بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی توابع تک ارز به‌دست آمده از عملگرسالاگان تعمیم یافته

نگارنده: فاطمه ملایی مقسمی

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

بهمن ۱۳۹۵

تقدیم به مادر عزیز وروح پاک پدرم ...

سپاس‌گزاری...

سپاس خدای را به وسعت همه ی آن سپاسی که ملاءکه مقرب وخلایق مکرم وستایندگان پسندیده او را شکر گفته اند.برترین شکرچون برتری پروردگارمان برهر وجودی .

سپاس بی پایان از استاد راهنمای ارجمندم جناب اقای دکتراحمد زیره که همواره خوشه چین دانش وخرد ایشان بوده ام و تداوم همکاری با ایشان نهایت آرزو و مایه‌ی افتخارم می باشد.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدسش را و تشکر می‌کنم که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

فاطمه ملابی مقسمی
بهمن ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه ملابی مقسمی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی توابع تک ارز به‌دست آمده از عملگرسالاگان تعمیم یافته** ، تحت راهنمایی **احمد زیره** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه ملابی مقسمی
بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

عملگر سالاگان به صورت زیرتعریف می‌شود:

$$D^{0}f(z) = f(z)$$

$$D_{\lambda}^{1}f(z) = D_{\lambda}f(z) = (1-\lambda)f(z) + \lambda z f'(z)$$

$$D_{\lambda}^{m}f(z) = D_{\lambda}(D_{\lambda}^{m-1}f(z)) \qquad \lambda > 0$$

که عملگرسالاگان را روی رده‌های $S_n(\beta)$ ، $R^m(\lambda, \alpha)$ ، $\mathcal{N}_{m,n}(\alpha, \beta)$ ، $\mathcal{M}_{m,n}^{s}(\alpha, \beta)$ و $\mathcal{N}(m, n, \alpha, \beta)$ بررسی می‌کنیم تا کران و نقاط بحرانی وکران مشتق وکران ضرایب را به‌دست اوریم.

کلمات کلیدی: توابع تحلیلی، توابع تک ارز، توابع ستاره‌گون، زیرترتیب.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ نمادها وتعاریف

تعریف ۱.۱.۱. تابع $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ را در $z_۰$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_۰$ مشتق پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۱. هر مجموعه باز و همبند در $\mathbb{C}$، یک میدان نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. **(قرارداد)** $\mathcal{A}$ را رده‌ای از توابع به شکل $f(z)=z+a_۲z^۲+\ldots$ گوییم که در دیسک یکه‌ی باز $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C};|z|<۱\}$ تحلیلی می‌باشند.

تعریف ۴.۱.۱. **(لم شوارتز[1])** فرض کنیم $f(z)$ تابعی تحلیلی در دیسک $U_R=\{z\in\mathbb{C}:|z|<R\}$ باشد و برای ثابت M، رابطه $|f(z)|<M$ برقرار باشد. اگر $z=۰$ صفر مرتبه m تابع f باشد، در این‌صورت:

$$|f(z)|\leq\frac{M}{R^m}|z|^m\quad(z\in U_R).$$

همچنین در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

به‌طوری‌که در آن θ مقداری ثابت است.

[1] Schwarz

تعریف ۵.۱.۱. تابع حقیقی مقدار و پیوسته $U(x,y)$ که در میدان D تعریف شده، در D همساز گویند هرگاه دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده و این مشتقات در تمام D در معادله زیرصادق باشند.

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲}=۰$$

این معادله به معادله لاپلاس مشهور است. با به‌کار بردن این قضیه که هر تابع تحلیلی در یک میدان، در همه نقاط آن میدان دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد، می‌بینیم که هر دو قسمت حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی توابع همسازند. اگر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحلیلی باشد، آنگاه v مزدوج همسازی از u نام دارد.

ملاحظه ۶.۱.۱. این خاصیت پادتقارنی زیر را داریم که v مزدوج همساز u است اگرو تنها اگر u مزدوج همساز $-v$ باشد. اثبات این مطلب از توجه به این امر نتیجه می‌شود که هر جا f تحلیلی باشد، $if=i(u+iv)=-v+iu$ نیز تحلیلی است.
معادله لاپلاس شرط لازمی را بیان می‌کند که تابعی همساز با قسمت حقیقی (یا موهومی) یک تابع تحلیلی باشد.

قضیه ۷.۱.۱. (نگاشت ریمان [۲]) [۱۹] فرض کنیم D میدان همبند ساده‌ای به غیر از تمام صفحه و $z_۰$ نقطه‌ای در این میدان باشد. در این‌صورت تابع منحصر به فرد، تحلیلی، یک به یک و پوشا $f(z)$ موجود است که D را بر قرص $|z|<۱$ می‌نگارد و $f(z_۰)=۰$ و $f'(z_۰)>۰$ است.

۲.۱ رده $\mathbb{S}$

توابعی که هم تحلیلی و هم تک ارز (یک به یک) هستند، واجد شرایط جالبی هستند که میدان‌های همبند ساده را بر میدان‌های همبند ساده می‌نگارند. به موجب قضیه نگاشت ریمان، هر تابع تک ارز، که در میدان همبند ساده (به غیر از تمامی صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در قرص واحد تعریف شده است متناظر کرد.

تعریف ۱.۲.۱. رده همه توابع $f(z)$ را که در قرص واحد $|z|<۱$ تحلیلی و تک ارز بوده و با شرایط $f(۰)=۰$ و $f'(۰)=۱$ نرمالیزه گردیده‌اند با $\mathbb{S}$ نمایش می‌دهیم. پس تابع $f(z)$ در $\mathbb{S}$ دارای نمایش توانی زیر است:

$$f(z)=z+a_۲z^۲+a_۳z^۳+\dots \qquad (|z|<۱).$$

لم ۲.۲.۱. اگر $f(z)\in\mathbb{S}$، آنگاه $g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}\in\mathbb{S}$.

[۲] Riemann

ملاحظه ۳.۲.۱. به جای $\sqrt{f(z^2)}$، می‌نویسیم $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$. زیرا $f(z^2)$ صفری در مبدا دارد که $\sqrt{f(z^2)} = e^{(\frac{1}{2})\log f(z^2)}$ را بی‌معنی می‌کند.

برهان. فرض کنید $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ لذا داریم:

$$g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = z\sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots} \tag{1.1}$$

(شاخه‌ی اصلی $\sqrt{\cdot}$ را در نظر می‌گیریم)، تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(0) = 0$ و $g'(0) = 1$ است. برای اثبات تک ارزی، اگر $g(z_1) = g(z_2)$ یعنی $z_1\sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}} = z_2\sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}$ در این‌صورت $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ و چون f یک به یک می‌باشد، داریم $z_1^2 = z_2^2$، یعنی $z_1 = z_2$ یا $z_1 = -z_2$. از (۱.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_1 = -z_2$ تساوی $g(z_1) = -g(z_2)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است. پس $z_1 = z_2$ و تک ارزی $g(z)$ اثبات می‌شود. □

قضیه ۴.۲.۱. [20] اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه $|a_2| \leq 2$.

مثال ۵.۲.۱. **(تابع کوئب)** در قضیه۶.۲.۱، اگر $a_2 = 2e^{i\alpha}$ و α حقیقی باشد آنگاه $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = \frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2} = g(z)$. لذا

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2} = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + \cdots$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ به تابع زیر می‌رسیم :

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z| < 1$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $\frac{-1}{4}$ تا ∞ بریده شده است، می‌نگارد.

قضیه ۶.۲.۱. اگر $z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$ باشدآنگاه $g(z) = \mid a_2 \mid \leq 2$.

قضیه ۷.۲.۱. **(پوشش).** اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و برای $|z| < 1$، $f(z) \neq c$ که $c \in \mathbb{C}$، آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. می‌دانیم $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \dfrac{cf(z)}{c - f(z)}$ نیز متعلق به $\mathbb{S}$ می‌باشد.

$$\frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + (a_2 + \frac{1}{c})z^2 + \cdots$$

بنا به قضیه ۴.۲.۱ داریم $|a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$. از طرفی:

$$|\frac{1}{c}| - |a_2| \leq |a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2 \Longrightarrow |\frac{1}{c}| \leq 2 + |a_2|$$

چون $f(z) \in \mathbb{S}$، پس $|a_2| \leq 2$ است. لذا داریم :

$$|\frac{1}{c}| \leq 4 \Longrightarrow |c| \geq \frac{1}{4}$$

□

لم ۸.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ و $z = re^{i\theta}$ باشد، آنگاه :

$$Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|.$$

برهان. چون برای $|z| < 1$، $f'(z) \neq 0$ پس می‌توان شاخه‌ای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < 1$ در نظر گرفت. حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا :

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در r داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| = Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}.$$

□

قضیه ۹.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه :

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

برهان. می‌دانیم تابع $\omega = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z) = f(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}) = b_0 + b_1z + b_2z^2$ نیز به ازای $(|z| < 1)$ تحلیلی و تک ارز است، داریم:

$$g(0) = b_0 = f(z_0) \quad b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1-|z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}(f''(z_0)(1-|z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\overline{z_0}(1-|z_0|^2))$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد پس متعلق به $\mathbb{S}$ نیست، با توجه به این‌که تابع $\frac{g(z)-g(0)}{g'(0)} = z + \frac{b_2}{b_1}z^2 + \cdots$ در S قرار می‌گیرد، لذا بنابر قضیه۴.۲.۱، $|\frac{b_2}{b_1}| \leq 2$ یعنی:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(z_o)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2) - 2\overline{z_0}\right| \leq 2$$

با قرار دادن $z_\circ = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{۲|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^۲}$ داریم :

$$|\frac{z_\circ f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)} - \frac{۲|z_\circ|^۲}{۱-|z_\circ|^۲}| \leq \frac{۴|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^۲}$$

حال چون $z_\circ$ دلخواه است، قرار می‌دهیم :

$$|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{۲r^۲}{۱-r^۲}| \leq \frac{۴r}{۱-r^۲}$$

یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\frac{۴r}{۱-r^۲}$ و به مرکز $\frac{۲r^۲}{۱-r^۲}$ واقع است لذا:

$$\frac{۲r^۲-۴r}{۱-r^۲} \leq \mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{۲r^۲+۴r}{۱-r^۲}$$

بنا به لم ۸.۲.۱ می‌دانیم $\mathrm{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$ یعنی :

$$\frac{۲r^۲-۴r}{۱-r^۲} \leq r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r^۲+۴r}{۱-r^۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{۲r-۴}{۱-r^۲} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r+۴}{۱-r^۲}$$

حال از طرفین نامساوی از ۰ تا r انتگرال می‌گیریم :

$$\log(۱-r) - ۳\log(۱+r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(۱+r) - ۳\log(۱-r)$$

در نتیجه :

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳} \qquad (|z| = r < ۱).$$

□

مثال ۱۰.۲.۱. مشتق تابع کوئب $\cdots + k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = z + ۲z^۲$ برابر است با

$$k'(z) = \frac{۱+z}{(۱-z)^۳}$$

لذا کران بالای قضیه‌ی ۹.۲.۱، در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۱.۲.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه :

$$\frac{r}{(۱+r)^۲} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)^۲} \quad (|z| = r < ۱)$$

برهان. بنا بر قضیه‌ی ۹.۲.۱ برای $|z| = r < ۱$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳}$. نقطه‌ی ۰ را با یک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| \leq \int_۰^r |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_۰^r \frac{۱+t}{(۱-t)^۳}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱-r)^۲}$$

نامساوی $\frac{۱}{۴} \leq \frac{r}{(۱+r)^۲}$ همواره برقرار است. حال اگر $|f(z)| \geq \frac{۱}{۴}$ باشد، آنگاه $|f(z)| \geq \frac{r}{(۱+r)^۲}$ و اگر $|f(z)| < \frac{۱}{۴}$ باشد، بنا بر قضیه‌ی ۷.۲.۱ مسیر c داخل دایره‌ی یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم $c_۰$ از ۰ تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این‌صورت :

$$|f(z)| = \int_{c_۰} |\mathrm{d}\omega| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s|$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی ۹.۲.۱ :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s| \geq \int_c |f'(s)|\mathrm{d}|s| \geq \frac{۱-t}{(۱+t)^۳}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱+r)^۲}$$

لذا داریم :

$$\frac{r}{(۱+r)^۲} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)^۲}.$$

□

مثال ۱۲.۲.۱. برای تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = z + ۲z^۲ + \cdots$ کران بالای قضیه‌ی ۱۱.۲.۱ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۳.۲.۱. (لیتلوود[۳]) اگر $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ باشد آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq en$.

قضیه ۱۴.۲.۱. اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n داریم $|a_n| \leq n$.

برهان. برای $r < ۱$، $z = re^{i\theta}$ قرار می‌دهیم:

$$Imf(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=۱}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌گیری از ۰ تا π داریم :

$$\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin n\theta \, d\theta = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} a_n r^n \sin^۲ n\theta \mathrm{d}\theta = a_n r^n \qquad (۲.۱)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+۱)\theta| = |\sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin\theta|$$

---

[۳] Littlewood's

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|sinn\theta| \leq n|sin\theta|$ لذا از رابطه‌ی (۲.۱) نتیجه می‌شود که

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} |\upsilon(re^{i\theta})| \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{۳.۱}$$

حال نشان می‌دهیم $\upsilon(re^{i\theta}) \neq 0$ ، که در آن $(0 < \theta < \pi, 0 < r < 1)$:

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2i\upsilon(re^{i\theta})$$

چون$\upsilon(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، پس در فاصله $0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابتی دارد. لذا داریم :

$$r = |a_1 r| = |\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \upsilon(re^{i\theta}) \sin\theta \mathrm{d}\theta| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\upsilon(re^{i\theta})| \sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{۴.۱}$$

با جایگزینی (۴.۱)در (۳.۱) ، رابطه $|a_n r^n| \leq nr$ بدست می‌آید و با $r \to 1$ قضیه ثابت می‌گردد. □

۳.۱ ردەی$\mathbb{S}^*$

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به z_0 ستاره‌گون گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z_0 وصل می‌کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را نسبت به مبدا ستاره‌گون گوییم هر گاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است. این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ با $\mathbb{S}^*$ نشان داده می‌شود.

لم ۲.۳.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$، در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.

