

حاشا  
الرحمن الرحيم





دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# کاربردهایی از منطق فازی در سرطان پستان

نگارنده: آرزو همایی فصیح

استادان راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی  
دکتر محمد هادی نوری اسکندری

استادان مشاور

دکتر سعید اسلامی  
دکتر علیرضا آتشی

بهمن ۱۳۹۵



تقدیم به:

خدایی که آفرید جهان را، انسان را، عقل را، علم  
را، معرفت را، عشق را و به کسانی که عشقشان را  
در وجودم دمیدند؛ پدر و مادرم.

## سپاس‌گزاری...

سپاس‌ خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید؛ و سلام و درود بر حضرت محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم‌ آنان که وجودمان وام‌دار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوارم که همواره بر کوتاهی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یابوری بی چشم‌داشت برای من بوده‌اند؛ از اساتید بزرگوار و شایسته راهنما و مشاور این پایان‌نامه که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ نمودند و زحمت راهنمایی و مشاوره را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی‌رسید و از اساتید فرزانه و دلسوز که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس‌ گوید.

آرزو‌همایی فصیح

بهمن ۱۳۹۵

## تعهد نامه

اینجانب آرزو همایی فصیح دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان کاربردهایی از منطق فازی در سرطان پستان، تحت راهنمایی حجت احسنی طهرانی و محمد هادی نوری اسکندری متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

آرزو همایی فصیح

بهمن ۱۳۹۵

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.





## چکیده

متاستاز سرطان پستان و یا گسترش سرطان از پستان به سایر اندام‌های بدن (اغلب استخوان‌ها، ریه، کبد و یا مغز) یکی از دلایل بیشتر مرگ‌های ناشی از سرطان پستان به‌شمار می‌آید. تشخیص متاستاز سرطان پستان در مراحل اولیه، به تعیین بهترین شیوه برای مهار و پیش‌گیری از پیشرفت سرطان پستان و یا کنترل بیماری و بهبود کیفیت زندگی بیمار، کمک خواهد کرد. در این پایان‌نامه با استفاده از اطلاعات موجود از سوابق بیماران و منطق فازی، متاستاز سرطان پستان را تشخیص می‌دهیم. مطالعه حاضر روش استنتاج ممدانی، روش استنتاج تاکاگی سوگنو و روش استنتاج عصبی - فازی به نام انفیس (سیستم استنتاج تطبیقی عصبی - فازی) را مورد استفاده قرار می‌دهد تا متاستاز سرطان پستان را در مراحل اولیه با استفاده از داده‌های بیماران درگیر با متاستاز، تعیین کند. مجموعه داده مورد استفاده در این کار از مرکز تحقیقات سرطان پستان (BCRC) دریافت شده است. به‌کارگیری داده‌های پزشکی مربوط به بیماران حقیقی، با در نظر گرفتن عوامل خطر در پیش‌بینی متاستاز با استفاده از منطق فازی برای نخستین بار در این پایان‌نامه مطرح شده است. از نقاط قوت این روش‌ها می‌توان به استفاده از منطق فازی در رابطه با سرطان پستان که عوامل خطر آن در واقع متغیرهای فازی هستند، اشاره کرد. برای بررسی سیستم‌های استنتاج فازی ممدانی، سوگنو و نیز انفیس ساخته شده، با مقایسه خروجی واقعی بیماران و خروجی حاصل از مدل، میانگین مربعات خطا (RMSE) برای مدل‌های ممدانی، سوگنو، انفیس با FIS اولیه از نوع FCM، انفیس با FIS اولیه از نوع خوشه‌بندی کاهش‌ی به‌ترتیب برابر با  $0/370894208$ ،  $0/389311797$ ،  $0/27728$ ، و  $0/31837$  به‌دست آمدند. این مقادیر با مشورت پزشکان حاضر در پژوهشکده سرطان پستان به‌عنوان خطاهای خوب و قابل قبول برای مدل‌های ساخته شده، در نظر گرفته شدند.

کلمات کلیدی: سرطان پستان، متاستاز، منطق فازی، سیستم استنتاج فازی ممدانی، سیستم استنتاج فازی تاکاگی - سوگنو، سیستم استنتاج تطبیقی عصبی - فازی (انفیس)، خوشه‌بندی



# فهرست مطالب

س فهرست تصاویر

ف فهرست جداول

۱	تعاریف، قضایا و مفاهیم مقدماتی	۱
۱	مقدمه	۱.۱
۱	مقیاس، زبان و عدم حتمیت	۲.۱
۳	ظهور نظریه مجموعه‌های فازی	۳.۱
۵	تاریخچه مختصر	۴.۱
۶	از مجموعه‌های کلاسیک تا مجموعه‌های فازی	۵.۱
۱۱	روابط فازی	۶.۱
۱۲	ترکیب روابط فازی	۷.۱
۱۳	۱.۷.۱ اصل توسعه	۱.۷.۱
۱۴	۲.۷.۱ اعداد فازی	۲.۷.۱
۱۴	متغیرهای زبانی و قواعد اگر-آن‌گاه فازی	۸.۱
۱۵	۱.۸.۱ قیود زبانی	۱.۸.۱
۱۶	۹.۱ قواعد اگر-آن‌گاه فازی	۹.۱
۱۶	۱.۹.۱ گزاره‌های فازی	۱.۹.۱
۱۷	۲.۹.۱ تفسیر قواعد اگر-آن‌گاه فازی	۲.۹.۱
۱۹	۱۰.۱ منطق فازی و استدلال تقریبی	۱۰.۱
۱۹	۱۱.۱ پایگاه قواعد و موتور استنتاج فازی	۱۱.۱
۲۰	۱.۱۱.۱ ویژگی‌های مجموعه قواعد	۱.۱۱.۱
۲۱	۱۲.۱ موتور استنتاج فازی	۱۲.۱
۲۱	۱.۱۲.۱ روش استنتاج ممدانی	۱.۱۲.۱
۲۳	۲.۱۲.۱ روش استنتاج تاکاگی - سوگنو	۲.۱۲.۱
۲۳	۳.۱۲.۱ تشریح مدل فازی تاکاگی - سوگنو	۳.۱۲.۱
۲۴	۱۳.۱ فازی سازها و نافازی سازها	۱۳.۱

۲۴	.....	فازی ساز	۱.۱۳.۱
۲۵	.....	نافازی ساز	۲.۱۳.۱
۲۹		<b>سرطان پستان</b>	<b>۲</b>
۲۹	.....	مقدمه	۱.۲
۲۹	.....	آشنایی با سرطان پستان	۲.۲
۳۰	.....	عوامل خطر در سرطان پستان	۳.۲
۳۰	.....	سن	۱.۳.۲
۳۰	.....	جنسیت	۲.۳.۲
۳۱	.....	سابقه فامیلی ابتلا به سرطان پستان	۳.۳.۲
۳۱	.....	سابقه شخصی در ابتلا به سرطان پستان	۴.۳.۲
۳۱	.....	عوامل مربوط به دوره باروری و هورمون‌ها	۵.۳.۲
۳۲	.....	چاقی	۶.۳.۲
۳۳	.....	پیش‌روی سرطان (متاستاز)	۴.۲
۳۳	.....	مراحل مختلف و درجه بندی سرطان	۵.۲
۳۴	.....	درجه بندی سرطان	۱.۵.۲
۳۷		<b>شبکه‌های تطبیقی و انفیس</b>	<b>۳</b>
۳۷	.....	مقدمه	۱.۳
۳۷	.....	روش کمترین مربعات	۲.۳
۳۷	.....	روش تخمین‌گر کمترین مربعات	۱.۲.۳
۴۱	.....	روش تخمین‌گر کمترین مربعات بازگشتی	۲.۲.۳
۴۴	.....	روش گرادیان کاهشی	۳.۳
۴۴	.....	روش‌های کاهشی	۱.۳.۳
۴۵	.....	روش‌های مبتنی بر گرادیان	۲.۳.۳
۴۶	.....	روش گرادیان کاهشی	۳.۳.۳
۴۷	.....	شبکه‌های عصبی مصنوعی	۴.۳
۴۸	.....	شبکه‌های تطبیقی: ساختارها و الگوریتم‌های آموزش	۵.۳
۵۱	.....	پس انتشار	۱.۵.۳
۵۳	.....	قاعده آموزش ترکیبی: ترکیبی از گرادیان کاهشی و روش کمترین مربعات	۲.۵.۳
۵۴	.....	آموزش دسته‌ای (آموزش منفصل)	۳.۵.۳
۵۵	.....	آموزش الگو (آموزش متصل)	۴.۵.۳
۵۶	.....	سیستم‌های عصبی - فازی تطبیقی (انفیس)	۶.۳
۵۶	.....	ساختار سیستم‌های عصبی - فازی تطبیقی (انفیس)	۷.۳
۵۹	.....	الگوریتم آموزش ترکیبی	۱.۷.۳

۸.۳	طراحی سیستم‌های استنتاج فازی با استفاده از داده در محیط انفیس مبتنی بر	
۶۰	خوشه‌بندی	.....
۶۱	۱.۸.۳ میانگین مراکز فازی	.....
۶۴	۲.۸.۳ خوشه‌بندی کاهشی	.....
۶۷	۴ ارزیابی متاستاز سرطان پستان با استفاده از روش‌های ممدانی، سوگنو و انفیس	
۶۷	۱.۴ مقدمه	.....
۶۸	۲.۴ مجموعه داده‌ها، پیش پردازش و تعیین توابع عضویت	.....
۷۷	۳.۴ مدل سیستم استنتاج فازی ممدانی برای پیش‌بینی متاستاز سرطان پستان	.....
۸۲	۴.۴ مدل سیستم استنتاج سوگنو برای پیش‌بینی متاستاز سرطان پستان	.....
	۵.۴ طراحی و اجرای انفیس با استفاده از سه روش متفاوت برای پیش‌بینی متاستاز سرطان	
۸۴	پستان	.....
۸۴	۱.۵.۴ آموزش انفیس در محیط	.....
۸۴	۲.۵.۴ آموزش انفیس در MATLAB	.....
۸۶	۳.۵.۴ انفیس شماره یک با هفت ورودی و خروجی مرحله سرطان پستان	.....
۹۱	۴.۵.۴ انفیس شماره دو با شش ورودی و خروجی مرحله سرطان پستان	.....
۹۲	۶.۴ نتایج و پیشنهادات	.....
۹۳	۱.۶.۴ پیشنهادات	.....
۹۵	مراجع	
۹۹	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۰۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	



# فهرست تصاویر

۹	مجموعه محدب	۱.۱
۹	مجموعه غیرمحدب	۲.۱
۲۴	فازی ساز منفرد	۳.۱
۲۵	فازی ساز گوسین	۴.۱
۲۵	فازی ساز مثلثی	۵.۱
۲۶	نافازی ساز مرکز ثقل	۶.۱
۲۶	نافازی ساز میانگین مراکز	۷.۱
۲۷	نافازی سازهای ماکزیمم	۸.۱
۳۳	متاستاز	۱.۲
۳۳	مراحل سرطانی شدن بافت	۲.۲
۴۵	جهت‌های کاهشی شدنی	۱.۳
۴۶	$\xi$ زاویه بین جهت گرادیان $g$ و جهت کاهشی $d$ در نقطه کنونی $\theta_{now}$	۲.۳
۴۹	شبکه تطبیقی	۳.۳
۴۹	شبکه تطبیقی با نمایش لایه‌ها	۴.۳
۵۰	شبکه تطبیقی بازگشتی	۵.۳
۵۰	شبکه تطبیقی پیشرو	۶.۳
۵۱	شبکه تطبیقی خطی تک گره	۷.۳
۵۱	شبکه تطبیقی با نمایش لایه‌ای	۸.۳
۵۶	یک مدل فازی سوگنو مرتبه اول با دو ورودی و دو قاعده	۹.۳
۵۶	ساختار انفیس معادل با مدل فازی سوگنو مرتبه اول با دو ورودی و دو قاعده	۱۰.۳
	ساختار انفیس برای مدل فازی سوگنو که وزن‌های نرمال سازی شده در آخر هر لایه	۱۱.۳
۵۸	نمایش داده شده‌اند.	
	(a): ساختار انفیس متناظر با یک مدل فازی سوگنو که شامل دو ورودی و یک خروجی و نه قاعده می‌باشد و نیز فرض شده که هر ورودی سه تابع عضویت دارد.	۱۲.۳
۵۹		
۷۰	توابع عضویت سن تشخیص بیماری سرطان پستان	۱.۴

۷۱	توابع عضویت سن یائسگی	۲.۴
۷۲	داشتن یا نداشتن بارداری	۳.۴
۷۲	توابع عضویت مدت زمان (میزان) شیردهی بر حسب ماه	۴.۴
۷۳	توابع عضویت استفاده از داروهای پیش‌گیری از بارداری	۵.۴
۷۴	توابع عضویت سابقه شخصی ابتلا به سرطان پستان	۶.۴
۷۴	توابع عضویت سابقه خانوادگی ابتلا به سرطان پستان	۷.۴
۷۵	توابع عضویت وقایع پراسترس در زندگی	۸.۴
۷۵	توابع عضویت گرید تومور یا سرعت و قدرت رشد تومور	۹.۴
۷۷	توابع عضویت مراحل بیماری سرطان	۱۰.۴
۸۱	Surface Viewer	۱۱.۴
۸۱	Surface Viewer	۱۲.۴
۸۲	ارتباط میان مرحله بیماری سرطان پستان و سن تشخیص بیماری سرطان پستان	۱۳.۴
۸۳	Surface Viewer	۱۴.۴
۸۳	Surface Viewer	۱۵.۴
۸۳	ارتباط میان مرحله بیماری سرطان پستان و سن تشخیص بیماری سرطان پستان	۱۶.۴
۸۹	نمایش نتایج انفیس برای داده‌های آموزش	۱۷.۴
۹۰	نمایش نتایج انفیس برای داده‌های تست	۱۸.۴
۹۰	نتایج انفیس برای داده‌های آموزش	۱۹.۴
۹۱	نتایج انفیس برای داده‌های تست	۲۰.۴
۹۲	نتایج انفیس برای داده‌های آموزش تنها پس از یک مرحله آموزش	۲۱.۴



# فهرست جداول

۹۲	.....	نتایج میدانی و سوگنو	۱.۴
۹۳	.....	نتایج انفیس	۲.۴



# فصل ۱

## تعاریف، قضایا و مفاهیم مقدماتی

### ۱.۱ مقدمه

در این فصل به بررسی تعاریف و مفاهیم اولیه منطق فازی می‌پردازیم. روش‌های فازی سازی، ساختار کلی استنتاج فازی به روش‌های ممدانی و سوگنو و روش‌های نافازی سازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این راستا از منابع [۳۱]، [۱۲]، [۱۱] و [۸] - [۶] استفاده می‌کنیم.

### ۲.۱ مقیاس، زبان و عدم حتمیت

انسان‌ها عناصر هوشمند طبیعت بوده که برای درک محیط پیرامون خود تلاش نموده و جهت نیل به نیازهای کوتاه‌مدت و بلندمدت خود و نیز دستیابی به آرزوها و آرمان‌های خویش برنامه‌ریزی می‌نمایند. برای نیل بدین اهداف، انسان از اطلاعات حاصل از تجارب موجود در زندگی خود و دیگران استفاده نموده و از توانایی‌های ذهنی خویش برای نظم بخشیدن و اولیت‌بندی این اطلاعات استفاده می‌کند. به عبارت دیگر وی از توانایی استدلال بر اساس مشاهدات برای نیل به اهداف خود استفاده می‌کند. البته به دلیل محدودیت قدرت ادراک انسان و نیز محدودیت قدرت استدلال جامع و عمیق، وی معمولاً با عدم قطعیت و حتمیت مواجه است: عدم قطعیت در رابطه با جامعیت استنتاجات خود و عدم حتمیت در رابطه با کیفیت اطلاعات. از لوازم عدم حتمیت امکان وجود خطا در رفتار انسان بوده زیرا وی معمولاً فاقد اطلاعات جامع و همه جانبه از محیط پیرامون خود است. انسان برای بقا و ادامه حیات خود علی القاعده با اموری نظیر تصمیم‌گیری، جمع‌آوری اطلاعات، تجزیه و تحلیل اطلاعات و پیش‌بینی و

آينده‌نگري امور و حوادث مواجه و دست به گريبان است. در تمام امور وي از اطلاعات گذشته و حال براي نيل به اطلاعاتي كه در دسترس نيست استفاده مي‌كند. بديهي است كه فقدان اطلاعات كامل منجر به عدم حتميت مي‌گردد.

همه ما با تحقيقات و پژوهش‌هاي تجربي مانند كشفيات علمي كه در آن دانشمندان و كارشناسان از آزمون حوادث و رخدادهاي فزيكي جهت حل مسائل و يا كسب آگاهي بيشتر در رابطه با پديده‌ها استفاده مي‌كنند آشنائي داريم. در اين گونه تحقيقات اگرچه مطلوب و ايده‌آل هستند، بايد به محدوديت‌هاي مربوط به نيل به حتميت توجه خاص نمود. اول اين كه بدون توجه به دقت در معيار و اندازه‌گيري امور، حتي در مواقعي كه مقدار، حجم و ... پارامتر مورد نظر بسيار اندك است، عدم حتميت اجتناب‌ناپذير است. مثلا متر به‌عنوان استاندارد ي براي اندازه‌گيري پذيرفته شده است. اين معيار به اجزاء ريزتري مثل سانتي‌متر تقسيم مي‌گردد. سانتي‌متر نيز قابل تقسيم به اجزاء ريزتر است. اين تقسيم بندي‌ها براي كارهاي مختلف مطلوبيت متفاوت دارند. به‌عنوان مثال، در شرايطي ممكن است ريزترين تقسيم بندي به كار رود ولي در آزمايشگاه ديگر به معياري باز هم كوچكتر نياز باشد. در زمينه مقياس‌هاي متريك، امكان تقسيم بيشتر از يك ميليونيم‌متر وجود دارد پس در حقيقت، هيچ محدوديت نظري در رابطه با تعداد دفعاتي كه يك مقياس به مقياس‌هاي ريزتر تقسيم مي‌گردد، وجود ندارد. ليكن انسان در عمل تنها قادر به تقسيم مقياس‌ها به دفعات محدود است. به‌عبارت ديگر، به طور حتم و يقين در همه معيارهاي اندازه‌گيري، بدون توجه به درجه دقت و شفافيت، امكان خطا وجود دارد. حتي دقيق‌ترين معيارها، غيرحتمي و غيرقطعي‌اند. بنا بر اين، در علوم مختلف كه در آن نياز به اطلاعات و مقياس‌هاي بسيار دقيق است، عدم حتميت اجتناب‌ناپذير است. اگر اين ادعا در رابطه با علوم دقيق صحت داشته باشد، در ساير علوم كه موضوعات و مفاهيم آن‌ها قابليت كمی شدن را ندارند، پديده عدم حتميت بسيار عيان‌تر و مشهودتر است [۸].

دومين پديده محدود كننده حتميت مورد انتظار، کاربرد زبان محاوره‌اي براي توصيف و انتقال دانش و آگاهي است. درك ما از مفهوم لغات و واژه‌ها با زيربناها و شالوده‌هاي فرهنگي و ارتباطات شخصي ما گره خورده است. بدین مناسبت، اگرچه ممكن است در اصل معنی لغات تفاهم داشته و قادر به ارتباط نسبي و قابل قبول در اغلب موارد با همدیگر باشیم، لیکن توافق كامل و بدون ابهام در بسياري از مواقع بسيار مشكل و بعيد به نظر مي‌رسد. به‌عبارت ديگر، زبان طبيعي و محاوره‌اي غالبا داراي مشخصه ابهام و عدم شفافيت است. به‌عنوان مثال، پارادوكس توده كه اغلب در مباحث عدم حتميت واژه‌هاي زباني مطرح است را در نظر بگيريد. طبق تعريف يك توده از تجمع اجزاء مربوطه، مانند توده دانه‌ها و توده سنگ‌ها، تشكيل شده است. حال اگر يك جزء از آن حذف شود، به دليل اين كه حذف آن جزء تأثير عمده‌اي روي توده نمي‌گذارد، هنوز اطلاق توده بدان تجمع قابل اعمال است. باز با حذف يك جزء ديگر، هنوز توده وجود دارد. با تكرار حذف اجزاء به‌طور مداوم به نقطه‌اي خواهيم رسيد كه تنها دو جزء مثلا دو دانه و يا دو سنگ، باقي خواهد ماند. بديهي است كه اين دو جزء باقي مانده ديگر تشكيل توده نمي‌دهند. بنا بر اين سوال پايه‌اي اين است كه در كدام نقطه تجمع اجزاء ديگر قابل تعريف به‌عنوان توده نيست؟ در حقيقت، ما قادر به تعيين دقيق تعداد اجزاء براي تعريف يك مجتمع به‌عنوان توده نيستيم، زيرا با حذف اجزاء احتمالا تمايل به اطلاق توده به آن تجمع را داريم. اين بدان

معنی است که اکثر واژه‌های زبانی از قبیل واژه توده اغلب دارای ابهام می‌باشند. مقوله ابهام ممکن است به دلیل استنباطات گوناگون از معانی واژه‌ها باشد [۸]. مثلاً شخصی که در اهواز زندگی می‌کند ممکن است از واژه «ابری» درک متفاوتی از شخص دیگری که در مازندران زندگی می‌کند، داشته باشد. هر دو شخص مذکور به دلیل این که فارسی زبان هستند، در اصل معنی لغت ابری توافق دارند. به عبارت دیگر، آن‌ها این واژه را برای روزی که اصلاً در آسمان ابری وجود ندارد و هوا کاملاً آفتابی است به کار نمی‌برند. لیکن تحمل فرد ساکن در مازندران نسبت به ابری بودن هوا بیشتر بوده و ممکن است تمایل نداشته باشد که پوشش ابر زیر ۳۰ درصد را ابری بنامد. در حالی که فرد ساکن در اهواز ممکن است این درصد را قابل قبول برای اطلاق ابری بودن بداند.

مقوله ابهام در بعضی زمینه‌ها که پژوهشگران و محققین اصرار به حتمیت و شفافیت زیاد دارند، غالباً مسئله زاست. به عنوان مثال فیزیکدانان اصولاً نیازمند توافق روی معانی اصطلاحاتی مثل نیرو، فضا، الکترون و غیره می‌باشند. بدین منظور برای نیل به شفافیت و حتمیت و اجتناب از عدم اطمینان و خطا، آن‌ها معانی واژه‌های فنی و تخصصی خود را به طور واضح تعریف و تعیین می‌کنند. با این وجود، آن‌ها تنها با زبان محاوره‌ای و طبیعی سخن نگفته، بلکه آن را با یک زبان ساخته شده خاص به نام زبان مصنوعی و با معانی روشن و تک بعدی مخلوط می‌کنند [۸].

این قبیل زبان‌های مصنوعی در بسیاری از علوم، مانند ریاضیات و مهندسی به دلیل این که نمایانگر روش‌های کمی و محاسباتی هستند، وجود دارند. لیکن اگرچه این زبان‌ها بسیار مفیدند، آن‌ها دربرگیرنده جامع ایده‌هایی که از یک زبان قابل تصور است، نمی‌باشند. یکی از دلایل این موضوع این است که زبان صریح و حتمی توان خود را برای بیان تجربیات عملی و واقعی که اغلب چندلایه‌ای هستند، از دست می‌دهد. در این جا انسان نیازمند یک روش کیفی و با ابعاد مختلف بوده که قادر به پاسخگویی به مسائل پیچیده باشد. در حقیقت این روش‌ها در رشته‌هایی مثل روانشناسی، بیولوژی، پزشکی، جامعه‌شناسی و اقتصاد که معیارها غالباً غیر صریح و غیرحتمی‌اند، بسیار مفید و اثربخشند [۸].

### ۳.۱ ظهور نظریه مجموعه‌های فازی

از آغاز ظهور علوم جدید تا اواخر قرن نوزدهم، عدم حتمیت به عنوان یک پدیده نامطلوب که بایستی از آن اجتناب کرد، مطرح بود. این رفتار به تدریج با ظهور مکانیک احتمالی در آغاز قرن بیستم تغییر کرد. این موضوع به خصوص در رابطه با واژه‌های زبانی در زبان محاوره‌ای بسیار مشهود بود. این محدودیت‌ها سبب ظهور نظریه جدیدی درباره عدم حتمیت شده که قادر به فائق آمدن بر عدم شفافیت و ابهام در پدیده‌های علمی واقعی می‌گردد [۸].

لطفی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ میلادی نظریه جدید عدم حتمیت را که با نظریه احتمالات متمایز بود، مطرح نمود. تجربه‌های علمی و عملی او گویای این واقعیت بود که روش‌های ریاضی کلاسیک قادر به مدل‌سازی مسائل سیستم‌های پیچیده نیستند. او در مقاله معروف خود، مفاهیم مجموعه‌های فازی با مرزهای غیرقطعی را معرفی نمود [۶]. به عبارت دیگر، در یک مجموعه کلاسیک هر عنصر یا یک عضو از آن مجموعه هست و یا در داخل آن مجموعه نیست. مثلاً، مجموعه پول‌های سکه‌ای امریکایی عبارتند از: یک سنتی، پنج سنتی، ده سنتی، بیست و پنج سنتی، نیم دلاری و یک دلاری. مجموعه

پول‌های سکه‌ای امریکایی یک نمونه بارز از مجموعه‌های کلاسیک است. پس همه پول‌های سکه‌ای موجود در جیب هر امریکایی ممکن است در لیست سکه‌های نامبرده قرار گرفته و یا قرار نداشته باشد. در این صورت اگر از کسی سوال شود که آیا یک سکه خاص جزء این مجموعه هست، پاسخ وی یا آری و یا نه خواهد بود.

علیرغم مجموعه‌های کلاسیک با مرزهای مشخص و قطعی، مجموعه‌های فازی دارای مرزهای مشخص و قطعی نیستند. به عبارت دیگر شرط عضویت و یا عدم عضویت یک عنصر در یک مجموعه به کاملاً عضویت یا کاملاً عدم عضویت در آن مجموعه بستگی ندارد [۸]. به عنوان مثال واژه «گرم» دربرگیرنده طیف وسیعی از درجه حرارت‌های گوناگون می‌باشد. این واژه می‌تواند به مجموعه «گرم» که اجزاء آن درجه حرارت‌های گوناگون می‌باشد، تعلق گیرد. در یک مورد خاص مانند پیش‌بینی وضع هوا در مناطق جغرافیایی گوناگون و زمان‌های خاص که دماسنج  $30^{\circ}$  درجه،  $35^{\circ}$  درجه،  $45^{\circ}$  درجه و  $55^{\circ}$  درجه سانتی‌گراد را نشان می‌دهد، ممکن است بخواهیم قضاوت کنیم که این درجات تا چه حد با واژه «گرم» تطابق و سازگاری دارند. بسته به نقطه نظر ما و مشخصه‌های آن مورد خاص (مانند مکان، فصل، روز، شب و غیره) ممکن است گفته شود  $55^{\circ}$  درجه مطلقاً متعلق به مجموعه «گرم» است. در مورد درجه حرارت‌های  $45^{\circ}$  و  $35^{\circ}$  درجه سانتی‌گراد ممکن است همین قضاوت انجام شود، اگرچه در هر وضعیت و موقعیت این موضوع حتمی نیست. لیکن درجه حرارت  $30^{\circ}$  درجه سانتی‌گراد ممکن است در نظر بعضی در داخل این مجموعه قرار نگرفته و روی خط مرزی اعدادی که مبین درجه حرارت گرم هستند، قرار گیرد. مثلاً برای افرادی که در جنوب کشور زندگی می‌کنند، درجه حرارت  $30^{\circ}$  درجه سانتی‌گراد تا حدودی معرف خنکی هواست. لیکن افرادی که در شهری مانند همدان زندگی می‌کنند، این درجه حرارت را معرف گرمی هوا در دوره‌های معمولی تابستان می‌دانند.

ممکن است بیان شود که واژه «گرم بودن» تا حدودی در رابطه با  $30^{\circ}$  درجه سانتی‌گراد صادق بوده، اگرچه این موضوع نه به‌طور واضح کاملاً درست و نه غلط است. به دلیل این که حرارت  $30^{\circ}$  درجه سانتی‌گراد و سایر درجه حرارت‌های بالا به اصطلاح با درجه‌های عضویت گوناگون عضو مجموعه «گرم» هستند، این مجموعه را فازی نامند. این مجموعه با قرار دادن مقادیر عضویت بین صفر و یک به هر درجه حرارت، که هر مقدار مبین درجه و مرتبه عضویت آن میزان حرارت در این مجموعه است قابل تعریف می‌باشد. قرار دادن تابع عضویت<sup>۱</sup> صفر دلالت بر عدم عضویت قطعی آن درجه حرارت در مجموعه بالا نموده و قرار دادن تابع عضویت یک مبین عضویت قطعی آن درجه حرارت در این مجموعه است [۸]. هر مجموعه فازی منحصر با تابع عضویت خاص خود قابل تعریف بوده و هر عضو در داخل آن مجموعه دارای درجه عضویت می‌باشد. این درجه عضویت بین صفر و یک قرار دارد [۶]. در بخش‌های آتی به‌طور مشروح درباره تابع عضویت بحث خواهد شد.

به دلیل این که لازمه عضویت در یک مجموعه فازی براساس قاعده تایید یا عدم تایید مانند بله یا نه و یا صفر و یک نیست، قواعد صریح و شفاف سنتی استدلال و استنتاج به عنوان قواعد متقن در مجموعه‌های فازی به کار برده نمی‌شوند. مثلاً اگر سوال شود که درجه حرارت  $30^{\circ}$  درجه سانتی‌گراد عضو مجموعه درجه حرارت «گرم» است یا عضو مجموعه درجه حرارت «سرد» پاسخ این است که این درجه

<sup>۱</sup>Membership function

حرارت بسته به شرایط فیزیکی و مفهومی، عضو هر دو مجموعه با توابع عضویت گوناگون بین صفر و یک می‌باشد. بنابراین قاعده سنتی تناقض که یک عضو و متمم آن نمی‌توانند هر دو در یک مجموعه قرارگیرند، در مجموعه‌های فازی قابل اعمال نیست. بالعکس، در مثال مربوط به پول‌های سکه‌ای امریکایی، یک فرانک فرانسوی بطور قطع و یقین عضو این مجموعه نیست. در نتیجه، در نظریه جدید عدم حتمیت یا نظریه مجموعه‌های فازی، قاعده سنتی عدم تناقض کاربرد ندارد. این موضوع به دلیل وجود مرزهای فازی و غیرصحيح در مجموعه‌های فازی است [۸].

در ابتدا، نظریه پیشنهادی مجموعه‌های فازی توسط پرفسور زاده مورد استقبال زیاد قرار نگرفت. او و گروه اندک طرفدار این نظریه برای بسط و توسعه آن برای یک دهه تلاش زیادی نمودند. در این دوره اگرچه پیشرفت این نظریه کند به نظر می‌رسید، لیکن در دهه ۱۹۷۰ میلادی چندین اثر مهم و پایه‌ای توسط این پژوهشگران منتشر شد که توجه بسیاری از محققین را به خود جلب نمود. به‌عنوان نمونه، نظریه بسیار مهم کنترل فازی و سپس کاربرد موفقیت‌آمیز آن در صنعت در این برهه از زمان ارائه گردید. این‌گونه کنترل‌گرها براساس قواعد استنتاج منطقی به‌صورت طبیعی و محاوره‌ای طراحی شده و با مجموعه‌های فازی مدل‌سازی گردیده‌اند. چندین ایده بسیار مهم کاربردی منطقی فازی نیز در تشخیص الگو و خوشه‌بندی در این دوره ارائه گردید. در همین برهه زمانی نیز موسسه بین‌المللی سیستم‌های فازی بنیان‌گذاری و نشریه رسمی موسسه بانام مجموعه‌ها و سیستم‌های فازی شروع به انتشار نمود. دهه ۱۹۸۰ میلادی شاهد بسط و توسعه وسیع نظریه فازی و کاربردهای آن در مسائل مختلف علمی و عملی بود. بسیاری از تولیدکنندگان، مخصوصاً تولیدکنندگان ژاپنی، از این نظریه استقبال زیادی نموده و تولیدات انبوه خود را که حاصل طراحی‌های عملیاتی بر اساس منطق فازی بودند، روانه بازار مصرف نمودند. امروزه بسیاری از سیستم‌های کنترل مانند کنترل‌کننده‌های نیرومحرکه‌ها، ترمزها و سایر عناصر کنترل‌کننده در انواع اتومبیل‌ها، کنترل‌کننده فازی هستند. البته اگرچه از نظریه فازی در کاربردهای مهندسی استقبال شایان توجه به‌عمل آمده، امروزه در دنیای تجارت، سرمایه، اقتصاد، جامعه‌شناسی و سایر زمینه‌های عملی مخصوصاً سیستم‌های پشتیبانی تصمیم از این نظریه استفاده‌های فراوان می‌گردد. کاربرد نظریه فازی همچنین در سیستم‌های خبره، سیستم‌های پایگاه داده و بازیافت اطلاعات، تشخیص الگو و خوشه‌بندی، سیستم‌های رباتیک، فرآوری تصویر و سیگنال‌ها، تشخیص صدا، تجزیه و تحلیل ریسک، پزشکی، روانشناسی، شیمی، اکولوژی و اقتصاد به‌وفور یافت می‌شود. امروزه نظریه فازی در پروژه‌های چند منظوره نقش اساسی را بازی می‌کند. این موضوع مخصوصاً در پروژه‌های چند منظوره سیستم‌های هوشمند صادق است. این سیستم‌های دست‌ساخته انسان قادر به حل مسائل پیچیده همانند رفتار انسان به طریق هوشمند می‌باشند. در این‌گونه پروژه‌ها، معمولاً نظریه فازی با محاسبات شبکه‌های عصبی، الگوریتم‌های ژنتیک و سایر روش‌های پیشرفته ترکیب و تلفیق می‌گردند [۸].

## ۴.۱ تاریخچه مختصر

از نقطه نظر کاربردی، برای مجموعه‌های فازی سه مرحله قابل تصور است:

الف: دوره ۱۹۷۷-۱۹۶۵ میلادی که مربوط به مرحله آکادمیک بوده که در این دوره تمرکز روی اصول نظریه مجموعه‌های فازی و کاربردهای ابتدایی آن بوده است. حاصل این دوره چاپ تعداد اندکی کتب و مقالات است که توسط اساتید دانشگاه‌ها ارائه شده‌اند.

ب: دوره ۱۹۸۸-۱۹۷۸ میلادی که مرحله انتقالی بوده و در آن علاوه بر توسعه تئوریک مجموعه‌های فازی، موفقیت‌های اجرایی آن نیز قابل مشاهده است. در این دوره تعداد افرادی که در صنعت و تجارت در این وادی تلاش و تحقیق نموده و نتایج حاصله را در عمل به کار بردند به سرعت افزایش یافته است. حاصل این دوره ارائه مقالات بسیار زیاد با تاکید بر کارکردهای عملی آن بوده است. به علاوه در این دوره پایه‌های تعدادی مراجع و مجلات علمی در زمینه‌های گوناگون فازی بنا نهاده شدند.

ج: دوره اخیر که از سال ۱۹۸۹ میلادی شروع شده و دوران شتابان توسعه نظری و کاربردهای آن در صنعت و تجارت می‌باشد. بعضی از شرکت‌های عمده و بزرگ در آغاز در ژاپن روی این نظریه صحنه گذاشته و منابع زیادی را در توسعه و رشد آن هزینه نمودند. به علاوه موسسات تحقیقاتی زیادی جهت پژوهش در این زمینه تاسیس گردیدند. این دوره همراه با افزایش بسیار سریع مقالات علمی و کاربردی در زمینه فازی بوده و چندین مجله اختصاصی نیز شروع به چاپ شد. همزمان با این توسعه سریع، نرم‌افزارها و سخت‌افزارهای گوناگون برای کاربردهای متنوع فازی به بازار نیز ارائه گردید. در اوایل دهه ۱۹۹۰ میلادی نظریه مجموعه‌های فازی به عنوان رکن کلیدی محاسبات نرم مطرح شده است [۱۱] و [۸]. هدف از محاسبات نرم استخراج قابلیت‌ها برای کار در مواردی که با ابهام و تقریب مواجه بوده به منظور نیل به محاسبات هموار، ساده، کم‌هزینه و قابل قبول که با روش‌های صریح و تند قابل بررسی نیستند، بوده است.

