بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده: **ریاضی**
گروه: **ریاضی کاربردی**

عنوان پایان نامه

حل معادلات دیفرانسیل فرکتالی با روش آشفتگی هوموتوپی

دانشجو: **هادی سالاری نژاد**

اساتید راهنما :

دکتر صادق رحیمی
دکتر حسین امینی خواه

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

مهر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به پدرم و مادرم

تشکر و قدردانی

خداوند یکتا و متعال را شاکرم که توفیق یافتم تا این پایان نامه را با راهنمایی و یاری اساتید و دیگر بزرگواران، تدوین نمایم و به زعم خود از همه این عزیزان تشکر و قدردانی می کنم و برای ایشان از درگاه ایزد مهربان آرزوی سعادت و عاقبت به خیری دارم.

در ابتدا صمیمانه ترین تشکر ها تقدیم به پدر و مادر عزیزم که همواره راهنما و مشوقم بوده اند و گذر از مشکلات زندگی ام به حول و قوه الهی و بدون دعای خیر و برکت وجودشان، غیر ممکن بود.

از اساتید راهنمای ارجمندم، **جناب آقای دکتر رحیمی وجناب آقای دکتر امینی خواه** که سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشتند کمال تشکر و قدردانی می نمایم.

از اساتید محترم، **جناب آقای دکتر گرشاسبی** و **جناب آقای دکتر ناظمی** که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

برخود لازم می دانم تا از کلیه اساتید گرانقدر دانشکده ریاضی که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، تشکر نمایم.

در نهایت از تمامی دوستان و هم اتاقی های عزیزم و همکلاسی ها و هم دانشکده ای های گرامی ام که در طول این مدت افتخار مصاحبت و همفکری با آنها را داشتم، صمیمانه سپاسگزاری نمایم.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

مهرماه 1389

چکیده

در این پایان نامه ابتدا در فصل یک به معرفی مفاهیم اساسی مورد نیاز می پردازیم. در فصل دوّم مشتق و انتگرال کسری را بیان می کنیم. در این فصل پس از معرفی مشتق کسری ریمان- لیوویل، گرونوالد- لتنیکوف به بیان خواص و ارتباط این مشتقات می پردازیم. در فصل سه ساختار روش آشفتگی هوموتوپی را بیان می کنیم، در ادامه با بیان چند قضیه، همگرایی این روش را بررسی می کنیم و کاربرد های این روش برای حل معادلات تابعی را با بیان چند مثال نشان خواهیم داد. در فصل چهارم چند صورت از معادلات دیفرانسیل کسری خاص را معرفی کرده و سپس حل آنها را با روش آشفتگی هوموتوپی بیان می کنیم.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

[1] H. salarinezhad, H. Aminikhah, S. Rahimi , (2010), “An analytical approximation to the solution of fractional Zakharov-Kuznetsov equation”, **Appl. Mat. Con, Zahedan.**

[2] H. Salarinejad, H. Aminikhah, S. Rahimi, "Analytical approximation to the solution of fractional Zakharov-Kuznetsov equations by HPM" [In Press].

فهرست مطالب

فصل سوّم **معرفی روش آشفتگی هوموتوپی**

فصل چهارم **حل معادلات دیفرانسیل کسری به روش آشفتگی هوموتوپی**

مقدمه

حساب کسری از قرن ۱۷ آغاز شد و بحثهای اوّلیه در این مورد شامل کارهای لایب نیتز[1]، اویلر[2]، لاگرانژ[3]، لاپلاس[4]، آبل[5]، لیوویل[6]، ریمان[7] و بسیاری دیگر بوده است. اوّلین گزارش مربوط به تعمیم مشتقات معمولی به مشتقات کسری منصوب به لایب نیتز و هوپیتال است که در آن هوپیتال از لایب نیتز می پرسد که اگر در نماد $\frac{d^n}{dt^n}$، به جای n عدد $\frac{1}{2}$ قرار دهیم چه اتفاقی می افتد. لاپلاس (۱۸۱۲) مشتقات کسری را به صورت یک انتگرال تعریف کرد و در سال ۱۸۱۹ لاکرویکس[8] مشتقات کسری با مرتبه دلخواه را با تعمیم فرمول مشتق معمولی زیر مورد توجه قرار داد

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n \ , \qquad m,n \in N,$$

که تعمیم او برای هر m و v به صورت زیر بود

$$\frac{d^v x^m}{dx^v} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-v+1)} x^{m-v}.$$

[1] Leibnitz
[2] Euler
[3] Lagrange
[4] Laplace
[5] Abel
[6] Liouville
[7] Riemann
[8] lacroix

فوریه[1] (۱۸۲۲) عملگرهای کسری را با نمایش انتگرالی تابع $f(x)$ به صورت زیر معرفی کرد

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} cos\big(t(x-u)\big)dt,$$

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} t^n cos\left(t(x-u)+\frac{1}{2}n\pi\right)dt.$$

او به صورت نمادی n را با عدد دلخواه α عوض کرد.

آبل اولین کسی است که عملگرهای کسری را مستقیماً برای حل یک معادله انتگرال مورد استفاده قرار داد. معادله انتگرالی که آبل در آن از عملگر کسری استفاده کرد، هنگام حل مساله همزمان رخ داده بود که امروزه به مساله همزمان آبل معروف است و این مساله عبارت است از یافتن شکلی از یک منحنی به طوری که زمان پائین آمدن یک جرم نقطه ای بدون اصطکاک و تحت تأثیر یک میدان گرانشی روی این شکل مستقل از نقطه آغازین باشد. اگر زمان حرکت یک ثابت معروف باشد، معادله انتگرال آبل به صورت زیر خواهد بود

$$k(x) = \int_0^x (x-t)^\alpha f(t)dt,$$

که البته معادله فوق با $\alpha = -\frac{1}{2}$ امروزه به معادله انتگرال آبل معروف است. انتگرال معادله فوق صرف نظر از ضریب $\frac{1}{\Gamma(1/2)}$ یک حالت خاص از انتگرال کسری معروف ریمان- لیوویل است. در معادلات انتگرالی نظیر آبل تابع $f(t)$ باید محاسبه شود. آبل با اثر دادن عملگر کسری $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ بر دو طرف معادله، آن را حل کرد.

فرمول انتگرال فوریه و جواب آبل مورد توجه لیوویل قرار گرفت. لیوویل نظریه حساب کسری را توسعه داد و آنها را در مسائل تئوری پتانسیل به کار برد.

[1] Fourier

امروزه اصطلاح حساب کسری عبارت است از حساب مربوط به انتگرال و مشتق گیری از مرتبه دلخواه به طوری که مرتبه مشتق بتواند گویا، گنگ و حتی مختلط باشد. در مورد مرتبه گویا کارهای مختلفی صورت گرفته است ولی تحلیل مختلط مشتقات و انتگرالهای کسری توسط *سریواستاوا* و *اُوا* بحث شده است.

مشتقات و انتگرال های کسری بحث های صرفاً ریاضی نیستند بلکه کاربردهای فراوانی در مدارهای الکتریکی، شیمی تجزیه، چند قطبی های کسری، فرموله کردن مسائل فیزیک، شیمی و علوم بیولوژیکی دارد.

اخیراً کاربردهای معادلات دیفرانسیل کسری شامل عملگر دیفرانسیلی ریمان- لیوویل در زمینه های مختلفی نظیر دینامیک سیالات محاسباتی، پردازش سیگنال، بیولوژیک، پلیمر و مکانیک آماری دیده شده است. حساب کسری به فرم فرکتالی[1] از توابعی نظیر توابع وایراشتراس[2] و همچنین توابع پله ای لبگ نیز مطرح شده است.

تمام بحث ها و مطالعات انجام شده در این شاخه بر پایه تعاریف موجود از مشتق و انتگرال کسری بنا شده است. تعاریف مختلفی از مشتق و انتگرال کسری وجود دارد که منشأ متفاوتی دارند و لزوماً هم معادل یکدیگر نیستند. بعد از معرفی مفاهیم اوّلیه مورد نیاز در فصل یک، معروف ترین تعاریف موجود مشتق های کسری یعنی تعریف *ریمان- لیوویل*[3] و *گراونوالد- لتنیکوف*[4] را در فصل دو مطرح می کنیم و خواص آنها را قبیل منشأ و پیدایش تعریف کرده، ترکیب آنها با مشتقات معمولی، مشتقات کسری و انتگرال کسری را مورد بحث قرار خواهیم داد.

---
[1] Fractional
[2] ̊Weierstrass
[3] Riemann-Liouville
[4] Grünwald-Letnikov

فصل سوّم را با معرفی روش آشفتگی هوموتوپی[1] برای حل معادلات دیفرانسیل آغاز می کنیم و شرط کافی همگرایی را در قالب قضیه ای بیان و اثبات می کنیم. در ادامه این فصل به حل چند دسته از معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با روش آشفتگی هوموتوپی می پردازیم.

در نهایت در فصل چهارم ابتدا به معرفی تعدادی معادلات دیفرانسیل معروف کسری خطی وغیر خطی می پردازیم و در ادامه حل این معادلات را با روش آشفتگی هوموتوپی بررسی خواهیم کرد.

[1] Homotopy perturbation method

فصل اوّل

مفاهیم اوّلیه و معرفی توابع خاص

۱-۱ مقدمه

توابع متعالی یکی از ابزارهای مهم و پایه ای در حساب کسری می باشند که خواننده علاقمند به این شاخه از ریاضیات لازم است تا با این توابع و برخی از خواص آنها آشنا باشد. در این فصل پس از معرفی تعدادی از این توابع نظیر تابع گاما[۱]، تابع بتا[۲]، و تابع میتاژ- لفلر[۳] و ... که در حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل کسری مورد استفاده قرار می گیرند، به بیان خواص مهم و مورد نیاز در این پایان نامه می پردازیم. توابع متعالی دارای خواص بسیاری هستند، بدیهی است که اثبات و بیان تمام این خواص و قضایای مربوطه از حوصله این رساله خارج است و بحثهای تکمیلی این قسمت را می توان در منابع معرفی شده یافت.

[1] Gamma
[2] Beta
[3] Mittag-Leffler Functiorl

۱-2 توابع پایه حساب کسری

۱-2-۱ تابع لگاریتم طبیعی و تابع نمائی

می توان گفت که در تمام بحثهای معادلات دیفرانسیل، توابعی که بیش از همه مورد توجه است تابع لگاریتم طبیعی و معکوس آن تابع نمائی است.

تابع لگاریتم طبیعی که به صورت زیر تعریف می شود

$$ln\, x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \qquad x > 0, \qquad (1-1)$$

تابعی با دامنه اعداد مثبت است که در سراسر دامنه اش پیوسته و مشتق پذیر می باشد. چون تابع لگاریتم طبیعی در دامنه اش پیوسته و صعودی است لذا دارای معکوس می باشد، معکوس تابع لگاریتم طبیعی **تابع نمائی** نامیده می شود که به صورت زیر تعریف می شود:

اگر $x = \ln y$ در این صورت $y = exp(x)$ تابع نمائی از x نامیده می شود که غالباً با e^x نمایش داده می شود.یکی از کاربردی های تابع نمائی این است که مشتق آن برابر خودش (در حالت کلی تر از جنس خودش) می باشد. این خاصیت پایه و اساس روشهای حل معادلات معمولی با ضرائب ثابت است.

۱-2-۲ تابع گاما[1]

یکی از توابع اساسی حساب کسری تابع گامای اویلر است که تعمیمی از تابع $n!$ است و این امکان را فراهم می کند که n مقادیر غیر صحیح و حتی مختلط را بپذیرد.

تعریف: تابع گاما $\Gamma(z)$ با انتگرال زیر تعریف می شود:

[1] Gamma

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \qquad (2-1)$$

که در نیمه سمت راست صفحه مختلط یعنی $Re(z)>0$ همگرا می شود. تابع گاما یک تعریف با نمایش حدی نیز دارد که به صورت زیر است

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}, \qquad (3-1)$$

که در آن فرض اولیه ما این است که $Re(z)>0$.

شاید یکی از مهمترین خواص تابع گاما رابطه بازگشتی زیر باشد

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \qquad (4-1)$$

این رابطه با استفاده از انتگرالگیری به روش جزء به جزء به سادگی قابل اثبات است

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=[-e^{-t}t^z]_{t=0}^{t=\infty}+z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=z\Gamma(z).$$

به وضوح $\Gamma(1)=1$ و برای... $z=1,2,3,$ خواهیم داشت

$$\Gamma(2)=1\times\Gamma(1)=1,$$
$$\Gamma(3)=2\times\Gamma(2)=2\times 1!=2!,$$
$$\Gamma(4)=3\times\Gamma(3)=3\times 2!=3!,$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)!=n!.$$

خاصیت مهم دیگر تابع گاما به صورت زیر است

$$\Gamma(z+n)\Gamma(-z-n+1)=(-1)^n\Gamma(z)\Gamma(1-z). \qquad (5-1)$$

نماد فاکتوریل را حتی اگر α عدد صحیح مثبت نباشد، به صورت $\alpha\,!=\Gamma(\alpha+1)$ تعریف می کنیم. به عنوان مثال، ضرائب بسط دو جمله ای نیوتن را بر حسب تابع گاما به صورت زیر است:

$$\binom{-z}{\xi}=\frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(\xi+1)\Gamma(1-z-\xi)},$$

در حالت خاص اگر ξ یک عدد صحیح نامنفی مانند n باشد، آنگاه

$$\binom{-z}{n} = \frac{\Gamma(1-z)}{n!\,\Gamma(1-z-n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(z+n)}{n!\,\Gamma(z)} = (-1)^n \binom{z+n-1}{n}.$$

۱-۲-۳ تابع پی سی اویلر

مشتق لگاریتم تابع گاما تابع psi اویلر نامیده می شود که به صورت زیر معرفی می شود

$$\psi(z) = D\, ln\, \Gamma(z)$$
$$= \frac{D\Gamma(z)}{\Gamma(z)} \qquad (6-1)$$

تابع $\psi(z)$ تابع دی گاما نیز نامیده می شود. در حالت خاص

$$\psi(1) = -\gamma \text{ و } \psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - ln\, 4$$

که...$\gamma = 0/55$ **ثابت اویلر**[۱] است و اگر z یک عدد صحیح نامنفی باشد،$\psi(z+1)$ برابر $-\gamma +$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{k(k+z)}$خواهد بود. قابل دکر است که تابع پی سی در رابطه بازگشتی زیر صدق می کند

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

در حالت خاص اگر z عدد صحیح مثبت بوده و آن را n بنامیم، آنگاه

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

۱-۲-۴ تابع بتا[۲]

[۱] اگر قرار دهیم $s_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$ در این صورت $\lim_{N}(s_N - ln\, N)$ موجود بوده که ثابت اویلر نامیده می شود. ثابت اویلر از تمرینهای مهم مبحث حد دنباله و سری است که نمونه های آن را در اغلب کتاب های آنالیز ریاضی می توان یافت. تمرین ۹ فصل هشت اصول آنالیز ریاضی والتر رودین و یا تمرین ۳۶ فصل شش اصول آنالیز حقیقی رابرت جی بارتل مثال هائی از این دست هستند.

[2] Beta

در بسیاری از حالات بهتر است به جای ترکیبی از مقادیر معین تابع گاما از تابعی موسوم به تابع بتا استفاده کنیم. تابع بتا غالباً به صورت زیر تعریف می شود

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}\,(1-t)^{w-1}dt\,,\qquad Re(z)>0\,,\quad Re(w)>0 \qquad (7-1)$$

برای به بدست آوردن رابطه بین تابع بتا و گاما از تبدیل لاپلاس استفاده می کنیم که به صورت زیر تعریف می شود

$$h_{z,w}(t)=\int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau.$$

واضح است که$h_{z,w}(t)$ یک کانولوشن از توابع t^{z-1} و t^{w-1} می باشد و $h_{z,w}(1)=B(z,w)$

.

با توجه به اینکه لاپلاس کانولوشن دو تابع برابر حاصل ضرب تبدیل لاپلاس آن دو تابع است، داریم

$$H_{z,w}(s)=\frac{\Gamma(z)}{s^z}\frac{\Gamma(w)}{s^w}=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}},$$

که در آن $H_{z,w}(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $h_{z,w}(t)$ است. به عبارت دیگر چون$\Gamma(z)\Gamma(w)$ یک ثابت است می توان $h_{z,w}(t)$ را با گرفتن معکوس تبدیل لاپلاس از طریق رابطه فوق دوباره به دست آورد، بنابراین خواهیم داشت

$$h_{z,w}(t)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w+1}.$$

با قرار دادن $t=1$ داریم

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

به کمک تابع بتا می توان خواص دیگری از تابع گاما را به دست آورد[1]. یکی از این خواص به صورت زیر است

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.\quad (z\neq 0,\pm1\,,\pm2\,,\dots). \qquad (8-1)$$

در حالت خاص اگر $z=\frac{1}{2}$ رابطه معروف $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ حاصل می شود که برای محاسبه مقدار تابع گاما در بسیاری نقاط مورد استفاده قرار می گیرد. خاصیت دیگری از تابع گاما که به سادگی از تابع بتا نتیجه می شود، *فرمول لژاندر* است

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}2^{2z-1}\Gamma(2z)\ ,\quad 2z\neq 0,-1,-2,\dots. \qquad (9-1)$$

که با قرار دادن $z=n+\frac{1}{2}$ در آن مجموعه ای از مقادیر خاص تابع گاما به صورت زیر بدست می آید:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}2^{2n}\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)}=\frac{\sqrt{\pi}2^{2n}(2n)!}{n!}. \qquad (10-1)$$

۱-۲-۵ تابع گامای ناقص

از بین توابع متعالی که در حساب کسری مورد استفاده قرار می گیرند تابع گامای ناقص و توابع مربوط به آن از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند. در این قسمت به معرفی تابع گامای ناقص می پردازیم و خواص و توابع مربوط به آن را پس از تعریف مشتق و انتگرال کسری مورد بحث قرار می دهیم. تابع گامای ناقص به صورت زیر تعریف می شود

$$\gamma^*(v,z)=e^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(v+k+1)}. \qquad (11-1)$$

γ^* یک تابع کامل هم نسبت به z و هم نسبت به v است یعنی در تمام صفحه تحلیلی می باشد. اگر $Re z>0$ ، آنگاه $\gamma^*(v,z)$ دارای نمایش انتگرالی زیر است

$$\gamma^*(v,z)=\frac{1}{\Gamma(v)z^v}\int_0^z t^v e^{-t}dt. \qquad (12-1)$$

۱-۲-۶ تابع فوق هندسی

تابع فوق هندسی و تعمیمهای آن دسته وسیعی از توابع تحلیلی هستند. سری فوق هندسی تعمیم یافته ${}_pF_q$ به صورت زیر تعریف می شود

$$ {}_pF_q(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_q;z)=\frac{\Gamma(b_1)\cdot\Gamma(b_2)\cdot\ldots\cdot\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1)\cdot\Gamma(a_2)\cdot\ldots\cdot\Gamma(a_p)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_1+k)\cdot\ldots\cdot\Gamma(a_p+k)z^k}{\Gamma(b_1+k)\cdot\ldots\cdot\Gamma(b_q+k)k!}, \qquad (13-1) $$

به شرطی که b_i اعداد صحیح نامثبت نباشند. اگر $p\le q$ سری به ازای تمام zها همگراست و اگر $p=q+1$ شعاع همگرائی سری برابر یک است یعنی سری به ازای $|z|<1$ همگراست و چنانچه $p>q+1$ سری برای تمام z های غیر صفر، واگراست.

در حالت خاص اگر $p=2$ و $q=1$ خواهیم داشت

$$ {}_2F_1(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(c+k)}\cdot\frac{z^k}{k!}. $$

تابع حاصل و تمام توابع تحلیلی برگرفته از آن تابع فوق هندسی نامیده می شوند. سری برای تمام z هایی که$|z|<1$ همگراست. اگر $Re(c)>Re(a)>0$، نمایش انتگرالی زیر را داریم

$$ {}_2F_1(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tz)^{-b}dt. $$

در حالت خاص، اگر $Re(c)>Re(a+b)$ و c عدد صحیح نامثبت نباشد، داریم

$$ {}_2F_1(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, $$

و اگر $p=q=1$ و $Re(c)>Re(a)>0$، نمایش انتگرالی زیر را داریم

$$ {}_1F_1(a,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{zt}dt. $$

تابع ${}_1F_1$ در معادله دیفرانسیل زیر موسوم به **معادله دیفرانسیل کومر** صدق می کند.

$$ zD^2w+(c-z)Dw-aw=0 $$

به همین دلیل است که برخی از توابع شناخته شده و توابعی که در این فصل تعریف شده اند را می توان برحسب توابع فوق هندسی نوشت. توجه داریم که

$$(1-z)^{-a} = {}_1F_0(a;z),$$
$$ln\frac{1+x}{1-x} = 2x{}_2F_1\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};x^2\right), \qquad 0 \le x < 1,$$
$$\gamma^*(\nu,z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}{}_1F_1(\nu,\nu+1;z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}e^{-z}{}_1F_1(1,\nu+1;z),$$
$$B_\tau(x,y) = x^{-1}\tau^x{}_2F_1(x,1-y,x+1;\tau) = x^{-1}\tau^x(1-\tau)^y{}_2F_1(x+y,1,x+1;\tau),$$

که $B_r(x,y)$ **تابع بتای ناقص** بوه و برای $Re(x) > 0$ به صورت تعریف می شود

$$B_r(x,y) = \int_0^\tau \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1}dt, \quad 0 < \tau < 1 \qquad (14-1)$$

۱-۲-۷ تابع میتاژ- لفلر

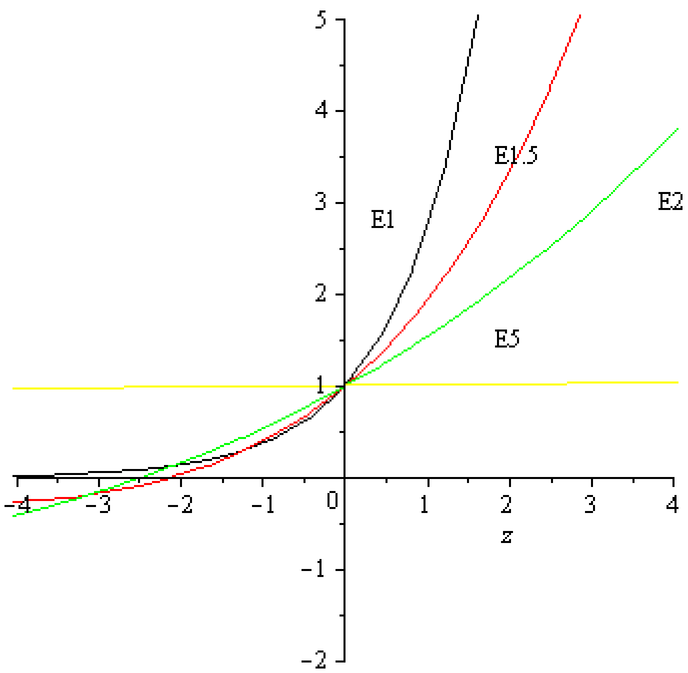
می دانیم تابع نمائی e^z در تئوری معادلات دیفرانسیل معمولی نقش مهمی ایفا می کند. تعمیم یک پارامتری آن که به صورت زیر نمایش داده می شود [2, 3]

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{\Gamma(1+k\alpha)} \ , \quad \alpha \ge 0 \qquad (15-1)$$

این تابع توسط جی.ام.میتاژ- لفلر[1] تعریف و مورد مطالعه قرار گرفت و تابع میتاژ- لفلر[4] نامیده می شود.

در نمودار $(1-1)$ تابع میتاژ- لفلر برای ۵ و۲ و۱/۵ و۱ $= \alpha$ نمایش داده شده است.

---
[1] G. M. Mittag-leffler, Sopra la fonzione , Rend.Acc.Lincei, ser. 5 vol, 13, 1904, pp.3-5



شکل ۱-۱

تابع دو پارامتری از نوع میتاژ- لفلر که در حساب کسری اهمیت ویژه ای دارد را اولین بار آگاروال[1] [5] به صورت زیر معرفی کرد

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad , \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \qquad (16-1)$$

با نماد های تعریف فوق چنانچه فرض کنیم $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ خواهیم داشت

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \qquad (17-1)$$

به همین ترتیب می توان روابط زیر را به دست آورد.

$$E_{1,1,}(z) = \frac{e^z-1}{z}, \qquad (18-1)$$

$$E_{2,1}(z) = cosh(\sqrt{z}), \qquad (19-1)$$

[1] Agrawal

$$E_{2,2}(z)=\frac{sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}. \qquad (20-1)$$

هم چنین اشاره می کنیم که اگر در تابع دو پارامتری میتاژ- لفلر $\beta=1$ باشد، تابع یک پارامتری میتاژ- لفلر به دست می آید

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \cong E_\alpha(z). \qquad (21-1)$$

فرمولهای دیگری از تابع میتاژ- لفلر وابسته به مجموع یابی و انتگرال گیری از تابع میتاژ- لفلر معمولی (دارای یک پارامتر α) را به صورت زیر ارائه می کنیم

$$E_\alpha(z)=\frac{1}{p}\sum\nolimits_{h=0}^{p-1}E_{\frac{\alpha}{p}}\left(z^{\frac{1}{p}}e^{iz\pi\frac{h}{p}}\right),p \in N, \qquad (22-1)$$

$$E_\alpha(z)=\frac{1}{2}\left[E_{\frac{\alpha}{2}}\left(+z^{\frac{1}{2}}\right)+E_{\frac{\alpha}{2}}\left(-z^{\frac{1}{2}}\right)\right], \qquad (23-1)$$

$$\int_0^\infty e^{\frac{-x^2}{(4t)}}E_\alpha(x^\alpha)dx=\sqrt{\pi t},tE_{\frac{\alpha}{2}}\left(t^{\frac{\alpha}{2}}\right) > 0, \qquad (24-1)$$

$$\int_0^\infty e^{-u}E_\alpha(u^\alpha z)du=\frac{1}{1-z},\alpha > 0. \qquad (25-1)$$

تابع چند متغیره میتاژ- لفلر به صورت زیر تعریف می شود

$$E_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\beta}(z_1,\dots,z_{n+1}) =\sum\nolimits_{k=o}^{\infty}\sum\nolimits_{\substack{l_1+\dots+l_{n+1}=k\\ l_j\geq 0}}(k;l_1+\dots+l_{n+1})\left[\frac{\prod_{j=1}^{n+1}z_j^{l_j}}{\Gamma\left(\beta+\sum_{j=1}^{n+1}\beta_j l_j\right)}\right]. \qquad (26-1)$$

۱-۳ قاعده لایب نیتز

قاعده لایب نیتز برای دو تابع $g(t)$ و $f(t)$، برای محاسبه مشتق nام حاصلضرب این دو تابع به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{d^n}{dt^n}\big(g(t)f(t)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(t) f^{(n-k)}(t) \qquad (27-1)$$

۴-۱ قانون لایب نیتز برای مشتقگیری از انتگرال

اگر بخواهیم از انتگرال $\int_{f(x)}^{h(x)} G(x,t)\,dt$ نسبت به x مشتق بگیریم با توجه به قانون لایب نیتز داریم

$$\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{h(x)} G(x,t)\,dt = G\big(x,h(x)\big)\frac{dh(x)}{dx} - G\big(x,f(x)\big)\frac{df(x)}{dx} + \int_{f(x)}^{h(x)} \frac{\partial G(x,t)}{\partial x}dt$$

که در آن $G(x,t)$ و $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}$ توابعی پیوسته در دامنه D می باشند به طوری که D شامل مستطیل R، به صورت $R = \big((x,t)\big| a \le x \le b,\ t_0 \le t \le t_1\big)$ و می باشد. از طرفی $g(t)$ و $f(t)$ توابعی هستند که دارای مشتق پیوسته می باشند.