برهان. ابتدا فرض کنیم$f(z) \in \mathbb{S}^*$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w \in D$ باشد، آنگاه برای $0 < t < 1$، $tw \in D$ (چون D ستاره‌گون نسبت به مبدا می‌باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)| < 1$ صدق می‌کند. چون $g(0) = f^{-1}(tf(0))$، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$. اکنون نقطه‌ی $w_1 \in D_r$ را انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت برای نقطه‌ی z_1 ای با فرض $|z_1| < 1$ و برای t دلخواه با فرض $0 < t < 1$ داریم :

$$|f^{-1}(tw_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r$$

ولی این بدان معنی است که tw_1در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی W_1 ها در D_r و همه‌ی tها که $0 < t < 1$ درست است، میدان D_r نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است.
بر عکس، اگر$f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $w_0 \in D$ موجود است به‌طوری‌که برای t_0ای، $(0 < t_0 < 1)$، $t_0 w_0$ متعلق به D نمی‌باشد. اینک قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که تصویرش D_r شامل نقطه‌ی w_0 باشد. چون $D_r \subset D$، نقطه‌ی $t_0 w_0$ متعلق به D_r نیست. پس $f(z)$ ، $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. □

قضیه ۳.۳.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگرو تنها اگر:

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > ۰$$

برهان. با توجه به لم ۶۱.۲ $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $۱ > r > |z|$ یک میدان ستاره‌گون باشد. به بیان معادل برای هر θ $(۰ \leq \theta \leq ۲\pi)$ بردار شعاعی از $w = ۰$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی است که نسبت به θ اکیدا صعودی است، زیرا در غیر این‌صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در $\mathbb{S}^*$ با شرط $\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta}) > ۰$ مشخص می‌شود. ولی $\arg f(re^{i\theta}) = Im \log f(re^{i\theta})$، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{Im \log f(re^{i\theta})\right\} = Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\right\} = Im\left\{i\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right\} = Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > ۰.$$

□

مثال ۴.۳.۱. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲}$در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار دارد، زیرا تصویر $۱ > |z|$ صفحه‌ی ω می‌باشد که در امتداد پرتو $\frac{-۱}{۴}$ تا ∞ بریده شده است و همچنین:

$$Re\left\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\right\} = Re\left\{\frac{۱+z}{۱-z}\right\}.$$

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنیم برای $۱ > |z|$، $f(z) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n z^n$ تحلیلی است. اگر برای $۱ > |z|$، $\mathrm{Re} f(z) > ۰$، آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq ۲$.

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ باشد آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq n$.

برهان. چون برای $۱ > |z| > ۰$، $f(z) \neq ۰$ تابع

$$P(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}} \tag{۵.۱}$$

در $۱ > |z|$ تحلیلی است. لذا می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z) = ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{۶.۱}$$

از طرفی برای $۱ > |z|$، $f(z) \in \mathbb{S}^*$ پس $Re\left\{P(z)\right\} > ۰$. بنا بر قضیه‌ی ۶.۲.۱ می‌دانیم:

$$|\alpha_n| \leq ۲ \quad n = ۱, ۲, ۳, \cdots \tag{۷.۱}$$

از (۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱} = (۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱})(۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب به رابطهی زیر میرسیم:

$$ka_k = a_k + a_{k-1}\alpha_1 + a_{k-2}\alpha_2 + \cdots + a_2\alpha_{k-2} + \alpha_{k-1}$$

و یا بهصورت معادل :

$$(k-1)a_k = a_{k-1}\alpha_1 + a_{k-2}\alpha_2 + \cdots + a_2\alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} \quad (k = 2, 3, \cdots) \qquad (8.1)$$

با استفاده از کران (۷.۱) میتوان نامساوی مثلث را در (۸.۱)بهکار برد لذا

$$(k-1)|a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \cdots + |a_2| + 1)$$

از رابطهی فوق داریم $|a_2| \leq 2$. سپس فرض کنیم برای $k = 2, 3, \cdots, n-1$ داشته باشیم $|a_k| \leq k$. در اینصورت :

$$(n-1)|a_n| \leq 2\left[(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1\right] = \frac{2(n-1)n}{2}.$$

و لذا رابطه $|a_n| \leq n$ برقرار میباشد لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است. □

تعریف ۷.۳.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ ستارهگون از مرتبه α $(0 \leq \alpha < 1)$ نامیده میشود هرگاه :

$$Re\left\{\frac{zf'}{f}\right\} > \alpha \quad (|z| < 1).$$

این زیر ردهی $\mathbb{S}$ را به $\mathbb{S}^*(\alpha)$ نشان میدهیم.

قضیه ۸.۳.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$، $(0 \leq \alpha < 1)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1 - \alpha$$

آنگاه $f(z) \in S^*(\alpha)$.

برهان. بنا بر تعریف ۷.۳.۱کافی است نشان دهیم $z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد.

$$|z\frac{f'}{f} - 1| = |\frac{zf' - f}{f}| = |\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n}|$$

$$\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|}$$

آخرین جمله قبل دارای کران بالای $1-\alpha$ میباشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n| \leq (1-\alpha)(1 - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|)$$

که معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$. بنا بر فرض، این رابطه برقرار است. بنابراین $|z\frac{f'}{f} - 1| \leq 1 - \alpha$. □

۴.۱ رده‌ی $\mathbb{K}$

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را محدب گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه ازD را به‌هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را محدب گوییم هرگاه قرص $|z| < ۱$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ را با $\mathbb{K}$ نشان می‌دهیم .

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$، در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان محدب تصویر کند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f(z) \in \mathbb{K}$و D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ تحت $f(z)$باشد. نقاط $w_۱$، $w_۲$ را درD_r انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط $(۰ < t < ۱)$ ،$tw_۱ + (۱ - t)w_۲$ هم در D_r قرار دارد. نقاط $z_۱$ و $z_۲$ در قرص $|z| < ۱$ موجود هستند به‌طوری که $\omega_۱ = f(z_۱)$ و $\omega_۲ = f(z_۲)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_۱| \leq |z_۲|$ آنگاه تصویر $|z| < ۱$ تحت تابع $g(z) = tf\left((\frac{z_۱}{z_۲})z\right) + (۱ - t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-۱}(g(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و چون $f(z) \in \mathbb{S}$ لذا در شرایط $|h(z)| < ۱$ و $h(۰) = ۰$ صدق می‌کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$. به‌ویژه :

$$|h(z_۲)| = |f^{-۱}(t\omega_۱ + (۱ - t)\omega_۲)| \leq |z_۲| < r \qquad (۹.۱)$$

چون$D_r \subset D$ ، نقطه‌ی $z_۰$ای در قرص $|z| < ۱$ موجود است که $tw_۱ + (۱ - t)\omega_۲ = f(z_۰)$ ولی بنابر(۹.۱) نقطه‌ی $f^{-۱}(f(z_۰)) = z_۰$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < ۱$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $tw_۱ + (۱ - t)\omega_۲$ در D_r قرار دارد.

برعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{K}$ نباشد آنگاه دو نقطه در D وجود دارند که پاره‌خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < ۱$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره خطی که این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند، نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص$|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی‌کند. $\square$

قضیه ۴.۴.۱. فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در این‌صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر:

$$Re\left\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > ۰ \qquad (|z| < ۱).$$

برهان. بنا بر قضیه‌ی۹.۱، $f(z) \in K$اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < ۱$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < ۱$ را بر یک مرز ساده می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی ω با محور حقیقی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{۲} + \theta + \arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص میگردد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{۲}+\theta+\arg f'(re^{i\theta})\right)>۰$$

و لذا:

$$۱+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Im\log f'(re^{i\theta})\right)=۱+Im\left\{(ire^{i\theta})\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right\}=Re\left\{۱+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>۰$$

□

قضیه ۱.۴.۵. (الکساندر[۴]**)** فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در D باشد با $f(۰)=۰$ و $f'(۰)=۱$. در اینصورت $f(z)\in\mathbb{K}$ اگر و تنها اگر $zf'\in\mathbb{S}^*$.

برهان. اگر $g(z)=zf'(z)$ در اینصورت :

$$\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\}=\left\{۱+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>۰$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. □

قضیه ۱.۴.۶. فرض کنیم $f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n$ در $\mathbb{K}$ باشد. در اینصورت برای هر n، $|a_n|\leq ۱$.

برهان. با توجه به قضیه ۱.۴.۵ تابع $zf'(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}na_nz^n$ در $\mathbb{S}^*$ قرار دارد لذا بنا بر قضیهی ۱.۳.۶ برای هر n، $|na_n|\leq n$ و در نتیجه $|a_n|\leq ۱$. □

قضیه ۱.۴.۷. اگر $f(z)\in\mathbb{K}$ برای $|z|<۱$ داشته باشیم $f(z)\neq c$ آنگاه $|c|\geq\frac{۱}{۲}$.

برهان. ابتدا نشان میدهیم تابع کمکی $g(z)=(c-f(z))^۲$ در $|z|<۱$ تک ارز است ، دو نقطه متمایز $z_۰$ و $z_۱$ در قرص واحد انتخاب میکنیم در اینصورت :

$$g(z_۰)-g(z_۱)=\left((c-f(z_۰))^۲-(c-f(z_۱))^۲\right)=\Big(f(z_۰)-f(z_۱)\Big)\Big(f(z_۰)+f(z_۱)-۲c\Big)$$

اکنون $f(z_۰)\neq f(z_۱)$ زیرا $f(z)$ تک ارز میباشد. همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطهی $\frac{۱}{۲}[f(z_۰)+f(z_۱)]$ به تصویر $|z|<۱$ متعلق است لذا نمیتواند مساوی c باشد. پس

$$f(z_۰)+f(z_۱)-۲c\neq ۰$$

و لذا تک ارزی $g(z)$ ثابت میشود. چون $g(z)=c^۲-۲cz+z^۲+\cdots$ تابع نرمال زیر در $\mathbb{S}$ است.

$$h(z)=\frac{g(z)-c^۲}{-۲c}=z+(\frac{-z^۲}{۲c})+\cdots$$

بعلاوه در $|z|<۱$ ، $h(z)\neq\frac{c}{۲}$، زیرا $g(z)$ هرگز در آنجا صفر نیست. با بهکار بردن قضیهی پوششی در مییابیم $|\frac{c}{۲}|\geq\frac{۱}{۴}$ و یا $|c|\geq\frac{۱}{۲}$. □

---

[۴] Alexander

قضیه ۸.۴.۱. اگر $f(z)\in\mathbb{K}$ باشد، آنگاه برای $|z|=r<۱$:

$$\frac{۱}{(۱+r)^۲}\leq |f'(z)|\leq \frac{۱}{(۱-r)^۲}$$

برهان. می‌دانیم تابع $(|z_\circ|<۱)$ $\quad w=\dfrac{z+z_\circ}{۱+\bar{z}_\circ z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد، پس تابع

$$g(z)=f\left(\frac{z+z_\circ}{۱+\bar{z}_\circ z}\right)=b_\circ+b_۱z+b_۲z^۲$$

نیز به ازای $|z|<۱$ تحلیلی و تک ارز است. بنابراین :

$$g(\circ)=b_\circ=f(z_\circ)\qquad b_۱=g'(\circ)=f'(z_\circ)(۱-|z_\circ|^۲)$$

$$b_۲=\frac{g''(\circ)}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(f''z_\circ(۱-|z_\circ|^۲)^۲-۲f'(z_\circ)\bar{z}_\circ(۱-|z_\circ|^۲)\right).$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ قرار ندارد. با توجه به این‌که تابع

$$\frac{g(z)-g(\circ)}{g'(\circ)}=z+\frac{b_۲}{b_۱}z^۲+\cdots$$

در$\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد لذا در $\mathbb{K}$ نیز وجود دارد پس بنا به قضیه‌ی۶.۴.۱ :

$$\frac{۱}{۲}\left|\frac{f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)}(۱-|z_\circ|^۲)-۲\bar{z}_\circ\right|\leq ۱$$

با قرار دادن $z_\circ=re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\dfrac{۲|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^۲}$ داریم:

$$\left|\frac{z_\circ f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)}-\frac{۲|z_\circ|^۲}{۱-|z_\circ|^۲}\right|\leq\frac{۲|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^۲}.$$

حال چون $z_\circ$ دلخواه است داریم:

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{۲r^۲}{۱-r^۲}\right|\leq\frac{۲r}{۱-r^۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{۲r^۲-۲r}{۱-r^۲}\leq\frac{zf''(z)}{f'(z)}\leq\frac{۲r^۲+۲r}{۱-r^۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{۲r-۲}{۱-r^۲}\leq\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|\leq\frac{۲r+۲}{۱-r^۲}$$

حال از $\circ$ تا r انتگرال می‌گیریم :

$$-۲\log(۱+r)\leq\log|f'(z)|\leq-۲\log(۱-r)$$

لذا :

$$\frac{۱}{(۱+r)^۲}\leq|f'(z)|\leq\frac{۱}{(۱-r)^۲}.$$

□

قضیه ۹.۴.۱. اگر $f(z) \in \mathbb{K}$ باشد آنگاه برای $|z| = r < ۱$،

$$\frac{r}{۱+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{۱-r}$$

برهان. بنا بر قضیهی ۸.۴.۱ برای $|z| = r < ۱$ داریم. $|f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱-r)^۲}$ نقطهی ۰ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال میگیریم:

$$|f(z)| = \int_۰^r |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_۰^r \frac{۱}{(۱-t)^۲}\mathrm{d}t = \frac{r}{۱-r}.$$

نامساوی $\frac{۱}{۴} \leq \frac{r}{(۱+r)}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \geq \frac{۱}{۴}$ لذا $|f(z)| \leq \frac{r}{(۱+r)}$ و اگر $|f(z)| < \frac{۱}{۴}$ طبق قضیهی پوششی مسیر c داخل دایرهی یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم $c_۰$ از ۰ تا $f(z)$ را میپوشاند در اینصورت:

$$|f(z)| = \int_{c_۰} |\mathrm{d}w| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s|$$

از طرفی بنا بر قضیهی قبل :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s| \geq \int_c |f'(s)|\mathrm{d}|s| \geq \int \frac{۱}{(۱+t)^۲}\mathrm{d}t = \frac{r}{۱+r}$$

لذا داریم :

$$\frac{r}{(۱+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)}.$$

□

فصل ۲

بررسی عملگر سالاگان بر رده و زیر رده‌هایی از توابع تک ارز

مقدمه

دراین فصل بااستفاده ازعملگر(سالاگان[۱])رده و زیر رده‌هایی از توابع تک ارز را تعریف و به دنبال یافتن روابطی از این رده و زیر رده‌ها می‌باشیم.