## ۵.۱ از مجموعه‌های کلاسیک تا مجموعه‌های فازی

فرض کنید  $X$  مجموعه جهانی<sup>۲</sup> و شامل تمامی عناصر و اعضا ممکن در بحث یا کاربرد مورد نظر باشد. یادآوری می‌شود که یک مجموعه کلاسیک  $A$  یا به اختصار مجموعه  $A$  در مجموعه جهانی  $X$  را می‌توان با فهرست تمامی اعضا (روش فهرست)<sup>۳</sup> یا با مشخص کردن ویژگی‌هایی که باید توسط اعضا مجموعه پوشش داده شود (روش قاعده)<sup>۴</sup> تعریف کرد. روش فهرست را فقط می‌توان در مجموعه‌های متناهی بکار برد، بنابراین کاربرد محدودی دارد. روش قاعده کلی‌تر می‌باشد. در روش قاعده یک مجموعه  $A$  را بدین صورت می‌توان تعریف نمود [۱۱]:

$$A = \{x \in X \mid x \text{ برآورده می‌کند}\}$$

<sup>۲</sup>Universal set

<sup>۳</sup>List method

<sup>۴</sup>Rule method



روش سومی نیز برای تعریف مجموعه  $A$  وجود دارد. روش تعلق یا عضویت<sup>۵</sup> که یک تابع عضویت دو مقداری  $\{0, 1\}$  را برای  $A$  معرفی می‌کند؛ که با  $\mu_A(x)$  نشان داده می‌شود به نحوی که

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ اگر} \\ 0, & x \notin A \text{ اگر} \end{cases}$$

**تعریف ۱.۵.۱.** [۶، ۸] فرض کنید  $X$  یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر هر زیرمجموعه معمولی  $A$  از  $X$ ، یک تابع از  $X$  به  $\{0, 1\}$  است که این‌گونه تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی  $\{0, 1\}$  به بازه  $[0, 1]$  توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر  $x$  از  $X$ ، عددی را از بازه  $[0, 1]$  نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت  $A$  می‌نامیم. اکنون  $A$  دیگر یک مجموعه معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را یک مجموعه فازی می‌نامیم (به طور دقیق‌تر، یک زیرمجموعه فازی از  $X$ ). بنابراین یک مجموعه فازی  $A$ ، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضا آن می‌توانند به‌طور پیوسته از  $I = [0, 1]$  اختیار شوند. این مجموعه به طور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با  $\mu_A(x)$  نشان می‌دهیم، مشخص می‌شود؛ تابعی که به هر عنصر از  $X$ ، یک عدد را از بازه  $[0, 1]$  به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی  $A$ ، نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار  $\mu_A(x)$  به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر  $x$  به مجموعه فازی  $A$  است و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشان دهنده تعلق کمتر  $x$  به  $A$  است. به لحاظ شهودی  $\mu_A(x)$  را می‌توان درجه پذیرش ما در قبول  $x$  به عنوان عضوی از  $A$  در نظر گرفت. در حالت حدی چنانچه  $x$  کاملاً در  $A$  عضو باشد داریم  $\mu_A(x) = 1$  و چنانچه اصلاً در  $A$  عضو نباشد داریم  $\mu_A(x) = 0$ . پس مجموعه‌های معمولی و توابع نشانگر آن‌ها، حالت‌های خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آن‌ها هستند [۶].

**تعریف ۲.۵.۱.** [۱۱] یک مجموعه فازی  $A$  در مجموعه جهانی  $X$  بوسیله یک تابع  $\mu_A(x)$  که مقادیری در بازه  $[0, 1]$  اختیار می‌کند، مشخص می‌شود.

بنابراین یک مجموعه فازی تعمیم یک مجموعه کلاسیک است که اجازه می‌دهد تابع عضویت هر مقداری را در بازه  $[0, 1]$  اختیار کند. به عبارت دیگر یک مجموعه کلاسیک فقط می‌توانست دو مقدار ۰ و ۱ داشته باشد در حالی که تابع عضویت یک مجموعه فازی، یک تابع پیوسته در محدوده  $[0, 1]$  می‌باشد. یک مجموعه فازی  $A$  را در  $X$  می‌توان با یک مجموعه از زوج‌های مرتب  $x$  و مقدار عضویت آن نمایش داد. بدین ترتیب:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}. \quad (1.1)$$

هنگامی که  $X$  پیوسته باشد {بعنوان مثال  $X = R$ ،  $A$  را معمولاً بدین صورت مشخص می‌کنند:

$$A = \int_X \mu_A(x)/x, \quad (2.1)$$

<sup>۵</sup>Membership method

که علامت  $\int$  نشان دهنده انتگرال نیست. بلکه اجتماع تمامی نقاط  $x \in X$  و مقدار تابع عضویت متناظر  $\mu_A(x)$  را نشان می‌دهد. هنگامی که  $X$  گسسته باشد،  $A$  معمولاً بدین صورت نوشته می‌شود:

$$(3.1) \quad A = \sum_X \mu_A(x)/x = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_A(x_2)}{x_2}, \dots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} = \mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n,$$

که در این جا نیز علامت  $\Sigma$  به معنای جمع ریاضی نیست بلکه اجتماع تمامی نقاط  $x \in X$  و توابع عضویت متناظر را نشان می‌دهد و نیز منظور از علامت  $+$ ، اجتماع است نه جمع حسابی [۱۱] و [۶].

**مثال ۳.۵.۱.** اگر مجموعه مرجع به صورت  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  نشان دهنده تعداد فرزندان باشد که یک خانواده تمایل به داشتنشان دارند؛ در این صورت مجموعه فازی  $A$  بدین صورت خواهد بود:

$$A = \{(0, 0/1), (1, 0/3), (2, 0/7), (3, 1), (4, 0/7), (5, 0/3), (6, 0/1)\},$$

و یا به صورت

$$A = \{0/1/0 + 0/3/1 + 0/7/2 + 1/3 + 0/7/4 + 0/3/5 + 0/1/6\}.$$

**تعریف ۴.۵.۱.** [۱۱] تکیه‌گاه<sup>۶</sup> مجموعه فازی  $A$  در مجموعه جهانی  $X$  یک مجموعه غیرفازی است که شامل تمامی عضوهای غیرصفر  $X$  می‌شود. یعنی

$$(4.1) \quad Sup(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}.$$

$Sup(A)$  نشان دهنده تکیه‌گاه مجموعه فازی است. اگر تکیه‌گاه یک مجموعه فازی خالی باشد، آن را یک مجموعه فازی تهی می‌نامند. یک منفرد فازی<sup>۷</sup>، یک مجموعه فازی است که تکیه‌گاه آن یک نقطه واحد در  $X$  می‌باشد.

**تعریف ۵.۵.۱.** [۶] مقدار  $M = sup \mu_A(x)$  ارتفاع مجموعه  $A$  نامیده می‌شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی  $A$  برابر یک باشد آن‌گاه  $A$  نرمال نامیده می‌شود. در غیر این صورت  $A$  را زیرنرمال گوئیم. بدیهی است که هر مجموعه فازی زیرنرمال  $A$  را می‌توان با تقسیم  $\mu_A(x)$  ها بر ارتفاع  $A$ ، نرمال کرد. اگر  $x$  عنصری باشد که برای آن  $\mu_A(x) = \frac{1}{M}$ ،  $x$  را یک نقطه گذر  $A$  گوئیم.

**تعریف ۶.۵.۱.** [۶] مجموعه فازی  $A$  را تهی گوئیم اگر برای هر  $x \in X$ ،  $\mu_A(x) = 0$  باشد.

**تعریف ۷.۵.۱.** [۶] مجموعه فازی  $A$  را تام گوئیم اگر برای هر  $x \in X$ ،  $\mu_A(x) = 1$  باشد.

**تعریف ۸.۵.۱.** [۶] زیر مجموعه عناصری از  $X$  را که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی  $A$  حداقل به بزرگی  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) باشد،  $\alpha$ -برش  $A$  (یا مجموعه تراز  $\alpha$  وابسته به  $A$ ) گوئیم و با  $A_\alpha$  نشان می‌دهیم.

پس

$$(5.1) \quad A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

<sup>۶</sup>Support

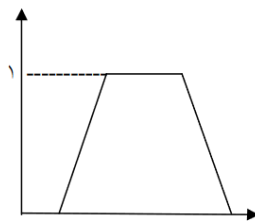
<sup>۷</sup>Fuzzy singleton

در بعضی موارد نیز از مفهوم  $\alpha$ -برش قوی استفاده می‌شود که با  $A_{\bar{\alpha}}$  نشان داده شده و این‌گونه تعریف می‌شود:

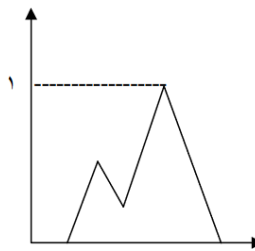
$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}. \quad (6.1)$$

**تعریف ۹.۵.۱.** [۶، ۱۱] مجموعه فازی  $A$  را محدب گوئیم اگر هر  $\alpha$ -برش  $A$  (برای تمام  $0 < \alpha \leq 1$ ) محدب باشد. یک تعریف معادل تحدب به صورت زیر است: مجموعه فازی  $A$  محدب است هرگاه برای هر  $x_1, x_2 \in X$  و هر  $\lambda \in [0, 1]$  داشته باشیم:

$$A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min[A(x_1), A(x_2)].$$



شکل ۱.۱: مجموعه محدب



شکل ۲.۱: مجموعه غیرمحدب

**تعریف ۱۰.۵.۱.** [۶، ۱۱] مجموعه فازی  $A$  را زیر مجموعه فازی  $B$  گوئیم و می‌نویسیم  $A \subseteq B$  اگر برای هر  $x \in X$  داشته باشیم:  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ .

**تعریف ۱۱.۵.۱.** [۶، ۱۱] دو مجموعه فازی  $A$  و  $B$  را مساوی گوئیم و می‌نویسیم  $A = B$  اگر برای هر  $x \in X$  داشته باشیم:  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ .

**تعریف ۱۲.۵.۱.** [۶، ۱۱] اجتماع دو مجموعه فازی  $A$  و  $B$  به صورت مجموعه فازی  $A \cup B$  در  $X$ ، با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad x \in X. \quad (7.1)$$

و یا به بیان ساده‌تر

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \quad x \in X. \quad (8.1)$$

**تعریف ۱۳.۵.۱.** [۶، ۱۱] اشتراک دو مجموعه فازی  $A$  و  $B$  به صورت مجموعه فازی  $A \cap B$  در  $X$ ، با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad x \in X. \quad (۹.۱)$$

و یا به بیان ساده‌تر

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \quad x \in X. \quad (۱۰.۱)$$

یک راه شهودی برای تعریف اجتماع بدین ترتیب است که اجتماع  $A$  و  $B$  کوچکترین مجموعه فازی است که هم دربردارنده  $A$  و هم دربردارنده  $B$  باشد. به‌طور دقیق‌تر، اگر  $C$  یک مجموعه فازی باشد که دربردارنده هم  $A$  و هم  $B$  باشد، آن‌گاه دربردارنده اجتماع  $A$  و  $B$  نیز خواهد بود. برای این‌که نشان دهیم این همان تعریف قبلی می‌باشد، در ابتدا می‌بینیم که  $A \cup B$  به صورت رابطه تعریف شده دربردارنده هم  $A$  و هم  $B$  می‌باشد، چراکه  $\max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \mu_A(x)$  و  $\max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \mu_B(x)$ ؛ به‌علاوه اگر  $C$  یک مجموعه فازی باشد که دربردارنده  $A$  و  $B$  است، آن‌گاه  $\mu_C(x) \geq \mu_A(x)$  و نیز  $\mu_C(x) \geq \mu_B(x)$ ؛ بنابراین  $\mu_C(x) \geq \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cup B}(x)$  که بدین معنی است که مجموعه  $A \cup B$  که به‌صورت (۷.۱) تعریف شده، کوچکترین مجموعه فازی است که دربردارنده  $A$  و  $B$  می‌باشد. عمل اشتراک که به‌وسیله رابطه (۹.۱) تعریف شده را نیز می‌توان به‌همین ترتیب توجیه کرد [۱۱].

**تعریف ۱۴.۵.۱.** [۱۲] یک  $t$  - نرم یک تابع دو متغیره  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$1. \text{ شرط مرزی: } t(x, 1) = t(1, x) = x \quad \forall x \in [0, 1]$$

۲. شرط غیر نزولی بودن: برای هر  $x_1, x_2, y_1, y_2$  در  $[0, 1]$ ، اگر  $x_1 \leq x_2$  و  $y_1 \leq y_2$  باشد آن‌گاه

$$t(x_1, y_1) \leq t(x_2, y_2).$$

$$3. \text{ شرط جابه‌جایی: } t(x, y) = t(y, x)$$

$$4. \text{ شرط شرکت پذیری: } t(t(x, y), z) = t(x, t(y, z))$$

در منطق فازی  $\min$ ، اشتراک و ضرب جبری  $t$  - نرم هستند.

**تعریف ۱۵.۵.۱.** [۱۲] یک  $s$  - نرم یک تابع دو متغیره  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$1. \text{ شرط مرزی: } s(x, 0) = s(0, x) = x \quad \forall x \in [0, 1]$$

۲. شرط غیر نزولی بودن: برای هر  $x_1, x_2, y_1, y_2$  در  $[0, 1]$ ، اگر  $x_1 \leq x_2$  و  $y_1 \leq y_2$  باشد آن‌گاه

$$s(x_1, y_1) \leq s(x_2, y_2).$$

۳. شرط جابه‌جایی:  $s(x, y) = s(y, x)$

۴. شرط شرکت پذیری:  $s(s(x, y), z) = s(x, s(y, z))$

در منطق فازی  $max$  و اجتماع  $s$  - نرم هستند.

تعریف ۱۶.۵.۱. [۶، ۱۱] مجموعه فازی  $A'$ ، متمم مجموعه فازی توسط تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad x \in X. \quad (11.1)$$

## ۶.۱ روابط فازی

تعریف ۱.۶.۱. [۱۱] فرض کنید  $U$  و  $V$  دو مجموعه کلاسیک دلخواه (غیر فازی و قطعی) باشند. ضرب کارتیزین  $U \times V$  و  $U^A$  که با  $U \times V$  نشان داده می‌شود یک مجموعه غیرفازی شامل تمامی زوج مرتب‌های  $(u, v)$  می‌باشد؛ به نحوی که  $u \in U$  و  $v \in V$ . بدین معنی که:

$$U \times V = \{(u, v) | u \in U, v \in V\}. \quad (12.1)$$

در حالت کلی ضرب کارتیزین  $n$  مجموعه غیر فازی دلخواه  $U_1, U_2, \dots, U_n$  که با  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  نشان داده می‌شود، یک مجموعه غیرفازی از تمامی  $n$  عضوهای  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  است؛ به نحوی که برای  $i \in \{1, 2, \dots\}$  داریم:

$$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n\}. \quad (13.1)$$

یک رابطه (غیرفازی) بین مجموعه‌های (غیرفازی)  $U_1, U_2, \dots, U_n$  زیرمجموعه‌ای از ضرب کارتیزین  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  می‌باشد. بدین معنی که اگر ما از  $Q(U_1, U_2, \dots, U_n)$  برای نمایش رابطه میان  $U_1, U_2, \dots, U_n$  استفاده کنیم، آن‌گاه

$$Q(U_1, U_2, \dots, U_n) \subset U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n.$$

تعریف ۲.۶.۱. [۱۱] یک رابطه فازی، یک مجموعه فازی است که در فضای حاصل ضرب برداری مجموعه‌های قطعی  $U_1, U_2, \dots, U_n$  تعریف شده است. با استفاده از نحوه نمایش (۱.۱) یک رابطه فازی  $Q$  در فضای  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  به صورت یک مجموعه فازی مطابق زیر تعریف می‌گردد:

$$Q = \{((u_1, u_2, \dots, u_n), \mu_Q(u_1, u_2, \dots, u_n)) | (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n\} \quad (14.1)$$

که

$$\mu_Q : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \longrightarrow [0, 1].$$

<sup>^</sup>Cartesian product

**مثال ۳.۶.۱.** [۱۱] اگر  $V = U = \mathbb{R}$  مجموعه اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه رابطه فازی "a تقریباً با b برابر است" را که با  $W$  نشان می‌دهیم دارای تابع عضویتی به صورت زیر است:

$$\mu_W(a, b) = e^{-(a-b)^2}$$

همچنین رابطه فازی  $M$  به صورت "a خیلی خیلی بزرگتر از b است" دارای تابع عضویتی شبیه به تابع زیر خواهد بود:

$$\mu_M(a, b) = \frac{1}{1 + e^{-(a-b)}}$$

## ۷.۱ ترکیب روابط فازی

فرض کنید  $P(U, V)$  و  $Q(V, W)$  دو رابطه دودویی غیرفازی باشند، که از یک مجموعه  $V$  به طور مشترک استفاده می‌کنند. ترکیب  $P$  و  $Q$  که با  $P \circ Q$  نشان داده می‌شود، به صورت رابطه‌ای در  $U \times W$  تعریف می‌شود به نحوی که  $(x, z) \in P \circ Q$  اگر و فقط اگر حداقل یک  $y \in V$  وجود داشته باشد، به طوری که:  $(x, y) \in P$  و  $(y, z) \in Q$ . با استفاده از نمایش روابط به شکل توابع عضویت، تعریف معادلی برای ترکیب توابع به صورت لم زیر به دست می‌آید.

**لم ۱.۷.۱.** [۱۱] ترکیب  $P \circ Q$  و  $Q(V, W)$  است اگر و فقط اگر

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \sup_y t[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)], \quad (15.1)$$

که در آن  $(x, z) \in U \times W$  و  $y \in V$  یک  $t$ -نرم است.

حال مفهوم ترکیب را به روابط فازی تعمیم می‌دهیم.

**تعریف ۲.۷.۱.** [۱۱] فرض کنید  $P$  و  $Q$  روابط فازی باشند. ترکیب روابط فازی  $P(U, V)$  و  $Q(V, W)$  که با  $P \circ Q$  نشان داده می‌شود، به صورت یک رابطه فازی در  $U \times W$  تعریف می‌گردد که تابع عضویت آن مطابق با رابطه (۱۵.۱) خواهد بود. از آنجا که  $t$ -نرم در رابطه (۱۵.۱) می‌تواند انواع مختلفی باشد، برای هر نوع  $t$ -نرم یک ترکیب خاص به دست می‌آوریم.

**تعریف ۳.۷.۱.** [۱۱] ترکیب ماکزیمم - مینیمم روابط فازی  $P(U, V)$  و  $Q(V, W)$  یک رابطه فازی  $P \circ Q$  در  $U \times W$  بوده که به وسیله تابع عضویت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \sup_y \min[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)], \quad (16.1)$$

که در آن  $(x, z) \in U \times W$  و  $y \in V$ .

**تعریف ۴.۷.۱.** [۱۱] ترکیب ماکزیمم - حاصل ضرب روابط فازی  $P(U, V)$  و  $Q(V, W)$  یک رابطه فازی  $P \circ Q$  در  $U \times W$  بوده که به وسیله تابع عضویت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \sup_y (\mu_P(x, y) \cdot \mu_Q(y, z)), \quad (17.1)$$

که در آن  $(x, z) \in U \times W$  و  $y \in V$ .

### ۱.۷.۱ اصل توسعه

اصل توسعه یک معادله اساسی است، که اجازه می‌دهد دامنه یک تابع را از نقاط در  $U$  به مجموعه‌های فازی در  $U$  توسعه داد. مشخص‌تر این‌که، فرض کنید  $f: U \rightarrow V$  تابعی از مجموعه قطعی  $U$  به مجموعه قطعی  $V$  باشد. همچنین فرض کنید که یک مجموعه فازی  $A$  در  $U$  داده شده و ما می‌خواهیم مجموعه فازی  $B$  را در  $V$  به‌نحوی معین کنیم که  $B = f(A)$ . اگر  $f$  یک نگاشت یک به یک باشد، آن‌گاه داریم:

$$\mu_B(y) = \mu_A[f^{-1}(y)], \quad y \in V; \quad (18.1)$$

که در آن  $f^{-1}$  معکوس  $f$  است، بدین معنی که:

$$f[f^{-1}(y)] = y.$$

اگر  $f$  یک نگاشت یک‌به‌یک نباشد، آن‌گاه هنگامی که دو یا چند نقطه متمایز در  $U$  با مقادیر عضویت متفاوت در  $A$  به یک نقطه یکسان در  $V$  نگاشته شوند، ابهامی بوجود خواهد آمد. به‌عنوان مثال ما می‌توانیم داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) = y \quad \text{اما} \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{و} \quad \mu_A(x_1) \neq \mu_A(x_2)$$

در نتیجه سمت راست رابطه (۱۸.۱) می‌تواند دو مقدار مختلف  $f^{-1}(y)$  یا  $\mu_A(x_1) = f^{-1}(y)$  یا  $\mu_A(x_2) = f^{-1}(y)$  را اختیار نماید. برای رفع این ابهام، ما مقدار بزرگتر را در بین دو مقدار عضویت به  $\mu_B(y)$  نسبت می‌دهیم. در حالت کلی، تابع عضویت برای  $B$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_B(y) = \sup_{x: y=f(x)} \mu_A(x), \quad y \in V, x \in f^{-1}(y), \quad (19.1)$$

که  $f^{-1}(y)$  نشان دهنده مجموعه تمامی نقاط  $x \in U$  است، به‌نحوی که  $f(x) = y$ . معادله (۱۹.۱) اصل توسعه نامیده می‌شود [۱۱].

در حالت کلی‌تر اگر  $X$  حاصل ضرب کارتیزین مجموعه‌های مرجع به‌شکل  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$ ،  $A_1, A_2, \dots, A_r$ ، مجموعه‌های فازی تعریف شده در  $X_1, X_2, \dots, X_r$ ،  $f$  یک تابع از  $X$  به مجموعه مرجع دیگری به‌صورت  $Y$  و  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  باشند؛ اصل توسعه اجازه می‌دهد مجموعه فازی  $B$  را در  $Y$  به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$B = \{(y, \mu_B(y)) | y = f(x_1, \dots, x_r); (x_1, \dots, x_r) \in X\},$$

که داریم [۴]:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)\} & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & \text{سایر نقاط.} \end{cases}$$

**مثال ۵.۷.۱ [۴]** اگر  $A = \{(-1, 0.5), (0, 0.8), (1, 1), (2, 0.4)\}$  باشد و  $f(x) = x^2$  در این صورت با استفاده از اصل توسعه مجموعه فازی  $B$  به‌صورت زیر خواهد بود:

$$B = f(A) = \{(0, 0.8), (1, 1), (4, 0.4)\}$$

## ۲.۷.۱ اعداد فازی

یکی از کاربردهای اصل توسعه، تعمیم عملگرهای جبری معمولی مانند جمع و ضرب برای اعدادی است که به اعداد فازی موسوم اند و یک تعمیم طبیعی برای اعداد معمولی می‌باشند.

**تعریف ۶.۷.۱.** [۱۱]. یک مجموعه فازی نرمال محدب مانند  $N$  از  $R$  (خط حقیقی) را یک عدد فازی گوئیم، هرگاه

•  $N(x)$  تک نمایی باشد یعنی دقیقاً یک  $x_0 \in R$  وجود داشته باشد که  $N(x_0) = 1$ .

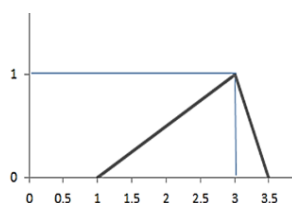
•  $N(x)$  قطعه به قطعه پیوسته باشد.

مجموعه تمام اعداد فازی را با  $F(R)$  نشان می‌دهیم.

**مثال ۷.۷.۱.** تابع عضویت زیر مربوط به یک عدد فازی می‌باشد:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 7-2x, & 3 < x < 3.5 \end{cases}$$

تابع عضویت مثلثی می‌باشد لذا محدب است و  $A(3) = 1$  و پیوسته نیز می‌باشد. این تابع عضویت



مربوط به تقریباً ۳ یا عدد فازی ۳ می‌باشد.

**تعریف ۸.۷.۱.** [۱۱]. فرض کنید  $M, N \in F(R)$  با توابع عضویت پیوسته باشند و  $R \times R \rightarrow R$  : \* یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم \* را برای اعداد فازی با  $\otimes$  نشان دهیم، با استفاده از اصل توسعه حاصل  $M \otimes N$  به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود؛

$$(M \otimes N)(z) = \sup_{z=x*y} \min[M(x), N(y)] \quad (20.1)$$

## ۸.۱ متغیرهای زبانی و قواعد اگر-آن گاه فازی

در زندگی روزمره، کلماتی وجود دارند که اغلب برای توصیف متغیرها استفاده می‌شوند. به عنوان مثال هنگامی که می‌گوییم "امروز گرم است." یا معادل آن "دمای هوا امروز بالا است." ما از واژه "بالا" برای توصیف "دمای هوای امروز" استفاده کردیم. بدین معنی که متغیر "دمای هوای امروز" واژه "بالا" را به عنوان مقدار خود پذیرفته است. واضح است که متغیر "دمای هوای امروز" می‌تواند مقادیری



نظیر ۲۵ درجه سانتی‌گراد، ۱۹ درجه سانتی‌گراد و ... را اختیار کند. هنگامی که یک متغیر، اعداد را به‌عنوان مقدار بپذیرد، ما یک چهارچوب ریاضی مشخص برای فرموله کردن آن داریم اما هنگامی که متغیر، واژه‌ها را به‌عنوان مقدار می‌پذیرد، چهارچوب مشخصی برای فرموله کردن آن در نظریه ریاضیات کلاسیک نداریم؛ برای این که چنین چهارچوبی به‌دست آوریم، مفهوم متغیرهای زبانی تعریف شده است.

**تعریف ۱.۸.۱.** [۱۱] اگر یک متغیر بتواند واژه‌هایی از زبان طبیعی را به‌عنوان مقدار خود بپذیرد، آن گاه یک متغیر زبانی نامیده می‌شود، به‌طوری که واژه‌ها به‌وسیله مجموعه‌های فازی در محدوده‌ای که متغیرها تعریف شده‌اند، مشخص می‌شوند.

متغیرهای زبانی، عناصر اساسی در نمایش دانش بشری محسوب می‌شوند. هنگامی که ما بفرض مثال از سنسورها برای اندازه‌گیری یک متغیر استفاده می‌کنیم، آن‌ها به ما مقادیر عددی می‌دهند. هنگامی که از انسان‌های خبره می‌خواهیم که یک متغیر را ارزیابی کنند، به ما کلمات و واژه‌هایی می‌دهند. به‌عنوان مثال هنگامی که از یک رادار برای اندازه‌گیری سرعت ماشین استفاده می‌کنیم، به ما اعدادی نظیر  $39\text{mph}$ ,  $42\text{mph}$  می‌دهد. هنگامی که از یک انسان می‌خواهیم راجع به سرعت ماشین اظهار نظر کند، اغلب با کلماتی نظیر ”پایین”، ”بالا” آن را بیان می‌کند. بنابراین با معرفی متغیرهای زبانی قادر خواهیم بود، توصیف‌های مبهم و نامعلوم در زبان‌های طبیعی را در گزاره‌های ریاضی دقیق فرموله کنیم.

## ۱.۸.۱ قیود زبانی

با مفهوم متغیرهای زبانی قادر خواهیم بود، واژه‌ها را به‌عنوان مقادیر متغیرها (زبانی) بپذیریم. در زندگی امروزه اغلب از چندین کلمه برای توصیف یک متغیر استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال، اگر ما سرعت ماشین را به‌عنوان یک متغیر زبانی ببینیم، آن‌گاه مقدار آن ممکن است ”کند نیست”، ”خیلی کند”، ”اندکی تند”، کم و متوسط” و نظایر آن باشد. در حالت کلی، مقدار یک متغیر زبانی یک گزاره مرکب  $x = x_1 x_2 \dots x_n$  که از اتصال اجزاء  $x_1, x_2, \dots, x_n$  تشکیل شده، می‌باشد. این اجزاء را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد:

- اصطلاحات پایه، که برحسب مجموعه‌های فازی می‌باشند. عبارتهایی نظیر ”کند”، ”متوسط”، و ”تند”.

- مکمل کننده ”نه” و متصل کننده‌های ”و” و ”یا”.

- قیودی نظیر ”خیلی”، ”اندکی”، ”کم بیش” و ...

## ۹.۱ قواعد اگر- آن گاه فازی

### ۱.۹.۱ گزاره‌های فازی

در سیستم‌های فازی، دانش بشری به شکل قواعد اگر- آن گاه فازی نشان داده می‌شود. یک قاعده اگر- آن گاه فازی یک گزاره شرطی به شکل زیر می‌باشد:

$$\text{اگر } \langle \text{گزاره فازی} \rangle \text{ آن گاه } \langle \text{گزاره فازی} \rangle \quad (21.1)$$

به طور کلی دو نوع گزاره فازی وجود دارد. گزاره فازی ساده و گزاره فازی مرکب. گزاره فازی ساده بدین شکل است:

$$x \text{ is } A$$

که  $x$  یک متغیر زبانی و  $A$  مقدار زبانی متغیر  $x$  است (بدین معنی که  $A$  یک مجموعه فازی تعریف شده در دامنه تعریف  $X$  می‌باشد). یک گزاره فازی مرکب، ترکیبی از گزاره‌های فازی ساده با استفاده از اتصال‌دهنده ”و“، ”یا“ و ”نه“ که نشان دهنده اشتراک فازی، اجتماع فازی و مکمل فازی هستند، می‌باشد. در یک عبارت فازی مرکب، عبارت‌های فازی ساده مستقل هستند. یعنی  $x$  ها در عبارت‌های مرکب می‌توانند متغیرهای متفاوتی باشند. در واقع متغیرهای زبانی در یک عبارت فازی مرکب، در حالت کلی یکسان نیستند. به عنوان مثال فرض کنید که  $x$  سرعت ماشین و  $y = \dot{x}$  شتاب ماشین باشد. اگر مجموعه فازی ”بزرگ“ ( $F$ ) را برای سرعت و مجموعه فازی ”بزرگ“ ( $L$ ) را برای شتاب تعریف کنیم، در آن صورت عبارت زیر، یک عبارت مرکب خواهد بود.

$$x \text{ is } F \text{ AND } y \text{ is } L$$

بنابراین عبارت‌های فازی مرکب باید به عنوان روابط فازی در نظر گرفته شوند. حال با استفاده از قوانین زیر می‌توان توابع عضویت این روابط فازی را معین نمود.

- برای رابط ”and“ از اشتراک‌های فازی استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $x$  و  $y$  متغیرهای زبانی در دامنه‌های فیزیکی  $U$  و  $V$  و نیز  $A$  و  $B$  دو مجموعه فازی در  $U$  و  $V$  باشند، آن گاه عبارت فازی مرکب  $x \text{ is } A \text{ and } y \text{ is } B$  به صورت رابط اشتراک فازی  $A \cap B$  در  $U \times V$  با تابع عضویت

$$\mu_{A \cap B}(x, y) = t[\mu_A(x), \mu_B(y)] \quad (22.1)$$

تعبیر می‌شود که

$$t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

یک  $t$  - نرم دلخواه است.

- برای رابط ”or“ از اجتماع‌های فازی استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $x$  و  $y$  متغیرهای زبانی در دامنه‌های فیزیکی  $U$  و  $V$  و نیز  $A$  و  $B$  دو مجموعه فازی در  $U$  و  $V$  باشند، آن گاه عبارت فازی

مرکب  $x \text{ is } A \text{ or } y \text{ is } B$  به صورت رابطه فازی  $A \cup B$  در  $U \times V$  با تابع عضویت

$$\mu_{A \cup B}(x, y) = s[\mu_A(x), \mu_B(y)] \quad (23.1)$$

تعبیر می شود که

$$s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

یک  $s$  - نرم دلخواه است.

- برای رابط "not" از مکمل های فازی استفاده می کنیم. بدین معنی که  $not A$  را با  $\bar{A}$  جایگزین می کنیم که مطابق با عملگرهای مکمل تعریف می شود.

### ۲.۹.۱ تفسیر قواعد اگر - آن گاه فازی

به دلیل این که عبارت های فازی به عنوان روابط فازی تعبیر می شوند، حال می خواهیم بررسی کنیم که عملکرد اگر - آن گاه چگونه تفسیر و تعبیر می شود. در ریاضیات کلاسیک عبارت اگر  $p$  آن گاه  $q$  به شکل  $p \rightarrow q$  نوشته شده و عملگر  $\rightarrow$  مطابق جدول زیر تعریف می گردد، که  $p$  و  $q$  متغیرهایی هستند که فقط دو مقدار ارزشی درست ( $T$ ) و نادرست ( $F$ ) را می پذیرند.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

از جدول مشاهده می شود که اگر  $p$  و  $q$  هر دو درست یا نادرست باشند، در آن صورت  $p \rightarrow q$  درست بوده و اگر  $p$  درست و  $q$  نادرست باشد آن گاه  $p \rightarrow q$  نادرست و اگر  $p$  نادرست و  $q$  درست باشد آن گاه  $p \rightarrow q$  درست می باشد پس  $p \rightarrow q$  معادل است با

$$\bar{p} \vee q \quad (24.1)$$

و

$$(p \wedge q) \vee \bar{p} \quad (25.1)$$

که  $\neg, \vee, \wedge$  - به ترتیب نشان دهنده عملیات منطقی "and", "or", "not" می باشند. قواعد اگر - آن گاه فازی را می توان با جایگزینی  $p$  و  $q$  با عبارت های فازی در نظر گرفت. می توانیم قواعد اگر - آن گاه فازی را با جایگزینی  $\neg, \vee, \wedge$  با اشتراک فازی، اجتماع فازی و مکمل فازی تفسیر کنیم. از آن جا که چند نوع عملگر مکمل، اجتماع و اشتراک فازی وجود دارد، تفسیرهای متعددی می تواند برای قواعد اگر- آن گاه فازی ارائه شود. متذکر می شویم که عبارت (۲۱.۱) را به شکل

$$if \langle FP_1 \rangle \text{ then } \langle FP_2 \rangle$$

می‌نویسیم و فرض می‌کنیم  $FP_1$  یک رابطه فازی است که در  $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  و  $FP_2$  یک رابطه فازی است که در  $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  تعریف شده‌اند و  $x$  و  $y$  به ترتیب متغیرهای زبانی (بردارهایی) در  $U$  و  $V$  می‌باشند. در زیر تعدادی از این تفسیرها را بیان می‌کنیم.

