



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی  
گروه ریاضی کاربردی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته  
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

# تحلیل پایداری سیستمهای متناوب خطی گسسته زمانی با مشتق مرتبه کسری

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر محمد مهدی فاتح

دانشجو

جواد اسماعیلی

۱۳۹۵

تقدیم به همه عزیزانی که مرا در به ثمر رسیدن این  
پایان نامه یاری کردند.

## تعهد نامه

اینجانب جواد اسماعیلی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان تحلیل پایداری سیستمهای متناوب خطی گسسته زمانی با مشتق مرتبه کسری، تحت راهنمایی دکتر حجت احسنی طهرانی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

جواد اسماعیلی

۱۳۹۵

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

## چکیده

در این رساله، سیستمهای گسسته-زمانی خطی متناوب با مشتق مرتبه کسری و تحلیل پایداری آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک سیستم مرتبه کسری یک سیستم با تاخیر افزایشی در هر مرحله می‌باشد. کنترل این رده از سیستمها در شکل اصلی آنها تا کنون انجام نشده است. به علت دلخواه بودن تاخیرها می‌توانیم شرایط را به گونه‌ای در نظر بگیریم که سیستم با مزایای مشتقات کسری تقریباً اتفاق بیافتد. تبدیل سیستم تاخیری به سیستم استاندارد متناوب، به سیستم با ابعاد ماتریسی بسیار بزرگ منجر خواهد شد که استفاده از روشهای معمول پایدار سازی مشکلات زیادی را به همراه خواهد داشت. پایداری این رده از سیستمها با استفاده از ماتریس‌های پس‌خورد حالت مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به ابعاد بزرگ ماتریسهای سیستم استاندارد، تخصیص جزئی مقادیر ویژه در کاهش خطای عملیات پایدار سازی تاثیر بسزایی دارد. همچنین ماتریسهای پس‌خورد حالت یکت نیست و در نتیجه شکل پارامتری خطی و غیر خطی این ماتریسها مورد بررسی قرار گرفته است. تخصیص مقادیر ویژه برای پایدارسازی این رده از سیستمها با این هدف که کنترلگر بهینه زمانی، مینیمم نرم را داشته باشد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. شرایط هم ارز برای پایداری سیستمهای مثبت نیز ارائه و اثبات می‌شود.

**کلمات کلیدی:** کنترل، پایداری، تخصیص مقادیر ویژه، مشتقات مرتبه کسری، سیستمهای متناوب، خطی، گسسته زمانی.

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. TEHRANI. H. A., ESMAEILI. J. Stability of fractional-order periodic discrete-time linear systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* , pp:1-11, (2015)
2. J. ESMAEILI H. A. TEHRANI M. M. FATEH Control of Fractional Periodic Discrete-Time Linear Systems by Partial Eigenvalue Assignment of State Feedback Matrices, *Int. J. Appl. Comput. Math*, Springer, (2016)
3. J. ESMAEILI H. A. TEHRANI M. M. FATEH Control of fractional-order periodic discrete-time linear systems by parametrized state feedback matrices and minimum norm, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* , pp:1-11, (2016)
4. J. ESMAEILI H. A. TEHRANI M. M. FATEH Control of fractional-order periodic discrete-time linear systems by non-linear parametrized state feedback matrices, *Non Linear Dynamics* , pp:1-11, (2016)
5. J. ESMAEILI H. A. TEHRANI Stabilization of fractional discrete -time linear systems, *Yazd Conference* , (2015)
6. J. ESMAEILI H. A. TEHRANI Control of fractional discrete-time linear systems by partial eigenvalue assignment of state feedback matrix, *Yazd Conference* , (2015)

# فهرست مطالب

۱	پیشگفتار	۱
۳	تعاریف و نمادهای مقدماتی	۲
۳	..... مقدمه	۱.۲
۳	..... مقدماتی از جبر خطی	۲.۲
۳	..... مقدار ویژه و بردار ویژه و معادله مشخصه	۱.۲.۲
۴	..... برخی تجزیه های ماتریسی	۲.۲.۲
۶	..... نرم ماتریس	۳.۲.۲
۷	..... مشتقات مرتبه کسری	۳.۲
۷	..... مقدمه	۱.۳.۲
۹	..... تعاریف مختلف مشتق مرتبه کسری	۲.۳.۲
۱۳	کنترل سیستمهای گسسته زمانی	۳
۱۳	..... مقدمه	۱.۳
۱۳	..... تعاریف و پیشنیازهای کنترل	۲.۳
۱۵	..... پایداری سیستمهای کنترل	۳.۳
۱۶	..... کنترل سیستم خطی با پس خورد حالت	۴.۳
۱۸	..... ماتریس پس خورد حالت سیستمهای خطی	۵.۳
۱۹	..... تبدیلات تشابهی فضای حالت - فرم استاندارد اشلون	۱.۵.۳
۲۲	..... فرم همدم برداری اولیه	۲.۵.۳
۲۴	..... تخصیص مقادیر ویژه به وسیله ماتریس پس خورد حالت	۳.۵.۳
۲۵	..... کنترل سیستمهای متناوب	۶.۳
۲۸	..... تبدیلات تشابهی سیستمهای متناوب	۱.۶.۳
۲۹	پایدار سازی سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری	۴
۲۹	..... مقدمه	۱.۴
۲۹	..... معادله دینامیکی سیستم مشتق مرتبه کسری	۲.۴

۳۱	سیستم های گسسته خطی با مشتق مرتبه کسری	۳.۴
۳۲	سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری	۴.۴
۳۲	پایداری عملی	۱.۴.۴
۳۴	پایدارسازی سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری	۲.۴.۴
۳۴	ماتریس یک دوره ای سیستم متناوب استاندارد شده	۳.۴.۴
۳۵	شرط کنترل پذیری (دسترس پذیری) سیستمهای ناپایدار	۴.۴.۴
۳۵	تخصیص مقادیر ویژه ماتریس یک دوره ای	۵.۴.۴
۳۸	سیستمهای مثبت مرتبه کسری متناوب	۵.۴
۴۴	تخصیص جزئی سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری	۶.۴
۴۴	وجود و یکتایی	۱.۶.۴
۴۵	الگوریتم تخصیص جزئی مقادیر ویژه	۲.۶.۴
۵۱	تخصیص پارامتری سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری	۵
۵۱	مقدمه	۱.۵
۵۱	تخصیص پارامتری خطی سیستمهای مرتبه کسری متناوب	۲.۵
۵۳	الگوریتم مینیم نرم برای ماتریس پسخورد پارامتری	۳.۵
۵۵	محاسبه ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی	۴.۵
۵۸	مقایسه با روش دیگر تخصیص غیر پارامتری	۱.۴.۵
۶۳	مینیم نرم ماتریس پس خورد حالت پارامتری غیرخطی با الگوریتم ژنتیک	۵.۵
۶۷	برنامه های کامپیوتری	آ
۶۷	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه صفر	۱.آ
۷۱	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه دلخواه	۲.آ
۷۲	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله اول مثال اول	۳.آ
۷۴	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله اول مثال دوم	۴.آ
۷۷	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله دوم مثال دوم	۵.آ
۸۱	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله دوم زیر برنامه	۱.۵.آ
	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله دوم زیر برنامه	۲.۵.آ
۸۲	مینیم نرم	
۸۳	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله سوم	۶.آ
۸۶	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله سوم	۱.۶.آ
۸۸	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله سوم	۲.۶.آ
۸۸	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله سوم مینیم نرم	۳.۶.آ
	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر	۴.۶.آ
۸۸	خطی	

۵۶.آ	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر
۸۹	خطی . . . . .
۶۶.آ	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر
۹۰	خطی میل . . . . .
۷.آ	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر خطی . . .
۸.آ	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر خطی . . .
۹.آ	کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر خطی . . .
۱۰.آ	کد متلب ژنتیک . . . . .
۱۰۳	مراجع
۱۰۶	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۰۸	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۱۱	نمایه



# فصل ۱

## پیشگفتار

مشتقات مرتبه کسری در دهه های اخیر کاربردهای فراوانی در سیستمهای دینامیکی پیدا کرده [۵، ۱۳، ۲۲، ۲۷] و مقالات زیادی در مورد پایداری و کنترل پذیری آنها ارائه شده است [۳، ۸]. سیستم مشتق مرتبه کسری متناوب خطی گسسته زمانی زیر را در نظر بگیرید [۱۱]

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (1.1)$$

برای پایداری این سیستم باید ماتریس کنترلگر پسخورد حالت متناوب را به گونه ای پیدا کنیم که مقادیر ویژه ی ماتریس دوره ای حلقه بسته، در داخل محدوده ای معین و از پیش تعیین شده از صفحه ی مختلط قرار گیرند. یعنی ابتدا سیستم مرتبه کسری متناوب (۱.۱) با استفاده از تعریف  $\Delta^\alpha$  به یک سیستم با تاخیر زمانی افزایشی تبدیل و سپس با استفاده از بحث پایداری عملی، سیستم تاخیر زمانی افزایشی و نامحدود به سیستم تاخیر زمانی ثابت تبدیل می شود [۱۵، ۱۶]. با در نظر گرفتن ماتریسهای افزوده، سیستم (۱.۱) به یک سیستم متناوب خطی گسسته با ابعاد بزرگ تبدیل می شود [۲۳]. بررسی مباحث مربوط به پایداری و کنترل سیستمهای متناوب به روشهای مختلفی در مقالات زیر بررسی شده اند. در سال ۱۹۸۰ مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستمهای متناوب گسسته [۲۴] و در سال ۱۹۸۵ کنترل پذیری و مشاهده پذیری [۲] و در سال ۱۹۸۹ تخصیص مقادیر ویژه آنها توسط ماتریسهای پسخورد متناوب گسسته ارائه شد [۱]. در سال ۱۹۹۳ و ۱۹۹۴ مساله کنترل سیستمهای متناوب خطی گسسته -زمانی و تحلیل پایداری آنها به روش تجزیه شور تعمیم یافته انجام شد [۲۸، ۲۹]. در سال ۲۰۱۰ تخصیص پارامتری غیر خطی این دسته از سیستمها به روشی بسیار پیچیده و ناکارآمد ارائه شد [۲۵]. در این رساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب خطی گسسته به روشی متفاوت ارائه شده است. با توجه به ابعاد بزرگ سیستم بدست آمده، روشهای معمول تخصیص مقادیر ویژه [۲۵، ۲۸] نمی تواند جوابگو باشد و خطای زیادی را در سیستم به وجود می آورد و تخصیص جزئی مقادیر ویژه می تواند در کاهش ابعاد سیستم کمک زیادی کند [۶].