۱.۲ رده‌ی $\mathcal{R}^n(\lambda, \alpha)$

تعریف ۱.۱.۲. تابع تحلیلی f را زیر ترتیب تابع تحلیلی g می‌نامیم اگر تابع تحلیلی w در دیسک واحد U وجود داشته باشد به‌طوری که $w(\circ) = \circ$، $|w(z)| < ۱$. $f(z) = g\left(w(z)\right)$ دراینصورت ان را بانماد $f \prec g$.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید توابع $f(z) = z + \sum\limits_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ و $h(z) = z + \sum\limits_{n=۲}^{\infty} b_n z^n$ متعلق به رده $\mathcal{A}$ باشند در این‌صورت ضرب هادامارد این توابع را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f * h)(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n b_n z^n \tag{۱.۲}$$

[۱] salagean

هم چنین مشتق سالاگان را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D^{\circ} f(z) = f(z)$$

$$D_{\lambda}^{1} f(z) = D_{\lambda} f(z) = (1-\lambda) f(z) + \lambda z f^{'}(z)$$

$$D_{\lambda}^{m} f(z) = D_{\lambda}(D_{\lambda}^{m-1} f(z)) \qquad \lambda > 0$$

فرمول کلی مشتق سالاگان:

$$D_{\lambda}^{m} f(z) = z + \sum_{k=j+1}^{\infty} [\,1 + (k-1)]^{m} a_k z^k$$

لم ۳.۱.۲. [۵] فرض کنید h تابعی محدب است به‌طوری‌که $h(0) = a$، $\gamma \neq 0$، $Re\gamma \geq 0$. اگر $p \in \mathcal{H}[a,n]$

$$p(z) + \frac{zp^{'}(z)}{\gamma} \prec h(z)$$

آنگاه

$$p(z) \prec q(z) \prec h(z)$$

$$q(z) = \frac{\gamma}{nz^{\frac{\gamma}{n}}} \int_{0}^{z} h(t) t^{\frac{\gamma}{n}-1} dt$$

لم ۴.۱.۲. [۹] فرض کنید q تابعی محدب در U است و $h(z) = q(z) + n\alpha z q(z)$ به‌طوری‌که $n, \alpha > 0$ و $p \in \mathcal{H}(U)$

$$p(z) = q(0) + p_n z^n + \dots$$

و

$$p(z) + \alpha z p^{'}(z) \prec h(z)$$

آنگاه

$$p(z) \prec q(z)$$

لم ۵.۱.۲. فرض کنید $f \in \mathcal{A}$ و

$$F(z) = \frac{2}{z} \int_{0}^{z} f(t) dt, \qquad z \in U$$

اگر

$$Re\left(\frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)} + 1\right) > -\frac{1}{2}$$

آنگاه

$$F \in \mathcal{K}$$

تعریف ۶.۱.۲. فرض کنید تابع $f\in\mathcal{A}$ و $۰\le\alpha<۱$، $\lambda>۰$ باشد. گوییم تابع f متعلق به رده‌ی $R^n(\lambda,\alpha)$ است هرگاه در نامساوی زیر صدق کند:

$$Re[D_\lambda^n f(z)]'>\alpha,\qquad z\in U.$$

قضیه ۷.۱.۲. فرض کنید

$$h(z)=\frac{۱+(۲\alpha-۱)z}{۱+z},\qquad z\in U, ۰\le\alpha<۱$$

اگر $\lambda>۰$ ، $n\in\mathbb{N}=\mathbb{N}^*\cup\{۰\}$، $f\in\mathcal{A}$ با مقایسه زیرترتیب داریم:

$$[D_\lambda^{n+۱}f(z)]'\prec h(z),\qquad z\in U \tag{۲.۲}$$

آنگاه

$$[D_\lambda^n f(z)]'\prec q(z)=۲\alpha-۱+\frac{۲(۱-\alpha)}{\lambda}\frac{۱}{z^{(۱/\lambda)}}\sigma(\frac{۱}{\lambda})$$

که σ به‌صورت زیر است:

$$\sigma(x)=\int_۰^z\frac{t^{x-۱}}{۱+t},\qquad z\in U. \tag{۳.۲}$$

تابع q محدب و کران بهبود شده است.

برهان. طبق تعریف عملگر D_λ^n داریم:

$$D_\lambda^{n+۱}f(z)=(۱-\lambda)D_\lambda^n f(z)+\lambda z[D_\lambda^n f(z)]',\qquad z\in U \tag{۴.۲}$$

با مشتق گیری از رابطه (۴.۲) نسبت به z داریم:

$$[D_\lambda^{n+۱}f(z)]'=[D_\lambda^n f(z)]'+\lambda z[D_\lambda^n f(z)]'',\qquad z\in U \tag{۵.۲}$$

با به کاربردن رابطه (۵.۲) در(۲.۲)، دیفرانسیل زیرترتیب (۲.۲) به صورت زیراست:

$$[D_\lambda f(z)]'+\lambda z[D_\lambda^n f(z)]''\prec h(z)=\frac{۱+(۲\alpha-۱)z}{۱+z},\qquad z\in U. \tag{۶.۲}$$

اگر

$$p(z)=[D_\lambda^n f(z)]'=\left[z+\sum_{j=۲}^{\infty}[۱+\lambda(j-۱)]^n a_j z^j\right]'$$

$$=۱+p_۱z+p_۲z^۲+\cdots,\qquad z\in U\qquad ,p\in\mathcal{H}[۱,۱] \tag{۷.۲}$$

با به کاربردن (۷.۲) در(۶.۲) دیفرانسیل زیرترتیب به صورت زیراست:

$$p(z)+\lambda zp'(z)\prec h(z)=\frac{۱+(۲\alpha-۱)z}{۱+z},\qquad z\in U.$$

طبق لم ۳.۱.۲، با قراردادن $\gamma = \frac{1}{\lambda}$ داریم:

$$p(z) \prec q(z) = \frac{1}{\lambda z^{(1/\lambda)}} \int_0^z h(t) t^{(1/\lambda)-1} dt$$
$$= \frac{1}{\lambda z^{(1/\lambda)}} \int_0^z \frac{1+(2\alpha-1)t}{1+t} t^{(1/\lambda)-1} dt$$
$$= 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\frac{1}{\lambda}.\frac{1}{z^{(1/\lambda)}}\sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

که σ در (۳.۲) داده شده است لذا:

$$[D_\lambda^n f(z)]' \prec q(z) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\frac{1}{\lambda}.\frac{1}{z^{(1/\lambda)}}\sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

تابع q محدب و کران بهبود شده است. □

نتیجه ۸.۱.۲. $R^{n+1}(\alpha,\lambda) \subset R^{n+1}(\delta,\lambda)$،

با

$$\delta = \delta(\alpha,\lambda) = 2\alpha - 1 + 2(1-\alpha)\frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

که σ در (۳.۲) داده شده است.

برهان. فرض کنید $f \in R^{n+1}(\alpha,\lambda)$، طبق تعریف ۶.۱.۲ داریم:

$$Re[D_\lambda^{n+1} f(z)]' > \alpha \tag{۸.۲}$$

که مساوی است با

$$[D_\lambda^{n+1} f(z)]' \prec h(z) = \frac{1+(2\alpha-1)z}{1+z}, \qquad z \in U, \tag{۹.۲}$$

ازآنجایی که $h(U) = \{w \in \mathcal{C}, Rew > \alpha\}$

با به کاربردن قضیه۷.۱.۲ داریم:

$$[D_\lambda^n f(z)]' \prec q(z) = 2\alpha - 1 + \frac{2(1-\alpha)}{\lambda}\frac{1}{z^{(1/\lambda)}}\sigma(\frac{1}{\lambda}), \qquad z \in U$$

که σ در (۳.۲) داده شده است.

از آنجایی‌که q محدب و $q(U)$ نسبت به محور حقیقی متقارن است، نتیجه می‌گیریم که:

$$Re[D_\lambda^n f(z)]' > Req(1) = \delta = \delta(\alpha,\lambda) = 2\alpha - 1 + \frac{2(1-\alpha)}{\lambda}\sigma(\frac{1}{\lambda}), \qquad z \in U,$$

در نتیجه داریم

$$R^{n+1}(\alpha,\lambda) \subset R^{n+1}(\delta,\lambda)$$

□

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنید q یک تابع محدب در U، با $q(0) = 1$ و n عددصحیح مثبت است.اگر

$$h(z) = q(z) + \lambda z q'(z), \qquad z \in U.$$

به طوری‌که $\lambda > 0$، $n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ و $f \in \mathcal{A}$. اگر دیفرانسیل زیرترتیبی به صورت زیر باشد:

$$[D_\lambda^{n+1} f(z)]' \prec h(z), \qquad z \in U \tag{۱۰.۲}$$

آنگاه

$$[D_\lambda^n f(z)]' \prec q(z), \qquad z \in U,$$

نتیجه اکیداً برقراراست.

برهان. با به کاربردن رابطه (۷.۲) در(۵.۲)، دیفرانسیل زیرترتیبی (۱۰.۲)به صورت زیراست:

$$p(z) + \lambda z p'(z) \prec h(z) = q(z) + \lambda z q'(z), \qquad z \in U.$$

طبق لم ۴.۱.۲ داریم:

$$p(z) \prec q(z), \qquad z \in U$$

یعنی

$$[D_\lambda^n f(z)]' \prec q(z), \qquad z \in U,$$

نتیجه اکیداً برقرار است. □

مثال ۱۰.۱.۲. برای $n = ۱$، $\lambda > ۰$، $q(z) = (۱ - z)/(۱ + z)$، $f \in \mathcal{A}$، $z \in U$ ازقضیه ۹.۱.۲ نتیجه می‌گیریم که:

$$(۱-\lambda)^۲ f(z) + (۲-\lambda)\lambda z f^{'}(z) + \lambda^۲ z^۲ f^{''}(z) \prec \frac{۱ + ۲\lambda z - z^۲}{(۱+z)^۲}, \qquad z \in U$$

دلالت براین دارد:

$$(۱-\lambda) f(z) + \lambda z f^{'}(z) \prec \frac{۱ - z}{۱ + z}, \qquad z \in U$$

قضیه ۱۱.۱.۲. فرض کنید q یک تابع محدب در U با $q(۰) = ۱$ و n عددصحیح مثبت است.اگر

$$h(z) = q(z) + z q^{'}(z), \qquad z \in U.$$

به طوری‌که $\lambda > ۰$، $n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{۰\}$ و $f \in \mathcal{A}$. اگر دیفرانسیل زیرترتیبی به‌صورت زیر باشد

$$[D_\lambda^n f(z)] \prec h(z), \qquad z \in U \tag{۱۱.۲}$$

آنگاه

$$\frac{D_\lambda^n f(z)}{z} \prec q(z), \qquad z \in U$$

نتیجه اکیداً برقرار است.

برهان. اگر

$$\frac{D_\lambda^n f(z)}{z} = p(z), \qquad z \in U. \tag{۱۲.۲}$$

بامشتق گیری از رابطه (۱۲.۲) نسبت به z، داریم:

$$[D_\lambda^n f(z)]^{'} = p(z) + z p^{'}(z), \qquad z \in U. \tag{۱۳.۲}$$

با به کاربردن دیفرانسیل زیرترتیبی رابطه (۱۳.۲)داریم:

$$p(z) + z p^{'}(z) \prec h(z) = q(z) + z q^{'}(z), \qquad z \in U$$

طبق لم ۴.۱.۲نتیجه می‌گیریم:

$$p(z) \prec q(z), \qquad z \in U,$$

از رابطه (۱۲.۲) داریم:

$$\frac{D_\lambda^n f(z)}{z} \prec q(z), \qquad z \in U. \tag{۱۴.۲}$$

□

مثال ۱۲.۱.۲. برای $f\in\mathcal{A}$، $q(z)=۱/(۱-z)$ که $n=۱$، $\lambda>۰$ از قضیه ۱۱.۱.۲ نتیجه می‌گیریم که:

$$(۱-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)\prec\frac{۱}{(۱-z)^{۲}}\quad z\in U$$

دلالت براین دارد:

$$(۱-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)\prec\frac{۱}{(۱-z)},\qquad z\in U.$$

قضیه ۱۳.۱.۲. فرض کنید

$$h(z)=\frac{۱+(۲\alpha-۱)z}{۱+z},\qquad ۰\leq\alpha<۱, z\in U.$$

که $\lambda>۰$، $n\in\mathbb{N}=\mathbb{N}^*\cup\{۰\}$ اگر $f\in\mathcal{A}$ و

$$[D_\lambda^n f(z)]'\prec h(z),\qquad z\in U, \tag{۱۵.۲}$$

دیفرانسیل زیرترتیبی باشد، آنگاه

$$\frac{D_\lambda^n f(z)}{z}\prec q(z)=۲\alpha-۱+۲(۱-\alpha)\frac{log(۱+z)}{z},\qquad z\in U.$$

تابع q محدب و کران بهبود شده است.

برهان. با به کاربردن رابطه (۱۳.۲)، دیفرانسیل زیرترتیبی رابطه (۱۵.۲) به صورت زیر است:

$$p(z)+zp'(z)\prec h(z)=\frac{۱+(۲\alpha-۱)z}{۱+z},\qquad z\in U. \tag{۱۶.۲}$$

طبق لم ۳.۱.۲داریم :

$$p(z)\prec q(z)=\frac{۱}{z}\int_۰^z\frac{۱+(۲\alpha-۱)t}{۱+t}dt$$
$$=۲\alpha-۱+۲(۱-\alpha)\frac{log(۱+z)}{z},\qquad z\in U$$

طبق رابطه(۱۲.۲) داریم :

$$\frac{D_\lambda^n f(z)}{z} \prec q(z) = ۲\alpha - ۱ + ۲(۱-\alpha)\frac{\log(۱+z)}{z}, \qquad z \in U.$$

□

با استفاده قضیه ۱۳.۱.۲ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۴.۱.۲. فرض کنید $f \in R^n(\lambda, \alpha)$ آنگاه

$$Re\frac{D^n f(z)}{z} > ۲\alpha - ۱ + ۲(۱-\alpha)log۲, \qquad z \in U$$

برهان. از آنجایی $f \in R^n(\lambda, \alpha)$، طبق تعریف ۶.۱.۲ داریم:

$$Re[D_\lambda^n f(z)]' > \alpha, \qquad z \in U$$

که معادل است با:

$$[D_\lambda^n f(z)]' \prec \frac{۱+(۲\alpha-۱)z}{۱+z}, \qquad z \in U.$$

با به کاربردن قضیه‌ی۱۳.۱.۲ داریم:

$$\frac{D_\lambda^n f(z)}{z} \prec q(z) = ۲\alpha - ۱ + ۲(۱-\alpha)\frac{\log(۱+z)}{z}, \qquad z \in U.$$

از آنجایی‌که q محدب و $q(U)$ نسبت به محور تقارن محدب است نتیجه می‌گیریم که:

$$Re\frac{D_\lambda^n f(z)}{z} > Req(۱) = ۲\alpha - ۱ + ۲(۱-\alpha)\log ۲, \qquad z \in U.$$

□

قضیه ۱۵.۱.۲. فرض کنید h یک تابع محدب با $h(۰) = ۱$ ، به طوری‌که $\lambda > ۰$ ، $n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{۰\}$.
اگر $f \in \mathcal{A}$ و

$$[D_\lambda^n f(z)]' \prec h(z) \tag{۱۷.۲}$$

دیفرانسیل زیرترتیبی باشد، آنگاه

$$\frac{D_\lambda^n f(z)}{z} \prec q(z) = \frac{1}{z}\int_0^z h(t)dt$$

که q محدب و کران بهبود شده است.

