

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده ریاضی

گروه محض

ایده آل های اول الحاقی روی حلقه های ناجابجایی

مریم تاجیک

استاد راهنما:

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور:

دکتر احمد زیره

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به ...

پدر و مادر عزیزم، من از تبار سبز شما هستم؛ با بدرقه دعای همیشگی‌تان. می‌خواهم چیزی بگویم. هرچه می‌گذرد دلسوزی‌های پیش از اینتان بر من آشکار می‌شود. بارها پیش آمده است که من بوده‌ام و واقعهای دقیق و مقطعی حساس. من بوده‌ام و چیزی جز راهنمایی‌های شما نبوده است. من بوده‌ام و شما که همیشه‌تان در سینه ستوده‌ام. من در پناه ملامت شما، روز به روز رشد کرده‌ام به هر سو نگریسته‌ام، حرف‌های راهگشای شما بوده است رو به روی ماجرای سختی به نام زندگی.

این کار برگ سبزی است تقدیم از سوی این کوچک به شما دو بزرگ.

تشکر و قدردانی

خدای بزرگ را شاکرم و اکنون که با یاریش و توکل به او این پایان نامه را به اتمام رسانده ام وظیفه خود می دانم تا نهایت تشکر و قدردانی خود را از استاد راهنمای عزیز و گرانقدرم جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی به خاطر کمک های عالمانه و بی دریغشان ابراز دارم.

همچنین از جناب آقای دکتر احمد زیره مشاور محترم در این پایان نامه، جناب آقای دکتر نادر جعفری راد، جناب آقای دکتر میر حیدر جعفری و جناب آقای سید رضا موسوی به خاطر همکاری بی دریغشان سپاس گذارم.

چکیده

در سال ۱۹۷۳، ایده آل های اول الحاقی و مدول های ثانویه و نمایشی توسط مک دونالد معرفی شدند تا نظریه دوگان ایده آل های اول وابسته را در جبر جابجایی گسترش دهند. در این پایان نامه نظریه مک دونالد را به مدول ها روی حلقه های ناجابجایی تعمیم می دهیم. همچنین مجموعه ایده آل های اول الحاقی مدول های مختلف را بررسی خواهیم کرد. رفتار ایده آل های اول الحاقی تحت هم ارزی رسته ها را نیز بررسی می کنیم. فرض کنیم M_R یک R -مدول باشد و $\sigma: R \rightarrow R$ یک خودریختی و S نمایانگر حلقه چند جمله ای اریب $R[x; \sigma]$ باشد. می توانیم مجموعه چند جمله ای های معکوس $M[x^{-1}]$ را به عنوان S -مدول راست در نظر بگیریم به طوری که برای هر $a \in R$ و $m \in M$ و $i, j \geq 0$

$$(mx^{-i})(ax^j) := \begin{cases} m\sigma^{-i}(a)x^{-i+j} & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases}$$

نشان خواهیم داد که اگر M یک مدول به طور کامل σ -سازگار باشد آنگاه $Att(M_R) \cap Att(M[x^{-1}]_S) \supseteq \{p[x]: p \in Att(M_R)\}$ الحاقی مدول M_R است). در صورتی که $M[x^{-1}]$ یک مدول باس و به طور کامل σ -سازگار باشد آنگاه $Att(M[x^{-1}]_S) = \{p[x]: p \in Att(M_R)\}$. همچنین در ادامه مفهوم مدول های ثانویه و نمایشی را به مدول ها روی حلقه های ناجابجایی تعمیم می دهیم. قابل ذکر است که نتایج این پایان نامه برگرفته از [1] می باشد.

کلمات کلیدی: ایده آل اول الحاقی، مدول هم اول، ایده آل اول وابسته، پوچ ساز، مدول ثانویه، مدول نمایشی، حلقه چند جمله ایهای اریب، مدول σ -سازگار، حلقه کامل راست، مدول باس

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
ج.....	تصویب نامه.....
د.....	تقدیم به.....
ه.....	تشکر و قدردانی.....
و.....	تعهد نامه.....
ز.....	چکیده فارسی.....
ی.....	فهرست علائم و اختصارات.....

فصل اول

۱.....	تعاریف و خلاصه ای از پایان نامه.....
--------	--------------------------------------

فصل دوم

۱۷.....	قضایای اصلی.....
---------	------------------

فصل سوم

۳۴.....	ایده آل های اول الحاقی تحت هم ارزی رسته ای.....
---------	---

فصل چهارم

۳۷.....	ایده آل های اول الحاقی روی حلقه چند جمله ایهای اریب.....
---------	--

فصل پنجم

۴۵.....	مدول های باس و حلقه های کامل راست.....
---------	--

فصل ششم

۵۵.....	نمایش های ثانویه روی حلقه های ناجابجایی.....
---------	--

۶۸.....	واژه نامه انگلیسی به فارسی.....
---------	---------------------------------

۷۵.....واژه نامه فارسی به انگلیسی

۸۲.....فهرست منابع

.....چکیده انگلیسی

فهرست علائم و اختصارات

مجموعه اعداد صحیح	Z
مجموعه اعداد صحیح که مضربی از n هستند	nZ
مجموعه اعداد صحیح مثبت	N
p - گروه پروفر	Z_{p^∞}
مجموعه تهی	$\emptyset$
x عضوی از مجموعه A است	$x \in A$
x عضوی از مجموعه A نیست	$x \notin A$
اجتماع دو مجموعه A و B	$A \cup B$
اشتراک دو مجموعه A و B	$A \cap B$
تفاضل B از مجموعه A	$A - B$
A زیرمجموعه B است	$A \subseteq B$
A زیرمجموعه سره ای از B است	$A \subset B$
کاردینال مجموعه A	$ A $
f تابعی از A به B است	$f : A \rightarrow B$
a به b تصویر می شود	$a \mapsto b$
تولید شده توسط X	$\langle X \rangle$
هسته همریختی φ	$\text{Ker } \varphi$
حلقه خارج قسمتی R روی I	R/I
حلقه چند جمله ایها	$R[x]$
چند جمله ای روی متغیر x	$f(x)$
مجموعه تمام درونیختی های مدول M	$\text{End}(M_R)$
حلقه تمام ماتریس های $n \times n$ روی حلقه R	$M_n(R)$

رادیكال ایده آل I	$\sqrt{I}$
رادیكال جيكبسون حلقه R	$rad R$
مجموعه تمام ایده آل های اول حلقه R	$spec(R)$
مجموعه تمام ایده آل های ماكسيمال حلقه R	$Max(R)$
پوچ ساز R - مدول راست M	$ann(M_R)$
مدول چند جمله ای معكوس	$M[x^{-1}]$
حلقه چند جمله ایهای اریب	$R[x; \sigma]$
انژکتیو هال مدول M	$E(M)$
حاصلضرب مستقیم خارجی خانواده R - مدول های راست $\{M_i\}_{i \in I}$	$\prod_{i \in I} M_i$
حاصلجمع مستقیم خارجی خانواده R - مدول های راست $\{M_i\}_{i \in I}$	$\bigoplus_{i \in I} M_i$
شرط زنجیر افزایشی	ACC
شرط زنجیر کاهشی	DCC
مجموعه تمام ایده آل های اول وابسته مدول خوب M_R روی حلقه جابجایی R	$Ass^*(M_R)$
مجموعه تمام ایده آل های اول وابسته مدول M_R روی حلقه ناجابجایی R	$Ass(M_R)$
مجموعه تمام ایده آل های اول الحاقی مدول نمایشی M_R روی حلقه جابجایی R	$Att^*(M_R)$
مجموعه تمام ایده آل های اول الحاقی مدول M_R روی حلقه ناجابجایی R	$Att(M_R)$

فصل اول

تعاریف و خلاصه ای از پایان نامه

فصل اول

تعاریف و خلاصه ای از پایان نامه

ابتدا مفاهیمی که در این پایان نامه استفاده می شوند را یادآوری می کنیم.

۱-۱ تعریف: الف- فرض کنید P ایده آلی از حلقه دلخواه R باشد. ایده آل P را اول^۱ نامیم هرگاه

$P \neq R$ و برای ایده آل های $I, J \subseteq R$ ، اگر $IJ \subseteq P$ آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

ب- ایده آل Q از حلقه R را نیم اول^۲ نامیم هرگاه برای هر ایده آل I از R ، اگر $I^2 \subseteq Q$ آنگاه

$$I \subseteq Q.$$

مجموعه تمام ایده آل های اول حلقه R را با $\text{Spec}(R)$ نشان می دهیم.

۲-۱ تعریف: گوییم حلقه R اول^۳ (نیم اول^۴) است هر گاه $(\circ)$ یک ایده آل اول (نیم اول) باشد.

۳-۱ تعریف: فرض کنید $\underline{m}$ یک ایده آل چپ (راست) از حلقه R باشد. گوییم $\underline{m}$ یک ایده آل چپ

¹ - prime ideal

² - semiprime ideal

³ - prime ring

⁴ - semiprime ring

(راست) ماکسیمال^۱ است اگر برای هر ایده آل چپ (راست) $\underline{m} \subseteq I$ نتیجه شود $\underline{m} = I$ یا $I = R$.

مجموعه تمام ایده آل های ماکسیمال حلقه R را با $Max(R)$ نشان می دهیم.

فرض کنیم M یک R -مدول راست باشد. پوچساز^۲ مدول M را با $ann(M_R)$ نمایش می دهیم و به صورت $ann(M_R) = \{r \in R : Mr = 0\}$ تعریف می کنیم.

۴-۱ تعریف: حلقه R را یک حلقه تقسیم^۳ نامیم هرگاه هر عضو ناصفر آن نسبت به عمل ضرب وارون داشته باشد.

۵-۱ تعریف: عنصر ناصفر a یک مقسوم علیه چپ (راست) صفر است هرگاه $0 \neq b \in R$ وجود داشته باشد به قسمی که $ab = 0$ ($ba = 0$).

۶-۱ تعریف: فرض کنیم $\{M_i\}_{i \in I}$ خانواده ای از R -مدول های راست باشد. حاصلضرب خانواده فوق را با نماد $\prod_{i \in I} M_i$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\prod_{i \in I} M_i := \{\{m_i\} : m_i \in M_i\}$$

$\prod_{i \in I} M_i$ با دو عمل جمع و ضرب اسکالری که به صورت زیر تعریف می کنیم یک R -مدول راست است و به آن حاصلضرب مستقیم خارجی خانواده $\{M_i\}$ گوییم:

$$\{m_i\}_{i \in I} + \{m'_i\}_{i \in I} = \{m_i + m'_i\}_{i \in I}$$

$$\forall r \in R, \{m_i\}_{i \in I} r = \{m_i r\}_{i \in I}$$

زیر مجموعه ای از $\prod_{i \in I} M_i$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\{\{m_i\}_{i \in I} : m_i \text{ ها می توانند ناصفر باشند.}\}$$

این مجموعه یک زیر مدول $\prod_{i \in I} M_i$ است و به آن حاصلجمع مستقیم خارجی $\{M_i\}_{i \in I}$ گوییم و با

^۱ - maximal left (right) ideal

^۲ - annihilator

^۳ - division ring

علامت $\bigoplus_{i \in I} M_i$ نمایش می دهیم.

۷-۱ تعریف: فرض کنید $\{C_i : i \in I\}$ یک خانواده از زیر مجموعه های مجموعه C باشد. گوییم این خانواده در شرط زنجیر افزایشی^۱ (به طور خلاصه $A.C.C$) صدق می کند هر گاه یک زنجیر افزایشی نامتناهی مانند $C_{i_1} \subseteq C_{i_2} \subseteq \dots$ در این خانواده وجود نداشته باشد.

دو گزاره زیر معادل با این شرط هستند:

(۱) برای هر زنجیر صعودی در این خانواده مانند $C_{i_1} \subseteq C_{i_2} \subseteq \dots$ عدد صحیح n وجود داشته

باشد به طوری که $C_{i_n} = C_{i_{n+1}} = C_{i_{n+2}} = \dots$.

(۲) هر مجموعه ناتهی از این خانواده تحت رابطه شمول یک عضو ماکسیمال داشته باشد.

به طور مشابه شرط زنجیر کاهش^۲ (به طور خلاصه $D.C.C$) برای یک خانواده از زیر مجموعه های مجموعه C تعریف می شود.

۸-۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. M را نوتری^۳ (آرتینی^۴)

می نامیم اگر خانواده همه زیر مدول های M در شرط $(D.C.C) A.C.C$ صدق کند. حلقه R را نوتری (آرتینی) نامیم اگر R به عنوان یک R -مدول، نوتری (آرتینی) باشد.

۹-۱ تعریف: اشتراک تمام ایده آل های چپ ماکسیمال حلقه R را رادیکال جیکبسون^۵ حلقه R

نامیم و آنرا با علامت $rad R$ نمایش می دهیم.

۱۰-۱ تعریف: برای R -مدول (راست) M_R ، اشتراک تمام زیر مدول های ماکسیمال M را با

$rad M$ نمایش می دهیم. اگر مدول M هیچ زیر مدول ماکسیمالی نداشته باشد آنگاه تعریف

می کنیم $rad M = M$.

^۱ - ascending chain condition

^۲ - decending chain condition

^۳ - Noetherian

^۴ - Artinian

^۵ - Jacobson Radical

1-11 تعریف: الف- حلقه R را ساده^۱ گوئیم اگر $\{0\} \neq R$ و $(\circ)$ و R تنها ایده آل های آن باشند.

ب- گوئیم حلقه R نیم ساده^۲ است هر گاه هر ایده آل آن یک جمعوند مستقیم از R باشد یا به طور معادل R با مجموع مستقیمی از ایده آل های مینیمال خود برابر باشد.

1-12 تعریف: فرض کنیم M یک R -مدول باشد و $\phi \neq X \subseteq M$. زیر مدول تولید شده توسط

X را با علامت $\langle X \rangle$ نمایش می دهیم که عبارت است از اشتراک تمام زیر مدول های M که شامل X هستند.

1-13 گزاره: اگر M یک R -مدول باشد و $\phi \neq X \subseteq M$ ، آنگاه

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i r_i + \sum_{j=1}^t m_j n_j \mid r_i \in R, n_j \in Z, m_i, m_j \in X, n, t \geq 1 \right\}.$$

1-14 نتیجه: اگر M یک R -مدول یکانی باشد، آنگاه

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i r_i \mid r_i \in R, m_i \in X, n \geq 1 \right\}.$$

1-15 تعریف: R -مدول M را یک مدول متناهی مولد^۳ نامیم هرگاه زیر مجموعه متناهی از M

مانند $X = \{m_1, \dots, m_n\}$ وجود داشته باشد به قسمی که $M = \langle X \rangle$.

1-16 تعریف: ایده آل I از حلقه R اصلی^۴ است اگر برای یک $a \in R$ ، $I = \langle a \rangle$.

1-17 تعریف: دامنه صحیح R را یک دامنه ایده آل اصلی^۵ می نامند اگر هر ایده آل حلقه R اصلی باشد.

1-18 تذکر: اگر M یک R -مدول یکانی متناهی مولد باشد آنگاه

$$M = m_1 R + m_2 R + \dots + m_n R.$$

1-19 تعریف: فرض کنیم M یک R -مدول و $\{m_i\}_{i \in I}$ یک مولد آن باشد. اگر هر عضو از M را

¹ - simple ring

² - semisimple ring

³ - finitely generated module

⁴ - principal ideal

⁵ - principal ideal domain

بتوان به طور منحصر بفرد بر اساس خانواده $\{m_i\}_{i \in I}$ بیان کرد؛ یعنی

$$\left(\sum m_i r_i = \sum m_i s_i \Leftrightarrow \forall i \quad r_i = s_i \right)$$

در این صورت گوییم خانواده $\{m_i\}_{i \in I}$ یک پایه^۱ برای M است و M یک R -مدول آزاد^۲ است.

۲۰-۱ قضیه: هر R -مدول، تصویر همریخت یک R -مدول آزاد است.

۲۱-۱ تعریف: گوییم مدول ناصفر M ساده^۳ است هرگاه $(\circ)$ و M تنها زیر مدول های آن باشند.

۲۲-۱ تعریف: حلقه R نیم موضعی^۴ نامیده می شود اگر $R/\text{rad } R$ نیم ساده باشد و موضعی^۵ است اگر $R/\text{rad } R$ حلقه تقسیم باشد.

۲۳-۱ قضیه: حلقه جابجایی R موضعی است هرگاه دقیقاً یک ایده آل ماکسیمال داشته باشد.

۲۴-۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه و P یک R -مدول باشد. P را پروژکتیو^۶ می نامیم هر گاه برای هر بروریختی^۷ $f: A \rightarrow B$ بین R -مدول های A و B و هر همریختی $g: P \rightarrow B$ ، یک همریختی $h: P \rightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که $f \circ h = g$.

۲۵-۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه و I یک R -مدول باشد. I را انژکتیو^۸ می نامیم هر گاه برای هر تکریختی^۹ $f: A \rightarrow B$ بین R -مدول های A و B و هر همریختی $g: A \rightarrow I$ ، یک همریختی $h: B \rightarrow I$ وجود داشته باشد به طوری که $h \circ f = g$.

۲۶-۱ تعریف: $[M \ ۱۵]$ را به عنوان یک R -مدول راست در نظر بگیرید. R -مدول راست

$M_R \subseteq E$ را یک توسیع اساسی^{۱۰} از M نامند اگر اشتراک هر زیر مدول ناصفر E با M غیرصفر باشد.

¹ - Basis

² - free module

³ - simple module

⁴ - semilocal

⁵ - local

⁶ - projective

⁷ - epimorphism

⁸ - injective

⁹ - monomorphism

¹⁰ - essential extension

E را یک توسیع اساسی ماکسیمال از M نامند هرگاه اگر N یک توسیع اساسی از M باشد و
 $E \subseteq N$ ، آنگاه $N = E$.

۱-۲۷ لم: [۱۵] مدول M_R انژکتیو است اگر و تنها اگر هیچ توسیع اساسی سره نداشته باشد.

۱-۲۸ قضیه: [۱۵] برای مدول های $M \subset E$ گزاره های زیر معادلند:

(۱) E یک توسیع اساسی ماکسیمال از M است.

(۲) E یک توسیع اساسی از M و انژکتیو است.

(۳) E یک توسیع انژکتیو مینیمال روی M است.

۱-۲۹ تعریف: اگر مدول های $M \subset E$ در یکی از سه شرط بالا صدق کنند آنگاه گوییم E ،

انژکتیو هال^۱ M است و با علامت $E = E(M)$ نمایش می دهیم.

حال به بحث اصلی در این پایان نامه می پردازیم.

۱-۳۰ تعریف: برای حلقه جابجایی R مدول ناصفر M_R ثانویه^۲ نامیده می شود اگر برای هر

$r \in R$ ، درونریختی^۳ $m \rightarrow mr$ یا پوشا و یا پوچ توان^۴ باشد.

یک بررسی ساده نشان می دهد که برای مدول های ثانویه مجموعه تمام عناصر حلقه R که

متناظر با شکل پوچ توانی از درونریختی ذکر شده باشند، یک ایده آل اول از حلقه R است.

مجموعه تمام این عناصر را با علامت $\mathfrak{R}(M)$ نمایش می دهیم و M_R را مدول $\mathfrak{R}(M)$ -ثانویه می نامیم.

۱-۳۱ تعریف: مدول M_R را نمایشی^۵ نامیم هر گاه با یک مجموع متناهی (ناتهی) از مدول های

ثانویه برابر باشد.

ایده آل های اول متناظر با مؤلفه های ثانویه مدول نمایشی M_R به طور منحصر بفرد تعیین

^۱ - injective hull

^۲ - secondary module

^۳ - endomorphism

^۴ - nilpotent

^۵ - representable module

می شوند که ایده آل های اول الحاقی^۱ مدول نمایشی M_R نامیده می شوند. مجموعه ایده آل های اول الحاقی مدول نمایشی M_R را با علامت $Att^*(M_R)$ نمایش می دهیم. —راحتی بررسی می شود که هر مدول خارج قسمتی از یک مدول ثانویه (نمایشی) نیز ثانویه (نمایشی) است.

در ادامه نیز R یک حلقه جابجایی در نظر گرفته می شود.

۳۲-۱ تعریف: زیر مدول سره N از مدول M را یک زیر مدول اولیه^۲ M نامیم هرگاه برای هر $r \in R$ و $x \in M$ ، اگر $rx \in N$ آنگاه $x \in N$ یا توانی از r در $ann(M/N)$ باشد. به عبارت دیگر برای هر $r \in R$ ، درونیختی $r \cdot \frac{M}{N} \rightarrow \frac{M}{N}$ یا یک به یک و یا پوچ توان باشد.

یاد آوری می کنیم برای ایده آل I از حلقه R ، $\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in N, r^n \in I\}$.

۳۳-۱ تعریف و لم: [۱۶] اگر N یک زیر مدول اولیه باشد آنگاه $\sqrt{ann(M/N)}$ یک ایده آل اول است. اگر آنرا P در نظر بگیریم، N را P -اولیه نامیم.

۳۴-۱ تعریف: زیر مدول N از M را تجزیه پذیر اولیه^۳ می نامیم اگر $N = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ که Q_i ها زیر مدول های P_i -اولیه هستند.

این تجزیه مینیمال^۴ است در صورتی که هیچ کدام از Q_i ها را نتوان حذف کرد.

۳۵-۱ تعریف: مدول M را خوب^۵ می نامیم در صورتی که زیر مدول صفر در آن دارای تجزیه اولیه باشد.

۳۶-۱ قضیه: [۱۶، قضیه ۰،۲] فرض کنیم برای مدول خوب M_R ، $\circ = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ یک تجزیه اولیه مینیمال برای صفر در M باشد. در این صورت مجموعه ایده آل های اول $P_i = \sqrt{ann(M/Q_i)}$ مستقل از تجزیه است.

¹ - attached prime

² - primary

³ - primary decomposable

⁴ - minimal

⁵ - good

ایده آل های اول P_i ، ایده آل های اول وابسته^۱ مدول M_R نامیده می شوند. مجموعه $\{P_1, \dots, P_n\}$ را با علامت $Ass^*(M)$ نمایش می دهیم. (توجه کنید که این تعریف تنها در صورت نوتری بودن M با تعریف ارائه شده در [۴] یکسان است).

۳۷-۱ لم: [۱۶، لم ۱.۱] هر مدول خارج قسمتی ناصفر و هر مجموع مستقیم متناهی از مدول های p - ثانویه، p - ثانویه است.

۳۸-۱ لم: [۱۶، لم ۱.۲] پوچ ساز یک مدول p - ثانویه، یک ایده آل p - اولیه است.