مسأله ای که در چند دهه اخیر، قابل توجه بسیاری از نویسندگان قرار گرفته، پارامتری سازی ماتریس پسخورد حالت و مساله کمینه کردن نرم آن می باشد [۱۷، ۱۸، ۲۰، ۲۱]. این مسأله بدین جهت حائز اهمیت است که به دست آوردن ماتریس پس خورد با نرم کمینه، قطعا هزینه کمتر و در بسیاری موارد

حتی به وقت کمتر نیاز دارد. روش مینیمم سازی نرم ماتریس پسخورد را توسط الگوریتم ژنتیک ارائه خواهیم داد. سیستمهای مثبت نیز که در اکثر مسائل فیزیکی رخ می دهند بررسی خواهند شد [۹، ۱۴].

ساختار کلی این پایان نامه به شرح زیر است

- در فصل اول این رساله تعاریف مقدماتی از جبر خطی و مشتقات مرتبه کسری آورده شده است.
- در فصل دوم به تعاریف و قضایای کنترل پذیری و پایداری سیستمهای استاندارد خطی گسسته و چگونگی یافتن ماتریس پسخورد حالت آنها می پردازیم و سپس به تعاریف و قضایای کنترل پذیری و پایداری سیستمهای متناوب خواهیم پرداخت.
- در فصل سوم، سیستمهای مرتبه کسری متناوب را تعریف و کنترل این رده از سیستمها را توسط ماتریسهای پسخورد حالت متناوب بررسی می کنیم و سپس تخصیص مقادیر ویژه که باعث کاهش بعد ماتریس پسخورد می شود بیان می شود.
- در فصل چهارم ماتریسهای پسخورد پارامتری خطی و غیر خطی برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت در سیستم های مختلف آورده شده، به گونه ای که نرم آن کمترین مقدار ممکن شود و در بخشی از آن از الگوریتم ژنتیک برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت پارامتری غیر خطی با مینیمم نرم استفاده شده است.

# فصل ۲

## تعاریف و نمادهای مقدماتی

### ۱.۲ مقدمه

در قسمت اول این فصل به تعاریف و قضایای مورد نیاز از ماتریسها و تجزیه های مهم آنها و مقدار ویژه و بردار ویژه آنها خواهیم پرداخت. در قسمت بعد توابع مهم مورد نیاز برای تعریف مشتقات مرتبه کسری و اثبات قضایای مربوط به آنها را بیان کرده ایم. سپس به تعریف انواع مشتقات کسری و اهمیت آنها پرداخته ایم و برتری هر کدام را بیان کرده و مشتق کسری چند تابع را بررسی می کنیم.

### ۲.۲ مقدماتی از جبر خطی

در این قسمت به برخی مفاهیم، تعاریف و قضایا از جبر خطی می پردازیم. تمامی تعاریف و قضایای این قسمت از [۷] استخراج شده است.

### ۱.۲.۲ مقدار ویژه و بردار ویژه و معادله مشخصه

دستگاه معادلات  $A_{n \times n} X_{n \times 1} = b_{n \times 1}$  را در نظر بگیرید. این سیستم را می توان به صورت نگاشتی در فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  در نظر گرفت، که بردار  $X$  را به بردار  $b$  تبدیل می کند. در این نگاشت ها مواردی وجود دارد که تنها اندازه ی بردار  $X$  را تغییر می دهد و امتداد آن حفظ می شود. به عبارت دیگر  $b$  به صورت مضربی از بردار  $X$  تعریف می شود. در این صورت نگاشت حاصل به صورت زیر تعریف می شود.

$$AX = \lambda X$$

بردارهای  $x_i$  غیر صفر که چنین خاصیتی دارند را بردارهای ویژه ماتریس  $A_{n \times n}$  و ضرایب ثابت  $\lambda_i$  را مقادیر ویژه ماتریس  $A_{n \times n}$  گویند. چند جمله ای مشخصه به صورت زیر بیان می شود

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-1} \lambda + C_n$$

ریشه های چند جمله ای مشخصه همان مقادیر ویژه خواهند بود که تعدادشان  $n$  تا است.

**نکته ۱:** برای ماتریس حقیقی  $A_{n \times n}$  معادله مشخصه  $|\lambda I - A| = 0$  یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه به صورت حقیقی یا به فرم مختلط  $\alpha \pm i\beta$  است.

**نکته ۲:** اگر بردار  $v_i$  یک بردار ویژه برای ماتریس  $A$  باشد، آنگاه برای هر اسکالر مخالف صفر مانند  $\alpha$  حاصل  $\alpha v_i$  نیز یک بردار ویژه برای آن خواهد بود.

**نکته ۳:** اگر  $\lambda$  یک مقدار ویژه برای ماتریس  $A$  و بردار  $V$  بردار ویژه نظیر آن باشد، در این صورت  $\lambda^k$  نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس  $A^k$  متناظر با بردار ویژه نظیر خواهد بود.

برای ماتریس  $A_{n \times n}$  با مقادیر ویژه  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  دترمینان و اثر ماتریس به صورت زیر قابل محاسبه است

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

$$\text{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

**نکته ۴:** اگر  $\lambda_i$  یک مقدار ویژه برای ماتریس  $A$  باشند،  $\lambda_i^{-1}$  یک مقدار ویژه برای ماتریس  $A^{-1}$  خواهد بود.

**نکته ۵:** در ماتریس های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند.

**تعریف ۱.۲.۲.** دو ماتریس  $A$  و  $B$  متشابه هستند هرگاه ماتریس نامنفرد  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  موجود باشد بطوریکه

$$T^{-1}AT = B$$

**نکته:** مقادیر ویژه دو ماتریس متشابه یکسان هستند.

## ۲.۲.۲ برخی تجزیه های ماتریسی

**قضیه ۲.۲.۲.** (فرم کانونیکال جردن<sup>۱</sup>) هر ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  می تواند به فرم کانونیکال جردن تبدیل شود. یعنی ماتریس نامنفرد  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  وجود دارد که

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_1 & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & J_2 & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & J_r \end{bmatrix}$$

<sup>۱</sup>Jordan canonical form

ماتریس های  $J_i$  ماتریس های جردن متناظر با  $\lambda_i$  می باشد و بصورت زیر تعریف می شود

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

و بعد  $J_i$  برابر با تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با  $\lambda_i$  است.

تعریف ۳.۲.۲. اگر  $\lambda_i$  ها مقادیر ویژه ماتریس متقارن  $A^T A$  باشند مقادیر تکین ماتریس  $A^{n \times m}$  عبارت است از

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

قضیه ۴.۲.۲. (تجزیه مقدار تکین<sup>۲</sup>) [۷] فرض کنید  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  و  $rank(A) = r$  باشد. آنگاه ماتریس های متعامد  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  و  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  وجود دارند به طوری که

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \\ \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

قضیه ۵.۲.۲. [۷] هر ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  می تواند به شکل

$$A = QR$$

تجزیه شود که در آن  $Q$  متعامد یکه و  $R$  بالا مثلثی می باشد.

قضیه ۶.۲.۲. (تجزیه شور حقیقی<sup>۳</sup>) [۷] فرض کنید  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، آنگاه ماتریس متعامد  $Q$  وجود دارد به طوری که

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{kk} \end{bmatrix}$$

فرم بلوکی بالا مثلثی است و هر بلوک  $R_{ii}$  آن یا  $1 \times 1$  یا یک مقدار ویژه حقیقی و یا  $2 \times 2$  با زوج مقادیر ویژه مختلط  $A$  می باشد.

<sup>۲</sup> Singular value decomposition

<sup>۳</sup> Real schur decomposition

قضیه ۷.۲.۲. (تجزیه شور تعمیم یافته<sup>۴</sup>) [۷] ماتریسهای  $A_i, i = 0 \dots N-1$  را در نظر بگیرید. ماتریسهای یکانی  $T_i, i = 0 \dots N-1$  وجود دارد که

$$\tilde{A}_0 = T_0^* A_0 T_0$$

$$\tilde{A}_1 = T_1^* A_1 T_1$$

⋮

$$\tilde{A}_{N-1} = T_{N-1}^* A_{N-1} T_{N-1}$$

که ماتریسهای  $\tilde{A}_i$  بالا مثلثی می باشد و  $T_i^*$  ترانواده مزدوج ماتریس  $T_i$  می باشد.

### ۳.۲.۲ نرم ماتریس

نگاشت  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  را یک نرم ماتریسی گوئیم هرگاه دارای خواص زیر باشد

$$1. \quad \|A\| \geq 0 \quad \text{به ازای } A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ و } \|A\| = 0 \text{ اگر و فقط اگر } A = 0.$$

$$2. \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \text{به ازای } \alpha \in \mathbb{R} \text{ و } A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

$$3. \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \text{به ازای } A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ داریم}$$

تعریف ۸.۲.۲. نرم

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|^2} = \sqrt{\text{tr}(AA^H)}$$

یک نرم فروبینوس (نرم اقلیدسی) در  $\mathbb{C}^{n \times n}$  نامیده می شود.

تعریف ۹.۲.۲. فرض کنید،  $\|\cdot\|$  یک نرم برداری باشد، تابع

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

یک نرم ماتریسی طبیعی نامیده می شود.