برهان. بابه کاربردن رابطه(۱۳.۲) و (۱۷.۲) داریم:

$$p(z) + zp'(z) \prec h(z), \qquad z \in U$$

ازلم ۳.۱.۲ داریم:

$$p(z) \prec q(z) = \frac{1}{z}\int_0^z h(t)dt,$$

طبق رابطه(۱۲.۲) داریم:

$$\frac{D_\lambda^n f(z)}{z} \prec q(z) = \frac{1}{z}\int_0^z h(t)dt$$

طبق لم ۵.۱.۲ تابع q محدب و از لم ۳.۱.۲ تابع q کران بهبود شده برای زیرترتیب (۱۷.۲) است. □

قضیه ۱۶.۱.۲. مجموعه $R^n(\lambda,\alpha)$ محدب است.

برهان. فرض کنیم تابع

$$f_i(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{ki} z^k \qquad (i = 1, 2)$$

متعلق به رده‌ی $R^n(\lambda,\alpha)$ است و $h(z) = \mu_1 f_1(z) + \mu_2 f_2(z)$ کافی است نشان دهیم $h(z) \in R^n(\lambda,\alpha)$ است.

از آنجایی که:

$$h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} (\mu_1 a_{k1} + \mu_2 a_{k2}) z^k,$$

لذا داریم:

$$(D^n h(z))' = ۱ + \sum_{k=۲}^{\infty} k(\mu_۱ a_{k۱} + \mu_۲ a_{k۲})[۱ + (k-۱)\lambda]^n z^{k-۱},$$

ازاین رو داریم:

$$\begin{aligned} Re(D^n h(z))' &= Re\left(۱ + \mu_۱ \sum_{k=۲}^{\infty} k[۱ + (k-۱)\lambda]^n a_{k۱} z^{k-۱}\right) \\ &+ Re\left(۱ + \mu_۲ \sum_{k=۲}^{\infty} k[۱ + (k-۱)\lambda]^n a_{k۲} z^{k-۱}\right). \end{aligned} \tag{۱۸.۲}$$

از طرفی چون $f_۱, f_۲ \in (\lambda, \alpha)$ داریم:

$$Re\left(۱ + \mu_i \sum_{k=۲}^{\infty} k[۱ + (k-۱)\lambda]^n a_{ki} z^{k-۱}\right) > ۱ + \mu_i(\alpha - ۱) \qquad (i = ۱, ۲). \tag{۱۹.۲}$$

طبق روابط (۱۹.۲) در (۱۸.۲) داریم:

$$Re(D^n h(z))' > ۱ + \alpha(\mu_۱ + \mu_۲) - (\mu_۱ + \mu_۲),$$

از آنجایی که$\mu_۱ + \mu_۲ = ۱$ حکم برقرار است.

۲.۲ رده‌ی $S^m(\lambda, \alpha)$

تعریف ۱.۲.۲. زیر رده‌ای از توابع تحلیلی را با نماد $\mathcal{A}_\backslash$ نمایش و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{A}_\backslash = \{f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) : f(z) = z + a_{n+۱} z^{n+۱} + a_{n+۲} z^{n+۲} + \ldots\}$$

به طوری‌که $n \in N^* = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ و$\mathcal{A}_۱ = \mathcal{A}$

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید $f \in \mathcal{A}$ گوییم تابع f متعلق به رده $S^m(\lambda, \alpha)$ است هرگاه

$$Re\,[D_\lambda^m f(z)]' > \alpha \quad z \in U$$

که $\lambda > ۰$، $\alpha \in [۰, ۱)$ و $m \in N$.

قضیه ۳.۲.۲. اگر $\alpha \in [۰, ۱)$ و$m \in N$ آنگاه

$$S^{m+۱}(\lambda, \alpha) \subset S^m(\lambda, \delta)$$

که δ و تابع β به‌صورت زیر هستند:

$$\delta = \delta(\lambda.\alpha) = ۲\alpha - ۱ + ۲(۱-\alpha)\frac{۱}{\lambda}\beta(\frac{۱}{\lambda})$$

$$\beta(x) = \int_۰^۱ \frac{t^{x-۱}}{t+۱} dt$$

برهان. فرض کنیم $f\in S^{m+1}(\lambda.\alpha)$ با استفاده از عملگر D_λ^m داریم:

$$D_\lambda^{m+1}f(z)=(1-\lambda)D_\lambda^m f(z)+\lambda z(D_\lambda^m f(z))'$$

اگر داشته باشیم

$$p(z)=(D_\lambda^m f(z))'$$

به‌طوری که :

$$p(z)=1+p_1z^1+p_2z^2+\dots \qquad p(z)\in\mathcal{H}[1,1]$$

با محاسبه نتیجه می‌گیریم:

$$(D_\lambda^{m+1}f(z))'=p(z)+\lambda zp'(z), z\in U \tag{۲۰.۲}$$

از آنجایی‌که $f\in S^{m+1}(\lambda,\alpha)$ و طبق تعریف ۲.۲.۲ داریم:

$$Re(D_\lambda^{m+1}f(z))'>\alpha \qquad z\in U$$

با استفاده از (۲۰.۲) داریم:

$$Re(p(z)+\lambda zp'(z))>\alpha$$

این معادل است با:

$$p(z)+\lambda zp'(z)\prec\frac{1+(2\alpha-1)z}{1+z}\equiv h(z)$$

بااستفاده از لم۳.۱.۲ و با قراردادن $\gamma=\frac{1}{\lambda}$ داریم:

$$p(z)\prec q(z)\prec h(z)$$

که

$$q(z)=\frac{1}{\lambda z^{\frac{1}{\lambda}}}\int_0^z\frac{1+(2\alpha-1)t}{1+t}t^{\frac{1}{\lambda}-1}dt$$

عملگر q محدب است:

$$(D_\lambda^m f(z))'\prec 2\alpha-1+\frac{2(1-\alpha)}{\lambda}.\frac{1}{z^{\frac{1}{\lambda}}}\int_0^z\frac{t^{\frac{1}{\lambda}-1}}{t+1}dt$$

این نتیجه می دهد:

$$Re(D_\lambda^m f(z))'>q(1)=\delta \tag{۲۱.۲}$$

به‌طوری که

$$\delta=\delta(\lambda,\alpha)=2\alpha-1+\frac{2(1-\alpha)}{\lambda}\beta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\beta\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{\lambda}-1}}{t+1}dt$$

طبق (۲۱.۲) نتیجه می گیریم $f\in S^m(\lambda,\delta)$ $\square$

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید $q(z)$ تابع محدب، $q(\circ)=1$ و h تابعی به‌صورت زیر است:

$$h(z)=q(z)+\lambda zq'(z), \qquad \lambda>\circ. \tag{۲۲.۲}$$

اگر $f\in A$ و دیفرانسیل زیرترتیبی به صورت زیر باشد

$$(D_\lambda^{m+1}f(z))'\prec h(z) \tag{۲۳.۲}$$

آنگاه

$$(D_\lambda^{m}f(z))'\prec q(z)$$

برهان. طبق (۲۳.۲) و (۲۰.۲) داریم:

$$p(z)+\lambda zp'(z)\prec q(z)+\lambda zq'(z)\equiv h(z)$$

و با استفاده از لم ۴.۱.۲ داریم:

$$p(z)\prec q(z)$$

یا

$$(D_\lambda^{m}f(z))'\prec q(z), \qquad z\in U$$

اثبات کامل شد. □

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید q تابع محدب، $q(\circ)=1$ و h تابعی به‌صورت زیر است:

$$h(z)=q(z)+zq'(z). \qquad \lambda>\circ, z\in U \tag{۲۴.۲}$$

اگر $f\in \mathcal{A}$ و دیفرانسیل زیرترتیبی به‌صورت زیر باشد

$$(D_\lambda^{m}f(z))'\prec h(z), \qquad z\in U \tag{۲۵.۲}$$

آنگاه

$$\frac{D_\lambda^{m}f(z)}{z}\prec q(z) \tag{۲۶.۲}$$

برهان. اگر

$$p(z)=\frac{D_\lambda^{m}f(z)}{z} \qquad z\in U$$

داریم:

$$(D_\lambda^{m}f(z)'=p(z)+zp'(z) \qquad z\in U.$$

با توجه به رابطه (۲۵.۲) داریم:

$$p(z)+zp'(z)\prec q(z)+zq'(z)$$

طبق لم ۴.۱.۲، ۲۶.۲ نتیجه می‌شود. □

۳.۲ ردهی $\mathcal{S}_n(\beta)$

لم ۱.۳.۲. فرض کنید $Re\gamma > ۰$ و

$$w = \frac{k^۲ + \mid r \mid^۲ - \mid k^۲ - r^۲ \mid}{۴kRer}.$$

اگر h تابعی تحلیلی در U با $h(۰) = ۱$ و

$$Re\left(\frac{zh''(z)}{h'(z)} + ۱\right) > -w.$$

که تابع

$$p(z) = ۱ + p_n z^n + p_{n+۱} z^{n+۱} + \dots$$

در U تحلیلی و

$$p(z) + \frac{۱}{\gamma} zp'(z) \prec h(z),$$

باشد، آنگاه $p(z) \prec q(z)$، که q یک معادله دیفرانسیلی

$$q(z) + \frac{n}{\gamma} zq'(z) = h(z), \qquad q(۰) = ۱,$$

به صورت زیر میباشد

$$q(z) = \frac{\gamma}{nz^{\gamma/n}} \int_۰^z t^{\frac{\gamma}{n}-۱} dt.$$

و q کران بهبود شده است.

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنید $S_n(\beta)$ ردهی تابع $f \in \mathcal{A}$ که $۰ \leq \beta < ۱$ و $n \in \mathbb{N}$. در این صورت مجموعه $S_n(\beta)$ محدب است هر گاه در شرط زیرصدق کند:

$$Re(S^n f)'(z) > \beta \qquad (z \in U).$$

قضیه ۳.۳.۲. مجموعه $S_n(\beta)$ محدب است.

برهان. فرض کنید تابع

$$f_i(z) = z + \sum_{k=۲}^{\infty} a_{ki} z^k, \qquad i = ۱, ۲ \quad (z \in U)$$

در ردهی $S_n(\beta)$ باشد. کافی است نشان دهیم تابع

$$h(z) = \mu_۱ f_۱(z) + \mu_۲ f_۲(z)$$

متعلق به رده $S_n(\beta)$ است.

از آنجاییکه:

$$h(z) = z + \sum_{k=۲}^{\infty} (\mu_۱ a_{k۱} + \mu_۲ a_{k۲}) z^k \qquad (z \in U)$$

لذا

$$S^n h(z) = z + \sum_{k=۲}^{\infty} k^n (\mu_۱ a_{k۱} + \mu_۲ a_{k۲}) z^k \qquad (z \in U). \tag{۲۷.۲}$$

با مشتق گیری رابطه (۲۷.۲) داریم:

$$[S^n h(z)]' = ۱ + \sum_{k=۲}^{\infty} k^{n+۱} (\mu_۱ a_{k۱} + \mu_۲ a_{k۲}) z^{k-۱}, \tag{۲۸.۲}$$

که

$$\begin{aligned} Re[S^n h(z)]' &= Re\left[۱ + \sum_{k=۲}^{\infty} k^{n+۱} (\mu_۱ a_{k۱} + \mu_۲ a_{k۲}) z^{k-۱}\right] \\ &= ۱ + Re\left[\mu_۱ \sum_{k=۲}^{\infty} k^{n+۱} a_{k۲} z^{k-۱}\right] + Re\left[\mu_۲ \sum_{k=۲}^{\infty} k^{n+۱} a_{ki} z^{k-۱}\right]. \end{aligned} \tag{۲۹.۲}$$

ازآنجابی که $f_۱, f_۲ \in S_n(\beta)$ داریم:

$$Re\left[\mu_i \sum_{k=۲}^{\infty} k^{n+۱} a_{ki} z^{k-۱}\right] > \mu_i(\beta - ۱) \qquad (i = ۱, ۲). \tag{۳۰.۲}$$

طبق روابط (۲۹.۲) و (۳۰.۲) داریم:

$$Re[S^n h(z)]' > ۱ + \mu_۱(\beta - ۱) + \mu_۲(\beta - ۱) \qquad (z \in U), \tag{۳۱.۲}$$

از آنجابی‌که $\mu_۱ + \mu_۲ = ۱$ داریم:

$$Re[S^n h(z)]' > \beta \tag{۳۲.۲}$$

بنابراین $S_n(\beta)$ محدب است. □

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید q یک تابع محدب در U با $q(۰) = ۱$، و

$$h(z) = q(z) + \frac{۱}{c+۲} z q'(z) \qquad (z \in U),$$

که c یک عددمختلط با $Rec > -۲$. اگر $f \in S_n(\beta)$ و $F = I_c(f)$ که

$$F(z) = I_c(f)(z) = \frac{c+۲}{z^{c+۱}} \int_۰^z t^c f(t) dt, \qquad Rec > -۲, \tag{۳۳.۲}$$

آنگاه

$$[S^n f(z)]' \prec h(z) \qquad (z \in U), \tag{۳۴.۲}$$

دلالت براین دارد:

$$[S^n F(z)]' \prec q(z) \qquad (z \in U),$$

این نتیجه اکیداً برقراراست.