- استلزام دینس – رشر<sup>۹</sup> [۱۱]: در این استلزام قاعده فازی  $\langle FP_2 \rangle$  *then*  $\langle FP_1 \rangle$  *if* به شکل یک رابطه فازی  $Q_D$  در  $U \times V$  با تابع عضویت زیر تفسیر می‌گردد:

$$\mu_{Q_D}(x, y) = \max[1 - \mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)]. \quad (26.1)$$

- استلزام لوکاشیویکر<sup>۱۰</sup> [۱۱]: در این استلزام قاعده فازی  $\langle FP_2 \rangle$  *then*  $\langle FP_1 \rangle$  *if* به شکل یک رابطه فازی  $Q_L$  در  $U \times V$  با تابع عضویت زیر تفسیر می‌گردد:

$$\mu_{Q_L}(x, y) = \min[1, 1 - \mu_{FP_1}(x) + \mu_{FP_2}(y)]. \quad (27.1)$$

- استلزام زاده<sup>۱۱</sup> [۱۱]: در این استلزام قاعده فازی  $\langle FP_2 \rangle$  *then*  $\langle FP_1 \rangle$  *if* به شکل رابطه فازی  $Q_Z$  در  $U \times V$  با تابع عضویت زیر تفسیر می‌گردد:

$$\mu_{Q_Z}(x, y) = \max[\min(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)), 1 - \mu_{FP_1}(x)]. \quad (28.1)$$

- استلزام گودل<sup>۱۲</sup> [۱۱]: این استلزام در منطق کلاسیک یک فرمول شناخته شده به حساب می‌آید. با تعمیم آن به گزاره‌های فازی، قاعده فازی  $\langle FP_2 \rangle$  *then*  $\langle FP_1 \rangle$  *if* به شکل رابطه فازی  $Q_G$  در  $U \times V$  با تابع عضویت زیر تفسیر می‌گردد:

$$\mu_{Q_G} = \begin{cases} 1, & \mu_{FP_1}(x) \leq \mu_{FP_2}(y), \\ \mu_{FP_2}(y), & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad (29.1)$$

- استلزام ممدانی<sup>۱۳</sup> [۱۱]: در این استلزام قاعده فازی  $\langle FP_2 \rangle$  *then*  $\langle FP_1 \rangle$  *if* به شکل رابطه فازی  $Q_{MM}$  یا  $Q_{MP}$  در  $U \times V$  با تابع عضویت زیر تفسیر می‌گردد:

$$Q_{MM}(x, y) = \min[\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)], \quad (30.1)$$

یا

$$Q_{MP}(x, y) = \mu_{FP_1}(x)\mu_{FP_2}(y). \quad (31.1)$$

<sup>۹</sup>Dienes Rescher Implication

<sup>۱۰</sup>Lukasiewics Implication

<sup>۱۱</sup>Zadeh Implication

<sup>۱۲</sup>Godel Implication

<sup>۱۳</sup>Mamdani Implication

## ۱۰.۱ منطق فازی و استدلال تقریبی

منطق، مطالعه روش‌ها و اصول استدلال می‌باشد و استدلال به معنای به دست آوردن گزاره‌ها و نتایج جدید از گزاره‌ها و عبارتهای موجود است. در منطق کلاسیک، گزاره‌ها یا درست هستند یا نادرست، یعنی مقدار درستی یک گزاره یا صفر است یا یک. منطق فازی، منطق کلاسیک دو مقداری را به گزاره‌هایی که مقدار درستی آن‌ها می‌تواند هر مقداری در محدوده  $[0, 1]$  داشته باشد، تعمیم می‌دهد. این تعمیم امکان استدلال تقریبی را به ما می‌دهد. بدین معنی که می‌توانیم نتایج نادقیق و تقریبی را از مجموعه‌ای از شرایط نادقیق به دست آوریم.

در منطق فازی، گزاره‌ها، گزاره‌های فازی هستند که به وسیله مجموعه‌های فازی نشان داده می‌شوند. هدف نهایی منطق فازی، فراهم کردن بنیان‌هایی برای استدلال تقریبی با گزاره‌های نادقیق و با استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی به عنوان یک ابزار اصولی می‌باشد.

## ۱۱.۱ پایگاه قواعد و موتور استنتاج فازی

ما ابتدا متذکر می‌شویم که در یک سیستم فازی حالت چند ورودی - یک خروجی را در نظر می‌گیریم، چراکه هر سیستم چند ورودی - چند خروجی را می‌توان به مجموعه‌ای از سیستم‌های یک خروجی تفکیک نمود. به عنوان مثال اگر بخواهیم یک سیستم فازی چهار ورودی - سه خروجی طراحی کنیم، می‌توانیم در ابتدا سه سیستم چهار ورودی - یک خروجی به طور مجزا طراحی کرده و آن‌گاه آن‌ها را با هم ترکیب کنیم.

**تعریف ۱.۱۱.۱.** [۱۱] یک پایگاه قواعد فازی<sup>۱۴</sup> از مجموعه‌ای از قواعد اگر - آن‌گاه فازی تشکیل می‌شود. پایگاه قواعد فازی از این نظر که سایر اجزاء سیستم فازی برای پیاده‌سازی این قواعد به شکل موثر و کارا استفاده می‌شوند، قلب یک سیستم فازی محسوب می‌شود. به طور مشخص، پایگاه قواعد فازی شامل قواعد اگر - آن‌گاه فازی زیر است:

$$(32.1) \quad Ru^{(l)} : \text{اگر } x_1 \text{ در } A_1^l \text{ و } \dots \text{ و } x_n \text{ در } A_n^l \text{ باشد، آن‌گاه } y \text{ در } B^l \text{ است.}$$

که  $A_i^l$  و  $B^l$  مجموعه‌هایی فازی و  $x = (x_1, \dots, x_n)$  و  $y$  به ترتیب متغیرهای ورودی و خروجی (زبانی) سیستم فازی می‌باشند.

فرض کنید  $M$  تعداد قواعد موجود در پایگاه قواعد فازی باشد یعنی  $l = 1, 2, \dots, M$ . ما قواعدی به شکل (۳۲.۱) را قواعد کانونیک می‌نامیم.

**لم ۲.۱۱.۱.** [۱۱] قواعد اگر - آن‌گاه فازی کانونیک به شکل (۳۲.۱) در حالت خاص شامل قواعد زیر می‌باشند:

<sup>۱۴</sup>Fuzzy Rule Base

- قواعد جزئی: اگر  $x_1$  در  $A_1^l$  و ... و  $x_m$  در  $A_m^l$  باشد؛ آن گاه  $y$  در  $B^l$  است.
- قواعد یا: قواعد  $A_1^l$  و ... و  $A_m^l$  باشد؛ یا  $x_{m+1}$  در  $A_{m+1}^l$  و ... و  $x_n$  در  $A_n^l$  باشد؛ آن گاه  $y$  در  $B^l$  است.
- قواعد فازی منفرد: قواعد فازی  $y$  در  $B^l$  است.
- قواعد تدریجی: به عنوان مثال  $x$  کوچکتر،  $y$  بزرگتر
- قواعد غیرفازی (یا همان قواعد ضرب متداول)

### ۱.۱۱.۱ ویژگی‌های مجموعه قواعد

**تعریف ۳.۱۱.۱ [۱۱]** یک مجموعه از قواعد اگر – آن گاه فازی کامل نامیده می‌شود اگر برای هر  $x \in X$  حداقل یک قاعده <sup>۱۵</sup> در پایگاه قواعد فازی وجود داشته باشد، به عبارت دیگر قاعده  $Ru^{(l)}$  وجود دارد به نحوی که

$$\mu_{A_i^l}(x) \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۳۳.۱)$$

**مثال ۴.۱۱.۱ [۱۱]**. یک سیستم فازی دو ورودی – یک خروجی با  $U = U_1 \times U_2 = [0, 1] \times [0, 1]$  و  $V = [0, 1]$  در نظر بگیرید. سه مجموعه فازی  $S_1, M_1$  و  $L_1$  در  $U_1$  و دو مجموعه فازی  $S_2, L_2$  در  $U_2$  تعریف شده‌اند. برای این که پایگاه قواعد فازی کامل باشد، باید شامل شش قاعده زیر که بخش‌های  $U_1$  آن‌ها، تمامی ترکیب‌های ممکن  $S_1, M_1, L_1$  با  $S_2, L_2$  را در برمی‌گیرند، باشد.

$Ru^{(1)}$ : اگر  $x_1$  در  $S_1$  و  $x_2$  در  $S_2$  باشد، آن گاه  $y$  در  $B^1$  است.

$Ru^{(2)}$ : اگر  $x_1$  در  $S_1$  و  $x_2$  در  $L_2$  باشد، آن گاه  $y$  در  $B^2$  است.

$Ru^{(3)}$ : اگر  $x_1$  در  $M_1$  و  $x_2$  در  $S_2$  باشد، آن گاه  $y$  در  $B^3$  است.

$Ru^{(4)}$ : اگر  $x_1$  در  $M_1$  و  $x_2$  در  $L_2$  باشد، آن گاه  $y$  در  $B^4$  است.

$Ru^{(5)}$ : اگر  $x_1$  در  $L_1$  و  $x_2$  در  $S_2$  باشد، آن گاه  $y$  در  $B^5$  است.

$Ru^{(6)}$ : اگر  $x_1$  در  $L_1$  و  $x_2$  در  $L_2$  باشد، آن گاه  $y$  در  $B^6$  است.

که  $B^l$  ( $l = 1, 2, \dots, 6$ ) مجموعه‌های فازی در  $V$  هستند. اگر یکی از قواعد در این مجموعه حذف شود، آن گاه می‌توانیم نقطه‌ای مانند  $x^* \in U$  را پیدا کنیم که در آن نقطه بخش اگر تمامی قواعد باقی‌مانده مقدار عضویت صفر داشته باشند.

<sup>۱۵</sup> Rule

**تعریف ۵.۱۱.۱.** [۱۱] یک مجموعه از قواعد اگر – آن گاه فازی سازگار نامیده می‌شوند اگر قواعدی یافت نشوند که بخش‌های اگر یکسان و بخش‌های آن گاه متفاوت داشته باشند.

برای قواعد حاصل ضرب غیرفازی، سازگاری یک نیاز اساسی است چراکه در صورتی که قواعد متضاد وجود داشته باشند جستجو با مشکل مواجه خواهد شد. با این حال برای قواعد فازی سازگاری آن چنان حیاتی نیست چراکه در صورت وجود قواعد متضاد بخش‌های موتور استنتاج و غیرفازی‌ساز میانگین آن‌ها را برای بدست آوردن یک نتیجه بهینه به‌طور خودکار محاسبه می‌کند. البته در ابتدا بهتر است که یک پایگاه قواعد فازی سازگار داشته باشیم.

**تعریف ۶.۱۱.۱.** [۱۱] یک مجموعه از قواعد اگر – آن گاه فازی پیوسته نامیده می‌شوند، اگر قواعد همسایه‌ای وجود نداشته‌باشند که اشتراک مجموعه‌های فازی بخش آن گاه آن‌ها تهی باشند. به‌طور شهودی، پیوستگی بدین معناست که رفتار ورودی – خروجی سیستم فازی باید آرام و نرم باشد.

## ۱۲.۱ موتور استنتاج فازی

دریک موتور استنتاج فازی، اصول منطق فازی برای ترکیب قواعد اگر – آن گاه در پایگاه قواعد فازی استفاده شده‌اند. در این پایان نامه ما از دو موتور استنتاج شناخته شده به نام‌های ممدانی<sup>۱۶</sup> و تاکاگی – سوگنو<sup>۱۷</sup> یا به اختصار سوگنو برای فرآیند استنتاج استفاده می‌کنیم تا با پذیرش ورودی‌های فازی بر اساس پایگاه قواعد فازی، خروجی فازی مناسب را ایجاد نمایند.

### ۱.۱۲.۱ روش استنتاج ممدانی

در بررسی چگونگی استدلال ممدانی ابتدا به کمک یک مثال ساده با دو قاعده که در زیر آمده است، شروع می‌کنیم. در این جا دو متغیر در قسمت فرض و یک متغیر در قسمت نتیجه داریم. در واقع دو ورودی و یک خروجی را دارا هستیم.

قاعده اول: اگر  $x$  در  $A_1$  باشد و  $y$  در  $B_1$  باشد، آن گاه  $z$  در  $C_1$  است.

قاعده دوم: اگر  $x$  در  $A_2$  باشد و  $y$  در  $B_2$  باشد، آن گاه  $z$  در  $C_2$  است.

که در آن‌ها  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  مجموعه‌های فازی هستند. اکنون فرض کنیم  $x_0$  و  $y_0$  به ترتیب ورودی‌هایی برای متغیرهای  $x$  و  $y$  قسمت فرض باشند. ورودی‌ها را به صورت  $(x_0, y_0)$  نشان می‌دهیم. فرآیند استدلال برای ورودی  $(x_0, y_0)$  به صورت زیر است:

گام ۱: سازگاری هر قاعده برای ورودی  $(x_0, y_0)$  را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$W_1 = \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0) \quad \text{سازگاری قاعده ۱:} \quad (34.1)$$

$$W_2 = \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0) \quad \text{سازگاری قاعده ۲:}$$

<sup>۱۶</sup> Mamdani

<sup>۱۷</sup> Takagi-Sugeno

در قاعده‌های قبلی دو متغیر  $x$  و  $y$  در قسمت فرض وجود دارند؛ بر این اساس می‌توانیم دو مقدار عضویت برای دو متغیر ورودی  $x_0$  و  $y_0$  به‌دست آوریم. اگر عمل  $\wedge$  (مینیمم) را برای مقادیر عضویت قبلی به‌کار ببریم، سازگاری هر قاعده را به‌دست خواهیم آورد. اکنون این روش را برای حالت کلی تعمیم می‌دهیم. اگر  $m$  ورودی وجود داشته‌باشد، قاعده اگر-آن‌گاه شامل فرضی به شکل زیر است:

$x_1$  در  $A_1$  است و ... و  $x_m$  در  $A_m$  است.

سازگاری قسمت فرض به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{A_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_m}(x_m).$$

گام ۲: با بکارگیری سازگاری در گام ۱ مجموعه‌های فازی در قسمت نتیجه و ارزش هر قاعده را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \mu_{C_1}(z) &= W_1 \wedge \mu_{A_1}(z), \quad \forall z \in Z && \text{ارزش قاعده ۱:} \\ \mu_{C_2}(z) &= W_2 \wedge \mu_{A_2}(z), \quad \forall z \in Z && \text{ارزش قاعده ۲:} \end{aligned} \quad (35.1)$$

گام ۳: ارزش هر قاعده که در گام ۲ به‌دست آمده را جمع‌بندی می‌کنیم و ارزش نهایی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\mu_C(z) = \mu_{C_1}(z) \vee \mu_{C_2}(z), \quad \text{ارزش نهایی:} \quad (36.1)$$

در حالت کلی با  $n$  قاعده، می‌توان رابطه را به‌صورت زیر نوشت:

$$\mu_C(z) = \mu_{C_1}(z) \vee \mu_{C_2}(z) \vee \dots \vee \mu_{C_n}(z). \quad (37.1)$$

این نتیجه فرآیند استدلال را کامل می‌کند. به‌جای عمل  $\wedge$  (مینیمم) در بالا می‌توان از عمل ضرب استفاده کرد.

گام ۴: نتیجه نهایی به‌صورت مجموعه فازی در گام ۳ آمده است. این نتیجه قابل اعمال نیست زیرا به یک مقدار معین به‌عنوان خروجی استدلال نیاز داریم. بنابراین لازم است که مجموعه فازی را به یک عدد معین برگردانیم. عمل برگرداندن یک مجموعه فازی به یک مقدار معین را نافازی‌سازی می‌نامند که در ۱۳.۱ به‌طور مفصل مورد بحث قرار خواهد گرفت. در این جا تنها با اشاره‌ای کوچک یادآور می‌شویم که خروجی نهایی  $z_0$  با روش نافازی‌سازی مرکز ثقل به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$z_0 = \frac{\int \mu_C(z)z dz}{\int \mu_C(z) dz}, \quad (38.1)$$

که در آن  $\int$  به‌معنی انتگرال معمولی است.



در فرآیند استدلال پیشین ورودی‌های  $x_0$  و  $y_0$  معین فرض شده بودند. حالت‌هایی وجود دارند که ورودی‌ها توسط مجموعه‌های فازی  $A'$  و  $B'$  داده می‌شوند. در چنین حالت‌هایی، محاسبه سازگاری در گام ۱ ممکن است با گام زیر تعویض شود [۷].

سازگاری قاعده ۱:

$$W_1 = (\max(\mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A'}(x))) \wedge (\max(\mu_{B_1}(y) \wedge \mu_{B'}(y))).$$

سازگاری قاعده ۲:

$$W_2 = (\max(\mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{A'}(x))) \wedge (\max(\mu_{B_2}(y) \wedge \mu_{B'}(y))).$$

### ۲.۱۲.۱ روش استنتاج تاکاگی - سوگنو

در میان مدل‌های مختلف فازی، مدل فازی تاکاگی - سوگنو ( $T - S$ ) بیشترین توجه را به خود جلب کرده است. مدل فازی  $T - S$  که به ترتیب توسط تاکاگی و سوگنو پیشنهاد شده است برای مدل سازی دینامیک سیستم‌های پیچیده غیر خطی مناسب می‌باشد. تفاوت اصلی این روش با روش ممدانی در خروجی است. خروجی این مدل به صورت یک تابع خطی بیان می‌شود.

### ۳.۱۲.۱ تشریح مدل فازی تاکاگی - سوگنو

مدل فازی تاکاگی - سوگنو به شکل کلی زیر است:

$$\begin{aligned} R^i : & \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^i, x_2 \text{ is } A_2^i, \dots, x_m \text{ is } A_m^i, \\ & \text{THEN } y^i = P_0^i + P_1^i x_1 + P_2^i x_2 + \dots + P_m^i x_m, \end{aligned} \quad (39.1)$$

در رابطه بالا  $R^i$ ،  $i$  امین قاعده،  $A_j^i$  یک زیرمجموعه فازی،  $y^i$  خروجی  $i$  امین قاعده،  $P_j^i$  یک پارامتر از بخش نتیجه و  $x_j$  متغیر ورودی کلی است. برای یک بردار ورودی  $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$  معین، خروجی  $\hat{y}$  می‌تواند با گرفتن میانگین وزنی از  $y_i$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$  به صورت

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^n G^i y^i}{\sum_{i=1}^n G^i}$$

استنتاج شود. در این جا  $n$  تعداد قواعد فازی است و  $y^i$  از معادله خروجی  $i$  - امین قاعده بدست آمده و نیز وزن  $G^i$  یعنی ارزش درستی فرض  $i$  - امین قاعده برای ورودی، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$G^i = \prod_{j=1}^m \mu_{A_j^i}(x_{j0})$$

که نماد  $\prod$  مینیمم یا حاصل ضرب توابع عضویت مجموعه‌های فازی  $A_j^i(x_{j0})$  تعریف شده است. باید توجه شود که همه متغیرهای ورودی همیشه در فرض یک قاعده پدیدار نمی‌شوند [۳۱].

## ۱۳.۱ فازی سازها و نافازی سازها

### ۱.۱۳.۱ فازی ساز

یک فازی کننده<sup>۱۸</sup> مقادیر قطعی متغیرهای ورودی را می گیرد و آن‌ها را به درجه بندی مناسبی از متغیرهای زبانی نگاشت می کند. فازی ساز به عنوان نگاشتی از یک نقطه مانند  $x^* \in X \subset R^n$  به یک مجموعه فازی  $A$  در  $X$  تعریف شده است. معیارهای زیر در طراحی فازی ساز مطرح می باشند:

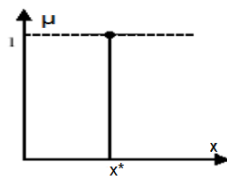
- ورودی در نقطه  $x^*$  قطعی است، بدین معنی که مجموعه فازی  $A$  باید در نقطه  $x^*$  مقدار تعلق بزرگی داشته باشد.

- فازی ساز باید بتواند در ساده کردن محاسبات مربوط به موتور استنتاج فازی نقش داشته باشد.

به معرفی چند فازی ساز می پردازیم.

۱. فازی ساز منفرد: یک نقطه  $x^* \in X$  با مقدار حقیقی را به یک منفرد فازی  $A$  در  $X$  می نگارد که مقدار عضویت در نقطه  $x^*$  برابر با ۱ و در سایر نقاط  $X$  برابر ۰ می باشد.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x = x^* \\ 0 & x \neq x^* \end{cases} \quad (۴۰.۱)$$



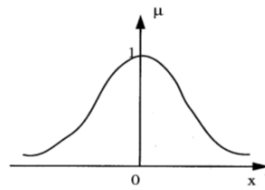
شکل ۳.۱: فازی ساز منفرد

۲. فازی ساز گوسین: نقطه  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  را به مجموعه فازی  $A$  در  $X$  با تابع عضویت گوسین زیر می نگارد.

$$\mu_A(x) = e^{-\left(\frac{x_1 - x_1^*}{a_1}\right)^2} * \dots * e^{-\left(\frac{x_n - x_n^*}{a_n}\right)^2}, \quad (۴۱.۱)$$

که  $a_i$  ها پارامترهای مثبت و \* نشان دهنده  $t$ -نرم بوده که معمولا از نوع حاصل ضرب یا مینیمم انتخاب می شود.

<sup>۱۸</sup>Fuzzifier

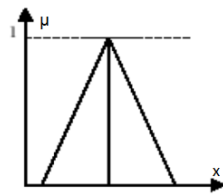


شکل ۴.۱: فازی ساز گوسین

۳. فازی ساز مثلثی: نقطه  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$  با مقدار حقیقی را به مجموعه فازی  $A$  در  $X$  با تابع عضویت مثلثی زیر می نگارد.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \left[1 - \frac{|x_1 - x_1^*|}{b_1}\right] * \dots * \left[1 - \frac{|x_n - x_n^*|}{b_n}\right] & \forall i, |x_i - x_i^*| \leq b_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۴۲.۱)$$

که  $b_i$  ها پارامترهای مثبت و \* نشان دهنده  $t$ -نرم بوده که معمولا از نوع حاصل ضرب یا مینیمم انتخاب می شود. فازی سازهای دیگری همچون فازی ساز دوزنقه‌ای نیز وجود دارند.



شکل ۵.۱: فازی ساز مثلثی

### ۲.۱۳.۱ نافازی ساز

نافازی ساز<sup>۱۹</sup> به‌عنوان یک نگاشت از مجموعه فازی  $B$  در  $V \subset R$  (که خروجی موتور استنتاج فازی است) به یک نقطه قطعی  $y^* \in V$  تعریف می گردد. وظیفه نافازی ساز مشخص کردن نقطه‌ای است که بهترین نماینده مجموعه فازی  $B$  باشد. معیارهای زیر را در انتخاب نافازی ساز داریم:

- توجیه پذیری یعنی نقطه  $y^*$  از نظر شهودی باید نشان دهنده مجموعه فازی  $B$  باشد. به‌عنوان مثال در وسط  $B$  قرار گرفته باشد یا با درجه بالا به  $B$  تعلق داشته باشد.
- سادگی در محاسبات داشته باشیم.

- یک تغییر کوچک در  $B$  نباید به تغییر بزرگی در  $y^*$  منجر شود. این ویژگی پیوستگی نام دارد.

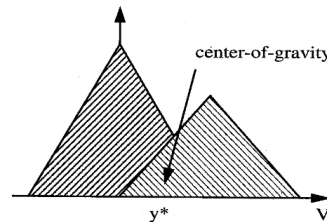
به معرفی چند نافازی ساز می پردازیم.

<sup>۱۹</sup>Defuzzifier

۱. نافازی ساز مرکز ثقل<sup>۲۰</sup>: نافازی ساز مرکز ثقل، نقطه  $y^*$  را به عنوان مرکز ناحیه‌ای که به وسیله تابع عضویت  $B$  پوشش داده شده، تعریف می‌کند؛ بدین معنا که

$$y^* = \frac{\int_V y \mu_B(y) dy}{\int_V \mu_B(y) dy} \quad (۴۳.۱)$$

نماد  $\int$  در حالت پیوسته نشان دهنده عمل انتگرال معمولی می‌باشد. در حالت گسسته  $\sum$  جایگزین انتگرال می‌شود. شکل زیر این موضوع را نشان می‌دهد.



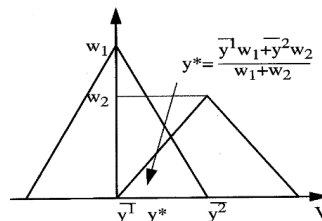
شکل ۶.۱: نافازی ساز مرکز ثقل

۲. نافازی ساز میانگین مراکز<sup>۲۱</sup>: از آن جا که مجموعه فازی  $B$  اجتماع یا اشتراک  $M$  مجموعه فازی می‌باشد، یک تقریب خوب رابطه (۴۳.۱) میانگین وزنی مراکز  $M$  مجموعه فازی با وزن‌هایی برابر با ارتفاع مجموعه‌های فازی متناظر می‌باشد. اگر  $\bar{y}^l$  مرکز مجموعه فازی  $l$  ام و  $w_l$  درجه ارتفاع آن باشد، نافازی ساز میانگین مراکز  $y^*$  را بدین ترتیب تعریف می‌کند:

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^M w_l} \quad (۴۴.۱)$$

برای  $M = ۲$  داریم

$$y^* = \frac{y_1 w_1 + y_2 w_2}{w_1 + w_2} \quad (۴۵.۱)$$



شکل ۷.۱: نافازی ساز میانگین مراکز

<sup>۲۰</sup>Center of gravity defuzzifier

<sup>۲۱</sup>Center average defuzzifier

۳. نافازی ساز ماکزیمم<sup>۲۲</sup> : نافازی ساز ماکزیمم نقطه  $y^*$  را به عنوان نقطه‌ای در  $V$  که  $\mu_B(y)$  به ماکزیمم مقدار خود می‌رساند، تعریف می‌کند. مجموعه زیر را در نظر بگیرید

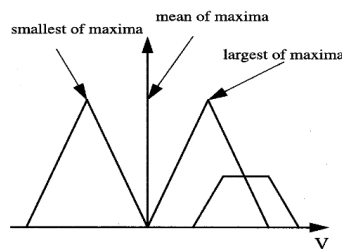
$$hgt(B) = \{y \in V | \mu_B(y) = \sup_{y \in V} \mu_B(y)\} \quad (۴۶.۱)$$

بدین معنی که  $hgt(B)$  مجموعه تمام نقاطی از مجموعه  $V$  است که در آن‌ها  $\mu_B(y)$  به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد. غیرفازی ماکزیمم نقطه  $y^*$  را به عنوان یک عضو دلخواه  $hgt(B)$  تعریف می‌کند. به عبارت دیگر

$$y^* = hgt(B) \quad \text{یک نقطه در}$$

بسته به اینکه  $hgt(B)$  تنها شامل یک نقطه و یا بیشتر باشد، موارد زیر را خواهیم داشت

- نافازی ساز کوچکترین ماکزیمم  $y^* = \inf\{y^* \in hgt(B)\}$
- نافازی ساز بزرگترین ماکزیمم  $y^* = \sup\{y^* \in hgt(B)\}$
- نافازی ساز میانگین ماکزیمم  $y^* = \frac{\int_{hgt(B)} y dy}{\int_{hgt(B)} dy}$



شکل ۸.۱: نافازی سازهای ماکزیمم



## فصل ۲

# سرطان پستان

### ۱.۲ مقدمه

در این فصل به بیان مفاهیم پزشکی مرتبط با سرطان پستان می‌پردازیم. سرطان پستان، عوامل خطر در ابتلا به سرطان پستان، متاستاز سرطان پستان و در نهایت درجه‌بندی سرطان پستان را معرفی می‌کنیم. در این راستا از منابع [۵]، [۲] و [۱] استفاده می‌کنیم.

### ۲.۲ آشنایی با سرطان پستان

سرطان پستان یک بیماری قدیمی است. تومورهای پستان، اولین بار توسط مصریان قدیم در ۳۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح توصیف شدند. در پزشکی قدیم هند، پرو، چین، روم، یونان و ایران نیز مطالعات زیادی درباره علل پیدایش، پیشگیری و درمان این بیماری انجام شده است و از آن زمان به بعد بررسی‌ها و گزارش‌ها در مورد این بیماری تا قرون وسطی و عصر حاضر ادامه یافته است. در حال حاضر سرطان پستان به‌عنوان شایع‌ترین سرطان بانوان، اهمیت خاصی دارد. با توجه به این که زنان به‌عنوان مادر، اساس خانواده را در جامعه ما تشکیل می‌دهند و نیز این بیماری، افراد را در سنین حداکثر بازدهی فردی و اجتماعی درگیر می‌کند، لذا آگاهی در مورد این بیماری و تشخیص زودهنگام آن ضروری است.

سرطان پستان چیست؟ تمام بدن ما از سلول ساخته شده است. سلول‌ها بسیار کوچک هستند و فقط به‌وسیله میکروسکوپ دیده می‌شوند. به‌طور معمول، سلول‌ها تکثیر می‌شوند تا جانشین سلول‌های پیر و مرده شوند و یا این که در کودکان، باعث رشد بدن شوند. این تکثیر و ازدیاد سلول‌ها تابع قوانین

خاصی است. بنابراین سلول‌ها به اندازه لازم زیاد می‌شوند، نه کم‌تر و نه بیش‌تر. در هنگام بروز سرطان، رشد و تکثیر سلول‌ها از مهار و کنترل خارج می‌شود و تعداد زیادی سلول جدید ایجاد می‌شود که به تدریج منجر به ایجاد توده یا تومور<sup>۱</sup> سرطانی می‌گردند. سرطان پستان تقریباً یک بیماری مختص به زنان است، گرچه آقایان نیز مستثنی نیستند. زنان بیش از ۹۹ درصد مبتلایان را تشکیل می‌دهند.

## ۳.۲ عوامل خطر در سرطان پستان

سرطان پستان شایع‌ترین سرطان زنان در کل جهان است. مطابق آمار سازمان بهداشت جهانی، میزان بروز این بیماری رو به افزایش است. اگرچه هنوز علت مشخصی برای این بیماری شناخته نشده است، اما به نظر می‌رسد که در برخی از زنان احتمال ابتلا به این بیماری بیش‌تر باشد [۱]. یک عامل خطر<sup>۲</sup>، عاملی است که احتمال ابتلا یک شخص به بیماری نظیر سرطان را افزایش می‌دهد [۲]. عوامل خطر شناخته شده برای سرطان پستان عبارتند از: سن، جنسیت، سابقه فامیلی ابتلا به سرطان پستان در اقوام درجه اول، سابقه شخصی در ابتلا به سرطان پستان، عوامل دوره باروری مانند بلوغ زودرس، یائسگی دیررس، سن اولین زایمان بیش‌تر از ۳۰ سال، زایمان نکردن، عدم شیردهی، عوامل اجتماعی اقتصادی، چاقی پس از یائسگی و مصرف چربی زیاد، تابش اشعه به قفسه سینه و برخی از بیماری‌های خوش خیم پستان. دارا بودن هر یک از عوامل فوق، به معنی ابتلا قطعی به سرطان پستان نمی‌باشد؛ بلکه مفهوم آن این است که فرد اندکی بیش‌تر از جمعیت زنان عادی (فاقد عوامل خطر) در معرض خطر ابتلا به این بیماری می‌باشد، بنابراین بایستی تحت نظر پزشک از برنامه‌های تشخیص زودرس استفاده کند.

### ۱.۳.۲ سن

در خانم‌های ۲۰ تا ۳۰ ساله سرطان پستان بسیار نادر (۰/۳ درصد کل سرطان پستان) می‌باشد. در حوالی ۳۵ سالگی خطر ابتلا به سرطان پستان افزایش یافته و این خطر در طول عمر افزایش می‌یابد. برای مثال ضایعه ماموگرافیک مشکوک در یک خانم ۴۰ ساله احتمال کمتری برای مثبت بودن (وجود واقعی سرطان پستان) نسبت به همین یافته در یک خانم ۵۰ ساله دارد. نزدیک به ۸ مورد از ۱۰ مورد سرطان پستان در زنان حدوداً ۴۵ - ۵۵ ساله یافت می‌شود [۲].

### ۲.۳.۲ جنسیت

مهم‌ترین عامل خطر در سرطان پستان، مونث بودن بیمار است. می‌توان گفت سرطان پستان، بیماری خاص زنان محسوب شده و احتمال بروز آن در مردان بسیار کم است. احتمال ابتلا در زنان حدوداً ۱۰۰ برابر بیش‌تر از مردان است. البته در ایران این میزان به ۳۰ - ۵۰ برابر کاهش می‌یابد [۲].

<sup>۱</sup>Tumor

<sup>۲</sup>Risk factor



### ۳.۳.۲ سابقه فAMILIaly ابتلا به سرطان پستان

از بین عوامل شناخته شده مؤثر بر افزایش احتمال خطر ابتلا به سرطان پستان، سابقه فAMILIaly از مهم‌ترین عوامل محسوب می‌شود. در حدود ۱۰ - ۵ درصد از سرطان‌های پستان در زمینه سابقه فAMILIaly ایجاد می‌شوند و تخمین زده می‌شود که ۳۰ - ۲۰ درصد از زنان مبتلا به سرطان پستان، حداقل یکی از بستگان درجه اولشان دچار سرطان پستان بوده است. مطالعات پزشکی ثابت کرده‌اند که در زنانی که وابستگان درجه اول آنها (مادر، خواهر، دختر) مبتلا به سرطان پستان بوده‌اند، خطر ابتلا به این بیماری در سنین پایین‌تر وجود دارد و سرطان پستان دو طرفه در آنها شایع‌تر است. از سوی دیگر زنانی که در سنین پایین‌تری دچار سرطان پستان می‌شوند، وابستگان درجه اول و دوم آنها در معرض خطر بالاتری از ابتلا به سرطان پستان می‌باشند [۱].

### ۴.۳.۲ سابقه شخصی در ابتلا به سرطان پستان

زنانی که سابقه ابتلا به سرطان پستان دارند نسبت به افراد طبیعی خطر بیش‌تری جهت ابتلا به سرطان در همان سمت یا سمت مقابل دارند که این خطر با افزایش سن بیش‌تر می‌شود [۲].

### ۵.۳.۲ عوامل مربوط به دوره باروری و هورمون‌ها

عوامل خطر دوره باروری شامل موارد زیر هستند:

- قاعدگی زودرس و یائسگی دیررس
- قاعدگی زودرس و یائسگی دیررس خطر ابتلا به سرطان پستان را افزایش می‌دهند. مطالعات زیادی نشان داده‌اند که سن بلوغ زیر ۱۲ سال نسبت به سن بلوغ بالای ۱۵ سال، خطر ابتلا به سرطان پستان را تا ۲ برابر افزایش می‌دهد. در واقع هر عاملی که تماس بدن با استروژن را افزایش دهد، خطر ابتلا به سرطان پستان را زیاد می‌کند. مطالعات محدودی که در ایران در این زمینه انجام شده‌اند، ارتباطی بین سن شروع قاعدگی قبل از ۱۲ سالگی با سرطان پستان پیدا نکرده‌اند. به هر حال برای اظهار نظر قطعی، باید مطالعات وسیع‌تری انجام شود.
- سن یائسگی بیش‌تر از ۵۵ سال نیز احتمال ابتلا به سرطان پستان را افزایش می‌دهد. زنانی که به طور طبیعی بعد از ۵۵ سالگی یائسه شده‌اند، نسبت به زنانی که یائسگی آنها قبل از سن ۴۵ سالگی بوده است، دو برابر بیشتر در معرض خطر ابتلا به سرطان پستان هستند.

- وضعیت بارداری

سن اولین بارداری بالای ۳۰ سال

در ابتدا لازم است اشاره شود که مقصود از بارداری در این جا، دوره کامل و ۹ ماهه بارداری است، اعم از این که منجر به تولد نوزاد زنده شده یا نشده باشد. سن بالاتر از ۳۰ سال در اولین بارداری خطر ابتلا به سرطان پستان را افزایش می‌دهد. در مقابل وقتی سن اولین بارداری پایین‌تر باشد، خطر سرطان پستان کم‌تر است. اهمیت سن کم در اولین زایمان، ناشی از بلوغ زود هنگام بافت

پستان است که حساسیت آن را نسبت به عوامل سرطان‌زا کاهش می‌دهد. بنابراین در صورتی که اولین بارداری و زایمان پس از ۳۰ سالگی باشد، بهتر است به سلامت پستان‌ها توجه بیشتری شود.