۳۹-۱ لم: [۱۶، قضیه ۲.۳] پوچ ساز مدول نمایشی M_R (دارای نمایش مینیمال $M = \sum_{i=1}^n N_i$ است

به طوری که $(p_i = \mathfrak{R}(N_i))$ یک ایده آل تجزیه پذیر اولیه از حلقه R است و اگر این پوچ ساز را با I نشان دهیم آنگاه $Ass^*(R/I) \subseteq Att^*(M)$.

اثبات: فرض کنید $ann(N_i) = q_i$. با توجه به ۳۸-۱، $\sqrt{ann(N_i)} = \sqrt{q_i} = p_i$. پس

$I = ann(M_R) = \bigcap_{i=1}^n q_i$ پس I تجزیه پذیر اولیه است. فرض کنید $I = \bigcap_{i=1}^k q_i'$ تجزیه مینیمال I

باشد به طوری که $k \leq n$ و $\sqrt{q_i'} = p_i'$. بوضوح $Ass^*(R/I) = \{p_1', \dots, p_k'\}$ (صفر حلقه R/I است). بنابراین $Ass^*(R/I) \subseteq Att^*(M)$. $\square$

۴۰-۱ گزاره: [۱۶، قضیه ۲.۴] فرض کنید Q یک مدول خارج قسمتی از مدول نمایشی M_R باشد، در این صورت Q یک مدول نمایشی است و $Att^*(Q_R) \subseteq Att^*(M_R)$.

مک دونالد توصیفی از $Att^*(M_R)$ برای مدول نمایشی M_R روی حلقه جابجایی R را به صورت زیر به دست آورد.

۴۱-۱ گزاره: [۱۶، قضیه ۲.۲] فرض کنید M_R یک مدول نمایشی (دارای نمایش مینیمال

^۱ - associated prime

$M = \sum_{i=1}^n N_i$ است به طوری که $(p_i = \mathfrak{R}(N_i))$ روی حلقه جابجایی R باشد و p یک ایده آل

اول حلقه R باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

$$(۱) \quad p \in \text{Att}^*(M_R) ;$$

$$(۲) \quad M_R \text{ دارای یک مدول خارج قسمتی } p - \text{ثانویه است;} ;$$

$$(۳) \quad M_R \text{ دارای مدول خارج قسمتی } Q_R \text{ است به طوری که } \mathfrak{R}(Q) = p ;$$

$$(۴) \quad M_R \text{ دارای مدول خارج قسمتی } Q_R \text{ است که } p \text{ عنصر مینیمال مجموعه تمام ایده آل های}$$

اول شامل $\text{ann}(Q_R)$ است.

اثبات: ابتدا معادل بودن (۱)، (۲) و (۳) را ثابت می کنیم.

$$(۱) \Leftarrow (۲) \quad \text{فرض کنید } P_i = \sum_{j \neq i} N_j. \text{ بنابراین } M/P_i \neq 0 \text{ (زیرا این نمایش مینیمال است) و}$$

$$M/P_i = (P_i + N_i)/P_i \cong N_i/(N_i \cap P_i)$$

$$\text{که با توجه به } ۱-۴۰, p_i - \text{ثانویه است.}$$

$$(۲) \Leftarrow (۳) \quad \text{واضح است.}$$

$$(۳) \Leftarrow (۱) \quad \text{فرض کنید } Q = M/P. N_i \text{ ها را مجدداً شماره گذاری می کنیم به طوری که برای}$$

$$۱ \leq i \leq r, N_i \not\subset P \quad \text{و} \quad \text{برای } r+1 \leq i \leq n, N_i \subset P \quad \text{پس}$$

$$M/P = \sum_{i=1}^n (N_i + P)/P = \sum_{i=1}^r (N_i + P)/P \quad \text{برای هر } ۱ \leq i \leq r, (N_i + P)/P \cong N_i/(N_i \cap P), \text{ و با}$$

$$\text{توجه به } ۱-۴۰, p_i - \text{ثانویه است. پس } p = \mathfrak{R}(M/P) = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{R}((N_i + P)/P) = \bigcap_{i=1}^r p_i \text{ و بنابراین } p$$

با یکی از $p_1, \dots, p_r$ برابر است.

$$(۳) \Leftarrow (۴) \quad \text{اگر } Q \text{ یک مدول خارج قسمتی از } M \text{ باشد به طوری که } \mathfrak{R}(Q) = p, \text{ آنگاه}$$

$$\sqrt{\text{ann}(Q)} = p, \text{ و بنابراین } p \text{ عنصر مینیمال منحصر بفرد از مجموعه تمام ایده آل های اول شامل}$$

$\text{ann}(Q)$ می باشد.

$$(۴) \Leftarrow (۱) \quad \text{با توجه به } ۱-۴۰, Q \text{ نمایشی است، پس بنا بر } ۱-۳۹, I = \text{ann}(Q) \text{ تجزیه پذیر}$$

اولیه است و بنابر ۱-۳۹ و ۱-۴۰، $p \in \text{Ass}^*(R/I) \subseteq \text{Att}^*(Q) \subseteq \text{Att}^*(M)$ □

۴۲-۱ تعریف: یک رسته^۱ $\mathcal{C}$ کلاسی از اشیاء مانند $A, B, C, \dots$ است همراه با:

(i) مجموعه های مجزای $\text{Hom}(A, B)$ به ازای هر دو شیء A و B از $\mathcal{C}$. عناصر $\text{Hom}(A, B)$ را ریخت^۲ می نامند و با نماد $f: A \rightarrow B$ نشان می دهند.

(ii) برای هر سه شیء A, B, C (نه لزوماً متمایز) وجود دارد تابع

$$\begin{cases} \text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C) \\ (g, f) \rightarrow g \circ f \end{cases}$$

$g \circ f$ را ترکیب g و f می نامند. این تابع دارای خواص زیر است:

(۱) شرکت پذیری، یعنی اگر $g: B \rightarrow C, f: A \rightarrow B$ و $h: C \rightarrow D$ ، آنگاه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

(۲) عنصر همانی، برای هر شیء B از $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد ریخت $1_B: B \rightarrow B$ به طوری که برای هر $f: A \rightarrow B$ و هر $g: B \rightarrow C$ ، $g \circ 1_B = g$ و $1_B \circ f = f$ را ریخت همانی B گویند.

۴۳-۱ تعریف: فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته دلخواه باشند. منظور از یک فانکتور همورد^۳ از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$

زوجی از توابع است که هر دو را با T نشان می دهیم. یکی تابع شیء که به هر شیء A از $\mathcal{C}$ ، یک شیء $T(A)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد و دیگری تابع ریخت که به هر ریخت $f: A \rightarrow B$ از $\mathcal{C}$ ، ریخت $T(f): T(A) \rightarrow T(B)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد و T دارای خواص زیر است:

(i) به ازای هر ریخت همانی 1_B داریم $T(1_B) = 1_{T(B)}$

(ii) اگر برای هر دو ریخت f و g از $\mathcal{C}$ ترکیب توابع f و g معنی داشته باشد آنگاه داشته باشیم

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$$

فانکتور همورد $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ از $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ است اگر فانکتور همورد $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ وجود

¹ - category

² - morphism

³ - covariant functors

⁴ - category equivalence

داشته باشد به طوری که T و T' وارون یکدیگر باشند. در این صورت رسته های ζ و ξ را هم ارز می نامند.

فرض کنید R و S دو حلقه، و M_R (M_S) نشان دهنده رسته همه R - مدول های راست (S - مدول ها) باشد.

۴۴-۱ قضیه: [۱۵، قضیه ۱۷.۲۰] حلقه دلخواه S را در نظر بگیرید. برای $(n \geq 1)$ $R = M_n(S)$ (حلقه ماتریس های $n \times n$ روی حلقه S)، رسته مدول های M_R و M_S هم ارزند.

۴۵-۱ گزاره: [۱۵، گزاره ۱۸.۴۷] فرض کنید M_R و N_R مدول های متناظر تحت هم ارزی رسته ای $T: M_R \rightarrow M_S$ باشند. در این صورت ایده آل $\text{ann}(M) \subseteq R$ متناظر با ایده آل $\text{ann}(N) \subseteq S$ می باشد. بویژه M وفادار^۱ (مدول M را وفادار می نامیم در صورتی که $\text{ann}(M_R) = \{0\}$) است اگر و تنها اگر N وفادار باشد.

۴۶-۱ تعریف: زیر مجموعه A از حلقه R را، T - پوچ توان^۲ چپ (راست) نامیم هر گاه برای هر دنباله $\{a_1, a_2, \dots\} \subseteq A$ عدد صحیح $n \geq 1$ وجود داشته باشد به طوری که $a_n \dots a_2 a_1 = 0$ و $a_1 a_2 \dots a_n = 0$.

۴۷-۱ قضیه: [۱۳، گزاره ۲۳.۱۶] برای ایده آل راست $J \subseteq R$ ، گزاره های زیر معادلند:
(۱) J ، T - پوچ توان است.

(۲) برای هر R - مدول راست مانند M ، اگر $MJ = M$ آنگاه $M = 0$.

(۲') برای هر R - مدول راست مانند M ، $N \subseteq M$ اگر $MJ + N = M$ آنگاه $N = M$.

(۳) برای هر R - مدول چپ N اگر $\text{ann}_N(J) = 0$ ، آنگاه $N = 0$
 $(\text{ann}_N(J) = \{x \in N \mid Jx = 0\})$.

۴۸-۱ تعریف: زیرمدول $S_R \subseteq M_R$ کوچک^۳ نامیده می شود، اگر برای هر زیر مدول $N_R \subseteq M_R$

^۱ - faithful

^۲ - T-nilpotent

^۳ - small

که $N + S = M$ نتیجه شود $N = M$.

۴۹-۱ گزاره: [۱۳، گزاره ۲۴.۴] فرض کنیم M یک R -مدول راست باشد و $J = \text{rad } R$. در

این صورت:

(۱) $\text{rad } M$ برابر با مجموع همه ی زیر مدول های کوچک M است.

(۲) $MJ \subseteq \text{rad } M$. به علاوه تساوی زمانی رخ می دهد که R یک حلقه نیم موضعی باشد.

۵۰-۱ تعریف: [۱۳، تعریف ۲۳.۱] حلقه R نیم کامل^۱ نامیده می شود هرگاه R نیم موضعی

باشد و هر عنصر خودتوان از $R/\text{rad } R$ به فرم $e + \text{rad } R$ باشد که $e^2 = e$.

۵۱-۱ تعریف: حلقه R کامل راست^۲ نامیده می شود اگر $R/\text{rad } R$ نیم ساده باشد و $\text{rad } R$ ،

T -پوچ توان راست باشد.

۵۲-۱ نتیجه: [۱۳، نتیجه ۲۴.۱۹] هر حلقه خارج قسمتی از یک مدول کامل راست، کامل راست

است.

۵۳-۱ گزاره: [۱۴، تمرین ۲۴.۵] هر حلقه نیم اول و کامل راست، نیم ساده است.

با توجه به اهداف ما در فصل ۵ قضیه ی زیر بسیار مفید خواهد بود.

۵۴-۱ قضیه: [۱۴] حلقه R کامل راست است اگر و تنها اگر $R/\text{rad } R$ نیم ساده باشد و هر

R -مدول راست ناصفر حداقل یک زیر مدول ماکسیمال داشته باشد.

برهان: فرض کنید حلقه R کامل راست باشد. با توجه به تعریف، R نیم موضعی است و

$J = \text{rad } R$ ، T -پوچ توان است. R -مدول ناصفر M_R را در نظر بگیرید. با توجه به قسمت آخر

(۴۹-۱) $MJ = \text{rad } M$ ، و با توجه به (۴۷-۱) $MJ \neq M$. بنابراین $\text{rad } M \neq M$ یعنی M دارای

حداقل یک زیر مدول ماکسیمال است.

بعکس، فرض کنید هر R -مدول راست ناصفر دارای حداقل یک زیر مدول ماکسیمال و

^۱ - semiperfect

^۲ - right perfect

$R/\text{rad } R$ نیم ساده است. کافی است ثابت کنیم R, T -پوچ توان است. با توجه به فرض برای هر R -مدول ناصفر $M, M \neq \text{rad } M$. با توجه به (۴۹-۱) $MJ \subseteq \text{rad } M$ ، پس $MJ \neq M$. بنابراین با توجه به (۴۷-۱)، J, T -پوچ توان است. $\square$

۱-۵۵ تعریف: مدول M را باس^۱ می نامیم در صورتی که هر زیر مدول سره آن مشمول در یک زیر مدول ماکسیمال باشد.

از قضیه ۱-۵۴ نتیجه می شود هر مدول روی یک حلقه کامل راست، یک مدول باس است.
 ۱-۵۶ تعریف: مدول M_R ، به طور قوی تجزیه پذیر^۲ است اگر $\text{End}(M_R)$ یک حلقه موضعی باشد.
 ۱-۵۷ گزاره: [۱۳، گزاره ۲۱.۹] برای عنصر خود توان^۳ $e \in R$ ، گزاره های زیر معادلند:

(۱) eR به عنوان یک R -مدول راست به طور قوی تجزیه پذیر است.

(۲) Re به عنوان یک R -مدول چپ به طور قوی تجزیه پذیر است.

(۳) eRe یک حلقه موضعی است.

اگر خود توان e در یکی از شرایط بالا صدق کند آنرا خود توان موضعی^۴ می نامیم.

یادآوری می کنیم که عناصر خود توان $\alpha, \beta \in R$ ، متعامد^۵ نامیده می شوند اگر $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$.

۱-۵۸ قضیه: [۱۳، قضیه ۲۳.۶] حلقه R نیم کامل است اگر و تنها اگر $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ ، که e_i ها خودتوان های موضعی و دو به دو متعامدند.

۱-۵۹ تعریف: عنصر خودتوان ناصفر $e \in R$ ، تحویل ناپذیر^۶ راست (چپ) نامیده می شود اگر eR (یا Re) یک ایده ال راست (چپ) مینیمال از حلقه R باشد.

۱-۶۰ گزاره: [۱۳، گزاره ۲۱.۱۸] عنصر خود توان $e \in R$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$J = \text{rad } R$ و $\bar{R} = R/\text{rad } R$. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

^۱- bass

^۲- strongly indecomposable

^۳- idempotent

^۴- local idempotent

^۵- orthogonal

^۶- irreducible

(۱) $e \in R$ یک خود توان موضعی است.

(۲) $\bar{e}$ یک خود توان راست تحویل ناپذیر در $\bar{R}$ است.

(۲') $\bar{e}$ یک خود توان چپ تحویل ناپذیر در $\bar{R}$ است.

(۳) eR/eJ یک R - مدول راست ساده^۱ است.

(۴) eJ زیر مدول ماکسیمال منحصر بفرد eR است.

۱-۶۱ تعریف: منظور از پوشش پروژکتیو^۲ مدول M_R ، یک برریختی^۳ $\theta: P_R \rightarrow M_R$ است که P_R

یک مدول پروژکتیو و $\text{Ker } \theta$ یک زیر مدول کوچک P_R است.

۱-۶۲ گزاره: [۱۳، گزاره ۲۴.۱۰] فرض کنید $\theta: P \rightarrow M$ یک پوشش پروژکتیو باشد.

اگر P' یک R - مدول پروژکتیو، و $\theta': P' \rightarrow M$ یک همریختی پوشا باشد، آنگاه یک همریختی

پوشا و شکافته شده^۴ $\alpha: P' \rightarrow P$ وجود دارد به طوری که $\theta\alpha = \theta'$. اگر $\theta': P' \rightarrow M$ یک

پوشش پروژکتیو برای M باشد، آنگاه α یک یکرختی است.

با توجه به گزاره قبل پوشش پروژکتیو $\theta: P \rightarrow M$ ممکن است وجود نداشته باشد، اما در

صورت وجود منحصر بفرد است.

۱-۶۳ گزاره: [۱۳، گزاره ۲۴.۱۲] فرض کنید R یک حلقه نیم کامل باشد. در این صورت

R - مدول راست (چپ) متناهی مولد M دارای پوششی پروژکتیو است. اگر R کامل راست باشد،

آنگاه هر R - مدول راست M دارای پوششی پروژکتیو است.

۱-۶۴ نتیجه: [۱۳، نتیجه ۲۴.۱۴] (۱) اگر R نیم کامل باشد، آنگاه هر مدول پروژکتیو متناهی

مولد P_R ، یکرخت با یک مجموع مستقیم متناهی $\oplus e_\alpha R$ می باشد (هر e_α یکی از e_i ها در قضیه

۱-۵۸ است).

(۲) اگر R کامل راست باشد آنگاه هر مدول پروژکتیو P_R یکرخت با یک جمع مستقیم $\oplus e_\alpha R$

^۱ - simple

^۲ - projective cover

^۳ - epimorphism

^۴ - split

می باشد .

مک دونالد [۱۶] در جبر جابجایی ایده آل های اول الحاقی را با استفاده از تعریف مدول ها ی ثانویه ارائه کرد.

در فصل ۲ مفهوم ایده آل های اول الحاقی را روی حلقه دلخواه R مطرح می کنیم و نشان می دهیم در صورتی که R یک حلقه جابجایی نوتری باشد تعریف ما با تعریف کلاسیک ارائه شده توسط مک دونالد سازگاری دارد.

همچنین برخی خواص اساسی اول های الحاقی را بررسی خواهیم کرد و این ویژگی ها را با آنچه در محیط کلاسیک بدست آمده مقایسه می کنیم. با ارائه مثال هایی نشان می دهیم که رفتار اول های الحاقی در محیط ناجابجایی می تواند با رفتار آنها در محیط کلاسیک یکی نباشد. در سراسر این پایان نامه منحصراً با مدول های راست کار می کنیم و رفتار اول های الحاقی یک مدول راست تحت انواع حلقه و مدول ها را بررسی خواهیم کرد.

در فصل ۳ به بررسی ایده آل های اول الحاقی تحت هم ارزی رسته ای می پردازیم. به عنوان مسئله ی اصلی در فصل ۴ اول های الحاقی حلقه چند جمله ایهای اریب^۱ را بررسی خواهیم کرد. مل کرسن^۲ [۱۸] به این سوال در محیط جابجایی پاسخ می دهد. R - مدول M_R را در نظر بگیرید. مدول چند جمله ای معکوس $M[X^{-1}]_{R[X]}$ را تشکیل می دهیم. مل کرسن ثابت کرد (برای مدول نمایشی M_R روی حلقه جابجایی R) همه ی ایده آل های اول الحاقی $M[X^{-1}]_{R[X]}$ توسیعی هستند؛ یعنی هر ایده آل اول الحاقی p از $M[X^{-1}]_{R[X]}$ به شکل $p = p_0[X]$ است که $p_0 = p \cap R$ یک ایده آل اول الحاقی از M_R است.

اما در فصل ۴ خواهیم دید که ایده آل های اول های الحاقی در محیط ناجابجایی چندان خوش

^۱ - skew polynomial rings

^۲ - L. Melkersson

رفتار نیستند. فرض می کنیم $\sigma \in \text{Aut}(R)$ ، $M[x^{-1}]$ را به عنوان یک $R[x; \sigma]$ -مدول در نظر می گیریم و ایده آل های اول الحاقی آنرا بر حسب اول های الحاقی مدول M_R بدست می آوریم.

در فصل ۵ برای بدست آوردن نتایجی بهتر، مدول M_R را یک مدول باس در نظر می گیریم. همچنین نشان خواهیم داد که هر مدول دلخواه M روی حلقه کامل راست R دارای تعداد متناهی ایده آل اول الحاقی است.

در فصل ۶ مدول های ثانویه و نمایشی را در جبر ناجابجایی تعریف می کنیم و بعضی قضایای ارائه شده در [۱۶] را تعمیم می دهیم. نشان می دهیم هر مدول ناصفر روی یک حلقه کامل راست نمایشی است و برای این امر از پوشش های پروژکتیو کمک می گیریم. همچنین برای بدست آوردن نتایجی بهتر مدول های قویاً ثانویه را تعریف می کنیم و قضایایی در مورد این مدول ها مطرح می کنیم.

فصل دوم

قضایای اصلی

فصل دوم

قضایای اصلی

در ادامه R یک حلقه شرکت پذیر یکدار فرض می شود مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

۲-۱ تعریف: R - مدول ناصفر N_R را اول^۱ می نامیم اگر برای هر زیر مدول ناصفر $N'_R \subseteq N_R$ ،
$$ann(N_R) = ann(N'_R)$$

به آسانی می توان نشان داد که برای هر مدول اول مانند N_R ، $ann(N_R)$ ایده آل اولی از R است.

۲-۲ تعریف: فرض کنید M_R یک R - مدول راست باشد. ایده آل p از R ، ایده آل اول وابسته M_R نامیده می شود اگر زیر مدول اول $N_R \subseteq M_R$ وجود داشته باشد به طوریکه $p = ann(N_R)$.
مجموعه همه ایده آل های اول وابسته M_R به صورت $Ass(M_R)$ نمایش داده می شود.

حال آماده ایم تا با مفاهیم مدول هم اول^۲ (دوگان مدول اول) و ایده آل اول الحاقی (دوگان

^۱ - prime module

^۲ - coprime module

ایده آل اول وابسته) روی حلقه دلخواه R آشنا شویم.

در این مفاهیم مدول های خارج قسمتی جایگزین زیر مدول های ذکر شده در تعریف ۱-۲ می شوند.

۳-۲ تعریف: R - مدول ناصفر N_R را هم اول نامیم هرگاه برای هر مدول خارج قسمتی ناصفر مانند Q_R از N_R ، $ann(N_R) = ann(Q_R)$.

۴-۲ لم: اگر N_R هم اول باشد آنگاه $p = ann(N_R)$ ایده آل اولی از حلقه R است.

اثبات: چون $N \neq 0$ و R یکدار است، لذا $p \neq R$. فرض می کنیم μ, β ایده آل هایی از حلقه R باشند که $\mu\beta \subseteq p$. قرار می دهیم $Q_R := N/N\mu$. اگر $Q = 0$ آنگاه $N = N\mu$ و لذا $N\beta = N\mu\beta \subseteq Np = 0$. پس $\beta \subseteq ann(N_R) = p$. اگر $Q \neq 0$ ، آنگاه $\mu \subseteq ann(Q_R) = ann(N_R) = p$. $\square$

عکس این لم در حالت کلی برقرار نمی باشد. به طور مثال برای $N := Z_Z$ ، $p = ann(Z_Z) = 0$

ایده آل اولی از Z است، اما برای $Q = Z/nZ$ ($0 \neq n \in Z$)، $ann(Z/nZ) = nZ \neq p$. $\square$

۵-۲ تعریف: R - مدول M_R را در نظر بگیرید. ایده آل p از R را ایده آل اول الحاقی M_R نامیم در صورتی که یک مدول هم اول خارج قسمتی Q_R از M_R وجود داشته باشد به طوری که $p = ann(Q_R)$. مجموعه ایده آل های اول الحاقی M_R را با $Att(M_R)$ نمایش می دهیم.

