$ است، $[\pi_\Phi(E)(H_\varphi)] = K_\Phi$. به علاوه، برای هر $w \in E$، $x \in X$ و $h \in H$ داریم

$$\pi_\Phi(z)^*(\sigma_p^E(w) \otimes x \otimes h) = \pi_\varphi(\langle z, z\rangle)(x \otimes h) = \pi_p'(\langle z, z\rangle)(x) \otimes h.$$

از ان جابی که E کامل است، $[\pi_\varphi'(A)(X)] = X$. فضای هیلبرت H_φ نظیر $X \otimes H$ است، لذا می توان نتیجه گرفت $\pi_\Phi(E)^*(K_\Phi) = H_\varphi$.

---

[۸] coisometry

تعریف ۱۹.۲.۳. فرض کنید φ و Φ مشابه قضیه ی ؟؟ باشند. زوج $((\pi_\varphi, V_\varphi, H_\varphi), (\pi_\Phi, W_\Phi, K_\Phi))$ را نمایش استاین اسپرینگ از (φ, Φ) گوییم، اگر شرایط (۳)-(۱) از قضیه ی ؟؟ برقرار باشد. چنین نمایشی را مینیمال [۹] گوییم اگر

۱. $[\pi_\varphi(A)V_\varphi H] = H_\varphi$،

۲. $[\pi_\Phi(E)V_\varphi H] = K_\Phi$.

ملاحظه ۲۰.۲.۳. زوج $((\pi_\varphi, V_\varphi, H_\varphi), (\pi_\Phi, W_\Phi, K_\Phi))$ از قضیه ی ؟؟، یک نمایش مینیمال برای (φ, Φ) است زیرا

$$\begin{aligned}[\pi_\varphi(A)V_\varphi H] &= [(\rho_\varphi \circ \pi_\varphi')(A)(\xi \otimes H)] \\ &= [(\pi_\varphi'(A)(\xi)) \otimes H] \\ &= [\chi_\varphi \otimes H] = H_\varphi\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}[\pi_\Phi(E)V_\varphi H] = [\pi_\Phi(E)\pi_\varphi(A)V_\varphi H] &= [(\pi_\Phi)_p(E_p)H_\varphi] \\ &= [E_p \otimes H_\varphi] = K_\Phi.\end{aligned}$$

نتیجه زیر نشان می دهد که نمایش استاین اسپرینگ مینیمال در حد معادل بودن یکانی، یکتا است.

گزاره ۲۱.۲.۳. فرض کنید φ و Φ مشابه قضیه ی ؟؟ و $((\pi_A, V', H'), (\pi_E, W', K'))$ یک نمایش مینیمال برای (φ, Φ) باشد. در این صورت دو عملگر یکانی $U_1 : H_\varphi \to H'$ و $U_2 : K_\Phi \to K'$ وجود دارند به طوری که

۱. به ازای هر $a \in A$، $V' = U_1 V_\varphi$، $U_1\pi_\varphi(a) = \pi_A(a)U_1$ و

۲. به ازای هر $z \in E$، $W' = U_2 W_\Phi$، $U_2\pi_\Phi(z) = \pi_E(z)U_1$.

برهان. وجود U_1 و گزاره ی (۱) از قسمت دوم قضیه ؟؟ نتیجه می شود. مشابه اثبات [؟، قضیه ۲.۴]، نگاشت خطی $U_2 : \mathrm{span}(\pi_\Phi(E)V_\varphi H) \to \mathrm{span}(\pi_E(E)V'H)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$U_2(\sum_{i=1}^{n} \pi_\Phi(z_i)V_\varphi h_i) = \sum_{i=1}^{n} \pi_E(z_i)V' h_i,$$

که در آن $z_i \in E$، $h_i \in H$ و $n \geq 1$ است. حال چون U_2 یک ایزومتری خوش تعریف است می توان آن را به عملگر یکانی U_2 از K_Φ به روی K' که در شرط (۲) صدق می کند توسیع داد. □

---

[۹] minimal

۳.۳ مشتق رادون-نیکودیم

قضیه ی رادون-نیکودیم [۱۰] برای نگاشت های به طور کامل مثبت و عملگر مقدار روی C^*- مدولهای هیلبرت، توسط جویتا در [؟، ؟] بررسی شده است. هدف از این بخش، تعمیم تعاریف و نتایج بدست آمده برای مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی است.

فرض کنید A یک C^*- جبر و H یک فضای هیلبرت باشد. مجموعه ی همه ی نگاشت های به طور کامل مثبت از A به $B(H)$ را با نماد $CP(A,H)$ نشان می دهیم. می توان یک رابطه ی ترتیب جزئی روی $CP(A,H)$ تعریف کرد. برای این منظور، فرض کنید $\varphi,\psi\in CP(A,H)$. در این صورت گوییم $\varphi\leq\psi$ اگر $\psi-\varphi$ به طور کامل مثبت باشد. بنا به قضیه ی استاین اسپرینگ برای C^*- جبرها، برای هر $\varphi\in CP(A,H)$، سه تابی $(\pi_\varphi,V_\varphi,H_\varphi)$ موسوم به سه تابی استاین اسپرینگ وجود دارد به طوری که $\varphi=V_\varphi^*\pi_\varphi V_\varphi$. لم زیر رابطه ی ترتیب جزئی در $CP(A,H)$ را بر حسب نمایش استاین اسپرینگ π_φ از A بیان می کند.

لم ۱.۳.۳. فرض کنید $\varphi_۱,\varphi_۲\in CP(A,H)$، $\varphi_۱\leq\varphi_۲$ و $(\pi_{\varphi_i},V_{\varphi_i},H_{\varphi_i})$ سه تابی استاین اسپرینگ نظیر φ_i باشد. در این صورت یک انقباض مانند $T\in B(H_{\varphi_۲},H_{\varphi_۱})$ وجود دارد به طوری که

- $TV_{\varphi_۲}=V_{\varphi_۱}$،
- به ازای هر $x\in A$، $T\pi_{\varphi_۲}(x)=\pi_{\varphi_۱}(x)T$.

برهان. [؟، لم ۱.۴.۱] □

قضیه ی بعدی را می توان قضیه ی رادون-نیکودیم برای نگاشت های به طور کامل مثبت و عملگر مقدار روی C^*- جبرها دانست. این قضیه، رابطه ی ترتیب جزئی در مجموعه ی نگاشت های به طور کامل مثبت را به خوبی توصیف می کند. قبل از بیان قضیه به بیان چند نماد می پردازیم. فرض کنید $\varphi\in CP(A,H)$. در این صورت

$$[\circ,\varphi]=\{\psi\in CP(A,H):\ \psi\leq\varphi\} \qquad (۲.۳)$$

یک مجموعه ی محدب در $CP(A,H)$ است. فرض کنید $(\pi_\varphi,V_\varphi,H_\varphi)$ سه تابی استاین اسپرینگ نظیر φ باشد. در این صورت برای هر $x\in A$، نگاشت خطی $\varphi(x)=V_\varphi^*\pi_\varphi(x)V_\varphi$ و $[\pi_\varphi(A)V_\varphi H]=H_\varphi$. برای هر عملگر $T\in\pi_\varphi(A)'$ نگاشت خطی $\varphi_T:A\to B(H)$ را به صورت

$$\varphi_T(x)=V_\varphi^*T\pi_\varphi(x)V_\varphi$$

تعریف می کنیم. تناظر $T\to\varphi_T$ به وضوح خطی است. هم چنین این تناظر، یک تناظر یک به یک است. برای این منظور، فرض کنید $\varphi_T=\circ$. در این صورت برای هر $x,y\in A$ و $\xi,\eta\in H$،

$$\langle T\pi_\varphi(x)V_\varphi\xi,\pi_\varphi(y)V_\varphi\eta\rangle=\langle V_\varphi^*T\pi_\varphi(y^*x)V_\varphi\xi,\eta\rangle=\langle\varphi_T(y^*x)\xi,\eta\rangle=\circ \qquad (۳.۳)$$

و از آن جایی که $[\pi_\varphi(A)V_\varphi H]=H_\varphi$، می توان نتیجه گرفت $T=\circ$.

[۱۰] Radon-Nikodym theorem

قضیه ۲.۳.۳. تناظر $T \to \varphi_T$ یک یکریختی از مجموعه ی محدب و مرتب جزئی

$$\{T \in \pi_\varphi(A)' : \circ \le T \le I\}$$

به روی $[\circ, \varphi]$است.

برهان. [؟]، قضیه ی ۱.۴.۲ $\square$

فرض کنید E یک مدول هیلبرت کامل روی C^*- جبر موضعی A باشد و H و K دو فضای هیلبرت باشند. مجموعه ی همه ی نگاشت های به طور کامل مثبت از E به $B(H,K)$ را با نماد $CP(E, B(H,K))$ نشان می دهیم. یک رابطه ی هم ارزی روی $CP(E, B(H,K))$ به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۳.۳.۳. فرض کنید Φ و Ψ عضوهایی از $CP(E, B(H,K))$ باشند. گوییم Φ با Ψ معادل [۱۱] است و می نویسیم $\Psi \sim \Phi$ اگر به ازای هر $x \in E$، $\Phi(x)^*\Phi(x) = \Psi(x)^*\Psi(x)$.

تعریف ۴.۳.۳. فرض کنید Φ و Ψ عضوهایی از $CP(E, B(H,K))$ باشند. گوییم Ψ مغلوب شده [۱۲] توسط Φ است و می نویسیم $\Psi \preceq \Phi$ اگر به ازای هر $x \in E$، $\Psi(x)^*\Psi(x) \le \Phi(x)^*\Phi(x)$.

ملاحظه ۵.۳.۳. رابطه ی " $\preceq$ " بازتابی و تعدی است و از این رو یک رابطه ی پیش ترتیب روی $CP(E, B(H,K))$ است. به علاوه، اگر $\Phi, \Psi \in CP(E, B(H,K))$ آن گاه $\Phi \preceq \Psi$ و $\Psi \preceq \Phi$ اگر وفقط اگر $\Psi \sim \Phi$.