نرم یک و نرم بی نهایت به صورت زیر تعریف می شوند

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

<sup>۴</sup> Generalized schur decomposition

## ۳.۲ مشتقات مرتبه کسری

### ۱.۳.۲ مقدمه

در سال ۱۶۹۵ هوییتال<sup>۵</sup> در نامه ای از لایبنیتز<sup>۶</sup> پرسید که در تعریف مشتق  $\frac{d^n}{dx^n}$  می توان قرار داد  $n = \frac{1}{p}$  یا خیر؟ لایبنیتز در پاسخ نوشت: "پارادوکس آشکاریست. چه نتایجی استنتاج می شود؟" این سوال نقطه شروع مشتقات مرتبه کسری می باشد. در سال ۱۷۷۰ اویلر<sup>۷</sup> نیز موضوع مشتقات مرتبه کسری را مورد توجه خود قرار داد. در سال ۱۷۷۲ لاگرانژ<sup>۸</sup> قانون مرتبه عملگرهای دیفرانسیل را گسترش داد و بطور غیر مستقیم به حساب مشتق مرتبه کسری کمک کرد. لاپلاس<sup>۹</sup> نیز در سال ۱۸۱۲ با تعریف مفهوم انتگرال، مشتقات مرتبه کسری را تعریف کرد. همچنین فوریه<sup>۱۰</sup> در سال ۱۸۲۲ مشتقات مرتبه کسری را برای هر مرتبه دلخواه بیان کرد. اما اولین تحقیقات جدی روی این مبحث توسط ریمان-لیوویل<sup>۱۱</sup> انجام شد. لتنیکوف<sup>۱۲</sup> نیز چندین مقاله را در همین موضوع در سال های ۱۸۶۸ تا ۱۸۷۲ به چاپ رسانید. کاپوتو<sup>۱۳</sup> تعریف ریمان-لیوویل را اصلاح کرد تا بتواند از مشتقات صحیح در نقاط اولیه استفاده کند. در سال ۱۹۹۶ کولووانکار<sup>۱۴</sup> تعریف مشتق را طوری بازنویسی کرد که بتواند از توابع هیچ جا مشتق پذیر نیز مشتق بگیرد. مشتقات مرتبه کسری تعمیمی از مشتقات معمولی می باشند و بیشتر نظریه های این تعریف مشتق در قرن بیستم توسعه یافت. اهمیت معادلات با مشتقات مرتبه کسری این است که وابسته به تمام نقاط قبل از یک نقطه دلخواه می باشد. یعنی برای محاسبه مقدار مشتق یا انتگرال کسری در نقطه  $x_i$ ، اطلاعات نقاط قبل از  $x_i$  نیز در محاسبات لحاظ می گردد. سیستمهای با مرتبه مشتق کسری به علت فراهم آوردن خاصیت حافظه سیستم که از تمامی اطلاعات قبلی سیستم استفاده می کند می تواند در کاهش خطای سیستم بسیار تاثیر گذار باشد. در هر مرحله مقداری خطای ناخواسته بوجود می آید که هر چه سیستم به نقاط بیشتری از شروع سیستم وابسته باشد این خطای ناخواسته کمتر رشد می کند. نمونه ای از افزایش کیفیت توسط مشتقات کسری از رابطه مستقیم بین توان  $s$  در تبدیل لاپلاس تابع  $f(x)$  و مشتق آن بدست می آید.

مهمترین کاربرد های مشتق کسری عبارتند از [۵]:

- ۱- افزایش سرعت پاسخ و کاهش خطای حالت پایدار و پایداری نسبی
- ۲- افزایش حساسیت نسبت به اختلال.

بدین ترتیب انتظار می رود که معادلات با مشتقات مرتبه کسری سازگاری بیشتری با مدل سازی پدیده

<sup>۵</sup>Hopital

<sup>۶</sup>Leibniz

<sup>۷</sup>Euler

<sup>۸</sup>Ragrange

<sup>۹</sup>Laplace

<sup>۱۰</sup>fourier

<sup>۱۱</sup>Riemann-Lioville

<sup>۱۲</sup>Letnikov

<sup>۱۳</sup>Caputo

<sup>۱۴</sup>kolvankar

ها داشته باشند و در چند سال اخیر در بسیاری از پژوهش های مهندسی، پزشکی و اقتصادی نیز مورد استفاده قرار گرفته است [۱۳، ۵].

تعریف ۱.۳.۲. (تابع گاما<sup>۱۵</sup>) تابع گاما تعمیمی از تابع فاکتوریل می باشد که برای همه اعداد مثبت و اعداد منفی غیر صحیح تعریف شده و به صورت زیر بیان می شود

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.2)$$

برخی از خصوصیات تابع گاما عبارت اند از

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \Leftrightarrow \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(0) = \Gamma(-n) = \pm\infty, n \in \mathbb{N},$$

$$\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}, \Gamma(0.5) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, 0 \leq x \leq 1$$

تعریف ۲.۳.۲. (تابع بتا<sup>۱۶</sup>) تابع بتا به صورت زیر تعریف می شود

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = B(q, p)$$

قضیه ۳.۳.۲. [۱۳] رابطه بین تابع گاما و تابع بتا به صورت زیر بدست می آید

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

تعریف ۴.۳.۲. انتگرال تلفیقی (کانولوشن)<sup>۱۷</sup> عبارت است از

$$f(t) \otimes g(t) = \int_0^t f(\tau)g(\tau-t)d\tau$$

تعریف ۵.۳.۲. بسط دو جمله ای مرتبه کسری عبارت است از

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

و

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}$$

<sup>۱۵</sup>Gamma function

<sup>۱۶</sup>Beta function

<sup>۱۷</sup>Convolution



### ۲.۳.۲ تعاریف مختلف مشتق مرتبه کسری

چندین تعریف متفاوت برای مشتقات کسری مرتبه  $\alpha \geq 0$  وجود دارد که به سادگی می توان هر یک از این تعاریف را بر حسب دیگری نوشت و مهمترین خاصیت همه آنها، در برگرفتن تعریف مشتق معمولی است. مشتق  $\alpha \geq 0$  ام یک تابع به تمامی نقاط قبل از آن نقطه وابستگی دارد که این خاصیت را خاصیت حافظه مشتق گوئیم. تابع  $f(t)$  را در نظر بگیرید بطوریکه در فاصله  $[a, \infty)$  پیوسته و انتگرال پذیر باشد و اگر  $t < a$  آنگاه  $f(t) = 0$  در نظر گرفته می شود. عدد صحیح  $m$  را به گونه ای در نظر بگیرید که  $(m-1) < \alpha < m$ . برای معرفی مشتقات مرتبه کسری ریمان-لیوویل و کاپوتو ابتدا باید با مفهوم انتگرال مرتبه کسری آشنا شویم [۵].

#### تعریف ۶.۳.۲. فرمول کوشی برای انتگرال چند گانه

انتگرال  $n$  گانه تابع  $f(x)$  با نقطه شروع  $a$  به صورت زیر بدست می آید

$$J_a^n f(t) = \int_a^t \int_a^z \cdots \int_a^z f(z) dz \cdots dz dz = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-z)^{n-1} f(z) dz$$

#### تعریف ۷.۳.۲. فرمول ریمان-لیوویل برای انتگرال $\alpha$ گانه

با استفاده از تعمیم فرمول انتگرال  $n$  گانه کوشی برای مرتبه دلخواه  $\alpha \in \mathbb{R}$ ، انتگرال ریمان-لیوویل با نقطه شروع  $a$  عبارت است از

$$J_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-z)^{\alpha-1} f(z) dz \quad (3.2)$$

نکته: معمولاً نقطه شروع انتگرال صفر در نظر گرفته می شود و به صورت زیر نوشته می شود.

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} f(z) dz$$

مثال ۸.۳.۲. انتگرال  $\alpha$  گانه تابع  $x^r$  با نقطه شروع صفر را در حالت کلی محاسبه و سپس انتگرال  $0.5$  گانه تابع  $\sqrt{x}$  را بیابید.

$$\begin{aligned} J^\alpha x^r &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-z)^{\alpha-1} z^r dz \\ &= \frac{x^{\alpha+r}}{\Gamma(\alpha)} B(r+1, \alpha) \\ &= \frac{x^{\alpha+r} \Gamma(r+1) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(r+\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+\alpha+1)} x^{\alpha+r} \\ \Rightarrow J^{0.5} x^{0.5} &= \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x \end{aligned}$$

قضیه ۹.۳.۲. [۵] انتگرال ریمان-لیوویل خاصیت جابجایی و جمع پذیری درجه انتگرال را دارد.

$$J^\alpha J^\beta f(x) = J^\beta J^\alpha f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x)$$

تعریف ۱۰.۳.۲. فرمول ریمان-لیوویل برای مشتق  $\alpha$  گانه مشتق مرتبه کسری ریمان-لیوویل با نقطه شروع  $a$  عبارت است از

$${}_R D_a^\alpha f(t) = D^m \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-z)^{m-\alpha-1} f(z) dz \right) \quad (4.2)$$

مثال ۱۱.۳.۲. مشتق  $\alpha$  ام تابع  $f(x) = x^r$  را به روش ریمان-لیوویل بیابید.

$${}_R D^\alpha x^r = D^m J^{m-\alpha} x^r = D^m \left( \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+\alpha+1)} x^{\alpha+r} \right) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+\alpha+1-m)} x^{r+\alpha-m}$$

مثال ۱۲.۳.۲. مشتق  $0.5$  ام تابع  $f(x) = x$  را به روش ریمان-لیوویل بیابید.

$${}_R D^{0.5} x = D^1 J^{0.5} x = D \left( \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} x^{1.5} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{0.5}$$

مثال ۱۳.۳.۲. مشتق  $0.5$  ام تابع  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  را به روش ریمان-لیوویل بیابید.

$${}_R D^{0.5} \frac{1}{\sqrt{x}} = D J^{0.5} \frac{1}{\sqrt{x}} = D \left( \frac{\Gamma(0.5)}{\Gamma(1)} x^0 \right) = 0$$

نکته: اگر  $r = \alpha - 1$  آنگاه حاصل مشتق ریمان-لیوویل صفر خواهد شد زیرا  $\Gamma(0) = \infty$  در مخرج ظاهر می شود.