#### نازایی و بچه‌دار نشدن

بچه‌دار نشدن خطر ابتلا به سرطان پستان را افزایش می‌دهد. خطر ابتلا در زنان بدون فرزند، مشابه خطر ابتلا در زنانی است که سن اولین زایمان آن‌ها بیشتر از ۳۰ سال است. اگر فرد مشکل نازایی دارد به‌ویژه اگر این مشکل به‌علت اختلالات هورمونی در فرد است، بهتر است تحت پوشش برنامه‌های تشخیصی زودرس قرار گیرد.

#### ● مصرف داروهای ضدبارداری در شرایط خاص

طبق نتایج بعضی از مطالعات، مصرف این داروها به مدت ۴ سال یا بیش‌تر و قبل از اولین حاملگی در زنان جوان، خطر سرطان پستان را افزایش می‌دهد و ممکن است این اثرات تا ۱۰ سال پس از مصرف باقی بماند؛ اگرچه این نتایج هنوز مورد بحث است. به‌علت شیوع کم‌تر مصرف قرص‌های ضد بارداری در ۳۰ سال گذشته، اطلاعات موجود در این زمینه کامل نیست و مطالعات بیشتری مورد نیاز است.

#### ● درمان‌های هورمونی بعد از یائسگی

این نوع درمان، یک درمان دارویی برای جانشین کردن هورمون‌های طبیعی تخمدان در زمان یائسگی است. در بسیاری از زنان پس از یائسگی ترکیبی از این دو هورمون به‌عنوان هورمون درمانی جایگزین تجویز می‌شود. هورمون درمانی، خطر سرطان پستان را تا ۳۰ درصد افزایش می‌دهد. فواید مصرف آن به میزان خطر سرطان پستان و سایر عوامل بستگی دارد که توسط پزشک تعیین می‌شود.

#### ● عدم سابقه شیردهی به فرزندان

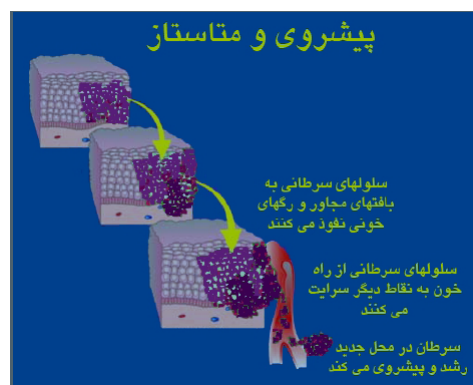
شیر دادن مادر به فرزند، به‌عنوان یک عامل حمایت‌کننده در برابر سرطان پستان، خطر ابتلا به این بیماری را کاهش می‌دهد. تأثیر حمایتی شیردهی در سرطان پستان قبل از یائسگی واضح‌تر است. گفته می‌شود هر چه زمان شیردهی طولانی‌تر باشد، این اثر محافظتی قوی‌تر خواهد بود، به‌ویژه اگر این مدت بیش‌تر از ۶ ماه باشد. البته کم بودن شیر یا ترشح نشدن آن در بعضی از زنان که منجر به کاهش دوران شیردهی به زیر ۶ ماه شده باشد، اثری در بروز سرطان پستان ندارد. همچنین قطع شیر با استفاده از داروهای هورمونی باعث افزایش خطر سرطان پستان نمی‌شود؛ ولی اگر سن مادر در زمان شیردهی پایین‌تر باشد، این اثر محافظتی بیش‌تر خواهد بود [۱].

## ۶.۳.۲ چاقی

وزن زیاد و نبود فعالیت‌های بدنی (ورزش) هم خطر ابتلا به سرطان را افزایش می‌دهد [۲].

## ۴.۲ پیش‌روی سرطان (متاستاز)

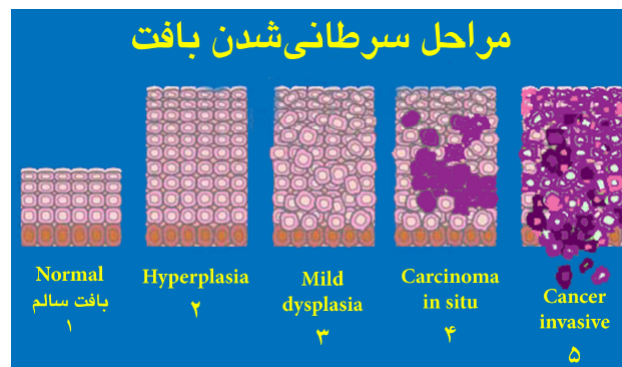
سرطان معمولاً غده یا تومور ایجاد می‌کند؛ اما در بعضی سرطان‌ها از قبیل سرطان خون (لوکیمیا یا لوسمی) غده به‌وجود نمی‌آید، بلکه سلول‌های سرطانی در خون و اعضای خون‌ساز بدن قرار گرفته، از این طریق به بافت‌ها و اندام‌های دیگر منتقل شده و در آن‌جا تومور ایجاد می‌کنند. سلول‌های سرطانی که منشأ خونی ندارند هم، قادرند به داخل رگ‌های خونی مجاور نفوذ کنند و از طریق خون یا سیستم لنفاوی به بافت‌های دیگر در نقاط دیگر بدن سرایت کنند. در محل جدید نیز به رشد بی‌رویه خود ادامه می‌دهند تا سلول‌های سرطانی را جایگزین سلول‌های سالم کنند. این فرایند را متاستاز<sup>۳</sup> می‌نامند [۵].



شکل ۱.۲: متاستاز

## ۵.۲ مراحل مختلف و درجه بندی سرطان

غدد بر اساس شکل میکروسکوپی درجه‌بندی می‌شود. شکل زیر بر اساس میزان رشد، ساختمان، نظم و توانایی سلول‌ها در نفوذ به دیگر بافت‌ها و نقاط بدن درجه‌بندی شده است.



شکل ۲.۲: مراحل سرطانی شدن بافت

<sup>۳</sup>Metastasis

۱. بافت به‌طور عادی رشد کرده و اندازه، شکل، نظم و تعداد سلول‌ها طبیعی است.
۲. شکل، اندازه و نظم سلولی طبیعی است ولی تقسیم سلولی سریع‌تر و تعداد سلول‌ها بیش‌تر است.
۳. ساختمان و نظم سلول‌ها هم تغییر کرده است.
۴. در این بافت سلول‌ها سرطانی اند، ولی هنوز در محل وقوع قرار دارند و به اطراف پیش‌روی نکرده‌اند.
۵. در این مرحله سرطان به جاهای دیگر هم پیشروی یا سرایت می‌کند.

## ۱.۵.۲ درجه بندی سرطان

متخصصان آسیب شناسی یا پاتولوژیست‌ها غدد را به ۴ درجه تقسیم می‌کنند:

- درجه ۱ ( $G1$ ): سلول سرطانی به شکل سلول سالم است که به‌کندی رشد می‌کند و تقسیم می‌شود.
- درجه ۲ ( $G2$ ): اندکی متفاوت از ( $G1$ ) است.
- درجه ۳ ( $G3$ ): سلول سرطانی به لحاظ شکل کاملاً با سلول سالم متفاوت است؛ به سرعت رشد می‌کند و تقسیم می‌شود.
- درجه ۴ ( $G4$ ): مشابه درجه ۳ می‌باشد.
- درجه  $Gx$ : ممکن است درجه آن نامشخص باشد.

مراحل مختلف سرطان را به روش ساده‌تر زیر هم نشان می‌دهند که بیش‌تر مورد استفاده عموم است.

۱. مرحله صفر ( $Stage 0$ ): سرطان هنوز در محل اولیه است و به جایی پیش‌روی یا سرایت نکرده است.
۲. مرحله ۱ ( $Stage 1$ ): سرطان به میزان کمی به بافت‌های مجاور پیشروی کرده است.
۳. مرحله ۲ ( $Stage 2$ ): میزان پیشروی بیش‌تر است و احتمالاً به غدد لنفاوی مجاور هم سرایت کرده است.
۴. مرحله ۳ ( $Stage 3$ ): سرطان کاملاً به بافت‌های مجاور و غدد لنفاوی اطراف پیشروی کرده است.
۵. مرحله ۴ ( $Stage 4$ ): خطرناک‌ترین مرحله است. سرطان از طریق جریان خون به دیگر نقاط بدن سرایت کرده و در آن جا نیز ایجاد غده کرده است. این همان مرحله متاستاز است [۵].

اگر بخواهیم دسته‌بندی ظریف‌تر و دقیق‌تری برای مراحل پیشروی سرطان در نظر بگیریم، می‌توانیم هر کدام از مراحل ۲ و ۳ را به ۳ مرحله تقسیم کنیم. لذا ترتیب‌بندی زیر را خواهیم داشت:

۰, ۱, ۲a, ۲b, ۲c, ۳a, ۳b, ۳c, ۴.



## فصل ۳

# شبکه‌های تطبیقی و انفیس

### ۱.۳ مقدمه

در این فصل ابتدا به معرفی روش کمترین مربعات به‌عنوان روشی برای تقریب پارامترها در سیستم‌ها و مدل‌های ورودی - خروجی خطی و نیز روش گرادیان کاهشی جهت مینیمم کردن خطا می‌پردازیم. در ادامه اشاره‌ای به شبکه‌های عصبی مصنوعی خواهیم داشت و شبکه‌های تطبیقی را نیز به‌طور مفصل مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد. در بخش ۷.۳ سیستم‌های عصبی - فازی تطبیقی (انفیس) را بررسی می‌کنیم. در انتهای این فصل به روش‌های خوشه‌بندی مورد استفاده در طراحی انفیس با استفاده از پایگاه داده اشاره می‌نماییم. در این راستا از منابع [۳۰] - [۱۳]، [۱۰]، [۹] و [۳] استفاده می‌کنیم.

### ۲.۳ روش کمترین مربعات

#### ۱.۲.۳ روش تخمین‌گر کمترین مربعات

در مسئله کمترین مربعات کلی، یک مدل خطی چند ورودی و یک خروجی داریم که خروجی آن به‌صورت زیر براساس پارامترهایی بیان می‌شود:

$$y = \theta_1 f_1(u) + \theta_2 f_2(u) + \dots + \theta_n f_n(u), \quad (1.3)$$

در این رابطه  $u = [u_1, \dots, u_p]^T$  بردار ورودی مدل،  $f_1, \dots, f_n$  توابع معلومی از  $u$  و  $\theta_1, \dots, \theta_n$  پارامترهای نامعلومی هستند که تخمین زده می‌شوند. برای تشخیص پارامترهای نامعلوم  $\theta_i$ ، نیازمند

یک مجموعه داده آموزش<sup>۱</sup>، یعنی ترکیبی از زوج داده‌های  $\{(u_i; y_i), i = 1, \dots, m\}$ ، هستیم که آن‌ها زوج ورودی - خروجی‌های دلخواه از سیستم هدف را برای مدل شدن، بیان می‌کنند. جایگزین کردن هر زوج داده در معادله (۱.۳) یک مجموعه از  $m$  معادله خطی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} f_1(u_1)\theta_1 + f_2(u_1)\theta_2 + \dots + f_n(u_1)\theta_n & = y_1, \\ f_1(u_2)\theta_1 + f_2(u_2)\theta_2 + \dots + f_n(u_2)\theta_n & = y_2, \\ \vdots & \vdots \\ f_1(u_m)\theta_1 + f_2(u_m)\theta_2 + \dots + f_n(u_m)\theta_n & = y_m. \end{cases} \quad (2.3)$$

با استفاده از نماد ماتریس می‌توانیم معادله مقدماتی را در فرم مختصرتری به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$A\theta = y, \quad (3.3)$$

که در آن  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  (که گاهی اوقات ماتریس طراحی<sup>۲</sup> نامیده می‌شود) به شکل

$$\begin{bmatrix} f_1(u_1) & \dots & f_n(u_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(u_m) & \dots & f_n(u_m) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$\theta$  بردار پارامترهای نامعلوم به صورت

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

و  $y$  یک بردار خروجی  $1 \times m$  به شکل

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

می‌باشند.  $i$  امین سطر ماتریس داده افزوده  $[A \ : \ y]$ ، که توسط  $[a_i^T \ : \ y_i]$  مشخص می‌شود، تماماً به  $i$  امین زوج داده ورودی - خروجی  $(u_i; y_i)$  وابسته است،

$$a_i^T = [f_1(u_i), \dots, f_n(u_i)].$$

از آنجایی که بیشتر محاسبات براساس ماتریس‌های  $A$  و  $y$  هستند، گاهی اوقات برای راحتی  $(a_i^T; y_i)$  را به عنوان  $i$  امین زوج داده از مجموعه داده آموزش در نظر می‌گیریم. برای تعیین منحصر به فرد بردار نامعلوم  $\theta$ ، لازم است که  $m \geq n$  باشد. اگر ماتریس  $A$  مربعی ( $m = n$ ) و نامنفرد باشد، می‌توانیم  $\theta$  را از معادله (۳.۳) به وسیله

$$\theta = A^{-1}y \quad (5.3)$$

<sup>۱</sup>Training data set

<sup>۲</sup>Design matrix



به دست آوریم. در هر حال معمولاً  $m$  بزرگتر از  $n$  می باشد و مشخص کننده این است که تعداد زوج داده ها از پارامترها بیشتر است. در این مورد، یک جواب دقیق در مورد همه  $m$  معادله همیشه وجود ندارد؛ از این رو ممکن است مدل برای توصیف سیستم هدف، مناسب نباشد. بنابراین برای معادله (۳.۳) باید یک بردار خطا به صورت زیر تعریف شود تا برای محاسبه خطای مدل یا اختلال تصادفی مناسب باشد. لذا داریم:

$$e = y - A\theta \quad (۶.۳)$$

حال، به جای یافتن جواب دقیق معادله (۳.۳)، می خواهیم یک  $\theta = \hat{\theta}$  که مجموع مربعات خطا تعریف شده به صورت

$$E(\theta) = \sum_{i=1}^m (y_i - a_i^T \theta)^2 = e^T e = (y - A\theta)^T (y - A\theta) \quad (۷.۳)$$

را مینیمم می کند، بیابیم. متذکر می شویم که  $E(\theta)$  به صورت نمایی می باشد و یک کمترین مقدار منحصر به فرد در  $\theta = \hat{\theta}$  دارد. قضیه زیر یک شرط لازم و صادق در تخمین گر کمترین مربعات  $\hat{\theta}$  را بیان می کند.

**قضیه ۱.۲.۳ [۲۷]** مجموع مربعات خطا در معادله (۷.۳) به ازای  $\theta = \hat{\theta}$  کمترین مقدار خود را اتخاذ می کند و تخمین گر کمترین مربعات<sup>۳</sup> و یا به اختصار *LSE* نامیده می شود که در معادله نرمال زیر نیز صدق می کند

$$A^T A \hat{\theta} = A^T y. \quad (۸.۳)$$

همچنین اگر  $A^T A$  نامنفرد باشد،  $\hat{\theta}$  منحصر به فرد خواهد بود و در رابطه زیر صدق می کند

$$\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T y. \quad (۹.۳)$$

برهان. یک روش آسان برای به دست آوردن تخمین گر کمترین مربعات برای معادله (۳.۳) تعیین مشتق  $E(\theta)$  با در نظر گرفتن  $\theta = 0$  می باشد. یادآور می شویم که  $\theta^T A^T y = y^T A \theta$  یک عدد است، می توانیم  $E(\theta)$  را به صورت زیر بنویسیم:

$$E(\theta) = (y^T - \theta^T A^T)(y - A\theta) = \theta^T A^T A \theta - 2y^T A \theta + y^T y. \quad (۱۰.۳)$$

در این صورت مشتق  $E(\theta)$  برابر با

$$\frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta} = 2A^T A \theta - 2A^T y \quad (۱۱.۳)$$

خواهد بود. با جایگزینی  $\frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta} = 0$  در  $\theta = \hat{\theta}$ ، معادله

$$A^T A \hat{\theta} = A^T y \quad (۱۲.۳)$$

<sup>۳</sup>Least-Squares estimator

را به دست می‌آوریم. اگر  $A^T A$  نامنفرد باشد،  $\hat{\theta}$  به وسیله رابطه

$$\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (۱۳.۳)$$

به صورت منحصر به فرد محاسبه می‌شود. □

خطای کمترین مربعات به دست آمده با استفاده از  $\theta = \hat{\theta}$  می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$E(\hat{\theta}) = (y - A\hat{\theta})^T (y - A\hat{\theta}) = y^T y - y^T A(A^T A)^{-1} A^T y. \quad (۱۴.۳)$$

اگر  $A^T A$  منفرد باشد آن‌گاه تخمین‌گر کمترین مربعات یکتا نیست و ما مجبور به استفاده از مفهوم معکوس (وارون) کلی برای پیدا کردن  $\hat{\theta}$  خواهیم بود. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم که در تمام این بخش  $A^T A$  نامنفرد است.

آن‌چه پیش‌تر مطرح شد بر این اساس بود که هر عامل از بردار خطا  $e$  وزن متقارن یکسانی در تمام مجموع مربعات خطا دارد. اگر فرض کنیم  $W$  ماتریس وزن و معین مثبت دلخواهی باشد، آن‌گاه مجموع مربعات خطا وزن‌دار به صورت

$$E_W(\theta) = (y - A\theta)^T W (y - A\theta) \quad (۱۵.۳)$$

خواهد بود. کمترین مقدار  $E_W(\theta)$  با روش تخمین‌گر کمترین مربعات وزن‌دار برای  $\hat{\theta}_W$  به شکل

$$\hat{\theta}_W = (A^T W A)^{-1} A^T W y \quad (۱۶.۳)$$

نتیجه می‌شود. بدیهی است زمانی که  $W$  یک ماتریس یکه باشد،  $\hat{\theta}_W$  همان  $\hat{\theta}$  است. اگر سیستم هدف  $q$  خروجی  $y = [y_1, \dots, y_q]^T$  با فرض  $q > 1$  را داشته باشد، آن‌گاه یک مجموعه از معادلات خطی به شکل ماتریسی زیر را خواهیم داشت:

$$A\Theta + E = Y, \quad (۱۷.۳)$$

به طوری که در آن  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  به صورت زیر است که پیش‌تر نیز معرفی شده بود:

$$A = \begin{bmatrix} f_1(u_1) & \dots & f_n(u_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(u_m) & \dots & f_n(u_m) \end{bmatrix},$$

$\Theta$  ماتریس پارامترهای نامعلوم با ابعاد  $n \times q$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \dots & \theta_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{n1} & \dots & \theta_{nq} \end{bmatrix}.$$

و  $Y$  ماتریس خروجی با ابعاد  $m \times q$  به صورت زیر است: (با یادآوری این نکته که  $y_{ij}$ ،  $j$  امین مقدار خروجی در  $i$  امین زوج داده‌هاست.)

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & \dots & y_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m1} & \dots & y_{mq} \end{bmatrix}.$$

اکنون می‌خواهیم مجموع مربعات خطا زیر را مینیمم کنیم،

$$E(\Theta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q e_{ij}^2 = \sum_{j=1}^q \left( \sum_{i=1}^m e_{ij}^2 \right).$$

یادآور می‌شویم که  $\sum_{i=1}^m e_{ij}^2$  مجموع مربعات  $j$  امین ستون ماتریس  $E$  است که تنها به  $j$  امین ستون ماتریس  $\Theta$  وابسته است. بنابراین

$$\min_{\Theta} \sum_{j=1}^q \left( \sum_{i=1}^m e_{ij}^2 \right) = \sum_{j=1}^q \left( \min_{\Theta_j} \sum_{i=1}^m e_{ij}^2 \right),$$

که  $\theta_j$ ،  $j$  امین ستون ماتریس  $\Theta$  است. به عبارت دیگر  $\theta_j = \hat{\theta}_j$  که کمترین مقدار  $\sum_{i=1}^m e_{ij}^2$  را ایجاد می‌کند و تخمین‌گر کمترین مربعات مسئله مشابه

$$A\theta_j + e_j = y_j$$

است که در آن  $e_j$  و  $y_j$  به ترتیب  $j$  امین ستون از  $E$  و  $Y$  هستند. به عنوان یک نتیجه داریم:

$$\hat{\theta}_j = (A^T A)^{-1} A^T y_j$$

9

$$\hat{\Theta} = (A^T A)^{-1} A^T Y.$$

### ۲.۲.۳ روش تخمین‌گر کمترین مربعات بازگشتی

تخمین‌گر کمترین مربعات نتیجه شده از بخش قبلی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\theta_k = (A^T A)^{-1} A^T y, \quad (۱۸.۳)$$

که نماد  $\hat{\theta}$  را برای راحتی، حذف می‌کنیم. فرض می‌کنیم که تعداد سطرها برای  $A$  و  $y$  برابر  $k$  است، از این رو یک زیروند  $k$  به معادله پیشین افزوده شده است تا نمایان‌گر تعداد زوج داده‌های استفاده شده برای تخمین‌گر  $\theta$  باشد. فرض می‌کنیم که یک زوج داده جدید  $(a^T; y)$  به عنوان  $(m+1)$  امین ورودی در مجموعه داده موجود باشد. بنابراین به جای استفاده از همه  $k+1$  زوج داده در دسترس برای دوباره محاسبه کردن تخمین‌گر کمترین مربعات  $\theta_{k+1}$ ، می‌خواهیم از روشی استفاده کنیم که  $\theta_{k+1}$  را

با استفاده از  $\theta_k$  قبلاً محاسبه شده و زحمت کمتری محاسبه کند. به عبارت دیگر فرآیند ما در این قسمت شامل پیدا کردن یک راه با استفاده از زوج داده جدید  $(a^T; y)$ ، برای به‌هنگام کردن  $\theta_k$  و متناسب کردن آن برای یافتن  $\theta_{k+1}$  می‌باشد. این مسئله تعیین کمترین مربعات بازگشتی نامیده می‌شود. بدیهی است که  $\theta_{k+1}$  می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\theta_{k+1} = \left( \begin{bmatrix} A \\ a^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \\ a^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} A \\ a^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y \\ y \end{bmatrix}. \quad (19.3)$$

برای سادگی در نمادگذاری دو ماتریس  $n \times n$ ،  $P_k$  و  $P_{k+1}$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$P_k = (A^T A)^{-1}, \quad (20.3)$$

$$P_{k+1} = \left( \begin{bmatrix} A \\ a^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \\ a^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (21.3)$$

$$= \left( \begin{bmatrix} A^T & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ a^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (22.3)$$

$$= (A^T A + a a^T)^{-1}, \quad (23.3)$$

که این ماتریس‌ها توسط رابطه

$$P_k^{-1} = P_{k+1}^{-1} - a a^T, \quad (24.3)$$

با یکدیگر در ارتباط هستند. با استفاده از  $P_k$  و  $P_{k+1}$  داریم:

$$\begin{cases} \theta_k = P_k A^T y, \\ \theta_{k+1} = P_{k+1} (A^T Y + a y). \end{cases} \quad (25.3)$$

از قسمت اول معادله (۲۵.۳) داریم

$$A^T Y = P_k^{-1} \theta_k, \quad (26.3)$$

با اعمال رابطه (۲۶.۳) در قسمت دوم معادله (۲۵.۳) و استفاده از معادله (۲۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= P_{k+1} (P_k^{-1} \theta_k + a y) \\ &= P_{k+1} [(P_k^{-1} - a a^T) \theta_k + a y] \\ &= \theta_k + P_{k+1} a (y - a^T \theta_k). \end{aligned} \quad (27.3)$$

بنابراین  $\theta_{k+1}$  می‌تواند به صورت یک تابع از تخمین  $\theta_k$  و زوج داده جدید  $(a^T; y)$  بیان شود. لذا تخمین جدید  $\theta_{k+1}$  برابر با تخمین پیشین  $\theta_k$  به علاوه یک عبارت متناظر با داده جدید  $(a^T; y)$  می‌باشد؛ این عبارت متناظر برابر با یک بردار افزایش تطبیقی  $P_{k+1} a$  ضرب در خطای پیش‌بینی تولید شده توسط

تخمین گر اولیه یعنی  $y - a^T \theta_k$  که در ادامه مورد بحث قرار خواهد گرفت، می‌باشد. محاسبه  $P_{k+1}$  با استفاده از معادله (۲۱.۳)، وارون یک ماتریس  $n \times n$  را شامل می‌شود. این کار محاسبات پیچیده‌ای دارد و نیازمند یافتن یک فرمول افزایشی برای  $P_{k+1}$  است. از معادله (۲۴.۳) داریم:

$$P_{k+1} = (P_k^{-1} + aa^T)^{-1}. \quad (28.3)$$

لم ۲۰.۲.۳. [۲۷] فرض کنید  $A$  و  $CA^{-1}B$  ماتریس‌های مربعی نامنفرد باشند. آن‌گاه

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \quad (29.3)$$

برهان. با جای‌گزینی مستقیم داریم

$$\begin{aligned} & (A + BC)[A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}] \\ &= (A + BC)A^{-1} - (A + BC)A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BCA^{-1} - (B + BCA^{-1}B)(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BCA^{-1} - B(I + CA^{-1}B)(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BCA^{-1} - BCA^{-1} \\ &= I. \end{aligned}$$

□

اگر در لم (۲۰.۲.۳)،  $A = P_k^{-1}$ ،  $B = a$  و  $C = a^T$  باشند؛ آن‌گاه فرمول افزایشی زیر را برای  $P_{k+1}$  به‌دست خواهیم آورد

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k - P_k a (I + a^T P_k a)^{-1} a^T P_k \\ &= P_k - \frac{P_k a a^T P_k}{1 + a^T P_k a}, \end{aligned} \quad (30.3)$$

لذا تخمین گر کمترین مربعات بازگشتی برای مسئله  $A\theta = y$  که در آن  $k$  امین  $(1 \leq k \leq m)$  سطر از  $\begin{bmatrix} A \\ y \end{bmatrix}$ ، توسط  $\begin{bmatrix} a_k^T \\ y_k \end{bmatrix}$  مشخص می‌شود، می‌تواند با رابطه زیر محاسبه شود:

$$\begin{cases} P_{k+1} = P_k - \frac{P_k a_{k+1} a_{k+1}^T P_k}{1 + a_{k+1}^T P_k a_{k+1}} \\ \theta_{k+1} = \theta_k + P_{k+1} a_{k+1} (y_{k+1} - a_{k+1}^T \theta_k), \end{cases} \quad (31.3)$$

در این رابطه محدوده  $k$  از ۰ تا  $m - 1$  می‌باشد و تخمین گر کمترین مربعات  $\hat{\theta}$  همه جا برابر با  $\theta$  است. برای شروع الگوریتم در رابطه (۳۱.۳) نیاز به مقادیر اولیه  $\theta$  و  $P$  داریم. برای این که نیاز به این مقادیر نباشد، یک راه حل این است که  $n$  نقاط داده اول را گردآوری کرده و  $\theta_n$  و  $P_n$  را به صورت مستقیم از رابطه

$$\begin{cases} P_n = (A_n^T A_n)^{-1} \\ \theta_n = P_n + A_n^T y_n \end{cases} \quad (32.3)$$

به‌دست آوریم. در رابطه قبل  $[A_n : y_n]$  ماتریس داده ساخته شده از  $n$  زوج داده اول است. در بعضی مواقع نیز استفاده از رابطه (۳۱.۳) آسان‌تر است. برای مطالعه بیشتر و اطلاع از نحوه تعیین مقادیر اولیه به [۲۷] مراجعه شود.

## ۳.۳ روش گرادین کاهشی

### ۱.۳.۳ روش‌های کاهشی

در این روش تمرکز روی مینیمم کردن تابع هدف حقیقی مقدار  $E$  که روی فضای ورودی  $n$  بعدی  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  تعریف شده است، می‌باشد. یک نقطه مینیمم  $\theta = \theta^*$  که  $E(\theta)$  را مینیمم می‌کند، می‌یابیم. در حالت کلی تابع هدف معین  $E$  شکل غیرخطی با توجه به پارامتر قابل تنظیم  $\theta$  دارد. به‌علت پیچیدگی  $E$ ، اغلب به یک الگوریتم تکراری متوسل می‌شویم. در روش تکراری کاهشی، نقطه بعدی  $\theta_{next}$  با استفاده از یک گام کمتر از نقطه کنونی  $\theta_{now}$  در بردار جهت  $d$  تعیین می‌شود.

$$\theta_{next} = \theta_{now} + \eta d; \quad (۳۳.۳)$$

در این رابطه  $\eta$  تعدادی طول گام مثبت است که تنظیم می‌کند تا چه اندازه در این جهت ادامه دهیم. در مباحث عصبی - فازی، عبارت سرعت آموزش<sup>۴</sup> برای طول گام  $\eta$  استفاده می‌شود. برای راحتی کار رابطه زیر را استفاده می‌کنیم

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \eta_k d_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (۳۴.۳)$$

که  $k$  شماره تکرار کنونی را نشان می‌دهد و  $\theta_{now}$  و  $\theta_{next}$  دو جز متوالی در دنباله ایجاد شده از کاندیدهای جواب  $\{\theta_k\}$  را ارائه می‌دهند.  $\theta_k$  تمایل به همگرایی به مینیمم (محلی)  $\theta^*$  دارد. روش تکراری کاهشی  $k$  امین گام  $\eta_k d_k$  را از طریق دو رویه محاسبه می‌کند: نخست بردار جهت  $d$  را تعیین می‌کند و سپس طول گام  $\eta$  را محاسبه می‌کند. نقطه بعدی  $\theta_{next}$  باید در نامساوی زیر صدق کند.

$$E(\theta_{next}) = E(\theta_{now} + \eta d) < E(\theta_{now}) \quad (۳۵.۳)$$

الگوریتم برای حرکت به نقطه مینیمم (محلی) روی خط تعیین شده توسط نقطه کنونی  $\theta_{now}$  و جهت  $d$  فراخوانی می‌شود. دوم این که طول گام مطلوب و بهینه می‌تواند با استفاده از رابطه زیر مشخص شود:

$$\eta^* = \arg \min_{\eta > 0} \phi(\eta), \quad (۳۶.۳)$$

که در آن

$$\phi(\eta) = E(\theta_{now} + \eta d) \quad (۳۷.۳)$$

<sup>۴</sup> Learning rate

است. جستجو برای  $\eta^*$  توسط روش خط جستجو<sup>۵</sup> انجام می‌شود. برای مطالعه بیشتر به [۲۷] و [۲۸] مراجعه شود.

### ۲.۳.۳ روش‌های مبتنی بر گرادیان

زمانی که جهت  $d$  بر پایه گرادیان<sup>۶</sup> تابع هدف  $E$  تعیین می‌شود، روش‌های کاهشی، روش‌های کاهشی مبتنی بر گرادیان نامیده می‌شوند.

گرادیان تابع مشتق‌پذیر  $E: R^n \rightarrow R$  در  $\theta$ ، بردار مشتق اول  $E$  است؛ که با  $g$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

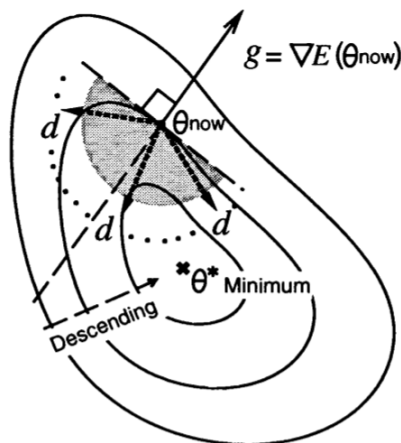
$$g(\theta) (= \nabla E(\theta)) = \left[ \frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_n} \right]^T. \quad (38.3)$$

برای راحتی متغیر  $\theta$  را در  $g(\theta)$  حذف کرده و آن را برابر با  $g$  در نظر می‌گیریم. در حالت کلی شرط زیر برای جهت کاهشی شدن در نظر گرفته می‌شود:

$$\phi' = \left. \frac{dE(\theta_{now} + \eta d)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = g^T d = \|g^T\| \|d\| \cos(\xi(\theta_{now})) < 0 \quad (39.3)$$

که  $\xi$  دلالت بر زاویه بین  $g$  و  $d$  و  $\xi(\theta_{now})$  دلالت بر زاویه بین  $g$  کنونی و  $d$  در نقطه کنونی  $\theta_{now}$  دارند. این رابطه می‌تواند با استفاده از بسط سری تیلور  $E$  بررسی شود.

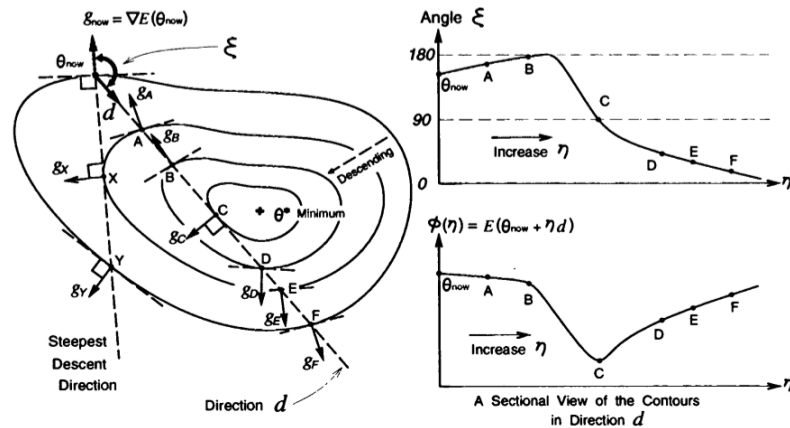
$$E(\theta_{now} + \eta d) = E(\theta_{now}) + \eta g^T d + O(\eta^2) \quad (40.3)$$



شکل ۱.۳: جهت‌های کاهشی شدن

<sup>۵</sup>Line search

<sup>۶</sup>Gradient (g)



شکل ۲.۳:  $\xi$  زاویه بین جهت گرادیان  $g$  و جهت کاهشی  $d$  در نقطه کنونی  $\theta_{now}$

یک کلاس از روش‌های کاهشی مبتنی بر گرادیان شکل کلی زیر را دارند، که در آن جهت‌های کاهشی شدنی می‌توانند با استفاده از منحرف ساختن گرادیان‌ها از طریق ضرب در  $G^y$  تعیین شوند (یعنی گرادیان‌های منحرف شده):

$$\theta_{next} = \theta_{now} - \eta Gg \tag{41.3}$$

در حالت مطلوب هدف ما یافتن مقداری از  $\theta_{next}$  است که در معادله زیر صدق کند.

$$g(\theta_{next}) = \left. \frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_{next}} = 0 \tag{42.3}$$

هرچند حل این معادله از لحاظ تحلیلی دشوار است.

برای مینیمم کردن تابع هدف، رویه کاهشی تا زمانی که یکی از شرایط توقف زیر برقرار شود، تکرار می‌شود.

۱. مقدار تابع هدف به اندازه کافی کوچک شود.

۲. طول بردار گرادیان  $g$  کوچکتر از یک مقدار تعیین شده باشد.

۳. زمان محاسبات تعیین شده بیش از حد باشد.

### ۳.۳.۳ روش گرادیان کاهشی

روش گرادیان کاهشی<sup>۸</sup> یکی از قدیمی‌ترین روش‌ها برای مینیمم کردن یک تابع معین تعریف شده روی فضای ورودی چند بعدی است.

زمانی که با تعدادی مقدار مثبت  $\eta$  و ماتریس واحد  $I$ ،  $G = \eta I$  باشد؛ رابطه (۴۱.۳)، معادله معروف گرادیان کاهشی خواهد شد:

$$\theta_{next} = \theta_{now} - \eta g \tag{43.3}$$

<sup>۸</sup>  $G^y$  یک ماتریس معین مثبت است.



اگر روش گرادیان کاهشی، خط کمینه‌سازی در رابطه (۳۶.۳) را به کار ببندد و اگر مینیمم نقطه  $\eta^*$  در جهت  $d$  در هر تکرار به دست آید، داریم:

$$\begin{aligned}\phi'(\eta) &= \frac{dE(\theta_{now} - \eta g_{now})}{d\eta} \\ &= \nabla^T E(\theta_{now} - \eta g_{now}) g_{now} \\ &= g_{next}^T g_{now} \\ &= 0\end{aligned}\quad (44.3)$$

$g_{next}$  بردار گرادیان در نقطه بعدی است. بردار گرادیان  $g_{next}$  همیشه نسبت به بردار گرادیان  $g_{now}$  قائم است.