در [؟]، آرامباشی [۱۳] تعریف جابجاگر را از حالت C^*- جبرها به حالت C^*- مدولهای هیلبرت تعمیم داد. ما تعریفی مشابه را برای حالت مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی بکار می گیریم.

تعریف ۶.۳.۳. فرض کنید A یک C^*- جبرموضعی و $\Phi : E \to B(H,K)$ یک نمایش از A- مدول هیلبرت E باشد. جابجاگر $\Phi(E)$ را با نماد $\Phi(E)'$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\{T \oplus S \in B(H \oplus K) : T \in B(H), S \in B(K), \Phi(z)T = S\Phi(z), \Phi(z)^*S = T\Phi(z)^*, z \in E\}$$

در این تعریف داریم $(T \oplus S)(h \oplus k) := Th \oplus Sk$.

اگر $T \oplus S \in \Phi(E)'$، آن گاه $T \in \varphi(A)'$ [؟، لم ۴.۴]. اگر Φ ناتباهیده باشد آن گاه S توسط T تعیین می شود [؟، تذکر ۴.۶].

لم ۷.۳.۳. فرض کنید $\Phi \in CP(E, B(H,K))$ و $((\pi_\varphi, V_\varphi, H_\varphi), (\pi_\Phi, W_\Phi, K_\Phi))$ نمایش استاین اسپرینگ نظیر (φ, Φ) باشد. اگر $T \oplus S$ یک عملگر خطی و مثبت از $\pi_\Phi(E)'$ باشد آن گاه نگاشت $\Phi_{T\oplus S} : E \to B(H,K)$ که به صورت $\Phi_{T\oplus S}(x) = W_\Phi^* \sqrt{T}\pi_\Phi(x)\sqrt{S}V_\varphi$ تعریف می شود، به طور کامل مثبت است.

---

[۱۱] equivalent

[۱۲] dominated

[۱۳] Arambašić

برهان. مشابه اثبات [؟، لم ۲.۱۰]، به ازای هر $x, y \in E$، $\Phi_{T\oplus S}(x)^*\Phi_{T\oplus S}(y) = V_\varphi^* T^۲ \pi_\varphi(\langle x, y\rangle)V_\varphi$.
با استفاده از [؟، لم ۳.۴.۱] و این حقیقت که $T^۲ \in \pi_\varphi(A)'$، می توان نتیجه گرفت
$$\Phi_{T\oplus S}(x)^*\Phi_{T\oplus S}(y) = \varphi_{T^۲}(\langle x, y\rangle).$$
در واقع $\varphi_{T^۲}$، نگاشت به طور کامل مثبت نظیر $\Phi_{T\oplus S}$ است. □

قضیه ۸.۳.۳. فرض کنید $\Psi, \Phi \in CP(E, B(H, K))$. اگر $\Psi \preceq \Phi$، آن گاه عملگر خطی مثبت و یکتای $\Delta_\Phi(\Psi)$ در $\pi_\Phi(E)'$ وجود دارد به طوری که $\Phi_{\sqrt{\Delta_\Phi(\Psi)}} \sim \Psi$.

برهان. فرض کنید $((\pi_\varphi, V_\varphi, H_\varphi), (\pi_\Phi, W_\Phi, K_\Phi))$ نمایش استاین اسپرینگ نظیر (φ, Φ) باشد. بنا به پیوستگی φ و ψ، $p, q \in S(A)$ و $M, N > ۰$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $a \in A$، $\|\varphi(a)\| \le Mp(a)$ و $\|\psi(a)\| \le Nq(a)$. فرض کنید $r \in S(A)$ و $r \ge p, q$. نگاشت های خطی $\varphi_r : A_r \to B(H)$، $\varphi_r(\pi_r(a)) = \varphi(a)$ و $\psi_r : A_r \to B(H)$، $\psi_r(\pi_r(a)) = \psi(a)$ نگاشت های به طور کامل مثبت هستند زیرا به ازای هر $a_i \in A$، $x_i \in H$ و $۱ \le i \le n$،
$$\sum_{i,j=۱}^{n} \langle \varphi_r(\pi_r(a_i)^*\pi_r(a_j))x_j, x_i\rangle = \sum_{i,j=۱}^{n} \langle \varphi(a_i^* a_j)x_j, x_i\rangle \ge ۰.$$
نگاشت های $\Phi_r : \sigma_r^E(x) \mapsto \Phi(x)$ و $\Psi_r : \sigma_r^E(x) \mapsto \Psi(x)$ در $CP(E_r, B(H, K))$ هستند و $\Psi_r \preceq \Phi_r$. فرض کنید $((\pi_{\varphi_r}, V_{\varphi_r}, H_{\varphi_r}), (\pi_{\Phi_r}, W_{\Phi_r}, K_{\Phi_r}))$ نمایش استاین اسپرینگ نظیر (φ_r, Φ_r) باشد. بنا به اثبات [؟، قضیه ۲.۱۲]، عملگرهای خطی مثبت و یکتای $\Delta_{۱\Phi_r}(\Psi_r) \in B(H_{\varphi_r})$ و $\Delta_{۲\Phi_r}(\Psi_r) \in B(K_{\Phi_r})$ وجود دارند به طوری که $\Phi_{r\sqrt{\Delta_{\Phi_r}(\Psi_r)}} \sim \Psi_r$ که در آن
$$\Delta_{\Phi_r}(\Psi_r) = \Delta_{۱\Phi_r}(\Psi_r) \oplus \Delta_{۲\Phi_r}(\Psi_r) \in \pi_{\Phi_r}(E)'$$
مشتق رادون-نیکودیم Ψ_r نسبت به Φ_r است. زوج های $((\pi_{\varphi_r}\circ\pi_r, V_{\varphi_r}, H_{\varphi_r}), (\pi_{\Phi_r}\circ\sigma_r^E, W_{\Phi_r}, K_{\Phi_r}))$ و $((\pi_\varphi, V_\varphi, H_\varphi), (\pi_\Phi, W_\Phi, K_\Phi))$ دو نمایش استاین اسپرینگ مینیمال از (φ, Φ) هستند. از این رو بنا به گزاره ی ؟؟، دو عملگر یکانی $U_۱ : H_\varphi \to H_{\varphi_r}$ و $U_۲ : K_\Phi \to K_{\Phi_r}$ وجود دارند به طوری که $V_{\varphi_r} = U_۱ V_\varphi$، $W_{\Phi_r} = U_۲ W_\Phi$، به ازای هر $a \in A$، $U_۱\pi_\varphi(a) = (\pi_{\varphi_r} \circ \pi_r)(a)U_۱$ و به ازای هر $z \in E$، $U_۲\pi_\Phi(z) = (\pi_{\Phi_r} \circ \sigma_r)(z)U_۱$. فرض کنید $\Delta_{۱\Phi}(\Psi) = U_۱^*\Delta_{۱\Phi_r}(\Psi_r)U_۱$ و $\Delta_{۲\Phi}(\Psi) = U_۲^*\Delta_{۲\Phi_r}(\Psi_r)U_۲$. به آسانی می توان نتیجه گرفت $\Delta_\Phi(\Psi) = \Delta_{۱\Phi}(\Psi) \oplus \Delta_{۲\Phi}(\Psi)$ یک عملگر مثبت در $\pi_\Phi(E)'$ است. برای هر $a \in A$ داریم

$$\begin{aligned}
\psi(a) = \psi_r(\pi_r(a)) &= V_{\varphi_r}^*\Delta_{۱\Phi_r}(\Psi_r)\pi_{\varphi_r}(\pi_r(a))V_{\varphi_r} \\
&= V_\varphi^* U_۱^* \Delta_{۱\Phi_r}(\Psi_r)U_۱\pi_\varphi(a)U_۱^*U_۱V_\varphi \\
&= V_\varphi^*\Delta_{۱\Phi}(\Psi)\pi_\varphi(a)V_\varphi = \varphi_{\Delta_{۱\Phi}(\Psi)}(a).
\end{aligned}$$

بنا به یکتایی مشتق رادون-نیکودیم ([؟، قضیه ۳.۴.۵])، $\Delta_{۱\Phi}(\Psi)$ مشتق رادون-نیکودیم ψ نسبت به φ است. در نتیجه به ازای هر $x \in E$،
$$\Phi^*_{\sqrt{\Delta_\Phi(\Psi)}}(x)\,\Phi_{\sqrt{\Delta_\Phi(\Psi)}}(x) = \varphi_{\Delta_{۱\Phi}(\Psi)}(\langle x, x\rangle) = \psi(\langle x, x\rangle) = \Psi(x)^*\Psi(x)$$

که ایجاب می کند $\Phi_{\sqrt{\Delta_\Phi(\Psi)}} \sim \Psi$. فرض کنید $T \oplus S$ نگاشت خطی مثبت دیگری در $\pi_\Phi(E)'$ باشد به طوری که $\Phi_{\sqrt{T\oplus S}} \sim \Psi$. در این صورت $\Phi_{\sqrt{T\oplus S}} \sim \Phi_{\sqrt{\Delta_\Phi(\Psi)}}$ و از این رو $\varphi_{\Delta_{1\Phi}(\Psi)} = \varphi_T$. بنا به [؟، قضیه ۳.۴.۵]، نتیجه می گیریم $T = \Delta_{1\Phi}(\Psi)$. از آن جابی که π_Φ ناتباهیده است (ملاحظه ؟؟(۳))، $\Delta_{2\Phi}(\Psi)$ و S به ترتیب توسط $\Delta_{1\Phi}(\Psi)$ و T، به طور یکتا تعیین می شوند. بنابراین $S = \Delta_{2\Phi}(\Psi)$ و درنتیجه $\Delta_\Phi(\Psi) = T \oplus S$. □

فرض کنید $\Phi \in CP(E, B(H,K))$، $\hat{\Phi} = \{\Psi \in CP(E, B(H,K)) : \Phi \sim \Psi\}$ و $\Phi, \Psi \in CP(E, B(H,K))$. اگر $\Psi \preceq \Phi$ آن گاه می نویسیم $\hat{\Psi} \leq \hat{\Phi}$. تعریف می کنیم

$$[\circ, \hat{\Phi}] := \{\hat{\Psi} : \Psi \in CP(E, B(H,K)), \Psi \preceq \Phi\}$$

و

$$[\circ, I]_\Phi := \{T \oplus S \in \pi_\Phi(E)' : \circ \leq T \oplus S \leq I\}.$$

قضیه ی زیر را می توان قضیه ی رادون-نیکودیم برای نگاشت های به طور کامل مثبت عملگر مقدار که روی مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی تعریف می شوند، در نظر گرفت.