نتیجه مهم: برای مشتق ریمان-لیوویل قاعده جمع مرتبه مشتقات برقرار نمی باشد یعنی

$${}_R D^\alpha ({}_R D^\beta) \neq {}_R D^{\alpha+\beta}$$

زیرا با توجه به مثال قبل داریم

$$D^{0.5} D^{0.5} \frac{1}{\sqrt{x}} = D^{0.5}(0) = 0$$

اما

$$D \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

مشتق مرتبه کسری کاپوتو را نیز از انتگرال مرتبه کسری به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۱۴.۳.۲. مشتق کسری کاپوتو

مشتق مرتبه کسری کاپوتو با نقطه شروع  $a$  عبارت است از

$${}_C D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-z)^{m-\alpha-1} f^m(z) dz \quad (5.2)$$

نکته: تفاوت مشتقات ریمان-لیوویل و کاپوتو از تفاوت جابجایی مشتق و انتگرال بوجود می آید

یعنی

$${}_C D_a^\alpha f(t) = J_a^{m-\alpha} D^m f(t) \quad ,$$

$${}_R D_a^\alpha f(t) = D^m J_a^{m-\alpha} f(t)$$

قضیه ۱۵.۳.۲ [۱۳] مشتق ریمان-لیوویل و کاپوتو خاصیت جابجایی و جمع پذیری درجه صحیح را با اعشار به صورت زیر دارد

$$D^n D^\alpha f(x) = D^{n+\alpha} f(x) \neq D^\alpha D^n f(x)$$

قرارداد: با توجه به قضیه فوق می توانیم از این پس فرض کنیم  $0 < \alpha < 1$  که  $(m = 1)$  و در این صورت مرتبه مشتق را مناسب می نامیم.

مثال ۱۶.۳.۲. مشتق  $\alpha$  ام تابع  $f(x) = x^r$  را به روش کاپوتو بیابید.

$${}_C D^\alpha x^r = J^{1-\alpha} D(x^r) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-z)^{-\alpha} r z^{r-1} dz = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} x^{r-\alpha}$$

نکته: مشتق کاپوتوی تابع  $f(x) = x^r$  برای  $0 < \alpha < 1$  با روش ریمان-لیوویل متفاوت می باشد.

مثال ۱۷.۳.۲. مشتق  $\frac{1}{2}$  ام تابع  $f(x) = x^2$  را به روشهای ریمان-لیوویل و کاپوتو بیابید. ( $m = 1$ )

$${}_R D^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{2}{\Gamma(3/2)} x^{1/2},$$

$${}_C D^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2/8)} x^{1/8} = \frac{2}{\Gamma(2/8)} x^{1/8}$$

قضیه ۱۸.۳.۲ [۵] تبدیلات لاپلاس مشتق های کسری کاپوتو و ریمان-لیوویل عبارت است از:

$$L({}_C D^\alpha f(t)) = s^\alpha L(f(t)) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0),$$

$$L({}_R D^\alpha f(t)) = s^\alpha L(f(t)) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k f^{\alpha-1-k}(0)$$

در تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان-لیوویل، از مشتقات کسری در نقطه اولیه استفاده می شود و به علت مشکل بودن محاسبه این مشتقات، از مشتق ریمان-لیوویل استفاده چندانی نمی شود. اما مشتق کاپوتو به دلیل استفاده از مشتقات مرتبه صحیح در نقطه اولیه در تبدیل لاپلاس، کاربرد فراوانی در سیستمهای دینامیکی و مسائل مقدار مرزی دارد.

تعریف ۱۹.۳.۲. مشتق مرتبه کسری گرانوالد-لتنیکف

[۱۳] تعریف دیگر مشتق کسری که بیشتر در سیستمهای گسسته استفاده می شود توسط گرانوالد-لتنیکف ارائه شد که از تعمیم مشتقات معمولی بدست می آید

$${}_G D_a^\alpha x(t_k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^i \binom{\alpha}{i} x(t_{k-i})$$

در تعریف فوق به دلیل صفر نشدن  $\binom{\alpha}{i}$  برای  $\alpha$  غیر صحیح، تعداد جملات سری بی نهایت است و استفاده از این تعریف در عمل بسیار مشکل است [۱۵]. تقریبی از تعریف فوق را که دیفرانسیل با جملات محدود می باشد به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۲.۳.۲. [۱۵] اگر بازه  $[a, t_k]$  را به  $n$  زیر بازه به طول  $h = \frac{t_k - a}{n}$  تقسیم کنیم داریم

$$\Delta^\alpha x_k = \Delta^\alpha x(t_k) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{\alpha}{i} x(t_k - ih) \quad (۶.۲)$$

قضیه ۲.۳.۲. [۵] هر یک از مشتقات کسری را می توان بر حسب مشتق دیگر نوشت. به عبارت دیگر

$${}_R D_a^\alpha f(t) = {}_C D_a^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(\circ^+),$$

$${}_C D_a^\alpha f(t) = {}_R D_a^\alpha (f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(\circ^+)),$$

$$\begin{aligned} {}_G D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_{\circ}^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} f^{(k)}(\circ^+) \\ &= {}_C D_a^{m-\alpha+1} f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} f^{(k)}(\circ^+). \end{aligned}$$

# فصل ۳

## کنترل سیستمهای گسسته زمانی

### ۱.۳ مقدمه

در قسمت اول این فصل به تعاریف و قضایای مورد نیاز برای پایداری و کنترل سیستمهای گسسته خطی خواهیم پرداخت و سپس روش تبدیلات تشابهی را برای یافتن ماتریسهای پسخورد حالت این سیستمها ارائه می کنیم. در قسمت بعد سیستمهای متناوب گسسته خطی و شرایط کنترل پذیری و پایداری آنها را بررسی می کنیم.

### ۲.۳ تعاریف و پیشنهادهای کنترل

بخش مهمی از هر مسأله‌ی کنترلی، مدل‌سازی آن سیستم است. مدل‌سازی، به دست آوردن ساده ترین بیان ریاضی است که پاسخ سیستم فیزیکی به تمام ورودیهای مورد نظر را بطور مناسب پیش‌بینی کند. معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر بیان شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) = a_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases} \quad (1.3)$$

بردار

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

را به عنوان بردار حالت سیستم و

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

را به عنوان بردار کنترل تعریف می‌کنیم. آنگاه سیستم (۱.۳) می‌تواند به صورت ماتریسی زیر نوشته شود

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

که در آن

$$a(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} a_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ a_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix}$$

است. در مبحث کنترل خطی، معادلات حالت

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

توصیف کننده سیستم های چند متغیره ای هستند که در آنها ماتریس های  $A(t)$  و  $B(t)$  و  $C(t)$  و  $D(t)$  را ماتریس های سیستم می نامیم که به ترتیب دارای ابعاد  $n \times n$  و  $n \times m$  و  $p \times n$  و  $p \times m$  می باشند. تعریف ۱.۲.۳ [۴] اگر همه ماتریس های سیستم معادلات (۲.۳) ثابت باشند آنگاه سیستم را یک سیستم کنترل ناوردای<sup>۱</sup> زمانی می گویند.

تعریف ۲.۲.۳. سیستم خطی گسسته زمانی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}$$

تعریف ۳.۲.۳ [۴] سیستم خطی ناوردای زمانی (۲.۳) را به ازای  $t \geq t_0$  با حالت اولیه  $x(t_0) = x_0$  در نظر می گیریم. هرگاه ورودی  $u(t)$  حالت اولیه  $x_0$  را در زمان  $t_0$  به نقطه دلخواه منتقل نماید، حالت  $x_0$  را در زمان  $t_0$  کنترل پذیر گویند. اگر تمام مقادیر  $x_0$  کنترل پذیر باشند، سیستم را کاملاً کنترل پذیر گویند.

قضیه ۴.۲.۳ [۴] سیستم خطی ناوردای زمانی را کاملاً کنترل پذیر گوئیم اگر و تنها اگر برای ماتریس کنترل پذیری

$$Q = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]_{n \times nm},$$

داشته باشیم

$$\text{rank}(Q) = n.$$

<sup>۱</sup>Invariant

قضیه ۵.۲.۳. [۴] سیستم خطی ناوردای زمانی

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۳.۳)$$

را در نظر بگیرید. اگر بتوان حالت اولیه  $x(t_0)$  را با مشاهده خروجی سیستم در فاصله زمانی محدود  $t_0 \leq t \leq t_1$  تعیین کرد، سیستم را کاملاً مشاهده پذیر گویند.

قضیه ۶.۲.۳. [۴] سیستم تعریف شده (۳.۳) را کاملاً مشاهده پذیر گوئیم، اگر و تنها اگر برای ماتریس مشاهده پذیری

$$E = [C^T \mid A^T C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T]_{n \times np}$$

داشته باشیم

$$\text{rank}(E) = n$$

### ۳.۳ پایداری سیستم‌های کنترل

در طراحی سیستم کنترل، شناخت اجزای سیستم برای پیش بینی رفتار دینامیکی سیستم لازم است. مهمترین مشخصه رفتار دینامیکی سیستم های کنترل، پایداری مطلق است. یک سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی در صورتی پایدار است که هنگام اعمال شرایط اولیه به آن به حالت تعادل برگردد. حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی حالتی است که در صورت ورودی ثابت و نبود اغتشاش، حالت و خروجی در همان حالت ثابت باقی بماند.

تعاریف مختلفی برای پایداری سیستم ها ارائه شده است. ایده کلی این تعاریف را می توان بدین صورت بیان کرد. مجموعه ای از معادلات دینامیکی یک سیستم فیزیکی داده شده اند، تعیین کنید آیا سیستم حول نقطه تعادل خود خوش رفتار است؟ (یک سیستم کنترل خطی را پایدار بحرانی گوئیم هرگاه نوسانات خروجی برای همیشه ادامه یابد و در صورتی ناپایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه ی جدید به آن، خروجی بطور بیکران واگرا شود.)