۵-۱ فرمول کوشی برای انتگرال n گانه

فرمول کوشی انتگرال n گانه به فرم زیر است

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad (28-1)$$

فصل دوم

مشتقات و انتگرالهای کسری

۲-۱ مقدمه

همانگونه که در مقدمه بیان شد، ایده انتگرال و مشتق از مرتبه کسری در سال ۱۶۹۵ در نامه لایب نیتز به هوپیتال بیان شد. بسیاری از پدیده ها در مسائل فیزیک، شیمی و دیگر علوم را می توان با استفاده از ابزار ریاضی حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری به صورت مدل ریاضی بیان کرد[6, 7]. تعاریف زیادی در خصوص مفهوم انتگرال و مشتق از مرتبه غیر صحیح وجود دارد.

در این فصل تعاریف *ریمان- لیوویل* و *گرونوالد- لتنیکوف* و کاپوتو را ارائه می دهیم.

۲-۲ مشتقات کسری گرونوالد- لتنیکوف[۲۳]

۲-۲-۱ بیان توسط مشتقات و انتگرالهای از مرتبه صحیح

در این قسمت درباره دو نکته که غالباً در آنالیز کلاسیک مطرح می شوند بحث می کنیم، مشتق از مرتبه n و انتگرال n–گانه. تابع پیوسته $f(t)$ را در نظر بگیرید. طبق تعریف مشتق، اولین مشتق تابع $f(t)$ به صورت زیر است

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h}. \qquad (1-2)$$

اگر این تعریف را دوباره استفاده کنیم مشتق مرتبه دوم حاصل می شود

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(t)-f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(t)-f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)}{h^2}. \qquad (2-2) \end{aligned}$$

با استفاده از مطالب فوق داریم

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t)-3f(t-h)+3f(t-2h)-f(t-3h)}{h^3}, \qquad (3-2)$$

و با استقراء ریاضی داریم

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}f(t-rh), \qquad (4-2)$$

که در آن

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}, \qquad (5-2)$$

---

[23] Grünwald-Letnikov

ضرائب بسط دو جمله ای هستند. حال فرض کنید عبارت زیر تعمیمی از$(2-1)$ تا $(2-4)$ باشد

$$f_h^p(t) = \frac{1}{h^p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh), \qquad (6-2)$$

که p یک عدد صحیح دلخواه است و n نیز عددی صحیح است. برای $n \le p$ داریم

$$\lim_{h\to 0} f_h^p(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}, \qquad (7-2)$$

زیرا در این حالت همان طور که از ضرائب بسط دوجمله ای نتیجه می شود، تمام ضرائب صورت بعد از $\binom{p}{p}$ صفر خواهند بود.

اکنون مقادیر منفی p را در نظر بگیرید. برای سادگی کار نماد زیر را به کار می بریم

$$\begin{bmatrix}p\\r\end{bmatrix} = \frac{p(p+1)\dots(p+r-1)}{r!}. \qquad (8-2)$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r\begin{bmatrix}p\\r\end{bmatrix}. \qquad (9-2)$$

با جای گذاری $-p$ در $(2-6)$ به جای p داریم

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}p\\r\end{bmatrix}f(t-rh). \qquad (10-2)$$

که در آن p یک عدد صحیح مثبت است.

اگر n یک عدد ثابت باشد آنگاه $f_h^{(-p)}(t)$ وقتی $h \to 0$ به مقدار نه چندان جالب صفر میل می کند. برای رسیدن به یک حد ناصفر باید فرض کنیم $n \to \infty$ وقتی $h \to 0$. فرض کنید $h = \frac{t-a}{n}$، که $a \in \mathcal{R}$ است در این صورت مقدار حد $f_h^{(-p)}(t)$ را متناهی یا نامتناهی در نظر می گیریم و با نماد زیر نمایش می دهیم

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_aD_t^{-p}f(t).$$ (11

− 2)

در اینجا ${}_aD_t^{-p}f(t)$ در واقع اشاره به انجام عملی معین روی تابع $f(t)$ دارد و a و t کرانها هستند.

حال چند حالت خاص را در نظر می گیریم:

برای $p = 1$ داریم

$$f_h^{(-1)}(t) = h\sum_{r=0}^{n} f(t-rh).$$ (12

− 2)

با توجه به $t - nh = a$ و اینکه تابع $f(t)$ پیوسته فرض شده است خواهیم داشت

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_aD_t^{-1}f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z)dz = \int_a^t f(\tau)d\tau.$$ (13

− 2)

حال فرض کنید $p = 2$، در این حالت داریم

$$\begin{bmatrix}2\\ r\end{bmatrix} = \frac{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2+r-1)}{r!} = r+1,$$

و از آنجا خواهیم داشت

$$f_h^{(-2)}(t) = h\sum_{r=0}^{n} ((r+1)h)f(t-rh).$$ (14

− 2)

با در نظر گرفتن $t + h = y$ می توان نوشت

$$f_h^{(-2)}(t) = h\sum_{r=1}^{n+1} (rh)f(y-rh).$$ (15

− 2)

حال اگر $h \to 0$ داریم

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_aD_t^{-2}f(t) = \int_0^{t-a} zf(t-z)dz = \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau,$$ (16

− 2)

چون $y \to t$ وقتی که $h \to 0$.

سومین حالت خاص، حالت $p = 3$ است که فرم کلی عبارت ${}_aD_t^{-p}f(t)$ را نشان می دهد. در این حالت

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2 \times 3 \times \ldots \times (3 + r - 1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1 \times 2},$$

و داریم

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2}\sum_{r=0}^{n}(r+1)(r+2)h^2 f(t - rh). \qquad (17-2)$$

همانند بالا قرار می دهیم $t + h = y$ و داریم

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2}\sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y - rh). \qquad (18-2)$$

می توانیم عبارت فوق را به صورت زیر بنویسیم

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2}\sum_{r=1}^{n+1}(rh)^2 f(y - rh) + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y - rh). \qquad (19-2)$$

حال اگر $h \to 0$ داریم

$${}_aD_t^{-3}f(t) = \frac{1}{2!}\int_0^{t-a} z^2 f(t - z)dz = \int_a^t (t - \tau)^2 f(\tau)d\tau. \qquad (20-2)$$

اگر $h \to 0$ در این صورت $y \to t$ و در نتیجه داریم

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} \frac{h^2}{1 \cdot 2}\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y - rh) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h\int_a^t (t - \tau)f(\tau)d\tau = 0$$

از روابط $(2-13)$ تا $(2-20)$ رابطه زیر نتیجه می شود

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) $$

$$ = \frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau. \quad (21-2) $$

برای اثبات رابطه از استقراء ریاضی استفاده می کنیم و نشان می دهیم که اگر رابطه برای p برقرار باشد برای $p+1$ نیز برقرار است.

تابع $f_1(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$ را در نظر می گیریم که خاصیت $f_1(a) = 0$ را دارد و فرض می کنیم که

$$ {}_aD_t^{-p-1}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) $$

$$ = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) \qquad (22-2) $$

$$ - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-(r+1)h). $$

با به کارگیری خاصیت $\begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix}$ که از $(8-2)$ نتیجه می شود در اولین مجموع $(22-2)$ و جاگذاری $r-1$ به جای r در مجموع دوم خواهیم داشت

$$ {}_aD_t^{-p-1}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) $$

$$ + \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) $$

$$ - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=1}^{n+1} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \qquad (23-2) $$

$$ = {}_aD_t^{-p}f_1(t) - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f_1(t-(n+1)h) $$

$$ = {}_aD_t^{-p}f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right). $$

از تعریف تابع $f_1(t)$ نتیجه می گیریم

$$ \lim_{n\to\infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0 $$

با توجه به نمایش حدی تابع گاما می توان نوشت

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n^p n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}, \qquad (24-2)$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p-1} f(t) &= {}_aD_t^{-p} f_1(t) = \frac{1}{(p+1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau)d\tau \\ &= \frac{(t-\tau)^p f_1(\tau)}{p!}\Bigg|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{p!}\int_a^t (t-\tau)^p f(\tau)d\tau \qquad (25-2) \\ &= \frac{1}{p!}\int_a^t (t-\tau)^p f(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

که اثبات فرمول $(21-2)$ را کامل می کند.

حال می خواهیم نشان دهیم که فرمول $(21-2)$ دارای نمایشی به صورت انتگرال p -گانه می باشد.

از طرفین رابطه زیر که از $(21-2)$ نتیجه شده است، انتگرال می گیریم

$$\frac{d}{dt}\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) = \frac{1}{(p-2)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau)d\tau = {}_aD_t^{-p+1} f(t). \qquad (26-2)$$

داریم

$$\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) = \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+1} f(t)\right)dt$$

$$\left({}_aD_t^{-p+1} f(t)\right) = \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+2} f(t)\right)dt$$

$$\vdots$$

$$\left({}_aD_t^{-p+k} f(t)\right) = \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+k+1} f(t)\right)dt$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+2}f(t)\right)dt \\
&= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+3}f(t)\right) dt \\
&= \int_a^t dt \int_a^t dt \dots \int_a^t f(t)\, dt.
\end{aligned}
$$

ملاحظه می کنیم که مشتق از مرتبه n و انتگرال n - ام تابع پیوسته $f(t)$ حالتهای خاصی از فرم کلی زیر می باشد

$$
{}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh), \qquad (27-2)
$$

که بیانگر مشتق مرتبه m است اگر $p = m$ و چنانچه $p = -m$ انتگرال مرتبه m را نتیجه می دهد.

مطالب فوق را به تعمیم مشتق و انتگرال به طوریکه p در$(27-2)$ یک عدد حقیقی و یا حتی مختلط باشد، رهنمون می سازد، که البته بحث شامل اعداد مختلط نمی شود و فقط محدود به اعداد حقیقی است. در اینجا با داشتن مقدمات بالا به جمع بندی مطالب فوق و بیان تعریف گرونوالد- لتنیکوف می پردازیم.

۲-۲-۲ مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف

تعریف۲-۱: اگر تابع$f(t)$ پیوسته حقیقی باشد، برای هر $p \in R^+$ مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف مرتبه p تابع$f(t)$ در صورت وجود حد، به شکل زیر خواهد بود

$$
{}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh), \qquad (28-2)
$$

که در آن$h = \frac{t-a}{n}$ و نقاط a و t نقاط کرانه ای نامیده می شوند. در صورتی که $p < 0$ باشد، به جای مشتق، انتگرال کسری گرونوالد- لتنکوف مطرح می شود که تعریف آن به صورت زیر است

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{-p}{r} f(t-rh). \quad (29-2) $$

اگر از$(2-9)$ استفاده کنیم، رابطه زیر به دست می آید که برای اثبات قضایا مورد استفاده قرار می گیرد:

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh). \quad (30-2) $$

مساله مهمی که اینجا مطرح است مساله وجود حد فوق است. در پائین قضیه ای ذکر می کنیم که با استفاده از آن می توان در مورد وجود و مقدار حد های فوق اظهار نظر کرد.

قضیه۲-۲: [1] دنباله های $\alpha_{n,k}$, β_k , $(k = 1,2,\ldots)$را در نظر بگیرید همچنین فرض کنید که شرایط زیر برقرار باشند

$\lim_{k\to\infty} \beta_k = 1\,;$

$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k} = 0 \quad ;$ برای تمام k

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} = A \quad ;$ برای تمام k

$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{n,k}| < M \quad ;$ برای تمام n

در این صورت

$$ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = A. $$

قضیه فوق نتیجه ساده ای دارد و آن اینکه اگر

$$ \lim_{k\to\infty} \beta_k = B, $$

در این صورت

$$ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = AB. $$

برای اثبات فرض می کنیم $\tilde{\beta}_k = \frac{\beta_k}{B}$، از اینرو داریم $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\beta}_k = 1$،پس با توجه به قضیه ی ۲-۲ جای β_k در قضیه ۲-۲ نتیجه مطلوب بدست می آید.

اکنون به محاسبه انتگرال از مرتبه p تابع پیوسته $f(t)$ می پردازیم (که p عددی حقیقی است). بنابراین لازم است تا مقدار حدی که در تعریف آمده است را به دست آوریم. برای انجام این کار باید از قضیه $2-2$ استفاده کنیم. برای به کار بردن قضیه $2-2$ در محاسبه حد عبارت $(2-30)$ به صورت زیر عمل می کنیم

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum\nolimits_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \sum\nolimits_{r=0}^{n} \frac{1}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t-rh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \sum\nolimits_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t-rh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \sum\nolimits_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \frac{t-a}{n} \left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f\left(t - r\frac{t-a}{n}\right).
\end{aligned}$$

حال قرار می دهیم:

$$\beta_r = \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix},$$
$$\alpha_{n,r} = \frac{t-a}{n} \left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f\left(t - r\frac{t-a}{n}\right).$$

اگر از صورت حدی تابع گاما استفاده کنیم آنگاه

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} \beta_r &= \lim_{r\to\infty} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \\
&= 1. \qquad (31-2)
\end{aligned}$$

اگر $f(t)$ روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_{r=0}^{n} \alpha_{n,r} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \sum\nolimits_{r=0}^{n} \frac{t-a}{n} \left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f\left(t - r\frac{t-a}{n}\right) \\
&= \lim_{h\to\infty} \sum\nolimits_{r=0}^{n} h(rh)^{p-1} f(t-rh)
\end{aligned}$$

$$= \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \qquad (32-2)$$

با به کارگیری روابط $(2-31)$ و $(2-32)$ در قضیه $2-1$ داریم

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \qquad (33-2)$$

اگر $f^{/}(t)$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد فرمول $(2-32)$ با انتگرالگیری جزء به جزء به فرم زیر در می آید

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau. \qquad (34-2)$$

چنانچه تابع $f(t)$ دارای $m+1$ مشتق پیوسته باشد، با به کارگیری مکرر روش جزء به جزء داریم

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \qquad (35-2)$$

چون استفاده از تعریف برای محاسبه انتگرال کسری گرونوالد- لتنیکوف کاری بسیار دشوار است، لذا برای به دست آوردن انتگرال از قضیه زیر استفاده می کنیم که جمع بندی مطالب فوق می باشد.

قضیه ۲-۳: [1] ***قضیه انتگرال گیری از مرتبه دلخواه.*** *اگر تابع* $f \in C^{m+1}[a,b]$ *و* $m \le p < m+1$ *که در آن* $m \in N \cup \{0\}$*، در این صورت انتگرال کسری گرونوالد- لتنیکوف از مرتبه* p *عبارت است از*

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \qquad (36-2)$$

اکنون می خواهیم مشتق کسری تابع $f(t)$ را به دست بیاوریم. برای این کار باید مقدار حد موجود در تعریف را به دست بیاوریم. بنابراین هدف ما، محاسبه حد زیر می باشد

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p} \sum\nolimits_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t), \qquad (37-2) \end{aligned}$$

که در آن

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum\nolimits_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh). \qquad (38-2)$$

برای محاسبه حد $(37-2)$ مجدداً با اعمال تکنیک هائی شرایط استفاده از قضیه $2-2$ را ایجاد می کنیم. به دلیل طولانی بودن اثبات از آوردن آن در اینجا خوداری می کنیم و فقط به ذکر صورت قضیه می پردازیم.

قضیه ۲-۴: [1] ***قضیه مشتقگیری از مرتبه دلخواه***. *اگر تابع* $f \in C^{m+1}[a,b]$ *و* $m \le p < m+1$ *که در آن* $m \in N \cup \{0\}$ *در این صورت مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف از مرتبه* p *عبارت است از*

$${}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \qquad (39-2)$$

فرمول فوق تحت این فرض به دست آمد که $f^{(k)}(t)\ ,\ (k=1,2,\dots,m+1)$ در بازه بسته $[a,t]$ پیوسته هستند و m کوچکترین عدد صحیحی است که در شرایط زیر صدق می کند

$$m \le p < m+1.$$

در حساب دیفرانسیل معمولی می دانیم که مشتقات مراتب بالا از ترکیب مشتق به دست می آید. به عنوان مثال

$$D^3 f(t) = D^2\big(Df(t)\big) = D\big(D^2 f(t)\big) = D\Big(D\big(Df(t)\big)\Big).$$

حال می خواهیم بدانیم که آیا این قوانین برای مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف نیز صحیح است؟ به عبارت دیگر می خواهیم بدانیم $D^{\frac{5}{3}}f(t) = D\left(D^{\frac{2}{3}}f(t)\right)$ و $D^{\frac{3}{3}}f(t) = D^{\frac{1}{2}}\big(Df(t)\big)$ درست هستند یا نه و یا تحت چه شرایطی برقرارند. برای پاسخ دادن به این سوالات که ترکیب مشتقات نام دارند لازم است تا مشتق کسری $(t-a)^{v}$ را بدانیم زیرا به عنوان مثال اگر بخواهیم اثر مشتق کسری مرتبه α را بر مشتق از مرتبه p بیابیم یعنی بخواهیم $_aD_t^{\alpha}\big({}_aD_t^{p}f(t)\big)$ را بیابیم با توجه به $(2-39)$ که مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف از مرتبه p را نتیجه می دهد، باید $_aD_t^{\alpha}$ را هم بر مجموع و هم بر انتگرال موجود در اطراف راست رابطه اثر دهیم. بنابراین باید مشتق کسری $(t-a)^{v}$ را بدانیم. ابتدا در قسمت بعد این کار را انجام می دهیم و فرمول به دست آمده را در قسمتهای بعدی، برای پاسخ دادن به سوالات مطرح شده مورد استفاده قرار می دهیم.

۳-۲-۲ مشتق کسری گرونوالد – لتنیکوف تابع $(t-a)^{v}$

همان طور که گفتیم می خواهیم مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف $_aD_t^{p}f(t)$ تابع توانی یعنی $f(t)=(t-a)^{v}$ را بیابیم که در آن v یک عدد حقیقی است. ابتدا فرض می کنیم که p عددی منفی باشد. پس در واقع می خواهیم انتگرال کسری از مرتبه p را بیابیم. برای اینکار از فرمول $(2-33)$ استفاده می کنیم

$$_aD_t^{p}(t-a)^{v}=\frac{1}{\Gamma(-p)}\int_a^t(t-\tau)^{-p-1}(\tau-a)^{v}d\tau. \qquad (40-2)$$

برای همگرائی انتگرال فرض کنیم $v>-1$. حال اگر از تغییر متغیر $\tau=a+\xi(t-a)$ استفاده کنیم داریم

$$_aD_t^{p}(t-a)^{v}=\frac{1}{\Gamma(-p)}(t-a)^{v-p}\int_0^1\xi^{v}(1-\xi)^{-p-1}d\xi.$$

ملاحظه می کنیم که انتگرال بالا انتگرال تابع بتا می باشد. پس داریم

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p(t-a)^\upsilon &= \frac{1}{\Gamma(-p)}B(-p,\upsilon+1)(t-a)^{\upsilon-p} \\
&= \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon-p+1)}(t-a)^{\upsilon-p}, \qquad (p<0,\upsilon>-1). \qquad (41-2)
\end{aligned}
$$

حال فرض کنید $p>0$ پس می توان عدد طبیعی مثل m یافت که $0\le m\le p<m+1$ این بار از فرمول (۲-۳۹) استفاده می کنیم ضمن اینکه برای همگرائی انتگرال باید فرض کنیم $\upsilon>m$. با توجه فرمول(۲-۳۹) ملاحظه می کنیم که جمله اول سمت راست برابر صفر خواهد بود. زیرا مشتقات $f(t)=(t-a)^\upsilon$ در نقطه $t=a$ صفر می شود. پس فقط جمله شامل انتگرال باقی می ماند

$$
{}_aD_t^p(t-a)^\upsilon = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}\frac{d^{m+1}(\tau-a)^\upsilon}{d\tau^{m+1}}d\tau. \qquad (42-2)
$$

با توجه به

$$
\frac{d^{m+1}(\tau-a)^\upsilon}{d\tau^{m+1}} = \upsilon(\upsilon-1)\ldots(\upsilon-m)(\tau-a)^{\upsilon-m-1} = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon-m)}(\tau-a)^{\upsilon-m-1},
$$

اگر تغییر متغیر $\tau=a+\xi(t-a)$ را به کار بگیریم داریم

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p(t-a)^\upsilon &= \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon-m)\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}(\tau-a)^{\upsilon-m-1}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\upsilon+1)B(-p+m+1,\upsilon-m)}{\Gamma(\upsilon-m)\Gamma(-p+m+1)}(t-a)^{\upsilon-p} \qquad (43-2) \\
&= \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(-p+\upsilon+1)}(t-a)^{\upsilon-p}.
\end{aligned}
$$

ملاحظه می کنیم که (۲-۴۳) و (۲-۴۱) نسبت به p متقارن هستند. پس می توانیم بگوییم که مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف تابع توانی $f(t)=(t-a)^\upsilon$ با فرمول زیر داده می شود

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p(t-a)^\upsilon &= \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon-p+1)}(t-a)^{\upsilon-p}, \qquad (p<0,\upsilon>-1) \text{ or} \\
&\qquad (0\le m\le p<m+1,\upsilon>m). \qquad (44-2)
\end{aligned}
$$

۲-۲-۴ ترکیب با مشتقات مرتبه صحیح

در این قسمت به این سوال که آیا رابطه زیر در حالت کلی برقرار است یا خیر، پاسخ می دهیم

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^p\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = {}_aD_t^{p+n}f(t).$$

در (۲-۳۹) که رابطه ای کاربردی برای محاسبه مشتق کسری است به جای m از حرف s استفاده می کنیم. پس (۲-۳۹) به فرم زیر تبدیل می شود

$${}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(k)}(t)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)}\int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(s+1)}(\tau)d\tau. \qquad (45-2)$$

ابتدا می خواهیم وقتی که $s \geq m+n-1$، مشتق مرتبه صحیح n رابطه فوق را بیابیم. برای این کار داریم

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = \sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(-p-n+s+1)}\int_a^t (t-\tau)^{s-p-n} f^{(s+1)}(\tau)d\tau \qquad (46-2)$$

$$= {}_aD_t^{p+n}f(t). \qquad (47-2)$$

چون $s \geq m+n-1$ دلخواه است پس قرار می دهیم $s = m+n-1$، لذا

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^{p+n}f(t) = \sum_{k=0}^{m+n+1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau). \qquad (48-2)$$

حال می خواهیم مشتق کسری مشتق معمولی را به دست آوریم. از (۲-۴۵) داریم

$$ {}_aD_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)}\int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(n+s+1)}(\tau)d\tau. \qquad (49-2) $$

حال با فرض $s = m - 1$ داریم

$$ {}_aD_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(n+m)}(\tau)d\tau. \qquad (50-2) $$

با مقایسه (۲-۵0) و (۲-۴۸) داریم

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)}. \qquad (51-2) $$

رابطه (۲-۵۱) نشان می دهد که $\frac{d^n}{dt^n}$ و ${}_aD_t^p$ جا به جا می شوند یعنی

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^p\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = {}_aD_t^{p+n} f(t) $$

فقط اگر در کران پائینی یعنی $t = a$ داشته باشیم

$$ f^{(k)}(a) = 0 \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n-1). \qquad (52-2) $$

۲-۲-۵ ترکیب مشتقات کسری گرونوالد- لتنیکوف

در اینجا می خواهیم ببینیم که آیا مشتقات کسری با یکدیگر جا به جا می شوند. در واقع کار بررسی مقدار ${}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right)$ است که بحث خود را در دو حالت انجام می دهیم. $p > 0$ و $p < 0$ بسته به علامت q مشتق از مرتبه $q > 0$ و یا انتگرال از مرتبه $-q > 0$ بر عملگر داخل پرانتز اثر می کند. در هر یک از حالتهای ذکر شده، درستی رابطه زیر را بررسی می کنیم.

$$ {}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right) = {}_aD_t^{p+q} f(t). $$

حالت اول: $p < 0$

ابتدا فرض می کنیم $q < 0$، داریم:

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(-q)}\int_a^t (t-\tau)^{-q-1}\left({}_aD_\tau^p f(t)\right)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-q-1}d\tau\int_a^\tau (\tau-\xi\ )^{-p-1}f(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}\int_a^t f(\xi)d\xi\int_\xi^t (t-\tau)^{-q-1}(\tau-\xi\ )^{-p-1}d\tau \qquad (53-2) \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p-q)}\int_a^\tau (\tau-\xi\ )^{-p-q-1}f(\xi)d\xi \\
&= {}_aD_t^{p+q}f(t).
\end{aligned}
$$