قضیه ۹.۳.۳. فرض کنید $\Phi \in CP(E, B(H,K))$. نگاشت $\hat{\Psi} \to \Delta_\Phi(\Psi)$ از $[\circ, \hat{\Phi}]$ به $[\circ, I]_\Phi$ یک یکریختی حافظ ترتیب است.

برهان. بنا به قضیه ی ؟؟، این نگاشت خوش تعریف است. فرض کنید $\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2 \in [\circ, \hat{\Phi}]$ و $\Delta_\Phi(\Psi_1) = \Delta_\Phi(\Psi_2)$. در این صورت $\Psi_1 \sim \Phi_{\Delta_\Phi(\Psi_1)} = \Phi_{\Delta_\Phi(\Psi_2)} \sim \Psi_2$ و در نتیجه این نگاشت یک به یک است. فرض کنید $T \oplus S \in [\circ, I]_\Phi$. در این صورت $\Phi_{\sqrt{T\oplus S}} \in CP(E, B(H,K))$. از آن جابی که $T \oplus S \in \pi_\Phi(E)'$ لذا $T \in \pi_\varphi(A)'$ و در نتیجه بنا به [؟، قضیه ۳.۴.۵]، به ازای هر $x \in E$، $\Phi_{\sqrt{T\oplus S}}(x)^*\Phi_{\sqrt{T\oplus S}}(x) = \varphi_T(\langle x,x\rangle) \leq \varphi(\langle x,x\rangle) = \Phi(x)^*\Phi(x)$ و از این رو $\Phi_{\sqrt{T\oplus S}} \preceq \Phi$. از آن جابی که $\Delta(\varphi_T) = T$ لذا $\Delta_\Phi(\Phi_{\sqrt{T\oplus S}}) = T \oplus S$ و در نتیجه این نگاشت پوشا است. اگر $\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2 \in [\circ, \hat{\Phi}]$ و $\hat{\Psi}_2 \leq \hat{\Psi}_1$ آن گاه $\Psi_2 \preceq \Psi_1$ و لذا $\psi_2 \leq \psi_1$. بنا به [؟، قضیه ۳.۴.۵]، $\Delta_{1\Phi}(\Psi_2) \leq \Delta_{1\Phi}(\Psi_1)$. از آن جابی که π_Φ ناتباهیده است (ملاحظه ؟؟(۳))، $\Delta_{2\Phi}(\Psi_1)$ و $\Delta_{2\Phi}(\Psi_2)$ به ترتیب توسط $\Delta_{1\Phi}(\Psi_1)$ و $\Delta_{1\Phi}(\Psi_2)$ به طور یکتا تعیین می شوند. در نتیجه $\Delta_{2\Phi}(\Psi_1) \leq \Delta_{2\Phi}(\Psi_2)$ و از این رو $\Delta_\Phi(\Psi_1) \leq \Delta_\Phi(\Psi_2)$. برعکس، فرض کنید $T_1 \oplus S_1, T_2 \oplus S_2 \in [\circ, I]_\Phi$ و $T_1 \oplus S_1 \leq T_2 \oplus S_2$ در این صورت $T_1, T_2 \in [\circ, I]_\varphi$ و $T_1 \leq T_2$. بنا به [؟، قضیه ۳.۴.۵]، $\varphi_{T_1} \leq \varphi_{T_2}$ و در نتیجه $\Phi_{\sqrt{T_1\oplus S_1}} \preceq \Phi_{\sqrt{T_2\oplus S_2}}$. □

فصل ۴

مشتق روی جبر عملگرها

۱.۴ مقدمه

هدف این فصل، بررسی مشتق روی جبر عملگرها در مدولهای هیلبرت و دو-مدولهای هیلبرت روی C^*- جبر موضعی است. در بخش دوم، به بیان نتایج و قضایایی می پردازیم که برای مشتق روی C^*- جبرهای موضعی بدست آمده است. در بخش سوم نشان می دهیم که درونی بودن مشتق روی $K_A(E)$، درونی بودن مشتق روی $L_A(E)$ را ایجاب می کند و نتیجه می گیریم که شرط σ-یکدار بودن و جابجایی A در قضیه [؟، قضیه ۳.۳] یک شرط اضافی است. بخش پایانی این فصل به بررسی مشتق روی جبر عملگرها روی دو-مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی اختصاص می یابد و شرایطی را بررسی می کنیم که تحت آن شرایط، هر مشتق روی $K_A(E)$ و $L_A(E)$ صفر است.

۲.۴ مشتق روی C^*- جبرهای موضعی

نتایج بسیار کمی در مورد مشتق روی $*$- جبرهای غیرنرمدار وجود دارد. اما رابطه ی نزدیکی که بین C^*- جبرهای موضعی و C^*- جبرها وجود دارد، ما را قادر می سازد تا نتایجی برای مشتق روی این جبرها بدست آوریم که در حالت کلی برای جبرهای توپولوژیکی برقرار نیست. به عنوان مثال، قضیه ی سینگر-ورمر که یکی از معروف ترین قضیه ها در بحث مشتق است، در حالت کلی برای جبرهای توپولوژیکی برقرار نیست.

قضیه ۱.۲.۴. (سینگر-ورمر) فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی و D یک مشتق پیوسته روی A

باشد. در این صورت تصویر D در رادیکال A قرار می گیرد.

برهان. [؟، قضیه ۱] $\square$

قابل توجه است که مشتق روی یک جبر باناخ جابجایی، لزوماً پیوسته نیست. برای مثال، فرض کنید A یک فضای باناخ دلخواه باشد. اگر ضرب هر دو عضو از A را برابر با صفر تعریف کنیم، آن گاه می توان A را یک جبر باناخ جابجایی فرض کرد. به وضوح هر عملگر خطی روی A، یک مشتق روی A محسوب می شود. با توجه به این که هر عملگر خطی روی یک فضای باناخ، لزوماً پیوسته نیست، می توان نتیجه گرفت که هر مشتق روی A لزوماً پیوسته نیست. در سال ۱۹۶۸، جانسون و سینکلر [؟] ثابت کردند که هر مشتق روی جبر باناخ نیم ساده، پیوسته است. لذا می توان از قضیه ی سینگر-ورمر، نتیجه ی زیر را بدست آورد.

نتیجه ۲.۲.۴. هر مشتق روی جبر باناخ نیم ساده [1] جابجایی، صفر است.

در سال ۱۹۸۸، توماس [؟] نشان داد که شرط پیوستگی مشتق در قضیه ی سینگر-ورمر اضافی است و در نتیجه تصویر هر مشتق روی جبر باناخ جابجایی در رادیکال [2] آن جبر قرار می گیرد.
یکی از نتایج قابل ملاحظه ای که می توان از قضیه سینگر-ورمر بدست آورد، وجود برخی جبرهای توپولوژیکی نیم ساده و جابجایی است که با توپولوژی معمولی خود نمی توانند باناخ باشند. دلیل این امر آن است که این گونه جبرها مشتق غیر صفر اختیار می کنند. مثال زیر بیانگر این نتیجه است.

مثال ۳.۲.۴. فرض کنید $C^\infty[\circ,\text{۱}]$، جبر همه ی توابع بی نهایت مشتق پذیر روی بازه ی واحد $[\circ,\text{۱}]$ باشد. عملگر

$$D : C^\infty[\circ,\text{۱}] \to C^\infty[\circ,\text{۱}], \quad D(f) = f', \quad f \in C^\infty[\circ,\text{۱}], \tag{۱.۴}$$

یک مشتق پیوسته غیرصفر روی $C^\infty[\circ,\text{۱}]$ می باشد. لذا بنا به قضیه ی سینگر-ورمر، می توان نتیجه گرفت که هیچ نرمی روی این جبر یافت نمی شود که تحت آن نرم، $C^\infty[\circ,\text{۱}]$ یک جبر باناخ باشد.

نتایج بسیاری در مورد مشتق روی C^*- جبرها وجود دارد. یکی از مهم ترین این نتایج، آن است که هر مشتق روی یک C^*- جبر، پیوسته [؟، قضیه ۲.۳.۱] و هر مشتق روی یک C^*- جبر جابجایی، صفر است [؟، لم ۴.۱.۲]. هم چنین هر مشتق روی یک C^*- جبر ساده ی یکدار و W^*- جبر، درونی است [؟، قضیه ۴.۱.۱] و [؟، قضیه ۲.۵.۳]. در سال ۱۹۹۲، بکر به بررسی این نتایج در C^*- جبرهای موضعی پرداخت و نتایج زیر را بدست آورد [؟، گزاره ۲، نتیجه ۳ و گزاره ۱۲].

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی به همراه خانواده C^*- شبه نرم های $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ باشد و $D : A \to A$ یک مشتق روی A باشد. در این صورت گزاره های زیر برقرارند.

۱. D، به طور قوی پیوسته [3] است یعنی به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، عدد $C_\lambda > \circ$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $p_\lambda(D(a)) \leq C_\lambda p_\lambda(a)$.

[1] semi-simple
[2] radical
[3] strongly continuous

۲. اگر A جابجایی باشد، آن گاه هر مشتق روی A صفر است.

۳. اگر به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، مشتق $D_\lambda : A_\lambda \to A_\lambda$، $D_\lambda(a_\lambda) = \pi_\lambda(D(a))$ درونی باشد آن گاه D تقریباً درونی [۴] است. یعنی توری مانند $\{h_i\}_{i\in I}$ در A وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $D(a) = lim_i[h_i, a]$.