مثال: توجه داریم $Att(0) = \emptyset$ و اگر N_R هم اول باشد آنگاه $Att(N_R) = \{ann(N_R)\}$. چون N_R هم اول است، لذا برای هر مدول خارج قسمتی Q_R ، $ann(N_R) = ann(Q_R)$. پس اگر Q'_R مدول خارج قسمتی هم اولی از M_R باشد آنگاه $p = ann(Q'_R) = ann(N_R)$. $\square$

با استفاده از گزاره ۴۱-۱ نتیجه می گیریم اگر R یک حلقه جابجایی نوتری و M_R یک مدول نمایشی باشد آنگاه تعریف ما از ایده آل های اول الحاقی با تعریف کلاسیک که توسط مک دونالد ارائه شده، یکسان است.

۲-۶ گزاره: فرض کنید R یک حلقه جابجایی نوتری، M_R یک مدول نمایشی و p یک ایده آل R

باشد. در این صورت $p \in \text{Att}(M_R)$ ، اگر و تنها اگر $p \in \text{Att}^*(M_R)$.

اثبات: فرض کنید Q_R یک مدول خارج قسمتی هم اول M_R باشد به طوری که $p = \text{ann}(Q_R)$. با

توجه به لم ۲-۴، p یک ایده آل اول است و بنابر گزاره ۱-۴۱ (۴) نتیجه حاصل است.

برعکس، اگر $p \in \text{Att}^*(M_R)$ ، آنگاه بنابر گزاره ۱-۴۱ (۲) M_R دارای یک مدول خارج

قسمتی و p - ثانویه مانند Q_R می باشد. هدف اصلی این است که نشان دهیم $Q \neq Qp$. فرض

می کنیم $Q = Qp$.

چون M_R مدول نمایشی است پس Q_R نیز نمایشی است. با توجه به لم ۱-۳۹،

$$\phi \neq \text{Ass}^*((R/\text{ann}(Q_R))_R) = \text{Ass}((R/\text{ann}(Q_R))_R) \subseteq \text{Att}^*(Q_R) = \{p\}$$

که نا تهی بودن مجموعه ایده آل های اول وابسته $(R/\text{ann}(Q_R))_R$ از فرض نوتری بودن R نتیجه

می شود [۱۶، قضیه ۰.۴]. تساوی دوم نیز از نوتری بودن حلقه R نتیجه می شود. پس

$$p \in \text{Ass}((R/\text{ann}(Q_R))_R)$$

بنا بر تعریف ۲-۲ زیرمدول اولی مانند $(I/\text{ann}(Q_R)) \subseteq (R/\text{ann}(Q_R))$ وجود دارد به طوری

که $p = \text{ann}(I/\text{ann}(Q_R))$. بنابراین $pI \subseteq \text{ann}(Q_R)$ و از $Q = Qp$ نتیجه می شود:

$$QI = QpI \subseteq Q.\text{ann}(Q_R) = 0$$

پس $I \subseteq \text{ann}(Q_R) \subseteq I$. بنابراین $I/\text{ann}(Q_R) = 0$ که یک تناقض است. پس $Q \neq Qp$.

مدول خارج قسمتی ناصفر $Q'_R := Q/Qp$ که یک مدول خارج قسمتی M_R نیز هست را در نظر

می گیریم. برای کامل شدن اثبات کافی است نشان دهیم Q'_R هم اول است و $\text{ann}(Q'_R) = p$.

فرض کنیم Q''_R یک زیرمدول خارج قسمتی ناصفر از Q'_R باشد. واضح است که $p \subseteq \text{ann}(Q''_R)$. به

عکس، از اینکه Q''_R ، p - ثانویه است، p از عناصر پوچ توان روی Q''_R تشکیل می شود. بنابراین اگر

$$Q''_R x = 0, \text{ آنگاه } x \in p. \quad \square$$

حال به بررسی ویژگی های اصلی ایده آل های اول الحاقی روی حلقه دلخواه R می پردازیم.

۷-۲ گزاره: فرض کنیم $N_R \subseteq M_R$. در این صورت

$$Att(M/N)_R \subseteq Att(M_R) \subseteq Att(N_R) \cup Att(M/N)_R.$$

اثبات: می توان فرض نمود $N \neq M$. فرض کنیم $p \in Att(M/N)$. پس با توجه به ۵-۲ مدول خارج قسمتی هم اول $(M/T)_R$ از $(M/N)_R$ وجود دارد به طوری که $p = ann(M/T)_R$. بنابراین $p \in Att(M_R)$.

حال فرض کنیم $p \in Att(M_R)$. در این صورت مدول خارج قسمتی هم اول $(M/T)_R$ از M_R وجود دارد که $p = ann(M/T)_R$. دو حالت در نظر می گیریم:

حالت ۱: فرض کنیم $M = N + T$. پس $M/T = (N + T)/T \cong N/N \cap T$ که یک مدول خارج قسمتی هم اول از N است به طوری که $p = ann(N/N \cap T)$. بنابراین $p \in Att(N_R)$.

حالت ۲: فرض کنیم $M \neq N + T$. پس $M/(N + T) \cong \frac{M/T}{(N + T)/T}$ یک مدول ناصفر هم اول و

دارای پوچ ساز p می باشد (زیرا یک مدول خارج قسمتی از M/T است). اما

$$M/(N + T) \cong \frac{M/N}{(N + T)/N} \quad \square. p \in Att(M/N)_R \text{ است پس}$$

۸-۲ مثال: مثال زیر نشان می دهد که رابطه های شمول در گزاره ۷-۲ می توانند اکید باشند.

فرض کنید $R := Z$. بوضوح Q یک Z -مدول $\circ$ -ثانویه است. پس Q/Z نیز $\circ$ -ثانویه است.

فرض کنید p یک عدد صحیح اول باشد. پس p -گروه پروفر $E(Z/pZ) \cong Z_{p^\infty}$ همان انژکتیو

هال است) به عنوان خارج قسمتی از Q/Z ، $\circ$ -ثانویه است.

فرض کنید (برای اعداد صحیح اول $p \neq q$)

$$N := Z/pZ \oplus Z/qZ, \quad M := E(Z/pZ) \oplus Z/qZ$$

از آنجا که $E(Z/pZ)$ ، $\circ$ -ثانویه است لذا داریم:

$$Att(M/N) = Att\left(\frac{E\left(\frac{Z}{pZ}\right)}{Z/pZ}\right) = \{(\circ)\} \quad , \quad Att(M) = \{(\circ), qZ\} \quad ,$$

$$Att(N) \cup Att(M/N) = \{pZ, qZ\} \cup \{(\circ)\} = \{pZ, qZ, (\circ)\}. \quad \square$$

در مثال بالا، $(\circ)$ تنها ایده آل اول الحاقی Z - مدول M/N است. در گزاره بعد مدول هایی که روی حلقه های جابجایی نوتری این ویژگی را دارند مشخص می کنیم.

۹-۲ تعریف: حلقه R را یک دامنه^۱ نامیم هر گاه $R \neq \circ$ و اگر $ab = \circ$ آنگاه $b = \circ$ یا $a = \circ$.

۱۰-۲ گزاره: اگر R یک حلقه جابجایی نوتری باشد و $M_R \neq \circ$ ، آنگاه

$$R \text{ یک دامنه و } M_R \text{ بخش پذیر}^2 \text{ است} \Leftrightarrow Att(M_R) = \{(\circ)\}$$

اثبات: یادآوری می کنیم که روی یک دامنه جابجایی، مدول M_R ، بخش پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $a \in R, a \neq \circ$ ، $Ma = M$. بنابراین M_R ، هم اول است و $ann(M_R) = \{(\circ)\}$. پس $(\circ) \in Att(M_R)$.

به عکس، اگر R یک دامنه نباشد، آنگاه $\{(\circ)\}$ یک ایده آل اول نمی باشد که با فرض در تناقض است. اگر M_R بخش پذیر نباشد، عنصر $a \neq \circ$ در R وجود دارد به طوری که $M/Ma \neq \circ$. چون R نوتری است پس $Att(M/Ma) \neq \emptyset$. فرض کنید $p \in Att(M/Ma)_R \subseteq Att(M_R)$. پس زیر مدول $N_R \supseteq Ma$ وجود دارد به طوری که $p = ann(M/N)_R$. در نتیجه $a \in p$ ؛ یعنی $p \neq \circ$ که یک تناقض است. $\square$

۱۱-۲ نتیجه: R - مدول های (راست) $M_1, M_2, \dots, M_n$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$Att\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) = \bigcup_{i=1}^n Att(M_i). \quad (۱)$$

^۱ - domain

^۲ - divisible module

اثبات: از گزاره ۲-۷ و استقرا نتیجه حاصل می شود. $\square$

دو مثال بعد نشان می دهند که نتیجه بالا لزوماً برای مجموع مستقیم نامتناهی و حاصلضرب مستقیم نامتناهی برقرار نمی باشد.

۲-۱۲ مثال: نشان خواهیم داد که در حالت کلی برای مجموعه اندیس گذار نامتناهی I

$$Att\left(\prod_{i \in I} M_i\right) \neq \bigcup_{i \in I} Att(M_i)$$

فرض کنیم $R := Z$ ، و برای $p = 2, 3, 5, 7, \dots$ تعریف می کنیم $M_R := \prod_p Z/pZ$. زیر مدول $N_R := \bigoplus_p Z/pZ$ را در نظر بگیرید. ادعا می کنیم $ann_R(M/N) = 0$.

برای رسیدن به این ادعا، مشاهده می کنیم که اگر $\alpha \in R$ ، $\alpha \neq 0$ ، آنگاه $(\alpha, \alpha, \dots) = (1, 1, \dots)$ شامل تعداد نامتناهی درایه غیر صفر است (البته، فقط تعداد متناهی عدد اول α را عادی می کنند). بنابراین $(\alpha, \alpha, \dots) \notin N$ و لذا $\alpha \notin ann_R(M/N)$.

ادعا می کنیم $(M/N)_R$ هم اول است. برای اثبات این ادعا فرض می کنیم $N_R \subseteq T_R \neq M_R$ و α ای وجود داشته باشد به طوری که $M\alpha \subseteq T$. کافی است نشان دهیم $\alpha = 0$. فرض می کنیم $\alpha \neq 0$ و تجزیه اول زیر را برای α در نظر می گیریم:

$$\alpha = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

که p_i ها اعداد اول متمایزند. بوضوح $M\alpha = \prod_{p \neq p_i} Z/pZ$. بنابراین $N_R + \prod_{p \neq p_i} Z/pZ \subseteq T_R$. اما

، پس $N_R + \prod_{p \neq p_i} Z/pZ = M_R$ که یک تناقض است. بنابراین $\alpha = 0$. در نتیجه

اما $\{0\} \in Att(M_R)$ ، پس نتیجه ۲-۱۱ در حالت کلی برای حاصلضرب مستقیم نامتناهی برقرار نمی باشد. $\square$

۲-۱۳ مثال: در این مثال نشان خواهیم داد در حالت کلی برای مجموعه اندیس گذار نامتناهی I

$$Att(\bigoplus_{i \in I} M_i) \neq \bigcup_{i \in I} Att(M_i)$$

کافی است حلقه ای مانند R و مدولی مانند M_R پیدا کنیم که $Att(M_R) \subsetneq Att(R_R)$. زیرا مدول M_R تصویر همریخت $R -$ مدول آزاد $\bigoplus_{i \in I} R_R$ می باشد (برای مجموعه اندیس گذار مانند I). بنابراین بنا بر گزاره ۷-۲، $Att(M_R) \subseteq Att(\bigoplus_{i \in I} R_R)$ ، و چون $\bigcup_{i \in I} Att(R_R) = Att(R_R)$ ، نتیجه مورد نظر به دست می آید.

به طور مثال، R را به عنوان حلقه ارزیاب گسسته^۱ (یک دامنه ایده آل اصلی است که دقیقاً یک ایده آل اول ناصفر دارد) با ایده آل ماکسیمال $\underline{m} := (\pi)$ در نظر می گیریم که $\pi \in R$. بنابراین $Att(R_R) = \{\underline{m}\}$ که این نتیجه برای هر حلقه موضعی و جابجایی $(R, \underline{m})$ برقرار است. فرض کنید K میدان کسره‌های R باشد. بنابراین K_R بخش پذیر است و گزاره ۱۰-۲ نشان می دهد که $Att(K_R) = \{(\circ)\}$ □

در فصل ۵ نشان خواهیم داد که نتیجه ۱۱-۲ در حالتی که $(\bigoplus M_i)_R$ یک مدول باس باشد، برای مجموع های مستقیم نامتناهی نیز برقرار است.

هدف بعدی ما این است که دوگانی برای این نتیجه که اگر N_R یک زیر مدول اساسی^۲ (زیر مدولی است که اشتراک آن با هر زیر مدول ناصفر، ناصفر است) از M_R باشد آنگاه $Ass(N_R) = Ass(M_R)$ ، ارائه دهیم.

۱۴-۲ گزاره: اگر $S_R \subseteq M_R$ یک زیر مدول کوچک باشد آنگاه $Att(M/S)_R = Att(M_R)$.

اثبات: با توجه به گزاره ۷-۲، همیشه برقرار است، پس کافی است $\supseteq$ را نشان دهیم. فرض کنید $p \in Att(M_R)$. در این صورت مدول خارج قسمت هم اول $(M/N)_R$ وجود دارد به طوری که

$$p = ann(M/N)_R. \text{ خارج قسمت } \frac{M/N}{(N+S)/N} \cong M/N + S \text{ از } (M/N)_R \text{ را در نظر بگیرید. این}$$

^۱ - discrete valuation ring

^۲ - essential submodule

مدول خارج قسمتی ناصفر است (چون $N \neq M$ اگر $M = N + S$ ، با کوچک بودن S_R در تناقض

است). بنابراین $p = ann(M/N + S)$. اما $M/N + S \cong \frac{M/S}{(N+S)/S}$ خارج قسمتی هم اول از

$(M/S)_R$ است. پس $p \in Att(M/S)_R$. $\square$

۱۵-۲ گزاره: اگر R یک ایده آل اول منحصر بفرد مانند m داشته باشد، آنگاه برای هر مدول M_R ،

$$Att(M_R) = \phi \Leftrightarrow M = Mm.$$

اثبات: فرض می کنیم $M = Mm$. فرض کنید $(M/N)_R$ ، یک R -مدول هم اول باشد. چون

$ann(M/N)_R$ یک ایده آل اول است پس $ann(M/N)_R = m$. در نتیجه $M = Mm \subseteq N$ ، که یک

تناقض است. بنابراین $Att(M_R) = \phi$.

برعکس، اگر $M \neq Mm$ ، آنگاه $(M/Mm)_R$ هم اول است و $ann(M/Mm) = m$ ، که تناقض با

تهی بودن مجموعه ایده آل های اول الحاقی M_R دارد. $\square$

۱۶-۲ مثال: فرض کنید R حلقه جابجایی و نوتری $Q[x_1, x_2, \dots]$ باشد به طوری که برای هر

$i \in N$ ، $x_i^2 = 0$. N_R را به عنوان یک مدول به طور آزاد تولید شده توسط خانواده ای نامتناهی و

شمارا از مولد های $e_1, e_2, \dots$ در نظر بگیرید. فرض کنید M_R زیر مدولی از N_R است که در آن برای

هر $i \geq 2$ ، $e_i x_i = e_{i-1}$. بوضوح $M_R \neq 0$. $m := (x_1, x_2, \dots)$ تنها ایده آل اول R می باشد. بنابراین

برای اثبات اینکه $Att(M_R) = \phi$ ، با توجه به گزاره ۱۵-۲، کافی است نشان دهیم، $M = Mm$. اما این

امر بدیهی است، زیرا برای هر مولد M_R داریم $e_i = e_{i+1} x_{i+1} \in Mm$. پس مثالی ارائه شد که در آن

یک مدول ناصفر، هیچ ایده آل اول الحاقی ندارد. $\square$

در مثال بالا مشکل از آنجا ناشی می شود که مدول با تولید متناهی نیست.

۱۷-۲ قضیه: فرض کنید $M_R \neq 0$. اگر $ann(Q_\circ)_R$ عضو ماکسیمالی از خانواده $\{ann(Q_R)\}$ باشد که

Q_R ها خارج قسمت های ناصفر M_R هستند، آنگاه $Q \in \text{Att}(M_R)$ هم اول است و $\text{ann}(Q)_R \in \text{Att}(M_R)$.

در حالت خاص، اگر R ، یک حلقه نوتری چپ یا راست باشد آنگاه برای $M_R \neq 0$ داریم

$$\text{Att}(M_R) \neq \emptyset$$

برهان: واضح است. $\square$

۱۸-۲ مثال: بوضوح عکس قضیه ۱۷-۲ برقرار نمی باشد، یعنی هر عضو از $\text{Att}(M_R)$ لزوماً یک

پوچ ساز ماکسیمال نیست. به طور مثال فرض کنیم p یک عدد اول باشد و

$$M := E(Z/pZ) \oplus Z/pZ. \text{ در این صورت } \text{Att}(M_Z) = \{(0), pZ\}, \text{ دارای ایده آل اول الحاقی } (0)$$

است که یک پوچ ساز ماکسیمال برای یک مدول خارج قسمتی ناصفر از M_Z نمی باشد.

۱۹-۲ مثال: نه تنها $\text{Att}(M_R)$ ممکن است تهی باشد، بلکه می تواند نامتناهی نیز باشد. فرض کنید

$$R := M := Z. \text{ فرض کنید } p \neq 0 \text{ یک عدد اول باشد. در این صورت } \text{ann}(Z/pZ) = pZ \text{ که}$$

Z/pZ هم اول است (زیرا یک مدول ساده است). بنابراین $pZ \in \text{Att}(M_R)$ ، و لذا

$$\text{Att}(M_R) = \{pZ, 2pZ, 3pZ, \dots\} \quad \square$$

با توجه به مثال ۱۹-۲، به دنبال شرایطی هستیم که $|\text{Att}(M_R)| < \infty$.

۲۰-۲ گزاره: فرض کنید M_R یک مدول آرتینی روی حلقه دلخواه R باشد، در این صورت

$$|\text{Att}(M_R)| < \infty$$

اثبات: فرض کنید $\mathfrak{A}$ خانواده ای از زیر مدول های $N_R \subseteq M_R$ باشد که $|\text{Att}(M/N)_R| < \infty$. توجه

داریم که $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ ؛ زیرا $M \in \mathfrak{A}$. پس $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ دارای عنصر مینیمالی مانند $(N_0)_R \in \mathfrak{A}$ است. از گزاره

$$7-2 \text{ نتیجه می گیریم } \text{Att}(M_R) \subseteq \text{Att}(N_0)_R \cup \text{Att}(M/N_0)_R.$$

اگر $\text{Att}(N_0)_R = \emptyset$ ، حکم برقرار است. بنابراین فرض می کنیم $\text{Att}(N_0)_R \neq \emptyset$. فرض کنید

$$p \in \text{Att}(N_0)_R. \text{ با توجه به تعریف } R\text{-مدول هم اول مانند } (N_0/N_1)_R \text{ وجود دارد به طوری که}$$

$$\text{ann}(N_0/N_1) = p. \text{ پس } \text{Att}(N_0/N_1) = p. \text{ با استفاده مجدد از گزاره ۷-۲ (این بار برای } (M/N_1)_R \text{)}$$

داریم:

$$Att(M/N_1)_R \subseteq Att(N_0/N_1)_R \cup Att(M/N_0)_R = \{p\} \cup Att(M/N_0)_R$$

که یک مجموعه متناهی است. پس $|Att(M/N_1)| < \infty$. بنابراین $(N_1)_R \in \mathfrak{S}$ ، و چون

$$(N_1)_R \subset (N_0)_R \text{، با مینیمال بودن } (N_0)_R \text{ در تناقض است. } \square$$

۲۱-۲ یادآوری: عکس گزاره ۲-۲۰ برقرار نیست. به طور مثال R را میدان K و M_R را فضای

برداری از بعد نامتناهی روی K در نظر می گیریم. بوضوح M_R هم اول است (تنها پوچ ساز ممکن °

$$\text{است. پس } Att(M_R) = \{(\circ)\} \text{. } \square$$

۲۲-۲ یادآوری: علاوه بر مدول های آرتینی در گزاره ۲-۲۰، در نتیجه ۵-۱۳ خواهیم دید که همه

مدول ها روی حلقه های کامل راست، دارای تعداد متناهی ایده آل اول الحاقی هستند.

در [۱۵، لم ۳.۵۹] نشان داده شده است که یک مدول یکنواخت^۱ (مدولی ناصفر که اشتراک هر

دو زیر مدول ناصفر آن ناصفر باشد) حداکثر یک ایده آل اول وابسته دارد. در این قسمت دوگانی

برای این حکم ارائه می دهیم.

یاد آوری می کنیم که مدول پوچ^۲ M_R ، مدول ناصفری است که حاصل جمع هر دو زیرمدول سره

از آن نیز، سره است.

۲۳-۲ گزاره: اگر R یک حلقه دلخواه و M_R یک مدول پوچ باشد آنگاه $|Att(M_R)| \leq ۱$.

اثبات: فرض کنید $p_1, p_r \in Att(M_R)$ ، که برای مدول های خارج قسمتی هم اول $(Q_i)_R$ از M_R

داریم $p_i = ann(Q_i)_R$. فرض می کنیم $(Q_i)_R \cong M/T_i$ ، که $(T_i)_R$ زیر مدول سره ای از M_R است. از

آنجا که M_R پوچ است، $T_R := T_1 + T_r$ یک زیر مدول سره از M_R است. فرض می کنیم $Q = M/T$.

ادعا می کنیم برای $i = ۱, ۲$ ، $p_i = ann(Q)_R$. اما این ادعا واضح است، زیرا $Q_i \cong M/T \cong Q_R$ یک

خارج قسمت ناصفر مدول هم اول $(Q_i)_R$ است. بنابراین برای $i = ۱, ۲$ ، $ann(Q_R) = ann(Q_i)_R = p_i$. $\square$

^۱ - uniform

^۲ - hollow (co-uniform)

عکس گزاره بالا برقرار نیست. به عنوان مثال، فرض کنید R یک میدان باشد و $M := R \oplus R$.