برهان. از رابطه (۳۳.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$z^{c+1}F(z) = (c+2)\int_0^z t^c f(t)dt, \qquad Rec > -2 \qquad (z \in U). \tag{۳۵.۲}$$

با مشتق گیری رابطه (۳۵.۲) نسبت به z داریم:

$$(c+1)F(z) + zF^{'}(z) = (c+2)f(z) \qquad (z \in U)$$

و

$$(c+1)S^nF(z) + z[S^nF(z)]^{'} = (c+2)S^nf(z) \qquad (z \in U). \tag{۳۶.۲}$$

مشتق گیری رابطه ۳۶.۲ داریم:

$$[S^nF(z)]^{'} + \frac{z}{c+2}[S^nF(z)]^{''} = [S^nf(z)]^{'} \qquad (z \in U). \tag{۳۷.۲}$$

بابه کاربردن (۳۷.۲) دیفرانسیل زیرترتیب ۳۴.۲ به صورت زیر است:

$$[S^nF(z)]^{'} + \frac{1}{c+2}z[S^nF(z)]^{''} \prec h(z) = q(z) + \frac{1}{c+2}zq^{'}(z). \tag{۳۸.۲}$$

اگر

$$p(z) = [S^nF(z)]^{'} = \left[z + \sum_{j=2}^{\infty} j^n a_j z^j\right]^{'} \tag{۳۹.۲}$$

$$= 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots, p \in \mathcal{H}[1,1].$$

بابه کاربردن (۳۹.۲) در(۳۸.۲) داریم:

$$p(z) + \frac{1}{c+2}zp^{'}(z) \prec h(z) = q(z) + \frac{1}{c+2}zq^{'}(z) \quad (z \in U). \tag{۴۰.۲}$$

طبق لم۳.۱.۲ داریم:

$$p(z) \prec q(z)$$

$$[S^nF(z)]^{'} \prec q(z) \qquad (z \in U)$$

که q کران بهبود شده است. □

مثال ۵.۳.۲. اگر $c = 1 + i$ و $q(z) = \frac{1}{1-z}$، آنگاه

$$h(z) = \frac{3 + i - z(2 + i)}{(3 + i)(1 - z)^2} \tag{۴۱.۲}$$

ازقضیه فوق نتیجه می‌گیریم که اگر $f \in S_n(\beta)$ و Fبه صورت زیر باشد:

$$F(z) = \frac{3 + i}{z^{2+i}} \int_0^z t^{1+i} f(t)dt \tag{۴۲.۲}$$

آنگاه

$$z^{2+i} F(z) = (3 + i) \int_0^z t^{1+i} f(t)dt. \tag{۴۳.۲}$$

با مشتق گیری ازرابطه (۴۳.۲) نسبت به z، داریم:

$$(2 + i)F(z) + zF'(z) = (3 + i)f(z) \tag{۴۴.۲}$$

و

$$(2 + i)S^n F(z) + z[S^n F(z)]' = (3 + i)S^n f(z) \qquad (z \in U). \tag{۴۵.۲}$$

با مشتق گیری ازرابطه (۴۵.۲) داریم:

$$[S^n F(z)]' + \frac{z}{3 + i}[S^n F(z)]'' = [S^n f(z)]' \qquad (z \in U) \tag{۴۶.۲}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$[S^n f(z)]' \prec \frac{3 + i - z(2 + i)}{(3 + i)(1 - z)^2} \qquad (z \in U) \tag{۴۷.۲}$$

لذا:

$$[S^n F(z)]' \prec \frac{1}{1 - z} \qquad (z \in U), \tag{۴۸.۲}$$

که F طبق رابطه (۴۲.۲) است .

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنید h تابعی تحلیلی در U با $h(0)=1$ و
$$Re\frac{zh''(z)+1}{h'(z)} > -w.$$

داشته باشیم $Rec > -2$ و

$$w = \frac{1+|c+2|^2-|c^2+4c+3|}{4Re(c+2)} \tag{۴۹.۲}$$

حال اگر $f \in S_n(\beta)$ و $F = I_c(f)$ که F در (۳۳.۲) طبق باشد، آنگاه
$$[S^n f(z)]' \prec h(z) \qquad (z \in U), \tag{۵۰.۲}$$

و

$$[S^n F(z)]' \prec q(z) \qquad (z \in U)$$

که q معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:
$$q(z) = \frac{c+2}{z^{c+2}}\int_0^z t^{c+1}h(t)dt \qquad (z \in U).$$
$$q(z) + \frac{1}{c+2}zq'(z) = h(z), \qquad h(0) = 1$$

بعلاوه q کران بهبودشده است.

برهان. با استفاده از لم ۱.۳.۲ قضیه فوق را اثبات می‌کنیم و مقدار w طبق ۴۹.۲ می‌باشد، بنابراین باتوجه به رابطه (۳۹.۲) داریم :

$$p(z) = [S^n F(z)]' = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots, p \in \mathcal{H}[1,1] \qquad (z \in U).$$

با استفاده از لم ۱.۳.۲ نتیجه می‌گیریم $k=1$. با به کاربردن روابط (۳۷.۲) و (۳۹.۲) دیفرانسیل زیرترتیبی ۵۰.۲ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$p(z) + \frac{1}{c+2}zp'(z) \prec h(z) = q(z) + \frac{1}{c+2}zq'(z) \qquad (z \in U). \tag{۵۱.۲}$$

طبق زیرترتیبی رابطه (۵۱.۲) و لم ۱.۳.۲ نتیجه می‌گیریم که$\gamma = c + ۲$ و

$$p(z) \prec q(z) \qquad (z \in U)$$

که

$$q(z) = \frac{c+۲}{z^{c+۲}} \int_۰^z t^{c+۱} h(t) dt \qquad (z \in U),$$

$$[S^n F(z)]' \prec q(z) = \frac{c+۲}{z^{c+۲}} \int_۰^z t^{c+۱} h(t) dt \qquad (z \in U).$$

بنابراین q کران بهبود شده است. $\square$

ملاحظه ۷.۳.۲. اگر درقضیه ۶.۳.۲ قراردهیم:

$$h(z) = \frac{۱ + (۲\beta - ۱)z}{۱ + z}$$

نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۸.۳.۲. اگر $۰ \leq \beta < ۱$، $n \in \mathbb{N}$، $Rec > -۲$ و I_c در (۳۳.۲) داده شده، آنگاه

$$I_c[S_n(\beta)] \subset S_n(\delta),$$

که $\delta = min_{|z|=۱} Req(z) = \delta(c, \beta)$ و نتیجه اکیداً برقرار است، بعلاوه

$$\delta = \delta(c, \beta) = ۲\beta - ۱ + (c+۲)(۲ - ۲\beta)\sigma(c), \tag{۵۲.۲}$$

که

$$\sigma(x) = \int_۰^z \frac{t^{x+۱}}{۱+t} dt. \tag{۵۳.۲}$$

برهان. اگر

$$h(z) = \frac{۱ + (۲\beta - ۱)z}{۱ + z},$$

آنگاه h محدب و طبق قضیه‌ی ۶.۳.۲ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}[S^nF(z)]' \prec q(z) &= \frac{c+۲}{z^{c+۲}}\int_۰^z t^{c+۱}\frac{۱+(۲\beta-۱)t}{۱+t}dt \\ &= ۲\beta-۱+\frac{(c+۲)(۲-۲\beta)}{z^{c+۲}}\int_۰^z \frac{t^{c+۱}}{۱+t}dt \\ &= ۲\beta-۱+\frac{(c+۲)(۲-۲\beta)}{z^{c+۲}}\sigma(c),\end{aligned} \tag{۵۴.۲}$$

σ در (۵۳.۲)داده شده است.

حال اگر$Rec > -۲$، آنگاه ازمحدب بودن q و این‌که $q(U)$ نسبت به محور حقیقی متقارن است، نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}Re[S^nF(z)]' \geq min_{|z|=۱}Req(z) &= Req(۱) = \delta(c,\beta) \\ &= ۲\beta-۱+(c+۲)(۲-۲\beta)\sigma(c),\end{aligned}$$

طبق (۵۴.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$I_c[S_n(\beta)] \subset S_n(\delta),$$

که δ طبق رابطه (۵۲.۲) داده شده است.

□

۴.۲ زیررده‌ی $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(m,n,\alpha,\beta)$

تعریف ۱.۴.۲. گوییم تابع $f(z)$ متعلق به رده $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ است هرگاه به‌صورت زیرتعریف شود:

$$f(z) = z^p + \sum_{j=p+۱}^{\infty} a_j z^j \tag{۵۵.۲}$$

تعریف ۲.۴.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ رده‌ای از توابع تحلیلی باشد آنگاه عملگر سالاگان را به صورت زیرتعریف

می‌کنیم:

$$D^{\circ} f(z) = f(z),$$
$$D^{1} f(z) = Df(z) = \frac{z}{p} f'(z) = z^p + \sum_{j=p+1}^{\infty} (\frac{j}{p}) a_j z^j,$$
$$\vdots$$
$$D^n f(z) = D(D^{n-1} f(z)) = z^p + \sum_{j=p+1}^{\infty} (\frac{j}{p}^n) a_j z^j.$$

تعریف ۳.۴.۲. فرض کنید $\mathcal{N}(m,n,\alpha,\beta)$ زیر رده‌ای از$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ شامل تابع $f(z)$ باشد در این‌صورت نامساوی زیر برقراراست:

$$Re\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\} > \beta\left|\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - 1\right| + \alpha \quad z \in U.$$

برای بعضی $0 \leq \alpha < 1$ ، $\beta \geq 0$ ، $m \in \mathbb{N}$ ، $n \in \mathbb{N}_0$.

۱.۴.۲ نامساوی ضرایب برای رده های $\mathcal{N}(m,n,\alpha,\beta)$

قضیه ۴.۴.۲. اگر $f(z) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ و در شرط زیر صدق کند

$$\sum_{j=2}^{\infty} \psi_P(m,n,j,\alpha,\beta) \mid a_j \mid \leq 2(1-\alpha) \tag{۵۶.۲}$$

به طوری‌که

$$\psi_P(m,n,j,\alpha,\beta) = \left|(1+\alpha)(\frac{j}{p})^n - (\frac{j}{p})^m\right| + \left((1-\alpha)(\frac{j}{p})^n + (\frac{j}{p})^m\right) + 2\beta\left|(\frac{j}{p})^m - (\frac{j}{p})^n\right|$$

برای بعضی از α ، $\beta \geq 0$ ، $m \in \mathbb{N}$ و $n \in \mathbb{N}_0$. آنگاه $f(z) \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}(m,n,\alpha,\beta)$

برهان. فرض کنید که رابطه (۵۶.۲) برای α که $0 \leq \alpha < 1$ ، $\beta \geq 0$ ، $m \in \mathbb{N}$ ، $n \in \mathbb{N}_0$ درست باشد. با به کاربردن $Rew > \alpha$ داریم:

$$\mid 1 - \alpha + w \mid > \mid 1 + \alpha - w \mid$$

کافی است که نشان دهیم:

$$\left|(1-\alpha)D^n f(z) + D^m f(z) - \beta e^{i\theta} \mid D^m f(z) - D^n f(z) \mid\right| - \left|(1+\alpha)D^n f(z) - D^m f(z) + \beta e^{i\theta} \mid D^m f(z) - D^n f(z) \mid\right| > 0 \tag{۵۷.۲}$$

با جایگذاری کردن $D^n f(z)$ و $D^m f(z)$ در رابطه (۵۷.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
&\Big|(۱-\alpha)D^n f(z)+D^m f(z)-\beta e^{i\theta}\mid D^m f(z)-D^n f(z)\mid\Big|\\
&\quad-\Big|(۱+\alpha)D^n f(z)-D^m f(z)+\beta e^{i\theta}\mid D^m f(z)-D^n f(z)\mid\Big|\\
&\quad=\Bigg|(۲-\alpha)z^p+\sum_{j=p+۱}^{\infty}\left[(۱-\alpha)\left(\frac{j}{p}\right)^n+\left(\frac{j}{p}\right)^m\right]a_j z^j\\
&\quad-\beta e^{i\theta}\left|\sum_{j=p+۱}^{\infty}\left[\left(\frac{j}{p}\right)^m-\left(\frac{j}{p}\right)^n\right]a_j z^j\right|\Bigg|\\
&\quad-\Bigg|\alpha z^p+\sum_{j=p+۱}^{\infty}\left[(۱+\alpha)\left(\frac{j}{p}\right)^n-\left(\frac{j}{p}\right)^m\right]a_j z^j\\
&\quad+\beta e^{i\theta}\left|\sum_{j=p+۱}^{\infty}\left[\left(\frac{j}{p}\right)^m-\left(\frac{j}{p}\right)^n\right]a_j z^j\right|\Bigg|\\
&\quad\geq(۲-\alpha)\mid z\mid^p-\sum_{j=p+۱}^{\infty}\left|(۱-\alpha)\left(\frac{j}{p}\right)^n+\left(\frac{j}{p}\right)^m\right|\mid a_j\mid\mid z\mid^j\\
&\quad-\beta\mid e^{i\theta}\mid\sum_{j=p+۱}^{\infty}\left|\left(\frac{j}{p}\right)^m-\left(\frac{j}{p}\right)^n\right|\mid a_j\mid\mid z\mid^j\\
&\quad-\alpha\mid z\mid^p-\sum_{j=p+۱}^{\infty}\left|(۱+\alpha)\left(\frac{j}{p}\right)^n-\left(\frac{j}{p}\right)^m\right|\mid a_j\mid\mid z\mid^j\\
&\quad-\beta\mid e^{i\theta}\mid\sum_{j=p+۱}^{\infty}\left|\left(\frac{j}{p}\right)^m-\left(\frac{j}{p}\right)^n\right|\mid a_j\mid\mid z\mid^j\\
&\quad\geq۲(۱-\alpha)-\sum_{j=p+۱}^{\infty}\Bigg[\left|(۱+\alpha)\left(\frac{j}{p}\right)^n-\left(\frac{j}{p}\right)^m\right|\\
&\quad+\left((۱-\alpha)\left(\frac{j}{p}\right)^n+\left(\frac{j}{p}\right)^m\right)+۲\beta\left|\left(\frac{j}{p}\right)^m-\left(\frac{j}{p}\right)^n\right|\Bigg]\mid a_j\mid\geq ۰
\end{aligned}$$

□

مثال ۵.۴.۲. فرض کنید تابع $f(z)$ به صورت زیر باشد:

$$f(z)=z^p+\sum_{j=p+۱}^{\infty}\frac{۲(p+۱+\delta)(۱-\alpha)\epsilon_j}{(j+\delta)(j+۱+\delta)\psi_p(m,n,j,\alpha,\beta)}z^j$$

آنگاه تابع فوق برای $\delta>-p-۱$، $۰\leq\alpha<۱$، $\beta\geq۰$، $\epsilon_j\in\mathbb{C}$ و $\mid\epsilon_j\mid=۱$ متعلق به رده‌ی $\mathcal{N}_p(m,n,\alpha,\beta)$ است.

۲.۴.۲ رابطه $\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta)$

درقضیه قبل مشاهده کردیم که زیر رده‌ی $\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta)$ شامل تابع

$f(z)\in\mathcal{A}_p$است که تیلور- مکلورن برای رده‌ی$\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta)$ نامساوی ضرایب بیان نمود.

قضیه ۶.۴.۲. اگر $f(z)\in\mathcal{A_P}$ آنگاه $\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta_۲)\subset\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta_۱)$ برای بعضی $\beta_۱$ و $\beta_۲$ ، $۰\leq\beta_۱\leq\beta_۲$

برهان. برای $۰\leq\beta_۱\leq\beta_۲$ داریم:

$$\sum_{j=p+۱}^{\infty}\psi_p(m,n,j,\alpha,\beta_۱)\mid a_j\mid\leq\sum_{j=p+۱}^{\infty}\psi_p(m,n,j,\alpha,\beta_۲)\mid a_j\mid$$

بنابراین اگر $f(z)\in\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta_۲)$ آنگاه $f(z)\in\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta_۱)$

داریم:

$$\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta_۲)\subset\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta_۱)$$

□

قضیه ۷.۴.۲. فرض کنید $f_p(z)=z^p$ و

$$f_j(z)=z^p+\frac{۲(۱-\alpha)\epsilon_j}{\psi_p(m,n,j,\alpha,\beta)}z^j\qquad(j=p+۱,p+۲,...\mid\epsilon_j\mid=۱)\qquad(۵۸.۲)$$

آنگاه $f\in\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta)$ اگر و تنها اگر به صورت زیرباشد:

$$f(z)=\lambda_pf_p(z)+\sum_{j=p+۱}^{\infty}\lambda_jf_j(z)$$

به طوری‌که $\lambda_j>۰$ و $\lambda_p=۱-\sum_{j=p+۱}^{\infty}\lambda_j$.