در سال ۱۹۹۵، فیلیپس به کمک تکنیک زیبایی نتایج قبلی بکر را بهبود داد و توانست نتایج قوی تری بدست آورد. او ابتدا نشان داد هر مشتق روی A، تقریباً درونی است [؟، قضیه۳]. سپس ثابت کرد که اگر A یک $C^* - \sigma$- جبر جدایی پذیر باشد به طوری که هر مشتق روی هر C^*- جبر خارج قسمتی آن درونی باشد، آن گاه هر مشتق روی A درونی است [؟، قضیه۶]. از سوی دیگر، او به کمک یک مثال نشان داد که می توان مشتق هایی روی یک $C^* - \sigma$- جبر جدایی پذیر داشت که درونی نباشند در حالی که همه ی مشتق های القایی آن ها روی C^*- جبرهای خارج قسمتی، درونی باشند [؟، مثال ۷].

۳.۴ مشتق روی جبر عملگرها در مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی

از آن جایی که $L_A(E)$ یک C^*- جبر موضعی است، بنا به [؟، قضیه ۳] هر مشتق روی $L_A(E)$ تقریباً درونی است. در این بخش شرایطی را بررسی می کنیم که تحت آن شرایط، هر مشتق روی $L_A(E)$ درونی باشد. لم زیر که توسیعی از [؟، لم ۱.۷] در حالت C^*- جبرها است، نقش مهمی در اثبات قضیه ؟؟ ایفا می کند.

لم ۱.۳.۴. فرض کنید A یک $C^* - \sigma$- جبر، دارای واحد تقریبی شمارا و E یک A- مدول هیلبرت کامل باشد. در این صورت دنباله ای مانند $\{x_n\}$ در E وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$ و هر $p \in S(A)$، $p(\sum_{k=1}^{n}\langle x_k, x_k\rangle a - a) \to 0$.

برهان. [؟، لم ۵.۲.۱۳]. □

با توجه به اثبات این لم، به ازای هر n، $1 \leq \|\sum_{k=1}^{n}\langle x_k, x_k\rangle\|_\infty$. لذا می توان دنباله ی $\{\sum_{k=1}^{n}\langle x_k, x_k\rangle\}_n$ را دنباله ای در $b(A)$ در نظر گرفت.

لم ۲.۳.۴. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی و E یک A- مدول هیلبرت باشد. اگر $\{a_n\}$ دنباله ای در $b(A)$ باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$ و هر $p \in S(A)$، $p(aa_n - a) \to 0$، آن گاه به ازای هر $x \in E$ و هر $p \in S(A)$، $\bar{p}_E(a_n x - x) \to 0$.

برهان. فرض کنید $x \in E$. در این صورت

$$\begin{aligned}\bar{p}_E(xa_n - x)^2 &= p(\langle xa_n - x, xa_n - x\rangle)\\ &\leq \|a_n\|_\infty\, p(\langle x, x\rangle a_n - \langle x, x\rangle) + p(\langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle a_n).\end{aligned}$$

[۴] approximately inner

از آن جایی که $\{a_n\}$ دنباله ای در $b(A)$ و $p(\langle x,x\rangle a_n - \langle x,x\rangle) \to ۰$، نتیجه حاصل می شود. $\square$

لم ۳.۳.۴. هر مشتق از C^*- جبر موضعی، مرکز [۵] خود را پوچ می کند.

برهان. فرض کنید D یک مشتق روی C^*- جبر موضعی A باشد. برای هر $p \in S(A)$، نگاشت خطی $D_p : A_p \to A_p$ که به صورت $D_p(\pi_p(a)) = \pi_p(D(a))$ تعریف می شود را در نظر می گیریم. فرض کنید $a \in N_p$. بنا به [؟، لم ۱] به ازای $k = ۱, ..., ۴$، عناصر $a_k \in N_p$ وجود دارد به طوری $a = \sum_{k=۱}^{۴} i^k a_k^۲$. از آن جایی که

$$p(D(a)) \leq \sum_{k=۱}^{۴} p(D(a_k)a_k + a_k D(a_k)) = ۰,$$

لذا $D(a) \in N_p$ و در نتیجه D_p خوش تعریف است. به آسانی می توان دید که D_p یک مشتق روی A_p است. فرض کنید $Z(A)$ مرکز A باشد و $a \in Z(A)$. در این صورت برای هر $p \in S(A)$، $\pi_p(a) \in Z(A_p)$ که در آن $Z(A_p)$، مرکز A_p است. حال بنا به این واقعیت که هر مشتق روی یک C^*- جبر، مرکز خود را پوچ می کند ([؟، قضیه ۲]) می توان نتیجه گرفت که به ازای هر $p \in S(A)$، $D_p(\pi_p(a)) = ۰$ و در نتیجه $\pi_p(D(a)) = ۰$. از آن جایی $S(A)$ یک خانواده ی جداکننده از C^*- شبه نرم ها است، می توان نتیجه گرفت $D(a) = ۰$. $\square$

تعریف ۴.۳.۴. مشتق $D : L_A(E) \to L_A(E)$ را به طور ضعیف تقریباً درونی [۶] گوئیم اگر تور $\{T_i\}_{i\in I}$ در $L_A(E)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $S \in L_A(E)$ و $x \in E$، داشته باشیم $D(S)x = \lim_{\mathrm{i}}[T_i, S]x$.

قضیه ۵.۳.۴. اگر A یک $\sigma - C^*$- جبر جابجایی شامل واحد تقریبی شمارا باشد و E یک A- مدول هیلبرت کامل باشد، آن گاه هر مشتق روی $L_A(E)$ به طور ضعیف تقریباً درونی است.

برهان. فرض کنید D یک مشتق روی $L_A(E)$ باشد. بنا به لم **؟؟**، دنباله ای مانند $\{x_n\}$ در E وجود دارد به طوری که به ازای هر $a \in A$ و $p \in S(A)$، $p(\sum_{k=۱}^{n} \langle x_k, x_k\rangle a - a) \to ۰$. به ازای هر عدد مثبت k، نگاشت های $T_k, S_k : E \to E$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$T_k x = \sum_{i=۱}^{k} D(\theta_{x,x_i})x_i, \quad S_k y = -\sum_{i=۱}^{k} D(\theta_{x_i,y})^* x_i.$$

بوضوح، T_k و S_k خطی می باشند. برای هر عملگر $R \in L_A(E)$ و هر $x \in E$،

$$(R\theta_{x,x_i}) = D(R)\theta_{x,x_i} + AD(\theta_{x,x_i})$$

و از این رو

$$D(R\theta_{x,x_i})x_i = \langle x_i, x_i\rangle D(R)x + AD(\theta_{x,x_i})x_i, \quad ۱ \leq i \leq k.$$

لذا

$$(T_k R)x = \sum_{i=۱}^{k} D(\theta_{Rx,x_i})x_i = \sum_{i=۱}^{k} D(R\theta_{x,x_i})x_i = \sum_{i=۱}^{k} \langle x_i, x_i\rangle D(R)x + (RT_k)x.$$

---

[۵] center

[۶] weakly approximately inner

در نتیجه به ازای هر $R \in L_A(E)$ و هر عدد مثبت k، $\sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle D(R) = T_kR - RT_k$. فرض کنید $a \in A$. نگاشت T_a را روی E به صورت $T_a(x) = ax$ در نظر می گیریم. از آن جایی که A جابجایی است ، می توان T_a را یک A- مدول همریختی در نظر گرفت. به آسانی می توان بررسی کرد که T_a عضوی از مرکز $L_A(E)$ است. در نتیجه بنا به لم ؟؟، $D(T_a) = 0$. فرض کنید $R \in L_A(E)$ و $a \in A$. در این صورت $D(aR) = D(T_aR) = D(T_a)R + T_aD(R) = aD(R)$ و این یعنی D یک A- مدول همریختی است. به ازای هر $x, y \in E$ داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle D(\theta_{x,y}) &= \sum_{i=1}^{k} D(\langle x_i, x_i\rangle\theta_{x,y})\\
&= \sum_{i=1}^{k} D(\theta_{x,x_i}\theta_{x_i,y})\\
&= \sum_{i=1}^{k} D(\theta_{x,x_i})\theta_{x_i,y} + \sum_{i=1}^{k}\theta_{x,x_i}D(\theta_{x_i,y})\\
&= \sum_{i=1}^{k}\theta_{D(\theta_{x,x_i})x_i,y} + \sum_{i=1}^{k}\theta_{x,D(\theta_{x_i,y})^*x_i}\\
&= \theta_{T_kx,y} - \theta_{x,S_ky}.
\end{aligned}$$

فرض کنید $x, y, u, v \in E$. در این صورت

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle D(\theta_{u,y}\theta_{x,v}) &= \sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle\langle x, y\rangle D(\theta_{u,v})\\
&= \langle x, y\rangle\sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle D(\theta_{u,v})\\
&= \langle x, y\rangle\theta_{T_ku,v} - \langle x, y\rangle\theta_{u,S_kv}.
\end{aligned}$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle D(\theta_{u,y}\theta_{x,v}) &= \sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle(D(\theta_{u,y})\theta_{x,v} + \theta_{u,y}D(\theta_{x,v}))\\
&= \sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle D(\theta_{u,y})\theta_{x,v}\\
&+ \theta_{u,y}\sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle D(\theta_{x,v})\\
&= (\theta_{T_ku,y} - \theta_{u,S_ky})\theta_{x,v} + \theta_{u,y}(\theta_{T_kx,v} - \theta_{x,S_kv})\\
&= \langle x, y\rangle\theta_{T_ku,v} - \langle x, S_ky\rangle\theta_{u,v}\\
&+ \langle T_kx, y\rangle\theta_{u,v} - \langle x, y\rangle\theta_{u,S_kv}.
\end{aligned}$$