در محاسبات مربوط به تساوی چهارم از تغییر متغیر $\tau = \xi + z(t-\xi)$ و تعریف تابع بتا به صورت زیر استفاده شده است

$$
\begin{aligned}
\int_\xi^t (t-\tau)^{-q-1}(\tau-\xi\ )^{-p-1}d\tau &= (\tau-\xi\ )^{-p-q-1}\int_0^1 (1-z)^{-q-1}(z\ )^{-p-1}dz \\
&= \frac{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}{\Gamma(-p-q)}(\tau-\xi\ )^{-p-q-1}.
\end{aligned}
$$

حال فرض کنید $q > 0$، در این صورت $0 < n < q < n+1$. برای بررسی این حالت ابتدا q را به صورت $q = (n+1) + (q-n-1)$ در نظر می گیریم که $q-n-1 < 0$ و سپس با تجزیه ${}_aD_t^q$ به صورت ${}_aD_t^q f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left\{{}_aD_t^{q-n-1}f(t)\right\}$ خواهیم داشت (توجه می کنیم که به دلیل این که رابطه $\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^{p+n}f(t)$ از (۲-۴۸) همواره برقرار است اجازه چنین تجزیه ای را داریم)

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left\{{}_aD_t^{q-n-1}\left({}_aD_t^p f(t)\right)\right\} \\
&= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left\{{}_aD_t^{p+q-n-1}f(t)\right\} \qquad (54-2)
\end{aligned}
$$

$$= {}_aD_t^{p+q} f(t).$$

با ترکیب (۲-۵۳) و (۲-۵۴) در می یابیم که اگر $p < 0$ برای هر مقدار حقیقی q داریم

$$ {}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^{p+q} f(t).$$

نتیجه۲-۵: اگر مشتق کسری را روی انتگرال کسری از همان مرتبه به کار گیریم، اثر یکدیگر را خنثی می کنند، به عبارت دیگر

$$ {}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) = f(t)$$

حالت دوم: $p > 0$

در این حالت فرض کنید که $0 \le m \le p < m+1$، در این صورت طبق $(39-2)$ داریم

$$ {}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \qquad (55-2)$$

ابتدا فرض می کنیم $q < 0$ و مقدار ${}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right)$ را محاسبه می کنیم. با مشاهده طرف راست (۲-۵۵) در می یابیم که توابع $(t-a)^{-p+k}$ برای $k = 0,1,2,\ldots,m-1$ انتگرال پذیر نیستند. (انتگرال ناپذیری توابع مذکور به این دلیل است که $-p+k < 0$ در محاسبه انتگرال فوق نقطه a یک نقطه تکین محسوب می شود.) بنابراین انتگرال کسری مرتبه q عبارت ${}_aD_t^p f(t)$ در صورتی وجود دارد که جمله اول سمت راست (۲-۵۵) صفر شود و این زمانی امکان پذیر است که

$$f^{(k)}(a) = 0 \qquad (k = 0,1,2,\ldots,m-1). \qquad (56-2)$$

پس با در نظر گرفتن نماد فوق و شرایط (۲-۵۶) و توجه به اینکه انتگرال سمت راست همان معادل ${}_aD_t^{p-m-1}f(t)$ است (انتگرال کسری مرتبه $(-p+m+1)$ تابع $f(t)$) رابطه (۲-۵۵) به شکل زیر در می آید

$$
{}_aD_t^p f(t) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p+m}}{\Gamma(-p+m+1)} + {}_aD_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t). \qquad (57-2)
$$

اکنون می توانیم مشتق کسری مرتبه $q<0$ به عبارت دیگر انتگرال کسری مرتبه $-q>0$ رابطه (۲-۵۷) را به دست آوریم

$$
{}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p-q+m}}{\Gamma(-p-q+m+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)}\int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{p+q-m}}, \qquad (58-2)
$$

زیرا

$$
{}_aD_t^q\left({}_aD_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t)\right) = {}_aD_t^{p+q-m-1} f^{(m+1)}(t) = \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)}\int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{p+q-m}}.
$$

حال با استفاده از شرایط (۲-۵۶) و رابطه (۲-۵۸) داریم

$$
{}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^{p+q} f(t). \qquad (59-2)
$$

حالت آخر که $q>0$ است نیز بحثی مشابه دارد. در این حالت ابتدا فرض می کنیم که $0<n<q<n+1$ با قبول شرایط (۲-۵۶) برای $f(t)$ و با توجه به اینکه $q-n-1<0$ می توان نوشت

$$
{}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left\{{}_aD_t^{q-n-1}\left({}_aD_t^p f(t)\right)\right\}
$$

$$= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{ {}_aD_t^{p+q-n-1} f(t) \} \qquad (60-2)$$
$$= {}_aD_t^{p+q} f(t).$$

که همان (۲-۵۹) است. پس می توان گفت رابطه ${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$ اگر $p < 0$ باشد، برای هر q حقیقی دلخواه برقرار است و اگر $0 < m < p < m+1$ $(p > 0)$، در صورتی برای هر q حقیقی دلخواه برقرار است که شرایط $f^{(k)}(a) = 0, \ (k = 0,1,2,\ldots,m-1)$ برقرار باشد. علاوه بر این اگر $0 < n < q < n+1 , 0 < m < p < m+1$ و تابع $f(t)$ در شرایط $f^{(k)}(a) = 0$ به ازای $k = 0,1,2,3,4,\ldots,r-1$ که $r = \max\{n, m\}$ صدق کند مشتقات کسری ${}_aD_t^p$ و ${}_aD_t^q$ جابه جا می شوند:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) &= {}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) \\ &= {}_aD_t^{p+q} f(t). \qquad (61-2) \end{aligned}$$

۲-۳ مشتقات کسری ریمان – لیوویل[24]

در بسیاری از جاها مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف تعریف شده به صورت حد یک تفاضل پسرو مرتبه کسری قابل استفاده نیست و به دنبال عبارتی صریحتر و ساده تر مشتق کسری هستیم. عبارت موجود در (۲-۳۹) به واسطه وجود انتگرال در آن مفیدتر به نظر می رسد. اما جمله اول آن همچنان مشکل ساز می با شد. برای برطرف کردن این مشکل سعی می کنیم تا عبارت (۲-۳۹) را به صورت حالت خاصی از عبارت انتگرال – دیفرانسیلی زیر در نظر بگیریم

$${}_aD_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \ , \ (m \le p < m+1). \qquad (62-2)$$

عبارت (۲-۶۲) شاید معروف ترین تعریف مشتق کسری باشد که غالباً مشتق کسری ریمان- لیوویل نامیده می شود.

[24] Riemann-Liouville

عبارت (۲-۳۹) که برای مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف با این فرض که $f(t)$ دارای $(m+1)$ مشتق پیوسته باشد، به سادگی از روی (۲-۶۲) نیز با همان مفروضات به دست می آید. این کار با استفاده مکرر از انتگرال گیری جزء به جزء و محاسبه مشتق در پایان صورت می گیرد، یعنی

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^p f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau)d\tau \\
&= \sum\nolimits_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \\
&= {}_aD_t^p f(t), \qquad (m \le p < m+1).
\end{aligned}$$

بنابراین اگر رده ای از توابع مثل $f(t)$ را در نظر بگیریم که دارای $m+1$ مشتق پیوسته برای $t \geq 0$ باشند در این صورت مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف و مشتق کسری ریمان- لیوویل تعریف شده با (۲-۶۲) معادل خواهند بود. حال می خواهیم ببینیم که مشتق کسری ریمان- لیوویل (۲-۶۲) چگونه به صورت نتیجه ای از مفاهیم مشتق و انتگرال معمولی قابل بیان است.

۲-۳-۱ بیان انتگرال کسری ریمان- لیوویل به وسیله انتگرال معمولی

برای شروع تابع $f(\tau)$ را روی هر بازه (a,t) پیوسته و انتگرال پذیر فرض می کنیم. در این صورت انتگرال زیر موجود و متناهی است

$$f^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau. \qquad (63-2)$$

با مفروضات فوق انتگرال مرتبه ۲ تابع $f(\tau)$ به صورت می باشد

$$\begin{aligned}
f^{(-2)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau)d\tau \\
&= \int_a^t f(\tau)d\tau \int_a^{\tau_1} d\tau_1 \qquad (64-2)
\end{aligned}$$

$$= \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

حال انتگرال مرتبه ۳ تابع $f(\tau)$ را در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} f^{(-3)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3) d\tau_3 \\ &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1 - \tau) f(\tau) d\tau \qquad (65-2) \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

با استقراء ریاضی در حالت کلی به فرمول انتگرال کوشی می رسیم

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \ , \qquad t > a. \qquad (66-2)$$

عبارت فوق انتگرال تابع $f(t)$ را از مرتبه صحیح n تعریف می کند که در آن $n \geq 1$. انتگرال کسری ریمان- لیوویل با تعمیم فرمول کوشی به دست می آید. این تعمیم با جاگذاری عدد حقیقی p به جای n صورت می گیرد

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \ , \qquad t > a. \qquad (67-2)$$

در (۲-۶۶) عدد صحیح n باید در شرط $n \leq 1$ صدق کند. شرط متناظر در (۲-۶۷) روی p کمی ضعیف تر است، برای وجود انتگرال (۲-۶۷) بایستی $p > 0$ باشد.

۲-۳-۲ انتگرال کسری ریمان- لیوویل

تعریف۲-۶: اگر $f(t)$ تابعی حقیقی روی$[a, b]$ باشد انتگرال کسری ریمان- لیوویل مرتبه$p > 0$ تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف می شود

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \ , \qquad t > a. \qquad (68-2)$$

اگر $f(t)$ برای $t \geq a$ پیوسته باشد انتگرال کسری ریمان- لیوویل مانند انتگرال کسری گرونوالد- لتنیکوف دارای خاصیت زیر است

$$ {}_aD_t^{-q}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right) = {}_aD_t^{-p-q}f(t), \qquad (69-2) $$

یعنی اگر انتگرال کسری از مرتبه p بر انتگرال کسری از مرتبه q اثر کند حاصل انتگرال گیری از مرتبه $p+q$ خواهد بود. اثبات آنچه گفتیم به صورت زیر است

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-q}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}\left({}_aD_\tau^{-p}f(t)\right)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}d\tau\int_a^\tau (\tau-\xi\ )^{p-1}f(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)\Gamma(p)}\int_a^t f(\xi)d\xi\int_\xi^t (t-\tau)^{q-1}(\tau-\xi\ )^{p-1}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_a^\tau (\tau-\xi\ )^{p+q-1}f(\xi)d\xi \\ &= {}_aD_t^{-p-q}f(t). \end{aligned} $$

در محاسبات مربوط به تساوی چهارم از تغییر متغیر $\tau = \xi + z(t-\xi)$ و تعریف تابع بتا استفاده شده است. واضح است که در اثبات بالا جای p و q می تواند عوض شود. بنابراین مطالب فوق را می توان در قالب قضیه ای به صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۲-۷: اگر تابع $f(t)$ در شرایط تعریف صدق کند، آنگاه برای هر $p > 0$ و $q > 0$ همواره داریم

$$ {}_aD_t^{-q}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right) = {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) = {}_aD_t^{-p-q}f(t). \qquad (70-2) $$

۲-۳-۳ مشتق کسری ریمان- لیوویل

فرمول انتگرال کوشی را دوباره در نظر بگیرید.

$$f^{(-n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau.$$

فرض کنید $n\geq 1$ ثابت باشد و عدد صحیح $k\geq 0$ را در نظر بگیرید. داریم

$$f^{(-k-n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}D^{-k}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau, \qquad (71-2)$$

که در آن نماد D^{-k}، $(k\geq 0)$ اشاره به انتگرال مرتبه k دارد. از طرف دیگر برای هر مقدار ثابت $n\geq 1$ و عدد صحیح $k\geq n$، مشتق مرتبه $k-n$ تابع $f(t)$ را به صورت زیر می توان نوشت

$$f^{(k-n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}D^{k}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau, \qquad (72-2)$$

که در آن نماد D^{k}، $(k\geq 0)$ بیانگر مشتق معمولی مرتبه k می باشد.

دو فرمول (۲-۷۱) و (۲-۷۲) را می توان به عنوان حالت خاصی از یکی از آن به عنوان مثال (۲-۷۲) در نظر گرفت که در آن n ثابت، نماد D^k بیانگر k بار انتگرال گیری است اگر $k\leq 0$، و k بار مشتقگیری است اگر $k>0$. اگر $k=n-1,n-2,\ldots$ در این صورت فرمول (۲-۷۲) بیانگر انتگرالهای مکرر $f(t)$، اگر $k=n$ فرمول خود تابع را نتیجه می دهد و چنانچه $k=n+1,n+2,\ldots$ فرمول مشتقهای مرتبه $k-n=1,2,3,\ldots$ تابع $f(t)$ را نتیجه می دهد.

به منظور تعمیم رابطه (۲-۷۲) جای عدد صحیح n را با یک عدد حقیقی مثل α عوض می کنیم به طوری که $k-\alpha>0$ باشد، در این صورت داریم

$${}_aD_t^{k-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau, \qquad (0 < \alpha \leq 1). \qquad (73-2)$$

برای همگرایی انتگرال موجود در (۲-۷۳) تنها شرط روی α این است که $\alpha > 0$. بدون کاستن از کلیت موضوع این محدودیت را می توان به صورت $0 < \alpha \leq 1$ در نظر گرفت.

با قرار دادن $p = k - \alpha$ رابطه (۲-۷۳) را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$${}_aD_t^{p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau)d\tau, \qquad (k-1 < \alpha \leq k). \qquad (74-2)$$

با توجه به اینکه انتگرال موجود در رابطه فوق همان ${}_aD_t^{-(k-p)}f(t)$ است، می توان نوشت

$${}_aD_t^{p}f(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left({}_aD_t^{-(k-p)}f(t)\right), \quad (k-1 < \alpha \leq k). \qquad (75-2)$$

قبل از اینکه بیشتر وارد این بحث شویم می خواهیم تا مطالب فوق را به صورت تعریفی جامع بیان کنیم:

تعریف۲-۸: اگر $f(t)$ تابعی حقیقی باشد و p یک عدد حقیقی دلخواه باشد، در این صورت مشتق کسری ریمان- لیوویل مرتبه p تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف می شود

$${}_aD_t^{p}f(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left({}_aD_t^{-(k-p)}f(t)\right)$$

که در آن k کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از p می باشد، یعنی $k-1 < p \leq k$.

حال به بررسی بعضی از خواص مشتقات کسری ریمان- لیوویل می پردازیم. اولین و شاید یکی از مهمترین خاصیت مشتقات کسری ریمان- لیوویل این است که برای $p > 0$ و $t > a$ داریم

$${}_aD_t^{p}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right) = f(t). \qquad (76-2)$$

اثبات در حالتی که $p = n > 1$ یک عدد صحیح باشد ساده و به صورت زیر است

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^n\left({}_aD_t^{-n}f(t)\right) &= \frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau \\
&= \frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau \\
&= f(t)
\end{aligned}
$$

در حالتی که $k-1 \leq p < k$ باشد از قضیه ترکیب انتگرالها استفاده کرده و می نویسیم

$$
{}_aD_t^{-k}f(t) = {}_aD_t^{-(k-p)}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right).
$$

حال بر اساس تعریف مشتق کسری داریم

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right) &= \frac{d^k}{dt^k}\left\{{}_aD_t^{-(k-p)}\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right)\right\} \\
&= \frac{d^k}{dt^k}\{{}_aD_t^{-k}f(t)\} \\
&= f(t).
\end{aligned}
$$

که اثبات را کامل می کند. مطلب فوق حالت خاصی از صورت کلی زیر است که آنرا در قالب یک قضیه کلی ثابت می کنیم:

قضیه ۲-۹: *اگر $f(t)$ تابعی پیوسته و در صورتی که ${}_aD_t^{p-q}f(t)$ موجود باشد داریم*

$$
{}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) = {}_aD_t^{p-q}f(t)
$$

اثبات: دو حالت در نظر می گیریم: $0 \leq p \leq q$ و $0 \leq q \leq p$.

اگر $0 \leq p \leq q$، در این صورت با استفاده از (۲-۷5) و (۲-۷۶) داریم

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) &= {}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-p}\,{}_aD_t^{-(q-p)}f(t)\right) \\
&= {}_aD_t^{-(q-p)}f(t) \\
&= {}_aD_t^{p-q}f(t).
\end{aligned}
$$

در صورتی که $p \geq q \geq 0$ اعداد صحیح m,n را طوری در نظر بگیرید که $0 < m-1 \leq p < m$ و $0 < n-1 \leq q < n$ واضح است که $m \geq n$، داریم

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-q}f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left({}_aD_t^{-(m-p)}\,{}_aD_t^{-q}f(t)\right) \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left({}_aD_t^{p-q-m}f(t)\right) \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left({}_aD_t^{-(m-(p-q))}f(t)\right) \\
&= {}_aD_t^{p-q}f(t)
\end{aligned}
$$

نکته جالب و قابل بحث این است که همانند مشتق و انتگرال معمولی، مشتق و انتگرال کسری نیز با یکدیگر جابه جا نمی شوند. به عبارت دیگر عکس قضیه ۲-۹ برقرار نیست و داریم

$$
\begin{aligned}
&{}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-p}f(t)\right) \\
&\qquad = f(t) - \sum_{j=1}^{m}[{}_aD_t^{p-j}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}. \qquad (77-2)
\end{aligned}
$$

برای اثبات داریم

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{p}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}\left({}_aD_\tau^p f(\tau)\right)d\tau \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\ {}_aD_\tau^p f(\tau)d\tau\ \right\}. \qquad (78-2)
\end{aligned}
$$

حال مقدار داخل کروشه را حساب می کنیم

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\ {}_aD_\tau^p f(\tau)d\tau\ &= \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p\,\frac{d^k}{dt^k}\left[{}_aD_\tau^{-(k-p)}f(\tau)\right]d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-k}\left[{}_aD_\tau^{-(k-p)}f(\tau)\right]d\tau \\
&\quad - \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\left({}_aD_t^{-(k-p)}f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \\
&= {}_aD_t^{-(p-k+1)}\left[{}_aD_\tau^{-(k-p)}f(\tau)\right]
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{j=1}^{m}[{}_aD_t^{p-j}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)}$$
$$= {}_aD_\tau^{-1}f(t)-\sum_{j=1}^{m}[{}_aD_t^{p-j}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)}$$

تساوی دوم با استفاده مکرر از روش جزء به جزء تساوی سوم از تعریف ۲-۸ و تساوی آخر از (۲-۷5) به دست آمده است. همچنین وجود تمام جملات فوق از انتگرال پذیر بودن ${}_aD_t^pf(t)$ نتیجه می شود، زیرا با قبول این شرط مقدار تمامی مشتقات کسری از فرم ${}_aD_t^{p-j}f(t)$, $(j=1,2,\dots,k)$ در نقطه $t=a$ موجود و متناهی است.

با جایگذاری مقدار به دست آمده برای $\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t(t-\tau)^p\ {}_aD_\tau^pf(\tau)d\tau$ در (۲-۷۸) اثبات رابطه (۲-۷۷) کامل می شود. نکته فوق نیز حالت خاصی از قضیه زیر است:

قضیه ۲-10.: *اگر $f(t)$ تابعی پیوسته بوده و p و q اعدادی حقیقی باشند به طوری که $0\le k-1\le q<k$ و ${}_aD_t^q$ انتگرال پذیر از مرتبه p باشد در این صورت داریم*

$${}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^qf(t)\right)= {}_aD_t^{q-p}f(t)-\sum_{j=1}^{k}[{}_aD_t^{q-j}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}$$

اثبات: در حالتی که $p\ge q$ از قضیه ۲-۷ و اگر $p\le q$ از قضیه ۲-۹ استفاده کرده سپس با استفاده از(۲-۷۷) داریم

$${}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^qf(t)\right)= {}_aD_t^{q-p}\left(\ {}_aD_t^{-q}\left({}_aD_t^qf(t)\right)\right)$$
$$= {}_aD_t^{q-p}\left\{f(t)-\sum_{j=1}^{k}[{}_aD_t^{q-j}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}\right\}$$
$$= {}_aD_t^{q-p}f(t)-\sum_{j=1}^{k}[{}_aD_t^{q-j}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}.$$

که در آن از مشتق معروف تابع توانی استفاده شده است که به صورت زیر بدست می آید

$$ {}_aD_t^{q-p}\left\{\frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}\right\}=\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}. $$

۴-۳-۲ مشتق کسری تابع توانی $(t-a)^v$

می خواهیم مشتق کسری ریمان-لیوویل مرتبه p تابع $f(t)=(t-a)^v$ را به دست بیاوریم که در آن v یک عدد حقیقی است. برای این کار فرض کنید که عدد طبیعی n وجود دارد که $0\leq n-1\leq p<n$. طبق تعریف ریمان- لیوویل داریم

$$ {}_aD_t^{p}f(t)=\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{-(n-p)}f(t)\right). $$

ابتدا انتگرال کسری مرتبه $\alpha=n-p$ تابع $f(t)=(t-a)^v$ را به دست می آوریم

$$ {}_aD_t^{-\alpha}(t-a)^v=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^v d\tau. $$

حال اگر تغییر متغیر $\tau=a+\xi(t-a)$ را به کار بگیریم داریم

$$ {}_aD_t^{-\alpha}(t-a)^v=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{v+\alpha}\int_0^1\xi^v(1-\xi)^{-\alpha-1}d\xi. $$

ملاحظه می کنیم که انتگرال بالا انتگرال تابع بتا می باشد. بنابراین داریم

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-\alpha}(t-a)^v&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,v+1)(t-a)^{v+\alpha}\\ &=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+\alpha+1)}(t-a)^{v+\alpha} \end{aligned} $$

حال اگر از رابطه اخیر n بار مشتق بگیریم، طبق تعریف، مشتق کسری تابع حاصل می شود

$$ {}_aD_t^{p}(t-a)^v=\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{\alpha}(t-a)^v\right) $$

$$= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\alpha+1)}(t-a)^{\upsilon+\alpha}\right] \qquad (79-2)$$

$$= \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon-p+1)}(t-a)^{\upsilon-p}$$

کلیه مطالب فوق را می توان در فرمول های زیر جمع آوری کرد

$$ {}_aD_t^{-p}(t-a)^{\upsilon} = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+p+1)}(t-a)^{\upsilon+p}\,. \qquad (80-2)$$

$$ {}_aD_t^{p}(t-a)^{\upsilon} = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon-p+1)}(t-a)^{\upsilon-p}\,. \qquad (81-2)$$

۲-۳-۵ ترکیب با مشتقات معمولی

در بسیاری از مسائل کاربردی ترکیب مشتق معمولی و مشتقات کسری ظاهر می شوند. ابتدا می خواهیم اثر مشتق معمولی مرتبه n را روی مشتق کسری مرتبه p بررسی کنیم. با استفاده از (۲-۷۴) داریم

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{p}f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(k-p)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1}f(\tau)d\tau$$

$$= {}_aD_t^{n+p}f(t), \qquad (k-1<p\le k)$$

داریم

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{p}f(t)\right) = {}_aD_t^{n+p}f(t). \qquad (82-2)$$

اما در حالت عکس ابتدا رابطه زیر را در نظر می گیریم

$$ {}_aD_t^{-n}f^{(n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f^{(n)}(\tau)d\tau$$

$$= f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)},$$

سپس با استفاده از قضیه ۲-۹ داریم

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) &= {}_aD_t^{p+n}\left({}_aD_t^{-n} f^{(n)}(t)\right) \\ &= {}_aD_t^{p+n}\left(f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}\right) \qquad (84-2) \\ &= {}_aD_t^{p+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)}. \end{aligned}$$

بنابراین مانند حالت مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف، اگر شرایط(۲-۸۵) برقرار باشد، عملگر کسری ریمان- لیوویل ${}_aD_t^p$ با عملگر مشتق معمولی مرتبه n جابه جا می شود. پس قضیه زیر را ثابت کردیم:

قضیه ۲-۱۱: *اگر $f(t)$ تابعی پیوسته بوده و p عددی حقیقی، و n عددی صحیح باشد، در صورتی که شرایط*

$$f^{(k)}(a) = 0 \qquad (k = 0,1,2,\dots,n-1). \qquad (85-2)$$

برقرار باشد و آنگاه عملگر کسری ریمان-لیوویل ${}_aD_t^p$ با عملگر مشتق معمولی $\frac{d^n}{dt^n}$ جابه جا می شود یعنی

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) &= {}_aD_t^p\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) \\ &= {}_aD_t^{n+p} f(t). \qquad (86-2) \end{aligned}$$

۲-۳-۶ ترکیب با مشتق کسری

در اینجا ترکیب دو عملگر مشتق کسری ریمان- لیوویل ${}_aD_t^p$، $(m-1 \le p < m)$ و ${}_aD_t^q$ ، $(n-1 \le q < n)$ بررسی می کنیم. با استفاده مکرر از تعریف و رابطه (۲-۷۷) و فرمول (۲-۸۲) خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{-(m-p)}\left({}_aD_t^q f(t)\right)\right\} \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma(m-p-j+1)}\right\} \\
&= {}_aD_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}, \qquad (87-2)
\end{aligned}
$$

چون رابطه فوق برای p و q متقارن است بنابراین می توانیم جای آنها راعوض کنیم و سپس تعویض m و n،با انجام این کار خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&{}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) \\
&\quad = {}_aD_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{m}\left[{}_aD_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j-1}}{\Gamma(1-q-j)}. \qquad (88-2)
\end{aligned}
$$

ترکیب روابط (۲-۸۷) و (۲-۸۸) بیان می کند که در حالت کلی عملگرهای مشتق کسری ${}_aD_t^p$ و ${}_aD_t^q$ نمی توانند جا به جا شوند، فقط به یک شرط خاص (علاوه بر حالت بدیهی $p = q$ یعنی برای حالت $p \neq q$ داریم

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right) &= {}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) \\
&= {}_aD_t^{p+q} f(t), \qquad (89-2)
\end{aligned}
$$

فقط اگر هر دو مجموع در سمت راست از روابط (۲-۸۷) و(۲-۸۸) صفر شوند. برای این موضوع به برقراری همزمان شرایط زیر نیاز داریم

$$
\begin{aligned}
&\left[{}_aD_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a} \\
&\quad = 0, \qquad (j = 1,2,\dots,m), \qquad (90-2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a} \\
&\quad = 0, \qquad (j = 1,2,\dots,n). \qquad (91-2)
\end{aligned}
$$

از طرفی اگر $f(t)$ به اندازه کافی مشتقات پیوسته داشته باشد، آنگاه شرایط (۲-۹0) معادل است با

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad (j = 0,1,2,\dots,m-1), \qquad (92-2)$$

و شرایط (۲-۸۹) معادل است با

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad (j = 0,1,2,\dots,n-1). \qquad (93-2)$$

رابطه (۲-۸۹) بر قرار است اگر

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad (j = 0,1,2,\dots,r-1), \qquad (94-2)$$

که در آن $r = max(m,n)$.