از نقاط ضعف روش گرادیان کاهشی این است که امکان افتادن در یک نقطه  $min$  محلی وجود دارد.

## ۴.۳ شبکه‌های عصبی مصنوعی

شبکه‌های عصبی مصنوعی<sup>۹</sup> یا به زبان ساده‌تر شبکه‌های عصبی جزء دسته‌ای از سیستم‌های دینامیکی مدل آزاد هوشمند قرار دارند، که با پردازش روی داده‌های تجربی، دانش یا قانون نهفته در ورای داده‌ها را به ساختار شبکه منتقل می‌کنند و به همین دلیل به این سیستم‌ها هوشمند می‌گویند. از دیدگاه ریاضی یک شبکه عصبی به‌عنوان یک تقریب‌گر است. توانایی آن در تقریب بین الگوهای یک مسئله باعث می‌شود تا بتوان مسائل با پیچیدگی زیاد مانند شناسایی الگو، نگاشت غیرخطی، حافظه انجمنی، خودسازماندهی و کنترل را انجام دهد [۱۶]. شبکه عصبی مصنوعی نوعی شبیه‌سازی ساختار مغز انسان در قالب یک سیستم مصنوعی می‌باشد. یک شبکه عصبی بر خلاف کامپیوتر به مدل‌های ریاضی محض نیازی ندارد، بلکه مانند انسان تجربه کسب کرده و نتیجه این تجربیات را تعمیم می‌دهد. شبکه‌های عصبی مصنوعی با الهام از ساختارهای شبکه‌های عصبی زیستی و ساز و کار آن‌ها مطرح شدند. دو توانایی مهم شبکه‌های عصبی، پاسخ‌دهی سریع به مسائل و توانایی عمومیت دادن این جواب‌ها به نمونه‌های مشاهده نشده در صورت پذیرفته شدن نتایج است. هر شبکه عصبی مصنوعی از تعدادی نرون و لایه تشکیل شده است [۱۰]. نرون کوچکترین واحد پردازشگر اطلاعات است، که اساس عملکرد شبکه‌های عصبی را تشکیل می‌دهد. هر نرون دارای یک تابع فعالیت و پارامتر وزن می‌باشد. انواع مختلفی نظیر توابع تانژانت هیپربولیک، سیگموئید، خطی و گوسی وجود دارد. همه این توابع پیوسته و مشتق‌پذیر هستند. تابع فعالیت با توجه به نیاز مسئله تعیین می‌شود و می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد. شبکه‌های عصبی برای حل هر مسئله سه مرحله آموزش، صحت‌سنجی (اعتبار‌سنجی) و تست را انجام می‌دهند. هر شبکه از سه لایه ورودی، پنهان و خروجی تشکیل می‌شود. تعداد نرون‌های لایه‌های ورودی و خروجی هر شبکه، غالباً توسط ماهیت خود مسئله تعیین می‌شوند؛ ولی تعداد لایه‌های میانی و تعداد نرون‌های موجود در هر لایه میانی را نمی‌توان از روی اطلاعات مسئله تعیین نمود و هیچ قانون مشخصی برای محاسبه دقیق آن‌ها وجود ندارد. کارایی فراوان شبکه عصبی مصنوعی را می‌توان به

<sup>۹</sup>Artificial Neural Network (ANN)

دلیل قابلیت یادگیری از طریق تجربه، پردازش اطلاعات به صورت متن، قابلیت تعمیم پذیری، پردازش موازی و مقاوم بودن یا تحمل پذیری خطا دانست [۹] و [۱۰]. یکی از مشهورترین شبکه‌های عصبی که برای ایجاد نگاشت‌های غیرخطی به کار می‌رود، شبکه عصبی مصنوعی پرسپترون چند لایه<sup>۱۰</sup> است. این شبکه قادر است با انتخاب مناسب تعداد لایه‌ها و نرون‌ها، یک نگاشت غیرخطی را با دقت دلخواه انجام دهند. پارامترهای قابل تنظیم در این نوع شبکه‌ها وزن اتصالات مابین لایه‌ها است و فرآیند آموزش به معنی یافتن مقادیر مناسب وزن‌های اتصالات مابین نرون‌ها است. متداول‌ترین الگوریتم یادگیری این شبکه، الگوریتم پس‌انتشار خطا می‌باشد. روش‌های بهینه‌سازی در شبکه‌های عصبی مصنوعی شامل دو گروه روش‌های جستجوی مستقیم و مبتنی بر گرادیان می‌باشند. از تلفیق تکنیک‌های بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان با پس‌انتشار خطا، انواع مختلفی از الگوریتم پس‌انتشار خطا به دست می‌آید. این الگوریتم‌ها می‌توانند برای آموزش شبکه‌های عصبی مصنوعی مورد استفاده قرار گیرند. جهت آموزش شبکه عصبی از الگوریتم‌های یادگیری متفاوتی مانند الگوریتم گرادیان توأم مزدوج، الگوریتم کاهش گرادیان، الگوریتم نیوتنی *BFGS* و الگوریتم ارتجاعی استفاده می‌شود. انتخاب الگوریتم مناسب بر سرعت یادگیری و دقت شبکه تأثیر می‌گذارد [۳].

### ۵.۳ شبکه‌های تطبیقی : ساختارها و الگوریتم‌های آموزش

یک شبکه تطبیقی ( شکل ۳.۳ ) یک ساختار شبکه‌ای ورودی - خروجی چندلایه می‌باشد که رفتار همه ورودی‌ها و خروجی‌ها توسط یک مجموعه از پارامترهای تغییرپذیر، تعیین می‌شود. ساختار یک شبکه تطبیقی از مجموعه‌ای از گره<sup>۱۱</sup> های متصل توسط اتصال<sup>۱۲</sup> های جهت‌دار، تشکیل شده است. هر گره یک تابع گره<sup>۱۳</sup> استاتیک را روی سیگنال (پیام یا علامت حامل اطلاعات) واردشونده به آن نمایش می‌دهد تا یک گره خروجی<sup>۱۴</sup> منفرد ایجاد شود و هر اتصال جهت جریان سیگنال از یک گره به بقیه را تعیین می‌کند. معمولاً یک تابع گره یک تابع پارامتری شده با پارامترهای تغییرپذیر می‌باشد که با تغییر این پارامترها، تابع گره و نیز رفتار تمام شبکه تطبیقی را تغییر می‌دهیم. در ادامه فرض می‌کنیم که هر گره در یک شبکه تطبیقی یک نگاشت استاتیک از ورودی یا ورودی‌های آن را به خروجی نمایش می‌دهد؛ یعنی یک گره خروجی تنها به ورودی یا ورودی‌های موجود آن وابستگی دارد. علاوه بر این برای کمک کردن به پیشرفت الگوریتم‌های آموزش فرض می‌کنیم که همه توابع گره به جز در تعداد محدودی از نقاط مشتق‌پذیر هستند. در بیشتر موارد گره‌ها در یک شبکه تطبیقی ممکن است تابع گره مشخصی داشته باشند که متفاوت با سایر توابع گره می‌باشد. اتصال‌ها در یک شبکه تطبیقی تنها، مسیر انتشار از گره خروجی را تعیین می‌کنند و به طور کلی وزن یا پارامترهای وابسته به اتصال‌ها وجود ندارند. پارامترهای یک شبکه تطبیقی در گره‌های آن توزیع شده‌اند؛ بنابراین هر گره یک مجموعه پارامتر موضعی دارد. اجتماع این مجموعه‌های پارامتر موضعی برابر با مجموعه تمام پارامترهای شبکه می‌باشد.

<sup>۱۰</sup> Multi-Layer Perceptron (MLP)

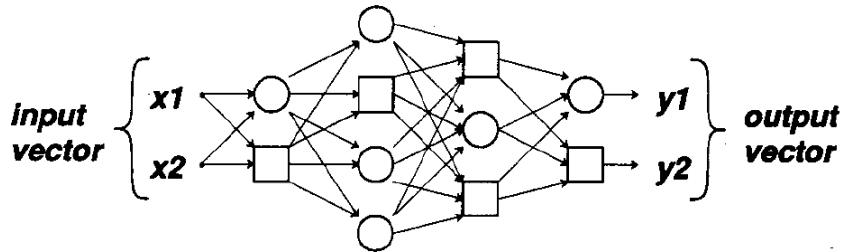
<sup>۱۱</sup> Node

<sup>۱۲</sup> Link

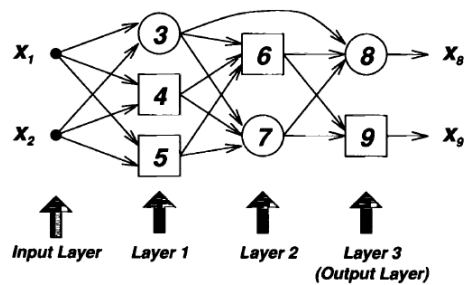
<sup>۱۳</sup> Node function

<sup>۱۴</sup> Node output

اگر مجموعه پارامتر یک گره، ناتهی باشد آنگاه تابع گره به مقادیر پارامترها وابسته است. در شکل‌های ۳.۳ و ۴.۳ ساختار کلی شبکه‌های تطبیقی نمایش داده شده‌اند. ما از یک مربع برای نمایش گره تطبیقی استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر اگر مجموعه پارامتر مربوط به یک گره، تهی باشد آنگاه تابع آن گره ثابت خواهد بود و ما از یک دایره برای نمایش گره ثابت استفاده می‌کنیم.

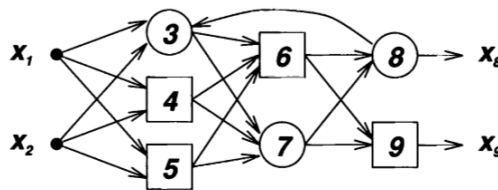


شکل ۳.۳: شبکه تطبیقی

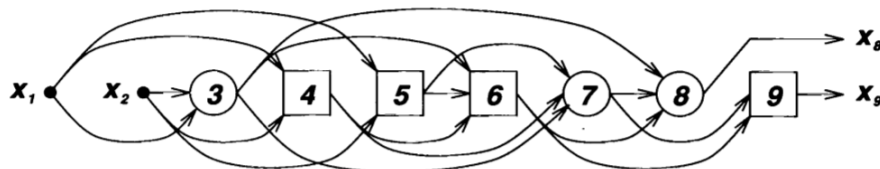


شکل ۴.۳: شبکه تطبیقی با نمایش لایه‌ها

شبکه‌های تطبیقی به طور کلی براساس نوع اتصال در دو گروه تقسیم‌بندی می‌شوند: پیشرو<sup>۱۵</sup> و بازگشتی<sup>۱۶</sup>. در یک شبکه تطبیقی پیشرو، خروجی هر گره از ورودی سمت چپ به خروجی سمت راست انتشار می‌یابد. یک شبکه بازگشتی است اگر یک اتصال بازخورد وجود داشته باشد که یک مسیر دایره‌ای را در شبکه شکل دهد. در واقع یک شبکه تطبیقی پیشرو یک نگاشت استاتیک بین فضاهای ورودی و خروجی می‌باشد که این نگاشت بسته به ساختار شبکه، ممکن است یک ارتباط ساده خطی یا از نوع غیرخطی نباشد. در این پایان نامه هدف ما ساختن یک شبکه برای رسیدن به یک نگاشت دلخواه می‌باشد که تنظیم آن به وسیله یک مجموعه داده شامل زوج‌های ورودی - خروجی دلخواه، که از یک سیستم هدف به مدل تبدیل شدند، می‌باشد. این مجموعه داده معمولاً مجموعه داده آموزش<sup>۱۷</sup> نامیده می‌شود. روش‌هایی که برای سازگار کردن پارامترها دنبال می‌کنیم تا عملکرد شبکه را بهبود ببخشیم به نام قواعد آموزش<sup>۱۸</sup> یا الگوریتم‌های تطبیقی<sup>۱۹</sup> شناخته می‌شوند. یک قاعده آموزش از به‌کارگیری یک روش بهینه‌سازی معین نتیجه می‌شود. معمولاً عملکرد یک شبکه با بررسی اختلاف بین خروجی دلخواه و خروجی شبکه، با شرایط ورودی‌های یکسان، سنجیده می‌شود. این اختلاف اندازه خطا<sup>۲۰</sup> نام دارد.



شکل ۵.۳: شبکه تطبیقی بازگشتی



شکل ۶.۳: شبکه تطبیقی پیشرو

مثال ۱.۵.۳. [۲۷] شکل ۷.۳ یک شبکه تطبیقی با یک گره منحصربه‌فرد را که با

$$x_3 = f_3(x_1, x_2; a_1, a_2, a_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3$$

مشخص می‌شود، نشان می‌دهد.

<sup>۱۵</sup>Feedforward

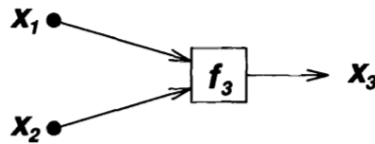
<sup>۱۶</sup>Recurrent

<sup>۱۷</sup>Training data set

<sup>۱۸</sup>Learning rules

<sup>۱۹</sup>Adaptation algorithms

<sup>۲۰</sup>Error measure



شکل ۷.۳: شبکه تطبیقی خطی تک‌گره

در این شبکه  $x_1$  و  $x_2$  ورودی‌ها،  $a_1$ ،  $a_2$  و  $a_3$  پارامترهای قابل تغییر هستند. تابع یک سطح در فضای  $x_1 - x_2 - x_3$  تعریف می‌کند و با تعیین مقادیر مناسب برای پارامترها می‌توانیم سطح را به دلخواه جایگزاری کنیم. با در نظر گرفتن مجموع مربعات خطا به عنوان اندازه خطا برای این شبکه، می‌توانیم پارامترهای بهینه را به وسیله روش تخمین کمترین مربعات خطا تعیین کنیم.

برای شبکه‌های تطبیقی پیشرو دو دسته قواعد آموزش زیر مطرح است:

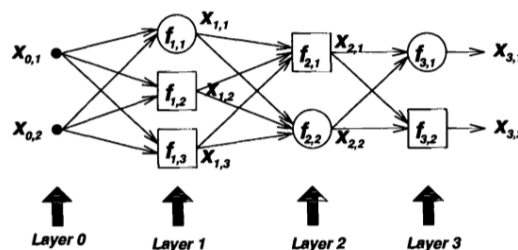
- قاعده آموزش اولیه پس انتشار<sup>۲۱</sup>
- قاعده آموزش ترکیبی<sup>۲۲</sup>

### ۱.۵.۳ پس انتشار

فرض کنید که یک شبکه تطبیقی پیشرو داده شده  $L$  لایه دارد و  $l$  امین لایه ( $l = 0, 1, \dots, L$ ) دارای  $N(l)$  گره باشد. خروجی و تابع گره  $i$ ،  $[i = 1, \dots, N(l)]$  در لایه  $l$  می‌توانند به ترتیب با  $x_{l,i}$  و  $f_{l,i}$  نشان داده شوند. از آنجایی که خروجی یک گره به سیگنال‌های ورودی و مجموعه پارامترهای بستگی دارد، لذا رابطه کلی زیر را برای تابع  $f_{l,i}$  داریم:

$$x_{l,i} = f_{l,i}(x_{l-1,1}, \dots, x_{l-1,N(l-1)}, \alpha, \beta, \gamma, \dots) \quad (۴۵.۳)$$

که در این رابطه  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  پارامترهای این گره هستند.



شکل ۸.۳: شبکه تطبیقی با نمایش لایه‌ای

<sup>۲۱</sup>Backpropagation

<sup>۲۲</sup>Hybrid

فرض می‌کنیم که مجموعه داده آموزش  $P$  ورودی دارد، می‌توانیم یک اندازه خطا برای  $p$  امین  $(1 \leq p \leq P)$  ورودی از داده‌های آموزش به صورت مجموع مربعات خطا به صورت زیر تعریف کنیم:

$$E_p = \sum_{k=1}^{N(l)} (d_k - x_{L,k})^2, \quad (46.3)$$

که  $d_k$ ،  $k$  امین جز از  $p$  امین بردار خروجی دلخواه و  $x_{L,k}$ ،  $k$  امین جز از بردار خروجی واقعی می‌باشد که توسط  $p$  امین بردار ورودی ارائه شده به شبکه، ایجاد شده است. بدیهی است که زمانی که  $E_p$  برابر با صفر است، شبکه قادر است که بردار خروجی دلخواه در  $p$  امین زوج داده آموزش را به درستی ایجاد کند. بنابراین هدف ما کمترین کردن یک اندازه خطا کلی که به صورت  $E = \sum_{p=1}^P E_p$  تعریف شده، می‌باشد. برای استفاده از گرادیان کاهشی به منظور کمترین مقدار کردن اندازه خطا، ابتدا باید بردار گرادیان را به دست بیاوریم. به عبارت دیگر پارامتر  $\alpha$  را تغییر خواهیم داد و یک تغییر کوچک در یک پارامتر  $\alpha$ ، خروجی گره شامل  $\alpha$  را تغییر خواهد داد و این تغییر، خروجی لایه نهایی و بنابراین اندازه خطا را نیز تغییر خواهد داد. از این رو، مفهوم اولیه در محاسبه بردار گرادیان، به دست آوردن شکلی از مشتق اطلاعات شروع لایه خروجی و حرکت برگشتی لایه به لایه تا زمانی که لایه ورودی به دست آید، می‌باشد. برای گسترش یک روش آموزش که گرادیان کاهشی را در  $E$  و حتی فضای پارامترها انجام دهد، نخست باید سیگنال خطا  $\epsilon_{l,i}$  را به عنوان مشتق اندازه خطا  $E_p$  با توجه به خروجی گره  $i$  در لایه  $l$ ، تعریف کنیم:

$$\epsilon_{l,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}}, \quad (47.3)$$

سیگنال خطا برای  $i$  امین گره خروجی در لایه  $L$  می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\epsilon_{L,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{L,i}} = -2(d_i - x_{L,i}). \quad (48.3)$$

برای گره درونی در  $i$  امین موقعیت لایه  $l$ ، سیگنال خطا می‌تواند مستقیماً از قاعده زنجیری به شکل زیر به دست آید:

$$\epsilon_{l,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}} = \sum_{m=1}^{N(l+1)} \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l+1,m}} \frac{\partial f_{l+1,m}}{\partial x_{l,i}} = \sum_{m=1}^{N(l+1)} \epsilon_{l+1,m} \frac{\partial f_{l+1,m}}{\partial x_{l,i}}, \quad (49.3)$$

که در آن  $0 \leq l \leq L-1$ . بنابراین برای هر  $l$  و هر  $i$   $[0 \leq l \leq L-1, 1 \leq i \leq N(l)]$ ، می‌توانیم  $\epsilon_{l,i} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}}$  را ابتدا با به کار بردن رابطه (48.3) برای رسیدن به سیگنال‌های خطا در لایه خروجی و سپس رابطه تکراری (49.3) تا زمانی که به لایه دلخواه  $l$  برسیم، به دست بیاوریم. این روند اصولی پس انتشار نامیده می‌شود چرا که سیگنال‌های خطا به طور متوالی از لایه خروجی با برگشت به لایه ورودی به دست آمده‌اند. بردار گرادیان به عنوان مشتق اندازه خطا با توجه به پارامترها، تعریف شده است، بنابراین مجدداً باید از قاعده زنجیری استفاده کنیم تا بردار گرادیان را بیابیم. اگر  $\alpha$  یک پارامتر گره  $i$  در لایه  $l$  باشد، داریم:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial \alpha} = \frac{\partial^+ E_p}{\partial x_{l,i}} \frac{\partial f_{l,i}}{\partial \alpha} = \epsilon_{l,i} \frac{\partial f_{l,i}}{\partial \alpha}; \quad (50.3)$$

متذکر می‌شویم که اگر پارامتر  $\alpha$  میان گره‌های مختلف به اشتراک گذاشته شده باشد، آن‌گاه رابطه (۵۰.۳) باید به شکل کلی زیر تغییر پیدا کند:

$$\frac{\partial^+ E_p}{\partial \alpha} = \sum_{x^* \in S} \frac{\partial^+ E_p}{\partial x^*} \frac{\partial f^*}{\partial \alpha}, \quad (51.3)$$

که در آن  $S$  مجموعه گره‌های شامل  $\alpha$  به عنوان یک پارامتر و  $x^*$  و  $f^*$  به ترتیب خروجی و تابع یک گره کلی در  $S$  هستند.

مشتق اندازه خطا کلی  $E$ ، با توجه به  $\alpha$

$$\frac{\partial^+ E}{\partial \alpha} = \sum_{p=1}^P \frac{\partial^+ E_p}{\partial \alpha} \quad (52.3)$$

می‌باشد. بنابراین برای گرادیان کاهش بهنگام کردن رابطه برای پارامتر کلی  $\alpha$  به صورت زیر است:

$$\Delta \alpha = -\eta \frac{\partial^+ E}{\partial \alpha} \quad (53.3)$$

در این رابطه  $\eta$  سرعت آموزش است که با معادله

$$\eta = \frac{\kappa}{\sqrt{\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)^2}} \quad (54.3)$$

به دست می‌آید. در رابطه (۵۴.۳)  $\kappa$  طول هر انتقال در جهت هدایت گرادیان در فضای پارامتر می‌باشد و طول گام<sup>۲۳</sup> نام دارد. معمولاً می‌توانیم با تغییر طول گام، سرعت همگرایی را تغییر دهیم. به عبارت دیگر هدف اصلی الگوریتم آموزش پس انتشار تنظیم و سازگار کردن مقادیر وزن‌ها در مجموعه داده‌های آموزش است؛ به شیوه‌ای که مقدار یکسانی را به عنوان مقدار خروجی دقیق از شبکه با استفاده از مجموعه داده‌های معتبر به دست بیاورد. در نهایت لایه خروجی بعضی مقادیر خروجی را ایجاد می‌کند. مقادیر تولید شده و اصلی از خروجی مورد استفاده قرار می‌گیرند تا خطایی را که به لایه ورودی انتشار پیدا کرده، مشخص کنند. این روند تا زمانی که خطا کمتر از یک خطای از پیش تعیین شده باشد، ادامه پیدا می‌کند و شبکه قابل استفاده می‌شود [۲۳].

### ۲.۵.۳ قاعده آموزش ترکیبی: ترکیبی از گرادیان کاهش و روش کمترین مربعات

اگرچه می‌توانیم پس انتشار یا گرادیان کاهش را برای تعیین پارامترها در یک شبکه تطبیقی به کار ببریم؛ استفاده از یک روش بهینه‌سازی معمولی و ساده اغلب زمان زیادی را برای رسیدن به همگرایی صرف می‌کند؛ لذا در یک شبکه تطبیقی با پارامترهای خطی، می‌توانیم این پارامترها را با استفاده از روش کمترین مربعات که پیش‌تر بحث شد، تعیین کنیم. این روش ما را به یک قاعده آموزش ترکیبی سوق می‌دهد [۲۱] و [۱۷]، که گرادیان کاهش و تخمین‌گر کمترین مربعات را برای تعیین سریع پارامترها و به حداقل رساندن خطا در مرحله آموزش، ترکیب می‌کند و سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد. برای این کار دو نوع روش آموزش ترکیبی خواهیم داشت:

<sup>۲۳</sup> Step size

- آموزش دسته‌ای (آموزش منفصل)<sup>۲۴</sup>
- آموزش الگو (آموزش متصل)<sup>۲۵</sup>

### ۳.۵.۳ آموزش دسته‌ای (آموزش منفصل)

فرض می‌کنیم که شبکه تطبیقی مورد بررسی تنها یک خروجی به صورت زیر دارد

$$o = F(i, S) \quad (۵۵.۳)$$

که  $i$  بردار متغیرهای ورودی،  $S$  مجموعه پارامترها و  $F$  تابع کلی شبکه تطبیقی باشند. اگر یک تابع  $H$  وجود داشته باشد به طوری که تابع مرکب  $H \circ F$  در تعدادی از عناصر  $S$  خطی باشد، آن‌گاه این عناصر می‌توانند توسط روش کمترین مربعات تعیین شوند. به بیان روشن‌تر، اگر مجموعه پارامتر  $S$  بتواند به دو مجموعه به صورت

$$S = S_1 \oplus S_2 \quad (۵۶.۳)$$

( $\oplus$  جمع مستقیم را نشان می‌دهد) که  $S_1$  مجموعه پارامترهای فرض و  $S_2$  مجموعه پارامترهای نتیجه می‌باشند، تقسیم شود؛ به طوری که  $H \circ F$  در عناصر  $S_2$  خطی باشد، آن‌گاه با به کار بردن  $H$  در رابطه (۵۵.۳) داریم:

$$H(o) = H \circ F(Bi, S), \quad (۵۷.۳)$$

که در عناصر  $S_2$  خطی است. حال می‌توانیم داده‌های آموزش  $P$  را در معادله (۵۵.۳) اعمال کنیم و معادله ماتریسی زیر را به دست بیاوریم:

$$A\theta = y; \quad (۵۸.۳)$$

در رابطه بالا  $\theta$  یک بردار نامعین است که عناصر آن، پارامترها در  $S_2$  یا همان پارامترهای نتیجه می‌باشند. بدیهی است که معادله (۵۸.۳) دقیقاً مشابه معادله (۱۷.۳) می‌باشد. بنابراین این یک مسئله کمترین مربعات می‌باشد و بهترین راه حل برای  $\theta$  این است که  $\|A\theta - y\|^2$  کمترین مقدار شود. تخمین‌گر کمترین مربعات  $\theta^*$  برابر با

$$\theta^* = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (۵۹.۳)$$

است. در رابطه بالا  $A^T$  ترانهاده  $A$  است. فرض کنید  $i$  امین سطر بردار از ماتریس  $A$  در معادله (۵۸.۳) با نماد  $a_i^T$  و  $i$  امین عنصر از  $y$  با نماد  $y_i^T$  مشخص شده باشند، در این صورت  $\theta$  می‌تواند از رابطه تکراری زیر محاسبه شود:

$$\begin{cases} \theta_{i+1} = \theta_i + P_{i+1} a_{i+1} (y_{i+1}^T - a_{i+1}^T \theta_i), \\ P_{i+1} = P_i - \frac{P_i a_{i+1} a_{i+1}^T P_i}{1 + a_{i+1}^T P_i a_{i+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, P-1, \end{cases} \quad (۶۰.۳)$$

<sup>۲۴</sup>Batch (off - line) learning

<sup>۲۵</sup>Pattern (on - line) learning



که در آن تخمین‌گر کمترین مربعات  $\theta^*$  برابر با  $\theta_P$  است. شرایط اولیه برای استفاده از رابطه (۶۰.۳) عبارتند از:  $\theta_0 = 0$  و  $P_0 = \gamma I$ . یک عدد مثبت بزرگ و  $I$  یک ماتریس همبندی  $M \times M$  است. حال می‌توانیم گرادیان کاهش و روش تخمین‌گر کمترین مربعات را برای بهنگام کردن پارامترها در یک شبکه تطبیقی، ترکیب کنیم. برای آموزش ترکیبی از نوع دسته‌ای، هر دوره ترکیبی از مسیر پیشرو<sup>۲۶</sup> و مسیر پسرو<sup>۲۷</sup> می‌باشد. در مسیر پیشرو با ارائه یک بردار ورودی، خروجی گره را در شبکه لایه به لایه محاسبه می‌کنیم؛ تا زمانی که سطر متناظر در ماتریس‌های  $A$  و  $y$  در رابطه (۵۸.۳) به دست آید. این روند برای همه زوج داده‌های آموزش تکرار می‌شود تا ماتریس‌های کامل شده  $A$  و  $y$  تشکیل شوند؛ سپس پارامترها در  $S_2$  با استفاده از رابطه‌های (۵۹.۳) یا (۶۰.۳) شناسایی خواهند شد. پس از تعیین پارامترها در  $S_2$  می‌توانیم اندازه خط را برای هر زوج داده آموزش محاسبه کنیم. در مسیر پسرو سیگنال‌های خطا (مشتق اندازه خطا با توجه به هر گره خروجی [ (۴۸.۳) و (۴۷.۳) ]) از آخرین خروجی به آخرین ورودی انتشار پیدا می‌کند. در نهایت برای همه داده‌های آموزش، پارامترها در  $S_1$  توسط گرادیان کاهش در رابطه (۵۳.۳) بهنگام می‌شوند.

#### ۴.۵.۳ آموزش الگو (آموزش متصل)

اگر پارامترها بعد از هر بار ارائه داده‌ها، بهنگام شوند، روش آموزش متصل یا آموزش الگو به الگو<sup>۲۸</sup> را خواهیم داشت. این روش برای تعیین پارامتر متصل، برای سیستم‌هایی با ویژگی‌های متغیر، ضروری است. قاعده آموزش دسته‌ای را اصلاح می‌کنیم تا یک شکل متصل به دست بیاوریم. بدیهی است که گرادیان کاهش باید بر اساس  $E_p$  (۵۰.۳) باشد و نه  $E$  [۲۱]. در رابطه‌های کمترین مربعات بازگشتی برای تخمین ویژگی‌های داده‌های ورودی، نیاز به از بین بردن خروجی زوج داده‌های قدیمی که به عنوان زوج داده‌های جدید در دسترس ما قرار گرفته‌اند، داریم. یک روش ساده این است که اندازه مجموع مربعات خطا را به عنوان یک صورت وزن دار که عوامل وزن دار بالاتری را به بیشتر زوج داده‌های جدید نسبت می‌دهد، قاعده‌بندی کنیم. این مقادیر، یک عامل  $\lambda$  را به رابطه بازگشتی اصلی اضافه می‌کند، لذا داریم:

$$\begin{cases} \theta_{i+1} = \theta_i + P_{i+1} a_{i+1} (y_{i+1}^T - a_{i+1}^T \theta_i) \\ P_{i+1} = \frac{1}{\lambda} \left[ P_i - \frac{P_i a_{i+1} a_{i+1}^T P_i}{\lambda + a_{i+1}^T P_i a_{i+1}} \right] \end{cases} \quad (۶۱.۳)$$

که مقدار متداول برای  $\lambda$  بین ۰.۸ و ۱ می‌باشد. کوچکترین مقدار  $\lambda$  در از بین بردن اثر داده قدیمی سریع‌تر عمل می‌کند، اما یک  $\lambda$  کوچک گاهی اوقات سبب ناپایداری‌های عددی می‌شود و باید از آن پرهیز کرد.

<sup>۲۶</sup>Forward pass

<sup>۲۷</sup>Backward pass

<sup>۲۸</sup>Pattern - by - pattern learning

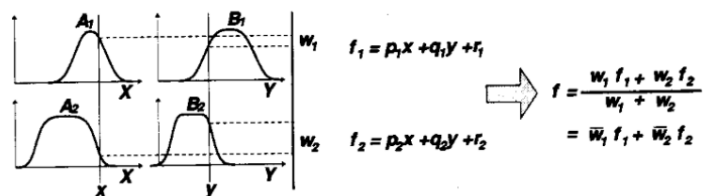
### ۶.۳ سیستم‌های عصبی - فازی تطبیقی (انفیس)

تقریباً هیچ محدودیتی روی توابع گره از یک شبکه تطبیقی به جز قطعه‌وار مشتق پذیر بودن، وجود ندارد. تنها شرط ساختار و پیکربندی شبکه این است که باید از نوع پیشرو باشد. به دلیل این محدودیت‌های حداقلی، کاربردهای شبکه تطبیقی لازم و گسترده می‌باشند. از جمله سیستم‌های تصمیم‌گیری، پردازش سیگنال، کنترل و .... در این بخش به معرفی یک دسته از شبکه‌های تطبیقی که به طور هم‌ارز با سیستم‌های استنتاج فازی فعالیت می‌کنند، می‌پردازیم. ساختار پیشنهادی انفیس نام دارد که مخفف لاتین شبکه تطبیقی بر پایه سیستم استنتاج فازی و یا به طور معنایی معادل با سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی می‌باشد.

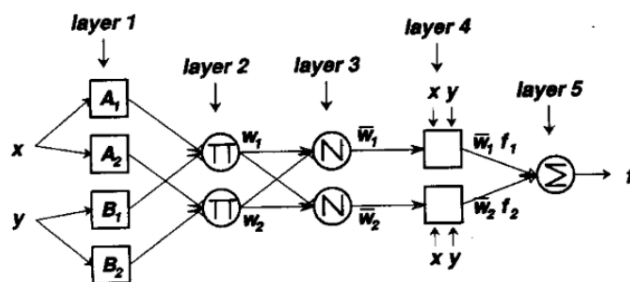
### ۷.۳ ساختار سیستم‌های عصبی - فازی تطبیقی (انفیس)

برای سادگی فرض می‌کنیم که سیستم استنتاج فازی مورد بررسی دو ورودی  $x$  و  $y$  و یک خروجی  $z$  را داراست. برای یک مدل سوگنو یک مجموعه قاعده معمولی با دو قاعده اگر- آنگاه فازی به صورت زیر می‌باشد:

- قاعده ۱: اگر  $x$ ،  $A_1$  است و  $y$ ،  $B_1$  است، آنگاه  $f_1 = p_1x + q_1y + r_1$
- قاعده ۲: اگر  $x$ ،  $A_2$  است و  $y$ ،  $B_2$  است، آنگاه  $f_2 = p_2x + q_2y + r_2$



شکل ۹.۳: یک مدل فازی سوگنو مرتبه اول با دو ورودی و دو قاعده



شکل ۱۰.۳: ساختار انفیس معادل با مدل فازی سوگنو مرتبه اول با دو ورودی و دو قاعده

شکل ۹.۳ عملکرد مدل سوگنو را نشان می دهد و شکل ۱۰.۳ ساختار انفیس هم ارز با این مدل سوگنو را نمایش می دهد که گره های لایه های یکسان توابع شبیه به هم دارند (یادآور می شویم که خروجی  $i$  امین گره در لایه  $l$ ،  $O_{l,i}$  در نظر گرفته می شود).

- لایه اول: هر گره  $i$  در این لایه یک گره تطبیقی با تابع گره می باشد.

$$\begin{aligned} O_{l,i} &= \mu_{A_i}(x), \quad i = 1, 2 \text{ برای} \\ O_{l,i} &= \mu_{B_{i-2}}(y), \quad i = 3, 4 \text{ برای} \end{aligned} \quad (۶۲.۳)$$

که  $x$  یا  $y$  متغیر ورودی به گره  $i$  و  $A_i$  یا  $B_{i-2}$  یک متغیر زبانی (مانند "کم" یا "زیاد") وابسته به این گره می باشند. به عبارت دیگر  $O_{l,i}$  مرتبه عضویت از یک مجموعه فازی ( $A = A_1, A_2, B_1, B_2$ ) است. تابع عضویت برای  $A$  می تواند هر تابع عضویت پارامتری شده مناسب مانند تابع زنگوله ای (گوسی) تعمیم یافته زیر باشد:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c_i}{a_i} \right|^{2b}}, \quad (۶۳.۳)$$

که  $\{a_i, b_i, c_i\}$  مجموعه پارامترهاست. همچنان که مقادیر این پارامترها تغییر می کنند، تابع زنگوله ای شکل (گوسی) نیز تغییر می کند، بنابراین شکل های متفاوتی برای توابع عضویت مجموعه فازی  $A$  ارائه می شود. پارامترها در این لایه، پارامترهای فرض نامیده می شوند.

- لایه دوم: هر گره در این لایه، یک گره ثابت با نماد  $\Pi$  می باشد به طوری که خروجی محصول همه سیگنال های وارد شونده است:

$$O_{2,i} = w_i = \mu_{A_i}(x)\mu_{B_i}(y), \quad i = 1, 2. \quad (۶۴.۳)$$

هر گره خروجی وزن هر قاعده را نمایش می دهد. به طور کلی هر  $t$  - نرم دیگری که عملیات AND فازی را انجام می دهد می تواند به عنوان تابع گره در این لایه استفاده شود.