در نتیجه $\langle T_k x, y\rangle\theta_{u,v} = \langle x, S_k y\rangle\theta_{u,v}$. بنابراین

$$\begin{aligned}\langle T_k x, y\rangle\langle v, v\rangle\langle u, u\rangle &= \langle T_k x, y\rangle\langle\theta_{u,v}v, u\rangle\\ &= \langle x, S_k y\rangle\langle\theta_{u,v}v, u\rangle\\ &= \langle x, S_k y\rangle\langle v, v\rangle\langle u, u\rangle.\end{aligned}$$

به خصوص، با قرار دادن $u = x_i$ و $v = x_j$ داریم

$$\langle T_k x, y\rangle\langle x_j, x_j\rangle\langle x_i, x_i\rangle = \langle x, S_k y\rangle\langle x_j, x_j\rangle\langle x_i, x_i\rangle.$$

با توجه به این که به ازای هر $a \in A$، $\sum_{i=1}^{n}\langle x_i, x_i\rangle a \to a$ می توان نتیجه گرفت $\langle T_k x, y\rangle = \langle x, S_k y\rangle$ و از این رو به ازای هر k، $T_k \in L_A(E)$. به ازای هر k، فرض کنید $D_k = \sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle D$ و $a_k = \sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle$. در این صورت برای هر $x \in E$، $p \in S(A)$ و $R \in L_A(E)$ داریم

$$\begin{aligned}\bar{p}_E(D_k(R)x - D(R)x)^2 &= p(\langle D_k(R)x - D(R)x, D_k(R)x - D(R)x\rangle)\\ &\leq p(a_k\langle D(R)x, D(R)x\rangle - \langle D(R)x, D(R)x\rangle)\\ &- p(\langle D(R)x, D(R)x > -a_k\langle D(R)x, D(R)x\rangle).\end{aligned}$$

از آن جایی که به ازای هر $a \in A$ و $p \in S(A)$، $p(a_k a - a) \to 0$ می توان نتیجه گرفت $\bar{p}_E(D_k(R)x - D(R)x) \to 0$. از این رو به ازای هر $x \in E$ و $R \in L_A(E)$ داریم

$$D(R)x = \lim_k [T_k, R]x$$

یعنی D، به طور ضعیف تقریباً درونی است.

□

قضیه ۶.۳.۴. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی جابجایی و یکدار و E یک A- مدول هیلبرت باشد. اگر $b(E)$ یک $b(A)$- مدول کامل باشد آن گاه هر مشتق روی $L_A(E)$ درونی است.

برهان. از آن جایی که A یکدار و $b(E)$ یک $b(E)$- مدول هیلبرت کامل است، بنا به [؟، لم ۲.۴.۳]، عدد مثبت k و عناصر $x_1, ..., x_k$ در $b(E)$ وجود دارند به طوری که $\sum_{i=1}^{k}\langle x_i, x_i\rangle = 1$. نگاشت های $T, S : E \to E$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Tx = \sum_{i=1}^{k} D(\theta_{x,x_i})x_i, \quad Sy = -\sum_{i=1}^{k} D(\theta_{x_i,y})^* x_i.$$

مشابه اثبات قضیه قبل، نتیجه می گیریم که $T^* = S$ و به ازای هر $R \in L_A(E)$، $D(R) = RT - TR$.

□

قضیه زیر بیان می کند که درونی بودن مشتق روی $K_A(E)$، درونی بودن آن را روی $L_A(E)$ ایجاب می کند. بنا به این قضیه، فرض σ- یکدار بودن و جابجایی A در [؟، قضیه ۳.۳] را می توان حذف کرد.

قضیه ۷.۳.۴. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی و E یک A- مدول هیلبرت راست کامل باشد. اگر هر مشتق روی $K_A(E)$ درونی باشد، آن گاه هر مشتق روی $L_A(E)$ درونی است.

برهان. فرض کنید D یک مشتق روی $L_A(E)$ باشد. ابتدا نشان می دهیم D، $K_A(E)$ را به خودش می نگارد. برای این منظور، فرض کنید $x, y \in E$. با بکار بردن [؟، نتیجه ۱.۳.۱۱]، $a \in A$ و $z \in E$ وجود دارد به طوری که $x = za$. از آن جایی که E کامل است، دنباله $\{a_n\}$ در $\langle E, E\rangle$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $p \in S(A)$، $p(a_n - a) \to ۰$. فرض کنید $a_n = \sum_{i=۱}^{k_n} \langle x_{in}, y_{in}\rangle$ که در آن $x_{in}, y_{in} \in E$. در این صورت

$$\begin{aligned} D(\theta_{za_n,y}) = \sum_{i=۱}^{k_n} D(\theta_{z\langle x_{in},y_{in}\rangle,y}) &= \sum_{i=۱}^{k_n} D(\theta_{z,x_{in}}\theta_{y_{in},y}) \\ &= \sum_{i=۱}^{k_n} D(\theta_{z,x_{in}})\theta_{y_{in},y} + \sum_{i=۱}^{k_n} \theta_{z,x_{in}} D(\theta_{y_{in},y}) \in K_A(E). \end{aligned}$$

فرض کنید $p \in S(A)$ و $w \in E$ به طوری که $\overline{p}^A(w) \leq ۱$. در این صورت

$$\begin{aligned} \overline{p}^A((\theta_{za_n,y} - \theta_{za,y})(w))^۲ &= p(\langle y, w\rangle^*)p(\langle za_n - za, za_n - za\rangle)p(\langle y, w\rangle) \\ &\leq \overline{p}^A(y)^۲\overline{p}^A(z)^۲p(a_n - a)^۲ \end{aligned}$$

که ایجاب می کند $\tilde{p}(\theta_{za_n,y} - \theta_{x,y}) \to ۰$. در نتیجه با در نظر گرفتن توپولوژی تولید شده توسط $\{\tilde{p}\}_{p\in S(A)}$ در $L_A(E)$ داریم $\theta_{za_n,y} \to \theta_{x,y}$. از [؟، گزاره ۲]، می توان نتیجه گرفت که D، $K_A(E)$ را به خودش می نگارد. حال چون هر مشتق روی $K_A(E)$، درونی است لذا عملگر $T \in K_A(E)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $K \in K_A(E)$، $D(K) = TK - KT$. فرض کنید $S \in L_A(E)$ و $x, y \in E$. در این صورت $D(S\theta_{x,y}) = TS\theta_{x,y} - S\theta_{x,y}T$. تساوی اخیر و این حقیقت که

$$D(S\theta_{x,y}) = D(S)\theta_{x,y} + SD(\theta_{x,y}) = D(S)\theta_{x,y} + ST\theta_{x,y} - S\theta_{x,y}T.$$

ایجاب می کند $D(S)\theta_{x,y} = TS\theta_{x,y} - ST\theta_{x,y}$. فرض کنید $w \in E$. در این صورت $z \in E$ و $a \in A$ وجود دارد به طوری که $w = za$. از آن جایی که E کامل است، دنباله ی $\{a_n\}$ در $\langle E, E\rangle$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $p \in S(A)$، $p(a_n - a) \to ۰$. فرض کنید $a_n = \sum_{i=۱}^{k_n} \langle x_{in}, y_{in}\rangle$. در این صورت

$$\begin{aligned} D(S)(za_n) = \sum_{i=۱}^{k_n} D(S)(z\langle x_{in}, y_{in}\rangle) &= \sum_{i=۱}^{k_n} D(S)\theta_{z,x_{in}}(y_{in}) \\ &= \sum_{i=۱}^{k_n}(TS\theta_{z,x_{in}} - ST\theta_{z,x_{in}})(y_{in}) \\ &= (TS - ST)(za_n). \end{aligned}$$

به ازای هر $p \in S(A)$، $\overline{p}_A(za_n - za) \leq \overline{p}_A(z)p(a_n - a)$ و از این رو در E، $za_n \to za$. حال از پیوستگی $D(S)$ و $TS - ST$، می توان نتیجه گرفت که به ازای هر $w \in E$، $D(S)(w) = (TS - ST)(w)$ و لذا $D(S) = TS - ST$. □

۴.۴ مشتق روی جبر عملگرها در دو-مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرهای موضعی

فرض کنید E یک مدول هیلبرت راست و چپ روی C^*- جبر موضعی A باشد. ضرب داخلی A- مقدار راست و چپ روی E را به ترتیب با نماد $_A\langle\cdot,\cdot\rangle$ و $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ نشان می دهیم. در این صورت دو توپولوژی به طور موضعی محدب روی E تعریف می شود. فرض کنید τ^A، توپولوژی القاء شده توسط شبه نرم های $\{\overline{p}^A\}_{p\in S(A)}$ روی E، به عنوان A- مدول هیلبرت راست و $^A\tau$، توپولوژی القاء شده توسط شبه نرم های $\{^A\overline{p}\}_{p\in S(A)}$ روی E، به عنوان A- مدول هیلبرت چپ باشد. زاراکاس [7] در [؟، نتیجه ۳.۲] ، ثابت کرد که اگر به ازای هر $x,y,z\in E$، $_A\langle x,y\rangle z = x\langle y,z\rangle_A$ و عمل مدولی چپ (راست) پیوسته باشد به این معنی که

$$\overline{p}^A(ax)\leq p(a)\overline{p}^A(x),\quad {}^A\overline{p}(xa)\leq {}^A\overline{p}(x)p(a),\ \ \forall x\in E, a\in A, \tag{۲.۴}$$

آن گاه به ازای هر $x\in E$، $\overline{p}^A(x) = {}^A\overline{p}(x)$ و از این رو توپولوژی های $^A\tau$ و τ^A روی E بر هم منطبق هستند. بر مبنای این حقیقت، او مفهوم دو-مدول هیلبرت روی C^*- جبر موضعی را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱.۴.۴. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی و E یک A- مدول هیلبرت راست و چپ باشد. اگر شرط (؟؟) برقرار باشد و به ازای هر $x,y,z\in E$، $_A\langle x,y\rangle z = x\langle y,z\rangle_A$، آن گاه گوییم E یک دو-مدول هیلبرت روی A یا یک A- دو-مدول هیلبرت است.