۲-۴ ارتباط بین تعریف گرونوالد- لتنیکوف و تعریف ریمان- لیوویل

فرض کنیم تابع $f(t)$، (n-1) بار بطور پیوسته در بازه $[a,T]$ مشتق پذیر باشد و همچنین $f^{(n)}(t)$ در بازه $[a,T]$ انتگرال پذیر باشد. بنابراین برای هر p $(0 < p < n)$ مشتق ریمان- لیوویل ${}_aD_t^p f(t)$ موجود است و با مشتق گرونوالد- لتنیکوف ${}_aD_t^p f(t)$ برابر است، و اگر $0 \le m-1 \le p < m \le n$، آنگاه برای $a < t < T$ داریم

$${}_aD_t^p f(t) = {}_aD_t^p f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p-m+1}}. \qquad (95-2)$$

واضح است که عبارت سمت راست فرمول (۲-۹۵) با مشتق گرونوالد- لتنیکوف ${}_aD_t^p f(t)$ برابر است لذا می توان نوشت

$$\frac{d^m}{dt^m}\left\{\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau)d\tau\right\},$$

که بعد از m بار انتگرال گیری جزبه جزء از فرم مشتق ریمان- لیوویل ${}_aD_t^p f(t)$ داریم

$$\frac{d^m}{dt^m}\left\{\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f\ (\tau)d\tau\right\} = \frac{d^m}{dt^m}\left\{ {}_aD_t^{-(m-p)} f(t)\right\}$$
$$= {}_aD_t^p f(t).$$

حالت خاص زیر از رابطه (۲-۹۵) در مسائل کاربرد فراوانی دارد.

اگر $f(t)$ پیوسته باشد و $f'(t)$ در بازه $[a,T]$ انتگرال پذیر باشند، آنگاه برای هر p $(0 < p < 1)$ مشتق ریمان- لیوویل و مشتق گرونوالد- لتنیکوف وجود دارد و می توان به فرم زیر نوشت

$$ {}_aD_t^p f(t) = {}_aD_t^p f(t) = \frac{f\ (a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p} f'\ (\tau)d\tau. \qquad (96-2)$$

واضح است که، مشتق بدست آمده بوسیله عبارت (۲-۹۶) انتگرال پذیر است.

ویژگی مهم دیگر که از رابطه (۲-۹۵) نتیجه می شود این است که مشتق مرتبه $p > 0$ام، مشتق مرتبه qام را برای هر q،$p > q > 0$، ایجاب می کند.

بطور دقیق تر، اگر تابع پیوسته $f(t)$ مشتق انتگرال پذیر داشته باشد آنگاه مشتق ریمان- لیوویل ${}_aD_t^p f(t)$ (گرونوالد- لتنیکوف) موجود و انتگرال پذیر نیز می باشد، همچنین برای هر q بطوریکه $(0 < q < p)$ مشتق ${}_aD_t^p f(t)$ موجود و انتگرال پذیر نیز می باشد.

واضح است که، اگر قرار دهیم $g(t) = {}_aD_t^{-(1-p)} f(t)$، آنگاه می توان نوشت

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{d}{dx}\left({}_aD_t^{-(1-p)} f(t)\right) = g'(t)$$

با توجه به اینکه $g'(t)$ انتگرال پذیر است با جایگذاری در فرمول (۲-۹۶) و همچنین نامساوی $0 < 1 + q - p < 1$ نتیجه می شود که مشتق ${}_aD_t^{1+q-p} g(t)$ موجود و انتگرال پذیر است. بنابراین با استفاده از رابطه، ${}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-q} f(t)\right) = {}_aD_t^{p-q} f(t)$،داریم.

$$ {}_aD_t^{1+q-p} g(t) = {}_aD_t^{1+q-p}\left({}_aD_t^{-(1-p)} f(t)\right) = {}_aD_t^q f(t).$$

رابطه (۲-۹۶) بین تعریف گرونوالد-لتنیکوف و تعریف ریمان- لیوویل نتیجه دیگری که خیلی مهم است برای فرمول بندی مسائل کاربردی و عملیات با مشتقات کسری و فرمول بندی از مسائل مقدار اولیه فیزیک در معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری دارد.

تحت فرضیات یکسان روی تابع $f(t)$ ((m-1) بار به طور پیوسته مشتق پذیر است و مشتق مرتبه mام در بازه $[a,T]$ انتگرال پذیر است) و روی p $(m-1<p<m)$ شرط

$$[{}_aD_t^p f(t)]_{t=a}=0, \qquad (97-2)$$

با شرایط زیر معادل است

$$f^{(j)}(a)=0, \quad (j=1,2,\dots,m). \qquad (98-2)$$

واضح است که، اگر شرایط (۲-۹۸) برقرار باشد آنگاه با میل دادن t به سمت a در رابطه (۲-۹۵) بلافاصله رابطه (۲-۹۷) دست می آوریم.

از طرف دیگر، اگر شرط (۲-۹۷) برقرار باشد، آنگاه با ضرب هر در طرف رابطه (۲-۹۵) در $(t-a)^{p-j}$، $(j=m-1,m-2,m-3,\dots 2,1,0)$، و با میل دادن t به سمت a بدست می آوریم $f(a)=0, f'(a)=0, f''(a)=0,\dots,f^{m-2}(a)=0, f^{m-1}(a)0$، یعنی شرایط (۲-۹۸) حاصل می شوند. بنابراین، رابطه (۲-۹۷) برقرار است اگر و تنها اگر رابطه (۲-۹۸) برقرار باشد.

از هم ارزی شرایط (۲-۹۷) و (۲-۹۸) بلافاصله نتیجه می گیریم که اگر برای بعضی $p>0$ که مشتق pام $f(t)$، در نقطه $t=a$ برابر صفر باشد، آنگاه تمام مشتق های مرتبه q $(0<q<p)$ در نقطه $t=a$ برابر صفر هستند یعنی

$$[{}_aD_t^q f(t)]_{t=a}=0$$

۲-۵ مشتق کسری کاپوتو

در بسیاری از مسایل مدل سازی های ریاضی به فرمولبندی شرایط اولیه نیاز است، پس باید تعاریفی از مشتق های کسری را به کار ببریم که امکان استفاده از شرایط اولیه ای که مفهوم فیزیکی دارند را فراهم کنند. تعریف مشتق کاپوتو این اجازه را می دهد تا شرایط اولیه در فرمول مساله قرار بگیرد[8].

فرض می کنیم $f \in C^n[a,b]$ و $n-1<\alpha<n$، مشتق کسری کاپوتو با عبارت زیر تعریف می شود[9]

$$\begin{aligned} {}_aD_{*t}^{\alpha}f(t) &= {}_aD_t^{\alpha-n}f^{(n)}(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \qquad (99-2) \end{aligned}$$

و دارای خواص زیر است

$$i)\quad {}_aD_{*t}^{\alpha}\mathrm{C}=0 \qquad (100-2)$$

$$ii)\quad \lim_{\alpha\to n} {}_aD_{*t}^{\alpha}f(t)=f^{(n)}(t)$$

$$iii)\quad {}_aD_{*t}^{\alpha}\,{}_aD_{*t}^{m}f(t)={}_aD_{*t}^{\alpha+m}f(t), \qquad n-1<\alpha<n\ , \qquad m\in N$$

ترکیب مشتق کاپوتو با انتگرال ریمان- لیوویل دارای دو خاصیت اساسی است. فرض می کنیم $f \in C^n[a,b]$ و $n-1<\alpha<n$ در این صورت

$$i)\quad {}_aD_{*t}^{\alpha}\,{}_aD_t^{-\alpha}f(t)=f(t)$$

$$ii)\quad {}_aD_t^{-\alpha}\,{}_aD_{*t}^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a^+)}{k!}(t-a)^k\ , \quad t\geq a\,. \qquad (101-2)$$

برای اثبات (ii) داریم:

$${}_aD_t^{-\alpha}\,{}_aD_{*t}^{\alpha}f(t)={}_aD_t^{-\alpha}\,{}_aD_t^{\alpha-n}f^{(n)}(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\ , \qquad t\geq a.$$

معادله (۲-۱۰۱) حالت خاصی از معادله زیر است

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-\alpha}\,{}_aD_{*t}^{\beta}f(t) &= {}_aD_t^{-\alpha}\,{}_aD_t^{\beta-m}f^{(m)}(t)={}_aD_t^{\alpha-\beta}\left({}_aD_t^{-n}f^{(n)}(t)\right) \\ &= {}_aD_t^{\alpha-\beta}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha-\beta+k-1)}(t-a)^{\alpha-\beta+k}\ , \\ & t\geq a\,, m-1<\beta<m, \alpha>\beta \end{aligned}$$

مقایسه بین تعریف کاپوتو و تعریف ریمان- لیوویل:

تعریف ریمان- لیوویل به شرایط اولیه ای منجر می شود که شامل مقادیر مشتق های کسری ریمان- لیوویل است و تفسیر فیزیکی معلومی برای چنین شرایطی وجود ندارد. اما در تعریف کاپوتو شرایط اولیه معادلات دیفرانسیل کسری به همان شکلی که برای معادلات دیفرانسیل هستند، در می آیند.

مشتق کاپوتو یک ثابت صفر است، اما مشتق ریمان- لیوویل یک ثابت صفر نیست.

تفاوت دیگری نیز بین تعاریف ریمان- لیوویل و کاپوتو وجود دارد. برای مشتق کاپوتو داریم

$$
{}_aD_{*t}^{\alpha}\left({}_aD_{*t}^{m}f(t)\right) = {}_aD_{*t}^{\alpha+m}f(t),
$$
$$
(m = 0, 1, 2, \dots ; n-1 < \alpha < n), \qquad (102-2)
$$

در حالیکه برای مشتق ریمان- لیوویل داریم

$$
{}_aD_{t}^{m}\left({}_aD_{t}^{\alpha}f(t)\right) = {}_aD_{t}^{\alpha+m}f(t),
$$
$$
(m = 0, 1, 2, \dots ; n-1 < \alpha < n), \qquad (103-2)
$$

جای عملگر های مشتق گیری در فرمولهای $(102-2)$ و $(103-2)$ تحت شرایط متفاوتی می توان تعویض کرد

$$
\begin{aligned}
{}_aD_{*t}^{\alpha}\left({}_aD_{*t}^{m}f(t)\right) &= {}_aD_{*t}^{m}\left({}_aD_{*t}^{\alpha}f(t)\right) \\
&= {}_aD_{*t}^{\alpha+m}f(t), \qquad (104-2)
\end{aligned}
$$

$$
f^{(k)}(0) = 0, \qquad k = n, n+1, \dots, m
$$

$$
(m = 0, 1, 2, \dots ; n-1 < \alpha < n)
$$

$$
\begin{aligned}
{}_aD_{t}^{m}\left({}_aD_{t}^{\alpha}f(t)\right) &= {}_aD_{t}^{\alpha}\left({}_aD_{t}^{m}f(t)\right) \\
&= {}_aD_{t}^{\alpha+m}f(t), \qquad (105-2)
\end{aligned}
$$

$$
f^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0,1, 2, \dots, m
$$

$$
(m = 0, 1, 2, \dots ; n-1 < \alpha < n)
$$

بر خلاف تعریف ریمان- لیوویل، در مورد مشتق کاپوتو، محدودیتی روی مقادیر $k = 0,1,2,\dots,n-1$ و $f^{(k)}(0) =$ وجود دارد.

فصل سوم

معرفی روش آشفتگی هوموتوپی

۳-۱ مقدمه

روش آشفتگی هوموتوپی[1] توسط بسیاری از محققان علوم و مهندسی جهت حل معادلات تابعی به کار رفته است. این روش توسط هی[2] در سال ۱۹۹۸ بیان شد. او ابتدا این روش را برای حل معادلات مربوط به نوسانگرهای غیر خطی[3] گسسته $[10]$، معادلات غیر خطی موج[4] $[11]$، یک مساله مقدار مرزی خاص $[12]$ و مسایل دیگری از این معادلات به کار برد. اکنون می توان گفت که روش آشفتگی هوموتوپی یک روش شناخته شده و بسیار مشهور برای حل معادلات تابعی می باشد$[13-17]$.برای مثال این روش برای حل معادله شرودینگر[5] $[18]$، معادله برگرز[6]$[19]$، معادلات انتگرال فردهلم $[20]$، معادلات غیر خطی در انتقال حرارت[7] $[21]$، و دیگر معادلات $[22-39]$، به کار رفته است. در این روش جواب معادله به صورت مجموع یک سری نامتناهی در نظر گرفته می شود که معمولاً به جواب واقعی معادله همگرا می شود.

[1] Homogony perturbation method
[2] He
[3] Nonlinear oscillator
[4] Nonlinear wave equation
[5] schrodinger
[6] Burgers
[7] Nonlinear heat equation

در این فصل ابتدا مقدماتی را در مورد واژه هوموتوپی بیان و سپس ساختار روش آشفتگی هوموتوپی را بیان می کنیم. در ادامه به بحث در مورد همگرایی این روش خواهیم پرداخت و با ارایه قضایایی در این مورد و چند مثال همگرایی روش را بررسی خواهیم کرد.

۳-۲ هوموتوپی

۳-۲-۱ تعریف: یک توپولوژی در مجموعه X گردایه ای مانند τ از زیر مجموعه های X است که در شرایط زیر صدق می کند.

۱-ϕ و X به τ متعلق اند.

۲-اجتماع اعضای هر زیر گردایه τ به τ متعلق است.

۳-اشتراک اعضای هر زیر گردایه متناهی τ به τ متعلق است.

۳-۲-۲ تعریف: فرض کنید X مجموعه ای باشد که برای آن توپولوژی τ مشخص باشد در این صورت زوج مرتب(X,τ) را یک فضای توپولوژیک می نامند.

۳-۲-۳ تعریف : فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک[1] باشد تابع پیوسته $h:[a,b]\to X$ را مسیر (قوس) گویند. $h(a)$ را نقطه آغازی و نقطه $h(b)$ را نقطه پایانی می نامند. همچنین گویند که h این دو نقطه را به هم وصل می کند.

[1] Topological space

۴-۲-۳ تعریف: فرض کنید $f, g : [0,1] = I \to X$ مسیرهایی در X باشند به گونه ای که $f(0) = g(0) = x_0$ و $f(1) = g(1) = x_1$ گوییم f و g هوموتوپ هستند هرگاه نگاشت پیوسته ای چون $F : I \times I \to X$ وجود داشته باشد به گونه ای که

$F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x),$

$F(0,t) = x_0, \quad F(1,t) = x_1.$

F را یک هوموتوپی (مسیر) میان f و g می نامند. اگر f و g هوموتوپ باشند، می نویسیم $f \sim g$.

اکنون تعریف می کنیم $F_t(x) = F(x,t)$ برای $x, t \in I$ آن گاه $F_0 = f$، $F_1 = g$، $F_t(0) = x_0$ و $F_t(1) = x_1$ بنابراین $t \to F_t$ یک خانواده از مسیرها بوده که f را بر روی g قرارمی دهد. به طور معادل $\{F_t\}_{0 \le t \le 1}$ را یک هوموتوپی گویند.

۵-۲-۳ تعریف: فرض کنید $a < b < c$، که $f : [a,b] \to X$ یک مسیر و $g : [b,c] \to X$ مسیر دیگری باشد به گونه ای که $g(b) = f(b)$ و فرض کنید ابتدا مسیر اول وسپس مسیر دوم را طی کنید. حاصل ضرب این دو مسیر چنین تعریف می شود

$$(fg)(\mathrm{t}) = \begin{cases} f(t) & t \in [a,b] \\ \mathrm{g(t)} & \mathrm{t \in [b,c]} \end{cases}$$

واضح است که $fg : [a,c] \to X$.

۶-۲-۳ تعریف: فرض کنید $f, g : X \to Y$ نگاشت های پیوسته باشند. گوییم f با g هوموتوپیک است هر گاه نگاشت پیوسته ای چون $F : X \times I \to Y$ وجود داشته باشد به گونه ای که برای هر $x \in X$، $F(x,1) = g(x)$ و $F(x,0) = f(x)$.

برای توضیح بیشتر برای هر $0 \le t \le 1$ نگاشت پیوسته $F_t : X \to Y$ را به صورت زیر تعریف می کنیم برای هر $x \in X$ $F_t(x) = F(x,t)$.

اکنون اگر t را پارامتر زمان در نظر بگیریم آن گاه در لحظه $t=0$ داریم $F_0 = f$ و در لحظه $t = 1$ داریم $F_1 = g$. بنابراین اگر t را از صفر تا یک تغییر دهیم آن گاه به گونه ای پیوسته f بر g قرار می گیرد.

۳-۲-۷ قضیه (لم چسب)[40]

فرض کنید $X = A \cup B$ و A و B در X بسته باشند به علاوه فرض کنید $f : A \to Y$ و $g : B \to Y$ پیوسته باشند. در این صورت اگر به ازای هر $x \in A \cap B$ داشته باشیم $g(x) = f(x)$، آن گاه می توان f و g را با هم ترکیب نمود تا تابع پیوسته $h : X \to Y$ را به دست آورد که به ازای $x \in A$ به صورت $h(x) = f(x)$ و به ازای $x \in B$ به صورت $h(x) = g(x)$ تعریف می شود.

۳-۲-۸ لم: رابطه هوموتوپی یک رابطه ی هم ارزی است.

اثبات: می دانیم که یک رابطه هم ارزی انعکاسی، متقارن و متعدی است. رابطه $f \sim f$ بدیهی است زیرا $F(x,t) = f(x)$ همان هوموتوپی مورد نظر است. اکنون اگر $f \sim g$ فرض کنید F یک هوموتوپی بین f و g باشد. قرار می دهیم $G(x,t) = F(x, 1-t)$، آن گاه G یک هوموتوپی میان f و g تعریف می کند. اکنون فرض کنید که $f \sim g$ و $g \sim h$، باید نشان دهیم که $f \sim h$. اگر F یک هوموتوپی میان f .و g، G یک هوموتوپی میان g و h باشد آن گاه $H : X \times I \to Y$ را چنین تعریف می کنیم.

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ G(x,2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

حال قرار می دهیم $t = \frac{1}{2}$، داریم.

$$F(x,2t) = F(x,1) = g(x) = G(x,0) = G(x,2t-1)$$

بنابراین، H خوش تعریف است. چون H بر دو زیر مجموعه ی بسته $X \times \left[0,\frac{1}{2}\right]$ و $X \times \left[\frac{1}{2},1\right]$ از $X \times I$ پیوسته است بنابر لم چسب بر همه بازه $X \times I$ پیوسته خواهد شد. بنابراین، H همان هوموتوپی مطلوب بین f و h است.

۳-۲-۹ تعریف: فرض کنید $A \subseteq X$ و $f, g : X \to Y$ داده شده باشند چنان که برای هر $x \in A$، $f(x) = g(x)$. گوییم f و g نسبت به A هوموتوپیک هستند هرگاه هوموتوپی $F : X \times I \to Y$ وجود داشته باشد به گونه ای که برای هر $x \in X$ $F(x,0) = f(x)$ و $F(x,1) = g(x)$. همچنین برای هر $x \in A$ و $t \in I$ $F(x,t) = f(x) = g(x)$ و در این حالت می نویسیم. $f \tilde{_A} g$ در حالت $A = \emptyset$ می نویسیم $f \sim g$.

۳-۲-۱0 مثال: هردو تابع پیوسته $f , g : X \to \mathbb{R}^n$ هوموتوپ هستند، زیرا اگر تعریف کنیم $F(x,t) = tg(x) + (1-t)f(x)$ چون توابع f و g و ترکیب خطی تابع پیوسته است بنابراین F پیوسته است. از طرفی $F(x,0) = f(x)$ و $F(x,1) = g(x)$ پس f و g هوموتوپ هستند.

۳-۲-۱۱ مثال: فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}^n$ $f = 1_x$ و $g = 0$ آن گاه $F(x,t) = tx$ یک هوموتوپی از g به f است.

۳-۳ ساختار روش آشفتگی هوموتوپی

برای درک بهتر این روش معادله دیفرانسیل غیر خطی زیر را در نظر می گیریم.

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \qquad (1-3)$$

با شرایط مرزی

$$B\left(u,\frac{\partial u}{\partial n}\right)=0,\ \ r \in \Gamma, \qquad (2-3)$$

که در آن A یک عملگر دیفرانسیل عمومی است، و B یک عملگر مرزی است. همچنین $f(r)$ یک تابع معلوم و تحلیلی و Γ مرز دامنه یΩ است.

فرض کنید عملگر A به دو عملگر L و N تجزیه شود که در آن L خطی و N غیر خطی است، در این صورت معادله (۳-۱) را می توانیم به صورت زیر باز نویسی کنیم:

$$L(u)+N(u)-f(r)=0,\ \ r \in \Omega, \qquad (3-3)$$

یک تابع هوموتوپی $\upsilon(r,p) : \Omega \times [0\ ,1] \to \mathbb{R}$ را که در رابطه زیر صدق کند، در نظر می گیریم

$$H(\upsilon,p)=\ (1-p)\big(L(\upsilon)-L(u_0)\big)+p\big(A(\upsilon)-f(r)\big) = 0, \qquad (4-3)$$

یا

$$H(\upsilon,p)=L(\upsilon)-L(u_0)+pL(u_0)+p\big(N(\upsilon)-f(r)\big) = 0, \qquad (5-3)$$

که در آن $p \in [0,1]$ و u_0 یک تقریب اولیه برای جواب معادله (۳-۱) است که در شرایط مرزی صدق می کند. به روشنی از معادلات (۳-۴) و (۳-۵) داریم:

$$H(\upsilon,0)=L(\upsilon)-L(u_0) = 0, \qquad (6-3)$$

و

$$H(v,1) = A(v) - f(r) = 0, \qquad (7-3)$$

واضح است که وقتی پارامتر وارد شده p به طور یکنواخت از صفر تا یک افزایش می یابد مساله ساده $L(v) - L(u_0) = 0$ به مساله غیر خطی $A(v) - f(r) = 0$ تبدیل می شود.

فرض کنید که جواب معادله (۳-۱) را به عنوان یک سری توانی نسبت به p بنویسیم

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots \qquad (8-3)$$

در صورتی که (۳-۸) به ازای $p=1$ همگرا باشد جواب معادله ی (۳-۱) به صورت زیر خواهد بود

$$v = \lim_{p\to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \qquad (9-3)$$

۳-۳-۱ مثال: معادله حرکت پاندول را با شرایط اولیه زیر در نظر می گیریم

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 sin\theta = 0,$$

$$\theta(t=0) = A, \frac{d\theta}{dt}(t=0) = 0, \qquad (10-3)$$

که در آن $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ فرکانس طبیعی ارتعاش خطی، g نیروی جاذبه، l طول پاندول و θ زاویه امتداد l با محور عمودی است.برای مقادیر کوچک θ معادله به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0,$$

$$\theta(t=0) = A, \frac{d\theta}{dt}(t=0) = 0,$$

جواب دقیق این معادله $\theta(t) = A\,cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$ است.