به وضوح M پوچ نیست و $Att(M_R) = Att(R_R) = \{0\}$.

اگر حلقه R در شرایط زنجیر صعودی روی ایده آل ها صدق کند، از ۲-۱۷ و ۲-۲۳ نتیجه می گیریم که هر مدول پوچ M_R دارای دقیقاً یک ایده آل اول الحاقی است. گزاره بعدی این ایده آل اول الحاقی را توصیف می کند.

۲-۲۴ گزاره: فرض کنید حلقه R در شرایط زنجیر صعودی روی ایده آل ها صدق می کند. اگر M_R

یک مدول پوچ روی این حلقه باشد آنگاه $Att(M_R) = \{p\}$ ، که $p := \{r \in R : MrR \neq M\}$.

اثبات: با توجه به گزاره های ۲-۱۷ و ۲-۲۳ برای ایده آل اولی مانند q ، $Att(M_R) = q$. باید نشان

دهیم $p = q$. با توجه به تعریف، زیر مدول $N_R \subset M_R$ وجود دارد به طوری که $q = ann(M/N)_R$.

اگر $x \in q$ ، آنگاه $MxR \subseteq N \neq M$ ، بنابراین $x \in p$.

برعکس، اگر $x \in p$ ، آنگاه $MxR \neq M$. چون M_R پوچ است، لذا $MxR + N_R \neq M_R$. از

هم اول بودن $(M/N)_R$ ، نتیجه می گیریم $q = ann(M/MxR + N)$ که به وضوح شامل x است.

بنابراین $p = q$. $\square$

بحث را در مورد کرانداری تعداد ایده آل های اول الحاقی ادامه می دهیم.

در [۱۵، تمرین ۶.۲] نشان داده می شود که برای مدول M_R ، $|Ass(M_R)| \leq u.dim(M_R)$.

یاد آوری می کنیم:

$u.dim(M_R) = Sup\{k : k \text{ زیر مدول ناصفر است} : k\}$

در [۲۱] دوگانی برای مفهوم بالا ذکر شد.

۲-۲۵ تعریف: هم بعد^۱ مدول M_R به صورت زیر تعریف می شود:

$corank M := Sup\{k : N_i \neq 0, i \text{ برای هر } i, M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k N_i \text{ وجود دارد به طوری که}\}$

^۱ - corank (co-uniform)

۲۶-۲ لم: [۲۱] فرض کنید $f : M \rightarrow \prod_{i=1}^k N_i$ ، که برای هر i ، $f_i : M \rightarrow N_i$ پوشاست. فرض کنید

$K_i = \ker f_i$ و برای هر $1 \leq i \leq k$ ، $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq k, j \neq i} K_j$. در این صورت f یک بروریختی است اگر و تنها

اگر برای $1 \leq i \leq k$ ، $K_i + L_i = M$.

دو گزاره بعدی از لم ۲۶-۲ نتیجه می شوند.

۲۷-۲ گزاره: [۲۱] مدول M پوچ است اگر و تنها اگر $\text{corank } M = 1$.

۲۸-۲ گزاره: [۲۱] فرض کنید M یک R -مدول باشد به طوری که $\text{corank } M = k$. فرض کنید

$f : M \rightarrow \prod_{i=1}^k N_i$ یک نگاشت پوشا باشد که برای هر i ، $N_i \neq 0$. در این صورت هر N_i پوچ است و

$\ker f$ در M کوچک است.

۲۹-۲ گزاره: برای مدول دلخواه M_R ، $|Att(M_R)| \leq \text{corank}(M_R)$.

اثبات: فرض می کنیم $\text{corank}(M_R) = k < \infty$. بنابراین مدول های پوچ $H_1, H_2, \dots, H_k$ و

همریختی پوشای $\varphi : M \rightarrow H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$ وجود دارند به طوری که $K_R := \ker \varphi$ زیر

مدول کوچکی از M_R است. بنابراین

$$|Att(M_R)| = |Att(M/K)_R| = |Att(H_1 \oplus \dots \oplus H_k)| = \left| \bigcup_{i=1}^k Att(H_i) \right| \leq \sum_{i=1}^k |Att(H_i)| \leq k$$

که به ترتیب از گزاره های ۲-۱۴، ۲-۱۱، ۲-۲۳ استفاده شده است. $\square$

در گزاره ۲-۲۰ مشاهده کردیم که مدول های آرتینی دارای تعداد متناهی ایده آل اول الحاقی

هستند. مک دونالد نشان داد [۱۶، قضیه ۵.۲] که یک مدول آرتینی روی یک حلقه جابجایی نمایشی

است.

در [۱۷] ثابت شده است که اگر M_R طول متناهی روی حلقه جابجایی R ، داشته باشد آنگاه

$Ass(M_R) = Att(M_R)$. در حالت کلی این نتیجه حتی برای مدول های آرتینی روی حلقه های

جابجایی برقرار نیست. به عنوان مثال، اگر p یک عدد اول طبیعی باشد آنگاه $Att(Z_{p^\infty}) = \{(\circ)\}$ و $Ass(Z_{p^\infty}) = \{(p)\}$.

مثال بعدی نشان می دهد که اگر R یک حلقه ناجابجایی باشد، حتی برای مدول های با طول متناهی نیز ممکن است مجموعه ایده آل های اول وابسته و مجموعه ایده آل های اول الحاقی با هم برابر نباشند.

۳۰-۲ مثال: فرض کنید K یک میدان باشد. حلقه $R := \begin{bmatrix} K & \circ \\ K & K \end{bmatrix}$ از ماتریس های پایین مثلثی 2×2 روی K را در نظر بگیرید. $\begin{bmatrix} K & \circ \\ K & K \end{bmatrix} \supseteq \begin{bmatrix} K & \circ \\ K & \circ \end{bmatrix} \supseteq \begin{bmatrix} K & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \supseteq \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$ یک سری ترکیب روی R_R است. پس R_R با طول متناهی است.

حال مجموعه های $Att(R_R)$ و $Ass(R_R)$ را تعیین می کنیم.

با استفاده از [۱۳، گزاره ۱.۱۷] و یک محاسبه ساده می توانیم تمام ایده آل های ناصفر R را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\left\{ m_l := \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ K & K \end{bmatrix}, m_r := \begin{bmatrix} K & \circ \\ K & \circ \end{bmatrix}, a := \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ K & \circ \end{bmatrix} \right\}.$$

از آنجا که $a^2 = \circ$ ، $\circ$ یک ایده آل اول نیست. بعلاوه چون $m_l R m_r \subseteq a$ لذا a یک ایده آل اول نیست. بنابراین m_l و m_r تنها ایده آل های اول الحاقی از R هستند. خواهیم دید که برای حلقه دلخواه R ، $Max(R) \subseteq Att(R_R)$ (گزاره ۷-۵). پس $Att(R_R) = \{m_l, m_r\}$.

ادعا می کنیم $m_r \notin Ass(R_R)$. اگر $m_r \in Ass(R_R)$ ، آنگاه ایده آل راست I از R وجود دارد به طوری که $m_r = ann(I_R)$. بنابراین $I \cdot m_r = \circ$ (یعنی ماتریس صفر). ماتریس $\begin{bmatrix} a & \circ \\ b & c \end{bmatrix} \in I$ را در

نظر بگیرید. چون $\circ = \begin{bmatrix} a & \circ \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \circ \\ b & \circ \end{bmatrix}$ پس $a = b = \circ$. همچنین

$\circ = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ 1 & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ c & \circ \end{bmatrix}$ نشان می دهد که $c = \circ$. بنابراین $I = \circ$ ، که یک تناقض است.

بنابراین $m_v \notin \text{Ass}(R_R)$. چون R نوتری است پس $\text{Ass}(R_R) \neq \emptyset$. بنابراین $\text{Ass}(R_R) = \{m_1\}$ (در حقیقت $\text{ann}(m_v) = m_1$). $\square$

حال برای مدول های با طول متناهی مانند مثال ۲-۳۰ نتیجه ای ارائه می دهیم.

فرض کنید M_R یک مدول با طول متناهی n (مدولی که دارای سری ترکیب به طول n است) باشد. سری ترکیبی زیر را برای مدول M_R در نظر بگیرید:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

فرض کنید $\mathfrak{S} := \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ ، خانواده ای متناهی از عامل های ساده سری ترکیبی M_R باشد. مجموعه $\mathfrak{S}$ با توجه به قضیه ژردن هولدر^۱ به طور منحصر بفرد تعیین می شود. زیر مجموعه هایی از $\mathfrak{S}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\ell := \quad (2)$$

$\{S_i \in \mathfrak{S} : S_i \text{ به عنوان آخرین عامل سری ترکیب از سمت چپ دارد} : S_i \in \mathfrak{S}\}$

$$\wp := \quad (3)$$

$\{S_i \in \mathfrak{S} : S_i \text{ به عنوان آخرین عامل سری ترکیب از سمت راست دارد} : S_i \in \mathfrak{S}\}$

متناظر با تعاریف (۲) و (۳) تعاریف زیر را ارائه می دهیم:

$$p_\ell := \{p : p = \text{ann}(S_i), S_i \in \ell\}$$

$$p_\wp := \{p : p = \text{ann}(S_i), S_i \in \wp\}$$

۲-۳۱ قضیه: با توجه به تعاریف بالا

$$\text{Ass}(M_R) = p_\ell, \quad \text{Att}(M_R) = p_\wp$$

برهان: فرض کنید $p \in \text{Ass}(M_R)$. زیر مدول اول $N_R \subseteq M_R$ وجود دارد به طوری که $p = \text{ann}(N_R)$.

^۱ - Jordan-Holder

از آنجا که M_R دارای طول متناهی است می توانیم N_R را ساده در نظر بگیریم. $\circ \subset N \subset M$ را به

عنوان سری ترکیبی M_R در نظر می گیریم. پس $p \in p_\ell$.

به عکس، فرض می کنیم $p \in p_\ell$. بنابراین $S_i \in \ell$ وجود دارد که $p = ann(S_i)$. از آنجا که S_i

زیر مدول ساده ای از M_R است، $p \in Ass(M_R)$ حکم دوم نیز به همین صورت ثابت می شود. $\square$

۳۲-۲ مثال: اگر M_R یک سری ترکیب منحصر بفرد داشته باشد، آنگاه

$$|\ell| = |\wp| = |p_\ell| = |p_\wp| = 1$$

بنابراین مجموعه های $Ass(M_R)$ و $Att(M_R)$ تک عضوی هستند.

به طور مثال فرض می کنیم R حلقه ماتریس های پایین مثلثی 3×3 روی میدان K و

$$M_R = \begin{bmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} - R \text{ مدولی از بردارهای به طول سه روی } K \text{ باشند.}$$

به سادگی بررسی می شود، M_R دارای یک سری ترکیب منحصر بفرد است. با محاسبه پوچ

سازهای اولین و آخرین عامل ترکیب داریم:

$$Ass(M_R) = \left\{ \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ K & K & \circ \\ K & K & K \end{bmatrix} \right\}, \quad Att(M_R) = \left\{ \begin{bmatrix} K & \circ & \circ \\ K & K & \circ \\ K & K & \circ \end{bmatrix} \right\}$$

پوچ ساز عامل وسطی ترکیب $\begin{bmatrix} K & \circ & \circ \\ K & \circ & \circ \\ K & K & K \end{bmatrix}$ است که یک ایده آل اول است که نه وابسته و نه

الحاقی است. $\square$

۳۳-۲ قضیه: [۲۰] اگر R یک حلقه جابجایی نوتری و E_R یک R -مدول انژکتیو باشد،

$$Att(E_R) \subseteq Ass(R_R) \text{ آنگاه}$$

این قضیه در حالت کلی برای حلقه های ناجابجایی برقرار نمی باشد. با توجه به مثال ۲-۳۰، مدول

ساده $E_R := (m_1/m_1, m_r)_R$ را در نظر می گیریم. بوضوح $ann(E_R) = m_r$. بنابراین

$$Att(E_R) = \{m_r\} \not\subset Ass(R_R)$$

در این مثال R نوتری و E_R انژکتیو است (فرض کنید $S = M_r(k)$). در این صورت S_R انژکتیو

است و چون $E_R \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ جمعونند مستقیمی از S_R است پس E_R نیز انژکتیو است). بنابراین

عامل مشکل را در این مثال ناجابجایی بودن حلقه R است.

۲-۳۴ گزاره: فرض کنید M_R یک مدول آرتینی روی حلقه R باشد که در شرط زنجیر صعودی

روی ایده آل ها صدق می کند. در این صورت سری

$$0 \neq M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = M$$

از زیر مدول های M وجود دارد به طوری که هر عامل سری M_i/M_{i-1} یک مدول هم اول است.

اثبات: فرض کنید

$$\mathfrak{N} := \{ N \subset M : N \text{ دارای یک سری مانند آنچه در قضیه مفروض است می باشد.} \}$$

با توجه به شرط زنجیر های صعودی روی R ، مجموعه $\{ann(M/N) : N \subset M\}$ دارای عضو

ماکسیمال مانند $ann(M/N')$ می باشد. با توجه به ماکسیمال بودن، M/N' هم اول است. پس

$N' \in \mathfrak{N}$ ؛ و لذا $\mathfrak{N} \neq \emptyset$. از آنجا که M_R آرتینی است پس $(\mathfrak{N}, \subseteq)$ دارای عنصر مینیمال $N_0 \in \mathfrak{N}$

می باشد. کافی است نشان دهیم $N_0 = 0$. اگر N_0 ناصفر باشد، روند بالا را تکرار می کنیم (N_0 به

جای M) و مدول هم اول N_0/N_1 را به دست می آوریم. با استفاده از سری

$$M/N_0 = M_n/N_0 \supset M_{n-1}/N_0 \supset \dots \supset M_1/N_0 \supset N_0/N_0 = 0 \quad (4)$$

برای M/N_0 ، سری

$$M/N_1 = M_n/N_1 \supset M_{n-1}/N_1 \supset \dots \supset M_1/N_1 \supset N_0/N_1 \supset N_1/N_1 = 0 \quad (5)$$

برای M/N_1 بدست می آید، به غیر از N_0/N_1 (که بوضوح هم اول است)، عامل های سری در

(۵) همان عامل های سری (۴) هستند که همگی هم اولند. پس $N_1 \in \mathfrak{N}$. اما $N_1 \subset N_0$ که

با مینیمال بودن N در تناقض است. $\square$

فصل سوم

ایده آل های اول الحاقی تحت هم ارزی رسته

فصل سوم

ایده آل های اول الحاقی تحت هم ارزی رسته ای

در این بخش، رفتار ایده آل های اول الحاقی را تحت هم ارزی رسته ها بررسی می کنیم و نتایج را روی ماتریس ها به عنوان یک حالت خاص اعمال می کنیم.

فرض کنید R و S دو حلقه، و M_R (M_S) نشان دهنده رسته همه R - مدول های راست (S - مدول ها) باشد. همچنین فرض کنید فانکتور های همورد $G : M_S \rightarrow M_R$ و $F : M_R \rightarrow M_S$ هم ارزی های رسته ای باشند به طوری که $G \circ F = \text{id}_{M_R}$ و $F \circ G = \text{id}_{M_S}$ که به ترتیب فانکتور های همانی روی رسته های M_R و M_S هستند.

۳-۱ گزاره: فرض کنید $N_S \in M_S$. در این صورت هم اول بودن مدول N_S تحت هم ارزی رسته ای حفظ می شود.

اثبات: فرض می کنیم مدول N_S هم اول است. ثابت می کنیم $G(N)_R$ نیز یک R - مدول هم اول

است. فرض کنید $N'_R \subset G(N)_R$. باید نشان دهیم $ann(G(N)/N')_R = ann(G(N)_R)$ با کاربرد F برای تابع پوشای $G(N)_R \rightarrow (G(N)/N')_R$ ، نتیجه می گیریم که $F(G(N)/N')_S$ با خارج قسمت ناصفری از N_S یکرخت است، بنابراین با توجه به هم اول بودن N_S ، $ann(F(G(N)/N')_S) = ann(N_S)$ اما با توجه به قضیه ۱-۴۵ پوچ ساز اول متناظر با $ann(G(N)/N')_R$ و پوچ ساز دوم متناظر با $ann(G(N))_R$ می باشد. پس $ann(G(N)/N')_R = ann(G(N))_R$. $\square$

حال با در نظر گرفتن هم ارزی رسته ای $G: M_S \rightarrow M_R$ ، نگاشت دو سویی مجموعه ایده آل های (دوطرفه) حلقه S و ایده آل های (دوطرفه) حلقه R را تعریف می کنیم.

۲-۳ تعریف: با توجه به آنچه گفته شد، اگر I ایده آلی از حلقه S باشد تعریف می کنیم

$$g(I) := ann(G(S/I))_R.$$

به راحتی می توان نشان داد که g یک نگاشت دو سویی از ایده آل های S به ایده آل های R است. به طور مشابه می توانیم نگاشت f از ایده آل های R به ایده آل های S تعریف کنیم. بوضوح f و g معکوس هم هستند.

با استفاده از گزاره قبل و دوسویی بودن g ، رابطه بین ایده آل های اول الحاقی S - مدول M_S و R - مدول متناظر $G(M)_R$ را بیان می کنیم.

۳-۳ گزاره: با توجه به قراردادهای پاراگراف قبل، $Att(G(M)_R) = g(Att(M_S))$.

اثبات: فرض کنید $p \in Att(M_S)$ و Q_S خارج قسمت هم اولی از M_S باشد که $p = ann(Q_S)$. از آنجا که Q_S و $(S/p)_S$ دارای پوچ سازهای برابر در S هستند پس مدول های متناظر آنها یعنی $G(Q)_R$ و $G(S/p)_R$ دارای پوچ سازهای برابر در R هستند. اما با توجه به تعریف ۲-۳، پوچ ساز $G(S/p)_R$ با $g(p)$ برابر است. پس $g(p) = ann(G(Q)_R)$. با توجه به ۱-۳، خارج قسمت هم اولی از $G(M)_R$ است، پس $g(p) \in Att(G(M)_R)$. بنابراین $g(Att(M_S)) \subseteq Att(G(M)_R)$.

به عکس، با کاربرد بحث بالا برای نگاشت f (معکوس g) داریم
 $f(Att(G(M)_R)) \subseteq Att(F(G(M)_S)) = Att(M_S)$ داریم
 $\square. Att(G(M)_R) \subseteq g(Att(M_S))$

در این قسمت کاربردی برای گزاره ۳-۳ ارائه می دهیم. حلقه S و حلقه ماتریسی $R := M_n(S)$ را در نظر می گیریم. فانکتور همورد G را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$G : M_S \rightarrow M_R$$

$$G(M)_R := M^{(n)}$$

که $M^{(n)}$ مجموعه تمام بردارهای سطری به طول n می باشد. با در نظر گرفتن عمل ضرب ماتریسی از راست، این مجموعه تشکیل یک R -مدول می دهد. در برهان قضیه ۴۴-۱ نشان داده شده است که G یک هم ارزی رسته ای است.

$$\text{۳-۴ نتیجه: } Att((M^{(n)})_R) = \{M_n(p) : p \in Att(M_S)\}$$

اثبات: برای ایده آل دلخواه I از S داریم $g(I) = ann(((S/I)^{(n)})_R) = M_n(I)$ بنابراین

$$g(Att(M_S)) = \{M_n(p) : p \in Att(M_S)\} \text{ حال از گزاره ۳-۳ نتیجه بدست می آید. } \square$$

فصل چهارم

ایده آل های اول الحاقی روی حلقه چند جمله ایهای اریب

فصل چهارم

ایده آل های اول الحاقی روی حلقه چند جمله ایهای اریب

فرض می کنیم $\sigma : R \rightarrow R$ یک خودریختی^۱ و S نمایانگر حلقه چند جمله ایهای اریب $R[x; \sigma]$ باشد. حال می توانیم مجموعه چند جمله ای های معکوس $M[x^{-1}]$ را به عنوان S -مدول در نظر بگیریم به طوری که برای هر $i, j \geq 0$ و $m \in M$ و $a \in R$,

$$(mx^{-i})(ax^j) := \begin{cases} m\sigma^{-i}(a)x^{-i+j} & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases} \quad (*)$$

۴-۱ تعریف: فرض کنیم $\sigma : R \rightarrow R$ یک درونریختی باشد. مدول M_R را σ -سازگار^۲ نامیم هرگاه برای هر $m \in M$ و $r \in R$ ، $mr = 0 \Leftrightarrow m\sigma(r) = 0$.

به وضوح زیر مدول یک مدول σ -سازگار، σ -سازگار است. همچنین می توان نشان داد اگر σ یک خود ریختی روی R باشد و مدول M_R ، σ -سازگار باشد آنگاه برای هر $i \in \mathbb{Z}$ ، مدول M_R ، σ^i -سازگار است.

^۱ - automorphism
^۲ - σ -compatible

۲-۴ تعریف: فرض کنیم $\sigma: R \rightarrow R$ یک درونریختی باشد. مدول M_R به طور کامل σ -سازگار^۱ نامیده می شود اگر برای هر زیر مدول $N_R \subseteq M_R$ ، مدول خارج قسمتی $(M/N)_R$ ، σ -سازگار باشد.

بوضوح هر مدول به طور کامل σ -سازگار، σ -سازگار است و هر خارج قسمت از یک مدول به طور کامل σ -سازگار نیز به طور کامل σ -سازگار است. با استفاده از تعریف به راحتی می توان ثابت کرد که اگر مدول M_R به طور کامل σ -سازگار، $m \in M$ و $r \in R$ ، آنگاه $r', r'' \in R$ وجود دارند به طوری که $m\sigma(r) = mrr'$ و $mr = m\sigma(r)r''$.

برای بررسی ایده آل های اول وابسته تحت بسط چند جمله ایهای اریب، نیازمند مفهوم σ -سازگار هستیم. اما با توجه به مثال ۴-۴ در ادامه، برای ایده آل های اول الحاقی به مفهوم به طور کامل σ -سازگار نیازمندیم.

برای ادامه بحث فرض می کنیم σ یک خودریختی از حلقه R باشد و $S = R[x; \sigma]$.
۳-۴ قضیه: فرض کنید M_R یک مدول روی حلقه دلخواه R باشد. اگر M_R به طور کامل σ -سازگار باشد، آنگاه:

$$Att(M[x^{-1}]_S) \supseteq \{p[x]: p \in Att(M_R)\}.$$

برهان: فرض کنید $p \in Att(M_R)$. در نتیجه زیر مدول N از M وجود دارد به طوری که $(M/N)_R$ هم اول است و $p = ann(M/N)_R$. کافی است ثابت کنیم

$$p[x] = ann(M[x^{-1}]/N[x^{-1}])_S \quad (۶)$$

و

$$M[x^{-1}]/N[x^{-1}] \text{ یک } S\text{-مدول هم اول است.} \quad (۷)$$

^۱ - completely σ -compatible

برای اثبات (۶) فرض می کنیم $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_\ell x^\ell \in S$ و

$m(x) = m_0 + m_1x^{-1} + \dots + m_kx^{-k} \in M[x^{-1}]$ اگر $f(x) \in p[x]$ ، آنگاه برای هر i و j ، $m_ia_j \in N$.