تعریف ۱.۳.۳. [۴] معادله  $\dot{x}(t) = f[x(t), t]$  را در نظر بگیرید

نقطه تعادل  $x_e$  را پایدار به مفهوم لیاپانوف گویند، اگر برای هر  $t_0$  و هر  $\epsilon > 0$ ، یک  $\delta > 0$  وجود داشته باشد که به ازای  $\delta < \|x(t_0) - x_e\|$  برای  $t \geq t_0$  داشته باشیم  $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$ .

یعنی می توان با انتخاب حالت اولیه به اندازه کافی نزدیک به نقطه تعادل از دور شدن حالت از نقطه تعادل جلوگیری کرد. به عبارت دیگر، حالت تعادل  $x_e$  را به مفهوم لیاپانوف پایدار گوئیم، هرگاه پاسخ سیستم ناشی از هر حالت اولیه که نزدیک به  $x_e$  باشد، هیچ گاه از نقطه تعادل دور نشود.

این تعریف صورت ضعیف پایداری است، صورت قوی تر و عملی تر وقتی است که پاسخ علاوه بر نزدیک ماندن به حالت تعادل، به سمت آن نیز میل کند.

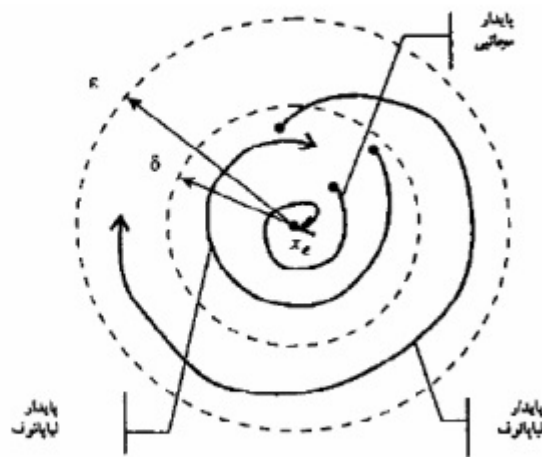
تعریف ۲.۳.۳. [۴] نقطه تعادل پایدار مجانبی است اگر

الف) پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد.

ب) به ازای هر  $t_0$  یک  $\rho(t_0) > 0$  وجود دارد که به ازای  $\rho < \|x(t_0) - x_e\|$  و برای هر  $t \rightarrow \infty$

رابطه  $\|x(t) - x_e\| \rightarrow 0$  برقرار باشد.

بنابراین پایداری مجانبی علاوه بر پایداری به مفهوم لیاپانوف، همگرایی سیستم به نقطه تعادل را نیز تضمین می کند.



سیستم توصیف شده به فرم  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  که در آن  $A$  یک ماتریس ثابت نامنفرد است را در نظر بگیرید، شرط لازم و کافی برای پایداری حالت تعادل  $x = 0$  آن است که به ازای هر ماتریس هرمیتی  $(A^T) = A^* = A$  و ماتریس معین مثبت  $Q$  و ماتریس هرمیتی  $P$  موجود باشند به گونه ای که

$$A^T P + P A = -Q$$

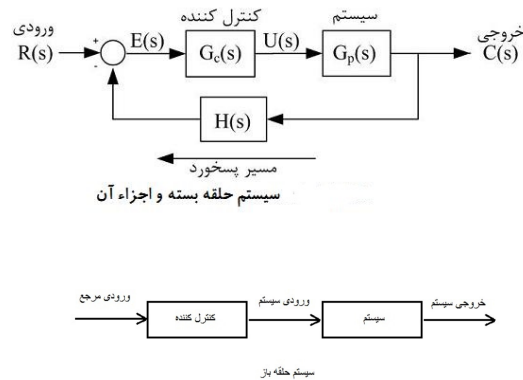
تعریف ۳.۳.۳. [۴] سیستم دینامیکی، سیستمی است که رفتارش در هر زمان در پاسخ به یک محرک خارجی یا نیروی خارجی تغییر می کند و سیستم آرایشی است از تجهیزات فیزیکی مرتبط با یکدیگر به نحوی که تشکیل وسیله یکپارچه ای دهند.

### ۴.۳ کنترل سیستم خطی با پس خورد حالت

یکی از ساده ترین انتخابهایی که برای بردار ورودی  $u(t)$  وجود دارد انتخاب آن متناسب با بردار حالت  $x(t)$  است. یعنی

$$u(t) = Kx(t)$$





شکل ۱.۳: سیستم‌های حلقه بسته و حلقه باز

و یا متناسب با بردار خروج

$$u(t) = Ky(t)$$

است. در حالت نخست ماتریس  $K$  کنترل گر حالت (پس خورد حالت) و در حالت دوم کنترل گر خروجی نامیده می شود.

تعریف ۱.۴.۳. سیستم‌هایی که در آنها خروجی بر عملکرد کنترل تاثیر ندارد را سیستم‌های کنترل حلقه باز گوئیم. همه ی سیستم‌هایی که بر اساس زمانبندی کار می‌کنند سیستم‌های حلقه باز هستند. چراغ‌های راهنمایی یک نمونه از این سیستم‌ها می باشند.

سیستم‌های کنترل پس خوردی را عموماً سیستم‌های کنترل حلقه بسته می نامیم. منظور از کنترل حلقه بسته، استفاده از پس خورد برای کاهش خطا و رسیدن به پایداری است. با استفاده از قانون کنترل پس‌خورده حالت  $u(t) = Kx(t)$  رابطه زیر بدست می آید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + BKx(t) = (A + BK)x(t) = \Gamma x(t)$$

ماتریس  $A$  را ماتریس حلقه باز سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه باز سیستم می نامند. ماتریس  $\Gamma = A + BK$  را ماتریس حلقه بسته سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه بسته سیستم می نامند.

در واقع با تعیین ماتریس  $K$  ورودی‌های سیستم تعیین می شوند و ماتریس  $K$  برای یک سیستم بعضی رفتارهای سیستم را مشخص می کند که در زیر نمونه ای از آن را بیان می کنیم.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

$$u(k) = Kx(k),$$

$$x(k+1) = Ax(k) + BKx(k) = (A + BK)x(k).$$

فرض کنید  $K$  به گونه ای تعیین شده باشد که  $A + BK$  دارای مقدار ویژه ای با قدر مطلق بزرگتر از واحد باشد و علاوه بر این فرض کنید  $a$  همان مقدار ویژه باشد و  $b$  بردار ویژه نظیر این مقدار ویژه باشد

و همچنین فرض کنید  $b = x(\circ)$  بردار حالت اولیه سیستم باشد. در این صورت با توجه به قضیه کیلی-هامیلتون داریم

$$x(k) = (A + BK)^k x(\circ) = (A + BK)^k b \implies x(k) = a^k b$$

با توجه به اینکه  $|a| > 1$  بنابراین

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \rightarrow \infty$$

که برای یک سیستم گسسته معمولاً چنین وضعی مطلوب نیست و دیگر سیستم تحت کنترل نخواهد بود. بنابراین در این حالت می‌خواهیم  $K$  را به گونه‌ای تعیین کنیم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم دارای قدرمطلق کمتر از واحد باشند و یا به عبارت دیگر

$$\rho(A + BK) < 1$$

باشد که این مساله را مساله تخصیص مقادیر ویژه می‌نامند.

در حالتی که سیستم حالت به صورت  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  باشد داریم

$$x(t) = x(\circ)e^{\Gamma t}$$

چنانچه تمام مقادیر ویژه  $\Gamma$  در سمت چپ صفحه مختلط قرار گیرند آنگاه [۷]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\Gamma t} = \circ,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \circ$$

و بنا بر تعریف سیستم تحت کنترل خواهد بود. به عبارت دیگر در صورتی که قسمت حقیقی مقادیر ویژه منفی باشد سیستم پایدار و در صورتی که صفر باشد سیستم به طور مجانبی پایدار و در صورتی که مثبت باشد سیستم ناپایدار است.

### ۵.۳ ماتریس پس‌خورد حالت سیستمهای خطی

یک سیستم ناوردای زمانی را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۴.۳)$$

برای پایداری این سیستم باید ماتریس پس‌خورد حالت  $F$  در قانون کنترل  $u = Fx(t)$  را به گونه‌ای یافت که همه مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته  $\Gamma = A + BF$  در داخل محدوده معین و از پیش تعیین شده قرار گیرد.

در اینجا فرض بر این است که ماتریس مربعی  $A_{n \times n}$  می‌تواند منفرد نیز باشد و در مورد  $B_{n \times m}$  داریم  $rank(B) = m$  که  $m \leq n$ . در این بخش ابتدا با استفاده از تبدیل  $T$  زوج  $(B, A)$  را به فرم استاندارد اشلون تبدیل کرده و سپس با استفاده از ماتریس تبدیل  $S$  فرم استاندارد اشلون را به فرم همدم برداری تبدیل می‌کنیم و با استفاده از آن ماتریس پس‌خورد حالتی را که همه مقادیر ویژه را به صفر می‌برد محاسبه می‌کنیم.