اکنون معادله غیر خطی (۳-۱۰) را با روش آشفتگی هموتوپی حل می کنیم. با جای گذاری بسط تیلور $sin\,\theta$ در معادله غیر خطی معادله هموتوپی زیر را تشکیل می دهیم:

$$(1-p)\left(\frac{d^2\Theta}{dt^2}-\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\right)+p\left(\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\omega^2\left(\Theta-\frac{\Theta^3}{3!}+\frac{\Theta^5}{5!}+\cdots\right)\right)=0$$

حال فرض کنیم این معادله دارای جوابی به صورت $\Theta = \Theta_0 + p\Theta_1 + p^2\Theta_2 + \cdots$ است. با قرار دادن Θ در معادله هموتوپی و مرتب کردن جملات بر حسب p خواهیم داشت

$$p^0:\ \frac{d^2\Theta_0}{dt^2}-\frac{d^2\theta_0}{dt^2}=0, \Theta_0(0)=A, \frac{d}{dt}\Theta_0(0)=0,$$

$$p^1:\ \frac{d^2\Theta_1}{dt^2}-\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+\omega^2\Theta_0-\frac{\omega^2}{6}\Theta_0^3+\frac{\omega^2}{120}\Theta_0^5=0, \Theta_1(0)=0, \frac{d}{dt}\Theta_1(0)=0, \quad (11-3)$$

$$p^2:\ \frac{d^2\Theta_2}{dt^2}+\omega^2\Theta_1-\frac{1}{2}\omega^2\Theta_0^3\Theta_1+\frac{1}{24}\omega^2\Theta_0^5\,\Theta_1=0, \Theta_2(0)=0, \frac{d}{dt}\Theta_2(0)=0,$$

$$\vdots$$

به عنوان یک تقریب اولیه می توان جواب معادله خطی را به شکل $\Theta_0 = \theta_0 = A\,cos(\alpha\omega t)$ در نظر گرفت که در آن α یک ضریب ثابت نامعین است. با قرار دادن Θ_0 در معادله $(11-3)$ داریم

$$\frac{d^2\Theta_1}{dt^2}=\frac{1}{6}\omega^2A^3cos^3(\alpha\omega t)-\frac{1}{120}\omega^2A^5cos^5(\alpha\omega t)-\omega^2A\,cos(\alpha\omega t)+\omega^2A\,\alpha^2cos(\alpha\omega t)$$

و یا

$$\frac{d^2\Theta_1}{dt^2} = (A\alpha^2\omega^2 - A\omega^2)\cos(\alpha\omega t) + \frac{1}{24}\omega^2 A^3(\cos(3\alpha\omega t) + 3\cos(\alpha\omega t)) - \frac{1}{192}\omega^2 A^5 \cos(\alpha\omega t) - \frac{1}{384}\omega^2 A^3 \cos(3\alpha\omega t) - \frac{1}{1920}\omega^2 A^3 \cos(5\alpha\omega t) = \left(A\alpha^2\omega^2 - A\omega^2 + \frac{1}{8}\omega^2 A^3 - \frac{1}{192}\omega^2 A^5\right)\cos(\alpha\omega t) + \omega^2 A^3\left(\frac{15}{384}\cos(3\alpha\omega t) - \frac{1}{1920}\cos(5\alpha\omega t)\right). \qquad (12-3)$$

برای حذف جملات اضافی[1] ضریب $cos(\alpha\omega t)$ در معادله بالا باید برابر صفر باشد در این صورت داریم

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{192}A^4}\,.$$

بنابراین از رابطه (۳-۱۲) داریم

$$\Theta_1 = \frac{A^3}{750(192 - 24A^2 + A^4)}(3\cos(5\alpha\omega t) + 622 - 625\cos(3\alpha\omega t)).$$

همچنین از حل معادلات (۳-۱۱) داریم

$$\Theta_2 = \frac{1}{\alpha^4}(5/4677 \times 10^{-3}A(-1/9051 \times 10^8 A^4\alpha^2\cos(5\alpha\omega t) - 2/6460 \times 10^9\alpha^2\cos(3\alpha\omega t)) +/0464 \times 10^{10}A^4\alpha^2 - 7/1124 \times 10^{11}A^2\alpha^2 + 108289 \times 10^{12}\alpha^2 + 9/4080 \times 10^{11}A^2 - 1/5029 \times 10^{11}A^4 + 1/4744 \times 10^7 A^8\cos(3\alpha\omega t) - 4/9298 \times 10^8 A^6\cos(3\alpha\omega t) - 5/4720 \times 10^5 A^6\cos(7\alpha\omega t) + 1/2365 \times 10^6 A^8\cos(5\alpha\omega t) + 1225 \times A^8\cos(9\alpha\omega t) + 36225 \times A^8\cos(7\alpha\omega t) - 3/0369 \times 10^7 A^6\cos(5\alpha\omega t) + 6/1152 \times 10^9 A^4\cos(3\alpha\omega t) + 2/3437 \times 10^8 A^4\cos(5\alpha\omega t) + 1/8289 \times 10^{12}\cos(\alpha\omega t) + 2/5401 \times 10^{10}A^2\alpha^2\cos(3\alpha\omega t) - 1/8289 \times 10^{12} - 2/7107 \times 10^8 A^8 + 1/0226 \times 10^{10}A^6 - 2/6342 \times 10^{10}A^2\cos(3\alpha\omega t) + 6/8584 \times 10^{11}A^2\alpha^2\cos(\alpha\omega t) - 4/7628 \times 10^{10}A^4\alpha^2\cos(\alpha\omega t) - 9/1445 \times 10^{11}A^2\cos(\alpha\omega t) + 1/4394 \times 10^{11}A^4\cos(\alpha\omega t) - 9/7020 \times 10^9 A^6\cos(\alpha\omega t) + 2/5505 \times 10^8 A^8\cos(\alpha\omega t) - 1/8289 \times 10^{12}\alpha^2\cos(\alpha\omega t)).$$

[1] Secular term

بنابراین تقریب مرتبه سوم ذیل را برای جواب معادله (۳-10) به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\theta = \Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2$$

$$= A\,cos(\alpha\omega t) + \frac{A^3}{750(192-24A^2+A^4)}\left(3\,cos(5\alpha\omega t) + 622 - 625\,cos(3\alpha\omega t)\right) + \frac{1}{\alpha^4}\Big(5/4677 \times 10^{-3} A\left(-\frac{1}{9051} \times 10^8 A^4\alpha^2\,cos(5\alpha\omega t) - \frac{2}{6460} \times 10^9 \alpha^2\,cos(3\alpha\omega t)\right) + /0464 \times 10^{10} A^4\alpha^2 - 7/1124 \times 10^{11} A^2\alpha^2 + 1/8289 \times 10^{12}\alpha^2 + 9/4080 \times 10^{11} A^2 - 1/5029 \times 10^{11} A^4 + 1/4744 \times 10^7 A^8\,cos(3\alpha\omega t) - 4/9298 \times 10^8 A^6\,cos(3\alpha\omega t) - 5/4720 \times 10^5 A^6 cos(7\alpha\omega t) + 1/2365 \times 10^6 A^8\,cos(5\alpha\omega t) + 1225 \times A^8\,cos(9\alpha\omega t) + 36225 \times A^8\,cos(7\alpha\omega t) - 3/0369 \times 10^7 A^6\,cos(5\alpha\omega t) + 6/1152 \times 10^9 A^4\,cos(3\alpha\omega t) + 2/3437 \times 10^8 A^4\,cos(5\alpha\omega t) + 1/8289 \times 10^{12}\,cos(\alpha\omega t) + 2/5401 \times 10^{10} A^2\alpha^2\,cos(3\alpha\omega t) - 1/8289 \times 10^{12} - 2/7107 \times 10^8 A^8 + 1/0226 \times 10^{10} A^6 - 2/6342 \times 10^{10} A^2\,cos(3\alpha\omega t) + 6/8584 \times 10^{11} A^2\alpha^2\,cos(\alpha\omega t) - 4/7628 \times 10^{10} A^4\alpha^2\,cos(\alpha\omega t) - 9/1445 \times 10^{11} A^2\,cos(\alpha\omega t) + 1/4394 \times 10^{11} A^4\,cos(\alpha\omega t) - 9/7020 \times 10^9 A^6\,cos(\alpha\omega t) + 2/5505 \times 10^8 A^8\,cos(\alpha\omega t) - 1/8289 \times 10^{12}\alpha^2\,cos(\alpha\omega t)\Big)$$

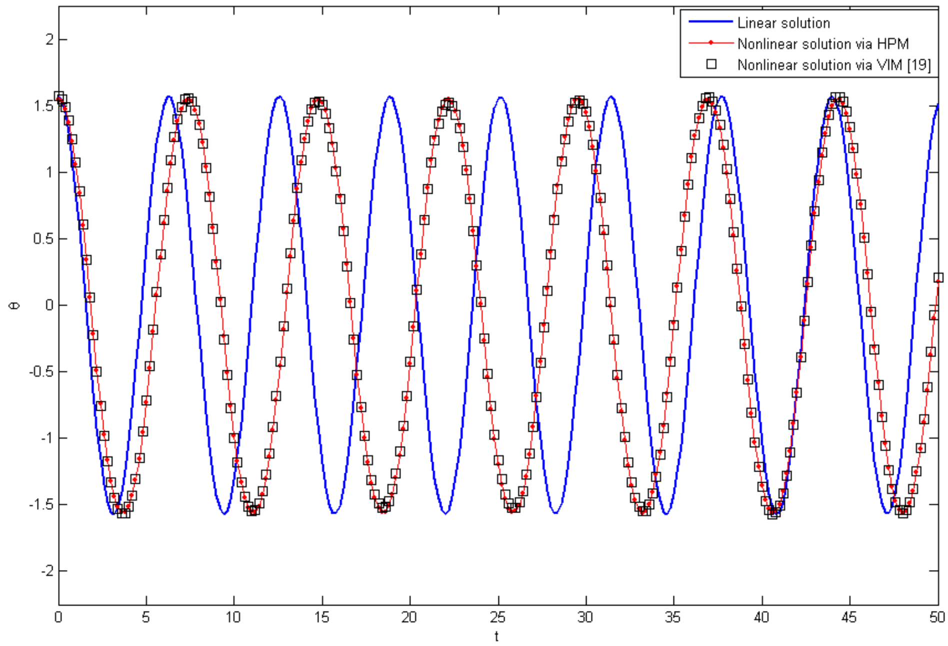
که α همان مقدار اولیه به دست آمده در [41] می باشد. همچنین دوره تناوب معادله پاندول غیر خطی به صورت زیر بیان می شود

$$T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{192}A^4}}$$

این جواب همان جوابی است که در [41] از روش تکرار وردشی[1] به دست آمده است. دوره تناوب به دست آمده با این روش دارای دقت بالا است زیرا برای مثال برای $A = \frac{\pi}{2}$ مقدار به دست آمده از معادله بالا $T = 1/17T_0$ است در حالی که $T_{exact} = 1/16T_0$، که در آن $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ دوره تناوب ارتعاش خطی می باشد. در شکل نتایج برای $A = \frac{\pi}{2}$، با جواب خطی مقایسه شده است. همان طور که در شکل دیده می شود جواب بدست آمده از روش آشفتگی هوموتوپی دقیقاً منطبق بر روش

[1] Variational iteration method

تکرار متغیر می باشد که در [41] به دست آمده است و در مقایسه با جواب خطی با زاویه اولیه $A=\frac{\pi}{2}$ دارای اختلاف فاز مطلوبی می باشد.



شکل ۳-۱: نمودار دامنه نوسان پاندول نسبت به t برای $g=10$، $l=10$ و $A=\frac{\pi}{2}$.

هرچند انتخاب L در معادله هوموتوپی عموماً قسمت خطی معادله تابعی در نظر گرفته می شود اما با توجه به شرایط مساله می توان L را قسمت غیر خطی معادله در نظر گرفت. مثال زیر که یک معادله دیفرانسیل مشهور می باشد این مطلب به خوبی نشان داده می شود.

۳-۳-۲ مثال: معادله دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه زیر در نظر می گیریم[14]

$$(x+\varepsilon y)\frac{dy}{dx}+y=0,$$
$$y(1)=1. \qquad (13-3)$$

برای حل معادله (۳-۱۳) با روش آشفتگی هوموتوپی، معادله زیر را در نظر می گیریم

$$(1-p)\left(\varepsilon Y\frac{dY}{dx}-\varepsilon y_0\frac{dy_0}{dx}\right)+p\left((x+\varepsilon Y)\frac{dY}{dx}+Y\right)=0, \qquad (14-3)$$

فرض کنید معادله (۳-۱۴) دارای جوابی به صورت زیر است

$$Y=Y_0+pY_1+p^2Y_2+\cdots. \qquad (15-3)$$

با قرار دادن (۳-۱۵) در (۳-۱۴) و مساوی قرار دادن ضرایب جملات با توانهای یکسان p خواهیم داشت

$$p^0\ :\ \varepsilon Y_0\frac{dY_0}{dx}-\varepsilon y_0\frac{dy_0}{dx}=0,$$

$$p^1\ :\ \varepsilon Y_1\frac{dY_1}{dx}+p\left((x+\varepsilon Y_0)\frac{dY_0}{dx}+Y_0\right)=0.$$

با قرار دادن $Y_0(x)=y_0(x)=-\frac{x}{\varepsilon}$ و $Y_0(1)=-\frac{1}{\varepsilon}$ در معادله بالا داریم

$$\varepsilon Y_1\frac{dY_1}{dx}-\frac{x}{\varepsilon}=0,\quad Y_1(1)=1+\frac{1}{\varepsilon}. \qquad (16-3)$$

جواب معادله دیفرانسیل (۳-۱۶) برابر است با

$$Y_1=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{x^2+2\varepsilon+\varepsilon^2}.$$

اگر یک تقریب مرتبه دوم را به عنوان جواب این معادله دیفرانسیل در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$y=Y_0+Y_1=\frac{1}{\varepsilon}\left(-x+\sqrt{x^2+2\varepsilon+\varepsilon^2}\right),$$

که جواب واقعی معادله است.

انتخاب عملگر L و جواب اولیه u_0 در حالت کلی است ولی ملاحظات زیر به این انتخاب کمک می کند. معمولاً L را همانگونه که در ساختار روش آشفتگی هوموتوپی بیان شد قسمت خطی در نظر می گیریم.در حالتی که شرایط اولیه یا مرزی نداریم L را قسمتی در نظر می گیریم که ما را در سریعتر رسیدن به جواب واقعی کمک کند. در مسایلی که دارای شرایط اولیه یا مرزی هستند L و u_0 متناسب با این شرایط انتخاب می شوند. به عنوان مثال فرض کنیم در یک مساله، شرایط اولیه بر حسب x باشد در این صورت L را قسمتی انتخاب می کنیم که مشتق آن بر حسب x باشد و به عبارت دیگر انتگرال گیری بر حسب x صورت گیرد. توجه به این نکته ضروری است که این انتخاب مناسب L و u_0 درمرتبه همگرایی جواب موثر باشد.

۴-۳ همگرایی[1] روش آشفتگی هوموتوپی

معادله تابعی $A(u) = f(r)$ را در نظر می گیریم. دیدیم که به وسیله روش هوموتوپی یک هوموتوپی $V(r,p):\ \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ که در رابطه ی زیر صدق کند، می توان ساخت

$$L(V) - L(u_0) + pL(u_0) + p\big(N(V) - f(r)\big) \\ = 0. \qquad (17-3)$$

فرض کنیم L^{-1} عملگر معکوس عملگر خطی L باشد. با اعمال این عملگر به طرفین رابطه (۳-۱۱) داریم

$$V - u_0 + pu_0 + p\big(L^{-1}N(V) - L^{-1}f(r)\big) \\ = 0, \qquad (18-3)$$

و یا

[1] Convergence

$$V = u_0 + p(L^{-1}f(r) - L^{-1}N(V) - u_0)$$
$$= 0. \qquad (19-3)$$

حال فرض کنیم $V = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i$ ، رابطه (۳-۱۹) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$V = u_0 + p\left[L^{-1}f(r) - L^{-1}N\left[\sum\nolimits_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right] - u_0\right]$$
$$= 0, \qquad (20-3)$$

از طرفی هنگامی که $p \to 1$، تابع V تحت شرایطی به u همگرا می شود، لذا می توان نوشت

$$u = L^{-1}f(r) - L^{-1}N\left[\sum\nolimits_{i=0}^{\infty} v_i\right]$$

$$= L^{-1}f(r) - \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} (L^{-1}N)v_i \qquad (21-3)$$

حال یک شرط کافی را در مورد همگرایی روش آشفتگی هوموتوپی به صورت زیر بیان می کنیم.

۳-۴-۱ قضیه (شرط کافی همگرایی): فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $\mathcal{N} : X \to Y$ یک نگاشت انقباضی باشد یعنی

$$\forall\, \upsilon, \tilde{\upsilon} \in X;\ \|\mathcal{N}(\upsilon) - \mathcal{N}(\tilde{\upsilon})\| \le \gamma\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|, 0 < \gamma$$
$$< 1. \qquad (22-3)$$

در این صورت $\mathcal{N}$ بنا بر قضیه نقطه ثابت باناخ، دارای یک نقطه ثابت مانند u می باشد. یعنی $\mathcal{N}(u) = u$.

اکنون دنباله تولید شده از روش آشفتگی هوموتوپی را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$V_n = \mathcal{N}(V_{n-1}), \qquad V_{n-1} = \sum\nolimits_{i=0}^{n-1} u_i\,,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (23-3)$$

در حقیقت می توان گفت که $\mathcal{N} = L^{-1}N$ و فرض کنید $V_0 = v_0 = u_0 \in B_r(u)$ که $B_r(u) = \{u^* \in X \,\big|\, \|u^* - u\| < r\}$. در این صورت خواهیم داشت

الف) $\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\|$.

ب) $V_n \in B_r(u)$.

ج) $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = u$.

اثبات: الف) اثبات به استقرا روی n انجام می دهیم. برای n=1 داریم

$$\|V_1 - u\| = \|\mathcal{N}(V_0) - \mathcal{N}(u)\| \leq \gamma \|v_0 - u\|$$

حال فرض کنیم $\|V_{n-1} - u\| \leq \gamma^{n-1}\|v_0 - u\|$ در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\|V_n - u\| &= \|\mathcal{N}(V_{n-1}) - \mathcal{N}(u)\| \\ &\leq \gamma \|V_{n-1} - u\| \\ &\leq \gamma\gamma^{n-1}\|v_0 - u\| \\ &= \gamma^n \|v_0 - u\|.\end{aligned}$$

ب) با استفاده از قسمت (الف) داریم

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\| \leq \gamma^n r < r,$$

در نتیجه $V_n \in B_r(u)$.

ج) از آنجا که $\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\|$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma^n = 0$ خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty} \|V_n - u\| = 0$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} V_n = u.$$

۳-۴-۲ مثال: معادله برگرز[1] با شرایط اولیه زیر را در نظر می گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \left[0, \frac{1}{2}\right), \qquad (24-3)$$

$$u(x,0) = 2x$$

جواب دقیق این مساله به فرم $u(x,t) = \frac{2x}{1+2t}$ می باشد.

برای حل معادله (۳-۲۴) با روش آشفتگی هوموتوپی، معادله زیر را در نظر می گیریم

$$(1-p)\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) + p\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0, \qquad (25-3)$$

اکنون فرض می کنیم معادله (۳-۲۵) دارای جوابی به صورت زیر می باشد

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots. \qquad (26-3)$$

با قرار دادن (۳-۲۶) در (۳-۲۵) و مساوی صفر قرار دادن ضریب توانهای p خواهیم داشت

$$p^0: \ \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0,$$

$$p^1: \ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0, \qquad v_1(x,0) = 0,$$

$$p^2: \ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, \qquad v_2(x,0) = 0,$$

$$\vdots$$

[1] Burgers

$$p^j:\ \frac{\partial v_j}{\partial t}+\sum_{k=0}^{j-1} v_k\frac{\partial v_{j-k-1}}{\partial x}-\frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2}=0,\qquad v_j(x,0)=0,$$

حال برای ساده سازی قرار می دهیم $v_0(x,t)=u_0(x,t)=2x$، لذا داریم

$$v_j=\int_0^t\left(\frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2}-\sum_{k=0}^{j-1} v_k\frac{\partial v_{j-k-1}}{\partial x}\right)dt,\quad j=1,2,3,\dots. \qquad (27-3)$$

از این رابطه نتایج زیر به دست می آید

$v_1(x,t)=-4xt,$

$v_2(x,t)=8xt^2,$

$v_3(x,t)=-16xt^3,$

$\vdots$

$v_n(x,t)=(-1)^n 2^{n+1} x t^n$

بنابراین

$$u=\sum_{j=0}^{\infty} v_j=2x\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2t)^j=\frac{2x}{1+2t}. \qquad (28-3)$$

حال فرض کنیم $\mathcal{N}:\ \mathbb{R}\times\left[0,\frac{1}{2}\right)\to\mathbb{R}^2$ و $V_n=\mathcal{N}(V_{n-1})$ که V_n طبق رابطه زیر تعریف می شود

$$V_n=\sum_{j=0}^{n}\int_0^t\left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}-\sum_{k=0}^{j} v_k\frac{\partial v_{j-k}}{\partial x}\right)dt,\quad n=1,2,3,\dots.$$

$V_0=v_0=u_0.$

همچنین $t<\frac{\gamma}{2}$ و $0<\gamma<1$.

طبق قضیه (۳-۴-۱) یک شرط کافی برای همگرایی این دنباله این است که عملگر غیر خطی $\mathcal{N}$ انقباضی باشد. بنابراین خواهیم داشت

$$\|v_0-u\| = \left\|2x-\frac{2x}{1+2t}\right\| = 4\left\|\frac{xt}{1+2t}\right\|,$$

$$\|V_1-u\| = \|u_0+u_1-u\| = 8\left\|\frac{xt^2}{1+2t}\right\| \le 8\left(\frac{\gamma}{2}\right)\left\|\frac{xt}{1+2t}\right\| = \gamma\|v_0-u\|,$$

$$\|V_2-u\| = \|u_0+u_1+u_2-u\| = 16\left\|\frac{xt^3}{1+2t}\right\| \le 16\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\left\|\frac{xt}{1+2t}\right\| = \gamma^2\|v_0-u\|,$$

$$\vdots$$

$$\|V_n-u\| = \left\|\sum_{j=0}^{n} u_j-u\right\| = 2^{n+2}\left\|\frac{xt^{n+1}}{1+2t}\right\| \le 2^{n+2}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^n\left\|\frac{xt}{1+2t}\right\| = \gamma^n\|v_0-u\|,$$

در نتیجه می توان نوشت

$$\lim_{n\to\infty}\|V_n-u\| \le \lim_{n\to\infty}\gamma^n\|v_0-u\| = 0$$

بنابراین خواهیم داشت

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{2x}{1+2t}$$

که این همان جواب دقیق معادله می باشد. توجه داریم با توجه به (۳-۲۸) برای $t \ge \frac{1}{2}$، سری واگرا می شود.

۳-۵ کاربردهای روش آشفتگی هوموتوپی برای حل معادلات تابعی

۳-۵-۱ معادله برگرز[1]

معادله برگرز یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم غیر خطی است. این معادله برای تشریح حرکت سیالات و بررسی لایه های مرزی و امواج ضربه ای، حرکت و جابه جایی اجرام و همچنین در علوم مهندسی به عنوان مدلی ساده برای نمایش آشفتگی و تلاطم به کار می رود.

معادله برگرز در حالت یک بعدی را به شکل زیر در نظر می گیریم

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (29-3)$$

تحت شرط اولیه

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (30-3)$$

و شرایط مرزی

$$u(0,t) = f_1(t), \ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = f_2(t), \quad t > 0. \qquad (31-3)$$

پارامتر ثابت ν در معادله (۳-۲۹) ضریب چسبندگی نام دارد و همچنین عدد $\frac{1}{\nu}$ را عدد رینولد می نامند. این پارامتر نقش تعیین کننده ای در رفتار روشهای عددی دارد. همچنین u سرعت انتقال مورد نظر می باشد.

ابتدا یک حل تحلیلی برای این معادله را در حالت $\nu = 1$ به صورت زیر بیان می کنیم. برای تعیین جواب معادله تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم

[1] Burgers

$$u = u(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t), \qquad (32-3)$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x},$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}.$$

بنابراین معادله برگرز به معادله ی زیر تبدیل می شود

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0,$$

و یا

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right] = 0.$$

در نتیجه می توان گفت تابعی مانند $f(t)$ موجود است به طوری که

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + f(t). \qquad (33-3)$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم

$$\varphi = \varphi(x,t) = \psi(x,t) + \int_0^t f(s)\,ds,$$

بنابراین معادله $(33-3)$ به معادله زیر تبدیل می شود

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \qquad (34-3)$$

حال قرار می دهیم $\psi=\psi(x,t)=2\,ln\,z(x,t)$، در این صورت معادله بالا به معادله ی زیر تبدیل می شود

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \qquad (35-3)$$

این معادله را با روش متغیرهای جدا از هم حل می کنیم. قرار می دهیم $z=z(x,t)=X(x)T(t)$ داریم

$$X(x)T'(t)=X''(x)T(t),$$

در نتیجه می توان نوشت

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda,$$

سه حالت زیر را در نظر می گیریم

۱)اگر $\lambda>0$ قرار می دهیم $\lambda=\alpha^2$ در این صورت داریم

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\alpha^2,\qquad \frac{X''(x)}{X(x)}=\alpha^2.$$

از حل معادلات بالا خواهیم داشت

$$z=X(x)T(t)=(c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x})e^{\alpha^2 t}.$$

حال با توجه به مطالب گفته شده داریم

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi+\int_0^t f(s)\,ds\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\,ln\,z+\int_0^t f(s)\,ds\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\,ln\left((c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x})e^{\alpha^2 t}\right)+\int_0^t f(s)\,ds\right)$$

$$=\frac{ae^{\alpha x}+be^{-\alpha x}}{c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x}},\qquad a=-2c_1\alpha,\quad b=2c_2\alpha.$$

۲)اگر $\lambda<0$ قرار می دهیم $\lambda=-\alpha^2$ در این صورت داریم

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=-\alpha^2,\qquad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\alpha^2. \qquad (36-3)$$

از حل معادلات $(36-3)$ داریم

$$z=X(x)T(t)=(c_1cos\alpha x+c_2sin\alpha x)e^{-\alpha^2 t}.$$

حال با توجه به مطالب گفته شده داریم

$$u=-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\,ln\,z+\int_0^t f(s)\,ds\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\,ln\left((c_1cos\alpha x+c_2sin\alpha x)e^{-\alpha^2 t}\right)+\int_0^t f(s)\,ds\right)$$

$$=\frac{acos\alpha x+bsin\alpha x}{c_1cos\alpha x+c_2sin\alpha x},\qquad a=2c_1\alpha,\quad b=-2c_2\alpha.$$

۳)اگر $\lambda=0$ خواهیم داشت

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=0.$$

حال با توجه به مطالب گفته شده داریم

$$u = -\frac{\partial}{\partial x}\left(2\,ln\,z + \int_0^t f(s)\,ds\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(2\,ln(c_1 + c_2x) + \int_0^t f(s)\,ds\right)$$

$$= -\frac{2c_2}{c_1 + c_2x}.$$

برای حل معادله (۳-۲۹) با روش آشفتگی هوموتوپی تحت شرط اولیه (۳-۳0) ابتدا هوموتوپی زیر را می سازیم

$$(1-p)\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) + p\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial v}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0, \qquad (37-3)$$

یا به طور معادل

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = p\left(\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (38-3)$$

فرض کنید جواب معادله (۳-۳۸) به صورت زیر باشد

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots. \qquad (39-3)$$

با جای گذاری (۳-۳۹) در (۳-۳۸) و مساوی قرار دادن ضرایب جملات هم توان p خواهیم داشت

$$p^0 :\ \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0,$$

$$p^1 :\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0, \qquad v_1(x,0) = 0,$$

$$p^2:\ \frac{\partial v_2}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_1}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}=0,$$
$$v_2(x,0)=0, \qquad (40-3)$$

$\vdots$

$$p^j:\ \frac{\partial v_j}{\partial t}+\sum_{k=0}^{j-1}v_k\frac{\partial v_{j-k-1}}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2}=0, \qquad v_j(x,0)=0,$$

برای سادگی حل معادلات بالا قرار می دهیم $v_0(x,t)=u_0(x,t)=f(x)$، در این صورت رابطه بازگشتی زیر به دست می آید

$$v_j=\int_0^t\left(\nu\frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2}-\sum_{k=0}^{j-1}v_k\frac{\partial v_{j-k-1}}{\partial x}\right)dt, \quad j=1,2,3,\ldots. \qquad (41-3)$$

جواب معادله (۳-۲۹) با جای گذاری $p=1$ در رابطه (۳-۳۹) به دست می آید.