و چون M_R به طور کامل σ -سازگار است لذا $m_i\sigma^{-i}(a_j) \in N$ بنابراین $m(x)f(x) \in N[x^{-1}]$.

به عکس، اگر $f(x) \notin p[x]$ ، آنگاه حداقل یک i وجود دارد که $a_i \notin p$. بنابراین $m \in M$ وجود

دارد به طوری که $ma_i \notin N$. با توجه به به طور کامل σ -سازگار بودن M_R ، جمله ثابت

$(mx^{-i})f(x)$ یعنی $m\sigma^{-i}(a_i)$ در N_R نیست. پس $f(x) \notin \text{ann}(M[x^{-1}]/N[x^{-1}])_S$.

برای اثبات (۷) توجه داریم که $M[x^{-1}]/N[x^{-1}]$ یک مدول ناصفر است. زیر مدول سره

$Q_S \supseteq N[x^{-1}]_S$ از $M[x^{-1}]_S$ را در نظر می گیریم. باید نشان دهیم

$$\text{ann}(M[x^{-1}]/N[x^{-1}])_S = \text{ann}(M[x^{-1}]/Q)_S \quad (۸)$$

به وضوح $\subseteq$ برقرار است. برای اثبات عکس به مقدماتی نیازمندیم.

نماد گذاری: برای $k \geq 0$ ، قرار می دهیم

$$Q_k := \{m_k \in M : m_i \in M \text{ که } m_0 + m_1x^{-1} + \dots + m_kx^{-k} \text{ شکل}$$

به وضوح $Q_k \in Q$ و Q_k شامل همه ضرایب پیشرو عناصر Q از درجه k است.

تذکر: برای هر $k \geq 0$ ، Q_k یک R -زیر مدول از M است. برای بررسی آن، مشاهده می کنیم که

اگر $m_k \in Q_k$ و $r \in R$ ، آنگاه:

$$(m_0 + \dots + m_kx^{-k})\sigma^k(r) = m_krx^{-k} + \dots + m_0\sigma^k(r) \in Q$$

(زیرا Q یک R -مدول است). بنابراین $m_kr \in Q_k$.

حال از اینکه $Q \neq M[x^{-1}]$ ، $k \geq 0$ وجود دارد به طوری که $Q_k \neq M$. این k را ثابت در

نظر می گیریم. اگر $n \in N$ ، آنگاه $nx^{-k} \in N[x^{-1}] \subseteq Q$ ، بنابراین $n \in Q_k$ و لذا $N_R \subseteq (Q_k)_R$. پس از

اینکه $(M/N)_R$ و p پوچ ساز آن است، داریم

$$p = \text{ann}(M/Q_k)_R \quad (۹)$$

حال با کمک گرفتن از (۹) می توانیم یک اثبات آسان برای $\supseteq$ در (۸) ارائه دهیم.

فرض کنید $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_\ell x^\ell \in S$ و $M[x^{-1}]f(x) \subseteq Q$. برای اینکه نشان دهیم $M[x^{-1}]f(x) \subseteq N[x^{-1}]$ کافی است نشان دهیم که برای هر i ، $a_i \in p$ ، که برای اثبات آن از استقرا استفاده می کنیم. فرض کنید $m \in M$. با توجه به فرض

$$(mx^{-k})f(x) = m\sigma^{-k}(a_0)x^{-k} + \dots$$

عنصری از Q است. پس $m\sigma^{-k}(a_0) \in Q_k$ در نتیجه $M\sigma^{-k}(a_0) \subseteq Q_k$. بنابراین $\sigma^{-k}(a_0) \in \text{ann}(M/Q_k)$ و با توجه به، به طور کامل σ -سازگار بودن و (۹) داریم $a_0 \in \text{ann}(M/Q_k) = p$.

به استقرا فرض می کنیم $a_0, a_1, \dots, a_i \in p$. نشان می دهیم که $a_{i+1} \in p$ با توجه به فرض

$$(mx^{-k-i-1})f(x) = \quad (10)$$

$$m\sigma^{-k-i-1}(a_0)x^{-k-i-1} + \dots + m\sigma^{-k-i-1}(a_i)x^{-k-i-1} + m\sigma^{-k-i-1}(a_{i+1})x^{-k-i-1} + \dots$$

عنصری از Q است. اما با توجه به فرض به طور کامل σ -سازگار بودن و از اینکه برای هر $j \leq i$ ، $ma_j \in Mp \subseteq N$ ، پس

$$m\sigma^{-k-i-1}(a_0)x^{-k-i-1} + \dots + m\sigma^{-k-i-1}(a_i)x^{-k-i-1} \in N[x^{-1}] \subseteq Q. \quad (11)$$

با کم کردن (۱۱) از (۱۰) داریم

$$m\sigma^{-k-i-1}(a_{i+1})x^{-k-i-1} + \dots \in Q$$

بنابراین $m\sigma^{-k-i-1}(a_{i+1}) \in Q_k$ و لذا $\sigma^{-k-i-1}(a_{i+1}) \in p$. بنابراین با توجه به بطور کامل σ -سازگار بودن داریم $a_{i+1} \in p$. پس اثبات (۸) و در نتیجه (۷) خاتمه می یابد. بنابراین $p[x] \in \text{Att}(M[x^{-1}]_S)$.

□

حال به اهمیت شرط به طور کامل σ -سازگار بودن M_R می پردازیم. مثال زیر نشان می دهد که این شرط حتی برای دامنه های ایده آل اصلی و جابجایی نیز لازم است.

۴-۴ مثال: فرض کنید F یک میدان از مشخصه صفر باشد، و $M := R := F[t]$ ، که (با توجه به

قضیه تقسیم) یک دامنه ایده آل اصلی است. برای هر ایده آل ماکسیمال $\underline{m}$ از R ، از اینکه $(R/\underline{m})_R$

هم اول و $\underline{m} \in \text{Att}(M_R)$ پس ساز آن است،

فرض کنید $\sigma: R \rightarrow R$ یک F -خودریختی باشد که $\sigma(t) = t+1$. قرار می دهیم $S := R[x, \sigma]$. توجه داریم از اینکه $M = R$ یک دامنه و σ یک خود ریختی است، نتیجه می شود که M_R ، σ -سازگار است. اما برای مدول خارج قسمتی $(R/\langle t \rangle)_R$ داریم $\bar{t} \neq \bar{0}$ و $\bar{t} \neq \bar{0} = \bar{t} \cdot (t+1)$. بنابراین این مدول خارج قسمتی σ -سازگار نیست. پس M_R ، σ -سازگار است، اما به طور کامل σ -سازگار نیست.

فرض کنید $I \in \text{Att}(M[x^{-1}]_S)$. باید ثابت کنیم $I \cap R = 0$. (پس برای $\underline{m} \subseteq R$ ، $\underline{m}[x] \neq I$ ، که قضیه ۳-۴ نقض می شود).

فرض کنیم $f(t) \in I \cap R$. خارج قسمت هم اول $(M[x^{-1}]/Q)_S$ وجود دارد به طوری که $I = \text{ann}(M[x^{-1}]/Q)_S$. از آنجا که $Q_S \neq M[x^{-1}]_S$ ، پس برای یک تک جمله ای داریم $m_0 x^{-i} \notin Q$. اندیس i را ثابت در نظر می گیریم و فرض می کنیم $Q_0 := \{m \in M : mx^{-i} \in Q\}$.

چون $(mx^{-i})\sigma^i(r) = mrx^{-i}$ ، لذا Q_0 یک ایده آل R است که شامل m_0 نیست. داریم $Q_0 = (g(t))$ ، که $g(t)$ وارون پذیر نیست. چون برای هر j ، $x^{-i-j} f(t)x^j \in Q$ ، پس برای هر j ، $f(t-i-j)x^{-i} \in Q$ و لذا $f(t-i-j) \in Q_0$. چند جمله ای $h_j(t) \in R$ وجود دارد به طوری که $f(t-i-j) = g(t)h_j(t)$. از آنجا که $g(t)$ وارون پذیر نیست، می توانیم ریشه ای از $g(t)$ در یک بستار جبری F پیدا کنیم. پس برای هر j ، $f(t_0 - j) = 0$. از آنجا که F دارای مشخصه صفر است پس $f(t) = 0$ (فرض می کنیم $j = n$ و $j = n'$ به طوری که $n \neq n'$ و $t_0 - n = t_0 - n'$). پس $n \cdot 1_F = n' \cdot 1_F = (n - n') \cdot 1_F = 0$ چون F دارای مشخصه صفر است پس $n = n'$ ، که یک تناقض است. بنابراین چند جمله ای f دارای بی نهایت ریشه متمایز است که نتیجه می شود f چند جمله ای صفر است). بنابراین $I \cap R = 0$. $\square$

در این قسمت براساس مثال ۲-۱۳، مثالی ارائه می دهیم که نشان می دهد در قضیه ۴-۳ تساوی لزوماً برقرار نیست.

۴-۵ مثال: فرض کنید R یک حلقه ارزیاب گسسته با ایده آل ماکسیمال $\langle \pi \rangle := \underline{m}$ باشد که $\pi \in R$ ، از مثال ۲-۱۳ داریم $Att(R_R) = \{\underline{m}\}$. فرض می کنیم $\sigma = Id$. برای $k \geq 0$ ، چند جمله ای معکوس $x^{-k} + \pi x^{-(k+1)} \in R[x^{-1}]$ را با m_k نمایش می دهیم. فرض کنید Q_S ، S - زیر مدولی از $R[x^{-1}]$ تولید شده به وسیله $\{m_k : k \geq 0\}$ باشد. به آسانی دیده می شود که $Q \subset R[x^{-1}]$. با توجه به اینکه برای هر $k \geq 1$ ، $m_k x = m_{k-1}$ و $m_0 x = \pi$ ، Q را می توان به عنوان R - زیر مدول از $R[x^{-1}]$ تولید شده به وسیله $\{\pi, m_k : k \geq 0\}$ در نظر گرفت. مدول خارج قسمتی $(R[x^{-1}]/Q)_S$ را در نظر می گیریم. از اینکه S نوتری است، لذا بنا بر قضیه ۲-۱۷، یک ایده آل اول الحاقی مانند I وجود دارد که $I \in Att(R[x^{-1}]/Q)_S \subseteq Att(R[x^{-1}]_S)$. حال کافی است ثابت کنیم $R \cap I = 0$ (در این صورت $I \neq m[x]$). با توجه به تعریف $p_S \supseteq Q_S$ وجود دارد به طوری که $(R[x^{-1}]/p)_S$ هم اول است و $ann(R[x^{-1}]/p) = I$. فرض کنیم $Q'_R \subseteq Q_R$ ، R - زیر مدولی از Q_R تولید شده به وسیله $\{m_k : k \geq 0\}$ باشد. Q' به طور سره مشمول در Q است، زیرا $\pi \in Q$ اما $\pi \notin Q'$. فرض کنید $M_R := e_0 R \oplus e_1 R \oplus \dots$ و $m_i := e_i + e_{i+1} \pi$. فرض کنید N_R ، R - زیر مدولی از M_R تولید شده بوسیله $\{m_i : i \in N\}$ باشد. به وضوح

$$(R[x^{-1}]/Q')_R \rightarrow (M/N)_R \quad (12)$$

یک یکرختی است. ادعا می کنیم (M/N) هم اول و صفر پوچ ساز آن است:

فرض کنید $N_R \subseteq T_R \neq M_R$. کافی است ثابت کنیم $ann(M/T)_R = \{0\}$. به عکس فرض می کنیم $k \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که $ann(M/T)_R = \langle \pi^k \rangle$ (با استفاده از ساختار ایده آل در حلقه ارزیاب گسسته).

فرض کنیم $i \geq 1$ ، داریم $e_{k+i} \pi^k \in T$ و با توجه به تعریف N_R ، $m_{k+i-1} \pi^{k-1} \in N \subseteq T$. بنابراین $m_{k+i-1} \pi^{k-1} - e_{k+i} \pi^k \in T$ با جایگزینی k با $k-1$ و ادامه همین روند نتیجه می گیریم

$e_i = m_i - e_{i+1}\pi \in T$ از آنجا که i دلخواه بود، $M_R := \oplus e_i R \subseteq T$ ، که یک تناقض است. بنابراین

$ann(M/T)_R = \{0\}$ ، پس $(M/N)_R$ هم اول و صفر پوچ ساز آن است. چون $p_R \supseteq Q_R \supseteq Q'_R$ ، از

$$(۱۲) \text{ نتیجه می گیریم } \square \circ = ann(R[x^{-1}]/p)_R = R \cap ann(R[x^{-1}]/p)_S = R \cap I$$

در فصل بعدی به دنبال مدول هایی هستیم که تساوی در قضیه ۴-۳ را نتیجه دهند. اما در این قسمت دو نتیجه روی توسیع چند جمله ای های اریب را که در فصل بعدی مورد نیازند ارائه می دهیم.

۴-۶ لم: فرض کنید p یک $S := R[x; \sigma]$ مدول باشد که σ یک خودریختی است. اگر p_S هم اول و p_R به طور کامل σ -سازگار باشد آنگاه p_R نیز هم اول است.

اثبات: فرض کنید $Q_R \subset p_R$ و برای $r \in R$ ، $pr \subseteq Q$ باید نشان دهیم $pr = 0$. فرض کنید

$$N_S := \sum_{Q'_S \subseteq Q_R} Q'_S, \quad N_S \subseteq Q_R \subset p_S \text{ چون } Q_R \text{ در } (راست) \text{ مشمول در } Q_R \text{ باشد.}$$

پس با توجه به هم اول بودن p_S ، $ann(p_S) = ann(p/N)_S$ کافی است ثابت کنیم $pr \subseteq N$. فرض

کنیم $P \in p$ با توجه به فرض $Pr \in Q$ ، S -مدول (راست) تولید شده بوسیله Pr را در نظر بگیرید.

ادعا می کنیم $PrS_S \subseteq N_S$ (در نتیجه $Pr \in N$). فرض کنید $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_\ell x^\ell \in S$ در

نتیجه $Prf(x) = Pra_0 + Px\sigma^{-1}(ra_1) + \dots + Px^\ell\sigma^{-\ell}(ra_\ell)$ چون $Px^i \in p$ با توجه به σ -سازگار

بودن $(p/Q)_R$ و اینکه $pr \subseteq Q$ ، نتیجه می گیریم $Px^i\sigma^{-i}(ra_i) \in Q_R$ بنابراین $PrS_S \subseteq Q_R$. حال با

$$\square \text{ توجه به تعریف } N_S, \quad PrS_S \subseteq N_S$$

عکس لم قبل برقرار نیست. برای مثال فرض کنید R یک میدان باشد و $\sigma = Id$. به وضوح هر

مدول ناصفر p_R هم اول است، اما اگر $p := R[x]/\langle x^2 \rangle$ ، آنگاه p_S هم اول نیست.

۴-۷ لم: مدول M_R را در نظر بگیرید. فرض کنید p_R یک R -زیر مدول ماکسیمال باشد و

برای $k \in N$ ، قرار می دهیم: $p_k := \{m \in M : mx^{-k} \in p\} \subseteq M$. در این صورت برای عدد ثابت

k ، یا $p_k = M$ یا p_k یک R -زیر مدول ماکسیمال از M_R است. در هر صورت $k \in N$ وجود دارد که p_k یک R -زیر مدول ماکسیمال از M_R است.

اثبات: به وضوح p_k یک R -زیر مدول از M_R است. زیرا اگر $mx^{-k} \in p$ ، آنگاه برای هر $r \in R$ ، $mx^{-k}\sigma^k(r) = mrx^{-k} \in p$ فرض کنید برای یک $k \in N$ ، $p_k \neq M$. باید نشان دهیم $p_k \subset M$ ماکسیمال است. زیر مدول M'_R را طوری در نظر بگیرید که $p_R \subset M' \subseteq M$. فرض می کنیم $m' \in M' - p_k$. با توجه به تعریف p_k ، $m'x^{-k} \notin p$ چون p_R یک R -زیر مدول ماکسیمال $M[x^{-1}]_R$ است پس $M[x^{-1}] = p + m'x^{-k}R_R$. کافی است ثابت کنیم $M' = M$. $m \in M$ را دلخواه در نظر می گیریم. در نتیجه $P \in p$ و $r \in R$ وجود دارند به طوری که $mx^{-k} = P + m'x^{-k}r$. بنابراین $P = (m - m'\sigma^{-k}(r))x^{-k} \in p$. با توجه به تعریف $p_k \subset M'$ ، $m - m'\sigma^{-k}(r) \in p_k$ و لذا $m \in M'$. بنابراین $M = M'$ ، و لذا p_k ماکسیمال است.

در مورد حکم آخر، اگر برای هر $k \in N$ ، $p_k = M$ ، آنگاه $p = M[x^{-1}]$ که یک تناقض است. $\square$

فصل پنجم

مدول های باس و حلقه های کامل راست

فصل پنجم

مدول های باس و حلقه های کامل راست

هدف ما در این فصل، بررسی نتایج فصل چهارم روی مدول های باس و حلقه های کامل راست می باشد. گزاره بعدی نتیجه ۲-۱۱ را در حالتی که $(\bigoplus M_i)_R$ ، یک مدول باس باشد بررسی می کند.

۵-۱ گزاره: خانواده $\{M_i : i \in I\}$ از R -مدول های راست را در نظر بگیرید (I مجموعه اندیس

گذار دلخواه است). اگر $\bigoplus_{i \in I} M_i$ یک مدول باس باشد آنگاه $\bigcup_{i \in I} \text{Att}(M_i) = \text{Att}(\bigoplus_{i \in I} M_i)$.

اثبات: رابطه شمول $\supseteq$ از گزاره ۲-۷ نتیجه می شود. به عکس، فرض کنید $p \in \text{Att}(\bigoplus_{i \in I} M_i)$.

بنابراین خارج قسمت هم اول $(\bigoplus_{i \in I} M_i)/Q$ وجود دارد به طوری که $p = \text{ann}(\bigoplus_{i \in I} M_i/Q)_R$. چون

$\bigoplus_{i \in I} M_i$ یک مدول باس است پس زیر مدول Q مشمول در یک زیر مدول ماکسیمال است. پس با

توجه به هم اول بودن، می توانیم Q_R را بوسیله این زیر مدول ماکسیمال از $(\bigoplus_{i \in I} M_i)_R$ جایگزین

کنیم. بنابراین فرض می کنیم Q_R یک زیر مدول ماکسیمال است. چون $Q_R \subset \bigoplus_{i \in I} M_i$ ، پس وجود

دارد $j \in I$ به طوری که $M_j \not\subset Q$. با توجه به ماکسیمال بودن Q_R ، $(Q + M_j)_R = (\bigoplus_{i \in I} M_i)_R$.

بنابراین $(\bigoplus_{i \in I} M_i / Q)_R = (Q + M_j) / Q \cong M_j / (Q \cap M_j)$ یک خارج قسمت هم اول از M_j با پوچ

ساز p است. پس $p \in \text{Att}(M_j)_R$. $\square$

در قضیه بعدی ثابت خواهیم کرد که در قضیه ۳-۴، اگر $M[x^{-1}]_R$ یک مدول باس باشد آنگاه تساوی نتیجه می شود.

۲-۵ قضیه: فرض کنید M_R یک مدول روی حلقه R باشد. اگر $M[x^{-1}]_R$ یک مدول باس و به طور

کامل σ - سازگار باشد، آنگاه

$$\text{Att}(M[x^{-1}]_S) = \{p[x] : p \in \text{Att}(M_R)\}.$$

برهان: با توجه به قضیه ۳-۴، کافی است $\subseteq$ را ثابت کنیم. فرض کنید $I \in \text{Att}(M[x^{-1}]_S)$ و

$Q_S \subset M[x^{-1}]_S$ به طوری که $(M[x^{-1}] / Q)_R$ هم اول است و $I = \text{ann}(M[x^{-1}] / Q)$. بنابراین

$I \cap R = \text{ann}(M[x^{-1}] / Q)_R$. با به کار بردن لم ۴-۶ برای مدول هم اول $(M[x^{-1}] / Q)_S$ نتیجه

می گیریم $(M[x^{-1}] / Q)_R$ نیز هم اول است. از آنجا که $M[x^{-1}]_R$ یک مدول باس است پس

$(M[x^{-1}] / Q)_R$ شامل زیر مدول ماکسیمال $(p/Q)_R \subseteq (M[x^{-1}] / Q)_R$ می باشد. چون $(M[x^{-1}] / Q)_R$ ،

هم اول است لذا،

$$I \cap R = \text{ann}(M[x^{-1}] / p)_R \text{ و } (M[x^{-1}] / p)_R \text{ هم اول است} \quad (۱۳)$$

با توجه به لم ۴-۷ وجود دارد $k \in N$ به طوری که $p_k \subset M$ یک R - زیر مدول ماکسیمال

است. کوچکترین k را ثابت در نظر می گیریم. فرض کنید $m_k x^{-k} \notin p$. پس $m_k x^{-k} + p$ یک مولد

برای مدول ساده $(M[x^{-1}] / p)_R$ می باشد. با توجه به (۱۳)، $I \cap R \in \text{Att}(M[x^{-1}] / p)_R$. بوسیله ارائه

یک تابع پوشا $M_R \rightarrow (M[x^{-1}] / p)_R$ (و با توجه به گزاره ۲-۷) می توان نتیجه گرفت

$I \cap R \in \text{Att}(M_R)$. از آنجا که $(M/p_k)_R$ ساده است پس هر عنصر از آن به فرم $(m_k + p_k)r$

می باشد که $r \in R$.

حال می توانیم نگاشت زیر را تعریف کنیم

$$\begin{aligned}\varphi: (M/p_k)_R &\rightarrow (M[x^{-1}]/p)_R \\ (m_k + p_k)r &\mapsto m_k x^{-k} r + p\end{aligned}$$

برای بررسی خوش تعریف بودن φ ، فرض می کنیم $m_k r \in p_k$ چون M_R به طور کامل

$$\sigma - \text{سازگار است پس } m_k \sigma^{-k}(r) \in p_k \text{ بنابراین } m_k x^{-k} r = m_k \sigma^{-k}(r) x^{-k} \in p$$

همچنین از آنجا که $\varphi(m_k + p_k) = m_k x^{-k} + p$ ، لذا تصویر φ ، $(M[x^{-1}]/p)_R$ را تولید می کند.