ملاحظه ۲.۴.۴. فرض کنید A یک $C^*-\sigma$- جبر و E یک A- دو- مدول هیلبرت باشد. بستار ایده آل دو طرفه $\operatorname{span}\{_A\langle x,y\rangle : x,y\in E\}$ را با نماد $_AI$ نشان می دهیم. بنا به [؟، لم ۶.۴]، $_AI$ یک واحد تقریبی مانند $\{u_\alpha\}$ دارد به طوری که $u_\alpha = \sum_{i=1}^m {}_A\langle x_i^\alpha, x_i^\alpha\rangle$، اندیس α یک زیر مجموعه ی متناهی مانند $\{y_1,\dots,y_m\}$ از E است و به ازای $i=1,\dots,m$، $x_i^\alpha = (\sum_{j=1}^m {}_A\langle y_j,y_j\rangle + \frac{1}{m}1)^{-\frac{1}{2}}y_i$ که در آن ۱، عنصر همانی یکه دار شده ی A است. زاراکاس [؟، قضیه ۶.۵] در حالتی که A یک $C^*-\sigma$- جبر باشد، توانست رابطه ای بین عملگرهای فشرده $K_A(E)$ و ایده آل دو طرفه $_AI$ از A را بدست آورد. او ثابت کرد که با در نظر گرفتن $*$- یکریختی توپولوژیکی، $_AI\simeq K_A(E)$. این قضیه را می توان توسیعی از نتیجه ی براون، مینگو و شن [؟، گزاره ۱.۱۰] برای C^*- دو-مدولهای هیلبرت دانست. با در نظر گرفتن این قضیه، به آسانی می تون نشان داد که $\{T_\alpha\}$ که در آن $T_\alpha = \sum_{i=1}^n \theta_{x_i^\alpha,x_i^\alpha}$، یک واحد تقریبی برای $K_A(E)$ است. در ادامه به اختصار به توضیح این $*$-یکریختی می پردازیم.

از آن جایی که $_AI$ یک $*$- زیر جبر بسته از A است، لذا یک $C^*-\sigma$- جبر است. فرض کنید $_AI = \varprojlim I_n$ که در آن $I_n = {}_AI/N_n$ و به ازای هر n، $N_n = Ker(p_{n|_{_AI}})$. از طرفی $L_A(E)$ یک $C^*-\sigma$- جبر است لذا $L_A(E) = \varprojlim L_{A_n}(E_n)$. به ازای هر n، تناظر $\lambda^n : I_n\to L_{A_n}(E_n)$،

[7] Zarakas

$a+N_n \to \lambda^n_{a+N_n}$ را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\lambda^n_{a+N_n}(x+N^E_n) = ax+N^E_n,\ a\in {}_AI,\ x\in E.$$

از آن جابی که $\{u_\alpha\}_\alpha$ یک واحد تقریبی برای ${}_AI$ است، بنا به [؟، لم ۱.۲] به ازای هر n، $\{u_{\alpha,n}\}_\alpha$ که در آن $u_{\alpha,n} = (\sum_{i=1}^m {}_A\langle x^\alpha_i, x^\alpha_i\rangle) + N_n$ یک واحد تقریبی برای I_n است. فرض کنید $b\in {}_AI$ و $\lambda^n_{b+N_n} = 0$ در این صورت به ازای هر α،

$$\begin{aligned}
(b+N_n)u_{\alpha,n} &= (b\sum_{i=1}^m({}_A\langle x^\alpha_i, x^\alpha_i\rangle)) + N_n\\
&= \sum_{i=1}^m({}_A\langle bx^\alpha_i, x^\alpha_i\rangle) + N_n\\
&= \sum_{i=1}^m({}_A\langle (b+N_n)(x^\alpha_i+N^A_n), x^\alpha_i+N^A_n\rangle)\\
&= \sum_{i=1}^m({}_A\langle \lambda^n_{b+N_n}(x^\alpha_i+N^A_n), x^\alpha_i+N^A_n\rangle)\\
&= 0
\end{aligned}$$

و در نتیجه $b+N_n = 0$. بنابراین به ازای هر n، λ^n یک به یک است.

فرض کنید به ازای هر m و n که $n\le m$، $\sigma_{mn}: E_m \to E_n$ نگاشت های مرتبط، در دستگاه وارون $\{E_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ به عنوان A_m- مدول هیلبرت باشند و $(\pi_{mn})_*: L_{A_m}(E_m)\to L_{A_n}(E_n)$ نگاشت های مرتبط در دستگاه وارون $\{L_{A_m}(E_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ به عنوان C^*- جبرها باشند. در این صورت به ازای هر $T\in L_{A_m}(E_m)$ و $\xi\in E$،

$$(\pi_{mn})_*(T)(\xi+N^E_n) = \sigma_{mn}(T(\xi+N^E_m)). \tag{۳.۴}$$

برای هر m و n که $n\le m$، نمودار زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ccc}
I_m & \xrightarrow{\lambda^m} & L_{A_m}(E_m)\\
{\scriptstyle\pi_{mn}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\pi_{mn})_*}\\
I_n & \xrightarrow[\lambda^n]{} & L_{A_n}(E_n)
\end{array}$$

در این نمودار $\pi_{mn}: I_n \to I_m$ نگاشت مرتبط در دستگاه وارون $\{I_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ است. به ازای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$\begin{aligned}
(\pi_{mn})_*\lambda^m_{a+N_m}(\xi+N^E_n) &= \sigma_{mn}(\lambda^m_{a+N_m}(\xi+N^E_m))\\
&= \sigma_{mn}(a\xi+N^E_m)\\
&= a\xi+N^E_n\\
&= \lambda^n_{a+N_n}(\xi+N^E_n)\\
&= \lambda^n(\pi_{mn}(a+N_m))(\xi+N^E_n).
\end{aligned}$$

بنابراین نمودار بالا جابجایی است. برای هر $a \in {}_AI$، تابع $\lambda_a : E \to E$ را به صورت $\xi \to a\xi$ تعریف کنید. در این صورت $\lambda_a \in L_A(E)$. از این رو تناظر $\lambda : {}_AI \to L_A(E)$، $a \to \lambda_a$ خوش تعریف است و یک $*$- همریختی بین $\sigma - C^*$- جبرها است. فرض کنید $\pi_n : {}_AI \to I_n$ و $\sigma_n : E \to E_n$ به ترتیب نگاشت های تصویری در دستگاه های وارون $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ باشند و

$$(\pi_n)_* : L_A(E) \to L_{A_n}(E_n), \quad (\pi_n)_*(S)(\xi + N_n^E) = \sigma_n(S\xi), \tag{۴.۴}$$

که در آن $S \in L_A(E)$، $\xi \in E$ و $n \in \mathbb{N}$، نگاشت های تصویری در دستگاه وارون $\{L_{A_n}(E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ باشند. در این صورت نمودار زیر

$$\begin{array}{ccc} {}_AI & \xrightarrow{\lambda} & L_A(E) \\ {\scriptstyle \pi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_n)_*} \\ I_n & \xrightarrow[\lambda^n]{} & L_{A_n}(E_n) \end{array}$$

جابجایی است زیرا به ازای هر $a \in {}_AI$، $\xi \in E$ و $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} (\pi_n)_*\lambda(a)(\xi + N_n^E) = \sigma_n(\lambda_a(\xi)) &= a\xi + N_n^E \\ &= \lambda^n(a + N_n)(\xi + N_n^E) \\ &= \lambda^n(\pi_n(a))(\xi + N_n^E). \end{aligned}$$

بنابراین $\lambda = \varprojlim \lambda^n$ و در نتیجه بنا به [؟، گزاره(۱) ۵.۳]، نگاشت λ دارای تصویر بسته است و لذا یک همسانریختی [۸] پوشا روی تصویرش است. لذا λ، مجموعه چگال $\mathrm{span}\{\langle\xi,\eta\rangle : \xi,\eta \in E\}$ را به روی مجموعه $\{\theta_{\xi,\eta} : \xi,\eta \in E\}$ می نگارد که یک مجموعه ی چگال در $K_A(E)$ است. بنابراین در حد $*$- یکریختی توپولوژیکی داریم $K_A(E) = {}_AI$.

گزاره ۳.۴.۴. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی جابجایی و E یک A- دو-مدول هیلبرت باشد آن گاه $K_A(E)$ جابجایی است.

برهان. فرض کنید $x,y,z,u,v \in E$. در این صورت

$$\begin{aligned} \theta_{x,y}\theta_{u,v}(z) = \theta_{x.\langle y,u\rangle_A,v}(z) = x.\langle y,u\rangle_A\langle v,z\rangle_A &= {}_A\langle x,y\rangle u.\langle v,z\rangle_A \\ &= {}_A\langle x,y\rangle_A\langle u,v\rangle.z \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \theta_{u,v}\theta_{x,y}(z) = \theta_{u.\langle v,x\rangle_A,y}(z) = u.\langle v,x\rangle_A\langle y,z\rangle_A &= {}_A\langle u,v\rangle x.\langle y,z\rangle_A \\ &= {}_A\langle u,v\rangle_A\langle x,y\rangle.z. \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $x,y \in E$، $\theta_{x,y}\theta_{u,v} = \theta_{u,v}\theta_{x,y}$. از آن جابی که $K_A(E)$، تولید شده ی خطی توسط بستار [۹] $\{\theta_{x,y} : x,y \in E\}$ است، می توان نتیجه گرفت که $K_A(E)$ جابجایی است. □

[۸] homeomorphism

[۹] linear span

نتیجه ۴.۴.۴. فرض کنید A یک C^*- جبر موضعی و E یک A- دو-مدول هیلبرت باشد. اگر A جابجایی باشد آن گاه هر مشتق روی $K_A(E)$ صفر است.

برهان. با بکاربردن لم ؟؟، گزاره ی ؟؟ و این حقیقت که $K_A(E)$ یک C^*- جبر موضعی است، نتیجه حاصل می شود. □

قضیه ۵.۴.۴. فرض کنید A یک $C^* - \sigma$- جبر موضعی جابجایی و E یک A- دو-مدول هیلبرت باشد. در این صورت هر مشتق روی $L_A(E)$ صفر است.