برهان. فرض کنیم

$$f(z)=\lambda_pf_p(z)+\sum_{j=p+۱}^{\infty}\lambda_jf_j(z)=z^p+\sum_{j=p+۱}^{\infty}\lambda_j\frac{۲(۱-\alpha)\epsilon_j}{\psi_p(m,n,j,\alpha,\beta)}z^j$$

در این‌صورت داریم

$$\sum_{j=p+1}^{\infty}\psi_p(m,n,j,\alpha,\beta)\left|\frac{2(1-\alpha)\epsilon_j}{\psi_p(m,n,j,\alpha,\beta)}\lambda_j\right| = \sum_{j=p+1}^{\infty}2(1-\alpha)\lambda_j = 2(1-\alpha)\sum_{j=p+1}^{\infty}\lambda_j$$
$$= 2(1-\alpha)(1-\lambda_p) \leq 2(1-\alpha)$$

بنابراین $f(z)\in\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta_1)$

عکس: فرض کنیم $f(z)\in\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta_1)$ از آنجایی‌که

$$|\, a_j \,| \leq \frac{2(1-\alpha)}{\psi_p(m,n,j,\alpha,\beta)} \qquad (j=p+1,p+2,\cdots),$$

با جایگذاری داریم:

$$\lambda_j = \frac{\psi_p(m,n,j,\alpha,\beta)}{2(1-\alpha)\epsilon_j}a_j \qquad (|\,\epsilon_j\,|=1)$$

و

$$\lambda_p = 1-\sum_{j=p+1}^{\infty}\lambda_j$$

لذا

$$f(z)=\lambda_p f_p(z)+\sum_{j=p+1}^{\infty}\lambda_j f_j(z).$$

□

نتیجه ۸.۴.۲. توابع $f_p(z)=z^p$ و

$$f_j(z)=z^p+\frac{2(1-\alpha)\epsilon_j}{\psi_p(m,n,j,\alpha,\beta)}z^j \qquad (j=p+1,p+2,\ldots\,|\,\epsilon_j\,|=1) \tag{۵۹.۲}$$

نقاط بحرانی رده $\widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta_1)$ هستند.

۳.۴.۲ زیرترتیب

قضیه ۹.۴.۲. **(زیرترتیب لیتلوود[۲])** اگر f و g در U تحلیلی و $f\prec g$ انگاه برای هر $\mu>0$ و $z=re^{i\theta}(0<r<1)$ داریم

$$\int_0^{2\pi}|\, f(z)\,|^{\mu}\, d\theta \leq \int_0^{2\pi}|\, g(z)\,|^{\mu}\, d\theta$$

برای اثبات قضیه ۱۰.۴.۲ ازاین قضیه استفاده خواهیم کرد.

[۲] Littlewood

قضیه ۱۰.۴.۲. فرض کنید $f(z) \in \widetilde{\mathcal{N}}(m,n,\alpha,\beta_1)$ و $f_j(z)$ در (۵۸.۲)تعریف شده، اگرتابع تحلیلی $w(z)$ به‌صورت زیر باشد:

$$\{w(z)\}^{j-p} = \frac{\psi_p\left(m,n,j,\alpha,\beta\right)}{2\left(1-\alpha\right)\epsilon_j} \sum_{j=p+1}^{\infty} a_j z^{j-p} \tag{۶۰.۲}$$

آنگاه برای $z = re^{i\theta}$ و $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \mid f\left(re^{i\theta}\right) \mid^{\mu} d\theta \leq \int_0^{2\pi} \mid f_j\left(re^{i\theta}\right) \mid^{\mu} d\theta \qquad (\mu > 0)$$

برهان. باید نشان دهیم که:

$$\int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{j=p+1}^{\infty} a_j z^{j-p} \right|^{\mu} d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| 1 + \frac{2\left(1-\alpha\right)\epsilon_j}{\psi_p\left(m,n,j,\alpha,\beta\right)} z^{j-p} \right|^{\mu} d\theta$$

بابه کاربردن قضیه زیرترتیب لیتلوود، کافی است نشان دهیم که:

$$1 + \sum_{j=p+1}^{\infty} a_j z^{j-p} \prec 1 + \frac{2\left(1-\alpha\right)\epsilon_j}{\psi_p\left(m,n,j,\alpha,\beta\right)} z^{j-p}$$

باقرار دادن

$$1 + \sum_{j=p+1}^{\infty} a_j z^{j-p} = 1 + \frac{2\left(1-\alpha\right)\epsilon_j}{\psi_p\left(m,n,j,\alpha,\beta\right)} \{w(z)\}^{j-p}$$

داریم:

$$\{w(z)\}^{j-p} = \frac{\psi_p\left(m,n,j,\alpha,\beta\right)}{2\left(1-\alpha\right)\epsilon_j} \sum_{j=p+1}^{\infty} a_j z^{j-p}$$

که $w\left(0\right) = 0$. بنابراین طبق رابطه (۵۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \mid \{w(z)\}^{j-p} \mid &= \left| \frac{\psi_p\left(m,n,j,\alpha,\beta\right)}{۲\left(۱-\alpha\right)\epsilon_j} \sum_{j=p+۱}^{\infty} a_j z^{j-p} \right| \\ &\leq \frac{\psi_p\left(m,n,j,\alpha,\beta\right)}{۲\left(۱-\alpha\right)\mid \epsilon_j \mid} \sum_{j=p+۱}^{\infty} \mid a_j \mid\mid z \mid^{j-p} \\ &\leq \mid z \mid < ۱. \end{aligned}$$

اثبات قضیه کامل شد.

□

۵.۲ ردهی $\mathcal{M}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$ و $\mathcal{N}_{m,n}(\alpha,\beta)$

تعریف ۱.۵.۲. گوییم تابع تحلیلی $f(z)$ متعلق به رده $\mathcal{N}_{m,n}(\alpha,\beta)$ است هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$Re\left\{\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)}\right\} > \beta\left|\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - ۱\right| + \alpha \quad z \in U$$

برای بعضی $۰ \leq \alpha < ۱$، $\beta \geq ۰$، $m \in \mathbb{N}$، $n \in \mathbb{N}_۰$.

تعریف ۲.۵.۲. گوییم تابع تحلیلی $f(z)$ متعلق به رده $\mathcal{M}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$ هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$f(z) \in \mathcal{M}^s_{m,n}(\alpha,\beta) \Longleftrightarrow D^s f(z) \in \mathcal{N}_{m,n}(\alpha,\beta)$$

اگر در تعریف ۲.۵.۲ قرار دهیم $s = ۰$، انگاه $\mathcal{M}^۰_{m,n}(\alpha,\beta) \equiv \mathcal{N}_{m,n}(\alpha,\beta)$. بعلاوه رده های خاص زیر را داریم:

$$\mathcal{N}_{۱,۰}(\alpha,۰) = \mathcal{S}^*(\alpha) \text{ و } \mathcal{N}_{۲,۰}(\alpha,۰) = \mathcal{K}(\alpha)$$

که توسط سیلورمن مطالعه و بررسی شده اند.

در این بخش نامساوی ضرایب را برای تابع $f(z)$ در ردهی $\mathcal{N}_{m,n}(\alpha,\beta)$ و $\mathcal{M}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$ معرفی میکنیم که شامل دو زیررده $\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ و $\tilde{\mathcal{M}}^s_{\alpha,\beta}(\alpha,\beta)$است .

قضیه ۳.۵.۲. فرض کنید $f(z) \in \mathcal{A}$ و در شرط زیر صدق کند:

$$\sum_{j=۲}^{\infty} \Psi(m,n,j,\alpha,\beta) \mid a_j \mid \leq ۲(۱-\alpha) \tag{۶۱.۲}$$

به‌طوری که

$$\Psi(m,n,j,\alpha,\beta) = \mid j^m - j^n - \alpha j^n \mid + (j^m + j^n - \alpha j^n) + ۲\beta \mid j^m - j^n \mid \tag{۶۲.۲}$$

برای بعضی α که $۰ \leq \alpha < ۱$، $\beta \geq ۰$، $m \in \mathbb{N}$، $n \in \mathbb{N}_۰$، انگاه $f(z) \in \mathcal{N}_{m,n}(\alpha,\beta)$

برهان. فرض کنیم رابطه(۶۱.۲) برای بعضی α که $۰ \leq \alpha < ۱$، $\beta \geq ۰$، $m \in \mathbb{N}$، $n \in \mathbb{N}_۰$ درست باشد. برای $f(z) \in \mathcal{A}$ تابع $F(z)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(z) = \frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - \beta\left|\frac{D^m f(z)}{D^n f(z)} - ۱\right| - \alpha.$$

کافی است نشان دهیم:

$$\left|\frac{F(z)-۱}{F(z)+۱}\right| < ۱ \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

توجه کنیدکه:

$$\left|\frac{F(z)-۱}{F(z)+۱}\right| = \left|\frac{D^m f(z) - \beta e^{i\theta} \mid D^m f(z) - D^n f(z) \mid - \alpha D^n f(z) - D^n f(z)}{D^m f(z) - \beta e^{i\theta} \mid D^m f(z) - D^n f(z) \mid - \alpha D^n f(z) + D^n f(z)}\right|$$

$$= \left|\frac{-\alpha + \sum_{j=۲}^{\infty}(j^m - j^n - \alpha j^n) a_j z^{j-۱} - \beta e^{i\theta} \mid \sum_{j=۲}^{\infty}(j^m - j^n) a_j z^{j-۱} \mid}{(۲-\alpha) + \sum_{j=۲}^{\infty}(j^m + j^n - \alpha j^n) a_j z^{j-۱} - \beta e^{i\theta} \mid \sum_{j=۲}^{\infty}(j^m - j^n) a_j z^{j-۱} \mid}\right|$$

$$\leq \frac{\alpha + \sum_{j=۲}^{\infty} \mid j^m - j^n - \alpha j^n \mid\mid a_j \mid\mid z \mid^{j-۱} + \beta \mid e \mid^{i\theta} \mid \sum_{j=۲}^{\infty} \mid j^m - j^n \mid\mid a_j \mid\mid z \mid^{j-۱}}{(۲-\alpha) - \sum_{j=۲}^{\infty}(j^m + j^n - \alpha j^n) \mid a_j \mid\mid z \mid^{j-۱} - \beta \mid e \mid^{i\theta} \sum_{j=۲}^{\infty} \mid j^m - j^n \mid\mid a_j \mid\mid z \mid^{j-۱}}$$

$$\leq \frac{\alpha + \sum_{j=۲}^{\infty} \mid j^m - j^n - \alpha j^n \mid\mid a_j \mid + \beta \sum_{j=۲}^{\infty} \mid j^m - j^n \mid\mid a_j \mid}{(۲-\alpha) - \sum_{j=۲}^{\infty}(j^m + j^n - \alpha j^n) \mid a_j \mid - \beta \sum_{j=۲}^{\infty} \mid j^m - j^n \mid\mid a_j \mid}$$

نامساوی فوق کراندار است اگر

$$\alpha + \sum_{j=۲}^{\infty} \mid j^m - j^n - \alpha j^n \mid\mid a_j \mid + \beta \sum_{j=۲}^{\infty} \mid j^m - j^n \mid\mid a_j \mid$$
$$\leq (۲-\alpha) - \sum_{j=۲}^{\infty}(j^m + j^n - \alpha j^n) \mid a_j \mid - \beta \sum_{j=۲}^{\infty} \mid j^m - j^n \mid\mid a_j \mid$$

که مساوی با شرط (۶۱.۲) است لذا اثبات کامل شد. □

قضیه ۴.۵.۲. فرض کنید $f(z)\in\mathcal{A}$ و

$$\sum_{j=۲}^{\infty} j^s\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)\mid a_j\mid\leq ۲(۱-\alpha), \tag{۶۳.۲}$$

که $\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)$ در (۶۲.۲) داده شده برای بعضی α که $۰\leq\alpha<۱$، $\beta\geq ۰$، $m\in\mathbb{N}$ و $n\in\mathbb{N}_۰$، آنگاه $f(z)\in\mathcal{M}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$.

برهان. داریم

$$f(z)\in\mathcal{M}^s_{m,n}(\alpha,\beta)\Longleftrightarrow D^sf(z)\in\mathcal{N}_{m,n}(\alpha,\beta),$$

با جایگذاری a_j با j^sa_j در قضیه ۳.۵.۲ اثبات کامل است. □

مثال ۵.۵.۲. اگرتابع $f(z)$ به‌صورت زیرتعریف شود:

$$f(z)=z+\sum_{j=۲}^{\infty}\frac{۲(۲+\delta)(۱-\alpha)\epsilon_j}{(j+\delta)(j+۱+\delta)\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)}z^j=z+\sum_{j=۲}^{\infty}A_jz^j$$

با

$$A_j=\frac{۲(۲+\delta)(۱-\alpha)\epsilon_j}{(j+\delta)(j+۱+\delta)\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)}$$

برای $\delta>-۲$ ، $۰\leq\alpha<۱$، $\beta\geq۰$، $\epsilon_j\in\mathbb{C}$ و $\mid\epsilon_j\mid=۱$ ، متعلق به رده $\mathcal{N}_{m,n}(\alpha,\beta)$ است. می‌دانیم که:

$$\sum_{j=۲}^{\infty}\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)\mid A_j\mid\leq\sum_{j=۲}^{\infty}\frac{۲(۲+\delta)(۱-\alpha)}{(j+\delta)(j+۱+\delta)}$$
$$=\sum ۲(۲+\delta)(۱-\alpha)\sum_{j=۲}^{\infty}\left(\frac{۱}{j+\delta}-\frac{۱}{j+۱+\delta}\right)=۲(۱-\alpha).$$

مثال ۶.۵.۲. اگرتابع $f(z)$ به‌صورت زیرتعریف شود:

$$f(z)=z+\sum_{j=۲}^{\infty}\frac{۲(۲+\delta)(۱-\alpha)\epsilon_j}{j^s(j+\delta)(j+۱+\delta)\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)}z^j=z+\sum_{j=۲}^{\infty}B_jz^j$$

با

$$B_j=\sum_{j=۲}^{\infty}\frac{۲(۲+\delta)(۱-\alpha)\epsilon_j}{j^s(j+\delta)(j+۱+\delta)\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)}$$

برای $\delta>-۲$، $۰\leq\alpha<۱$، $\beta\geq۰$، $\epsilon_j\in\mathbb{C}$ و $\mid\epsilon_j\mid=۱$ ، متعلق به رده $\mathcal{M}_{m,n}(\alpha,\beta)$ است. از تابع $f(z)$ نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j=۲}^{\infty}j^s\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)\mid B_j\mid\leq\sum_{j=۲}^{\infty}\frac{۲(۲+\delta)(۱-\alpha)}{(j+\delta)(j+۱+\delta)}=۲(۱-\alpha).$$

۱.۵.۲ روابط $\tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$ و $\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$

درقضیه ۳.۵.۲ و ۴.۵.۲ موارد زیر بررسی می‌شود:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta) \subset \mathcal{N}_{m,n}(\alpha,\beta) \qquad \tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha,\beta) \subset \mathcal{M}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$$

که عبارتند از:

$$f(z) = z + \sum_{j=۲}^{\infty} a_j z^j \tag{۶۴.۲}$$

نامساوی ضرایب روابط (۶۱.۲) و(۶۳.۲) به‌ترتیب در رده‌های $\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ و $\tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$ صدق می‌کند.