- لایه سوم: هر گره در این لایه، یک گره ثابت با نماد  $N$  می باشد.  $i$  - مین گره سهم وزن  $i$  - مین قاعده را نسبت به مجموع وزن تمام قاعده ها محاسبه می کند:

$$O_{3,i} = \bar{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2}, \quad i = 1, 2. \quad (۶۵.۳)$$

به منظور سادگی، خروجی های این لایه وزن های نرمال شده نامیده می شوند.

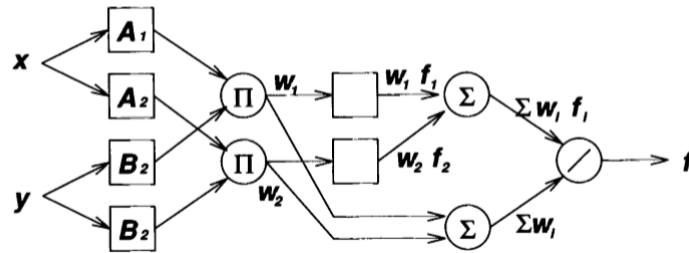
- لایه چهارم: هر گره  $i$  در این لایه، یک گره تطبیقی با تابع گره

$$O_{4,i} = \bar{w}_i f_i = \bar{w}_i(p_i x + q_i y + r_i) \quad (۶۶.۳)$$

می باشد. به طوری که  $\bar{w}_i$ ، یک وزن نرمال شده از لایه سوم و  $p_i, q_i, r_i$  مجموعه پارامترهای این گره می باشند. پارامترها در این لایه، پارامترهای نتیجه نامیده می شوند.

- لایه پنجم: تنها گره در این لایه، یک گره ثابت با نماد  $\Sigma$  می باشد که خروجی کل را به عنوان مجموع همه سیگنال‌های واردشونده به صورت زیر محاسبه می کند:

$$\text{خروجی کل} = O_{\Delta,i} = \sum_i \bar{w}_i f_i = \frac{\sum_i w_i f_i}{\sum_i w_i} \quad (۶۷.۳)$$



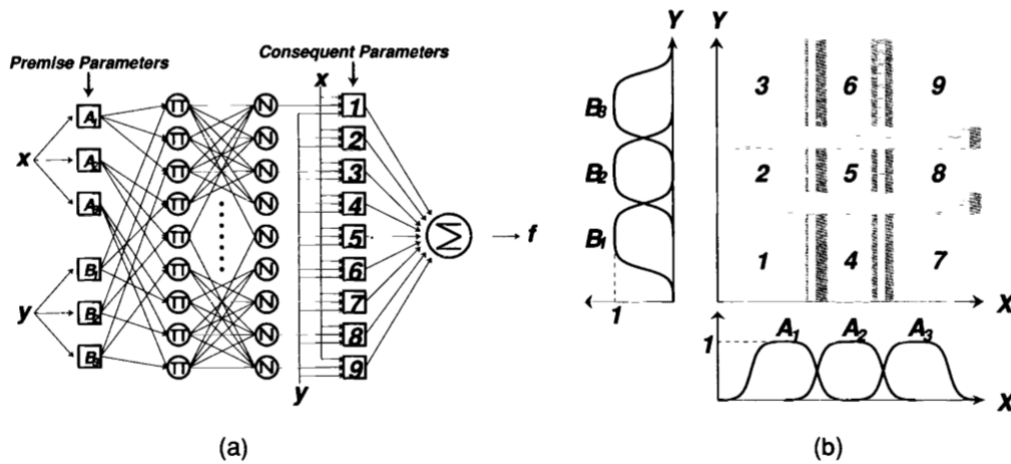
شکل ۱۱.۳: ساختار انفیس برای مدل فازی سوگنو که وزن‌های نرمال سازی شده در آخر هر لایه نمایش داده شده‌اند.

بنابراین یک شبکه تطبیقی ساختاریافته که از لحاظ کارایی معادل با یک مدل فازی سوگنو خواهد بود، را دارا هستیم. یادآور می شویم که ساختار شبکه تطبیقی منحصر به فرد نیست؛ می توانیم با ترکیب لایه های ۳ و ۴ یک شبکه تطبیقی معادل تنها با ۴ لایه را بدست آوریم.

برای سیستم استنتاج فازی ممدانی با ترکیب  $max-min$ ، انفیس متناظر در صورتی که تقریب‌های گسسته جایگزین انتگرال‌ها در نافازی سازی از نوع مرکز ثقل<sup>۲۹</sup> شوند، می تواند ساخته شود. ساختار انفیس ممدانی با ترکیب  $max-min$  پیچیدگی زیادی در ساختار و محاسبات دارد که این پیچیدگی لزوماً دلالت بر قدرت بالای تقریب یا بهتر بودن الگوریتم ندارد. در صورتی که با اتخاذ ترکیب  $sum-product$  و نافازی سازی از نوع مرکز ثقل برای یک مدل ممدانی، می توانیم انفیس متناظر را به آسانی و بدون هیچ تقریبی به دست آوریم. در این بخش ساختار انفیس متناظر با مدل فازی سوگنو را به دلیل شفافیت و کارایی بیشتر شرح می دهیم.

در قسمت (a) شکل ۱۲.۳ ساختار انفیس متناظر با مدل فازی سوگنو که شامل دو ورودی و یک خروجی و نه قاعده می باشد و نیز فرض شده که هر ورودی سه تابع عضویت دارد، نمایش داده شده است. قسمت (b) همین شکل نشان می دهد که چگونه فضای دو بعدی ورودی در ۹ ناحیه فازی دارای اشتراک که هر یک توسط یک قاعده اگر- آن گاه فازی معین می شوند، تقسیم بندی شده است. به عبارت دیگر، بخش فرض یک قاعده، یک ناحیه فازی را تعریف می کند درحالی که بخش نتیجه، خروجی را در ناحیه معین می کند.

<sup>۲۹</sup>Centroid



شکل ۱۲.۳: (a): ساختار انفیس متناظر با یک مدل فازی سوگنو که شامل دو ورودی و یک خروجی و نه قاعده می‌باشد و نیز فرض شده که هر ورودی سه تابع عضویت دارد. (b): فضای ورودی تقسیم‌بندی شده در ۹ ناحیه فازی

### ۱.۷.۳ الگوریتم آموزش ترکیبی

در این بخش شرح خواهیم داد که چگونه الگوریتم آموزش ترکیبی<sup>۳۰</sup> را برای تعیین کردن پارامترهای انفیس بکار می‌بریم. از ساختار انفیس در شکل ۱۱.۳ مشاهده می‌کنیم زمانی که مقادیر پارامترهای فرض ثابت هستند، خروجی کل می‌تواند به صورت یک ترکیب خطی از پارامترهای نتیجه بیان شود. لذا خروجی  $f$  در شکل ۱۱.۳، به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{w_1}{w_1 + w_2} f_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2} f_2 \\
 &= \bar{w}_1(p_1x + q_1y + r_1) + \bar{w}_2(p_2x + q_2y + r_2) \\
 &= (\bar{w}_1x)p_1 + (\bar{w}_1y)q_1 + (\bar{w}_1)r_1 + (\bar{w}_2x)p_2 + (\bar{w}_2y)q_2 + (\bar{w}_2)r_2,
 \end{aligned}
 \tag{۶۸.۳}$$

از این رو

$$S = \text{مجموعه همه پارامترها}$$

$$S_1 = \text{مجموعه پارامترهای فرض ( غیرخطی )}$$

$$S_2 = \text{مجموعه پارامترهای نتیجه ( خطی )}$$

را در رابطه (۵۶.۳) خواهیم داشت و  $H(\cdot)$  و  $F(\cdot, \cdot)$  به ترتیب تابع شناسایی و تابع سیستم استنتاج فازی در معادله (۵۷.۳) هستند. بنابراین الگوریتم آموزش ترکیبی که در بخش ۲.۵.۳ بررسی شد می‌تواند به درستی بکار برده شود. در مسیر پیشرو از الگوریتم آموزش ترکیبی، خروجی‌های گره تا زمانی که لایه ۴ و پارامترهای نتیجه توسط روش کمترین مربعات تعیین شوند، به پیش می‌روند. در مسیر پسرو، گسترش خطای سیگنال‌ها رو به عقب (از خروجی به ورودی) خواهد بود و پارامترهای فرض، توسط گرادیان کاهش تغییر می‌کنند (بهنگام می‌شوند). جدول زیر عملکرد در هر مسیر را خلاصه می‌کند.

<sup>۳۰</sup>Hybrid Learning Algorithm

مسیر پیشرو	مسیر پسرو	
پارامترهای فرض	ثابت	گرادیان کاهشی
پارامترهای نتیجه	تخمین گر کمترین مربعات	ثابت
سیگنال‌ها	خروجی‌های گره	سیگنال‌های خطا

به‌عنوان یادآوری پارامترهای نتیجه به صورت بهینه تعیین می‌شوند با این شرط که پارامترهای فرض ثابت باشند.

به‌طور کلی چندین روش برای ترکیب گرادیان کاهشی و روش کمترین مربعات وجود دارد. ما می‌توانیم یکی از این روش‌ها را مطابق با منابع محاسباتی در دسترس و نیاز سطح عملکرد انتخاب کنیم. از آنجایی که توابع عضویت یک متغیر زبانی و توصیف ذهنی از مفاهیم مبهم را انتقال می‌دهند، در انفیس از نوع سوگنو، عملکرد آموزش نباید برای تعیین توابع عضویت به کار برده شود [۲۱]. این عملکرد یک بررسی وضعیت مورد به مورد می‌باشد و تصمیم باید به شخص بررسی کننده واگذار شود. در حالت کلی اگر اندازه مجموعه داده‌های ورودی - خروجی بزرگ است آن‌گاه دقیق سازی توابع عضویت پیشنهاد می‌شود و حتی ضروری به‌نظر می‌رسد. تعیین توابع عضویت توسط انسان در طول تولید خروجی‌های مطلوب به‌ندرت بهینه است و اگر مجموعه داده خیلی کوچک باشد، آن‌گاه شاید انفیس اطلاعات کافی در مورد سیستم هدف را دارا نباشد. در این موقعیت، تعیین توابع عضویت توسط انسان اطلاعات مهمی را که ممکن است در مجموعه داده منعکس نشده باشد، بیان می‌کند. بنابراین توابع عضویت باید در طول فرآیند آموزش ثابت باشند. اگر توابع عضویت ثابت باشند و فقط بخش نتیجه قابل تغییر و تنظیم باشد، انفیس سوگنو می‌تواند به‌عنوان یک شبکه ارتباط کارآمد مطرح شود [۲۹] و [۱۹].

### ۸.۳ طراحی سیستم‌های استنتاج فازی با استفاده از داده در محیط انفیس مبتنی بر خوشه‌بندی

هدف اصلی مدل‌سازی سیستم ایجاد یک نگاشت ورودی و خروجی که به‌عنوان یک نماینده به‌خوبی رفتار سیستم را توصیف کند، می‌باشد. این کار با استفاده از داده‌های ورودی - خروجی در دسترس بر اساس دانش فیزیکی و تجربی در مورد ساختار سیستم‌های ناشناخته انجام می‌شود [۱۸]. در این راستا نیاز به داده‌کاوی خواهیم داشت. خوشه‌بندی<sup>۳۱</sup> یکی از وظایف اصلی داده‌کاوی است [۲۰]. خوشه‌بندی روشی است که می‌تواند برای تعیین درجه توابع عضویت ورودی از یک مجموعه داده معین مورد استفاده قرار گیرد. در واقع خوشه‌بندی فرآیندی است که یک گروه مناسب از یک مجموعه داده‌ها را می‌یابد؛ به‌طوری‌که الگوهای<sup>۳۲</sup> موجود در داده‌ها می‌توانند، یک نماینده کوچک از رفتار داده‌های مشابه با یک گروه که دارای ویژگی‌های یکسان هستند، را در اختیار ما قرار دهند. خوشه‌های متفاوت دارای ویژگی‌های یکسان نیستند [۲۶]. در طول سالیان گذشته، بسیاری از روش‌ها برای الگوهای خوشه‌بندی توسعه یافته‌اند. به‌عنوان مثال بخش‌بندی شبکه‌ای<sup>۳۳</sup>، الگوریتم‌های مورد استفاده در حالت دسته‌ای

<sup>۳۱</sup>Clustering

<sup>۳۲</sup>Patterns

<sup>۳۳</sup>Grid Partitioning

مانند میانگین مراکز فازی  $^{34}$  ( $FCM$ ) و خوشه‌بندی کاهشی  $^{35}$  [۲۰]. روش بخش‌بندی شبکه‌ای برای سازماندهی و دسته‌بندی داده‌ها استفاده می‌شود. نتیجه یک بخش یا پارتیشن متشکل از داده‌ها در غالب گروه‌های همگن است. بخش‌بندی فضا از بخش‌بندی داده‌ها مشتق شده و یک قاعده در ارتباط با هر خوشه  $^{36}$  وجود دارد. یک مجموعه فازی با قواعد از پیش مشخص شده و قواعد با استفاده از روش‌های خوشه‌بندی مشخص می‌شوند [۱۵]. هر یک از این روش‌ها در یک انفیس می‌توانند در ایجاد سیستم فازی سوگنو اولیه مورد استفاده قرار گیرند. برای هر یک از این الگوریتم‌ها یک برنامه و دستور خاص در نرم‌افزار MATLAB در نظر گرفته شده است؛ که در ادامه مورد بحث قرار خواهند گرفت. در این پایان‌نامه ما برای ایجاد سیستم استنتاج فازی اولیه از سه روش استفاده کرده‌ایم:

۱. ساختن سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه با استفاده از مطالب مطرح شده در فصل ۱ و نوشتن برنامه مرتب با آن در نرم‌افزار MATLAB.
  ۲. ساختن سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه با استفاده از روش میانگین مراکز فازی یا  $FCM$ .
  ۳. ساختن سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه با استفاده از روش خوشه‌بندی کاهشی.
- در این بخش به تشریح روش‌های  $FCM$  و خوشه‌بندی کاهشی می‌پردازیم و در فصل ۴ روش اول را به طور مفصل تشریح خواهیم کرد.

### ۱.۸.۳ میانگین مراکز فازی

روش میانگین مراکز فازی یا همان  $FCM$  توسط ژوزف دان  $^{37}$  در سال ۱۹۷۳ میلادی معرفی شده است [۱۳]. به دلیل متداول بودن استفاده از مخفف  $FCM$  این روش را در این پایان‌نامه به همین نام مورد بررسی قرار می‌دهیم.  $FCM$  اغلب برای تعیین توابع عضویت اولیه (چن  $^{38}$  و وانگ  $^{39}$ ، ۱۹۹۹؛ چن و لیکنز  $^{40}$ ، ۲۰۰۴؛ جاننر  $^{41}$ ، ۱۹۹۸) استفاده می‌شود. در اغلب موارد یک خوشه توسط یک مرکز خوشه یا یک مرکز ثقل، که پس از آن به منظور تشکیل توابع عضویت استفاده خواهد شد، نمایش داده می‌شود.  $FCM$  یک روش خوشه‌بندی است که اجازه می‌دهد یک قسمت از داده به‌طور همزمان به چندین خوشه با درجات عضویت مختلفی، تعلق داشته باشد [۲۶]. یک سیستم با  $p$  ورودی به صورت  $u \in U \subset R^p$  و یک خروجی به صورت  $y \in Y \subset R$  را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم مدل فازی سوگنو متناظر با این سیستم  $n$  قاعده دارد.  $i$  امین قاعده از آن به صورت:

<sup>34</sup>Fuzzy C - Means (FCM)

<sup>35</sup>Subtractive Clustering

<sup>36</sup>Cluster

<sup>37</sup>Joseph C Dunn

<sup>38</sup>Chen

<sup>39</sup>Wang

<sup>40</sup>Likens

<sup>41</sup>Jantzen

اگر  $x_1, A_1^i$  و  $\dots$  و  $x_m, A_m^i$  باشد آن‌گاه

$$y^i(k) = p_0^i + p_1^i x_1 + p_2^i x_2 + \dots + p_m^i x_m = p_0^i + \sum_{j=1}^m p_j^i x_j \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (69.3)$$

است که در آن مجموعه فازی  $A_j^i$  امین متغیر ورودی بخش فرض  $i$  امین قاعده فازی،  $y^i$  متغیر خروجی  $i$  امین قاعده،  $x(k) = [x_1, x_2, \dots, x_m]$  بردار متغیرهای ورودی و  $p_j^i$  پارامترهای نتیجه هستند. خروجی نهایی مدل سوگنو می‌تواند با یک میانگین وزنی نافازی شده به صورت زیر بیان شود:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n \mu^i y^i}{\sum_{i=1}^n \mu^i}, \quad (70.3)$$

که در آن  $n$  برابر با تعداد قواعد فازی و  $y^i$  متغیر خروجی  $i$  امین قاعده می‌باشند.  $\mu^i$  برابر با وزن  $i$  امین قاعده است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu^i(x) = \prod_{j=1}^m \mu_{A_j^i}(x_j) \quad (71.3)$$

و در این رابطه  $\prod$  عملگر فازی است که معمولاً با عمل  $\min$  یا ضرب انجام می‌شود.  $\mu_{A_j^i}(x_j)$  درجه توابع عضویت است. با در نظر گرفتن نماد  $\beta_i = \frac{\mu^i}{\sum_{i=1}^n \mu^i}$  اکنون برآورد خروجی می‌تواند برای  $i = 1, 2, \dots, n$  به‌طور کلی بیان شود:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n \mu^i y^i}{\sum_{i=1}^n \mu^i} = \sum_{i=1}^n \beta_i y^i = \sum_{i=1}^n \beta_i (p_0^i + p_1^i x_1 + p_2^i x_2 + \dots + p_m^i x_m). \quad (72.3)$$

با فرض مشخص شدن ساختار، قصد داریم متغیرهای ورودی خاص و بخش فضای ورودی را به درستی تعیین کنیم. خوشه‌ها با استفاده از الگوریتم خوشه بندی  $FCM$  تعیین می‌شوند. تابع هدف  $FCM$  با رابطه زیر تعریف می‌شود که این روش بر اساس  $\min$  کردن این تابع هدف می‌باشد.

$$J_b(U, Z) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m \|x_k - z_i\|^2 \quad (73.3)$$

در رابطه بالا

- $x_k$  دلالت بر نقاط در فضای داده‌ها دارد.
- $N$  دلالت بر تعداد نقاط داده‌ها دارد.
- $Z = z_1, z_2, \dots, z_N$  مجموعه مراکز خوشه‌ها است.
- $\|x_k - z_i\|$  فاصله اقلیدسی بین  $x_k$  و  $z_i$  است.



- $c$  برابر با تعداد قواعد فازی است.
- $\mu_{ik} \in [0, 1]$  درجه عضویت فازی  $k$  امین زوج داده وابسته به  $i$  امین زیر مجموعه فازی است.
- $m$  شاخص فازی می‌باشد.
- فرض می‌کنیم که رابطه زیر برقرار است:

$$\sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (74.3)$$

الگوریتم  $FCM$  برای خوشه‌بندی در  $n$  بعد، بردارهای  $CM$ <sup>۴۲</sup> را ایجاد می‌کند که  $c$  کلاس از داده‌ها را ارائه می‌کند. مسئله یافتن خوشه‌های فازی در مجموعه داده‌ها با استفاده از الگوریتم  $FCM$ ، در حال حاضر به‌عنوان یک مسئله بهینه‌سازی محدود با به حداقل رساندن تابع در معادله (۷۳.۳) در دامنه مجموعه داده‌ها و با در نظر گرفتن محدودیت در معادله (۷۴.۳)، حل شده است. مراحل اصلی برای شناسایی مدل فازی سوگنو بر اساس  $FCM$  به شرح زیر است:

۱.  $c, m$  و مراکز خوشه‌بندی اولیه را برای  $k = 1, 2, \dots, N$  و  $i = 1, 2, \dots, c$  معین می‌کنیم. یک ماتریس  $c$  بخشی فازی اولیه  $U = [\mu_{ik}]$ ، که مقادیر عضویت را برای نمایندگان  $i$  امین خوشه نشان می‌دهد؛ تنظیم می‌کنیم.
۲. معادله زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$z_i = \frac{\sum_{k=1}^N z_k (\mu_{ik})^m}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m}, \quad i = 1, 2, \dots, c. \quad (75.3)$$

۳.  $U$  را به‌نگام می‌کنیم تا رابطه زیر را مشخص کنیم:

$$\mu_{ik} = \left[ \sum_{j=1}^c \left( \frac{x_k - z_i}{x_k - z_j} \right)^{\frac{2}{m-1}} \right]^{-1}. \quad (76.3)$$

۴. برای خاتمه الگوریتم روابط را بررسی می‌کنیم. اگر

$$\|U_k - U_{k-1}\| < \varepsilon, \quad (77.3)$$

الگوریتم را متوقف می‌کنیم در غیر این صورت  $k = k + 1$  قرار می‌دهیم و به گام ۲ باز می‌گردیم.

۵. پارامترهای نتیجه را با استفاده از روش کمترین مربعات خطی شناسایی می‌کنیم. معادله (۷۲.۳) را در شکل برداری زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = \phi\theta \quad (78.3)$$

که

$$\phi = [\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_1 x_1, \dots, \beta_1 x_1, \dots, \beta_n x_m, \dots, \beta_n x_m]$$

و

$$\theta = [p_1^1, \dots, p_m^1, p_1^2, \dots, p_m^2, p_1^n, \dots, p_m^n]^T$$

بر پارامترهای نتیجه دلالت دارد. با توجه به مسئله کمترین مربعات

$$\theta = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y \quad (79.3)$$

را داریم. با اجرای الگوریتم‌های تکراری پارامترهای  $\theta$  محاسبه می‌شوند.

### ۲.۸.۳ خوشه‌بندی کاهشی

خوشه‌بندی کاهشی<sup>۴۳</sup> روشی است که می‌تواند برای تعریف توابع عضویت و همچنین ایجاد قواعد به‌صورت خودکار، مورد استفاده قرار گیرد (چیو<sup>۴۴</sup>، ۱۹۹۷). الگوریتم کاهشی بر اساس اندازه تراکم نقاط داده می‌باشد که در آن یک نقطه داده با تعداد زیادی همسایه، پتانسیل مرکز خوشه شدن را دارد [۲۶]. روش خوشه‌بندی تعداد خوشه‌ها و آن مراکزها را جستجو می‌کند و با ایجاد یک تعداد از خوشه‌ها در ابعاد فضای ورودی شروع می‌شود. هدف این روش گروه‌بندی داده‌ها با استفاده از یک سنجش تشابه می‌باشد. فرض می‌شود هر نقطه داده یک مرکز خوشه بالقوه است و یک اندازه از احتمالی را که هر نقطه داده یک مرکز خوشه را بر اساس تراکم اطراف نقاط داده تعریف می‌کند؛ محاسبه می‌کنیم. هر نقطه از بردار ورودی  $[x_1, x_2, \dots, x_N]$  به‌عنوان یک مرکز خوشه بالقوه در نظر گرفته می‌شود. اندازه تراکم در یک نقطه داده  $x_i$  با رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$D_i = \sum_{j=1}^N \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{(r_a)^2}\right), \quad (80.3)$$

که در این رابطه  $N$  مجموع تعداد نقاط داده،  $[x_1, x_2, \dots, x_N]$  نقاط داده،  $r_a \in [0, \infty)$  یک ثابت مثبت و محدوده همسایگی شعاع قابل اندازه‌گیری خوشه‌ای در فضای داده‌هاست.  $r_a$  تاثیر زیادی بر تعداد خوشه‌های ایجاد شده دارد. بنابراین پتانسیل وابسته با هر خوشه که بستگی به فاصله آن تا همه نقاط دارد، منجر به خوشه با پتانسیل بالا که در آن همسایگی متراکم است، می‌شود. مقدار تراکم  $i$  امین نقطه داده می‌تواند مقداری بزرگ باشد اگر تعدادی نقطه داده همسایه داشته باشد و فاصله بین نقطه داده‌ها و موقعیت آن ( $i$  امین نقطه داده) کوچک باشد. نخستین مرکز خوشه  $x_{c1}$  است که بزرگترین مقدار تراکم  $D_{c1}$  را دارد. برای دومین و سایر مراکز خوشه، نتیجه نخستین خوشه مرکزی در تعیین مقادیر چگالی جدید به‌نگام می‌شود، داریم:

$$D_i = D_i - D_{ci} \sum_{j=1}^N \exp\left(-\frac{\|x_i - x_{c1}\|^2}{(r_b)^2}\right) \quad (81.3)$$

<sup>۴۳</sup>Subtractive clustering

<sup>۴۴</sup>Chiu

که  $r_b = ۱/۵r_a$  و  $r_b \in [۰, \infty)$  است. اندازه چگالی نقاط داده‌ای که نزدیک اولین مرکز خوشه  $x_{c1}$  هستند، به شدت کاهش خواهد یافت و احتمالاً برای این نقاط درصد انتخاب شدن به عنوان خوشه بعدی پایین خواهد بود. این رویه انتخاب مراکز و کاهش پتانسیل تا زمانی که معیار توقف برقرار شود، مکرراً انجام خواهد گرفت [۲۵].



## فصل ۴

# ارزیابی متاستاز سرطان پستان با استفاده از روش‌های ممدانی، سوگنو و انفیس

### ۱.۴ مقدمه

در پزشکی فشارخون  $70 \text{ mmHg}$  به‌عنوان فشار خون پایین در نظر گرفته می‌شود، حال اگر تغییر کوچکی در آن رخ دهد مثلاً  $71 \text{ mmHg}$  باز هم عنوان کم را برای این فشار خون در نظر می‌گیریم. با استفاده از چنین استنتاجی به نظر می‌رسد همه فشار خون‌های بالای  $70 \text{ mmHg}$  کم در نظر گرفته می‌شوند در صورتی که چنین چیزی امکان ندارد که به تناقض می‌رسیم. حال اگر این چنین در نظر بگیریم که گرچه فشار خون  $71 \text{ mmHg}$  کم است اما به کمی  $70 \text{ mmHg}$  نیست؛ این مسئله مفهوم فازی بودن را می‌رساند. یعنی برای عضویت این مقدار در مجموعه فشار خون کم مقدار عضویت داشته باشیم. از آنجا که فاکتورهای مختلف همواره در تشخیص‌های پزشکی دخیل هستند و حد و مرز مشخصی ندارند و نیز میزان مداخله شان در هر لحظه معلوم نیستند، برای برخی بیماران کمتر و برای برخی بیشتر هستند و در پزشکی بیشتر مفاهیم به این صورت تعریف می‌شوند مانند فشار خون بالا یا پایین، دمای بدن بالا یا پایین و ...، وقتی می‌خواهیم قوانین پزشکی را در یک پایگاه دانش قرار دهیم و سپس با استفاده از موتور استنتاج و با استفاده از ورودی‌ها نتیجه‌ای بگیریم چون این مفاهیم حاصل از بدن انسان و در ذهن پزشک می‌بهم، و یا به عبارت بهتر فازی هستند بر آن می‌آییم که از منطق فازی در استنتاج و به‌دست آوردن نتیجه بهره ببریم. فرض ما بر این است که این استفاده نتایج بهتری را برای ما رقم می‌زند. استفاده از منطق فازی در مسائل پزشکی خصوصاً سرطان پستان به شکل‌های مختلفی صورت

گرفته است از آن جمله می‌توان به مدل یکپارچه ارزیابی و مدیریت احتمال سرطان پستان بر اساس یک نقشه فازی شناختی، سیستم تشخیص به کمک کامپیوتر بر اساس منطق فازی برای طبقه بندی سرطان پستان، انتخاب منطق فازی به‌عنوان یک ابزار قابل اطمینان جدید برای تشخیص اثر مرحله مولکولی در سرطان پستان اشاره کرد.

در فصل‌های پیشین به تفصیل منطق فازی، سیستم‌های استنتاج فازی شامل مدل ممدانی و سوگنو، انفیس و نیز سرطان پستان مورد بحث و بررسی قرار گرفتند. در این فصل هدف ما استفاده از روش‌های مختلف بر مبنای منطق فازی جهت پیش‌بینی متاستاز سرطان پستان می‌باشد. ما از دو مدل سیستم استنتاج فازی ممدانی و سوگنو و مدل سیستم‌های عصبی - فازی تطبیقی (انفیس) با استفاده از سه روش خوشه‌بندی کاهشی، خوشه‌بندی  $FCM$  و روشی مبتنی بر مباحث مطرح شده در فصل ۱، برای ایجاد ساختار سیستم استنتاج فازی اولیه با استفاده از داده‌ها، جهت پیش‌بینی متاستاز سرطان پستان در مرحله‌های اولیه (مراحل ۰، ۱، و ۲c، ۲b، ۲a) بهره خواهیم برد.

## ۲.۴ مجموعه داده‌ها، پیش پردازش و تعیین توابع عضویت

پایگاه داده‌ها در این مدل‌سازی‌ها از مرکز تحقیقات سرطان پستان جهاد دانشگاهی تهران و دانشگاه علوم پزشکی مشهد دریافت شده‌اند. در ابتدا یک پایگاه داده مربوط به ۳۰۳۷ بیمار که شامل متغیرهای سن تشخیص بیماری<sup>۱</sup>، سن نخستین قاعدگی<sup>۲</sup>، سن یائسگی<sup>۳</sup>، میزان تحصیلات<sup>۴</sup>، وضعیت تاهل<sup>۵</sup>، تعداد بارداری<sup>۶</sup>، مدت زمان (میزان) شیردهی<sup>۷</sup>، سن نخستین بارداری<sup>۸</sup>، درمان ناباروری<sup>۹</sup>، وضعیت باروری<sup>۱۰</sup>، طول مدت استفاده از داروهای پیش‌گیری از بارداری<sup>۱۱</sup>، طول مدت هرمون درمانی جایگزین<sup>۱۲</sup>، وضعیت استعمال دخانیات (سیگاری یا غیر سیگاری)، سابقه شخصی ابتلا به سرطان پستان<sup>۱۳</sup>، سابقه خانوادگی ابتلا به سرطان پستان<sup>۱۴</sup>، سن درگیری با سرطان پستان<sup>۱۵</sup>، وزن<sup>۱۶</sup>، قد<sup>۱۷</sup> (در مورد قد و وزن شاخص توده بدنی<sup>۱۸</sup> با رابطه  $BMI = \frac{وزن}{قد^2}$  را به‌عنوان ترکیبی از این دو متغیر،

<sup>۱</sup> Age at diagnose

<sup>۲</sup> Age of menarce

<sup>۳</sup> Age of menopause

<sup>۴</sup> Education

<sup>۵</sup> marital

<sup>۶</sup> Gravity

<sup>۷</sup> Lactation duration

<sup>۸</sup> Age at first pregnancy

<sup>۹</sup> Infertility treatment

<sup>۱۰</sup> Reproductive states

<sup>۱۱</sup> Ocpuse

<sup>۱۲</sup> Duration of HRT use

<sup>۱۳</sup> personal history of breast cancer

<sup>۱۴</sup> Family history of breast cancer

<sup>۱۵</sup> age of involved with breast cancer

<sup>۱۶</sup> Weight

<sup>۱۷</sup> height

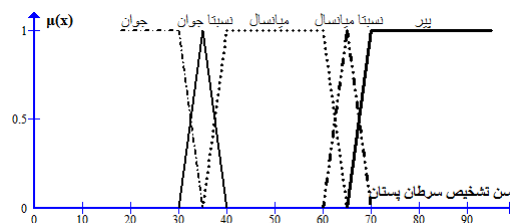
<sup>۱۸</sup> BMI

جایگزین می‌کنیم)، داشتن یا نداشتن وقایع پر استرس در زندگی مانند مرگ پدر، مرگ مادر، مرگ همسر، مرگ فرزند، طلاق<sup>۱۹</sup>، مرحله بیماری سرطان (شامل ۹ مرحله ۰، ۱، ۲c، ۲b، ۲a، ۳c، ۳b، ۳a، ۴) <sup>۲۰</sup>، گرید تومور یا مرحله سرعت و قدرت رشد تومور (G) <sup>۲۱</sup> بودند؛ به‌عنوان داده‌های خام مورد بررسی قرار گرفتند. در این بررسی‌ها ضمن توجه به عوامل خطر در سرطان پستان و با نظر افراد خبره و پزشکان حاضر در پژوهشکده سرطان پستان جهاد دانشگاهی، متغیرهایی که تاثیر آن‌ها در ابتلا به سرطان پستان و نیز متاستاز سرطان پستان هنوز مشخص نشده‌اند و یا متغیرهای فاقد ارزش، از بین متغیرهای موجود حذف گردیدند. این متغیرها شامل سن نخستین قاعدگی، میزان تحصیلات، وضعیت تاهل، سن نخستین بارداری، درمان ناباروری، وضعیت باروری، طول مدت هرمون درمانی جایگزین، وضعیت استعمال دخانیات و سن درگیری با سرطان پستان می‌باشند. در همه مدل‌های فازی که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفته‌اند، متغیر مرحله بیماری سرطان (شامل ۹ مرحله ۰، ۱، ۲c، ۲b، ۲a، ۳c، ۳b، ۳a، ۴) به‌عنوان متغیر خروجی در نظر گرفته شده است. از آن‌جا که وقوع متاستاز در مراحل ۳ به بعد یعنی ۳c، ۳b، ۳a و ۴ قطعی است، بنابراین ما این مراحل را به‌عنوان مراحل که در آن‌ها بیمار دچار متاستاز شده است، در نظر می‌گیریم. در این پایان‌نامه قرارداد می‌کنیم که مقادیر ۲/۵، ۲/۳، ۲، ۳/۳، ۳ و ۳/۵ را به‌ترتیب برای ۲c، ۲b، ۲a، ۳c و ۳a در نظر بگیریم. هر یک از متغیرهای باقی‌مانده از آن‌جایی که طبق (۸.۱) متغیرهای زبانی به‌شمار می‌آیند، لذا نیازمند توابع عضویتی هستند که مقادیر آن‌ها را مشخص کنند. این توابع عضویت با توجه به واقعیت‌های علوم زیستی و پزشکی و نظر پزشک متخصص و با استفاده از قوانین فازی، برای متغیرهای مورد استفاده در مدل‌های این پایان‌نامه به‌صورت زیر تعیین می‌شوند. یادآور می‌شویم که در این انتخاب توابع فازی ساز مثلی و دوزنقه‌ای با دامنه‌های تعریف متفاوت، استفاده شده‌اند. علت انتخاب این فازی‌سازها، اطلاعات پزشکی بودند که در رابطه با هر متغیر وجود داشتند.