به طور مشابه برای حل معادله (۳-۲۹) با شرایط مرزی (۳-۳۱)، معادله هوموتوپی زیر را می سازیم

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=p\left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right), \qquad (42-3)$$

با تقریب اولیه به صورت $v_0(x,t)=u_0(x,t)=f_1(t)+xf_2(t)$.

حال فرض کنید جواب معادله (۳-۴۲) به صورت (۳-۳۹) باشد، مطابق توضیحاتی که در قسمت قبل داده شد به روابط زیر می رسیم

$$p^0:\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=0,$$

$$p^1:\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial v_0}{\partial t}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)=0,\ \ v_1(0,t)=\frac{\partial v_1}{\partial x}(0,t)=0,$$

$$p^2:\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}-\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_0\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)=0,\ \ v_2(0,t)=\frac{\partial v_2}{\partial x}(0,t)=0, \qquad (43-3)$$

$$\vdots$$

$$p^j:\ \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}-\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial v_{j-1}}{\partial t}+\sum_{k=0}^{j-1} v_k\frac{\partial v_{j-k-1}}{\partial x}\right)=0,\ \ v_j(0,t)=\frac{\partial v_j}{\partial x}(0,t)=0$$

از معادلات (۳-۴۳) خواهیم داشت

$$v_j=\frac{1}{\nu}\int_0^x\int_0^x\left(\frac{\partial v_{j-1}}{\partial t}-\sum_{k=0}^{j-1} v_k\frac{\partial v_{j-k-1}}{\partial x}\right)dxdx,\qquad j=1,2,3,\ldots. \qquad (44-3)$$

۳-۵-۱-۱ مثال: معادله دیفرانسیل نسبی برگرز[1] با شرط اولیه زیر را در نظر بگیرید[19]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x,0)=2\left(1+e^{\frac{x}{\nu}}\right)^{-1},|x|<\infty.$$

یک هوموتوپی به صورت زیر در نظر می گیریم

$$(1-p)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)+p\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial v}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=0.$$

اولین تقریب را به صورت $u(x,0)=2\left(1+e^{\frac{x}{\nu}}\right)^{-1}$، در نظر می گیریم. از معادله (۳-۴۱) خواهیم داشت

$$v_j=\int_0^t\left(\nu\frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2}-\sum_{k=0}^{j-1} v_k\frac{\partial v_{j-k-1}}{\partial x}\right)dt,\quad j=1,2,3,\ldots,$$

از رابطه بالا به جواب های زیر می رسیم

[1] Burgers

$$u_0 = 2\left(1+e^{\frac{x}{\nu}}\right)^{-1},$$

$$u_1 = 2t\nu^{-1}e^{\frac{x}{\nu}}\left(1+e^{\frac{x}{\nu}}\right)^{-1},$$

$$u_2 = 1(t\nu^{-1})^2 e^{\frac{x}{\nu}}\left(e^{\frac{x}{\nu}}-1\right)\left(1+e^{\frac{x}{\nu}}\right)^{-3},$$

$$u_3 = \frac{1}{3}(t\nu^{-1})^3 e^{\frac{x}{\nu}}\left(1-4e^{\frac{x}{\nu}}+2e^{\frac{2x}{\nu}}\right)\left(1+e^{\frac{x}{\nu}}\right)^{-4},$$

$$u_4 = \frac{1}{12}(t\nu^{-1})^4 e^{\frac{x}{\nu}}\left(e^{\frac{x}{\nu}}-1\right)\left(e^{\frac{2x}{\nu}}-10e^{\frac{x}{\nu}}+1\right)\left(1+e^{\frac{x}{\nu}}\right)^{-5}$$

به آسانی می توان نشان داد که $u_n = \frac{2}{n!}t^n\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{1+e^{(x-t)/\nu}}\right)_{t=0}$، بنابراین

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = 2\left(1+e^{(x-t)/\nu}\right)^{-1},$$

که جواب واقعی مساله است.

۳-۵-۱-۲ مثال: معادله دیفرانسیل با شرط مرزی زیر را در نظر بگیرید[19]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,t)=0, \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{1}{t}-\frac{\pi^2}{2\nu t^2}, t>0$$

روش آشفتگی هوموتوپی برای این معادله دارای شکل زیر است:

$$L(v)-L(u_0)+pL(u_0)-p\left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)=0,$$

که در آن $L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. قرار می دهیم $u_0(x,t)=\left(\frac{1}{t}-\frac{\pi^2}{2\nu t^2}\right)x$، از معادله (۳-۴۴) رابطه بازگشتی زیر را خواهیم داشت

$$u_j = \frac{1}{\nu}\int_0^x \int_0^x \left(\frac{\partial u_{j-1}}{\partial t} - \sum_{k=0}^{j-1} u_k \frac{\partial u_{j-k-1}}{\partial x}\right) dxdx, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

با استفاده از این رابطه بازگشتی جوابهای زیر بدست می آیند

$$u_1(x,t) = \frac{x^3\pi^4}{24\nu^3t^4},$$

$$u_2(x,t) = -\frac{x^5\pi^6}{240\nu^5t^6},$$

$$u_3(x,t) = \frac{17x^7\pi^8}{4032\nu^7t^8},$$

$$u_4(x,t) = -\frac{x^9\pi^{10}}{725760\nu^9t^{10}},$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \frac{x}{t} - \frac{x\pi^2}{2\nu t^2} + \frac{x^3\pi^4}{24\nu^3t^4} - \frac{x^5\pi^6}{240\nu^5t^6} + \frac{17x^7\pi^8}{4032\nu^7t^8} - \cdots \\ &= \frac{x}{t} - \frac{\pi}{t}\left(\frac{\pi x}{2\nu t} - \frac{x^3\pi^3}{3(2)^3\nu^3t^3} - \frac{2x^5\pi^5}{15(2)^5\nu^5t^5} + \frac{17x^7\pi^7}{315(2)^7\nu^7t^7} - \cdots\right) \\ &= \frac{x}{t} - \frac{\pi}{t} tanh\left(\frac{\pi x}{2\nu t}\right), \end{aligned}$$

که جواب واقعی معادله است.

۳-۵-۲ معادله شرودینگر[1]

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیر خطی مرتبه دوم شرودینگر با شرط اولیه به شکل زیر می باشد

[1] Stirödinger

$$i\frac{\partial\psi(X,t)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\nabla^2\psi+V_d(X)\psi+\beta_d|\psi|^2\psi,$$
$$X\in\mathbb{R}^d, t\geq 0, \qquad (45-3)$$

$$\psi(X,0)=\psi^0(X), X\in\mathbb{R}^d,$$

که در آن $V_d(X)$ انرژی پتانسیل یک ذره و β_d یک ثابت حقیقی است. برای حل این معادله با روش آشفتگی هوموتوپی، یک هوموتوپی به صورت زیر می سازیم

$$(1-p)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi_0}{\partial t}\right)+p\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}-i\left(\frac{1}{2}\nabla^2\Psi-V_d(X)\Psi-\beta_d|\Psi|^2\Psi\right)\right)$$
$$=0, \qquad (46-3)$$

فرض کنیم (۳-۴۶) دارای جوابی به صورت زیر باشند

$$\Psi=\Psi_0+p\Psi_1+p^2\Psi_2$$
$$+\cdots, \qquad (47-3)$$

با جای گذاری (۳-۴۷) در (۳-۴۶) و معادل قرار دادن جملات هم توان p خواهیم داشت

$$p^0:\ \frac{\partial\Psi_0}{\partial t}-\frac{\partial\psi_0}{\partial t}=0,$$

$$p^1:\ \frac{\partial\Psi_1}{\partial t}-\frac{\partial\psi_0}{\partial t}-i\left(\frac{1}{2}\nabla^2\Psi_0-V_d(X)\Psi_0-\beta_d|\Psi_0|^2\Psi_0\right)=0, \Psi_1(X,0)=0,$$

$$p^2:\ \frac{\partial\Psi_2}{\partial t}-i\left(\frac{1}{2}\nabla^2\Psi_1-V_d(X)\Psi_1-\beta_d\sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{1-i}|\Psi_i||\Psi_k|\Psi_{1-k-i}\right)=0, \Psi_2(X,0)$$
$$=0,$$

$$p^3:\ \frac{\partial\Psi_3}{\partial t}-i\left(\frac{1}{2}\nabla^2\Psi_2-V_d(X)\Psi_2-\beta_d\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=0}^{2-i}|\Psi_i||\Psi_k|\Psi_{2-k-i}\right)=0, \Psi_3(X,0)$$
$$=0,$$

$$\vdots$$

$$p^j:\ \frac{\partial \Psi_j}{\partial t}-i\left(\frac{1}{2}\nabla^2\Psi_{j-1}-V_d(X)\Psi_{j-1}-\beta_d\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{j-i-1}|\Psi_i||\Psi_k|\Psi_{j-k-i-1}\right)=0,\Psi_j(X,0)=0,$$

حال فرض کنیم $\Psi_0(X,t)=\psi_0(X,t)=\psi^0(X)$، به معادله بازگشتی زیر می رسیم

$$\Psi_j=i\int_0^t\left(\frac{1}{2}\nabla^2\Psi_{j-1}-V_d(X)\Psi_{j-1}-\beta_d\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{j-i-1}|\Psi_i||\Psi_k|\Psi_{j-k-i-1}\right),\quad j=1,2,3,\ldots \tag{48-3}$$

چون $|\Psi|^2=\Psi\Psi^*$ که در آن Ψ^* مزدوج مختلط Ψ می باشد می توان برای پرهیز از محاسبات طولانی در معادله بازگشتی (۳-۴۸) به جای $|\Psi_i||\Psi_k|$ از $\Psi_i\Psi_k^*$ استفاده کرد.

جواب معادله (۳-۴۵) با جای گذاری $p=1$ در رابطه (۳-۴۷) به دست می آید.

$$\psi=\Psi_0+\Psi_1+\Psi_2+\cdots$$

۳-۵-۲-۱ مثال: معادله دیفرانسیل جزیی سه بعدی شرودینگر با شرط اولیه زیر را در نظر بگیرید[18]

$$i\frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\psi+|\psi|^2\psi,$$
$$(x,y,z)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi],\qquad \psi(x,y,z,0)=\ sinxsinysinz$$

که در آن $V(x,y,z)=1-sin^2xsin^2ysin^2z$.

روش آشفتگی هوموتوپی برای این معادله به صورت زیر است

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi_0}{\partial t}=p\left(i\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)-V(x,y,z)\Psi-\Psi^2\Psi^*\right)-\frac{\partial\psi_0}{\partial t}\right)=0$$

با فرض این که تقریب اولیه معادله به شکل $\psi_0 = \psi(x, y, z, 0) = sinxsinysinz$ باشد، با استفاده از رابطه (۳-۴۸) خواهیم داشت

$$\psi_j = i\int_0^t \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) - V(x, y, z)\psi_{j-1} - \sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{i-j-1} \psi_i {\psi_k}^* \psi_{j-k-i-1}\right) dt, \quad j = 1,2,3, \ldots \qquad (49-3)$$

بنابراین از معادله (۳-۴۹) نتایج زیر به دست می آید

$$\psi_1(x, y, z, t) = -\frac{5}{2} itsinxsinysinz = \frac{1}{1!}\left(\frac{-5it}{2}\right) sinxsinysinz,$$

$$\psi_2(x, y, z, t) = -\frac{25}{8} t^2 sinxsinysinz = \frac{1}{2!}\left(\frac{-5it}{2}\right)^2 sinxsinysinz,$$

$$\psi_3(x, y, z, t) = \frac{125}{48} it^3 sinxsinysinz = \frac{1}{3!}\left(\frac{-5it}{2}\right)^3 sinxsinysinz,$$

$$\psi_4(x, y, z, t) = \frac{625}{384} t^4 sinxsinysinz = \frac{1}{4!}\left(\frac{-5it}{2}\right)^4 sinxsinysinz,$$

$$\vdots$$

جواب دقیق معادله به صورت زیر به دست می آید:

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x, y, z, t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-5it}{2}\right)^n sinxsinysinz$$

$$= sinxsinysinz \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-5it}{2}\right)^n$$

$$= sinxsinysinz\, e^{-\frac{5it}{2}}.$$

۳-۵-۳ معادلات دیفرانسیل جزیی هذلولوی کوشی[1]

معادلات دیفرانسیل هذلولی نقش مهمی در بسیاری از شاخه های علوم و مهندسی ایفا می کنند. به عنوان مثال معادله موج یک معادله هذلولوی است که مدل سازی مسایلی مانند ارتعاش نخی که دو سرآن ثابت شده است، ارتعاش یک میله در طول آن، انتشار موجهای صوتی و الکترومغناطیسی و بسیاری از معادلات دیگر از این قبیل معادلات می باشند. این معادلات در دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) نیز اتفاق می افتند. همچنین معادلات اویلر حرکت گازها از نوع هذلولوی هستند.

یک معادله دیفرانسیل جزئی به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d = 0, \qquad (50-3)$$

که در آن a، b، c و d ممکن است توابعی از x، y، u، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشند و مشتقات مرتبه دوم در ضرایب معادله ظاهر نمی شوند. اگر $b^2-4ac>0$ معادله (۳-۵0) یک معادله هذلولوی نامیده می شود.

اکنون معادله (۳-۵0) را با شرایط اولیه زیر در نظر می گیریم

$$u(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=g(x) \qquad (51-3)$$

$$u(0,y)=f(y), \quad \frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=g(y) \qquad (52-3)$$

در این جا حالتی را در نظر می گیریم که ضرایب معادله کوشی بر حسب u و مشتقات آن نیستند.

[1] Cauchy hyperbolic partial differential equations

برای حل معادله (۳-۵0) با شرایط (۳-۵۱) معادله هوموتوپی زیر را می سازیم

$$(1-p)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right]+p\left[\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{b}{c}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{d}{c}\right]=0$$

حال فرض کنیم $v=v_0+pv_1+p^2v_2+\cdots$ با قرار دادن v در رابطه فوق و یکسانی قرار دادن ضرایب توانهای p در طرفین خواهیم داشت

$$p^0:\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=0$$

$$p^1:\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}-\frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}-\frac{d}{c},v_1(x,0)=0,\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,0)=0$$

$$p^2:\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}=-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-\frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y},v_2(x,0)=0,\frac{\partial v_2}{\partial x}(x,0)=0 \qquad (53-3)$$

اکنون قرار می دهیم $v_0=u_0=f(x)+g(x)y$، از حل معادلات (۳-۵۳) داریم

$$v_1=\int_0^y\int_0^y\left[-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}-\frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial\xi}-\frac{d}{c}\right]d\xi dy$$

$$v_2=\int_0^y\int_0^y\left[-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-\frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial\xi}\right]d\xi dy$$

$$\vdots$$

جواب معادله (۳-۵0)، تحت شرایط (۳-۵۱)، به صورت زیر به دست می آید

$$u=v_0+v_1+v_2+\cdots.$$

به طور مشابه برای حل معادله (۳-۵0)، با شرایط اولیه (۳-۵۲)، معادله هوموتوپی زیر را در نظر می گیریم

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=p\left[-\frac{c}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{b}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{d}{a}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right]$$

اگر جواب این معادله را به صورت (۳-۳۹) در نظر بگیریم، با توجه به توضیحات قسمت قبل داریم

$$p^0:\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=0$$

$$p^1:\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}=-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-\frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\frac{d}{c},v_1(0,y)=0,\frac{\partial v_1}{\partial x}(0,y)=0$$

$$p^2:\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}=-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-\frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y},v_2(0,y)=0,\frac{\partial v_2}{\partial x}(0,y)=0 \qquad (54-3)$$

حال قرار می دهیم $v_0=u_0=f(y)+g(y)x$، لذا داریم

$$v_1=\int_0^x\int_0^x\left[-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-\frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi\partial y}-\frac{d}{c}\right]d\xi dx$$

$$v_2=\int_0^x\int_0^x\left[-\frac{a}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}-\frac{b}{c}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi\partial y}\right]d\xi dx \qquad (55-3)$$

$$\vdots$$

در نتیجه $u=\lim_{p\to 1}v=v_0+v_1+v_2+\cdots$.

۳-۵-۳-۱ مثال: معادله دیفرانسیل با شرط کرانه ای زیر را در نظر بگیرید [34]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1-2x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(x^4-x-2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$u(0,y)=y,\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=1.$$

فرض کنید$u=u_0+pu_1+p^2u_2+\cdots$، بر طبق (۳-۵۲) داریم

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=p\left[(1-2x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(x^4-x-2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right]$$

جواب اولیه را به صورت $u_0(x,y) = x + y$ در نظر می گیریم، بر اساس (۳-۵۳) خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, u_1(0,y) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(0,y)$$
$$= 0, \qquad (56-3)$$

جواب این معادله به آسانی به صورت $u_1(x,y) = 0$ به دست می آید. از این رو یک تقریب تحلیلی مرتبه دوم برای جواب معادله عبارت است از

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x,y) = x + y$$

که جواب دقیق معادله مورد نظر است.

۳-۵-۳-۲ مثال: معادله دیفرانسیل با شرط کرانه ای زیر را در نظر بگیرید [34]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d = 0,$$

$$u(x,0) = x^2, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 0.$$

معادله هوموتوپی این معادله به صورت زیر نوشته می شود

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = p\left[\frac{1}{4x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right]$$

حال فرض کنید $u_0(x,y) = x^2$، از روابط (۳-۵۴) و (۳-۵۵) داریم

$$u_1(x,y) = \frac{1}{4}\frac{y^2}{x^2},$$

$$u_2(x,y) = \frac{1}{32}\frac{y^4}{x^6},$$

$$u_3(x,y) = \frac{1}{640}\frac{y^6}{x^{10}},$$

$$u_4(x,y)=\frac{1}{2048}\frac{y^8}{x^{14}},$$

اگر یک تقریب مرتبه پنجم برای این معادله در نظر بگیریم، داریم

$$u(x,y)\approx x^2+\frac{1}{4}\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{32}\frac{y^4}{x^6}+\frac{1}{640}\frac{y^6}{x^{10}}+\frac{1}{2048}\frac{y^8}{x^{14}}.$$

فصل چهارم

حل معادلات دیفرانسیل کسری به روش آشفتگی هوموتوپی

۱-4 مقدمه

هدف در این فصل، پرداختن به معرفی برخی از معادلات دیفرانسیل کسری و حل آنها به وسیله روش آشفتگی هوموتوپی می باشد.

۲-۴ معرفی معادلات و حل آنها با روش آشفتگی هوموتوپی

۱-۲-۴ معادله KdV کاراموتو برگرز[1]

معادله دیفرانسیل کسری غیر خطی کاراموتو برگرز با شرط اولیه به شکل زیر می باشد [42]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}} + a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad t > 0, 0 < \alpha \le 1, \qquad (1-4)$$

$$u(x,0) = kx^4, \ \ k \in C,$$

که a، b و c ثابت هستند و پارامتر α مرتبه مشتق مکان کسری را توصیف می کند. تابع $u(x,y)$ علّی[2] فضا فرض می شود که برای $t > 0$ و $x > 0$ صفر می شود. برای حل این معادله با روش آشفتگی، یک هوموتوپی به صورت زیر می سازیم

[1] Kdv-Burgers-Kuramoto equation
[2] Causal

$$(1-p)\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}\right]+p\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+v(x,t)\frac{\partial^\alpha v(x,t)}{\partial x^\alpha}+a\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}+b\frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^3}+c\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}\right]=0, \qquad (2-4)$$

و یا به طور معادل

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}+p\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}+p\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+v(x,t)\frac{\partial^\alpha v(x,t)}{\partial x^\alpha}+a\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}+b\frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^3}+c\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}\right]=0. \qquad (3-4)$$

فرض کنید معادله (۴-3) دارای جوابی به صورت زیر باشد

$$v=v_0+p\,v_1+p^2\,v_2+\cdots. \qquad (4-4)$$

با جا گذاری (۴-4) و (۴-3) و مساوی قرار دادن ضرایب جملات هم توان p خواهیم داشت

$$p^0:\ \frac{\partial v_0}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}=0,$$

$$p^1:\ \frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial u_0}{\partial t}+v_0\frac{\partial^\alpha v_0}{\partial x^\alpha}+a\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+b\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}+c\frac{\partial^۴ v_0}{\partial x^۴}=0,\ \ v_1(x,0)=0,$$

$$p^2:\ \frac{\partial v_2}{\partial t}+v_0\frac{\partial^\alpha v_1}{\partial x^\alpha}+v_1\frac{\partial^\alpha v_0}{\partial x^\alpha}+a\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+b\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}+c\frac{\partial^۴ v_1}{\partial x^۴}=0,\ \ v_2(x,0)=0,$$

$$\vdots \qquad (5-4)$$

$$p^j:\ \frac{\partial v_{j-1}}{\partial t}+\sum_{k=0}^{j-1}v_k\frac{\partial^\alpha v_{j-k-1}}{\partial x^\alpha}+a\frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2}+b\frac{\partial^3 v_{j-1}}{\partial x^3}+c\frac{\partial^4 v_{j-1}}{\partial x^4}=0,\qquad v_{j-1}(x,0)=0,$$

برای سادگی حل معادلات بالا قرار می دهیم $v_0(x,t)=u_0(x,t)=kx^4$، در این صورت رابطه بازگشتی زیر به دست می آید

$$v_j=\int_0^t\left(\sum_{k=0}^{j-1}v_k\frac{\partial^\alpha v_{j-k-1}}{\partial x^\alpha}+a\frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2}+b\frac{\partial^3 v_{j-1}}{\partial x^3}+c\frac{\partial^4 v_{j-1}}{\partial x^4}\right)dt,\ \ j=1,2,3,\ldots \qquad (6-4)$$

از رابطه بالا به جوابهای زیر می رسیم

$$u_0=kx^4,$$

$$u_1 = -\frac{24}{\Gamma(5-\alpha)} x^{8-\alpha} - 12akx^2t - 24bkxt - 24ckt\,,$$

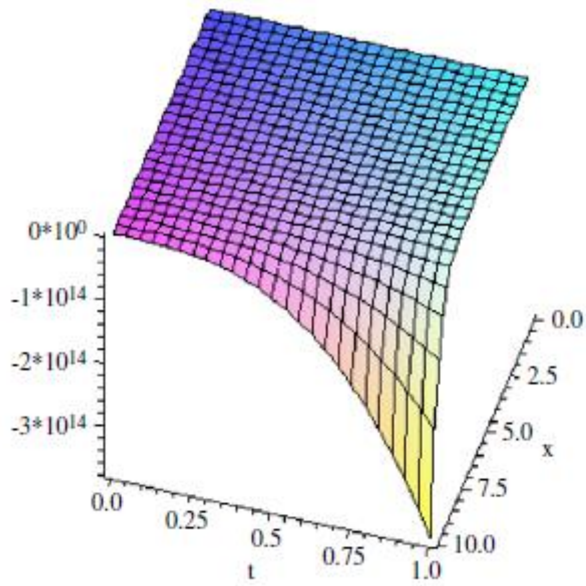
$$u_2 = -\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{1} u_k \frac{\partial^\alpha u_{1-k}}{\partial x^\alpha} + a\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + c\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right) dt,$$

$\vdots$

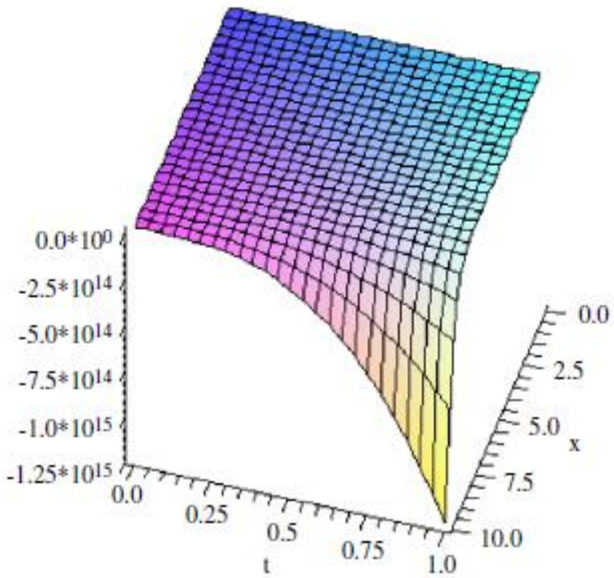
جواب معادله (۴-*3*) با جای گذاری *p=1* در رابطه (۴-*4*) به دست می اید.

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots.$$

A



B



شکل۴-۱: جوابهایی از معادله (۴-۱) به وسیله روش آشفتگی هوموتوپی برای مقادیر مختلف از α وقتی که $a = b =$ $c = 1$ و $k =$ (A) $\alpha = 1$ و (B) $\alpha = 0/5$.

۴-۲-۲ معادله شرودینگر کسری[1]

معادله دیفرانسیل کسری غیر خطی مرتبه دوم شرودینگر با شرط اولیه به شکل زیر می باشد[43]

$$i\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}+\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+V(x)u+\gamma|u|^2u=0,$$
$$t>0, 0<\alpha\le 1 \qquad (7-4)$$
$$u(x,0)=f(x) \qquad x\in\mathbb{R}^d.$$

که در آن $V(x)$ انرژی پتانسیل یک ذره و γ و β ثابت حقیقی هستند. فرم استاندارد معادله غیر خطی شرودینگر تعمیم یافته به صورت زیر می باشد

$$D_t^\alpha u(x,t)=i(\beta L_x u+V(x)u+\gamma|u|^2u) \qquad (8-4)$$

که در آن $L_{\mathrm{x}}=\partial^2/\partial x^2$ و $D_t^\alpha=\partial^\alpha/\partial x^\alpha$ عملگر دیفرانسیل کسری است.