برهان. فرض کنید D یک مشتق روی $L_A(E)$ و $\{T_\alpha\}$ همان تور در ملاحظه ؟؟ باشد. ابتدا نشان می دهیم که D، $K_A(E)$ را به خودش می نگارد. فرض کنید $x, y \in E$. در این صورت

$$D(\theta_{x,y}T_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} D(\theta_{x,y}\theta_{x_i^\alpha,x_i^\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} D(\theta_{x,y})\theta_{x_i^\alpha,x_i^\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \theta_{x,y}D(\theta_{x_i^\alpha,x_i^\alpha}) \in K_A(E).$$

پیوستگی و بسته بودن $K_A(E)$ در $L_A(E)$ ایجاب می کند که به ازای هر $x, y \in E$، $D(\theta_{x,y}) \in K_A(E)$. در نتیجه تحدید D به $K_A(E)$ یک مشتق روی $K_A(E)$ بوده و بنا به نتیجه ی ؟؟، صفر است. فرض کنید $S \in L_A(E)$. در این صورت به ازای هر $x, y \in E$،

$$D(S)\theta_{x,y} = D(S\theta_{x,y}) - SD(\theta_{x,y}) = 0.$$

به خصوص، $D(S)\theta_{x,D(S)x} = 0$ و از این رو

$$\begin{aligned} D(S)(x)\langle D(S)(x), D(S)(x)\rangle &= D(S)(x\langle D(S)(x), D(S)(x)\rangle) \\ &= D(S)\theta_{x,D(S)(x)}(D(S)(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین $|D(S)(x)|^4 = \langle D(S)(x)\langle D(S)(x), D(S)(x)\rangle, D(S)(x)\rangle = 0$ و در نتیجه برای هر $x \in E$، $D(S)(x) = 0$. این ایجاب می کند $D = 0$. □

مراجع

[1] Abbaspour Tabadkan Gh. and Farhangi S. (2014), " Induced representations of Hilbert C*-modules", **arXiv:1403.2256 [math.OA]**.

[2] Ara P. (2001), "Morita equivalence and Pedersen ideals", **Proc. Amer. Math. Soc.** 129, pp 1041-1049.

[3] Arambašić Lj. (2005), " Irreducible representations of Hilbert C*-modules", **Math. Proc. R. Ir. Acad.** 105A, pp 11-24.

[4] Arveson W. (1982), " The harmonic analysis of automorphism groups", **Proc. Symposia Pure Math.** Vol. 38, part 1, **Amer. Math. Soc.** , pp 199-269.

[5] Arveson W. (1969), " Subalgebras of C*-algebras", **Acta Math.** 123, pp 141-224.

[6] Asadi M. B. (2009), " Stinespring theorem for Hilbert C*-modules", **J. Operator Theory** 62, pp 235-238.

[7] Becker R. (1992), " Derivations on LMC*-algebras, **Math. Nachr.** 155, pp 141-149.

[8] Beer W. (1982), " On Morita equivalence of nuclear C*-algebras", **J. Pure Appl. Algebra**, 26, pp 249-267.

[9] Bhat B. V. R., Ramesh G., and Sumesh K. (2012), " Stinespring's theorem for maps on Hilbert C*-modules",**J. Operator Theory** 68, pp 173-178.

[10] Brown L. G., Mingo J. A. and Shen N. T. (1994), "Quasimultipliers and embeddings of Hilbert C*-modules", **Canad. J. Math.** 46, pp 1150-1174.

[11] Fragoulopoulou M. (2005), " **Topological algebras with involution**", North Holland, Amsterdam.

[12] Inoue A. (1971), " Locally C*-algebras", **Mem. Faculty Sci. Kyushu Univ.** Ser. A 25, pp 197-235.

[13] Johnson B. E. and Sinclair A. M. (1968), "Continuity of derivations and a problem of Kaplansky", **Amer. J. Math.** 90, pp 1067-1073.

[14] Joita M. (2004), " Morita equivalence for locally C*-algebras", **Bull. London Math. Soc.**, 36, no. 6, pp 802-810.

[15] Joita M. (2005), " Induced representations of locally C*-algebras", **Rocky Mountain J. Math**., 35, no. 6, pp 1923-1934.

[16] Joita M. and Moslehian M. S. (2012), " A Morita equivalence for Hilbert C*-modules", **Stud. Math**. 209, pp 11-19.

[17] Joita M. (2008), " **Completely positive linear maps on pro-C*-algebras**", University of Bucharest Press.

[18] Joita M. (2012), " Comparison of completely positive maps on Hilbert C*- modules", **J. Math. Anal. Appl.** 393, pp 644-650.

[19] Joita M. (2006), "**Hilbert modules over locally C*-algebras**", University of Bucharest Press.

[20] Joita M. (2002), " Strict completely positive maps between locally C*-algebras and representations on Hilbert modules", **J. London Math. Soc** (2) 66, pp 421-432.

[21] Joita M. (2014), " A Radon-Nikodym type theorem for a α-completely positive maps on groups", **Oper. Matrices** 8, pp 1163-1174.

[22] Joita M. (2004), " Tensor products of Hilbert modules over locally C*-algebras", **Czech. Math. J.**, 54 (129), no. 3, pp 727-737.

[23] Kadison R. V. (1966), "Derivations of operator algebras", **Ann. Math.**, 83 (2), pp 280-293 .

[24] Kaplansky I. (1953), " Modules over operator algebras", **Amer. J. Math.**, 75, pp 839-858.

[25] Lassner G. (1972), " *Ü*ber Realisierungen gewisser *-Algebren", **Math. Nachr.** 52, pp 161-166.

[26] Li P., Han D. and Tang W. (2012), " Derivations on the algebra of operatores in Hilbert C*-modules", **Acta Math. Sinica**, English ser. 28 (8), pp 1615-1622.

[27] Maliev I. N. and Pliev M. A. (2012), " A Stinespring type representation for operators in Hilbert modules over local C*-algebras", **Russian Math**. 56, no. 12, pp 43-49.

[28] Mallios A. (1986), " **Topological Algebras**", Selected Topics, North-Holand, Amsterdam.

[29] Manuilov V. M. and Troitsky E. V. (2005), " **Hilbert C*-modules**" , Translations of Mathematical Monographs, 226, American Mathematical Society, Providence, RI.

[30] Mingo J. A. and Phillips W. J. (1984), " Equivariant triviality theorems for Hilbert C*-modules"**, Proc. Amer. Math. Soc.** 91, pp 225-230.

[31] Moghadam M. K., Miri M. and Janfada A. R. (2015), " A note on derivations on the algebra of operators in Hilbert C*-modules", **Mediterr. J. Math.** DOI 10.1007/s00009-015-0538-y, Published online 25 February.

[32] Murphy G. J. (1997), " Positive definite kernels and Hilbert C*-modules", **Proc. Edinburgh Math. Soc.** 40, pp 367-374.

[33] Lance E. C. (1995), " **Hilbert C*-Modules**", LMS Lecture Note Series 210, Cambridge Uni. Press.

[34] Paschke W. L. (1973), " Inner product modules over B^*-algebras", **Trans. Amer. Math. Soc**. 182, pp 443-468.

[35] Phillips N. C. (1988), " Inverse limit of C*-algebras", **J. Operator Theory** 19, pp 159-195.

[36] Phillips N. C. (1988), " Inverse limits of C*-algebras and applications", **Operator algebras and applications**, Vol. 1, 127-185, LMS Lecture Note Series 135, Cambridge Univ. Press.

[37] Phillips N. C. (1995), " Inner derivations on σ-C*-algebras", **Math. Nachr.** 176, pp 243-247.

[38] Phillips N. C. (1989), " Representable K-theory for σ-C*-algebras", **K-Theory**, 3, 5, pp 441-478.

[39] Raeburn I. and Williams D. P. (1998), " **Morita equivalence and continuous-trace C*-algebras**", Mathematical Surveys and Monographs, 60. American Mathematical Society, Providence, RI.

[40] Rieffel M. A. (1974), " Induced representations of C*-algebras", **Advanced in Math.** 13, pp 176-257.

[41] Rieffel M. A. (1974), " Morita equivalence for C*-algebras and W*-algebras", **J. Pure Appl. Alg.** 5, pp 51-96.

[42] Sahleh A. and Najarpisheh L. (2014), " Derivations of operators on Hilbert modules", **Gen. Math. Notes**, 24, pp 52-57.

[43] Saidi H., Janfada A. R. and Mirzavaziri M. (2015), " Kinds of derivations on Hilbert C*-modules and their operator algebras", **Miskolc Mathematical Notes** 16, pp 453-461.

[44] Sakai S. (1971), " **C*-algebras and W*-algebras**". Ergebnisse der Mathematik 60, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[45] Sakai S. (1991), " **Operator algebras in dynamical systems: The theory of unbounded derivations in C*-algebras**", Encyclipedia of Mathematics and its applications, 41, Cambridge University Press.

[46] Schm$\ddot{u}$dgen K. (1975), " $\ddot{U}$ber LMC*-Algebren", **Math. Nachr.** 68, pp 167-182.

[47] Singer I.M. and Wermer J. (1955), " Derivations on commutative normed algebras", **Math. Ann.** 126, pp 260-264.

[48] Skeide M. (2012), " A factorization theorem for φ-maps", **J. Operator Theory** 68, pp 543-547.

[49] Skeide M. (2000), " Generalised matrix C*-algebras and representations of Hilbert modules", **Math. Proc. R. Ir. Acad.**, 100 A, pp 11-38.

[50] Skeide M. (2009), " Unit vectors, Morita equivalence and endomorphisms", **Publ. Res. Inst. Math. Sci.** 45, pp 475-518.

[51] Stefnrod N. E. (1967), " A Convenient Category of topological spaces", **Michigan Math. J.**, 14, pp 133-152.