<sup>۱۹</sup>Lifeevent<sup>۲۰</sup>Stage<sup>۲۱</sup>Grade

• توابع عضویت سن تشخیص بیماری سرطان پستان

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mu_{\text{جوان}}(x) = \begin{cases} 1, & 18 \leq x \leq 30 \\ -\frac{x-35}{5}, & 30 \leq x \leq 35 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{\text{نسبتا جوان}}(x) = \begin{cases} \frac{x-30}{5}, & 30 \leq x \leq 35 \\ -\frac{x-40}{5}, & 35 \leq x \leq 40 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{\text{میانسال}}(x) = \begin{cases} \frac{x-35}{5}, & 35 \leq x \leq 40 \\ 1, & 40 \leq x \leq 60 \\ -\frac{x-65}{5}, & 60 \leq x \leq 65 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{\text{نسبتا میانسال}}(x) = \begin{cases} \frac{x-60}{5}, & 60 \leq x \leq 65 \\ -\frac{x-70}{5}, & 65 \leq x \leq 70 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{\text{پیر}}(x) = \begin{cases} \frac{x-65}{5}, & 65 \leq x \leq 70 \\ 1, & 70 \leq x \leq 100 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases}
 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

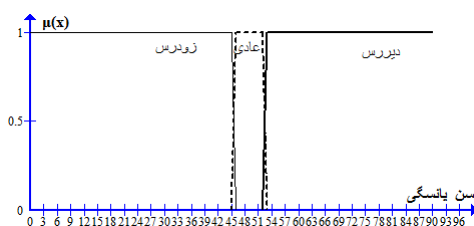


شکل ۱.۴: توابع عضویت سن تشخیص بیماری سرطان پستان



• توابع عضویت سن یائسگی

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{زودرس}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 45 \\ -(x - 46), & 45 \leq x \leq 46 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\ \mu_{\text{عادی}}(x) = \begin{cases} x - 45, & 45 \leq x \leq 46 \\ 1, & 46 \leq x \leq 52 \\ -(x - 53), & 52 \leq x \leq 53 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\ \mu_{\text{دیررس}}(x) = \begin{cases} (x - 52), & 52 \leq x \leq 53 \\ 1, & 53 \leq x \leq 90 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

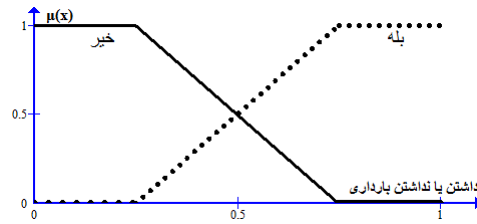


شکل ۲.۴: توابع عضویت سن یائسگی

در رابطه با متغیر تعداد بارداری‌ها، از آن جایی که اطلاعات دریافتی از بیماران به صورت داشتن یا نداشتن بارداری بودند، لذا متغیر داشتن یا نداشتن بارداری با توابع عضویت زیر راجایگزین آن می‌کنیم.

• داشتن یا نداشتن بارداری

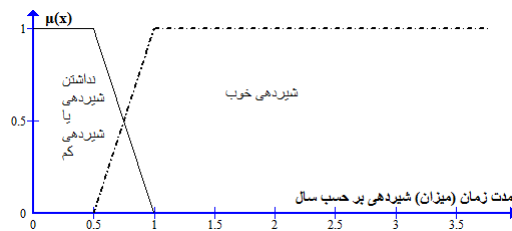
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{نداشتن بارداری}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ -\frac{x-0.75}{0.5}, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 0, & 0.75 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\ \mu_{\text{داشتن بارداری}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ \frac{x-0.25}{0.5}, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 1, & 0.75 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.4)$$



شکل ۳.۴: داشتن یا نداشتن بارداری

• توابع عضویت مدت زمان شیردهی بر حسب ماه

$$\begin{cases} \mu_{\text{مدت شیردهی کم}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 6 \\ -\frac{x-12}{6}, & 6 \leq x \leq 12 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\ \mu_{\text{مدت شیردهی خوب}}(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{6}, & 6 \leq x \leq 12 \\ 1, & 12 \leq x \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \end{cases} \quad (4.4)$$

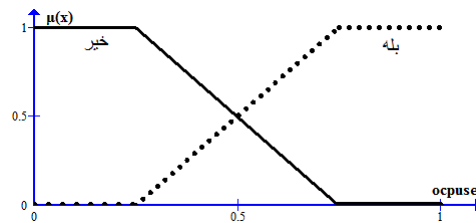


شکل ۴.۴: توابع عضویت مدت زمان (میزان) شیردهی بر حسب ماه

در متغیر طول مدت استفاده از داروهای پیش‌گیری از بارداری از آن جایی که اطلاعات دریافتی از بیماران به صورت مصرف و یا عدم مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری بودند، لذا توابع عضویت آن را به صورت زیر در نظر گرفتیم.

- مصرف و یا عدم مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری

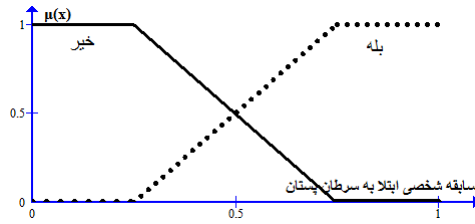
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{عدم مصرف}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ -\frac{x-0.25}{0.5}, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 0, & 0.75 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\ \mu_{\text{مصرف}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ \frac{x-0.25}{0.5}, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 1, & 0.75 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.4)$$



شکل ۵.۴: توابع عضویت استفاده از داروهای پیش‌گیری از بارداری

- سابقه شخصی ابتلا به سرطان پستان

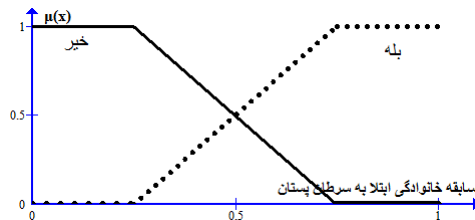
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{نداشتن سابقه}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ -\frac{x-0.25}{0.5}, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 0, & 0.75 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\ \mu_{\text{داشتن سابقه}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ \frac{x-0.25}{0.5}, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 1, & 0.75 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \end{array} \right. \quad (6.4)$$



شکل ۶.۴: توابع عضویت سابقه شخصی ابتلا به سرطان پستان

● سابقه خانوادگی ابتلا به سرطان پستان

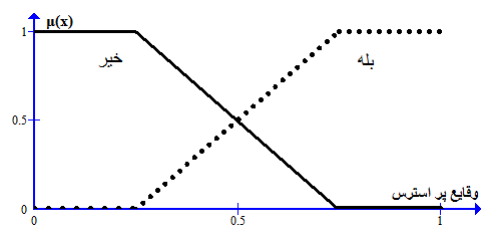
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{نداشتن سابقه}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ -\frac{x-0.25}{0.5}, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 0, & 0.75 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\ \mu_{\text{داشتن سابقه}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ \frac{x-0.25}{0.5}, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 1, & 0.75 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \end{array} \right. \quad (7.4)$$



شکل ۷.۴: توابع عضویت سابقه خانوادگی ابتلا به سرطان پستان

● توابع عضویت وقایع پراسترس در زندگی

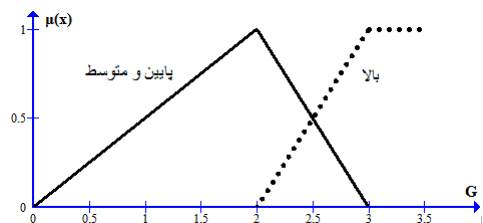
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{نداشتن وقایع پراسترس}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ -\frac{x-0.25}{0.5}, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 0, & 0.75 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\ \mu_{\text{داشتن وقایع پراسترس}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ \frac{x-0.25}{0.5}, & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 1, & 0.75 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \end{array} \right. \quad (8.4)$$



شکل ۸.۴: توابع عضویت وقایع پراسترس در زندگی

- توابع عضویت گرید تومور یا سرعت و قدرت رشد تومور

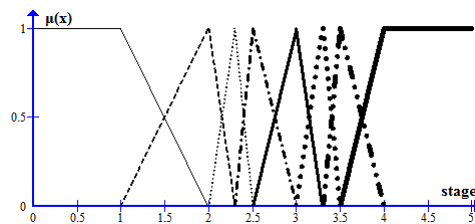
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{گرید پایین و متوسط}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ -(x-3), & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\ \mu_{\text{گرید بالا}}(x) = \begin{cases} x-2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x \leq 2 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \end{array} \right. \quad (9.4)$$



شکل ۹.۴: توابع عضویت گرید تومور یا سرعت و قدرت رشد تومور

• توابع عضویت مراحل بیماری سرطان

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mu_{1 \text{ stage}} \text{ مرحله یا } (x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -(x - 2), & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{2a} \text{ مرحله } (x) = \begin{cases} (x - 1), & 1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{x-2.3}{0.3}, & 2 \leq x \leq 2.3 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{2b} \text{ مرحله } (x) = \begin{cases} \frac{x-2}{0.3}, & 2 \leq x \leq 2.3 \\ -\frac{x-2.5}{0.3}, & 2.3 \leq x \leq 2.5 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{2c} \text{ مرحله } (x) = \begin{cases} \frac{x-2.3}{0.3}, & 2.3 \leq x \leq 2.5 \\ -\frac{x-3}{0.5}, & 2.5 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{3a} \text{ مرحله } (x) = \begin{cases} \frac{x-2.5}{0.5}, & 2.5 \leq x \leq 3 \\ -\frac{x-3.3}{0.3}, & 3 \leq x \leq 3.3 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{3b} \text{ مرحله } (x) = \begin{cases} \frac{x-3}{0.3}, & 3 \leq x \leq 3.3 \\ -\frac{x-3.5}{0.3}, & 3.3 \leq x \leq 3.5 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{3c} \text{ مرحله } (x) = \begin{cases} \frac{x-3.3}{0.3}, & 3.3 \leq x \leq 3.5 \\ -\frac{x-4}{0.5}, & 3.5 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \\
 \mu_{4} \text{ مرحله } (x) = \begin{cases} \frac{x-3.5}{0.5}, & 3.5 \leq x \leq 4 \\ 1, & 4 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases}
 \end{array} \right. \quad (10.4)$$



شکل ۱۰.۴: توابع عضویت مراحل بیماری سرطان

## ۳.۴ مدل سیستم استنتاج فازی ممدانی برای پیش‌بینی متاستاز سرطان پستان

همان‌طور که در (۱.۱۲.۱) به‌صورت خلاصه مشاهده کردیم، برای مدل سیستم استنتاج ممدانی الگوریتم زیر را خواهیم داشت:

۱. انتخاب ورودی‌ها و خروجی‌ها: گام نخست انتخاب ورودی‌ها و خروجی و نیز تعیین توابع عضویت هر یک از آن‌ها می‌باشد. در این پایان‌نامه برای روش ممدانی متغیرهای سن تشخیص بیماری، سن یائسگی، داشتن یا نداشتن بارداری، مصرف و یا عدم مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری، سابقه شخصی ابتلا به سرطان پستان، سابقه خانوادگی ابتلا به سرطان پستان و مرحله سرعت و قدرت رشد تومور به عنوان متغیرهای ورودی و مرحله بیماری سرطان به‌عنوان تنها خروجی در نظر گرفته شده‌اند. دلیل انتخاب این ورودی‌ها بررسی تعدادی قاعده اولیه که با نظر پزشکان متخصص و خبره تعیین شده‌اند و نیز نوع و تعداد داده‌های در دسترس برای بررسی، می‌باشد. این قواعد عبارتند از:

- ایجاد سرطان پستان و یا متاستاز بیشتر بعد از ۱۸ سالگی ممکن است.
- سرطان پستان در ایران در سنین بالای ۳۵ سال شایع‌تر است.
- در ایران بیشترین سرطان بین ۴۵ و ۵۵ سال رخ می‌دهد.
- متاستاز بیشتر بالای ۴۰ سال رخ می‌دهد.
- سن اولین قاعدگی در ایران زیر ۱۰ سال نیست.
- معمولاً سن آغاز یائسگی زیر ۴۳ سال نیست.
- هر چه سن یائسگی بالاتر باشد، احتمال ابتلا به سرطان پستان و ایجاد متاستاز بیشتر است.
- میزان تحصیلات اثری معنی‌دار در ایجاد متاستاز ندارد.
- رابطه متاستاز با وضعیت تاهل هنوز مشخص نیست.
- هرچه تعداد بارداری کمتر باشد، خطر ابتلا به سرطان پستان بالاتر است.

- بارداری صفر خطر بالا در ابتلا به سرطان پستان دارد.
- بارداری همچنین خطر ایجاد متاستاز را هم پایین می‌آورد.
- میزان شیردهی هرچه بیشتر باشد، خطر ابتلا به سرطان پستان کمتر می‌باشد.
- زمان تشخیص سرطان پستان بالاتر باشد، احتمال ایجاد متاستاز بالاتر است.
- تعداد فرزند مثل تعداد بارداری هرچه کمتر (زیر ۲) باشد، احتمال ابتلا بیشتر است.
- وضعیت باروری مثبت احتمال ابتلا به سرطان پستان را کم می‌کند.
- طول مدت مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری اگر تا زیر ۴ سال باشد، احتمال ابتلا به سرطان پستان کم است.
- طول مدت مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری اگر ۴ تا ۷ سال باشد، احتمال ابتلا به سرطان پستان متوسط است.
- طول مدت مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری اگر بالای ۷ سال باشد، احتمال ابتلا به سرطان پستان زیاد است.
- در صورت هورمون درمانی جایگزین احتمال ابتلا زیاد می‌شود.
- ارتباط متاستاز و ابتلا به سرطان پستان با سیگار هنوز مشخص نیست.
- سابقه بیماری سرطان در شخص مبتلا احتمال ایجاد متاستاز را بالا می‌برد.
- سابقه بیماری سرطان، احتمال بروز سرطان پستان را بالا می‌برد.
- سابقه فامیلی سرطان پستان، احتمال ابتلا به سرطان پستان را بالا می‌برد.
- سرعت و قدرت بالای رشد تومور یا گرید بالای تومور احتمال ایجاد متاستاز را بالاتر می‌برد.
- وزن هرچه بیشتر باشد، احتمال ابتلا به سرطان پستان بالاتر است.
- قد هر چه بلندتر باشد، احتمال ابتلا به سرطان پستان کمتر است.
- شاخص توده بدنی بیشتر باشد، احتمال ابتلا به سرطان پستان بالاتر است.
- داشتن وقایع پراسترس در زندگی احتمال ابتلا به سرطان پستان و احتمال ایجاد متاستاز را بالاتر می‌برد.

در این بررسی‌ها مشخص شد که تعدادی از ورودی‌ها رابطه شناخته شده و حتی مستقیمی با ایجاد متاستاز دارند؛ که شامل سن تشخیص بیماری، سن یائسگی، داشتن یا نداشتن بارداری، مصرف و یا عدم مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری، سابقه شخصی ابتلا به سرطان پستان، سابقه خانوادگی ابتلا به سرطان پستان و مرحله سرعت و قدرت رشد تومور می‌شدند. لذا متغیرهای ورودی به صورت ذکر شده در بالا در نظر گرفته شدند. مرحله بیماری سرطان (شامل ۹ مرحله ۰، ۱، ۲c، ۲b، ۲a، ۳c، ۳b، ۳a، ۴) به عنوان متغیر خروجی در نظر گرفته شد.



۲. تعیین پایگاه قواعد اگر - آن‌گاه فازی: مهم‌ترین بخش یک سیستم استنتاج فازی تعیین قواعد اگر - آن‌گاه فازی می‌باشد. این انتخاب قواعد، نقش مهمی در به‌دست آوردن کیفیت مطلوب از نتایج حاصل از سیستم استنتاج فازی دارد [۱۴]. پایگاه قواعد بسته به نوع داده‌ها معمولاً با استفاده از دانش انسانی، مجموعه مشاهدات و یا برخی روش‌های خاص مانند طراحی سیستم با استفاده از جدول ارجاع<sup>۲۲</sup> تعیین می‌شود. در مدل ممدانی مورد بحث، از آن‌جایی که داده‌ها مربوط به بیماران و از جنس داده‌های پزشکی می‌باشند، استفاده از دانش انسانی و بررسی نمونه‌های واقعی در تعیین مجموعه قواعد تاثیرگذار هستند. لذا برای این امر ابتدا از بین ۳۰۳۷ داده و تنها از میان داده‌هایی با خروجی بالای ۳ یعنی ۴، ۳c، ۳b، ۳a، یک پایگاه داده کامل مربوط به ۴۸۲ بیمار استخراج شد (با توجه به مشخص بودن مقدار هر متغیر برای یک بیمار و نیز کامل بودن مجموعه داده‌های مربوط به خروجی برای بیماران). تمامی این داده‌ها دارای مقادیر خروجی و ورودی مشخص بودند؛ تنها در میان بیماران جوان (سن تشخیص بیماری کمتر از ۳۷ سال) به دلیل رخ ندادن یائسگی، مقدار متغیر سن یائسگی با استفاده از میانه یا مد با مقادیر مشخصی جایگزین شد. مسئله نبود مقادیر برخی متغیرها در تمام پایگاه داده‌های مربوط به پزشکی وجود دارد. این فقدان مربوط به عدم دریافت اطلاعات کافی از بیمار و یا رخ ندادن بعضی متغیرها در بیمار مانند سن یائسگی می‌شود. هدف پیش‌بینی متاستاز بیماران در مراحل ۰ تا ۲ با استفاده از اطلاعات بیماران درگیر با متاستاز در مراحل ۳ به بعد می‌باشد، لذا تنها داده‌های بیماران که متاستاز در آن‌ها رخ داده است را به‌عنوان داده‌های اولیه جهت تعیین قواعد در نظر می‌گیریم. در مرحله بعد با بررسی این نمونه ۴۸۲ تایی و در نظر گرفتن این که برای یک بیمار مقدار هر ورودی به کدام بخش از تابع عضویت تعلق دارد، برای آن بیمار یک قاعده اگر - آن‌گاه فازی تعیین شد. در واقع در تعیین پایگاه قواعد دانش فرد خبره و نمونه‌های واقعی مورد استفاده هستند. لذا با بررسی پایگاه داده مربوط به ۴۸۲ بیمار و پس از حذف قواعد تکراری به پایگاه قواعدی شامل ۱۷۸ قاعده دست پیدا کردیم. در تعیین این پایگاه قواعد سعی شده است که تا حد امکان تمام حالات مورد قبول از لحاظ پزشکی، در میان قواعد اعمال گردند.

این قواعد پس از تشکیل با مشورت افراد خبره در پژوهشکده سرطان پستان، به‌عنوان قواعد در سیستم استنتاج فازی ممدانی در نظر گرفته شدند.

۳. فازی سازی: مقایسه متغیرهای ورودی با توابع عضویت برای به دست آوردن مقادیر عضویت هر یک از متغیرهای زبانی [۲۴]. در این مرحله داده‌های کلاسیک یا قطعی به داده‌های فازی تبدیل می‌شوند که این فرآیند توسط توابع عضویت متناسب با هر داده انجام می‌شود [۲۲].

۴. اعمال عملگرهای فازی: در صورتی که مقدم دارای چندین قسمت باشد، عملگرهای فازی مطابق آنچه در بخش (۱.۹.۱) مورد بررسی قرار گرفت، روی آن‌ها اعمال شده و مقدم به عددی بین ۰ و ۱ تبدیل می‌شود. در جعبه ابزار منطق فازی نرم افزار MATLAB که در این پایان نامه به کار برده شده است، دو نوع روش از پیش ساخته شده برای *and* شامل عمل *min* و عمل حاصل

<sup>۲۲</sup>Look up table

ضرب<sup>۲۳</sup> و نیز دو نوع روش از پیش ساخته شده برای *or* شامل عمل *max* و عمل یای احتمالی<sup>۲۴</sup>  $(probor(a, b) = a + b - ab)$  پشتیبانی می‌شوند. برای انتخاب بهترین روش، مدل ممدانی ساخته شده را با هر یک از روش‌های معرفی شده به صورت جداگانه مورد بررسی قرار دادیم و با توجه به حاصل شدن نتایج دقیق برای روش‌های حاصل ضرب و یای احتمالی، این روش‌ها را به ترتیب برای *and* و *or* برگزیدیم. لازم به ذکر است که امکان تعریف توابع دلخواه برای این عملگرها در نرم افزار وجود دارد.

۵. استلزام: ترکیب (معمولا عمل ضرب یا *min*) مقادیر عضویت در بخش مقدم برای به دست آوردن وزن هر قاعده [۲۴]. این مرحله، مرحله استلزام<sup>۲۵</sup> نامیده می‌شود [۱۴، ۲۴]. طی فرآیند استلزام درستی و اعتبار هر قاعده سنجیده می‌شود. در یک استلزام باید آنچه را داریم توسعه دهیم و نباید به گونه‌ای نتیجه‌گیری کنیم که داده‌های اولیه را از دست بدهیم. در این پایان نامه از استلزام ممدانی (۲.۹.۱) استفاده می‌کنیم. در استلزام ممدانی ابتدا از رابطه (۳۰.۱) استفاده کردیم یعنی روش استلزام<sup>۲۶</sup> را در نرم افزار *min* انتخاب کردیم سپس از رابطه (۳۱.۱) استفاده کردیم یعنی روش استلزام را در نرم افزار حاصل ضرب در نظر گرفتیم. با مقایسه نتایج مشاهده شد که رابطه (۳۱.۱) نتایج دقیق‌تری در پی دارد لذا عمل ضرب را در رابطه استلزام ممدانی به عنوان ابزار استلزام در نظر گرفتیم.

۶. ادغام و یا تجمیع نتایج قواعد: در این مرحله قواعدی که اعتبار و صحت آن‌ها در مرحله قبل مشخص شده‌اند، برای به دست آوردن خروجی فازی با هم ترکیب (تجمیع)<sup>۲۷</sup> می‌شوند. به عبارت دیگر نتایج دارای شرایط لازم، با توجه به وزن هر قاعده ایجاد می‌شوند [۲۴]. چرا که در استنتاج فازی، تصمیم‌گیری بر اساس تمام قواعد انجام می‌شود. لذا باید بتوان همه قوانین را به روشی ترکیب کرد. برای انجام این فرآیند در نرم افزار MATLAB سه تابع از پیش ساخته شده *max*، یای احتمالی و حاصل جمع<sup>۲۸</sup> برای این امر پشتیبانی می‌شوند. مطابق مراحل قبل با مقایسه نتایج بهترین روش را انتخاب کردیم؛ که این روش، روش حاصل جمع می‌باشد.

۷. نافازی سازی: در این مرحله خروجی فازی حاصل شده، توسط یکی از روش‌های نافازی سازی به خروجی غیرفازی یا کلاسیک تبدیل می‌شود [۲۲، ۲۴]. روش‌های نافازی سازی زیر در نرم افزار *MATLAB* موجودند:

روش مرکز ثقل، روش میانه<sup>۲۹</sup>، میانگین ماکزیمم<sup>۳۰</sup>، بزرگ‌ترین مقدار ماکزیمم<sup>۳۱</sup>، کوچک‌ترین

<sup>۲۳</sup> prod = product

<sup>۲۴</sup> probor

<sup>۲۵</sup> Implication

<sup>۲۶</sup> Implication method

<sup>۲۷</sup> Aggregation

<sup>۲۸</sup> Sum

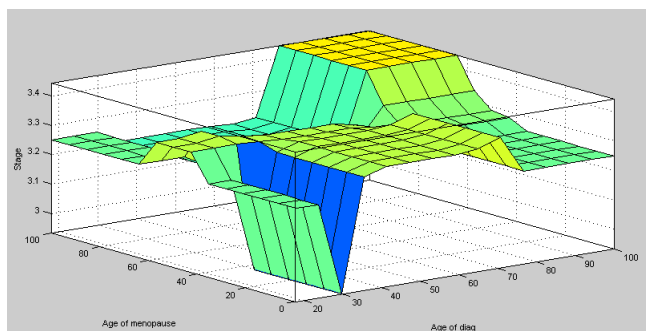
<sup>۲۹</sup> Bisector

<sup>۳۰</sup> Mom

<sup>۳۱</sup> Lom

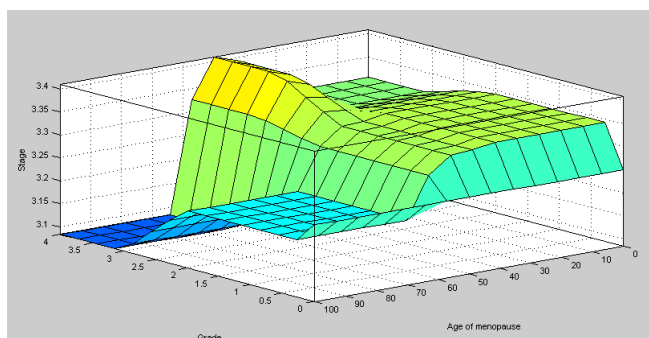
مقدار ماکزیمم<sup>۳۲</sup>. ما روش مرکز ثقل را برای نافازی سازی مدل ممدانی خود مورد استفاده قرار دادیم؛ که این انتخاب بنا بر دقت نتیجه حاصل از روش مرکز ثقل صورت گرفته است. حال الگوریتم مطرح شده را در نرم افزار MATLAB پیاده سازی می نماییم. با اجرای برنامه نوشته شده ، نتایج به صورت زیر حاصل می شوند:

- نمایش سیستم استنتاج فازی در محیط فازی نرم افزار MATLAB
- نمای ظاهری مدل ممدانی بر اساس ارتباط میان متغیر خروجی مرحله بیماری سرطان پستان و دو ورودی سن تشخیص بیماری و سن یائسگی



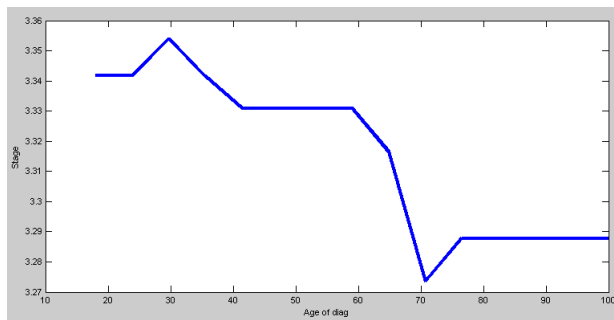
شکل ۱۱.۴: Surface Viewer

با تغییر هر یک از ورودی ها می توان نمایش خروجی بر حسب آن دو ورودی جدید را مطابق بالا، به دست آورد. به عنوان مثال اگر ورودی ها به گرید تومور و سن یائسگی تغییر کنند، خواهیم داشت:



شکل ۱۲.۴: Surface Viewer

حتی می توان یکی از ورودی ها را حذف کرده و نمایش خروجی را بر حسب تنها یک ورودی به دست آورد.



شکل ۱۳.۴: ارتباط میان مرحله بیماری سرطان پستان و سن تشخیص بیماری سرطان پستان

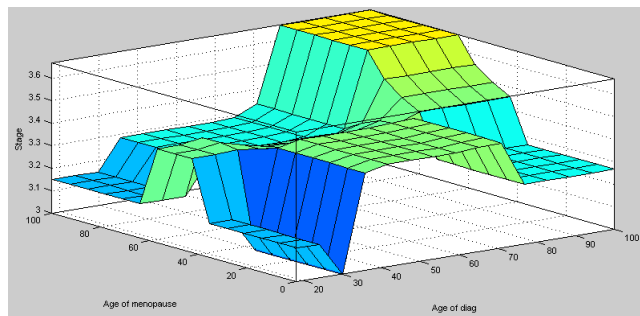
## ۴.۴ مدل سیستم استنتاج سوگنو برای پیش‌بینی متاستاز سرطان پستان

در طراحی مدل سوگنو برای انتخاب ورودی‌ها و خروجی و نیز توابع عضویت آن‌ها همانند مدل ممدانی پیش‌می‌رویم. پایگاه قواعد را نیز به‌همان صورت مطرح شده برای سیستم استنتاج ممدانی در نظر می‌گیریم. برای عملگرهای فازی در سیستم استنتاج سوگنو روش‌های حاصل ضرب و یای احتمالی را به ترتیب برای *and* و *or* برمی‌گزینیم. همان‌طور که در شیوه استنتاج در ۲.۱۲.۱ دیدیم در سیستم استنتاج فازی سوگنو استلزام و تجمیع نتایج قواعد دیده نمی‌شود؛ در عوض در این مدل باید وزن هر قاعده را محاسبه نماییم یعنی صحت قسمت مقدم هر قاعده با توجه به بحث ارزش گزاره‌های مرکب که پیش‌تر مطرح شد، به‌دست آید. حاصل در واقع وزن هر قاعده است. یعنی مقداری که ورودی در آن قاعده صدق می‌کند و به آن اندازه قاعده را فعال می‌کند. روش نافازی سازی را نیز مانگین وزنی<sup>۳۳</sup> در نظر می‌گیریم. برخی از خروجی‌ها مانند شکل توابع عضویت در محیط *GUI* نرم افزار همانند آنچه در مدل ممدانی حاصل شد، می‌باشد لذا از آوردن و تکرار آن‌ها خودداری شده است.

با اجرای برنامه نوشته شده برای مدل سوگنو، نتایج بدین صورت حاصل می‌شوند:

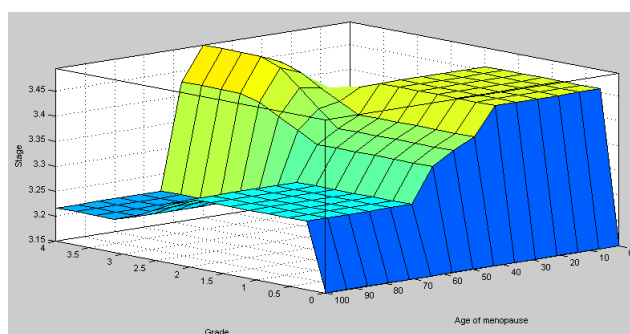
- نمای ظاهری مدل سوگنو بر اساس ارتباط میان متغیر خروجی مرحله بیماری سرطان پستان و دو ورودی سن تشخیص بیماری و سن یائسگی

<sup>۳۳</sup>Weighted average



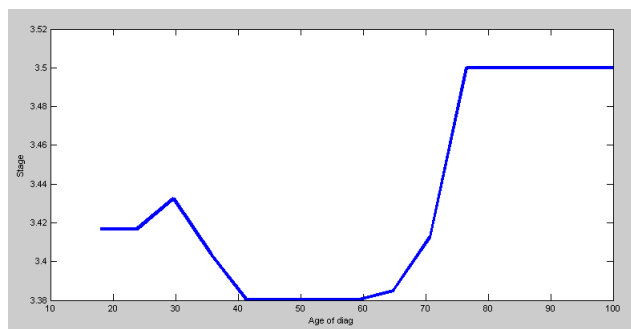
شکل ۱۴.۴: Surface Viewer

اگر ورودی‌ها به گرید تومور و سن یائسگی تغییر کنند، خواهیم داشت:



شکل ۱۵.۴: Surface Viewer

● نمایش خروجی بر حسب تنها ورودی سن تشخیص بیماری



شکل ۱۶.۴: ارتباط میان مرحله بیماری سرطان پستان و سن تشخیص بیماری سرطان پستان

## ۵.۴ طراحی و اجرای انفیس با استفاده از سه روش متفاوت برای پیش‌بینی متاستاز سرطان پستان

در بخش ۸.۳ فصل ۲ به بررسی روش‌های مختلف برای طراحی سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه پرداختیم. در این بخش قصد داریم با استفاده از این روش‌ها و انتخاب مجموعه داده‌ها به طراحی انفیس‌های متفاوت جهت پیش‌بینی متاستاز سرطان پستان در مراحل اولیه در محیط MATLAB بپردازیم.

### ۱.۵.۴ آموزش انفیس در محیط

فرآیند آموزش پس از دریافت مجموعه داده‌های ورودی و خروجی آموزش شروع می‌شود. دو بردار برای آموزش انفیس استفاده می‌شوند. در واقع داده‌های آموزش یک مجموعه از بردارهای ورودی و خروجی هستند. این مجموعه داده‌های آموزش، به‌منظور پیدا کردن پارامترها برای توابع عضویت استفاده می‌شوند؛ همچنین در این فرآیند یک مقدار سرحد برای خطای میان خروجی واقعی و خروجی دلخواه تعریف می‌شود. اگر خطا بیشتر از مقدار سرحد باشد آنگاه پارامترها با استفاده از روش گرادیان کاهشی به‌نگام می‌شوند و این تغییر پارامترهای فرض تا زمانی که مقدار خطا کمتر از مقدار سرحد شود، ادامه پیدا می‌کند. بررسی مجموعه داده‌ها برای مقایسه مدل با داده‌ها صورت می‌گیرد [۲۱]. قواعد آموزش انفیس با استفاده از آموزش ترکیبی که متشکل از روش کمترین مربعات و روش گرادیان کاهشی است، پارامترهای نتیجه را تعیین می‌کنند.

### ۲.۵.۴ آموزش انفیس در MATLAB

نخستین گام آماده سازی داده‌های آموزش در MATLAB است. پیش از بارگزاری<sup>۳۴</sup> کردن مجموعه داده‌ها، آن‌ها را در قالب دو ماتریس  $7 \times 519$  (ستون‌ها نشان دهنده تعداد ورودی‌ها و سطرها نشان دهنده مجموعه داده‌ها) و  $1 \times 519$  که به‌ترتیب نمایان‌گر داده‌های ورودی و خروجی آموزش هستند، در دو *math file* ذخیره می‌کنیم. برای ایجاد انفیس می‌توان از محیط گرافیکی<sup>۳۵</sup> جعبه ابزار<sup>۳۶</sup> تعبیه شده در MATLAB و یا نوشتن دستورات در قالب برنامه، استفاده کرد. در این پایان نامه از نوشتن برنامه استفاده شده است.

برای ایجاد سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه از روش *FCM* واز دستور *genfis3* استفاده می‌کنیم. *genfis3* یک سیستم استنتاج فازی اولیه را برای آموزش انفیس براساس خوشه‌بندی *FCM* و با استخراج مجموعه قواعدی که رفتار داده‌ها را مدل می‌کنند، ایجاد می‌کند. در این دستور تابع *fcm* به‌منظور تعیین تعداد قواعد و نیز توابع عضویت مربوط به هر متغیر در قسمت فرض و نتیجه استفاده می‌شود. زمانی که تنها یک خروجی داریم می‌توانیم از *genfis3* استفاده کنیم.

<sup>۳۴</sup>Load

<sup>۳۵</sup>GUI

<sup>۳۶</sup>Tool box

اگر بخواهیم از روش خوشه‌بندی کاهشی برای ایجاد سیستم استنتاج فازی اولیه برای آموزش انفیس استفاده کنیم، باید دستور *genfis2* را به کار ببریم. در این دستور تابع *subclust* به منظور تعیین تعداد قواعد و توابع عضویت در قسمت فرض و سپس تخمین‌گر کمترین مربعات خطی به منظور تعیین هر قاعده معادلات نتیجه استفاده می‌شوند. این تابع یک ساختار سیستم استنتاج فازی را که شامل یک مجموعه از قواعد فازی برای پوشش فضای ویژگی‌هاست، برمی‌گرداند. زمانی که تنها یک خروجی داریم می‌توانیم از *genfis2* استفاده کنیم.

راه دیگری نیز برای تعیین سیستم استنتاج فازی اولیه وجود دارد و آن هم این است که مطابق روش مطرح شده در ۴.۴ یک سیستم فازی سوگنو اولیه را با در نظر گرفتن توابع عضویت تمام متغیرهای ورودی و خروجی تعیین کنیم. در ادامه این سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه را در قالب یک *mathfile* و یا در *workspace* نرم‌افزار ذخیره کنیم و با فراخوانی در محیط گرافیکی جعبه ابزار انفیس فرآیند آموزش و تست انفیس را انجام دهیم؛ و یا این که آن را در برنامه نوشته شده برای انفیس بارگزاری کنیم. تعداد مراحل ۳۷ آموزش را می‌توان افزایش داد که با این افزایش مقدار خطا کاهش می‌یابد. در فرآیند آموزش حد قابل قبول خطا ۳۸ ۳۹ را برابر با صفر در نظر می‌گیریم، به عبارت دیگر با رسیدن به این میزان خطا فرآیند آموزش خاتمه می‌یابد.

پس از فرآیند آموزش، توابع عضویت نهایی آموزش و خطای آموزش تولید می‌شوند. به محض این که آموزش سیستم کامل شد، فرآیند ارزیابی سیستم آغاز می‌شود بدین منظور می‌توانیم مجموعه داده‌های تست را در سیستم آموزش دیده وارد نماییم. سیستم انفیس خروجی را در محیط توسعه یافته‌اش، ارائه می‌دهد. پارامترهای سنجش متفاوتی برای ارزیابی کردن کارایی و بازدهی سیستم وجود دارند؛ از جمله میانگین مربعات خطا ۴۰، قدرمطلق میانگین خطا ۴۱، متوسط درصد خطا مطلق ۴۲، میانگین خطای مربعات نرمال شده ۴۳، ضریب تعیین ۴۴، انحراف معیار ۴۵ و ضریب همبستگی ۴۶ بین مفاهیم یادگیرنده و شکل مضمون آموزش به‌عنوان سیستم ورودی- خروجی. این موارد اندازه‌گیری عملکرد، به مقایسه و ارزیابی دقت و صحت مدل می‌پردازند.