بنابراین φ پوشاست. از ترکیب φ با نگاشت طبیعی نگاشت مورد نظر به دست می آید. بنابراین

$$I \cap R \subseteq \text{Att}(M_R)$$

کافی است ثابت کنیم $I = (I \cap R)[x]$. چون I یک ایده آل از S است پس $\supseteq$ به وضوح برقرار

است. برای اثبات $\subseteq$ ، فرض می کنیم $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_\ell x^\ell \in I$ (با استفاده از (۱۳)) نشان

خواهیم داد برای هر $a_i \in I \cap R$ ، $i \leq \ell$.

با استقرا از a_0 شروع می کنیم. هر عنصر از $(M[x^{-1}]/p)_R$ به فرم $m_k \sigma^{-k}(r) x^{-k} + p$ است که

$r \in R$ داریم

$$(m_k \sigma^{-k}(r) x^{-k}) f(x) = m_k \sigma^{-k}(r a_0) x^{-k} +$$

از آنجا که "عناصر از درجه پایین تر" همه در p هستند (با توجه به مینیمال بودن k)، لذا

$$m_k \sigma^{-k}(r a_0) x^{-k} \in p \text{ بنابراین } m_k \sigma^{-k}(r) x^{-k} + p \text{ توسط } a_0 \text{ صفر می شود. پس}$$

$$a_0 \in \text{ann}(M[x^{-1}]/p)_R = I \cap R$$

به استقرا فرض می کنیم $a_0, a_1, \dots, a_i \in I \cap R$. در این صورت $a_{i+1} x^{i+1} + \dots + a_\ell x^\ell \in I$ نشان

خواهیم داد $m_k \sigma^{-k}(r) x^{-k} + p$ توسط a_{i+1} صفر می شود. داریم

$$(m_k \sigma^{-k}(r) x^{-k-i-1})(a_{i+1} x^{i+1} + \dots + a_\ell x^\ell) =$$

$$m_k \sigma^{-k}(r) \sigma^{-k-i-1}(a_{i+1}) x^{-k} + \text{عناصر از درجه پایین تر} \in Q \subseteq p$$

همانند قبل نتیجه می شود $m_k \sigma^{-k}(r) \sigma^{-k-i-1}(a_{i+1}) x^{-k} \in p$ بنابراین $m_k \sigma^{-k}(r) x^{-k} + p$

توسط $\sigma^{-i-1}(a_{i+1})$ صفر می شود. چون $M[x^{-1}]_R$ بطور کامل σ -سازگار است پس

$a_{i+1} \in \text{ann}(M[X^{-1}]/p)_R$ ، و استقرا کامل می شود. $\square$

توجه کنید که در قضیه قبل با فرض $\sigma = Id$ ، نتیجه ارائه شده توسط مل کرسن [۱۸] برای

ایده آل های اول الحاقی مدول $M[X^{-1}]_{R[X]}$ بدست می آید.

اگر $M[X^{-1}]_R$ به طور کامل σ -سازگار باشد آنگاه بوضوح M_R نیز به طور کامل σ -سازگار است. نتیجه ۴-۵ شرط کافی برای برقرار بودن عکس آن نیز ارائه می دهد. نتیجه ۴-۵ از گزاره زیر حاصل می شود.

۳-۵ گزاره: فرض کنید M_R و N_R دو مدول دلخواه روی حلقه R و σ یک خود ریختی از R باشد. اگر M_R بطور کامل σ -سازگار و شامل یک عنصر $m \in M$ باشد به طوری که $\text{ann}(m) \subseteq \text{ann}(N_R)$ ، آنگاه هم N_R و هم $N[X^{-1}]_R$ بطور کامل σ -سازگار هستند.

اثبات: زیر مدول $N'_R \subseteq N_R$ را در نظر بگیرید و فرض کنید برای $n \in N$ و $r \in R$ ، $nr \in N'$. $m \in M$ را مطابق آنچه در صورت گزاره آمده در نظر می گیریم. چون M_R به طور کامل σ -سازگار است پس برای یک $r' \in R$ ، $m\sigma(r) = mrr'$ ، بنابراین $m(\sigma(r) - rr') = 0$ (با توجه به فرض)

$$\sigma(r) - rr' \in \text{ann}(N_R) \quad (۱۴)$$

بنابراین $n\sigma(r) = nrr' \in N'$ به طور مشابه از $n\sigma(r) \in N'$ نتیجه می شود $nr \in N'$. پس $(N/N')_R$ ، σ -سازگار است. بنابراین N_R به طور کامل σ -سازگار است. به ویژه با توجه به (۱۴) و به طور کامل σ -سازگار بودن N_R ، برای هر $i \in \mathbb{Z}$ ،

$$\sigma^{-i+1}(r) - \sigma^{-i}(rr') \in \text{ann}(N_R) \quad (۱۵)$$

زیر مدول $Q_R \subseteq N[X^{-1}]_R$ را در نظر بگیرید و فرض کنید برای $r \in R$ و $n(x) \in N[X^{-1}]_R$

$n(x)r \in Q$ همچنین فرض کنید $n(x) = \sum_{i=0}^k n_i x^{-i}$ که $n_i \in N$ با توجه به (۱۵)

$$n(x)\sigma(r) = \sum_{i=0}^k n_i \sigma^{-i+1}(r) x^{-i} = \sum_{i=0}^k n_i \sigma^{-i}(rr') x^{-i} = \left(\sum_{i=0}^k n_i x^{-i} \right) rr' = n(x)rr' \in Q.$$

بعکس می بینیم که اگر $n(x)\sigma(r) \in Q$ ، آنگاه $n(x)r \in Q$. پس $N[x^{-1}]_R$ نیز به طور کامل σ -سازگار است. $\square$

۴-۵ نتیجه: فرض کنید M_R یک مدول روی حلقه R و σ یک خود ریختی از این حلقه باشد. اگر $m \in M$ وجود داشته باشد به طوری که $\text{ann}(m) = 0$ و یا برای ایده آل (دوطرفه) I از R ، $M_R \cong R/I$ ، آنگاه:

M_R به طور کامل σ -سازگار است اگر و تنها اگر $M[x^{-1}]_R$ به طور کامل σ -سازگار باشد. **اثبات:** با به کار بردن هر یک از فرض های بالا و در نظر گرفتن $N = M$ در گزاره ۳-۵، نتیجه حاصل می شود. $\square$

این مسئله تا کنون حل نشده است: آیا در حالت کلی، به طور کامل σ -سازگار بودن M_R و $M[x^{-1}]_R$ معادلند یا نه؟

مثال بعدی کاربردی از قضیه ۲-۵ را نشان می دهد.

۵-۵ مثال: فرض کنیم $(R, \underline{m})$ یک حلقه موضعی جابجایی و $\sigma: R \rightarrow R$ یک خود ریختی باشد. قرار می دهیم $M_R := R/\underline{m}$ ، که با توجه به اینکه عناصر وارون ناپذیر تحت خود ریختی یک حلقه موضعی پایا هستند براحتی نتیجه می شود M_R یک مدول σ -سازگار است. چون M_R ساده است پس به طور کامل σ -سازگار است. از قضیه ۳-۵ نتیجه می گیریم $M[x^{-1}]_R$ نیز به طور کامل σ -سازگار است. همچنین $M[x^{-1}]_R$ یک مدول باس است (R کامل است زیرا یک حلقه موضعی است). بنابراین می توان قضیه ۲-۵ را به کار برد. $\square$

در این فصل با اعمال شرط مدول های باس توانستیم برخی از نتایج قبلی را توسعه دهیم. در این قسمت خواهیم دید که اگر R یک حلقه کامل راست باشد آنگاه ایده آل های اول الحاقی مدول M_R ، با ایده آل های ماکسیمال حلقه R برابر است.

ابتدا توجه می کنیم که در یک حلقه کامل راست هر ایده آل اول، ماکسیمال است.

برای اثبات فرض می کنیم p یک ایده آل اول در حلقه کامل راست R باشد. پس $\bar{R} := R/p$

یک حلقه اول است و چون مدول خارج قسمتی یک حلقه کامل راست است پس بنا بر ۱-۵۲ ،
کامل راست نیز می باشد. با توجه به ۱-۵۳ ، $\bar{R}$ نیم ساده است. و چون در یک حلقه نیم ساده هر
ایده آل اول ماکسیمال است، پس $\bar{p} = \bar{0} \in \text{Max}(\bar{R})$. بنابراین $p \in \text{Max}(R)$.

۵-۶ گزاره: اگر R یک حلقه دلخواه باشد آنگاه $\text{Max}(R) \subseteq \text{Att}(R_R)$. بعلاوه اگر R جابجایی یا
موضعی و یا کامل راست باشد آنگاه $\text{Max}(R) = \text{Att}(R_R)$.

اثبات: فرض کنید $\underline{m} \in \text{Max}(R)$. چون $\underline{m}$ یک ایده آل دوطرفه است پس $\text{ann}(R/\underline{m})_R = \underline{m}$.
بنابراین $(R/\underline{m})_R$ یک خارج قسمت هم اول از R_R و دارای پوچ ساز $\underline{m}$ است. پس $\underline{m} \in \text{Att}(R_R)$.
برای قسمت دوم، فرض کنید $p \in \text{Att}(R_R)$. فرض کنید R یک حلقه جابجایی و $\underline{m}$ ایده آل
ماکسیمال شامل p باشد. با توجه به تعریف، ایده آل I از R وجود دارد به طوری که $(R/I)_R$ هم
اول است و $p = \text{ann}(R/I)_R = I$. از آنجا که R/p هم اول است پس $p = \underline{m} \in \text{Max}(R)$.
اگر حلقه $(R, \underline{m})$ موضعی باشد به طور مشابه ثابت می شود. p را مانند قبل در نظر می گیریم.
چون $I \subseteq \underline{m}$ ، می توان ایده آل راست I را با $\underline{m}$ جایگزین کرد و چون $\underline{m}$ یک ایده آل دوطرفه است
پس $p = \text{ann}(R/\underline{m})_R = \underline{m}$.

اگر حلقه R کامل راست باشد آنگاه چون هر ایده آل اول، ماکسیمال است نتیجه حاصل می شود.

□

۵-۷ لم: فرض کنید R یک حلقه دلخواه و $I \subseteq p$ ایده آلی از R باشند. در این صورت

$$p \in \text{Att}(R_R) \Leftrightarrow \bar{p} \in \text{Att}(\bar{R}_R)$$

که " - " نشان دهنده عناصر حلقه R/I است.

اثبات: با استفاده از تعریف ایده آل الحاقی حکم واضح است. □

در لم ۵-۷ با در نظر گرفتن $p = I$ و اینکه R یک حلقه کامل راست است نتیجه می گیریم که

ایده آل های اول الحاقی روی حلقه های کامل راست، ماکسیمال هستند.

تساوی در گزاره ۵-۶، در حالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال فرض کنید R یک حلقه اولیه راست^۱ (حلقه ای که دارای یک مدول راست ساده وفادار است) باشد که ساده نیست. (برای مثال اگر V یک فضای برداری چپ از بعد نامتناهی روی میدان K باشد آنگاه $End_K(V)$ یک حلقه اولیه راست است که ساده نیست. زیرا درونیختی های از بعد متناهی تشکیل یک ایده آل محض می دهند). در این حالت $\circ \notin Max(R)$. اما R_R دارای مدول ساده وفادار $M_R \cong (R/\underline{m})_R$ است که $\underline{m}$ ایده آل راست ماکسیمالی در R است. $(R/\underline{m})_R$ هم اول با پوچ ساز صفر است، بنابراین $(\circ) \in Att(R_R)$.

در حالتی که R یک حلقه کامل راست باشد گزاره ۵-۶ را می توان به مدول های دلخواه تعمیم داد.

۵-۸ گزاره: اگر R یک حلقه کامل راست و $M_R \neq \circ$ یک R -مدول راست دلخواه باشد آنگاه $\phi \neq Att(M_R) \subseteq Max(R)$.

اثبات: با توجه به ۱-۵۴، M_R دارای زیر مدول ماکسیمال N_R است. پس $(M/N)_R$ ساده و در نتیجه هم اول است. بنابراین $ann(M/N)_R \in Att(M_R)$. پس $Att(M_R)$ ناتهی است. رابطه شمول نیز از اینکه هر ایده آل اول از یک حلقه کامل راست ماکسیمال است، نتیجه می شود. $\square$

۵-۹ نتیجه: اگر $(R, \underline{m})$ موضعی و کامل راست باشد و $M_R \neq \circ$ یک R -مدول راست دلخواه باشد آنگاه $Att(M_R) = \{\underline{m}\}$.

فرض کامل راست در گزاره ۵-۸ و نتیجه ۵-۹ ضروری است. در مثال ۲-۱۳ ثابت شد که مدول ناصفر روی یک حلقه ارزیاب گسسته وجود دارد که یک ایده آل اول الحاقی غیر ماکسیمال دارد.

^۱ - right primitive ring

خاطر نشان می کنیم، گزاره ۵-۶ نشان می دهد که ایده آل های اول الحاقی تحت بسط چند جمله ای های معمولی خوش رفتار نیستند. به طور مثال اگر R یک حلقه جابجایی باشد، از قضیه ۵-۶ داریم

$$Att(R[x]_{R[x]}) = Max(R[x]) \neq (Max R)[x] = Att(R_R)[x]$$

بنابراین کار با چند جمله ای های معکوس در این پایان نامه بسیار مهم است.

این بخش را با بررسی مدول های پوچ پروژکتیو روی حلقه های کامل راست خاتمه می دهیم. ابتدا به وسیله لم زیر مدول های پوچ پروژکتیو را شناسایی می کنیم.

۱۰-۵ گزاره: فرض کنید p_R یک مدول پروژکتیو ناصفر باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

(۱) p_R یک پوشش پروژکتیو برای یک R - مدول ساده است.

(۲) هر زیر مدول ماکسیمال از p_R کوچک است.

(۳) p_R پروژکتیو پوچ است.

اثبات: (۲) $\Leftrightarrow$ (۱) از [۱۴، تمرین ۲۴.۴] نتیجه می شود.

(۲) $\Rightarrow$ (۳) نیز واضح است. زیرا هر زیر مدول از یک مدول پوچ، کوچک است. (۳) $\Rightarrow$ (۱) نیز براحتی نتیجه می شود. زیرا هر مدول ساده پوچ است و پوشش پروژکتیو یک مدول پوچ نیز پوچ است. $\square$

به عنوان یک کاربرد اصلی از ۵-۱۰، یک تناظر یک به یک بین مجموعه کلاس های یکریخت از مدول های پروژکتیو پوچ R و ایده آل های ماکسیمال R ، در حالتی که R کامل راست باشد نتیجه می شود.

قرارداد: مدول داده شده M_R را روی حلقه کامل راست R در نظر بگیرید. $p(M_R)$ را به جای پوشش پروژکتیو آن (که در حد یکریختی یکتاست) قرار می دهیم. بعلاوه مجموعه تمام کلاس های

یکریخت از R - مدول های پروژکتیو پوچ را با $Hp(R)$ نمایش می دهیم و برای یک مدول پروژکتیو پوچ p_R ، $[p_R] \in Hp(R)$ را به جای کلاس یکریختی آن قرار می دهیم.

قضیه زیر دوگان نتایج [۱۵، قضایای ۳.۶۰ و ۳.۶۱] است. در [۱۵] یک نگاشت دوسویی بین کلاس های یکریخت انژکتیو های تجزیه ناپذیر^۱ و ایده آل های اول در حلقه های آرتینی راست معرفی شده است.

۱۱-۵ قضیه: فرض کنید R یک حلقه کامل راست باشد. در این صورت نگاشت دوسویی $\alpha: Hp \rightarrow Max(R)$ با ضابطه $[p_R] \mapsto Att(p_R)$ وجود دارد. اگر $\{V_1, \dots, V_n\}$ یک مجموعه کامل از R - مدول های راست ساده باشد آنگاه $\{p(V_1), \dots, p(V_n)\}$ یک مجموعه کامل از R - مدول های پروژکتیو پوچ است.

برهان: فرض کنید p_R یک مدول پروژکتیو پوچ باشد. با توجه به گزاره ۲-۲۳ و ۵-۸،

$$Att(p_R) = \{\underline{m}\} \text{ که } \underline{m} \in Max(R) \text{ تعریف می کنیم } \alpha([p_R]) := \underline{m}.$$

برای بررسی پوشا بودن α ، فرض کنید $\underline{m} \in Max(R)$ دلخواه باشد. چون $ann(R/\underline{m})_R = m$ و $(R/\underline{m})_R$ هم اول است، پس ایده آل راست ماکسیمال $I_R \supseteq \underline{m}$ وجود دارد به طوری که $ann(R/I)_R = \underline{m}$. از آنجا که $(R/I)_R$ ساده است، $Att(R/I)_R = \{\underline{m}\}$. چون R کامل راست است، بنا به ۱-۶۳، $(R/I)_R$ دارای یک پوشش پروژکتیو است. پس بروریختی $\theta: p_R \rightarrow (R/I)_R$ وجود دارد به طوری که p_R پروژکتیو و $ker \theta \subseteq p_R$ کوچک است. با توجه به گزاره ۵-۱۰، p_R پروژکتیو پوچ است. بعلاوه $Att(p_R) = Att(p/ker \theta)_R = Att(R/I) = \{\underline{m}\}$ ، که تساوی اول با توجه به ۲-۱۴ به دست آمده است. بنابراین $\alpha([p_R]) = \underline{m}$ که نشان دهنده پوشا بودن α است.

برای نشان دادن یک به یک بودن α ، کافی است نشان دهیم $Hp(R)$ و $Max(R)$ دو مجموعه متناهی از مرتبه یکسان هستند. چون R کامل راست است پس $R/rad R$ نیم ساده است. فرض

^۱ - indecomposable injective module

می کنیم $R/\text{rad } R$ نیم ساده با n مولفه ساده باشد. بنابراین R دارای n مدول راست ساده $(V_1, \dots, V_n)$ است. پوشش های پروژکتیو این مدول های ساده را در نظر بگیرید. با توجه به ۵-۱۰، $\{p(V_1), \dots, p(V_n)\}$ یک مجموعه کامل از پروژکتیو های پوچ روی R است. بنابراین $|Hp(R)| \leq n$ ، وقتی $|Max(R)| \geq n$ (هر ایده آل ماکسیمال از $R/\text{rad } R$ ، متناظر با یک ایده آل ماکسیمال از R است). پوشا بودن α ایجاب می کند $|Hp(R)| = |Max(R)| = n$ (زیرا $n \leq |Max(R)| \leq |Hp(R)| \leq n$). پس α یک نگاشت دوسویی است. $\square$

۵-۱۲ نتیجه: اگر M_R یک مدول دلخواه روی حلقه کامل راست R باشد آنگاه $|Att(M_R)| < \infty$.

اثبات: با استفاده از برهان ۵-۱۱، برای حلقه کامل راست R ، $|Max(R)| < \infty$. حال با استفاده از ۵-۸

نتیجه مطلوب بدست می آید. $\square$

فصل ششم

نمایش های ثانویه روی حلقه های ناجابجایی

فصل ششم

نمایش های ثانویه روی حلقه های ناجابجایی

در این فصل مدول ثانویه و نمایشی را در محیط ناجابجایی تعریف می کنیم و آنرا با مفهوم ذکر شده در محیط جابجایی مقایسه می کنیم.

در محیط کلاسیک مدول های ثانویه، مدول هایی هستند که دقیقاً یک ایده آل اول الحاقی دارند. همین مفهوم را به حلقه های ناجابجایی تعمیم می دهیم.

۱-۶ تعریف: فرض کنیم M_R یک مدول روی حلقه دلخواه R باشد. M_R را ثانویه می نامیم اگر

دقیقاً یک ایده آل اول الحاقی داشته باشد. گوییم M_R ، p - ثانویه است اگر $\text{Att}(M_R) = \{p\}$.

در محیط کلاسیک هر خارج قسمت ناصفر از یک مدول ثانویه نیز ثانویه است. اما در حالت کلی

در محیط ناجابجایی یک خارج قسمت ناصفر از یک مدول ثانویه ممکن است خالی از ایده آل اول

الحاقی باشد (در غیر این صورت با توجه به گزاره ۲-۸، این خارج قسمت نیز ثانویه است). در مثال

۱۶-۲، خارج قسمت ناصفر M_R از مدول ثانویه N_R ، توضیح خوبی برای این مطلب است.

واضح است که اگر پوچ سازهای خارج قسمت های مدول M_R ، یعنی

$$\{ann(Q_R): \text{است } M_R \text{ قسمتی}\}$$

در شرط زنجیر افزایشی صدق کند آنگاه هر خارج قسمت مدول ثانویه M_R ، ثانویه است. همچنین خاصیت ثانویه بودن برای تمام خارج قسمت های مدول های باس نیز برقرار است. زیرا با توجه به تعریف، خارج قسمت های مدول های باس شامل یک زیر مدول ماکسیمال هستند.

بنا بر گزاره ۵-۸، همه مدول ها روی حلقه های کامل راست و بنا به قضیه ۲-۱۷، همه مدول ها روی حلقه هایی که در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آل ها صدق می کنند، در صورت ثانویه بودن، خارج قسمت ناصفر آنها نیز دارای مجموعه ناتهی از ایده آل های اول الحاقی است.

۲-۶ گزاره: فرض کنید R یک حلقه، p یک ایده آل از R و M_R یک مدول ناصفر باشد که هر خارج قسمت ناصفر از آن دارای یک مجموعه ناتهی از ایده آل های اول الحاقی است. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

$$(A) \quad M_R - p \text{ ثانویه است.}$$

(B) زیر مدول کوچک $N_R \subseteq M_R$ وجود دارد به طوری که هر خارج قسمت ناصفر از $(M/N)_R$ دارای پوچ ساز p است.