برای حل این معادله با روش آشفتگی، یک هوموتوپی به صورت زیر می سازیم

$$(1-p)\left(\frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha}-\frac{\partial^\alpha u_0}{\partial t^\alpha}\right)+p\left(\frac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha}-i(\beta L_x U+V(x)U+\gamma|U|^2U)\right)$$
$$=0. \qquad (9-4)$$

فرض کنیم (9-4) دارای جوابی به صورت زیر باشند

$$U=U_0+pU_1+p^2U_2+\cdots. \qquad (10-4)$$

با جای گذاری (۴-10) و (۴-۹) و معادل قرار دادن جملات هم توان p خواهیم داشت

$$p^0: \frac{\partial^\alpha U_0}{\partial t^\alpha}-\frac{\partial^\alpha u_0}{\partial t^\alpha}=0,$$

$$p^1: \frac{\partial^\alpha U_1}{\partial t^\alpha}+\frac{\partial^\alpha u_0}{\partial t^\alpha}-i(\beta L_x U_0+V(x)U_0+\gamma|U_0|^2U_0)=0, \quad U_1(x,0)=0,$$

$$p^2: \frac{\partial^\alpha U_2}{\partial t^\alpha}-i\left(\beta L_x U_1+V(x)U_1-\gamma\sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{1-i}|U_i||U_k|U_{1-k-i}\right)=0, U_2(x,0)=0,$$

---
[1] Fractional schrödinger equation

$$p^3 : \frac{\partial^\alpha U_3}{\partial t^\alpha} - i\left(\beta L_x U_2 + V(x)U_2 - \gamma \sum_{i=0}^{2} \sum_{k=0}^{2-i} |U_i||U_k|U_{2-k-i}\right) = 0, U_3(x,0) = 0,$$

$$\vdots$$

$$p^j : \frac{\partial^\alpha U_j}{\partial t^\alpha} - i\left(\beta L_x U_{j-1} + V(x)U_{j-1} - \gamma \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{j-i-1} |U_i||U_k|U_{j-k-i-1}\right) = 0,$$

$$U_j(x,0) = 0. \qquad (11-4)$$

با اعمال $D^{-\alpha}$ در دو طرف معادله (۴-۱۱) بدست می آوریم

$$U_j(x,t) - U_0(x,t) = \qquad iD^{-\alpha}\big(\beta L_x U_{j-1} + V(x)U_{j-1} - \gamma \textstyle\sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{j-i-1} |U_i||U_k|U_{j-k-i-1}\big) \; j = 1,2,3, \ldots$$

اکنون فرض کنیم $U_0(x,t) = u_0(x,t) = f(x)$، به معادله بازگشتی زیر می رسیم

$$U_j(x,t) = f(x) + iD^{-\alpha}\left(\beta L_x U_{j-1} + V(x)U_{j-1} - \gamma \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{j-i-1} |U_i||U_k|U_{j-k-i-1}\right)$$

$$j = 1,2,3, \ldots \qquad (12-4)$$

چون $|U|^2 = UU^*$ که در آن U^* مزدوج مختلط U می باشد می توان برای پرهیز از محاسبات طولانی در معادله بازگشتی (۴-۱۲) به جای $|U_i||U_k|$ از $U_i U_k^*$ استفاده کرد.

جواب معادله (۴-۷) با جای گذاری $p = 1$ در رابطه (۴-10) به دست می آید.

$$u = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots \qquad (13-4)$$

۴-۲-۲-۱ مثال: معادله شرودینگر کسری غیر خطی را با شرط اولیه زیر در نظر بگیرید[43]

$$i\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0. \qquad (14-4)$$

$$u(x,0) = e^{ix}$$

با استفاده ا ز روابط (۴-۱۱)، می توانیم بعضی از جملات سری (۴-۱۳) را بدست آوریم

$$u_0 = e^{ix},$$

$$u_1 = \frac{i}{2} e^{ix} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)},$$

$$u_2 = \frac{-1}{4} e^{ix} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)},$$

$$u_3 = \frac{-i}{8} e^{ix} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)},$$

با جایگذاری u_0، u_1، u_2، u_3.... در معادله (۴-۱۳) جواب $u(x,t)$ به صورت سری زیر به دست می آید

$$u(x,t) = e^{ix} + \frac{i}{2} e^{ix} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{-1}{4} e^{ix} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{-i}{8} e^{ix} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \cdots$$
$$= e^{ix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{it^{\alpha}}{2}\right)^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

که جواب دقیق به صورت زیر بدست می آید:

$$u(x,t) = e^{ix} E_{\alpha}\left(\frac{it^{\alpha}}{2}\right)$$

که در آن $E_{\alpha}\left(\frac{it^{\alpha}}{2}\right)$ تابع میتاژ- لفلر است که به صورت زیر بیان می شود:

$$E_{\alpha}(\mathrm{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}.$$

وقتی $\alpha \to 1$ آنگاه داریم

$$u(x,t) = e^{ix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{it}{2}\right)^k}{k!} = e^{i\left(x + \frac{1}{2}t\right)}$$

که یک جواب دقیق برای فرم استاندارد معادله شرودینگر غیر خطی کسری است.

۴-۲-۲ مثال: معادله شرودینگر غیر خطی کسری زمان تحت شرط اولیه زیر در نظر بگیرید[43]

$$i\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+|u|^{2}u=0.\ t>0,0<\alpha\leq 1 \qquad (14-4)$$

$$u(x,0)=e^{i\frac{c}{2}x}sech(kx),\ \ k=\frac{a}{\sqrt{2}},\qquad a=\sqrt{2(w-0/25)c^{2}}$$

جواب دقیق فقط در حالت خاص که $\alpha\to 1$ به صورت زیر می باشد

$$u(x,t)=aie^{i\left(-\frac{1}{2}c^{2}t+tw+\frac{c}{2}x\right)}sech\big(k(x-ct)\big) \qquad (15-4)$$

با استفاده ا ز روابط (۴-۱۱)، می توانیم بعضی از جملات سری (۴-۱۳) را بدست آوریم

$$u_0=f(x),$$

$$u_1=f_1(x)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$u_2=f_2(x)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

که

$$f(x)=aie^{i\frac{c}{2}x}sech(kx),$$

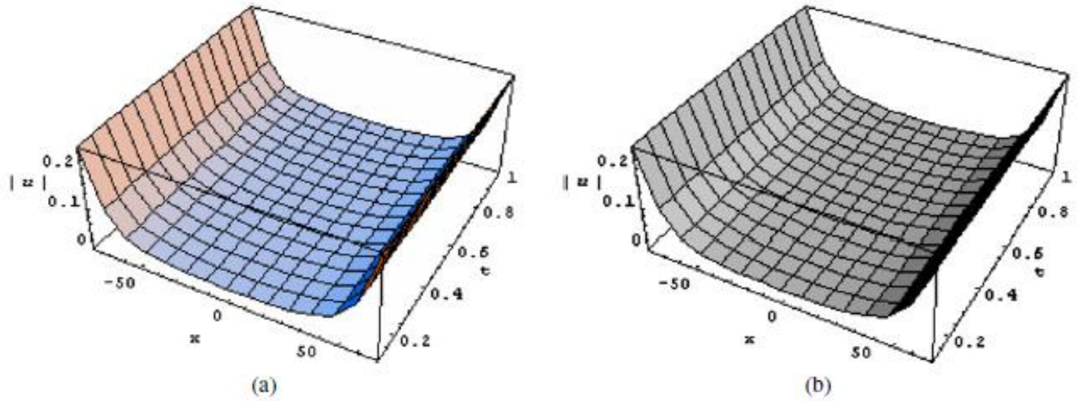
$$f_1(x)=f^{(2)}+|f|^{2}f,$$

$$f_2(x)=f_1^{2}+2|f|^{2}f_1+f^{2}\bar{f}_1,$$

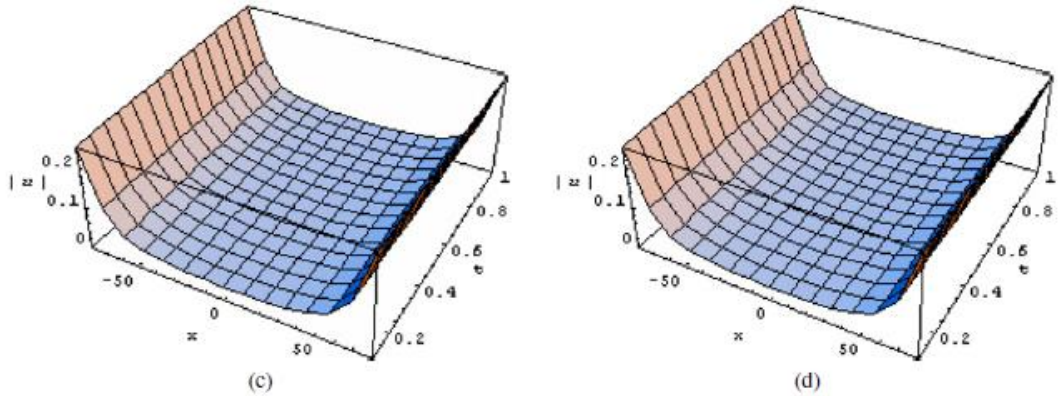
و بنابراین، با جایگذاری u_0، u_1، u_2،... در معادله (۴-۱۳) جواب $u(x,t)$ به صورت سری زیر به دست می آید

$$u(x,t) = f(x) + f_1(x)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + f_2(x)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdots. \qquad (16-4)$$

شکل های ۴-۲ و ۴-۳ را ببینید.



شکل۴-۲: نمودار نتایج عددی برای قدر مطلق $u(x,t)$ در $\alpha \to 1$ (a) مقایسه با حل تحلیلی (b) را نشان می دهد، $c = 0/05, w = 0/1$.



شکل۴-۳: نمودار حل تقریبی برای قدر مطلق $u(x,t)$ را نشان می دهد: (c) $\alpha = 0/95$، (d) $\alpha = 0/99$.

۴-۲-۳ دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری[1]

دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری با شرط اولیه به شکل زیر می باشد[44]

$$
\begin{aligned}
&D^{\alpha_1}y_1(t) = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n),\\
&D^{\alpha_2}y_2(t) = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n),\\
&\vdots\\
&D^{\alpha_n}y_n(t) = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n),\\
&y_k(0) = c_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n,
\end{aligned} \tag{17-4}
$$

که در آن D^{α_i} مشتق کسری y_i از مرتبه α_i $(0 < \alpha_i \leq 1)$ است و f_i توابع خطی و غیر خطی دلخواه می باشد. دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری خطی و غیر خطی به ترتیب با استفاده از روش آشفتگی هوموتوپی در [45] و [46, 47] حل شده است. در [48]، مومانی[2] و اودی بات[3] یک

[1] System of fractional differential equations
[2] Momani
[3] Odibat

مقایسه عددی بین روش تجزیه آدومین[1] و روش تکرار وردشی[2] برای سیستمهای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری خطی و غیر خطی ارائه داده اند. اخیراً، ارتورک[3] و مومانی [49] روش تبدیل تفاضلی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری به کار گرفته اند.

در اینجا، به توسعه روش آشفتگی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۴-۱۷) علاقه مندیم. برای نشان دادن کارائی الگوریتم روش آشفتگی هوموتوپی، چندین مثال عددی از دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری ارائه می دهیم.

با توجه به روش آشفتگی هوموتوپی [50, 51]، هوموتوپی زیر را می سازیم

$$D^{\alpha_i}y_i = pf_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad (18-4)$$

که در آن p پارامتر وارد شده که از صفر تا یک تغییر می کند. فرض کنیم دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۴-18) دارای جوابی به صورت زیر باشد

$$y_i(t) = y_{i0} + py_{i1} + p^2y_{i2} + p^3y_{i3} + \cdots. \quad i = 1, 2, \dots, n, \qquad (19-4)$$

با جا گذاری (۴-19) در (۴-18) و مساوی قرار دادن ضرایب جملات هم توان p خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&p^0 : D^{\alpha_i}y_{i0} = 0,\\
&p^1 : D^{\alpha_i}y_{i1} = f_{i1}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}),\\
&p^2 : D^{\alpha_i}y_{i2} = f_{i2}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}),\\
&p^3 : D^{\alpha_i}y_{i3} = f_{i3}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}, y_{12}, y_{22}, \dots, y_{n2}), \qquad (20-4)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

که توابع f_{i1}، f_{i2}،...، در معادله زیر صدق می کنند

$$\begin{aligned}
&f_i(t, y_{10} + py_{11} + p^2y_{12} + \cdots, \dots, y_{n0} + py_{n1} + p^2y_{n2} + \cdots)\\
&= f_{i1}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) + pf_{i2}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1})\\
&+p^2f_{i3}(t, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}, y_{12}, y_{22}, \dots, y_{n2})\\
&+ \cdots. \qquad (21-4)
\end{aligned}$$

[1] Adomian Decomposition Method
[2] Variational Iteration Method
[3] Ertürk

واضح است که این معادلات خطی به آسانی به وسیله عملگر $D^{-\alpha_i}$ یعنی معکوس عملگر D^{α_i} حل می شوند. از اینرو، مولفه های y_{ik} $(k = 1, 2, 3, \dots)$ از حل روش آشفتگی هوموتوپی تعیین می شود. تحلیل همگرایی سری جواب در [52] و رفتار مجانبی آن در [53, 54] نشان داده شده است. برای تحلیل عددی تقریب از سری حل روش آشفتگی هوموتوپی ، $y_i = \sum_{k=0}^{\infty} y_{ik}(t)$، به وسیله N جمله بریده شده از سری زیر را استفاده خواهیم کرد:

$$\phi_{iN} = \sum_{k=0}^{N-1} y_{ik}(t). \qquad (22-4)$$

۴-۲-۳-۱ مثال: دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری خطی زیر را تحت شرایط اولیه زیر در نظر بگیرید[44]

$$\begin{aligned} &D^{\alpha_1} u_1(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad 0 < \alpha_1 \le 1, \\ &D^{\alpha_2} u_2(t) = -u_1(t) + u_2(t), \quad 0 < \alpha_2 \le 1, \\ &u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 1. \end{aligned} \qquad (23-4)$$

که حل دقیق به ازای $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ به صورت زیر می باشد

$$u_1(t) = e^t \sin(t), \quad u_2(t) = e^t \cos(t). \qquad (24-4)$$

طبق (۴-۱۸) هوموتوپی زیر را می سازیم

$$\begin{aligned} &D^{\alpha_1} u_1 = p(u_1 + u_2), \\ &D^{\alpha_2} u_2 = p(-u_1 + u_2). \end{aligned} \qquad (25-4)$$

فرض کنیم دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۴-25) دارای جوابی به صورت زیر باشد

$$u_i(t) = u_{i0} + p u_{i1} + p^2 u_{i2} + p^3 u_{i3} + \cdots. \quad i = 1, 2 \qquad (26-4)$$

با جای گذاری (۴-۲۶) در معادلات (۴-۲۵) مجموعه توانهای یکسان از p در دو مجموعه از معادلات خطی به صورت زیر نتیجه می شود

$$p^0: \quad D^{\alpha_1} u_{10} = 0,$$

p^1: $D^{\alpha_1}u_{11} = u_{10} + u_{20}$,
p^2: $D^{\alpha_1}u_{12} = u_{11} + u_{21}$,
p^3: $D^{\alpha_1}u_{13} = u_{12} + u_{22}$,
$\vdots$
p^0: $D^{\alpha_2}u_{20} = 0$,
p^1: $D^{\alpha_2}u_{21} = -u_{10} + u_{20}$,
p^2: $D^{\alpha_2}u_{22} = -u_{11} + u_{21}$,
p^3: $D^{\alpha_2}u_{23} = -u_{12} + u_{22}$,
$\vdots$ (27 − 4)

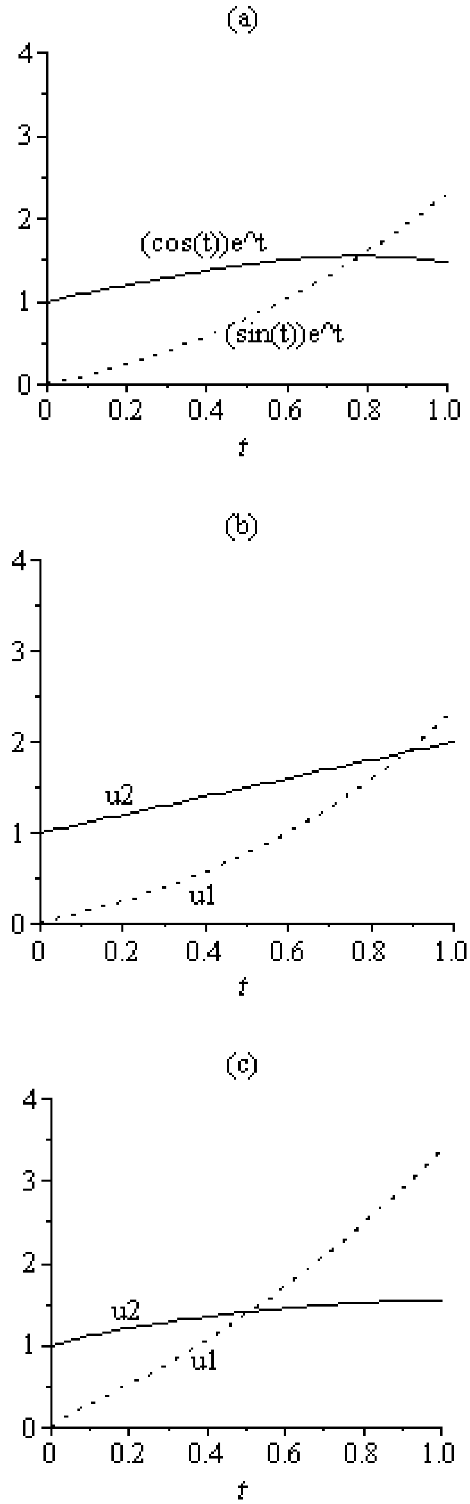
بنابراین با استفاده از عملگرهای $D^{-\alpha_1}$ و $D^{-\alpha_2}$ برای معادلات فوق، چند جمله اول از حل سری روش آشفتگی هوموتوپی برای دستگاه (۴-۲۳) به صورت زیر بدست می آیند:

$u_{10} = u_1(0) = 0$,
$u_{20} = u_2(0) = 1$,
$u_{11} = \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}$,
$u_{21} = \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}$,
$u_{12} = \frac{t^{2\alpha_1}}{\Gamma(2\alpha_1+1)} + \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}$,
$u_{22} = \frac{t^{2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_2+1)} - \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}$,
$u_{13} = \frac{t^{3\alpha_1}}{\Gamma(3\alpha_1+1)} + \frac{t^{\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2+1)}$,
$u_{23} = \frac{t^{3\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_2+1)} - 2\frac{t^{\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2+1)} - \frac{t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1+\alpha_2+1)}$,   (28 − 4)
$\vdots$

بنابراین جواب تقریبی به صورت زیر حاصل می شود

$$u_1(t) = \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \frac{t^{2\alpha_1}}{\Gamma(2\alpha_1+1)} + \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}\frac{t^{3\alpha_1}}{\Gamma(3\alpha_1+1)} + \frac{t^{\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2+1)} + \cdots. \qquad (29-4)$$

$$u_2(t) = 1 + \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{t^{2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_2+1)} - \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{t^{3\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_2+1)} - 2\frac{t^{\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2+1)} - \frac{t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1+\alpha_2+1)} + \cdots. \qquad (30-4)$$



شکل۴-۴: ۸ جمله اول از حل های تقریبی روش آشفتگی هوموتوپی برای دستگاه (۴-۲۳) وقتی (a) حل دقیق (b) به ازای $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ و (c) به ازای $\alpha_1 = 0/7 , \alpha_2 = 0/9$ می باشد.

۴-۲-۳-۲ مثال: دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی زیر را در نظر بگیرید[44]

$$D^{\alpha_1}u_1(t) = {u_1}^2 + u_2, \quad 0 < \alpha_1 \le 1,$$
$$D^{\alpha_2}u_2(t) = u_2 cos u_1, \quad 0 < \alpha_2 \le 1,$$
$$u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 1. \qquad (31-4)$$

با استفاده از بسط سری تیلور، جمله غیر خطی $cosu_1$ در (۴-۳۱) را می توان به صورت زیر نشان داد

$$\cos u_1 \approx 1 - \frac{{u_1}^2}{2}. \qquad (32-4)$$

ازاینرو، می توانیم دستگاه (۴-۳۱) را به وسیله دستگاه زیر تقریب بزنیم

$$D^{\alpha_1}u_1(t) = {u_1}^2 + u_2,$$
$$D^{\alpha_2}u_2(t) = u_2 - \frac{u_2{u_1}^2}{2}. \qquad (33-4)$$

طبق (۴-۱۸) هوموتوپی زیر را می سازیم

$$D^{\alpha_1}u_1(t) = p({u_1}^2 + u_2),$$
$$D^{\alpha_2}u_2(t) = p\left(u_2 - \frac{u_2{u_1}^2}{2}\right). \qquad (34-4)$$

فرض کنیم دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۴-۳۴) دارای جوابی به صورت (۴-۲۶) باشد. با جای گذاری (۴-۲۶) در (۴-۳۴) و مساوی قرار دادن جملات با توانهای یکسان از p، معادلات خطی (۴-۲0) برای دستگاه (۴-۳۴) به دو مجموعه از معادلات خطی به صورت زیر تبدیل می شوند

$$p^0: \quad D^{\alpha_1}u_{10} = 0,$$
$$p^1: \quad D^{\alpha_1}u_{11} = {u_{10}}^2 + u_{20},$$
$$p^2: \quad D^{\alpha_1}u_{12} = 2u_{10}u_{11} + u_{21},$$
$$p^3: \quad D^{\alpha_1}u_{13} = 2u_{10}u_{12} + {u_{11}}^2 + u_{22},$$

$$\vdots$$

$$p^0: \quad D^{\alpha_2} u_{20} = 0,$$

$$p^1: \quad D^{\alpha_2} u_{21} = -\frac{u_{20} {u_{10}}^2}{2} + u_{20},$$

$$p^2: \quad D^{\alpha_2} u_{22} = u_{21} - u_{20} u_{10} u_{11} - \frac{u_{21} {u_{10}}^2}{2},$$

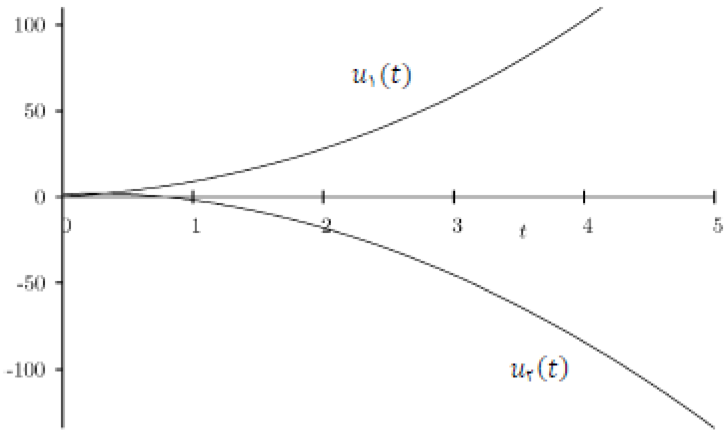
$$p^3: \quad D^{\alpha_2} u_{23} = u_{22} - u_{20} u_{10} u_{12} - \frac{u_{20} {u_{11}}^2}{2} - u_{21} u_{10} u_{11} - \frac{u_{22} {u_{10}}^2}{2},$$

$$\vdots \qquad (35-4)$$

با استفاده از عملگر انتگرال گیری کسری $D^{-\alpha}$، روش آشفتگی هوموتوپی می تواند بدست آیند به وسیله

$$u_1(t) = \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} + \frac{t^{\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+2\alpha_2+1)} + \frac{\Gamma(2\alpha_1+1) t^{3\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)^2 \Gamma(3\alpha_1+1)} + \cdots. \qquad (36-4)$$

$$u_2(t) = 1 + \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} + \frac{t^{2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_2+1)} + \frac{t^{3\alpha_2}}{\Gamma(3\alpha_2+1)} - \frac{\Gamma(2\alpha_1+1) t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+1)^2 \Gamma(2\alpha_1+\alpha_2+1)} + \cdots. \qquad (37-4)$$



شکل۴-۵: جواب معادلات ۴-۳۶ و ۴-۳۷ به ازای $\alpha_1 = 0/5\ ,\alpha_2 = 0/3$ می باشد.

۴-۲-۴ معادله زاخواروف-کازنتسوف[1]

معادله دیفرانسیل کسری غیر خطی زاخواروف به صورت زیر می باشد[55]

$$D_t^\alpha u + a(u^p)_x + b(u^q)_{xxx} + c(u^r)_{yyx} = 0, \qquad (38-4)$$

که $u = u(x,y,t)$ ، α پارامتر وارد شده مرتبه مشتق کسری است $(0 < \alpha \leq 1)$ ،a، b و c ثابت های دلخواه هستند و p، q و r اعداد صحیح غیر صفر هستند.

این معادله را به طور خلاصه به صورت $FKZ(p;q;r)$ نمایش می دهیم.