- میانگین مربعات خطا که به صورت

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{q=1}^N (y_q - \tilde{y}_q)^2} \quad (11.4)$$

( $y_q$  مقدار واقعی و  $\tilde{y}_q$  مقدار پیش‌بینی شده است.) محاسبه می‌شود. تفاوت *RMSE* بین مقادیر

<sup>۳۷</sup>Epoch

<sup>۳۸</sup>مقدار قابل قبولی از خطا که با رسیدن به آن فرآیند آموزش متوقف می‌شود.

<sup>۳۹</sup>Error tolerance

<sup>۴۰</sup>Root Mean Square Error (RMSE)

<sup>۴۱</sup>Mean Absolute Error (MAE)

<sup>۴۲</sup>Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

<sup>۴۳</sup>Normalized Mean Square Error (NMSE)

<sup>۴۴</sup>R2

<sup>۴۵</sup>Standard deviation = std

<sup>۴۶</sup>R

مشاهده شده و مقادیر پیش‌بینی برای هر آزمایش با تعداد مراحل آموزش متفاوت محاسبه می‌شود و بهترین ساختار با کمترین مقدار  $RMSE$  تعیین می‌شود.

- قدرمطلق میانگین خطا به صورت

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N |y_q - \tilde{y}_q| \quad (12.4)$$

تعریف می‌شود [۲۳].

- انحراف معیار یکی از شاخص‌های پراکندگی است که نشان می‌دهد به‌طور میانگین داده‌ها چه مقدار از مقدار متوسط فاصله دارند. اگر انحراف معیار مجموعه‌ای از داده‌ها نزدیک به صفر باشد، نشانه آن است که داده‌ها نزدیک به میانگین هستند و پراکندگی اندکی دارند؛ در حالی که انحراف معیار بزرگ بیانگر پراکندگی قابل توجه داده‌ها می‌باشد. انحراف معیار برابر با ریشه دوم واریانس است. اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با میانگین  $\mu$  باشد،  $E[X] = \mu$  امید ریاضی متغیر  $X$  را نشان می‌دهد و واریانس به صورت زیر خواهد بود:

$$E[(X - \mu)^2],$$

لذا انحراف معیار که با نماد  $\sigma$  نشان داده می‌شود، به صورت زیر است:

$$\sigma = \sqrt{E[(X - \mu)^2]} = \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2}. \quad (13.4)$$

### ۳.۵.۴ انفیس شماره یک با هفت ورودی و خروجی مرحله سرطان پستان

در انفیس شماره یک از میان متغیرهای مطرح شده در ۲.۴، متغیرهای سن تشخیص بیماری، سن یائسگی، داشتن یا نداشتن بارداری، مصرف و یا عدم مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری، سابقه شخصی ابتلا به سرطان پستان، سابقه خانوادگی ابتلا به سرطان پستان و مرحله سرعت و قدرت رشد تومور را به‌عنوان متغیرهای ورودی در نظر گرفتیم. علت این انتخاب‌ها وجود ارتباط معنادار این متغیرها با ابتلا به سرطان پستان و متاستاز و نیز کامل بودن نسبی داده‌ها در رابطه با این متغیرها بود. مرحله بیماری سرطان پستان نیز به‌عنوان متغیر خروجی در نظر گرفته شد. توضیحاتی در رابطه با متغیرها:

- در متغیر طول مدت استفاده از داروهای پیشگیری از بارداری، از آنجایی که در مجموعه داده‌های دریافت شده از پژوهشکده سرطان پستان جهاد دانشگاهی این مورد به صورت مصرف و یا عدم مصرف داروهای پیشگیری از بارداری در رابطه با بیماران مختلف ثبت شده است، لذا با تغییر تابع عضویت اصلی، آن را به‌عنوان متغیری که تنها دو مقدار صفر و یک را اخذ می‌کند، در نظر گرفتیم. به عبارت دیگر عدم مصرف داروهای پیشگیری از بارداری را برابر صفر و مصرف این داروها را برابر یک در نظر گرفتیم.



- در متغیر سابقه خانوادگی ابتلا به سرطان پستان از آن‌جایی که ۷ حالت مختلف برای آن در نظر گرفته شده بود و نیز میزان پراکندگی این حالت‌ها در تمامی داده‌ها بسیار زیاد بود، تصمیم گرفته شد که با تغییر تابع عضویت اصلی، آن را به‌عنوان متغیری که تنها دو مقدار صفر و یک را اخذ می‌کند، در نظر بگیریم.
- در رابطه با متغیر تعداد بارداری با توجه به نوع داده‌ها، سه مقدار متفاوت ° برای بارور و فاقد فرزند، ۱ برای بارور و دارای فرزند و ۲ برای نابارور را در میان داده‌های آموزش و تست برای متغیر داشتن یا نداشتن بارداری در نظر گرفتیم.
- داده‌های دریافتی از پژوهشکده که شامل ۳۰۳۷ داده می‌شدند، دارای نواقصی بودند. به‌عبارت بهتر، همه متغیرها در رابطه با یک بیمار، دارای مقدار مشخص شده‌ای نبودند؛ که این مسئله یکی از ویژگی‌های همه داده‌های پزشکی است. با ویرایش تمام داده‌ها و انتخاب بیمارانی که مرحله‌ی بیماری سرطان در آن‌ها ۳، ۳/۳، ۳/۵ و ۴ بودند توانستیم به یک نمونه ۲۹۰ تایی از داده‌های اصلی دست پیدا کنیم. اما از آن‌جایی که این تعداد داده برای انتخاب به‌عنوان مجموعه داده‌ها در فرآیند آموزش انفیس و نتیجه‌گیری ناکافی بود؛ روش دیگری را برای ایجاد داده‌های بیشتر انتخاب کردیم. با بررسی ۳۰۳۷ داده اولیه همه‌ی داده‌هایی را که مربوط به بیماران با مرحله سرطان ۳، ۳/۳، ۳/۵ و ۴ بودند، به‌صورت جداگانه‌ای در نظر گرفتیم. این مجموعه داده مربوط به ۵۱۹ بیمار می‌شد که همگی این داده‌ها دارای خروجی مشخص بودند اما بعضی متغیرهای آن‌ها مانند سن یائسگی، مصرف و یا عدم مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری و ... مفقود بودند. این فقدان مربوط به عدم دریافت اطلاعات کافی از بیمار و یا رخ ندادن بعضی متغیرها در بیمار مانند سن یائسگی می‌شد. برای ایجاد یک مجموعه داده‌ی بزرگ‌تر، با توجه به حالات خاص هر داده، برای عود یک متغیر به جای هر جای خالی، صفر در نظر گرفته شد و در سایر موارد میانه یا مد را جایگزین کردیم، در حالت دیگر برای جایگزین کردن داده‌های جدید به‌جای داده‌های مفقود می‌توان از EM استفاده کرد که در این پایان‌نامه با توجه به داده‌ها از لحاظ پزشکی لازم نبود. در واقع آنچه به‌عنوان مجموعه داده اصلی برای آموزش انفیس مورد استفاده قرار گرفت، مجموعه داده مربوط به ۵۱۹ بیمار است.
- مجموعه داده ورودی که به‌عنوان بردار ورودی در فرآیند آموزش انفیس در نظر گرفته شده است، ماتریسی دارای ۵۱۹ سطر (اطلاعات مربوط به ۵۱۹ بیمار) و ۷ ستون (شامل متغیرهای سن تشخیص بیماری، سن یائسگی، داشتن یا نداشتن بارداری، مصرف و یا عدم مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری، سابقه شخصی ابتلا به سرطان پستان، سابقه خانوادگی ابتلا به سرطان پستان و مرحله سرعت و قدرت رشد تومور) می‌باشد. مجموعه داده خروجی که به‌عنوان بردار خروجی در فرآیند آموزش انفیس در نظر می‌گیریم، ماتریسی دارای ۵۱۹ سطر (اطلاعات مربوط به ۵۱۹ بیمار) و ۱ ستون (مرحله بیماری سرطان) است.
- مجموعه داده ورودی که به‌عنوان بردار ورودی در فرآیند تست انفیس در نظر گرفته شده است، ماتریسی دارای ۴۳۹ سطر (اطلاعات مربوط به ۴۳۹ بیمار) و ۷ ستون (شامل متغیرهای سن

تشخیص بیماری، سن یائسگی، داشتن یا نداشتن بارداری، مصرف و یا عدم مصرف داروهای پیش‌گیری از بارداری، سابقه شخصی ابتلا به سرطان پستان، سابقه خانوادگی ابتلا به سرطان پستان و مرحله سرعت و قدرت رشد تومور) می‌باشد. مجموعه داده خروجی که به‌عنوان بردار خروجی در فرآیند تست انفیس در نظر می‌گیریم، ماتریسی دارای ۴۳۹ سطر (اطلاعات مربوط به ۴۳۹ بیمار) و ۱ ستون (مرحله بیماری سرطان) است. این نمونه ۴۳۹ تایی با استفاده از داده‌های کامل و تنها با جایگزین کردن سن یائسگی (به‌شيوه از پیش مطرح شده) در بیماران فاقد سن یائسگی تعیین شده است. در این راستا ترکیبی از مجموعه داده اولیه شامل ۳۰۳۷ داده و یک نمونه شامل ۴۰۶ داده جدید، دریافت شده از پژوهشکده سرطان پستان استفاده شده است. از آنجایی که تعدادی از داده‌های مورد استفاده در آموزش انفیس در تست انفیس نیز استفاده شدند این بررسی ارزیابی داخلی محسوب می‌شود.

در انفیس شماره یک برای ایجاد سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه به‌ترتیب از روش‌های *FCM* و خوشه‌بندی کاهشی استفاده کرده‌ایم، لذا انفیس با هر یک از این موارد را به‌صورت زیر بررسی می‌کنیم.

#### • ایجاد انفیس با استفاده از *FCM*

در این انفیس ساختار سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه شامل ۲۳ قاعده فازی است. هر قاعده تنها یک تابع عضویت خروجی دارد که از نوع خطی است. انفیس یک ساختار چند ورودی و تک خروجی (*MISO*) دارد. آموزش شبکه انفیس شامل نگاشت ورودی‌ها به‌واسطه توابع عضویت ورودی و نیز نگاشت خروجی به‌واسطه توابع عضویت خروجی می‌شود. پارامترهای مربوط به هر تابع عضویت به‌کلی در فرآیند آموزش تغییر خواهند کرد؛ اما پس از آن ثابت خواهند شد. فرآیند آموزش در انفیس با تعیین تعداد مجموعه‌ها و نوع توابع عضویت هر متغیر ورودی آغاز می‌شود، سپس همه داده‌های آموزش از شبکه عصبی عبور می‌کنند تا پارامترهای ورودی را تنظیم کنند. این کار به‌منظور یافتن ارتباط میان ورودی - خروجی انجام می‌گیرد. دلیل دیگر برای عبور داده‌ها در شبکه عصبی این است که خطا می‌تواند کمترین مقدار شود. ما سیستم را با انواع تنظیمات مختلف مانند نمونه مجموعه داده‌ها، تعداد دفعات آموزش، نوع و تعداد توابع عضویت و تعداد ورودی‌ها بررسی کردیم تا بهترین نمایش و ساختار را به‌دست بیاوریم [۲۳]. به‌طور خلاصه مراحل مربوط به اجرای مدل پیشنهادی با استفاده از انفیس عبارتند از:

#### ۱. گام اول

گردآوری داده‌ها

#### ۲. گام دوم

تعیین مجموعه داده‌های ورودی - خروجی آموزش و تست انفیس

#### ۳. گام سوم

ایجاد سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه

#### ۴. گام چهارم

استخراج قواعد

۵. گام پنجم

تنظیم پارامترهای فرض و نتیجه با استفاده از الگوریتم آموزش ترکیبی انفیس. پس از تنظیم پارامترهای آموزش، الگوریتم آموزش به منظور دستیابی به خطای هدف تعیین شده یا بیشترین تعداد دفعات آموزش ادامه پیدا می‌کند.

۶. گام ششم

محاسبه مقیاس‌های ساختار و عملکرد

۷. گام هفتم

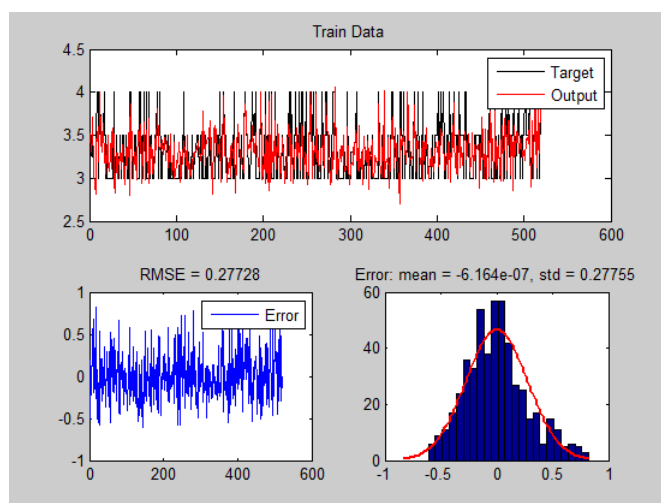
انتخاب مدل با حداقل خطای اعتبارسنجی

۸. گام هشتم

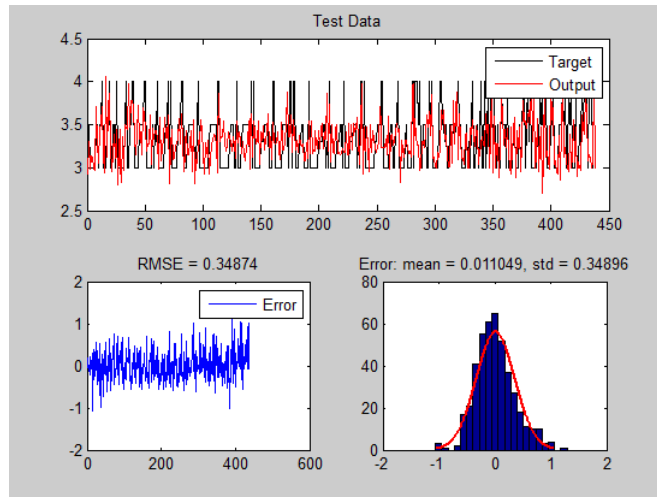
اجرا کردن مدل

[۲۳]

انفیس را با در نظر گرفتن مجموعه داده‌های ذکر شده برای آموزش و تست و با استفاده از روش *FCM* (جهت ایجاد سیستم استنتاج فازی اولیه) در نرم‌افزار MATLAB ایجاد کردیم. برخی نتایج انفیس با سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه ایجاد شده با *FCM* به شرح زیر است: (لازم به ذکر است که هم در روش‌های ممدانی و سوگنو و هم در انفیس می‌توان نمایش توابع عضویت، قواعد و... را نیز داشت.)



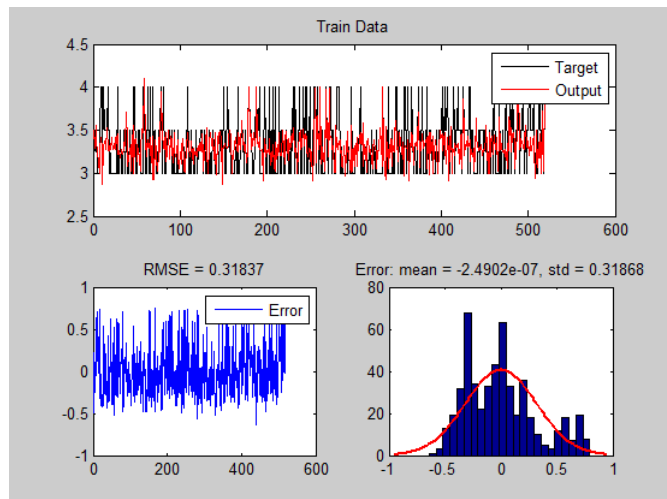
شکل ۱۷.۴: نمایش نتایج انفیس برای داده‌های آموزش



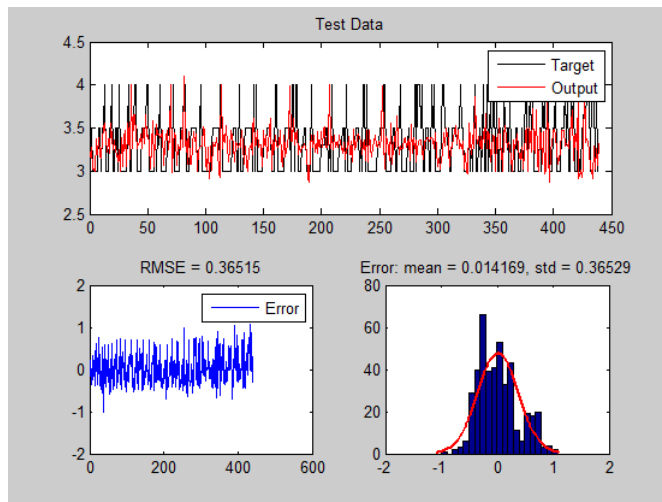
شکل ۱۸.۴: نمایش نتایج انفیس برای داده‌های تست

• ایجاد انفیس با استفاده از خوشه‌بندی کاهشی

انفیس را با در نظر گرفتن مجموعه داده‌های ذکر شده برای آموزش و تست و با استفاده از روش خوشه‌بندی کاهشی (جهت ایجاد سیستم استنتاج فازی اولیه) در نرم‌افزار MATLAB ایجاد کردیم. روند آموزش و ارزیابی همانند آنچه در ایجاد انفیس با استفاده از *FCM* مطرح کردیم، می‌باشد.



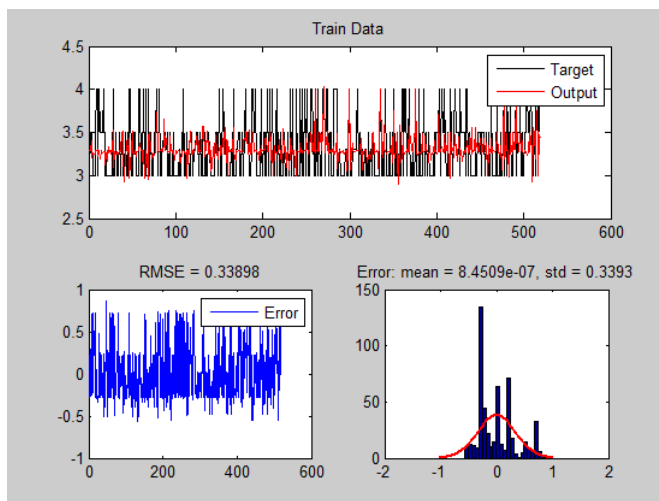
شکل ۱۹.۴: نتایج انفیس برای داده‌های آموزش



شکل ۴.۴: نتایج انفیس برای داده‌های تست

#### ۴.۵.۴ انفیس شماره دو با شش ورودی و خروجی مرحله سرطان پستان

در طراحی این انفیس تنها ورودی‌هایی را که ارتباط مستقیم در ایجاد متاستاز داشتند، به‌عنوان متغیرهای ورودی در نظر گرفتیم. شش متغیر سن تشخیص بیماری، سن یائسگی، داشتن یا نداشتن بارداری، سابقه شخصی ابتلا به سرطان پستان، وقایع پراسترس در زندگی و مرحله سرعت و قدرت رشد تومور متغیرهای ورودی و مرحله بیماری سرطان پستان متغیر خروجی در نظر گرفته شدند. برای ایجاد سیستم استنتاج فازی اولیه از روش مطرح شده در ۴.۴ استفاده نمودیم، لذا در طراحی انفیس نیز برنامه نوشته شده برای سیستم استنتاج فازی سوگنو اولیه را در برنامه نوشته شده برای انفیس فراخوانی کرده و با در نظر گرفتن مجموعه داده‌های آموزش به‌شکل دو ماتریس  $6 \times 519$  و  $1 \times 519$  برای ورودی‌ها و خروجی (لازم به ذکر است که در انتخاب داده‌ها همانند روش مطرح شده در ۳.۵.۴ پیش رفتیم)، فرآیند آموزش را آغاز کردیم. در این انفیس پس از نخستین مرحله آموزش سیستم، خطای  $0.338976$  به‌دست آمد و آموزش متوقف گردید؛ در صورتی که تعداد مراحل آموزش ۵۰ در نظر گرفته شده بود و خطای هدف نیز برابر صفر بود. با بررسی‌های صورت گرفته این نکته دریافت شد که چون در تعیین قواعد مدل سوگنو از مجموعه داده‌ها استفاده کردیم و به‌دلیل محدودیت در تعداد داده‌ها، در فرآیند آموزش انفیس از همان مجموعه داده استفاده نمودیم تنها پس از یک مرحله، آموزش به اتمام رسید. بنابراین این که بخواهیم سیستم استنتاج فازی اولیه را در طی برنامه انفیس بارگزاری و اجرا نماییم، با وجود این که روشی صحیح و مطلوب می‌باشد در این پایان‌نامه با توجه به نوع داده‌ها و قواعد تعیین شده، مناسب نیست. لذا تصمیم بر حذف این مدل گرفته شد.



شکل ۲۱.۴: نتایج انفیس برای داده‌های آموزش تنها پس از یک مرحله آموزش

## ۶.۴ نتایج و پیشنهادات

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از سیستم‌های مختلف فازی جهت پیش‌بینی متاستاز خواهیم پرداخت. برای بررسی سیستم‌های استنتاج فازی ممدانی و سوگنو ساخته شده، خروجی مربوط به مجموعه داده‌ای از ورودی‌ها، شامل اطلاعات مربوط به ۵۱۹ بیمار را در برنامه‌های نوشته شده برای هر دو مدل با دستور *evalfis* به دست آوردیم. لازم به ذکر است که این مجموعه داده با تغییر کوچکی در مورد متغیر داشتن یا نداشتن بارداری در آموزش انفیس مورد استفاده قرار گرفته بود. با مقایسه مقادیر خروجی اصلی و مقادیر حاصل شده از مدل‌های ممدانی و سوگنو (به صورت جداگانه) و استفاده از شاخص‌های میانگین مربعات خطا، قدرمطلق میانگین خطا و انحراف معیار نتایج به شکل زیر به دست آمدند:

جدول ۱.۴: نتایج ممدانی و سوگنو

std	RMSE	MAE	
۰/۱۵۶۰۹۸۳۱۲	۰/۳۷۰۸۹۴۲۰۸	۰/۳۱۵۴۱۱۱۷۵	ممدانی
۰/۱۷۳۰۲۶۹۸۸	۰/۳۸۹۳۱۱۷۹۷	۰/۳۲۳۹۵۵۸۷۷	سوگنو

در رابطه با انفیس شماره یک برای هر دو روش *FCM* و خوشه‌بندی کاهشی الگوریتم آموزش ترکیبی را انتخاب کردیم. تعداد خوشه‌ها را نیز برای هر روش بگونه‌ای در نظر گرفتیم که تعداد زوج داده‌ها برای آموزش از تعداد پارامترها بیشتر باشد؛ لذا تعداد خوشه‌ها برابر ۲۳ در نظر گرفته شد. در این رابطه هرچند با افزایش تعداد خوشه‌ها خطا کمتر می‌شود اما از آنجایی که با این کار سیستم به سمت اختصاصی شدن (کارآمد بودن تنها برای مجموعه داده‌های مورد استفاده کنونی) می‌رود، از افزایش تعداد خوشه‌ها به بیش از ۲۳ خوشه خودداری شده است. نتایج به شرح زیر است:

جدول ۲.۴: نتایج انفیس

انفیس با FIS اولیه از نوع خوشه‌بندی کاهشی	انفیس با FIS اولیه از نوع FCM	
۲۳	۲۳	تعداد قواعد فازی
۲۳	۲۳	تعداد توابع عضویت هر متغیر
گوسی	گوسی	نوع توابع عضویت
۰/۳۱۸۳۷	۰/۲۷۷۲۸	RMSE داده‌های آموزش
۰/۳۶۵۱۵	۰/۳۴۸۷۴	RMSE داده‌های تست
۰/۳۱۸۶۸	۰/۲۷۵۵	std داده‌های آموزش
۰/۳۶۵۲۹	۰/۳۴۸۹۶	std داده‌های تست

مقادیر به دست آمده برای خطا با مشورت پژوهشگر سرطان پستان به عنوان خطای مطلوب و قابل قبول پذیرفته شدند. با مقایسه جداول نتایج و نیز آن چه که در فرآیند کلی کار کردن با داده‌هایی از جنس داده‌های پزشکی دریافتیم، طراحی انفیسی که سیستم استنتاج فازی اولیه سوگونو آن با روش FCM مشخص شود نتایج دقیق‌تری نسبت به سایر مدل‌های پیشنهادی ارائه می‌دهد. دلیل این امر می‌تواند این موضوع باشد که در انفیس قواعد به صورت خودکار و بدون نیاز به دانش فرد خبره تعیین می‌شوند، لذا در صورت عدم وجود فرد خبره می‌تواند با سنجش تمام نمونه‌ها بهترین ساختار را تشکیل دهد. انفیس ساخته شده با استفاده از الگوریتم کاهشی در مرتبه دوم قرار دارد. مدل‌های ممدانی و سوگونو نیز به ترتیب در مراتب بعدی قرار دارند. دلیل ضعف این دو مدل می‌تواند این باشد که همواره دانش فرد خبره در حیطه پزشکی و داده‌های مربوط به بیماران حقیقی از جامعیت کافی برخوردار نیست، پس نتایج دقت قابل قبول و نه چندان دلخواهی دارند.

به طور کلی از مدل‌های ساخته شده در این پایان‌نامه می‌توان برای پیش‌بینی وقوع متاستاز در افراد مبتلا به سرطان پستان در مراحل ۰ تا ۲ استفاده نمود. به این شکل که با در نظر گرفتن داده‌های مربوط به بیماران در مراحل اولیه، مرحله احتمالی در صورت درگیری با متاستاز را مشخص نمود. براساس این که بیماران با شرایط مشابه و درگیر با متاستاز در چه مرحله‌ای قرار دارند، مدل‌های پیشنهادی مرحله احتمالی برای بیماران مراحل اولیه را تعیین می‌کنند.

#### ۱.۶.۴ پیشنهادات

با توجه به این که همواره با کمبود و محدودیت پایگاه داده‌های کامل مربوط به سرطان پستان روبرو هستیم و دیگر این که همواره باید تعداد زوج داده‌ها بیشتر از تعداد پارامترها در شبکه تطبیقی باشد، استفاده از شبکه عصبی به دلیل کمتر بودن پارامترها و الگوریتم ژنتیک احتمالاً می‌تواند نتایج را بهبود ببخشند.





## مراجع

- [۱] ابراهیمی م، الفت بخش آ، نصاری م، حبیبی م، حسینیان م، حقیقت ش، شجاع مرادی ح، علوی ن س، کاویانی ا، مجیدزاده ک، نجفی م، نجار نجفی ص، هاشمی ع س، (۱۳۸۹)، ”راهنمای جامع بیماری‌های پستان“، چاپ اول، سازمان انتشارات جهاد دانشگاهی علوم پزشکی تهران، مرکز تحقیقات سرطان پستان جهاد دانشگاهی.
- [۲] اکبری م ا، ستایشی س، حقیقت خواه ح ر، درگاهی ر، (۱۳۹۰)، ”سرطان پستان و تحلیل فنی روش‌های تشخیصی آن“، چاپ اول، انتشارات بیطرفان.
- [۳] پیکتن ف، (۱۳۹۱)، ”شبکه‌های عصبی (اصول و کارکردها)“، ترجمه: غضنفری م، ارکات ج، چاپ دوم، دانشگاه علم و صنعت ایران.
- [۴] زاهدی م، (۱۳۷۸)، ”تئوری مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن“، چاپ اول، نشر کتاب دانشگاهی.
- [۵] شیخ نژاد غ، (۱۳۸۹)، ”سرطان چیست؟“، چاپ اول، نشر دریافت.
- [۶] طاهری س.م، (۱۳۷۸)، ”آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی“، چاپ دوم، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۷] کازوتاناکا، (۱۳۷۸)، ”مقدمه‌ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی“، ترجمه: وحیدیان کامیاد ع، طارقیان ح.ر، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۸] کلر ج، بویوان، س.ک. (۱۳۸۹)، ”تئوری مجموعه‌های فازی: اصول و کارکردها“، ترجمه: فاضل زرنندی م ح، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران.
- [۹] کیا م س، (۱۳۹۴)، ”شبکه‌های عصبی در MATLAB“، چاپ چهارم، نشر دانشگاهی کیان.
- [۱۰] منهج م ح، (۱۳۸۹)، ”مبانی شبکه‌های عصبی هوش محاسباتی“، چاپ هفتم، مرکز نشر دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران).
- [۱۱] وانگ ل، (۱۳۸۸)، ”سیستم‌های فازی و کنترل فازی“، ترجمه: تشنه‌لب م، صفارپورن، افیونی د، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی، تهران.

- [۱۲] صابری ز، (۱۳۹۱)، پایان‌نامه ارشد: ”انتگرال فازی در تصمیم‌گیری چندمعیاره”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج).
- [13] Dunn, J. C. (1973). ” A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters ”, 32-57 .
- [14] Gayathri, B. M., and Sumathi, C. P. (2015, December).” Mamdani fuzzy inference system for breast cancer risk detection ”. **In Computational Intelligence and Computing Research (ICCIC), 2015 IEEE International Conference on (pp. 1-6). IEEE.**
- [15] Guillaume, S. (2001). ” Designing fuzzy inference systems from data: An interpretability-oriented review ”. **IEEE Transactions on fuzzy systems**, 9(3), 426-443.
- [16] Hassoun, M. H. (1996).” Fundamentals of artificial neural networks.” **Proceedings of the IEEE, New York.**
- [17] Jang, J. S. R. (1991, July).” Fuzzy Modeling Using Generalized Neural Networks and Kalman Filter Algorithm.” **In AAI** (Vol. 91, pp. 762-767).
- [18] Joo, Y. H., and Chen, G. (2009).”Fuzzy systems modeling: an introduction.” In Encyclopedia of artificial intelligence (pp. 734-743).**IGI Global.**
- [19] Klassen, M. S., Pao, Y. H., and Chen, V. (1988, June).” Characteristics of the functional-link net: A higher order delta rule net.”**In IEEE Proc.** of the International Conference on Neural Networks.
- [20] Alvarez-Manilla, M., Edalat, A., and Saheb-Djahromi, N. (2000).” An extension result for continuous valuations”.**Journal of the London Mathematical Society**, 61(2), 629-640.
- [21] Roger, J. J. (1993).” ANFIS—Adaptive-network-based neuro-fuzzy inference systems”.**IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, 20(03), 665-685.
- [22] Saleh, A. A. E., Barakat, S. E., and Awad, A. A. E. (2011).” A fuzzy decision support system for management of breast cancer” **IJACSA Editorial.**
- [23] Shafi, J., Angelov, P., and Umair, M. (2016).” Prediction of the attention area in ambient intelligence tasks ” . **In Innovative Issues in Intelligent Systems (pp. 33-56). Springer International Publishing.**

- [24] Shleeg, A. A., and Ellabib, I. M. (2013).” Comparison of mamdani and sugeno fuzzy interference systems for the breast cancer risk”.**International Journal of Computer, Information Science and Engineering**, 7(10), 387-391.
- [25] LI, J. H. Z. H. G. (2011).” Subtractive fuzzy c-means clustering approach with applications to fuzzy predictive control” . **WSEAS Transactions on Systems and Control** 6.2 , 33-43.
- [26] Hamdan, H. (2013). ”**An exploration of the adaptive neuro-fuzzy inference system (ANFIS) in modelling survival** ”. (Doctoral dissertation, University of Nottingham).
- [27] Jang, J. S. R., Sun, C. T., and Mizutani, E. (1997). ”**Neuro-fuzzy and soft computing** ”, a computational approach to learning and machine intelligence.
- [28] Luenberger, D. G. , Ye, Y. (2015).”**Linear and nonlinear programming** ” (Vol. 228). Springer.
- [29] Pao, Y. (1989).”**Adaptive pattern recognition and neural networks.**”
- [30] Tanaka, K. (1997). ”**An introduction to fuzzy logic for practical applications.**”
- [31] Zhang, H., and Liu, D. (2006). ”**Fuzzy modeling and fuzzy control.**” Springer Science and Business Media.



# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Implication	استلزام
Error measure	اندازه خطا
Feedforward	پیش‌رو
Membership function	تابع عضویت
Takagi-Sugeno	تاکاگی – سوگنو
Least-Squares estimator	تخمین‌گر کمترین مربعات
Hybrid	ترکیبی
Adaptive	تطبیقی
Neural Network	شبکه عصبی
Gradient descent	گرادیان کاهشی
Node	گره
Metastasis	متاستاز
Training data set	مجموعه داده آموزش
Mamdani	ممدانی



# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Age of menopause	سن یائسگی
Aggregation	تجمع، ادغام
Backpropagation	پس انتشار
Backward pass	مسیر پسرو
Batch (off - line) learning	آموزش دسته‌ای (آموزش منفصل)
Centroid	مرکز ثقل
Cluster	خوشه
Feedforward	پیشرو
Forward pass	مسیر پیشرو
Fuzzy Centers Means	میانگین مراکز فازی
Grid Partitioning	بخش‌بندی شبکه‌ای
Hybrid Learning Algorithm	الگوریتم آموزش ترکیبی
Learning rules	قواعد آموزش
Link	اتصال
Node function	تابع گره
Pattern - by - pattern learning	آموزش الگو به الگو
Pattern (on - line) learning	آموزش الگو (آموزش متصل)
Recurrent	بازگشتی
Stage	مرحله
Subtractive clustering	خوشه‌بندی کاهش‌ی
Weighted average	میانگین وزنی

## **Aabstract**

Breast cancer metastasis or spreading cancer beyond the breast to other organs in the body (most often the bones, lungs, liver or brain) enumerates one of the reasons for the majority of deaths from breast cancer. Detection of breast cancer metastasis at the earliest stage helps determine the best way to contain and prediction of breast cancer progression or control of the disease and improve quality of life for patient. In this thesis, we detect the breast cancer metastasis by using of the available information of patients records and fuzzy logic. The present study uses Mamdani inference method, Takagi-Sugeno inference method and neuro-fuzzy inference technique namely ANFIS (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System) to determine the breast cancer metastasis at the early stages using patient data involved with metastasis. The dataset used in this work is received from The Breast Cancer Research Center (BCRC). Using medical data related to actual patient, taking into account the risk factors in the prediction of metastasis using fuzzy logic has been raised for the first time in this thesis. The strength of these methods is the use of fuzzy logic in relation to breast cancer that it's risk factors are fuzzy variables. For evaluation these fuzzy inference systems by comparing the patient's actual output and the output from model, mean square error (RMSE) for Mamdani, Sugeno, ANFIS with the Initial FIS made by FCM and ANFIS with the Initial FIS made by subtractive clustering have been obtained 0.370894208, 0.389311797, 0.27728 and 0.31837, respectively. These values, in consultation with the physicians at the Institute for Breast Cancer as good and acceptable errors made models, were considered.

keywords: Breast cancer; Metastasis; Fuzzy logic; Mamdani fuzzy inference system; Takagi-Sugeno fuzzy inference system; Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System (ANFIS); Clustering





**Shahrood University of Technology**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

**MSc Thesis in: Numerical analysis**

**The application of fuzzy logic in breast cancer**

**By: Arezou Homaie Fasih**

**Supervisors**

**Dr. Hojat Ahsani Tehrani**

**Dr. Mohammad Hadi Noori Skandari**

**Advisors**

**Dr. Saeed Eslami**

**Dr. Alireza Atashi**

**February 2017**