قضیه ۷.۵.۲.

$$\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta_۲) \subset \tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta_۱)$$

برای بعضی $\beta_۱$ و $\beta_۲$ و $\circ \le \beta_۱ \le \beta_۲$.

برهان. برای بعضی $\beta_۱$ و $\beta_۲$ ، $\circ \le \beta_۱ \le \beta_۲$ داریم:

$$\sum_{j=۲}^{\infty} \Psi(m,n,j,\alpha,\beta_۱)a_j \le \sum_{j=۲}^{\infty} \Psi(m,n,j,\alpha,\beta_۲)a_j \tag{۶۵.۲}$$

بنابراین اگر $f(z) \in \tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta_۲)$ آنگاه $f(z) \in \tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta_۱)$. □

با استفاده از قضیه‌ی ۷.۵.۲ نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۸.۵.۲.

$$\tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha,\beta_۲) \subset \tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha,\beta_۱) \tag{۶۶.۲}$$

برای بعضی $\beta_۱$ و $\beta_۲$، $\circ \le \beta_۱ \le \beta_۲$.

۲.۵.۲ نامساوی پیچش

لم ۹.۵.۲. اگر$f(z) \in \tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ آنگاه

$$\sum_{j=p+۱}^{\infty} a_j \le \frac{۲(۱-\alpha) - \sum_{j=۲}^{\infty} \Psi(m,n,j,\alpha,\beta)a_j}{\Psi(m,n,p+۱,\alpha,\beta)}$$

برهان. طبق قضیه ۳.۵.۲ داریم:

$$\sum_{j=p+۱}^{\infty} \Psi(m,n,j,\alpha,\beta)a_j \le ۲(۱-\alpha) - \sum_{j=۲}^{p} \Psi(m,n,j,\alpha,\beta)a_j.$$

بوضوح $\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)$ برای j تابعی افزایشی است.لذا طبق قضیه ۴.۵.۲ و لم۹.۵.۲ داریم:

$$\Psi(m,n,p+۱,\alpha,\beta)\sum_{j=p+۱}^{\infty}a_j\leq ۲(۱-\alpha)-\sum_{j=۲}^{p}\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)a_j.$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{j=p+۱}^{\infty}a_j\leq\frac{۲(۱-\alpha)-\sum_{j=۲}^{p}\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)a_j}{\Psi(m,n,p+۱,\alpha,\beta)}=A_j$$

□

لم ۱۰.۵.۲. اگر$f(z)\in\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ آنگاه

$$\sum_{j=p+۱}^{\infty}ja_j\leq\frac{۲(۱-\alpha)-\sum_{j=۲}^{p}\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)a_j}{\Psi(m-۱,n-۱,p+۱,\alpha,\beta)}=B_j.$$

نتیجه ۱۱.۵.۲. اگر$f(z)\in\tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$ آنگاه

$$\sum_{j=p+۱}^{\infty}a_j\leq\frac{۲(۱-\alpha)-\sum_{j=۲}^{p}j^s\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)a_j}{(p+۱)^s\Psi(m,n,p+۱,\alpha,\beta)}=C_j.$$

و

$$\sum_{j=p+۱}^{\infty}ja_j\leq\frac{۲(۱-\alpha)-\sum_{j=۲}^{p}j^s\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)a_j}{(p+۱)^s\Psi(m-۱,n-۱,p+۱,\alpha,\beta)}=D_j.$$

قضیه ۱۲.۵.۲. اگر $f(z)\in\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ ، آنگاه برای $|z|=r<۱$

$$r-\sum_{j=۲}^{p}a_j\mid z\mid^j-A_jr^{p+۱}\leq\mid f(z)\mid\leq r+\sum_{j=۲}^{p}a_j\mid z\mid^j+A_jr^{p+۱}$$

و

$$۱-\sum_{j=۲}^{p}ja_j\mid z\mid^{j-۱}-B_jr^p\leq\mid f'(z)\mid\leq ۱+\sum_{j=۲}^{p}ja_j\mid z\mid^j+B_jr^p$$

که A_j و B_j به ترتیب در لم‌های ۹.۵.۲ و ۱۰.۵.۲ داده شده‌اند.

برهان. فرض کنیم تابع $f(z)$ به‌صورت (۶۴.۲) داده شده باشد. برای $|z|=r<۱$ طبق لم ۹.۵.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\mid f(z)\mid&\leq\mid z\mid+\sum_{j=۲}^{p}a_j\mid z\mid^j+\sum_{j=p+۱}^{\infty}a_j\mid z^j\mid\\&\leq\mid z\mid+\sum_{j=۲}^{p}a_j\mid z\mid^j+\mid z\mid^{p+۱}\sum_{j=p+۱}^{\infty}a_j\\&\leq r+\sum_{j=۲}^{p}a_j\mid z\mid^j+A_jr^{p+۱}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} | f(z) | &\geq | z | - \sum_{j=2}^{p} a_j | z |^j - \sum_{j=p+1}^{\infty} a_j | z^j | \\ &\geq | z | - \sum_{j=2}^{p} a_j | z |^j - | z |^{p+1} \sum_{j=p+1}^{\infty} a_j \\ &\geq r - \sum_{j=2}^{p} a_j | z |^j - A_j r^{p+1} \end{aligned}$$

بعلاوه برای $| z |= r < 1$ طبق لم ۱۰.۵.۲ داریم:

$$\begin{aligned} | f'(z) | &\leq 1 + \sum_{j=2}^{p} j a_j | z |^{j-1} + \sum_{j=p+1}^{\infty} j a_j | z |^{j-1} \\ &\leq 1 + \sum_{j=2}^{p} j a_j | z |^{j-1} + | z |^p \sum_{j=p+1}^{\infty} j a_j \\ &\leq 1 + \sum_{j=2}^{p} j a_j | z |^{j-1} + B_j r^p \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} | f'(z) | &\geq 1 - \sum_{j=2}^{p} j a_j | z |^{j-1} - \sum_{j=p+1}^{\infty} j a_j | z |^{j-1} \\ &\geq 1 - \sum_{j=2}^{p} j a_j | z |^{j-1} - | z |^p \sum_{j=p+1}^{\infty} j a_j \\ &\geq 1 - \sum_{j=2}^{p} j a_j | z |^{j-1} - B_j r^p \end{aligned}$$

اثبات قضیه کامل شد. □

قضیه ۱۳.۵.۲. اگر $f(z) \in \tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha, \beta)$ آنگاه

$$r - \sum_{j=2}^{p} a_j | z |^j - C_j r^{p+1} \leq | f(z) | \leq r + \sum_{j=2}^{p} a_j | z |^j + C_j r^{p+1}$$

و

$$1 - \sum_{j=2}^{p} j a_j | z |^{j-1} - D_j r^p \leq | f'(z) | \leq 1 + \sum_{j=2}^{p} j a_j | z |^j + D_j r^p$$

که C_j و D_j طبق نتیجه ۱۱.۵.۲ داده شده‌اند.

برهان. مشابه اثبات در قضیه۱۲.۵.۲ و نتیجه ۱۱.۵.۲ نتیجه را به‌دست می‌آوریم. □

با قراردادن $p = 1$ در قضایا ۱۲.۵.۲ و ۱۳.۵.۲ نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم:

نتیجه ۱۴.۵.۲. اگر $f(z)\in \tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ آنگاه برای $|z|=r<۱$

$$r-\frac{۲(۱-\alpha)}{\Psi(m,n,۲,\alpha,\beta)}r^{۲}\le |f(z)|\le r+\frac{۲(۱-\alpha)}{\Psi(m,n,۲,\alpha,\beta)}r^{۲}$$

و

$$۱-\frac{۲(۱-\alpha)}{\Psi(m-۱,n-۱,۲,\alpha,\beta)}r\le |f'(z)|\le ۱+\frac{۲(۱-\alpha)}{\Psi(m-۱,n-۱,۲,\alpha,\beta)}r$$

نتیجه ۱۵.۵.۲. اگر $f(z)\in \tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$ آنگاه برای $|z|=r<۱$

$$r-\frac{۲(۱-\alpha)}{۲^s\Psi(m,n,۲,\alpha,\beta)}r^{۲}\le |f(z)|\le r+\frac{۲(۱-\alpha)}{۲^s\Psi(m,n,۲,\alpha,\beta)}r^{۲}$$

و

$$۱-\frac{۲(۱-\alpha)}{۲^s\Psi(m-۱,n-۱,۲,\alpha,\beta)}r\le |f'(z)|\le ۱+\frac{۲(۱-\alpha)}{۲^s\Psi(m-۱,n-۱,۲,\alpha,\beta)}r$$

۳.۵.۲ نقاط بحرانی

تعیین نقاط بحرانی از از توابع تک ارز F ما را قادر به حل بسیاری ازمسائل بحرانی می‌کند. این نقاط بحرانی در رده‌های $\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ و $\tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$ هستند.

قضیه ۱۶.۵.۲. فرض کنید $f_۱(z)=z$ و

$$f_j(z)=z+\frac{۲(۱-\alpha)}{\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)}z^j \qquad (j=۲,۳,\ldots)$$

که $\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)$ طبق ۶۲.۲ تعریف می‌شود، آنگاه $f\in \tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ اگر و فقط اگر تابع $f(z)$ به‌صورت زیر بیان شود:

$$f(z)=\sum_{j=۱}^{\infty}\lambda_j f_j(z),$$

که $\lambda_j>۰$ و $\sum_{j=۱}^{\infty}\lambda_j=۱$.

برهان. فرض کنیم

$$f(z)=\sum_{j=۱}^{\infty}\lambda_j f_j(z)=z+\sum_{j=۲}^{\infty}\lambda_j\frac{۲(۱-\alpha)}{\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)}z^j.$$

در این‌صورت داریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=۲}^{\infty}\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)\frac{۲(۱-\alpha)}{\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)}\lambda_j\\ =&\sum_{j=۲}^{\infty}۲(۱-\alpha)\lambda_j=۲(۱-\alpha)\sum_{j=۲}^{\infty}\lambda_j=۲(۱-\alpha)(۱-\lambda_۱)<۲(۱-\alpha)\end{aligned}$$

لذا طبق تعریف رده‌ی $\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ داریم $f(z) \in \tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$.

عکس: فرض کنیم $f \in \tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$. از آنجایی‌که

$$a_j \leq \frac{۲(۱-\alpha)}{\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)} \qquad (j=۲,۳,\ldots),$$

با جایگذاری داریم:

$$\lambda_j = \frac{\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)}{۲(۱-\alpha)} a_j$$

و

$$\lambda_۱ = ۱ - \sum_{j=۲}^{\infty} \lambda_j$$

بنابراین

$$f(z) = \sum_{j=۱}^{\infty} \lambda_j f_j(z).$$

□

نتیجه ۱۷.۵.۲. فرض کنید $g_۱(z) = (z)$ و

$$g_j(z) = z + \frac{۲(۱-\alpha)}{j^s \Psi(m,n,j,\alpha,\beta)} z^j \qquad (j=۲,۳,\ldots)$$

آنگاه $g \in \tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$ اگر و فقط اگر به‌صورت زیر باشد:

$$g(z) = \sum_{j=۱}^{\infty} \lambda_j g_j(z),$$

که $\lambda_j > ۰$ و $\sum_{j=۱}^{\infty} \lambda_j = ۱$

نتیجه ۱۸.۵.۲. توابع $f_۱(z) = z$ و

$$f_j(z) = z + \frac{۲(۱-\alpha)}{\Psi(m,n,j,\alpha,\beta)} z^j \qquad (j=۲,۳,\ldots).$$

نقاط بحرانی رده $\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ هستند.

نتیجه ۱۹.۵.۲. توابع $g_۱(z) = z$ و

$$g_j(z) = z + \frac{۲(۱-\alpha)}{j^s \Psi(m,n,j,\alpha,\beta)} z^j \qquad (j=۲,۳,\ldots).$$

نقاط بحرانی رده $\tilde{\mathcal{M}}^s_{m,n}(\alpha,\beta)$ هستند.

۴.۵.۲ نامساوی میانگین انتگرال

مشتق کسری تعاریف زیر، درمراجع [۱۱] و [۱۸] تعریف و بررسی شده و ما از این تعاریف استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲۰.۵.۲. مشتق کسری ازمرتبه λ برای تابع $f(z)$ بهصورت زیر تعریف میکنیم:

$$D_z^{\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{\lambda}} d\xi \qquad (0 \le \lambda < 1) \tag{۶۷.۲}$$

که تابع $f(z)$ تحلیلی، و درناحیه مختلط z به مبدا وصل میشود.

تعریف ۲۱.۵.۲. با داشتن فرضیات تعریف۲۰.۵.۲، مشتق کسری ازمرتبه $(p+\lambda)$ برای تابع $f(z)$ به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$D_z^{p+\lambda} f(z) = \frac{d^p}{dz^p} D_z^{\lambda} f(z)$$

که $0 \le \lambda < 1$ و $p \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ و با توجه به تعریف ۲۰.۵.۲ داریم:

$$D_z^{\lambda} z^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\lambda+1)} z^{k-\lambda} \qquad (0 \le \lambda < 1).$$

بعلاوه ما به بررسی مفهوم زیرترتیب بین توابع تحلیلی و قضیه زیرترتیب لیتلوود [۷] میپردازیم.