### ۱.۵.۳ تبدیلات تشابهی فضای حالت - فرم استاندارد اشلون

فرض کنید  $T$  تبدیلات تشابهی باشد که بر فضای حالت  $\mathbb{R}^n$  تعریف شده است. معادله حالت به صورت  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  است. حال فرض کنید بردار حالت سیستم توسط ماتریس تبدیل  $T^{-1}$  به فضای جدید  $\hat{x}(t) = T^{-1}x(t)$  تبدیل شود. در نتیجه،  $x(t) = T\hat{x}(t)$  با جایگذاری در معادله (۴.۳) خواهیم داشت

$$T\dot{\hat{x}}(t) = AT\hat{x}(t) + Bu(t)$$

با ضرب طرفین معادله بالا در  $T^{-1}$  خواهیم داشت

$$\dot{\hat{x}}(t) = T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \quad (۵.۳)$$

تعریف می‌کنیم

$$\hat{A} = T^{-1}AT \quad \hat{B} = T^{-1}B$$

با جایگذاری در معادله (۵.۳) خواهیم داشت

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

اگر هدف کنترل حالت و رساندن حالت به نقطه تعادل (صفر) باشد، با توجه به رابطه فوق می‌توان، در فضای حالت  $\hat{x}$  را به صفر رساند. بدیهی است که  $x(t)$  نیز در فضای اولیه به تعادل خواهد رسید. بنابراین، حل مسئله با زوج  $(B, A)$  با حل همان مسئله با زوج  $(\hat{B}, \hat{A})$  هم‌ارز است. ماتریس  $T$  را می‌توان به صورت منحصر بفردی با استفاده از ماتریس کنترل پذیری مشخص کرد. به این ترتیب که  $n$  ستون اول مستقل خطی ماتریس کنترل پذیری  $Q$  را ستون‌های ماتریس  $T$  قرار می‌دهیم. فرض کنید،  $b_1, b_2, \dots, b_m$  به ترتیب ستون‌های اول تا  $m$  ام ماتریس  $B$  باشد، بنابراین می‌توان، ماتریس  $Q$  را به صورت زیر نمایش داد.

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} b_1, & \dots & b_m, & Ab_1, & \dots, & Ab_m, & A^{n-1}b_1, & \dots, & A^{n-1}b_m \end{bmatrix}$$

از آنجایی که سیستم کنترل پذیر است، پس می‌توان  $n$  ستون از اولین ستون‌های  $Q$  را به طوری به دست آورد که مستقل خطی باشد. برای نمایش آسانتر ستون‌های  $Q$  در یک بلوک مستطیلی که  $n$  سطر و  $m$  ستون دارد، آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\begin{array}{cccc} b_1, & b_2, & \dots & b_m \\ Ab_1 & Ab_2 & \dots & Ab_m \\ A^2b_1 & A^2b_2 & \dots & A^2b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{n-1}b_1 & A^{n-1}b_2 & \dots & A^{n-1}b_m \end{array}$$

با شروع از گوشه چپ بالایی بلوک به طرف راست و پایین، بردارهایی که با بردارهای قبلش وابسته خطی‌اند را حذف می‌کنیم و اگر برداری حذف شد، همه بردارهای واقع در زیر آن نیز از بلوک حذف

می‌شوند. این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که  $n$  بردار مستقل خطی به دست آید و بقیه بردارهای باقیمانده را حذف می‌کنیم. اگر این  $n$  بردار مستقل خطی را به ترتیب ستون‌های ماتریس  $T$  قرار دهیم، آنگاه  $T$  معکوس پذیر خواهد بود و تبدیل مورد نظر خواهد بود.

$$T = [b_1, b_2, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, A^{p_1-1}b_1, \dots, A^{p_m-1}b_m]$$

**تعریف ۱.۵.۳.** (ناورداهای کرونگر) <sup>۲</sup> [۴] اعداد  $P_i$  در ماتریس تبدیل  $T$  را ناوردای کرونگر زوج  $(B, A)$  می‌نامیم.

واضح است که

$$1 \leq P_i \leq n, \quad \sum_{i=1}^m P_i = n$$

**تعریف ۲.۵.۳.** [۴] ناوردای کرونگر زوج کنترل پذیر  $(A, B)$  را منظم می‌نامیم، هرگاه اختلاف بین بیشینه و کمینه آنها حداکثر برابر یک باشد و در غیر این صورت، آن را نامنظم می‌نامیم.

**تعریف ۳.۵.۳.** [۴]  $\nu = \max\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  را اندیس کنترل پذیری سیستم می‌نامیم. هر بردار غیر صفری در فضای حالت را می‌توان در حداکثر  $\nu$  واحد زمانی برای سیستم‌های گسسته به حالت تعادل رساند.

در حالت برابر بودن ناورداهای کرونگر که حالت خاصی از ناورداهای کرونگر می‌باشد، نمی‌توان با ورودیهای متفاوت سیستم را به حالت تعادل رساند و مجموعه‌ای از ورودیهای منحصر بفرد برای آن به دست می‌آید.

فرض کنید، برای زوج کنترل پذیر  $(B, A)$  ناوردای کرونگر منظم باشد، می‌توان در صورت لزوم ستون‌های ماتریس  $B$  را جابجا کرد و یا بطور معادل، ماتریس  $B$  را با ماتریس  $\tilde{B} = BP$  که  $P_{m \times m}$  یک ماتریس جایگشتی است و با جابجایی ستون‌های  $B$  ایجاد می‌شود تعویض کرد. اگر زوج  $(B, A)$  کنترل پذیر باشد، آنگاه زوج  $(\tilde{B}, A) = (BP, A)$  نیز کنترل پذیر است و برعکس. همچنین اندیس کنترل پذیری دو زوج با یکدیگر برابر است [۱۷].

**تذکره: [۱۷]** حل مسئله کنترل سیستم به روش پس‌خورد حالت برای زوج  $(B, A)$  با حل مسئله برای زوج  $(BP, A)$  معادل است، هرگاه  $P$  یک ماتریس معکوس پذیر باشد. فرض کنیم، ناورداهای کرونگر زوج  $(B, A)$  منظم باشند و به صورت زیر مرتب شده باشند

$$P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_m$$

که در آن

$$P_1 = P_2 = \dots = P_r = q + 1$$

<sup>۲</sup>Kronocker invariant

و

$$P_{r+1} = \dots = P_m = q$$

$$s = m - r \quad q = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$$

با توجه به تعریف ناورداهای کرونکر نتیجه می‌گیریم،  $r$  تا از این ناورداهای کرونکر برابر  $q + 1$  و  $s$  تای دیگر برابر  $q$  خواهند بود و  $r + s = m$  و اگر  $r = 0$  باشد، آنگاه  $P_1 = P_2 = \dots = P_m$ .

فرم استاندارد اشلون می‌تواند به طور عددی با انجام عملیات سطری تشابهی روی زوج  $(B, A)$  و به دنبال آن، عملیات ستونی تشابهی، تنها روی ماتریس  $A$  به دست آید. حال اگر، عملیات سطری مشابه بر روی یک ماتریس  $I_{n \times n}$  انجام شود، ماتریس تبدیل  $T^{-1}$  بدون احتیاج به تشکیل ماتریس کنترل پذیری به سادگی به دست می‌آید. به عبارت دیگر، برای تبدیل زوج  $(B, A)$  به  $(\hat{B}, \hat{A})$  ماتریس افزوده

$$Q = [B, A, I_n]$$

را در نظر می‌گیریم و عملیات تشابهی زیر را تعریف می‌کنیم  
 ۱. ضرب یا تقسیم یک سطر از  $Q$  به کمیت اسکالر  $k \neq 0$  و به دنبال آن، تقسیم یا ضرب ستون متناظر از ماتریس  $A$

$$\text{Row}(i) \rightarrow \text{Row}(i) \times k \quad \text{on } Q$$

$$\text{Column}(i) \rightarrow \text{Column}(i)/k \quad \text{on } A$$

۲. تفاضل مضربی از سطر  $i$  ام ماتریس  $Q$  از سطر  $j$  ام آن و به دنبال آن، جمع همان مضرب از ستون  $j$  ام ماتریس  $A$  با ستون  $i$  ام ماتریس  $A$ .

$$\text{Row}(j) \rightarrow \text{Row}(j) - k\text{Row}(i) \quad \text{On } Q$$

$$\text{Column}(i) \rightarrow \text{Column}(i) + k\text{Column}(j) \quad \text{on } A$$

۳. جابجایی سطر  $i$  ام و سطر  $j$  ام از ماتریس  $Q$  و به دنبال آن، جابجایی ستون  $j$  ام و ستون  $i$  ام از ماتریس  $A$

$$\text{Row}(i) \leftrightarrow \text{Row}(j) \quad \text{On } A$$

$$\text{Column}(j) \leftrightarrow \text{Column}(i) \quad \text{On } Q$$

بدین سان  $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$  به دست می‌آید. اگر عملیات سطری در ماتریس  $I_n$  ذخیره شود، ماتریس تبدیل  $T^{-1}$  به دست خواهد آمد.

مثال ۴.۵.۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i)$$

که در آن،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فرم استاندارد اشلون را با استفاده از عملیات تشابهی به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Row}(2) \rightarrow \text{Row}(3) \text{ on } Q]{\text{Column}(2) \rightarrow \text{Column}(3) \text{ on } A} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Row}(2) - 4\text{Row}(4) \rightarrow \text{Row}(2) \text{ on } Q]{\text{Column}(4) + 4\text{Column}(2) \rightarrow \text{Column}(4) \text{ on } A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Row}(3) - \text{Row}(4) \rightarrow \text{Row}(3) \text{ on } Q]{\text{Column}(4) + \text{Column}(3) \rightarrow \text{Column}(4) \text{ on } A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### ۲.۵.۳ فرم همدم برداری اولیه

فرض کنید،  $S$  تبدیل خطی تشابهی باشد که بر فضای  $\mathbb{R}^n$  تعریف شده است و بردار حالت سیستمی که به فرم استاندارد اشلون است، توسط ماتریس  $S^{-1}$  به فضای جدید تبدیل شود، یعنی

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}T^{-1}x(t)$$

با جایگذاری در معادله (۴.۳) خواهیم داشت

$$S\tilde{\dot{x}}(t) = \hat{A}\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

با ضرب طرفین بالا در  $S^{-1}$  داریم

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t) \quad (۶.۳)$$

قرار می‌دهیم،

$$\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS$$

$$\tilde{B} = S^{-1}T^{-1}B$$

با جایگذاری در معادله (۶.۳) خواهیم داشت

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (۷.۳)$$

به گونه‌ای که زوج  $(\tilde{B}, \tilde{A})$  به فرم همدم برداری اولیه خواهد بود. حل معادله سیستم (۷.۳) هم ارز با حل معادله (۴.۳) است.