(C) Mp یک زیر مدول کوچک از M_R است و p شامل هر ایده آلی است که خارج قسمت ناصفری از M_R را صفر کند.

$$\text{بعلاوه اگر } (A) - (C) \text{ برقرار باشد آنگاه } p = \{r \in R : MrR \neq M\}.$$

اثبات: $(A) \Rightarrow (C)$: برای نتیجه اول، زیر مدول محض $N_R \subset M_R$ را در نظر می گیریم و نشان می دهیم $Mp + N$ نیز سره است. گزاره ۲-۷ ایجاب می کند $Att(M/N)_R \subseteq \{p\}$ ، و چون $Att(M/N) \neq \emptyset$ ، لذا $(M/N)_R$ ، p - ثانویه است. پس $N'_R \supseteq N_R$ وجود دارد به طوری که

$$(M/N')_R \text{ هم اول است و } p = ann(M/N')_R. \text{ بنابراین } Mp + N \subseteq N' \neq M.$$

برای قسمت دوم، فرض می کنیم $I, (M/Q)_R$ را صفر کند که $Q_R \subset M_R$. چون $(M/Q)_R$ ، p - ثانویه است، بنابراین $Q'_R \supseteq Q_R$ وجود دارد به طوری که $p = \text{ann}(M/Q'_R)_R$. پس $I \subseteq p$ ، بنابراین $MI \subseteq Q \subseteq Q'$.

$(B) \Leftarrow (C)$: فرض کنید $N := Mp$. زیر مدول $N'_R \neq M_R$ که شامل N_R است را در نظر بگیرید. از آنجا که $\text{ann}(M/N)_R$ ، $(M/N')_R$ را صفر می کند پس با توجه به (C) مشمول در p است. عکس شمول واضح است.

$(A) \Leftarrow (B)$: N_R را همانند آنچه در (B) آمده در نظر می گیریم. $(M/N)_R$ هم اول با پوچ ساز p است. بنابراین با توجه به گزاره ۲-۱۴، $\{p\} = \text{Att}(M/N)_R = \text{Att}(M_R)$.

برای عبارت آخر فرض می کنیم $r \in p$. در این صورت $MrR \subseteq Mp \neq M$. برعکس، اگر $MrR \neq M$ ، آنگاه $(M/MrR)_R$ ، p - ثانویه است. بنابراین پوچ ساز آن مشمول در p است، و لذا $r \in p$. $\square$

۳-۶ یادآوری: (۱) اگر M_R پوچ باشد، با توجه به گزاره ۲-۲۳، $(A) - (C)$ برقرار است. اما عکس آن با توجه به توضیح بعد از گزاره ۲-۲۳، برقرار نیست.

(۲) همان طور که در اثبات گزاره قبل دیدیم، فرض روی M_R ، فقط برای اثبات $(A) \Rightarrow (C)$ مورد نیاز است. در واقع $(A) \Rightarrow (C)$ برای مدول N_R در مثال ۲-۱۶ برقرار نیست.

(۳) دیدیم که برای مدول p - ثانویه M_R روی حلقه جابجایی R ، عناصر بیرون از p به طور پوشا روی M_R عمل می کنند. عبارت آخر از گزاره ۲-۶، تعمیمی از این مطلب به حلقه ناجابجایی R است. البته در حالت کلاسیک، عناصر داخل p روی M_R پوچ توان هستند اما در محیط ناجابجایی این امر با اضافه کردن شرطی که در تعریف ۶-۱۴ آمده، حاصل می شود.

حال به دنبال در نظر گرفتن مجموعی از مدول های ثانویه هستیم. در ادامه این فصل فرض می کنیم R یک حلقه کامل راست است و یا اینکه R در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آل ها صدق

می کند.

گزاره بعدی نشان می دهد که مجموع متناهی از مدول های p - ثانویه، p - ثانویه است.

۴-۶ گزاره: فرض کنید R یک حلقه باشد که یا کامل راست و یا در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آل ها صدق کند. فرض کنید $M_R = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ یک مجموع از مدول های p - ثانویه باشد که p ایده آل اولی از R است. در این صورت M_R ، p - ثانویه است.

اثبات: با استفاده از استقرا کافی است حکم را برای $n=2$ ثابت کنیم. با توجه به فرض روی R ،

$$Att(M_1 + M_2)_R \neq \emptyset.$$

بعلاوه با توجه به گزاره ۲-۸:

$$Att(M_1 + M_2) \subseteq Att(M_1) \cup Att((M_1 + M_2)/M_1) = Att(M_1) \cup Att(M_2/(M_1 \cap M_2)) = \{p\}.$$

بنابراین $(M_1 + M_2)_R$ ، p - ثانویه است. $\square$

یادآوری: توجه می کنیم که گزاره قبل فقط برای مجموع های متناهی برقرار است. به عنوان مثال،

روی حلقه $R := Z$ ، p - گروه پروفِر $M_R := Z_{p^\infty}$ با $\sum_{k=1}^{\infty} Z/p^k Z$ یکریخت است. هر کدام از بند های

این مجموع p - ثانویه است. اما $Att(M_R) = \{\emptyset\}$.

۵-۶ مثال: در حالت کلی گزاره ۴-۶ برای یک مجموع متناهی از مدول های $M_1, \dots, M_n$ که هر

کدام مجموع های مشابهی از ایده آل های اول الحاقی دارند و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $|Att(M_i)| > 1$

برقرار نیست. به طور مثال حلقه ماتریس های پایین مثلثی 2×2 روی میدان k را در نظر بگیرید. با

توجه به تعریف ۱-۵، این حلقه کامل راست است.

فرض کنید $M_1 = R_R$ و $M_2 := \left\{ \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix} \right\}$. چون نگاشت $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b & c \\ a & 0 \end{bmatrix}$ یک یکریختی

بین $(M_1)_R$ و $(M_2)_R$ تعریف می کند و با توجه به گزاره ۵-۶، $Att(M_1) = Att(M_2) = Max(R)$.

از طرف دیگر

$$M_R = M_1 + M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} k & k \\ k & k \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & k \end{bmatrix} \right\}$$

یک مجموع مستقیم از دو مدول یکرخت است. پس $Att(M_R) = \left\{ \begin{bmatrix} k & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix} \right\}$ بنابراین برای هر

$$\square. Att(M_R) \neq Att(M_i), i = 1, 2$$

۶-۶ تعریف: مجموع $M = M_1 + \dots + M_n$ یک نمایش ثانویه از M_R است اگر M_i ها زیر مدول

های ثانویه باشند. هر مدولی که یک نمایش ثانویه داشته باشد را نمایشی می نامیم.

با توجه به گزاره ۶-۲، هر مدول روی یک حلقه نوتری جابجایی که در محیط کلاسیک نمایشی

باشد در محیط ناجابجایی نیز نمایشی است. نشان خواهیم داد که در محیط ناجابجایی هر مدول

ناصفر روی یک حلقه کامل راست، نمایشی است.

فرض کنید $M_R = M_1 + \dots + M_n$ نمایش ثانویه مدول M_R باشد. با توجه به گزاره ۶-۴، مجموع

M_i هایی که متناظر با ایده آل مشابه p_i هستند، p_i ثانویه اند. پس در این مجموع p_i ها را متمایز

در نظر می گیریم.

۶-۷ گزاره: فرض کنید R یک حلقه باشد که یا کامل راست و یا در شرط زنجیر افزایشی روی

ایده آل ها صدق می کند. مدول نمایشی M_R را در نظر بگیرید. فرض کنید $M_R = M_1 + \dots + M_n$

یک نمایش ثانویه مدول M_R باشد که $Att(M_i)$ ها همگی متمایزند. در این صورت داریم:

$$(1) \quad Att(M_R) \subseteq \bigcup_{i=1}^n Att(M_i) \quad \text{و}$$

(۲) گزاره های زیر معادلند:

$$(A) \quad Att(M_R) = \bigcup_{i=1}^n Att(M_i)$$

$$(B) \quad M = M_1 + \dots + M_n \quad \text{غیر زائد}^1 \text{ است. (بدین معنی که هیچ یک از } M_i \text{ را نتوان حذف کرد)}$$

¹ - irredundant

(C) M دقیقاً دارای n ایده آل اول الحاقی است.

هر گاه یکی از شرایط (۲) برقرار باشد $M_R = M_1 + \dots + M_n$ را یک نمایش ثانویه غیر زائد^۱ گوئیم.

اثبات: برای (۱) فرض می کنیم $p \in \text{Att}(M_R)$. از آنجا که M_R یک خارج قسمت از $\bigoplus_{i=1}^n M_i$

است، پس با توجه به ۷-۲، $p \in \text{Att}\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) = \bigcup_{i=1}^n \text{Att}(M_i)$.

(۲) $(A) \Rightarrow (C) \Rightarrow (B)$ از مجزا بودن $\text{Att}(M_i)$ و (۱) بدست می آید. برای اثبات $(B) \Rightarrow (A)$ ،

فرض کنید برای هر i ، $N_i := \sum_{j \neq i} M_j$. در این صورت (M/N_i) یک خارج قسمت ناصفر M_i است،

بنابراین $\text{Att}(M_i) = \text{Att}(M/N_i) \subseteq \text{Att}(M_R)$ ، که تساوی اول از فرضیات روی R بدست آمده

است. $\square$

۸-۶ گزاره: فرض کنید R کامل راست و یا در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آل ها صدق کند. اگر

M_R نمایشی باشد آنگاه هر خارج قسمت ناصفر از M_R نیز نمایشی است.

اثبات: فرض کنید $M = M_1 + \dots + M_n$ یک نمایش ثانویه باشد، و خارج قسمت ناصفر

$Q_R \cong (M/N)_R \cong \sum_{i=1}^n (M_i + N)/N \cong \sum_{i=1}^n M_i / (M_i \cap N)$ را در نظر بگیرید. فرض روی R ایجاب

می کند که هر کدام از مدول های ناصفر $M_i / (M_i \cap N)$ ثانویه باشند. بنابراین Q_R نمایشی است. $\square$

هدف بعدی ما این است که نشان دهیم هر مدول ناصفر روی یک حلقه کامل راست نمایشی است.

با ایده گرفتن از [۱۰] و دوگان سازی آن، به دنبال کار با پوشش های پروژکتیو هستیم.

فرض کنید M_R یک مدول ناصفر روی حلقه کامل راست R باشد. با توجه به ۱-۵۷، یک

مجموعه $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ از عناصر خود توان موضعی و دو به دو متعامد وجود دارد به طوری که

$e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1$. با استفاده از ۱-۶۴، پوشش پروژکتیو $p(M_R)$ یکرخت با یک مجموع

^۱ - irredundant secondary representation

مستقیم $\oplus e_i R$ است. اگر $J = \text{rad } R$ ، آنگاه با استفاده از ۱-۶۰، eJ یک زیر مدول ماکسیمال منحصر بفرد eR است. بعلاوه هر $e_i R$ پوچ است و بنابر ۲-۲۳ و ۵-۸، $e_i R$ ثانویه نیز هست. از آنجا که هسته نگاشت $p(M_R) \rightarrow M_R$ کوچک است، با توجه به گزاره ۲-۱۴،

$$\text{Att}(M_R) = \text{Att}(p(M_R)) = \bigcup \text{Att}(e_i R)$$

که تساوی دوم از گزاره ۵-۱ نتیجه می شود.

اگر $e_i R$ را داخل کلاس های هم ارزی که $e_i R$ و $e_j R$ در صورت داشتن ایده آل اول الحاقی مشابه متعلق به یک کلاس باشند قرار دهیم تجزیه $p(M_R) \cong \bigoplus S_j$ به دست خواهد آمد که S_j ، p_j - ثانویه است (با استفاده از گزاره ۵-۱). از این مطلب در گزاره زیر استفاده شده است.

۹-۶ گزاره: مدول ناصفر M_R روی حلقه کامل راست R را در نظر بگیرید. فرض کنید $\text{Att}(M_R) = \{p_1, \dots, p_n\}$ که p_i ها مجزا هستند. در این صورت خانواده ای از زیر مدول های $\{M_1, \dots, M_n\}$ وجود دارد که M_i ، p_i - ثانویه است و $M = M_1 + \dots + M_n$ یک نمایش ثانویه (غیرزائد) برای مدول M است.

اثبات: با توجه به آنچه گفته شد فرض می کنیم $p(M_R) \cong \bigoplus_{j=1}^n S_j$. تعریف می کنیم

$$M_i := \text{Im}(S_i \rightarrow p(M) \rightarrow M)$$

بوضوح $M_i \neq 0$ (در غیر این صورت $\ker(\theta): p(M_R) \rightarrow M_R$ کوچک نیست).

چون M_i ، یک خارج قسمت از مدول p_i - ثانویه S_i است، پس M_i نیز p_i - ثانویه است. با توجه به تعریف M_i ها به آسانی دیده می شود $M = M_1 + \dots + M_n$ ، که این نمایش با توجه به گزاره ۶-۷، غیر زائد است. $\square$

حال فرض می کنیم حلقه R نیم کامل است. گزاره ۱-۶۳ نشان می دهد که برای حلقه نیم کامل R ، اگر مدول ناصفر M_R به طور متناهی تولید شده باشد آنگاه $p(M_R)$ نیز متناهی مولد است.

از ۱-۶۴، نتیجه می شود که $p(M_R)$ با مجموع مستقیم (متناهی) $\oplus e_i R$ یکرخت است. پس مدول های ثانویه S_j همانند قبل وجود دارند و چون متناهی مولد هستند پس هر زیر مدول محض آن ها مشمول در یک زیر مدول ماکسیمال است. بنابراین مدول های ثانویه S_j باس هستند. همچنین نتیجه می شود که مدول های خارج قسمتی M_j در اثبات قبل نیز باس هستند. بنابراین

$$Att(M_j) \neq \emptyset \text{ و } Att(M_j) = \{p_j\} \text{ لذا } Att(M_j) = \{p_j\}.$$

با توجه به آنچه گفته شد نتیجه زیر بدیهی است.

۱۰-۶ نتیجه: فرض کنید M_R یک مدول متناهی مولد ناصفر روی حلقه نیم کامل R باشد. در این صورت M_R دارای یک نمایش ثانویه است.

۱۱-۶ نتیجه: فرض کنید R یک حلقه کامل راست و M_R یک مدول دلخواه باشد و همچنین $\varphi \subseteq Att(M_R)$. در این صورت زیر مدول $N_R \subseteq M_R$ وجود دارد به طوری که $Att(N_R) = \varphi$ و

$$Att(M/N)_R = Att(M_R) - \varphi.$$

اثبات: می توانیم فرض کنیم $M_R \neq 0$. مدول های p_i - ثانویه M_i را همانند گزاره ۶-۹ در نظر می گیریم و نمایش ثانویه غیر زائد $M = M_1 + \dots + M_n$ را به دست می آوریم. بدون کاستن از کلیت فرض می کنیم $\varphi = \{p_1, \dots, p_k\}$. قرار می دهیم $N_R := M_1 + \dots + M_k$ ، که یک نمایش ثانویه غیر زائد از N_R است. با توجه به گزاره ۶-۷ (۲)، $Att(N_R) = \varphi$.

فرض کنید $P_R := M_{k+1} + \dots + M_n$ ، یک نمایش ثانویه غیر زائد از P_R باشد. با توجه به گزاره ۶-۷ (۲)، $Att(P_R) = Att(M) - \varphi$. در این صورت داریم $M/N = (N + P)/N \cong P/(P \cap N)$. پس

$$Att((M/N)_R) \subseteq Att(P_R) = Att(M_R) - \varphi.$$

و لذا $Att(M_R) - \varphi \subseteq Att((M/N)_R)$ در نتیجه $Att(M_R) - \varphi = Att((M/N)_R)$. $\square$

برای دوگان نتیجه ۶-۱۱ در [۴] در مورد ایده آل های اول وابسته، هیچ محدودیتی روی حلقه لازم نیست. اما در مورد ایده آل های اول الحاقی اینچنین نیست. در حقیقت فرض کامل راست بودن روی R ضروری است. مثال بعدی یک توضیح مختصر از این مطلب است.

۶-۱۲ مثال: اگر $R := M := Z$ آنگاه در مثال ۲-۱۹ دیدیم که $Att(M_R) = Spec\{R\} - \{(0)\}$. از آنجا که هر زیر مدول M_R ، یا با M_R یکرخت و یا صفر است، اگر φ را طوری انتخاب کنیم که $\varphi \notin \{\emptyset, Spec\{R\} - \{(0)\}\}$ آنگاه نتیجه ۶-۱۱ برقرار نخواهد بود.

در ادامه قصد داریم عبارت آخر در گزاره ۶-۲ را به مدول های نمایشی تعمیم دهیم.

۶-۱۳ گزاره: فرض کنید حلقه R کامل راست و یا در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آل ها صدق کند. اگر $M_R = M_1 + \dots + M_n$ یک نمایش ثانویه غیر زائد از یک مدول M_R باشد که هر M_i یک مدول p_i - ثانویه است، آنگاه برای هر $r \in R$

$$MrR = M \Leftrightarrow r \notin \bigcup_{i=1}^n p_i.$$

اثبات: فرض کنید برای یک $r \in R$ ، $MrR \neq M$. پس یک i وجود دارد به طوری که $M_i rR \neq M_i$. با استفاده از گزاره ۶-۲، چون هر M_i ، p_i - ثانویه است پس $r \in p_i$.

برعکس، فرض کنید یک i وجود دارد که $r \in p_i$. با توجه به غیر زائد بودن نمایش ثانویه،

$$\sum_{j \neq i} M_j \neq M.$$

$$\circ \neq (M / \sum_{j \neq i} M_j)_R \cong (M_i / M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j)_R$$

که p_i - ثانویه است. پس $Mp_i \neq M$ و $MrR \neq M$. $\square$

در قضایای مک دونالد [۱۶، قضیه ۲.۶] عناصر موجود در اشتراک ایده آل های اول الحاقی مدول M_R روی آن پوچ توان هستند. اما چنین نتیجه ای از گزاره ۶-۲ حاصل نمی شود. در حقیقت چنین مطلبی در محیط ناجابجایی درست نیست. به طور مثال اگر R یک حلقه ارزیاب گسسته باشد و

$M := R$ ، آنگاه با توجه به اینکه هر دامنه ایده آل اصلی یک حوزه صحیح است پس عناصر $Att(M_R)$ پوچ توان نیستند.

پس به دنبال شرطی هستیم که این تفاوت را بین دو محیط جابجایی و ناجابجایی از بین ببرد.

۱۴-۶ تعریف: R - مدول M_R را قویاً p - ثانویه^۱ نامیم اگر M_R ، p - ثانویه باشد و برای یک $n \in N$ ، $M \cdot p^n = 0$ اگر $M_R = M_1 + \dots + M_n$ یک نمایش ثانویه و هر M_i قویاً ثانویه باشد، این تجزیه را یک نمایش ثانویه قوی می نامیم و M_R را یک مدول نمایشی قوی می گوئیم.

۱۵-۶ گزاره: فرض کنید R یک حلقه کامل راست و یا در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آل ها صدق کند. فرض کنید $M_R = M_1 + \dots + M_n$ یک مجموع از مدول ها ی قویاً p - ثانویه باشد که p یک ایده آل اول از حلقه R است. در این صورت M_R ، قویاً p - ثانویه است.

اثبات: برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $k_i \in N$ وجود دارد به طوری که $M_i p^{k_i} = 0$. قرار می دهیم $k := \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. در این صورت $M p^k = 0$. $\square$

با توجه به گزاره ۱۵-۶، می توان از نمایش ثانویه قوی غیر زائد نیز صحبت نمود.

۱۶-۶ گزاره: فرض کنید R یک حلقه کامل راست و یا در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آل ها صدق کند. اگر M_R قویاً نمایشی باشد، پس هر خارج قسمت ناصفر از M_R نیز قویاً نمایشی است. **اثبات:** از گزاره ۸-۶ و این واقعیت که یک خارج قسمت ناصفر از یک مدول قویاً ثانویه، قویاً ثانویه است، نتیجه به دست می آید. $\square$

مدول های ثانویه، لزوماً قویاً ثانویه نیستند. به عنوان مثال حلقه ارزیاب گسسته (R, m) ، m - ثانویه است اما قویاً ثانویه نیست.

۱۷-۶ گزاره: فرض کنید R یک حلقه نوتری جابجایی و M_R آرتینی باشد. در این صورت M_R ،

^۱ - strongly p -secondary

قبلاً p - ثانویه است اگر و تنها اگر M_R ، p - ثانویه باشد.

اثبات: فرض کنید $Att(M_R) = \{p\}$. از آنجا که p متناهی مولد است، اگر برای هر $r \in p$ ، $k = k(r)$ وجود داشته باشد به طوری که $Mr^k = \circ$ ، آنگاه با توجه به اصل لانه کبوتری^۱ (اگر مجموعه بسیار بزرگی از عناصر به تعداد کمی قطعه افراز شود، دست کم یک قطعه شامل تعداد نسبتاً زیادی عنصر است)، $K \in N$ وجود دارد به طوری که $Mp^K = \circ$.

فرض می کنیم $r \in p$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $k \in N$ ، $Mr^k \neq \circ$. با توجه به اثبات [۱۶، قضیه ۵.۲] M_R را می توان به صورت مجموعی از مدول های (آرتینی) پوچ $M = H_1 + \dots + H_k$ نوشت. با حذف عناصر زائد، می توان این مجموع را غیر زائد فرض کرد. حال ثابت می کنیم که هر H_i ، p - ثانویه است. داریم

$$\circ \neq (M / \sum_{j \neq i} H_j)_R \cong (H_i / H_i \cap \sum_{j \neq i} H_j)$$

که (به عنوان خارج قسمتی از M_R) با توجه به نوتری بودن R ، p - ثانویه است. بنابراین $Att(H_i)_R = \{p\}$ و با توجه به گزاره ۲-۲۳، $p \in Att(H_i)_R$.

پس می توانیم فرض کنیم M_R ، آرتینی و پوچ است. از آنجا که M_R آرتینی است، زنجیر $M \supseteq Mr \supseteq Mr^2 \supseteq \dots$ در $Mr^k = Mr^{k+1} \neq \circ$ متوقف می شود.

فرض کنید $N_1 := Mr$ و $N_r := \{m \in M : mr^k = \circ\}$. به وضوح $N_1, N_r \subset M$. بعلاوه، برای $m \in M$ ، $m' \in M$ وجود دارد به طوری که $mr^k = m'r^{k+1}$. بنابراین $(m - m'r)^k = \circ$. یعنی $m - m'r \in N_r$. پس $m \in N_1 + N_r$. اما $M = N_1 + N_r$ ، که با پوچ بودن M_R در تناقض است. $\square$

در گزاره ۶-۱۷ شرط آرتینی بودن M_R ، قابل حذف نیست. همچنین فرض روی حلقه R را نیز نمی توان حذف کرد. حتی روی یک حلقه آرتینی راست، مدول آرتینی ثانویه، لزوماً قویاً ثانویه نیست.