قضیه ۲۲.۵.۲. فرض کنید تابع تحلیلی $f(z)$ طبق (۶۴.۲) و متعلق به رده $\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ باشد و

$$\sum_{j=2}^{\infty} (j-p)_{p+1} a_j \le \frac{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)\Gamma(3-\lambda-p)}{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+1-\lambda-p)\Gamma(2-p)}$$

برای بعضی $0 \le p \le 2$ ، $0 \le \lambda < 1$

به طوریکه نماد $(j-p)_{p+1}$ و تابع $f_k(z)$ بهصورت زیر تعریف میشوند:

$$(j-p)_{p+1} = (j-p)(j-p+1)\ldots j.$$

$$f_k(z) = z + \frac{2(1-\alpha)}{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)} z^k \qquad (k \ge 2). \tag{۶۸.۲}$$

اگر تابع تحلیلی زیر موجود باشد:

$$\{w(z)\}^{k-1} = \frac{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+1-\lambda-p)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)} \times \sum_{j=2}^{\infty} (j-p)_{p+1} \frac{\Gamma(j-p)}{\Gamma(j+1-\lambda-p)} a_j z^{j-1},$$

آنگاه برای $z = re^{i\theta}$ که $(\circ < r < ۱)$ و $\mu > \circ$ داریم:

$$\int_\circ^{۲\pi} \mid D_z^{p+\lambda} f(z) \mid^\mu d\theta \leq \int_\circ^{۲\pi} \mid D_z^{p+\lambda} f_k(z) \mid^\mu d\theta \qquad (۶۹.۲)$$

برهان. طبق مشتق کسری رابطه (۲۱.۵.۲) در تعریف ۲۱.۵.۲ داریم:

$$\begin{aligned} D_z^{p+\lambda} f(z) &= \frac{z^{۱-\lambda-p}}{\Gamma(۱-\lambda-p)} \left\{ ۱ + \sum_{j=۲}^{\infty} \frac{\Gamma(۲-\lambda-p)\Gamma(j+۱)}{\Gamma(j+۱-\lambda-p)} a_j z^{j-۱} \right\} \\ &= \frac{z^{۱-\lambda-p}}{\Gamma(۲-\lambda-p)} \left\{ ۱ + \sum_{j=۲}^{\infty} \Gamma(۲-\lambda-p)(j-p)_{p+۱} \Phi(j) a_j z^{j-۱} \right\} \end{aligned}$$

که

$$\Phi(j) = \frac{\Gamma(j-p)}{\Gamma(j+۱-\lambda-p)}.$$

از آنجایی‌که $\Phi(j)$ تابع نزولی از j است لذا داریم:

$$\circ < \Phi(j) \leq \Phi(۲) = \frac{\Gamma(۲-p)}{\Gamma(۳-\lambda-p)} \qquad (\circ \leq \lambda < ۱ \qquad ; \circ \leq p \leq ۲ \leq j)$$

به طور مشابه طبق روابط (۲۱.۵.۲) و (۹.۴.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$D_z^{p+\lambda} f_k(z) = \frac{z^{۱-\lambda-p}}{\Gamma(۲-\lambda-p)} \left\{ ۱ + \frac{۲(۱-\alpha)\Gamma(۲-\lambda-p)\Gamma(k+۱)}{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+۱-\lambda-p)} z^{k-۱} \right\}$$

برای $z = re^{i\theta}$، $\circ < r < ۱$ کافی است نشان دهیم:

$$\int_\circ^{۲\pi} \left| ۱ + \sum_{j=۲}^{\infty} \Gamma(۲-\lambda-p)(j-p)_{p+۱} \Phi(j) a_j z^{j-۱} \right|^\mu d\theta$$

$$\leq \int_\circ^{۲\pi} \left| ۱ + \frac{۲(۱-\alpha)\Gamma(۲-\lambda-p)\Gamma(k+۱)}{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+۱-\lambda-p)} z^{k-۱} \right|^\mu d\theta \qquad (\mu > \circ).$$

بنابراین با به کاربردن قضیه زیرترتیبی لیتلوود، کافی است نشان دهیم:

$$\begin{aligned} &۱ + \sum_{j=۲}^{\infty} \Gamma(۲-\lambda-p)(j-p)_{p+۱} \Phi(j) a_j z^{j-۱} \\ &\prec ۱ + \frac{۲(۱-\alpha)\Gamma(۲-\lambda-p)\Gamma(k+۱)}{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+۱-\lambda-p)} z^{k-۱}. \end{aligned}$$

با قراردادن

$$\begin{aligned}&1+\sum_{j=2}^{\infty}\Gamma(2-\lambda-p)(j-p)_{p+1}\Phi(j)a_jz^{j-1}\\&=1+\frac{2(1-\alpha)\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(k+1)}{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+1-\lambda-p)}\{w(z)\}^{k-1}\end{aligned}$$

داریم:

$$\{w(z)\}^{k-1}=\frac{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+1-\lambda-p)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)}\sum_{j=2}^{\infty}(j-p)_{p+1}\Phi(j)a_jz^{j-1}$$

لذا با جایگذاری $w(0)=0$ داریم:

$$\begin{aligned}|\,w(z)\,|^{k-1}&=\left|\frac{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+1-\lambda-p)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)}\sum_{j=2}^{\infty}(j-p)_{p+1}\Phi(j)a_jz^{j-1}\right|\\&\le\frac{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+1-\lambda-p)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)}\sum_{j=2}^{\infty}(j-p)_{p+1}\Phi(j)a_j\,|\,z\,|^{j-1}\\&\le|\,z\,|\,\frac{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+1-\lambda-p)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)}\Phi(2)\sum_{j=2}^{\infty}(j-p)_{p+1}a_j\\&=|\,z\,|\,\frac{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+1-\lambda-p)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)}\frac{\Gamma(2-p)}{\Gamma(3-\lambda-p)}\sum_{j=2}^{\infty}(j-p)_{p+1}a_j\\&\le|\,z\,|<1\end{aligned}$$

□

با توجه به فرضیات قضیهی ۲۲.۵.۲ و با قرار دادن $p=0$ در قضیهی ۲۲.۵.۲ نتایج زیر را داریم.

نتیجه ۲۳.۵.۲. فرض کنید تابع تحلیلی $f(z)$ طبق (۶۴.۲) و متعلق به رده $\tilde{\mathcal{N}}_{m,n}(\alpha,\beta)$ است و

$$\sum_{j=2}^{\infty}ja_j\le\frac{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)\Gamma(3-\lambda)}{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+1-\lambda)}$$

برای $0\leqq\lambda<1$. همچنین اگر $f_k(z)$ طبق (۶۸.۲) و تابع تحلیلی $w(z)$ به صورت زیر باشد:

$$\{w(z)\}^{k-1}=\frac{\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+1-\lambda)}{2(1-\alpha)\Gamma(k+1)}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\lambda)}a_jz^{j-1},$$

آنگاه برای $z=re^{i\theta}$ و $0<r<1$ داریم

$$\int_0^{2\pi}|\,D_z^{\lambda}f(z)\,|^{\mu}\,d\theta\le\int_0^{2\pi}|\,D_z^{\lambda}f_k(z)\,|^{\mu}\,d\theta$$

نتیجه ۲۴.۵.۲. فرض کنید تابع تحلیلی $f(z)$ طبق (۶۴.۲) و متعلق به رده $\tilde{\mathcal{M}}^{s}_{m,n}(\alpha,\beta)$ است و

$$\sum_{j=۲}^{\infty}(j-p)_{p+۱}a_j \leq \frac{۲(۱-\alpha)\Gamma(k+۱)\Gamma(۳-\lambda-p)}{k^s\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+۱-\lambda-p)\Gamma(۲-p)}$$

برای بعضی $۰ \leq p \leq ۲$، $۰ \leq \lambda < ۱$. همچنین اگر تابع $g_k(z)$ و تابع تحلیلی $w(z)$ به‌صورت زیر باشند:

$$g_k(z) = z + \frac{۲(۱-\alpha)}{k^s\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)}z^k, \qquad (k \geq ۲). \tag{۷۰.۲}$$

$$\{w(z)\}^{k-۱} = \frac{k^s\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+۱-\lambda-p)}{۲(۱-\alpha)\Gamma(k+۱)} \times \sum_{j=۲}^{\infty}(j-p)_{p+۱}\frac{\Gamma(j-p)}{\Gamma(j+۱-\lambda-p)}a_j z^{j-۱},$$

آنگاه برای $z = re^{i\theta}$ که $(۰ < r < ۱)$ و $\mu > ۰$ داریم:

$$\int_{۰}^{۲\pi} \mid D_z^{p+\lambda}f(z) \mid^{\mu} d\theta \leq \int_{۰}^{۲\pi} \mid D_z^{p+\lambda}g_k(z) \mid^{\mu} d\theta$$

با جایگذاری $p = ۰$ در نتیجه ۲۴.۵.۲ نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۲۵.۵.۲. فرض کنید تابع تحلیلی $f(z)$ طبق (۶۴.۲) و متعلق به رده $\tilde{\mathcal{M}}^{s}_{m,n}(\alpha,\beta)$ است و

$$\sum_{j=۲}^{\infty} ja_j \leq \frac{۲(۱-\alpha)\Gamma(k+۱)\Gamma(۳-\lambda)}{k^s\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+۱-\lambda)}$$

برای بعضی $۰ \leq \lambda < ۱$، همچنین اگر تابع $g_k(z)$ طبق (۷۰.۲) و تابع تحلیلی $w(z)$ به‌صورت زیر باشد:

$$\{w(z)\}^{k-۱} = \frac{k^s\Psi(m,n,k,\alpha,\beta)\Gamma(k+۱-\lambda)}{۲(۱-\alpha)\Gamma(k+۱)}\sum_{j=۲}^{\infty}\frac{\Gamma(j+۱)}{\Gamma(j+۱-\lambda)}a_j z^{j-۱},$$

آنگاه برای $z = re^{i\theta}$ که $(۰ < r < ۱)$ و $\mu > ۰$ داریم:

$$\int_{۰}^{۲\pi} \mid D_z^{\lambda}f(z) \mid^{\mu} d\theta \leq \int_{۰}^{۲\pi} \mid D_z^{\lambda}g_k(z) \mid^{\mu} d\theta.$$

نتیجه گیری:

۱) $\mathcal{N}_۱(m,n,\alpha,\beta) = \mathcal{N}_{m,n}(\alpha,\beta)$ که توسط اکر و اوا [۴] مطالعه شده است.

۲) $\mathcal{N}_۱(۲,۱,\alpha,۰) = \mathcal{K}(\alpha)$ و $\mathcal{N}_۱(۱,۰,\alpha,۰) = \mathcal{S}^*(\alpha)$ که توسط سیلورمن [۱۶]مطالعه شده است.

۳) $\mathcal{N}_{۲,۱}(\alpha,۰) = \mathcal{K}(\alpha)$ و $\mathcal{N}_{۱,۰}(\alpha,۰) = \mathcal{S}^*(\alpha)$ که توسط سیلورمن [۱۶] مطالعه شده است.

مراجع

[1] Al-Oboudi, F. M. (2004). On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2004(27), 1429-1436.

[2] Duren, P. L. (1983). Univalent functions (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 259, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo). Springer-Verlag, 1, 983.

[3] Eker, S. S., Owa, S. (2006, September). New applications of classes of analytic functions involving the Salagean operator. In Proceedings of the International Symposium on Complex Function Theory and Applications (pp. 21-34).

[4] Eker, S. S., Owa, S. (2006, September). New applications of classes of analytic functions involving the Salagean operator. In Proceedings of the International Symposium on Complex Function Theory and Applications (pp. 21-34).

[5] Hallenbeck, D. J., Ruscheweyh, S. (1975). Subordination by convex functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 52(1), 191-195.

[6] Hallenbeck, D. J. (1974). Convex hulls and extreme points of some families of univalent functions. Transactions of the American Mathematical Society, 192, 285-292.

[7] Littlewood, J. E. (1925). On inequalities in the theory of functions. Proceedings of the London Mathematical Society, 2(1), 481-519.

[8] Miller, S. S., Mocanu, P. T. (2000). Differential subordinations: theory and applications. CRC Press.

[9] Mocanu, P., Bulboacă, T., Sălăgean, G. Ş. (1999). Teoria geometrica a functiilor univalente. Casa Cărţii de Ştiinţă.

[10] Oros, G. I. (2005). A class of holomorphic functions defined using a differential operator. General Mathematics, 13(4), 13-18.

[11] Owa, S. (1978). On the distortion theorems. I. Kyungpook Math. J, 18(1), 53-59.

[12] Salagean, G. S. Subclasses of univalent functions, Complex Analysis–Fift Romanian–Finnish Seminar, Part 1 (Bucharest, 1981), 362–372. Lecture Notes in Math, 1013.

[13] Salagean, G. S. (1983). Subclasses of univalent functions. In Complex Analysis—Fifth Romanian-Finnish Seminar (pp. 362-372). Springer Berlin Heidelberg.

[14] Shams, S., Kulkarni, S. R., Jahangiri, J. M. (2004). Classes of uniformly starlike and convex functions. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2004(55), 2959-2961.

[15] Shams, S., Kulkarni, S. R., Jahangiri, J. M. (2004). Classes of uniformly starlike and convex functions. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2004(55), 2959-2961.

[16] Silverman, H. (1975). Univalent functions with negative coefficients. Proceedings of the American Mathematical Society, 51(1), 109-116.

[17] Silverman, H. (1975). Univalent functions with negative coefficients. Proceedings of the American Mathematical Society, 51(1), 109-116.

[18] Srivastava, H. M., Owa, S. (1989). Univalent functions, fractional calculus, and their applications. Ellis Horwood; New York; Toronto: Halsted Press.

[19] Thomas, R., KG, S., Jay, M. J. (2001). Goodman-Ronning-type harmonic univalent functions. Kyungpook Mathematical Journal, 41(1), 45-45.

[20] Thomas, R., KG, S., Jay, M. J. (2001). Goodman-Ronning-type harmonic univalent functions. Kyungpook Mathematical Journal, 41(1), 45-45.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

تابع تحلیلی .... Analytic
تابع تک‌ارز .... Univalent Function
تابع ستاره‌گون .... Starlike Function
تابع محدب .... Convex Fuction
تابع همساز .... Harmonic Fuction
حاصل ضرب هادامارد .... Hadamard Product
عملگر سالاگان .... Salagean Operator
عملگردیفرانسیل .... Differential operator
مختلط .... Complex
مرتبه .... Order

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analytic Function	تابع تحلیلی
Complex	مختلط
Convex Function	تابع محدب
Differential Operator	عملگر دیفرانسیل
Hadamard Product	حاصل ضرب هادامارد
Harmonic Function	تابع همساز
Order	مرتبه
Starlike Function	تابع ستاره‌گون
Salagean Operator	عملگر سالاگان
Univalent Function	تابع تک‌ارز

Aabstract

Salagean operator is defined by:

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1_\lambda f(z) = D_\lambda f(z) = (1-\lambda) f(z) + \lambda z f^{'}(z)$$

$$D^m_\lambda f(z) = D_\lambda (D^{m-1}_\lambda f(z)) \qquad \lambda > 0$$

by using the Salagean oprator on subclasses:
$S_n(\beta)$, $R^m(\lambda, \alpha)$, $\mathcal{N}_{m,n}(\alpha, \beta)$, $\mathcal{M}^s_{m,n}(\alpha, \beta)$ and $\mathcal{N}(m, n, \alpha, \beta)$,
we can find extrem points and bound for $\mid f(z) \mid$, $\mid f^{'}(z) \mid$.
Keywords: Analytic function, Starlike function, Subordinate, Univalent function.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Mathematical Analysis

On univalent functions defined by a generalized Salagean operator

By: Fatemeh Mollaee Maqsami

Supervisor

Ahmad Zireh

January 2017