در حقیقت برای تبدیل  $(B, A)$  به  $(\tilde{B}, \tilde{A})$  ابتدا ماتریس افزوده  $Q = [B, A, I_n]$  را در نظر گرفته و عملیات تشابهی را روی آن انجام داده تا به فرم استاندارد اشلون تبدیل شود یعنی؛  $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$  سپس ماتریس  $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$  را در نظر گرفته و با استفاده از عملیات تشابهی آن را به فرم همدم برداری تبدیل می‌کنیم. یعنی؛  $\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}T^{-1}]$  در حالتی که ناوردهای کرونکر منظم باشد، فرم همدم برداری به صورت

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix}$$

که در آن،  $B_0$  یک ماتریس  $m \times m$  بالا مثلثی و معکوس پذیر است و  $G_0$  ماتریس دلخواه  $m \times n$  و  $G_1$  ماتریس  $(n-m) \times n$  است که دارای خصوصیات زیر می‌باشد

۱. آخرین ستون بلوک  $G_1$  مساوی صفر است.

۲. بقیه ستون‌های  $G_1$  ستون‌هایی از ماتریس  $I_{n-m}$  است.

۳. اگر  $e_1, e_2, \dots, e_{n-m}$  به ترتیب ستون‌های اول تا  $n-m$  ام ماتریس  $I_{n-m}$  باشند، آنگاه این بردارها به ترتیب اندیس‌شان در ستون‌های  $G_1$  ظاهر می‌شوند، یعنی اگر  $i < j$  آنگاه  $e_i$  در  $G_1$  قبل از  $e_j$  قرار می‌گیرد.

با استفاده از فرم استاندارد اشلون، به دست آمده در مثال قبل فرم همدم برداری را به دست می‌آوریم.

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن فرم همدم برداری ابتدا اعمال ستونی مقدماتی روی ماتریس  $\hat{A}$  و سپس اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس  $\hat{Q}$  انجام می‌شود.

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{Column}(3)-\text{Column}(1)\rightarrow\text{Column}(3)\text{on}\hat{A}]{\text{Row}(1)+\text{Row}(3)\rightarrow\text{Row}(1)\text{on}\hat{Q}} \\ \xrightarrow[\text{Column}(4)+\text{Column}(1)\rightarrow\text{Column}(4)\text{on}\hat{A}]{\text{Row}(1)-\text{Row}(4)\rightarrow\text{Row}(1)\text{on}\hat{Q}} \\ \xrightarrow[\text{Column}(4)-4\text{Column}(2)\rightarrow\text{Column}(4)\text{on}\hat{A}]{\text{Row}(2)+4\text{Row}(4)\rightarrow\text{Row}(2)\text{on}\hat{Q}} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -5 & -5 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -5 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا ناوردهای کرونگر زوج  $(\tilde{B}, \tilde{A})$  منظم هستند و عبارتند از:  $P_1 = 2, P_2 = 2$

### ۳.۵.۳ تخصیص مقادیر ویژه به وسیله ماتریس پس خورد حالت

هدف از کنترل یک سیستم، یافتن ماتریس پس خورد حالت  $K$  در فضای تبدیل  $(B, A)$  است، به گونه‌ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $\Gamma = A + BK$  در مجموعه از پیش تعریف شده

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (۸.۳)$$

موسوم به طیف مقادیر ویژه با این خاصیت که،  $\lambda_i$  ها یا حقیقی‌اند و یا به صورت زوج‌های مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند، قرار گیرند. این مساله را تخصیص مقادیر ویژه گویند. برای یافتن  $K$  که در چند جمله ای مشخصه

$$P_n(s) = \det(sI - A - BK)$$

صدق کند، به گونه ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $\Gamma$  در  $(۸.۳)$  باشد، کرباسی و بل در [۱۷] نشان داده‌اند که در فضای تبدیل یافته  $(\tilde{B}, \tilde{A})$  ماتریس  $\tilde{K}$  را می‌توانیم به گونه‌ای بیابیم که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته

$$\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$$



همان مقادیر ویژه مورد نظر باشد. بدین سان ماتریس

$$\tilde{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} O_{m,n} & \\ I_{n-m} & O_{n-m,m} \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. اگر ماتریس قطری  $D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  با  $\Gamma_0$  جمع شود، بدیهی است که مقادیر ویژه ماتریس مجموع همان مقادیر ویژه  $D$  خواهد بود، زیرا  $\tilde{V} = \tilde{\Gamma}_0 + D$  یک ماتریس پایین مثلثی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن همان طیف مقادیر ویژه  $\lambda_i$  می‌تواند باشد. بنابراین، مقادیر ویژه  $\tilde{V}$  نیز در مجموعه  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  قرار دارند. حال اگر عملیات تشابهی

$$\text{Column}(j) = \text{Column}(j) - \lambda_j \text{Column}(i)$$

و به دنبال آن،

$$\text{Row}(i) = \text{Row}(i) + \lambda_j \text{Row}(j)$$

را به ازای  $i = j - m$  در  $j = n, n-1, \dots, m$  انجام دهیم، به  $\tilde{A}_\lambda$  تبدیل می‌شود که متشابه  $\tilde{A}$  است. بدین معنی که

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_\lambda & \\ I_{n-m} & O_{n-m,m} \end{bmatrix}$$

از آنجایی که  $\tilde{A}_\lambda$  متشابه ماتریس  $\tilde{V}$  است، بلذا که مقادیر ویژه تغییر نمی‌کنند. بنابراین، مقادیر ویژه  $\tilde{A}_\lambda$  برابر با مقادیر ویژه ماتریس  $\tilde{V}$  است. تعریف می‌کنیم

$$\tilde{K} = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)$$

ماتریس پس خورد حالت در فضای  $(\tilde{B}, \tilde{A})$  است که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$  را در طیف  $\Lambda$  قرار می‌دهد.

برای به دست آوردن ماتریس پس خورد حالت در فضای  $(B, A)$  داریم،

$$K_p = \tilde{K}T^{-1} = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1}$$

که آن را ماتریس پس خورد حالت اولیه، می‌نامیم، زیرا از فضای تبدیل یافته‌ای که در مبنای پایه است، موسوم به فضای حالت اولیه به دست آمده است.

## ۶.۳ کنترل سیستمهای متناوب

پدیده‌های متناوب در زمینه‌های مختلفی از علوم می‌توانند رخ دهند. از علوم طبیعی تا مهندسی، از فیزیک تا علوم زیستی و حتی در اقتصاد می‌توان تکرار یک چرخه را با دوره مشخص زمانی مشاهده نمود. برای مثال سیستم رباتی را در نظر بگیرید که چند کار پیاپی را انجام داده و پس از اتمام دوباره همان کارها را باید انجام دهد. سابقه ریاضی پدیده‌های متناوب به قرن نوزدهم میلادی برمی‌گردد. زمانی که معادلات دیفرانسیل با ضرایب متناوب در ریاضیات بدست آمد. یک سیستم متناوب حالت بین سیستم ناوردای زمانی (ضرایب ثابت) و متغیر زمانی است. در نیمه دوم قرن بیستم با توسعه سیستمها و نظریه کنترل، سیستمهای متناوب گسسته و پیوسته هم رونق بیشتری پیدا کرد [۲، ۱۰].

تعریف ۱.۶.۳. سیستم

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \\ y_k = C_k x_k + D_k u_k \end{cases} \quad (9.3)$$

را متناوب گوئیم هرگاه

$$A_{k+N} = A_k, B_{k+N} = B_k, C_{k+N} = C_k, D_{k+N} = D_k$$

تعریف ۲.۶.۳. [۲] سیستم (۹.۳) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$$

برای هر  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

قضیه ۳.۶.۳. [۲] سیستم (۹.۳) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه ماتریس یکدوره ای

$$\Psi = A_{N-1} A_{N-2} \cdots A_0$$

در دایره واحد باشد.

تعریف ۴.۶.۳. [۲] ماتریس گذر حالت سیستم متناوب گسسته به صورت زیر تعریف می شود

$$\Phi(t, r) = \begin{cases} I & t = r \\ A_{t-1} A_{t-2} \cdots A_r & t > r \\ 0 & t < r \end{cases}$$

با توجه به خاصیت تناوبی  $A_k$  داریم

$$\Phi(t + N, r + N) = \Phi(t, r)$$

تعریف ۵.۶.۳. [۲] ماتریس گذر حالت با یک دوره تناوب را ماتریس یک دوره ای<sup>۳</sup> گوئیم و به صورت

زیر نمایش می دهیم

$$\Psi_i = \Phi(i + N, i)$$

و در حالت ساده تر با شروع صفر به صورت

$$\Psi = \Phi(N, 0) = A_{N-1} A_{N-2} \cdots A_0$$

تعریف می شود. مقادیر ویژه  $\Psi$  ضرایب مشخصه سیستم نامیده می شوند.

تعریف ۶.۶.۳. [۲] سیستم متناوب (۹.۳) را در بازه زمانی  $(t_0, t)$  کنترل پذیر گوئیم هرگاه برای هر

حالت اولیه  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  مجموعه ای از ورودی های  $\{u_i\}_{i=s}^t$  چنان موجود باشند که وضعیت سیستم را از حالت اولیه  $x(t_0) = x_0$  در زمان  $t$  به مبدا منتقل نمایند. یک سیستم متناوب کاملاً کنترل پذیر است هرگاه در هر لحظه  $t$  کنترل پذیر باشد.

لم ۷.۶.۳. [۱۲] هر گاه سیستم متناوب با بعد  $n$  کنترل پذیر باشد، آنگاه روی بازه  $(0, mN)$  نیز کنترل پذیر است که  $m < n$  درجه چند جمله ای مینیمال ماتریس دوری می باشد.