۴-۲-۴-۱ مثال : معادله دیفرانسیل زاخوروف کسری $\big(FZK(2,2,2)\big)$ زیر را با شرط اولیه زیر در نظر بگیرید

$$D_t^\alpha u + (u^2)_x + \frac{1}{8}(u^2)_{xxx} + \frac{1}{8}(u^2)_{yyx} = 0,\ \ 0 < \alpha \leq 1, \qquad (39-4)$$

[1] Zakharov-Kuznetsov Equation

$$u(x,y,0)=\frac{4}{3}\rho\sin h^2\,(x+y),$$

که در آن ρ ثابت دلخواه می باشد. حل دقیق معادله (۴-۳۹) به ازای $\rho=1$ به صورت می باشد [56]

$$u(x,y,t)=\frac{4}{3}\rho\, sin\, h^2\,(x+y-\rho t),$$

عملگر خطی مرتبه صحیح زیر را انتخاب می کنیم

$$L=D_t^{\alpha}u.$$

هوموتوپی زیر را در نظر می گیریم

$$(1-p)(D_t^{\alpha}u-D_t^{\alpha}u_0)+p\left(D_t^{\alpha}u+\frac{\partial}{\partial x}u^2+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial x^3}u^2+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}u^2\right)=0,\qquad (40-4)$$

یا به طور معادل

$$D_t^{\alpha}u-D_t^{\alpha}u_0+pD_t^{\alpha}u_0+p\left(\frac{\partial}{\partial x}u^2+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial x^3}u^2+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}u^2\right)=0.\qquad (41-4)$$

فرض کنید جواب معادله (۴-۴۱) به صورت زیر باشد

$$u=u_0+\ pu_1+p^2u_2\ +p^3u_3+\cdots.\qquad (42-4)$$

با جای گذاری (۴-۴۲) در (۴-۴۱) و مساوی قرار دادن ضرایب جملات هم توان p خواهیم داشت

$$p^0:\ \ D_t^{\alpha}u_0-D_t^{\alpha}u_0=0,$$

$$p^1:\ \ D_t^{\alpha}u_1+D_t^{\alpha}u_0+\frac{\partial}{\partial x}u_0^2+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_0^2+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}u_0^2=0,$$

$$p^2:\ \ D_t^{\alpha}u_2+\frac{\partial}{\partial x}(2u_0u_1)+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial x^3}(2u_0u_1)+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}(2u_0u_1)=0,$$

$$\vdots\qquad (43-4)$$

$$p^{\,j}:\ \ D_t^{\alpha}u_j+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{j-1}u_ku_{j-k-1}\right)+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\sum_{k=0}^{j-1}u_ku_{j-k-1}\right)+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\left(\sum_{k=0}^{j-1}u_ku_{j-k-1}\right)=0,$$

برای سادگی حل معادلات بالا قرار می دهیم $u_0(x,y,t)=\frac{4}{3}\rho\sinh^2(x+y)$، در این صورت روابط زیر بدست می آید

$$u_0(x,y,t)=\frac{4}{3}\rho sinh^2(w)$$
$$u_1(x,y,t)=-\frac{(4\rho)^2}{9}sinh(w)cosh(w)[14sinh^2(w)+6cosh^2(w)]\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$
$$u_2(x,y,t)=\frac{128}{27}[\rho^3(1200cosh^6(w)-2080cosh^4(w)+968cosh^2(w)-79)]\frac{\int_0^t s^\alpha(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} \qquad (44-4)$$

که در روابط فوق $w=x+y$ می باشد.

جواب تقریبی (۴-۳۹) با جای گذاری $p=1$ در رابطه (۴-۴۲) به صورت زیر بدست می آید.

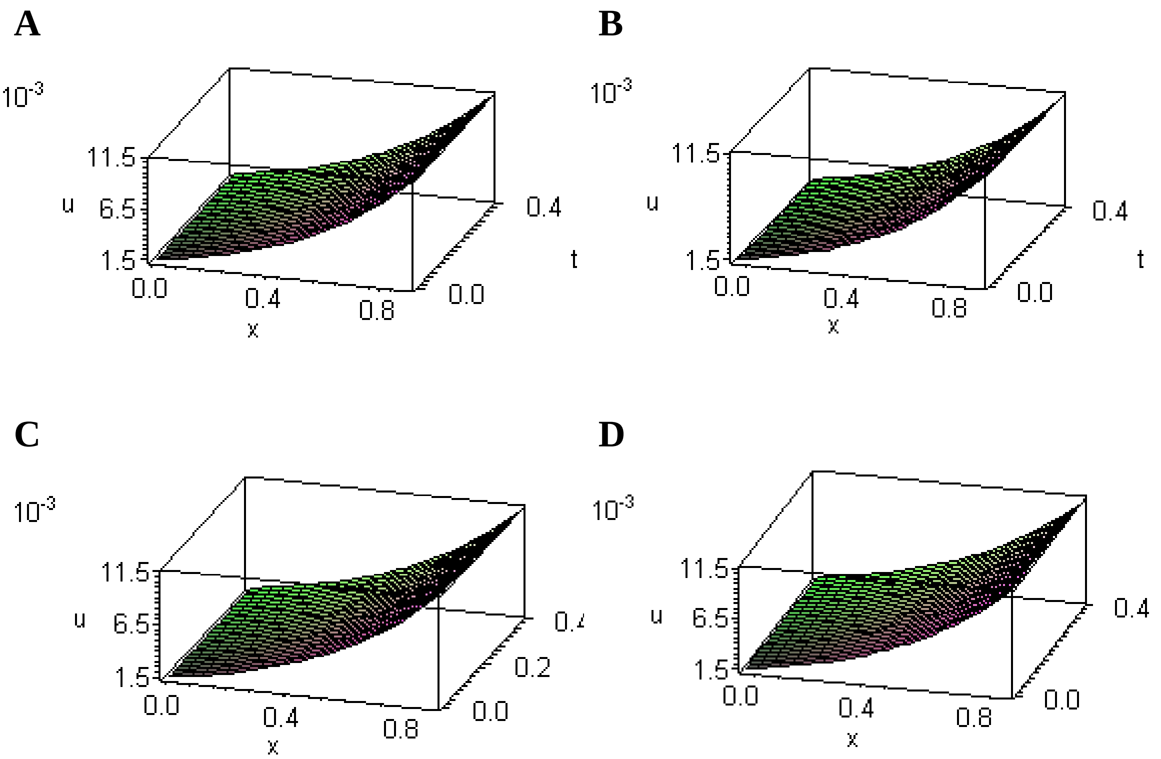
$$u(x,y,t)=u_0(x,y,t)+u_1(x,y,t)+u_2(x,y,t)+\cdots. \qquad (45-4)$$

مولفه های باقیمانده $u_k(x,y,t)$ می توانند با استفاده از رابطه (۴-۴۳) تعیین شوند. جدول ۴-۱ و شکل ۴-۶ جوابهای تقریبی از معادله (۴-۳۹) به وسیله سه تکرار روش آشفتگی هوموتوپی برای مقادیر مختلف از α نشان می دهد.

HPM						
$\boldsymbol{x}$	y	t	$\alpha=0/67$	$\alpha=0/75$	$\alpha=1$	$(\alpha=1)$دقیق
0/1	0/1	0/2	5/312470836E-5	5/324803165E-5	5/355357783E-5	5/393877159E-5
		0/3	5/284171545E-5	5/296795218E-5	5/330824165E-5	5/388407669E-5
		0/4	5/259096071E-5	5/271273263E-5	5/306423838E-5	5/382941057E-5
0/6	0/6	0/2	2/954168860E-3	2/963771657E-3	2/990033905E-3	3/036507411E-3
		0/3	2/932339341E-3	2/940940919E-3	2/967705722E-3	3/035778955E-3
		0/4	2/914574216E-3	2/921608223E-3	2/946469045E-3	3/035050641E-

						3
0/9	0/9	0/2	1/085646376E-2	1/088017307E-2	1/104449039E-2	1/153697757E-2
		0/3	1/081087201E-2	1/078265651E-2	1/085951192E-2	1/153454074E-2
		0/4	1/083789679E-2	1/075668709E-2	1/071700190E-2	1/153210438E-2

جدول۴-۱: جوابهایی از سه تکرار روش آشفتگی هوموتوپی برای مقادیر مختلف ازα وقتی که $\rho = 0/001$ و $y = 0/9$ می باشند.



شکل۴-۶: جوابهایی از سه تکرار روش آشفتگی هوموتوپی برای مقادیر مختلف از α وقتی که $\rho = 0/001$ و $y = 0/9$ (A) دقیق، (B) $\alpha = 1$، (C) $\alpha = 0/75$ و (D) $\alpha = 0/67$.

۲-۴-۲-۴ مثال : معادله دیفرانسیل زاخوروف کسری $\left(FZK(3,3,3)\right)$ زیر را در نظر بگیرید

$$D_t^{\alpha} u + (u^3)_x + 2(u^3)_{xxx} + 2(u^3)_{yyx} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \qquad (46-4)$$

$$u(x,y,0)=\frac{3}{2}\rho\sin h\ \left[\frac{1}{6}(x+y)\right],$$

که در آن ρ ثابت دلخواه می باشد. حل دقیق معادله (۴-46) به ازای $\rho=1$ به صورت می باشد [57]

$$u(x,y,t)=\frac{3}{2}\rho\sin h\ \left[\frac{1}{6}(x+y-\rho t)\right],$$

عملگر خطی مرتبه صحیح زیر را انتخاب می کنیم

$$L=D_t^\alpha u.$$

هوموتوپی زیر را در نظر می گیریم

$$(1-p)(D_t^\alpha u-D_t^\alpha u_0)+p\left(D_t^\alpha u+\frac{\partial}{\partial x}u^3+2\frac{\partial^3}{\partial x^3}u^3+2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}u^3\right)=0,\qquad(47-4)$$

یا به طور معادل

$$D_t^\alpha u-D_t^\alpha u_0+pD_t^\alpha u_0+p\left(\frac{\partial}{\partial x}u^3+2\frac{\partial^3}{\partial x^3}u^3+2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}u^3\right)=0,\qquad(48-4)$$

فرض کنید جواب معادله (۴-۴۱) به صورت زیر باشد

$$u=u_0+pu_1+p^2u_2+p^3u_3+\cdots.\qquad(49-4)$$

با جای گذاری (۴-۴۹) در (۴-۴۸) و مساوی قرار دادن ضرایب جملات هم توان p خواهیم داشت

$$p^0:\ \ D_t^\alpha u_0-D_t^\alpha u_0=0,$$

$$p^1:\ \ D_t^\alpha u_1+D_t^\alpha u_0+\frac{\partial}{\partial x}u_0^3+2\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_0^3+2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}u_0^3=0,$$

$$p^2:\ \ D_t^\alpha u_2+\frac{\partial}{\partial x}(3{u_0}^2u_1)+2\frac{\partial^3}{\partial x^3}(3{u_0}^2u_1)+2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}(3{u_0}^2u_1)=0,\qquad(50-4)$$

$$\vdots$$

برای سادگی حل معادلات بالا قرار می دهیم $u_0(x,y,t)=\frac{3}{2}\rho\sin h\ \left[\frac{1}{6}(x+y)\right]$، در این صورت روابط زیر بدست می آیند

$$u_0(x,y,t)=\frac{3}{2}\rho\sin h\ [w],$$

$$u_1(x,y,t) = \left[-3\rho^3 \sin h^2\,(w) - \frac{3}{8}\rho^3 \cos h^3\,(w)\right]\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

$$u_2(x,y,t) = \frac{3}{32}[\rho^5(765cosh^4(w) - 728cosh^2(w) + 91)\sin h\ (w)]\frac{\int_0^t s^{\alpha}(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}, \quad (51-4)$$

که در روابط فوق $w = \frac{1}{6}(x+y)$ می باشد.

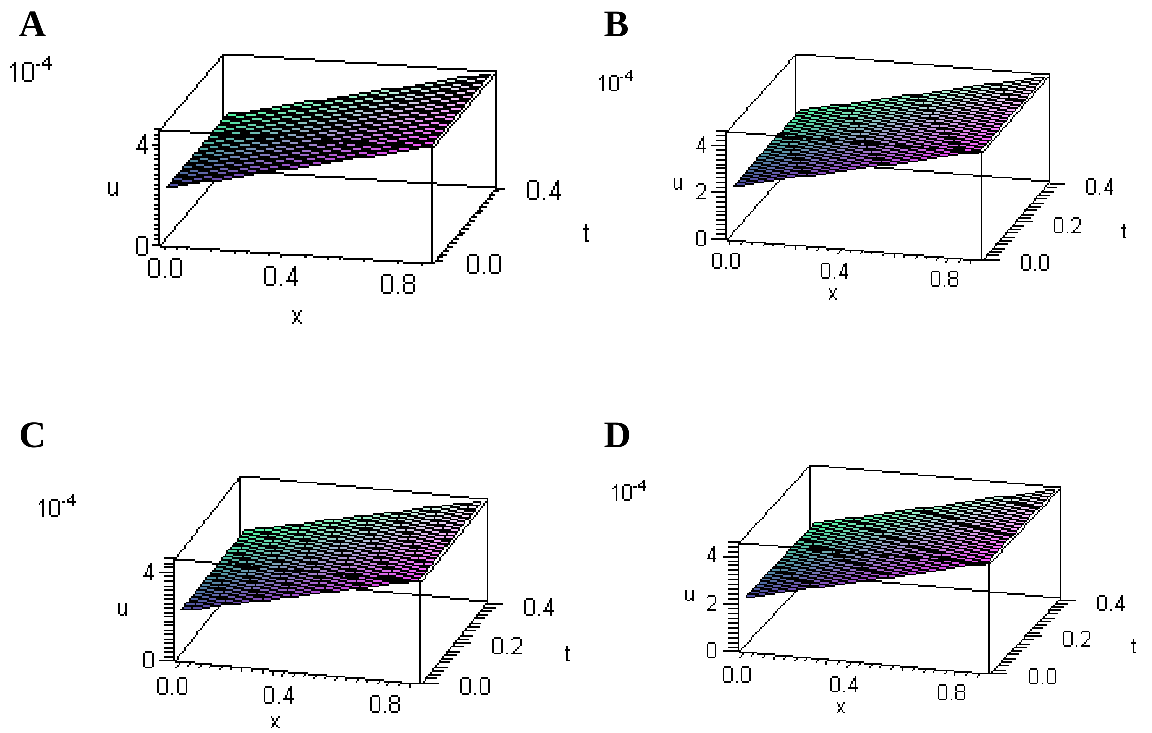
جواب تقریبی (۴-46) با جای گذاری $p = 1$ در رابطه (۴-49) به صورت زیر بدست می آید.

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + u_1(x,y,t) + u_2(x,y,t) + \cdots.$$

مولفه های باقیمانده $u_k(x,y,t)$ می توانند با استفاده از روابط باز گشتی فوق تعیین شوند. جدول ۴-۲ و شکل ۴-۷ جوابهای تقریبی از معادله (۴-۴۶) به وسیله سه تکرار روش آشفتگی هوموتوپی برای مقادیر مختلف از α نشان می دهد.

HPM						
$\boldsymbol{x}$	y	t	$\alpha = 0/67$	$\alpha = 0/75$	$\alpha = 1$	دقیق$(\alpha = 1)$
0/1	0/1	0/2	5/000911707E-5	5/000913646E-5	5/000918398E-5	4/995923204E-5
		0/3	5/000907252E-5	5/000909264E-5	5/000914609E-5	4/993421817E-5
		0/4	5/000903272E-5	5.000905239E-5	5.000910820E-5	4/990920434E-5
0/6	0/6	0/2	3/020038072E-4	3/020038339E-4	3/020038993E-4	3/019530008E-4
		0/3	3/020037458E-4	3/020037735E-4	3/020038472E-4	3/019274992E-4
		0/4	3/020036910E-4	3/020037180E-4	3/020037950E-4	3/019019978E-4
0/9	0/9	0/2	4/567801693E-4	4/567802061E-4	4/567802963E-4	4/567281735E-4
		0/3	4/567800847E-4	4/567801229E-4	4,567802243E-4	4/567020404e-4
		0/4	4/567800092E-4	4/567800465E-4	4/567801524E-4	4/566759074e-4

جدول۴-۲: جوابهایی از سه تکرار روش آشفتگی هوموتوپی برای مقادیر مختلف ازα وقتی که $\rho = 0/001$ و $y =$ $0/9$ می باشند.



شکل۴-۷: جوابهایی از سه تکرار روش آشفتگی هوموتوپی برای مقادیر مختلف از α وقتی که $\rho = 0/001$ و $y = 0/9$ (A) دقیق، (B) $\alpha = 1$، (C) $\alpha = 0/75$ و (D) $\alpha = 0/67$.

نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه حل معادلات دیفرانسیل فرکتالی (کسری) به روش آشفتگی هوموتوپی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفتند و همچنین انواع تعاریف مشتق و انتگرال کسری بیان شده است. و ساختار روش آشفتگی هوموتوپی را برای حل معادلات یک مساله مقدار مرزی خاص و مسایل دیگری از این معادلات به کار برده شده است. روش آشفتگی هوموتوپی حل های عددی بسیار دقیقی برای مسایل غیر خطی در مقایسه با روشهای دیگر فراهم می کند. مقایسه ها با روش تجزیه آدومین آشکار می کند که حل های تقریبی بدست آمده به وسیله روش آشفتگی هوموتوپی به حل های دقیق شان سریعتر از روش آدومین همگراست. ممکن است که نتیجه بدهد که این تکنیک خیلی قوی و موثر در یافتن حل های تحلیلی برای دسته بزرگی از معادلات دیفرانسیل هستند و همچنین نتایج نشان داده شده که روش آشفتگی هوموتوپی قوی تر از روش تکرار وردشی است. در ادامه کارهایی که می شود در این پایان نامه انجام داد، می توان معادلاتی که با روش های دیگر حل شده با استفاده از روش آشفتگی هوموتوپی حل نمود را پیشنهاد کرد.

برای محاسبات و رسم از نرم افزار میپل استفاده شده است.

منابع

[1] I. Podlubny, (1999), "**Fractional Differentions Equations**", Academic press, san Diego.

[2] Mittag-Leffler, (1903), "G. M. Sur la nouvelle function $E_\alpha(x)$", **C. R. Acad. Sci. Paris,** 137, 554-558.

[3] Mittag-Leffler, (1904), "G. M. Sopra la funzione $E_\alpha(x)$", **Rend. Acc. Lincei, ser**, 5, (13), 3-4.

[4] Mittag-Leffler, (1905), "G. M. Sur la representation analytiqe dune branche uniforme dune function monogene", **Acta Mathematic**, 29, 101-182.

[5] Agrawal, (1953), " R. P. A propos dune note de M. Pierre Humbert", **C. R. Seances Acad. Sci**, 236, (21), 2031-2032.

[6] Yu. Luchko, R. Gorenflo, (1999), "An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives", **Acta Math Vietnamica**, 24, (2), 207-233.

[7] F. Mainardi, (1996), "Fundamental solutions for the fractionaldiffusion-wave equation", **Appl. Math. Lett**., 9, 23-28.

[8] Caputo, (1969), "**M. Elasticitae Dissipazione**", Zanichelli, Bologna.

[9] A. Kilbas, M. Srivastava, J. Trujillo, (2006), "**Theory and applications of Fractional differential equations**", ELSEVIER, Boston.

[10] H. He, (2004), "The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities", **Applied Mathematics and Computation**, 151, 287-292.

[11] J. H. He, (2005), "Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations," **Chaos, Solitons and Fractals,** 26, 695–700.

[12] J. H. He, (2006), "Homotopy perturbation method for solving boundary value problems", **Physics Letters A**, 350, 87-88.

[13] J. H. He, (2005), "Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems" **Chaos, Solitons and Fractals**, 26, (3), 827-833.

[14] J. H. He, (1999), "Homotopy perturbation technique", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 178, 257–262.

[15] J. H. He, (2000), "A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems", **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 35, (1), 37–43.

[16] J. H. He, (2004), "Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method", **Applied Mathematics and Computation**, 156, 527-539.

[17] J. H. He, (2003), "Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique", **Applied Mathematics and Computation**, 135, 73-79.
[18] J. Biazar, H. Ghazvini, (2007), "Exact solutions for nonlinear Schrödinger equations by He's homotopy perturbation method", **Physics Letters A,** 366, 79-84.
[19] J. Biazar, H. Ghazvini, "Exact solutions for non-linear Burgers' equation by homotopy perturbation method, Numerical Methods for Partial Differential Equations" [In Press].
[20] S. Abbasbandy, (2006), "Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method", **Applied Mathematics and Computation**, 173, 493-500.
[21] D. D. Ganji, (2006), "The application of He's homotopy perturbation method to nonlinear equations arising in heat transfer", **Physics Letters A**, 355, 337–341.
[22] A. Golbabai, M. Javidi, (2007), "Application of homotopy perturbation method for solving eighth-order boundary value problems", **Applied Mathematics and Computation**, 191, (2), 334-346.
[23] A. Golbabai, B. Keramati, (2008), "Modified homotopy perturbation method for solving Fredholm integral equations", **Chaos, Solitons and Fractals**, 37, (5), 1528-1537.
[24] J. H. He, (2006), "Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations", **Int. J. Modern Phys. B**., 20, 1141-1199.
[25] Z. Odibat, S. Momani, (2008), "Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation of fractional order", **Chaos, Solitons and Fractals**, 36, 167-174.
[26] A. M. Siddiqui, R. Mahmood, Q. K. Ghori, (2008), "Homotopy perturbation method for thin film flow of a third grade fluid down an inclined plane", **Chaos, Solitons and Fractals**, 35, 140-147.
[27] L. Cveticanin, (2006), "Homotopy perturbation method for pure nonlinear differential equation", **Chaos, Solitons and Fractals**, 30, 1221–1230.
[28] A. Soufyane, M. Boulmalf, (2005), "Solution of linear and nonlinear parabolic equations by the decomposition method", **Applied Mathematics and Computation**, 162, 687-693.
[29] J. Biazar, H. Ghazvini, (2007), "Homotopy Perturbation Method for Solving Heat Equation", **Journal of Nature Science and Sustainable Technology**, 1, (3), 461-469.

[30] J. Biazar, H. Ghazvini, (2009), "Study of convergence of homotopy perturbation method for solving systems of differential equations", **Computers and Mathematics with Applications**, 58, 2221-2230.

[31] J. Biazar, M. Eslami, H. Ghazvini, (2007), "Homotopy perturbation method for systems of partial differential equations", **International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 8, (3), 411-416.

[32] J. Biazar, H. Ghazvini, (2009), "He’s homotopy perturbation method for solving systems of Volterra integral equations of the second kind", **Chaos, Solitons and Fractals**, 39, 770-777.

[33] J. Biazar, H. Ghazvini, (2008), "Numerical solution for special non-linear Fredholm integral equation by HPM", **Applied Mathematics and Computation**, 195, 681-687.

[34] J. Biazar, H. Ghazvini, (2008), "Homotopy perturbation method for solving hyperbolic partial differential equations", **Computers and Mathematics with Applications**, 56, 453-458.

[35] J. Biazar, H. Ghazvini, (2007), "Solution of the Wave Equation by Homotopy Perturbation Method", **International Mathematical Forum**, 2, (45), 2237-2244.

[36] J. Biazar, H. Ghazvini, M. Eslasmi, (2009), "He’s homotopy perturbation method for systems of integro-differential equations", **Chaos, Solitons and Fractals**, 39, 1253-1258.

[37] J. Biazar, H. Ghazvini, "Homotopy Perturbation Method for Systems of Ordinary Differential Equations, Journal of Nature Science and Sustainable Technology" [In Press].

[38] M. Ghasemi, M. Tavassoli Kajani, E. Babolian, (2007), "Application of He’s homotopy perturbation method to nonlinear integro-differential equations", **Applied Mathematics and Computation**, 188, (1), 538-548.

[39] M. Ghasemi, M. Tavassoli Kajani, E. Babolian, (2007), "Comparison between the homotopy perturbation method and the sine–cosine wavelet method for solving linear integro-differential equations", 54, (7-8), 1162-1168.

[40] Martin D. Crossley, (2005), "Essential Topology", **Springer**.

[41] J. H. He, (1999), "Variational iteration method–a kind of nonlinear analytical technique: some examples**", Int. J. Nonlinear. Mech**, 34, 708–709.

[42] M. Safari, D.D. Ganji , M. Moslemi, (2009), "Application of He's variational iteration method and Adomian's decomposition method to the fractional KdV-Burgers-Kuramoto equation", 1-7.

[43] S.Z. Rida, H.M.El-Sherbiny, A.A.M. Arafa, (2008), "On the solution of fractional nonlinear Schrodinger equation", **Physics Letters A**, 372, 553-558.

[44] O. Abdulaziz , I. Hashim, S. Momani, (2008), "Solving systems of ractional differential equations by homotopy-perturbation method", **Physics Letters A**, 372, 451–459.

[45] V. Daftardar-Gejji, H. Jafari, (2005), **J. Math. Anal. Appl**, 301, 508.

[46] S. Momani, K. Al-Khaled, (2005), **Appl. Math. Comput**, 162, 1351.

[47] H. Javari, V. Daftardar-Gejji, (2006), **J. Comput. Appl. Math**, 196, 644.

[48] S. Momani, Z. Odibat, (2007), **J. Comput. Appl. Math**, 207, (1), 96.

[49] V.S. Ertürk, S. Mopani, (2007), **J. Comput. Appl. Math**, 3, 29.

[50] J.H. He, (1999), **Comput. Methods Appl. Mech. Eng**, 178, 257.

[51] J.H. He, (2000), **Int. J. Nonlinear Mech**, 35, 37.

[52] J.H. He, (2006), "**Non-Perturbative Methods for Strongly Nonlinear Problems**", Dissertation, de-Verlag im Internet GmbH, Berlin.

[53] J.H. He, (2006), **Int. J. Mod. Phys**. B 20, 1.

[54] J.H. He, Int. (2006), **J. Mod. Phys**. B 20, 1141.

[55] H. Salarinejad, H. Aminikhah, S. Rahimi, "Analytical approximation to the solution of fractional Zakharov-Kuznetsov equations by HPM" [In Press].

[56] M. Inc, (2007), "Exact solutions with solitary patterns for the Zakharov-Kuznetsov equations with fully nonlinear dispersion", **Chaos Solitons Fractals**, 33, (5), 1783-1790.

Abstract

At first we introduce the basic necessary concepts in chapter one of this thesis. next in chapter two we express the fractional differentiation and integration, also after the introduction of Riemann-Liouville and Grünwald-Letnikov fractional differentiation, we explain the properties and relations of this differentiations. On chapter three we say the structure of Homotopy Perturbation Method . then we investigate the convergence of this method by some theorems and demonstrate of applications of this method for solving the functional equations . on chapter four we introduce the some special forms of fractional differential equations and then solving them by Homotopy Perturbation Method.

Shahrood University of Technology
Faculty of Mathematics

Solution of Fractional Differential Equations Via Homotopy Perturbation Method

Student:

Hadi Salarinezhad

Supervisors:

Dr. Sadegh Rahimi
Dr. Hossein Aminikhah

A Thesis Submitted for Master of Science Degree in Applied Mathematics

October 2010