[52] Voiculescu D. (1987), " Dual algebraic structures on operator algebras related to free products", **J. Operator Theory** 17, pp 85-98.

[53] Thomas M. P. (1988), " The image of a derivation is contained in the radical", **Ann. Math.**(2) 128 (3), pp 435-460.

[54] Zarakas I. (2012), " Hilbert pro-C*-bimodules and applications", **Rev. Roumaine Math. Pures Appl.** 17, pp 289-310.

[55] Zettel H. (1982), " Strong Morita equivalence of C*-algebras preserves nuclearity", **Arch, Math.**, 38, pp 448-452

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اکید	Strict
اکیداً کوشی	Strictly Cauchy
ایزومتری	Isometry
برگشت	Involution
به طور جداگانه پیوسته	Separately continuous
به طور ضعیف تقریباً درونی	Weakly approximately inner
به طور فشرده تولید شده	Compactly generated
به طور قوی پیوسته	Strongly continuous
به طور کامل مثبت	Completely positive
به طور کامل منظم	Complete regular
به طور کامل هاسدورف	Completely Hausdorff
به طور متناهی تولید شده	Finitely generated
به طور موضعی محدب	Locally convex
به طور موضعی هیلبرت	Locally Hilbert space
به طور یکانی معادل	Unitary equivalent
تقریباً درونی	Approximately inner
تکمیل شده	Completion
توپولوژی اکید	Strict topology
توپولوژی حد استقرایی	Inductive limit topology
پیش-C^*-جبر	Pre-C^*-algebra
تابع انقباضی	Contraction
تابعگون	Functor
دستگاه تصویری	Projective system
دستگاه وارون	Inverse system
جابجاگر	Commutant

جبر برگشت پذیر .... Involutive algebra
جبر توپولوژیکی .... Topological algebra
حافظ * .... $*$-Preserving
حد تصویری .... Projective limit
حد وارون .... Inverse limit
حسابان تابعی .... Functional calculus
خاصیت C* .... $*$-Preserving
خاصیت جهانی .... Universal property
خطی-مزدوج .... Conjugate-linear
خودالحاق .... Selfadjoint
دنباله ی مرتبط .... Coherent sequence
رابطه پیش ترتیب .... Preorder relation
رادیکال .... Radical
رده .... Category
زیرمدول پائینی .... Lower submodule
ساختار GNS پشکی .... Paschke's GNS-construction
ساختار گلفاند-نیمارک-سگال .... Gelfand-Naimark-Segal construction
ساختار GNS .... GNS-construction
سیگما-C^*-جبر .... σ-C^*-algebra
شبه پیوسته .... Quasicontinuous
ضرب تانسوری درونی .... Interior tensor product
طیف .... Spectrum
عملگر الحاقی .... Adjointable operator
عملگر فشرده .... Compact operator
عملگرهای بیضوی .... Elliptic operators
عملگرهای یکانی .... Unitary operators
فرم دوخطی .... Bilinear form
فرم یک و نیم خطی .... Sesquillinear form
فضای پیش هیلبرت .... Pre-Hilbert space
فضای شبه توپولوژیکی .... Quasitopological space
فضای شبه هیلبرت .... Semi-Hilbert space
کامل .... Full

کراندار .... Bounded
تولید شده خطی .... Linear span
مثبت .... Positive
مرکز .... Center
مشتق رادون-نیکودیم .... Radon-Nikodym derivative
معادل .... Equivalent
مغلوب شده .... Dominated
مینیمال .... Minimal
ناتباهیده .... Non-degenerate
نرمال .... Normal
نظریه اندیس .... index theory
نمایش .... Representation
نمایش القایی .... Induced representation
نمایش القایی ریفل .... Rieffel-induced representation
نمایش های دوری .... Cyclic representations
نیم ساده .... Semi-simple
واحد تقریبی .... Approximate unit
وارون پذیر .... Invertible
هم ارز موریتای قوی .... Strongly Morita equivalent
هم ارزی رده ای پادوردا .... Contravariant category equivalence
هم ارزی موریتا .... Morita equivalence
هم ایزومتری .... Coisometry
همسانریختی .... Homeomorphism
هیلبرت C^*- مدول .... Hilbert C^*-module
یکریختی .... Isomorphism
یکه دار شده .... Unitization
C^*- شبه نرم .... C^*-seminorm
*-جبر .... $*$-algebra
*-جبر توپولوژیکی .... Topological *-algebra
C^*- جبر ماتریسی .... Matrix C^*-algebra
C^*-جبرموضعی فرشه .... Fréchet locally C^*- algebra
*-همریختی .... $*$-homomorphism

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjointable operator .... عملگر الحاقی
Approximately inner .... تقریباً درونی
Approximate unit .... واحد تقریبی
Bilinear form .... فرم دوخطی
Bounded .... کراندار
Category .... رده
Center .... مرکز
Coherent sequence .... دنباله ی مرتبط
Coisometry .... هم ایزومتری
Commutant .... جابجاگر
Compactly generated .... به طور فشرده تولید شده
Compact operator .... عملگر فشرده
Completely Hausdorff .... به طور کامل هاسدورف
Completely positive .... به طور کامل مثبت
Complete regular .... به طور کامل منظم
Completion .... تکمیل شده
Conjugate-linear .... خطی-مزدوج
Contraction .... تابع انقباضی
Contravariant category equivalence .... هم ارزی رده ای پادوردا
C^*-Property .... خاصیت C*
C^*-seminorm .... C^*- شبه نرم
Cyclic representations .... نمایش های دوری
Dominated .... مغلوب شده
Elliptic operators .... عملگرهای بیضوی
Equivalent .... معادل

Finitely generated .... به طور متناهی تولید شده
Fréchet locally C^*- algebra .... C^*-جبرموضعی فرشه
Full .... کامل
Functional calculus .... حسابان تابعی
Functor .... تابعگون
Gelfand-Naimark-Segal construction .... ساختار گلفاند-نیمارک-سگال
GNS-construction .... ساختار GNS
Hilbert C^*-module .... هیلبرت C^*- مدول
Hilbert C^*-module .... هیلبرت C^*- مدول
Homeomorphism .... همسانریختی
Index theory .... نظریه اندیس
Induced representation .... نمایش القابی
Inductive limit topology .... توپولوژی حد استقرابی
Interior tensor product .... ضرب تانسوری درونی
Inverse limit .... حد وارون
Isometry .... ایزومتری
Inverse system .... دستگاه وارون
Invertible .... وارون پذیر
Involution .... برگشت
Involutive algebra .... جبر برگشت پذیر
Isomorphism .... یکریختی
Linear span .... تولید شده خطی
Locally convex .... به طور موضعی محدب
Locally Hilbert space .... به طور موضعی محدب به طور موضعی هیلبرت
Lower submodule .... زیرمدول پائینی
Matrix C^*-algebra .... C^*- جبر ماتریسی
Minimal .... مینیمال
Morita equivalence .... هم ارزی موریتا
Non-degenerate .... ناتباهیده
Normal .... نرمال
Paschke's GNS-construction .... ساختار GNS پشکی
Positive .... مثبت

Pre-C^*-algebra .... پیش-C^*-جبر
Pre-Hilbert space .... فضای پیش هیلبرت
Preorder relation .... رابطه پیش ترتیب
Projective limit .... حد تصویری
Projective system .... دستگاه تصویری
Quasicontinuous .... شبه پیوسته
Quasitopological space .... فضای شبه توپولوژیکی
Radical .... رادیکال
Radon-Nikodym derivative .... مشتق رادون-نیکودیم
Representation .... نمایش
Rieffel-induced representation .... نمایش القایی ریفل
Selfadjoint .... خودالحاق
Semi-Hilbert space .... فضای شبه هیلبرت
Semi-simple .... نیم ساده
Separately continuous .... به طور جداگانه پیوسته
Sesquillinear form .... فرم یک و نیم خطی
Spectrum .... طیف
Strict .... اکید
Strictly Cauchy .... اکیداً کوشی
Strict topology .... توپولوژی اکید
Strongly continuous .... به طور قوی پیوسته
Strongly Morita equivalent .... هم ارز موریتای قوی
Topological algebra .... جبر توپولوژیکی
Topological *-algebra .... *-جبر توپولوژیکی
Unitary equivalent .... به طور یکانی معادل
Unitary operators .... عملگرهای یکانی
Unitization .... یکه دار شده
Universal property .... خاصیت جهانی
Weakly approximately inner .... به طور ضعیف تقریباً درونی
$*$-algebra .... *-جبر
σ-C^*-algebra .... سیگما-C^*-جبر
$*$-homomorphism .... *-همریختی

φ-morphism . . . . φ- مورفیسم

$*$-Preserving . . . . حافظ *

Aabstract

We study induced representations of Hilbert modules over pro-C*-algebras and their non-degeneracy. We give a module version of the imprimitivity theorem for Hilbert modules over pro-C^*- algebras. We deduce Stinespring representation theorem of pro-C*-algebras from Paschke's GNS-construction and we result an analogue of Stinespring theorem for Hilbert modules over pro-C*-algebras. Also we obtain a Radon-Nikodym type theorem for operator valued completely positive maps on Hilbert modules over pro-C*-algebras. We study derivations on the algebra of operators in Hilbert pro-C*-bimodules and we show that if E is a Hilbert bimodule over a commutative pro-C*-algebra A then every derivation on $K_A(E)$, compact operators on E, is zero. Moreover, if A be a commutative σ-C*-algebra then every derivation on $L_A(E)$, adjointable operators on E, is zero. Also, we prove that if E be a full Hilbert module over a pro-C*-algebra A, the innerness of derivations on $K_A(E)$ implies the innerness of derivations on $L_A(E)$.

keywords: Locally C*-algebra; Hilbert module; Derivations on the algebra of operators; Representation

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Functional Analysis

Derivation and representation morphisms in locally C*-algebras

By: Sara Karimi

Supervisors

Dr. Ahmad Zireh
Dr. Kamran Sharifi

Advisors

Dr. Massoud Amini
Dr. Gholamreza Abbaspour Tabadkan

February 2017