^۱ - pigeon-hole principle

۱۸-۶ مثال: فرض کنید R, m_1, m_2 و a همانند مثال ۲-۲۷ باشند. توجه کنید که حلقه R آرتمینی است. به وضوح $R_R = m_1 + m_2$. یک بررسی ساده نشان می دهد $Att((m_1)_R) = \{m_2\}$ و $Att((m_2)_R) = \{m_1\}$. پس هم $(m_1)_R$ و هم $(m_2)_R$ ثانویه هستند. چون $m_2 \cdot m_1 = 0$ ، پس $(m_2)_R$ قویاً m_1 -ثانویه است. به آسانی می توان دید که برای هر $k \geq 1$ ، $m_1 \cdot m_2^k = a$ ، پس $(m_1)_R$ قویاً m_2 -ثانویه نیست. بنابراین $R_R = m_1 + m_2$ یک نمایش ثانویه است که قویاً ثانویه نمی باشد. $\square$

با توجه به تعریف مک دونالد، عناصر حلقه R (روی حلقه های جابجایی) به صورت پوچ توان یا پوشا روی مدول های ثانویه عمل می کنند. اگر صرفاً عناصر را با ایده آل های راست، جایگزین کنیم این نتیجه را برای مدول های قویاً ثانویه نیز داریم.

۱۹-۶ گزاره: فرض کنید R یک حلقه کامل راست و یا در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آل ها صدق کند. در این صورت مدول ناصفر M_R قویاً ثانویه است اگر و تنها اگر برای هر ایده آل (دوطرفه) I از R ، از $MI \neq M$ نتیجه شود که $k \in N$ وجود دارد به طوری که $MI^k = 0$.

اثبات: برای اثبات "فقط اگر" فرض کنید $MI \neq M$. با توجه به گزاره ۶-۲ (C)، از آنجا که I یک خارج قسمت ناصفر از M_R را صفر می کند پس مشمول در ایده آل اول الحاقی منحصر بفرد از M_R است. از آنجا که این ایده آل اول الحاقی روی M_R پوچ توان است پس با توجه به فرض، I نیز روی M_R پوچ توان است.

برای اثبات "اگر" توجه کنید که با توجه به فرض $Att(M_R) \neq \emptyset$. فرض کنید $p, q \in Att(M_R)$.

نشان خواهیم داد $p = q$. مدول هم اول $(M/N)_R$ وجود دارد به طوری که $p = ann(M/N)_R$. چون $Mp \subset N \neq M$ ، پس $k \in N$ وجود دارد به طوری که $Mp^k = 0$. بنابراین، $p^k \subseteq ann(M_R) \subseteq q$ (چون هر ایده آل اول الحاقی شامل $ann(M_R)$ است). چون q اول است

پس $p \subseteq q$. به همین نحو می توان نشان داد $q \subseteq p$. پس $p = q$. بنابراین M_R ، p - ثانویه است

و نشان دادیم $Mp^k = 0$. به این ترتیب اثبات کامل می شود. $\square$

۲۰-۶ گزاره: فرض کنید R یک حلقه کامل راست و یا در شرط زنجیر افزایشی روی ایده آل ها صدق

کند. فرض کنید $M_R = M_1 + \dots + M_n$ یک نمایش ثانویه قوی غیر زائد از M_R باشد که هر M_i

یک مدول قویاً p_i - ثانویه است. در این صورت برای $r \in R$ ، داریم

$$\exists k \in N : M(rR)^k = 0 \Leftrightarrow r \in \bigcap_{i=1}^n p_i.$$

اثبات: فرض کنید $k \in N$ وجود دارد به طوری که $M(rR)^k = 0$. پس برای هر i ، $M_i(rR)^k = 0$.

بنابراین $(rR)^k \subseteq \text{ann}(M_i) \subseteq p_i$ ، پس برای هر i ، $r \in p_i$.

به عکس، فرض کنید برای هر i ، $r \in p_i$. از آنجا که M_i ، قویاً p_i - ثانویه است، پس $k_i \in N$

وجود دارد به طوری که $M_i p_i^{k_i} = 0$. اگر $k := \max\{k_1, \dots, k_n\}$ ، آنگاه $M(rR)^k = 0$. $\square$

تذکر: اگر R یک حلقه ارزیاب گسسته باشد و $M := R$ ، آنگاه گزاره ۲۰-۶ برقرار نیست. این مطلب

نشان دهنده اهمیت وجود نمایش ثانویه قوی در این گزاره می باشد.

فهرست راهنما

واژه نامه انگلیسی به فارسی

A

<i>annihilator</i>	پوچ ساز
<i>Artinian module</i>	مدول آرتینی
<i>ascending chain condition</i>	شرط زنجیر افزایشی
<i>associated prime</i>	اول وابسته
<i>attached prime</i>	اول الحاقی
<i>automorphism</i>	خودریختی

B

<i>basis</i>	پایه
<i>bass module</i>	مدول باس
<i>Bijection</i>	دوسویی

C

<i>category</i>	رسته
<i>category equivalence</i>	هم ارزی رسته ای
<i>coefficients</i>	ضرایب
<i>commutative</i>	جابجایی
<i>compatible</i>	سازگار
<i>completely</i>	به طور کامل
<i>composition series</i>	سری ترکیب
<i>constant term</i>	جمله ثابت
<i>coprime module</i>	مدول هم اول
<i>covariant functors</i>	فانکتور همورد

D

<i>decending chain condition</i>	شرط زنجیر کاهش
<i>direct product</i>	حاصلضرب مستقیم
<i>external</i>	خارجی
<i>internal</i>	داخلی

<i>discrete valuation ring</i>	حلقه ارزیاب گسسته
<i>divisible ring</i>	حلقه تقسیم پذیر
<i>division ring</i>	حلقه تقسیم
<i>divisor, zero</i>	مقسوم علیه صفر
<i>domain</i>	دامنه
<i>integral</i>	صحیح
<i>principal ideal</i>	ایده آل اصلی

E

<i>element(s)</i>	عنصر
<i>idempotent</i>	خود توان
<i>identity</i>	همانی
<i>inverse</i>	وارون
<i>maximal</i>	ماکسیمال
<i>minimal</i>	مینیمال
<i>nilpotent</i>	پوچ توان
<i>unit</i>	یکه
<i>empty set</i>	مجموعه تهی
<i>endomorphism</i>	درونریختی
<i>epimorphism</i>	برورریختی
<i>essential extension</i>	توسیع اساسی
<i>essential submodule</i>	زیر مدول اساسی
<i>external direct product</i>	حاصلضرب مستقیم خارجی

F

<i>field</i>	میدان
<i>finite dimensional</i>	بعد متناهی
<i>finitely generated module</i>	مدول با تولید متناهی
<i>free module</i>	مدول آزاد

G

<i>good module</i>	مدول خوب
<i>group</i>	گروه

H

<i>homomorphism</i>	همریختی
---------------------	---------

I

<i>ideal</i>	ایده آل
--------------	---------

<i>finitely generated</i>	با تولید متناهی
---------------------------	-----------------

<i>left</i>	چپ
-------------	----

<i>maximal</i>	ماکسیمال
----------------	----------

<i>prime</i>	اول
--------------	-----

<i>principal</i>	اصلی
------------------	------

<i>proper</i>	سره
---------------	-----

<i>right</i>	راست
--------------	------

<i>semiprime</i>	نیم اول
------------------	---------

<i>indecomposable injective module</i>	مدول انژکتیو تجزیه ناپذیر
--	---------------------------

<i>idempotent element</i>	عنصر خود توان
---------------------------	---------------

<i>local</i>	موضعی
--------------	-------

<i>image</i>	تصویر
--------------	-------

<i>homomorphic</i>	همریخت
--------------------	--------

<i>induction</i>	استقرا
------------------	--------

<i>injective module</i>	مدول انژکتیو
-------------------------	--------------

<i>injective hull</i>	انژکتیو هال
-----------------------	-------------

<i>integral domain</i>	دامنه صحیح
------------------------	------------

<i>internal direct product</i>	حاصلضرب مستقیم داخلی
--------------------------------	----------------------

<i>Intersection of sets</i>	اشتراک مجموعه ها
-----------------------------	------------------

<i>irreducible</i>	تحویل ناپذیر
--------------------	--------------

<i>irredundant</i>	غیر زائد
--------------------	----------

<i>isomorphic</i>	یکریخت
-------------------	--------

<i>isomorphism</i>	یکریختی
--------------------	---------

J

Jacobson radical

رادیكال جيكبسون

Jordan Holder theorem

قضيه ژردن - هولدر

K

kernel

هسته

L

left zero divison

مقسوم عليه صفر چپ

local

موضعي

M

map

نگاشت

mapping

تابع

bijection

دوسويي

injective

يك به يك

surjection

پوشا

matrix

ماتريس

lower triangular

پايين مثلثي

maximal

ماكسيمال

minimal

مينيمال

module(s)

مدول

Artinian

آرتيني

bass

باس

coprime

هم اول

faithful

وفادار

finitely generated

متناهي مولد

free

آزاد

good

خوب

hollow

پوچ

injective

انژكتيو

inverse polynomial

چند جمله اي معكوس

Noetherian

نوتري

<i>primary</i>	اولیه
<i>prime</i>	اول
<i>projective</i>	پروژکتیو
<i>quotient</i>	خارج قسمتی
<i>representation</i>	نمایشی
<i>secondary</i>	ثانویه
<i>semi simple</i>	نیم ساده
<i>simple</i>	ساده
<i>uniform</i>	یکنواخت

N

<i>nilpotent element</i>	عنصر پوچ توان
<i>noetherian module</i>	مدول نوتری
<i>noncommutative</i>	ناجابجایی
<i>number</i>	عدد
<i>cardinal</i>	اصلی

O

<i>orthogonal</i>	متعامد
-------------------	--------

P

<i>Pigeon-hole principle</i>	اصل لانه کبوتری
<i>polynomial</i>	چند جمله ای
<i>primary</i>	اولیه
<i>primary decomposable</i>	تجزیه پذیر اولیه
<i>prime ideal</i>	ایده آل اول
<i>prime integer</i>	عدد اول
<i>prime module</i>	مدول اول
<i>prime ring</i>	حلقه اول
<i>principal ideal</i>	ایده آل اصلی
<i>principal ideal domain</i>	دامنه ایده آل اصلی

<i>projective cover</i>	پوشش پروژکتیو
<i>projective module</i>	مدول پروژکتیو
<i>proper submodule</i>	زیر مدول سره

Q

<i>quotient module</i>	مدول خارج قسمتی
<i>quotient ring</i>	حلقه خارج قسمتی

R

<i>right ideal</i>	ایده آل راست
<i>right perfect ring</i>	حلقه کامل راست
<i>right primitive ring</i>	حلقه اولیه راست
<i>right zero divisor</i>	مقسوم علیه صفر راست
<i>ring(s)</i>	حلقه
<i>Artinian</i>	آرتینی
<i>commutative</i>	جابجایی
<i>division</i>	تقسیم
<i>Noetherian</i>	نوتری
<i>prime</i>	اول
<i>principal ideal</i>	ایده آل اصلی
<i>quotient</i>	خارج قسمتی
<i>right perfect</i>	کامل راست
<i>semi simple</i>	نیم ساده
<i>simple</i>	ساده
<i>skew polynomial</i>	چندجمله ایهای اریب
<i>ring of polynomial</i>	حلقه چند جمله ایها

S

<i>secondary module</i>	مدول ثانویه
<i>semilocal</i>	نیم موضعی
<i>semiperfect</i>	نیم کامل

<i>semiprime ideal</i>	ایده آل نیم اول
<i>semiprime ring</i>	حلقه نیم اول
<i>semisimple ring</i>	حلقه نیم ساده
<i>sequences</i>	دنباله
<i>set</i>	مجموعه
<i>simple module</i>	مدول ساده
<i>simple ring</i>	حلقه ساده
<i>skew polynomial ring</i>	حلقه چندجمله ایهای اریب
<i>small submodule</i>	زیرمدول کوچک
<i>split</i>	شکافته شده
<i>strongly indecomposable</i>	به طور قوی تجزیه ناپذیر
<i>strongly secondary</i>	قویاً ثانویه
<i>submodule</i>	زیرمدول
<i>subset</i>	زیر مجموعه
U	
<i>uniform module</i>	مدول یکنواخت
<i>union of sets</i>	اجتماع مجموعه ها
<i>unit</i>	یکه
V	
<i>vector space</i>	فضای برداری
Z	
<i>zero divison</i>	مقسوم علیه صفر

واژه نامه فارسی به انگلیسی

الف

<i>union of sets</i>	اجتماع مجموعه ها
<i>induction</i>	استقرا
<i>intersection of sets</i>	اشتراک مجموعه ها
<i>pigeon-hole principle</i>	اصل لانه کبوتری
<i>prime</i>	اول
<i>attached</i>	الحاقی
<i>associated</i>	وابسته
<i>primary</i>	اولیه
<i>ideal</i>	ایده آل
<i>principal</i>	اصلی
<i>prime</i>	اول
<i>finitely generated</i>	با تولید متناهی
<i>left</i>	چپ
<i>right</i>	راست
<i>proper</i>	سره
<i>maximal</i>	ماکسیمال
<i>semiprime</i>	نیم اول

ب

<i>epimorphism</i>	بروریختی
<i>algebraic closure</i>	بستار جبری
<i>finite dimensional</i>	بعد متناهی
<i>Strongly indecomposable</i>	به طور قوی تجزیه ناپذیر
<i>completely</i>	به طور کامل

پ

<i>basis</i>	پایه
<i>nilpotent</i>	پوچ توان
<i>annihilator</i>	پوچ ساز

projective cover

پوشش پروژکتیو

ت

mapping

تابع

surjective

پوشا

bijjective

دوسویی

injective

یک به یک

irreducible

تحویل ناپذیر

image

تصویر

homomorphic

همریخت

division

تقسیم

essential extension

توسیع اساسی

ث

secondary

ثانویه

ج

commutative

جابجایی

constant term

جمله ثابت

چ

polynomial

چندجمله ای

skew

اریب

inverse

معکوس

ح

direct product

حاصلضرب مستقیم

external

خارجی

internal

داخلی

ring

حلقه

Artinian

آرتینی

discrete valuation

ارزیاب گسسته

<i>prime</i>	اول
<i>Right primitive</i>	اولیه راست
<i>principal ideal</i>	ایده آل اصلی
<i>division</i>	تقسیم
<i>divisible</i>	تقسیم پذیر
<i>commutative</i>	جابجایی
<i>skew polynomial</i>	چند جمله ای اریب
<i>quotient</i>	خارج قسمتی
<i>simple</i>	ساده
<i>right perfect</i>	کامل راست
<i>Noetherian</i>	نوتری
<i>semi prime</i>	نیم اول
<i>semi simple</i>	نیم ساده
<i>semi perfect</i>	نیم کامل
<i>semi local</i>	نیم موضعی
<i>local</i>	موضعی
خ	
<i>idempotent</i>	خود توان
<i>automorphism</i>	خودریختی
د	
<i>domain</i>	دامنه
<i>principal ideal</i>	ایده آل اصلی
<i>integral</i>	صحیح
<i>endomorphism</i>	درونریختی
<i>sequences</i>	دنباله
ر	
<i>radical</i>	رادیکال
<i>Jacobson radical</i>	رادیکال جیکبسون

<i>category</i>	رسته
<i>chain</i>	ز زنجیر
<i>subset</i>	زیر مجموعه
<i>submodule</i>	زیر مدول
<i>essential</i>	اساسی
<i>small</i>	کوچک
<i>compatible</i>	س سازگار
<i>series</i>	سری
<i>composition</i>	ترکیبی
<i>ascending chain condition</i>	ش شرط زنجیر افزایشی
<i>decending chain condition</i>	شرط زنجیر کاهششی
<i>split</i>	شکافته شده
<i>coefficients</i>	ض ضرایب
<i>number</i>	ع عدد
<i>cardinal</i>	اصلی
<i>prime integer</i>	عدد اول
<i>element</i>	عنصر
<i>nilpotent</i>	پوچ توان
<i>idempotent</i>	خود توان
<i>maximal</i>	ماکسیمال
<i>minimal</i>	مینیمال

<i>identity</i>	همانی
<i>inverse</i>	معکوس
<i>unit</i>	یکه
<i>irredundant</i>	غیر زائد
<i>vector space</i>	فضای برداری
<i>covariant functors</i>	فانکتور همورد
<i>theorem</i>	قضیه
<i>Jordan-Holder</i>	ژردن - هولدر
<i>strongly secondary</i>	قویاً ثانویه
<i>group</i>	گروه
<i>prufer</i>	پروفر
<i>matrix</i>	ماتریس
<i>lower triangular</i>	پایین مثلثی
<i>orthogonal</i>	متعامد
<i>set</i>	مجموعه
<i>empty</i>	تهی
<i>proper</i>	سره
<i>module</i>	مدول
<i>Artinian</i>	آرتینی
<i>free</i>	آزاد
<i>injective</i>	انژکتیو
<i>indecomposable</i>	تجزیه ناپذیر
<i>prime</i>	اول

<i>primary</i>	اولیه
<i>bass</i>	باس
<i>projective</i>	پروژکتیو
<i>hollow</i>	پوچ
<i>decomposable</i>	تجزیه پذیر
<i>secondary</i>	ثانویه
<i>inverse polynomial</i>	چندجمله ای معکوس
<i>quotient</i>	خارج قسمتی
<i>good</i>	خوب
<i>simple</i>	ساده
<i>finitely generated</i>	متناهی مولد
<i>representable</i>	نمایشی
<i>semi simple</i>	نیم ساده
<i>faithful</i>	وفادار
<i>coprime</i>	هم اول
<i>uniform</i>	یکنواخت
<i>zero divisors</i>	مقسوم علیه صفر
<i>left</i>	چپ
<i>right</i>	راست
<i>local</i>	موضعی
<i>field</i>	میدان
ن	
<i>noncommutative</i>	ناجابجایی
<i>map</i>	نگاشت
<i>representation</i>	نمایش
ه	
<i>kernel</i>	هسته
<i>identity</i>	همانی
<i>category equivalence</i>	هم ارزی رسته ای
<i>homomorphism</i>	همریختی

isomorphism

unit

ی

یکریختی

یکه

References

- [1] S. Annin (2008) “Attached primes over noncommutative rings” **J. Pure Appl. Algebra**, 212, p. 510-521.
- [2] S. Annin (2000) “Associated primes over skew polynomial rings” **Communications in Algebra**, 30, 5, 2511-2528.
- [3] Annin S., (2002), *phD. Thesis*, “Associated and Attached Primes Over Noncommutative Rings”, Math. Depart., University of California at Berkeley .
- [4] N. Bourbaki (1966), “**Commutative Algebra**”, Hermann, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- [5] L. Chambless (1981) “Coprimary decomposition, N-dimension and divisibility” **Communications in Algebra**, 9, p. 1131-1146.
- [6] C. Faith (1976), “**Algebra II: Ring Theory, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics**”, Vol. 191, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [7] C. Faith (2000) “Associated primes in commutative polynomial rings” **Communications in Algebra**, 28(8), p. 3983-3986.
- [8] A. Facchini (1998), “**Module Theory: Endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes of modules**”, *Progress in Mathematics*, Vol. 167, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin.
- [9] K. Goodearl and R. Warfield (1989), “**An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings**”, *London Math. Soc. Student Texts No. 16*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne.
- [10] R. Gordon (1974) “Primary decomposition in right noetherian rings” **Communications in Algebra**, 2 (6), p. 491-524.
- [11] T. W. Hungerford (1989), “**Algebra**”, *Graduate Texts in Math.*, Springer-Verlag, New York.
- [12] D. Kirby (1973) “Coprimary decomposition of artinian modules” **Journal of London Mat Soc. (Ser. 2)**, 6, p. 571-576.
- [13] T.Y. Lam (1991), “**A First Course in Noncommutative Rings**”, *Graduate Texts in Math.*, Springer-Verlag, Berlin, Heldorf.

- [14] T.Y. Lam (1995), “**Exercises in Classical Ring Theory**”, *Problem Books in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [15] T.Y. Lam (1998), “**Lectures on Modules and Rings**”, *Graduate Texts in Math.* No. 189, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [16] I.G. Macdonald (1973) “Secondary representation of modules over a commutative ring” in **Symposia Mathematica**, 11, p. 23-43.
- [17] H. Matsumura (1986), “**Commutative Ring Theory**”, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* No. 8, Cambridge University Press.
- [18] L. Melkersson (1998) “Content and inverse polynomials on artinian modules” **Communications in Algebra**, 26 (4), p.1141-1145.
- [19] B. Osofsky (1994) “Noether Lasker primary decomposition” **revisited. American Mathematical Monthly**, 101(8):759-768.
- [20] R. Y. Sharp (1976) “Secondary representations for injective modules over commutative noetherian rings” **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, (2)20: 143-151.
- [21] K. Varadarajan (1979) “Dual goldie dimension” **Communications in Algebra**, 7, p. 565-610.
- [22] S. Yassemi (1995) “Coassociated primes” **Communications in Algebra**, 23 (4), p. 1473-1498.

Abstract

Attached prime ideals and secondary and representation modules were introduced in 1973 by I.G. Macdonald to develop a dual theory to the associated prime ideals in commutative algebra. In this thesis we generalize Macdonald's theory to the modules over noncommutative rings. We also examine attached prime ideals of various modules. We describe how the attached primes behave under category equivalence. Let M_R be an R -module and $\sigma : R \rightarrow R$ be an automorphism, and denote the skew polynomial ring $R[x; \sigma]$ by S . It is then possible to make the set of inverse polynomials $M[x^{-1}]$ into a right S -module by declaring that for $i, j \geq 0$, $m \in M$, and $a \in R$,

$$(mx^{-i})(ax^j) := \begin{cases} m\sigma^{-i}(a)x^{-i+j} & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases}$$

We prove that if M_R is completely σ -compatible, then $\text{Att}(M[x^{-1}]_S) \supseteq \{p[x] : p \in \text{Att}(M_R)\}$ (denote the attached primes set of M_R by $\text{Att}(M_R)$). If we assume that $M[x^{-1}]$ is a completely σ -compatible and bass module, then $\text{Att}(M[x^{-1}]_S) = \{p[x] : p \in \text{Att}(M_R)\}$. In the continues generalize the sense of secondary and representation modules over noncommutative rings. Note that this results follows from [1].

Key Words: Attached prime ideal, Coprime module, Associated prime ideal, Annihilator, Secondary module, Representation module, Skew polynomial ring, σ -Compatible, Right perfect ring, Bass module



Shahrood
University of Technology

Department of Mathematics

Attached Primes Over Noncommutative Rings

Maryam Tajik

Supervisor:
Dr. Ebrahim Hashemi

September 2010