تعریف ۸.۶.۳. [۲] سیستم متناوب (۹.۳) را در زمان  $t$  دسترس پذیر گوئیم هر گاه برای هر حالت  $x' \in \mathbb{R}^n$  مجموعه ای از ورودی های  $\{u_i\}_{i=s}^l$  چنان موجود باشند که وضعیت سیستم را از حالت اولیه  $x(t_0) = x_0$  در زمان  $t$  به  $x_t = x'$  منتقل نمایند. یک سیستم متناوب کاملاً دسترس پذیر است هر گاه در هر لحظه  $t$  دسترس پذیر باشد.

تعریف ۹.۶.۳. [۲۸] در یک سیستم متناوب، ماتریس کنترل پذیری (دسترس پذیری)، یک ماتریس با ستونهای نامتناهی است که به صورت زیر می باشد

$$R_k = \begin{bmatrix} B_{k-1} & A_{k-1}B_{k-2} & \cdots & \Phi(k, i+1)B_i & \cdots \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن ماتریس فوق می توان کنترل پذیری (دسترس پذیری) را به صورت زیر بیان کرد.

تعریف ۱۰.۶.۳. [۲۸] سیستم متناوب (۹.۳) را در زمان  $k$  کنترل پذیر (دسترس پذیر) گوئیم هرگاه

$$\text{rank}(R_k) = n$$

و کاملاً کنترل پذیر (دسترس پذیر) گوئیم هر گاه به ازای هر  $k$  کنترل پذیر (دسترس پذیر) باشد.

تعریف ۱۱.۶.۳. [۲۸] سیستم متناوب (۹.۳) را در زمان  $t$  مشاهده پذیر گوئیم هرگاه اعداد صحیح  $s$  و  $l$  که  $s < t < l$  چنان موجود باشند که هر حالت سیستم در زمان  $t$  را بتوان با توجه به  $\{u_i\}_{i=s}^l$  و  $\{y_i\}_{i=s}^l$  مشخص نمود. یک سیستم متناوب کاملاً مشاهده پذیر است هرگاه در هر زمان  $t$  کاملاً مشاهده پذیر باشد.

تعریف ۱۲.۶.۳. [۲۸] ماتریس مشاهده پذیری سیستم متناوب ماتریسی است با تعداد سطرهای نامتناهی

$$O_k = \begin{bmatrix} C_k \\ C_{k+1}Ak \\ \vdots \\ C_i\Phi_A(i, k) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۳.۶.۳. [۲۸] سیستم متناوب (۹.۳) را در زمان  $k$  مشاهده پذیر گوئیم هرگاه

$$\text{rank}(O_k) = n$$

و کاملاً مشاهده پذیر گوئیم هر گاه به ازای هر  $k$  مشاهده پذیر باشد.

در کنترل برخی از سیستمها ممکن است تعدادی از متغیرهای حالت مستقیماً در دسترس نباشند، بنابراین برای ساخت سیگنالهای کنترل باید این متغیرها را تخمین زد. تخمین متغیرهای حالت تنها زمانی امکان پذیر است که سیستم کاملاً مشاهده پذیر باشد. بنابراین مشاهده پذیری یکی از عوامل قابل توجه در بررسی رفتار یک سیستم می باشد.

تعریف ۱۴.۶.۳. [۲] یک سیستم متناوب را مینیمال گوئیم هرگاه کاملاً دسترس پذیر و مشاهده پذیر باشد.

سیستم متناوب (۹.۳) را در نظر بگیرید. اگر  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ ,  $S_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریسهای نامنفرد متناوب با دوره تناوب  $N$  باشند، دسترس پذیری و مینیمال بودن سیستم تحت تبدیل تشابهی

$$\tilde{A}_k = S_{k+1}^{-1} A_k S_k, \tilde{B}_k = S_{k+1}^{-1} B_k, \tilde{C}_k = C_k S_{k+1}$$

ناورداست.

با استفاده از این مطلب یک الگوریتم عددی جهت محاسبه قسمت دسترس پذیر سیستم گسسته زمانی متناوب معرفی می نماییم که منحصر از تبدیلات تشابهی متعامد استفاده می کند. برای محاسبه مشاهده پذیری می توان از یک الگوریتم دوگان استفاده نمود. با استفاده از این الگوریتم مساله تحقق مینیمال سیستمهای متناوب از روش عددی قابل حل خواهد بود.

قضیه ۱۵.۶.۳. [۲۸] سیستم متناوب (۹.۳) دسترس پذیر در زمان  $i$  است اگر و تنها اگر به ازای تمامی ضرایب مشخصه  $\lambda$  سیستم، داشته باشیم

$$\text{rank}[\lambda I - \Psi_i \quad G_i] = n$$

که

$$G_i = [\Phi(i+N, i+1)B_i \quad \Phi(i+N, i+2)B_{i+2} \quad \dots \quad B_{i+N-1}]$$

سیستم (۹.۳) را کاملاً دسترس پذیر گوئیم اگر و تنها اگر به ازای تمامی مقادیر  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  دسترس پذیر باشد.

### ۱.۶.۳ تبدیلات تشابهی سیستمهای متناوب

همانطور که در قسمتهای قبل گفته شد سیستم فضای حالت یکتا نیست و با تبدیلات تشابهی می توان بی نهایت سیستم فضای حالت هم ارز را که تابع تبدیل یکسان داشته باشند بدست آورد. هدف از بدست آوردن سیستم متشابه، بدست آوردن سیستم با ماتریسهای ساده تر (فرم همدم یا مثلثی) می باشد. با تبدیل  $x_k = T_k \tilde{x}_k$  که ماتریس  $T_k$  معکوس پذیر است، سیستم متناوب (۹.۳) به صورت زیر تبدیل می شود

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}_k \tilde{x}_k + \tilde{B}_k u_k,$$

$$\tilde{A}_{k+N} = \tilde{A}_k, \tilde{B}_{k+N} = \tilde{B}_k \text{ و } \tilde{B}_k = T_{k+1}^{-1} B_k \text{ و } \tilde{A}_k = T_{k+1}^{-1} A_k T_k$$

تبدیلات تشابهی مقادیر ویژه و خصوصیات اصلی سیستم از قبیل کنترل پذیری و مشاهده پذیری را تغییر نمی دهد [۲۸].

نکته: هر چند تعداد تبدیلات تشابهی بینهایت است اما از نقطه نظر آنالیز عددی بسیاری از ماتریسهای  $T_k$  بدحالت هستند و بهترین نوع ماتریسهای تبدیل، ماتریسهای متعامد هستند و بهترین شکل ماتریسهای  $\tilde{A}_k$  ماتریسهای بالا مثلثی هستند که خوشبختانه این تجزیه با استفاده از قضیه شور تعمیم یافته بدست می آید.

# فصل ۴

## پایدار سازی سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری

### ۱.۴ مقدمه

در این فصل به سیستم های گسسته زمانی متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری می پردازیم. ابتدا سیستم تک ورودی - تک خروجی مشتق کسری خطی را بیان و تابع تبدیل آن و سیستم فضای حالت آن را بدست می آوریم. برخی ویژگی های سیستم های گسسته زمانی خطی با مشتق مرتبه کسری مانند کنترل پذیری، قابلیت دسترسی و مشاهده پذیری را بیان می کنیم. پایداری این رده از سیستم ها را توسط پایداری عملی بررسی کرده و با تبدیل سیستم مشتق کسری به یک سیستم با تاخیر ثابت و سپس تبدیل به سیستم استاندارد متناوب به پایدارسازی آنها می پردازیم. با توجه به بزرگ شدن ماتریسهای سیستم حالت، تخصیص مقادیر ویژه بسیار سخت و دارای خطای زیاد می شود. تخصیص جزئی مقادیر ویژه باعث کاهش ابعاد ماتریسها شده و در نتیجه عملیات تخصیص با حجم کمتری مواجه می شود. برای سیستمهای مثبت که کاربرد فراوانی در مباحث فیزیکی دارند را می توان با شرایط متفاوتی از پایداری بررسی کرد. مثال هایی از همگرایی و تخصیص مقادیر ویژه سیستم مشتق کسری بیان شده است.

### ۲.۴ معادله دینامیکی سیستم مشتق مرتبه کسری

معادله دینامیکی سیستم تک ورودی - تک خروجی ناوردای زمانی با مشتق مرتبه کسری و نقطه اولیه صفر زیر را در نظر بگیرید:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) \cdots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) \cdots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (1.4)$$

و به طور خلاصه به صورت زیر بیان می شود

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{\beta_j} u(t)$$

بطوریکه  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$  و  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Q}^+$  و  $i = 0, \dots, n$  و  $j = 0, \dots, m$  است،  $n, m \in \mathbb{N}$  تعداد ورودی و خروجی سیستم معادلات دیفرانسیل است. اگر  $\alpha$  بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد گویای  $\{\alpha_i, \beta_j\}$  باشد، در این حالت می توان مرتبه مشتق تمامی جملات را مضربی از  $\alpha$  در نظر گرفت

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{n_i \alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{m_j \alpha} u(t)$$

که  $\alpha_i = n_i \alpha, \beta_j = m_j \alpha$ .

با استفاده از تبدیل لاپلاس مشتقات کسری فصل اول، شکل ورودی- خروجی سیستم فوق با مشتقات صفر در نقطه اولیه به صورت تابع تبدیل [۵]

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{\beta_j}}{\sum_{i=0}^n a_i s^{\alpha_i}}$$

نوشته می شود. برای بدست آوردن سیستم فضای حالت، ابتدا باید یک متغیر واسط مانند  $X(s)$  را تعریف کرد که در این حالت داریم

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x. \quad (2.4)$$

با بکارگیری تبدیل لاپلاس برای (۲.۴) داریم

$$X(s) = [s^\alpha I - A]^{-1} BU(s) + [s^\alpha I - A]^{-1} s^{\alpha-1} x(0)$$

با تعریف  $\Phi(t) = L^{-1}[s^\alpha I - A]^{-1}$  متناظر با ماتریس انتقال حالت، جواب حالت به صورت زیر است

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$\Phi(t)$  تابع میتاج - لفلر بصورت زیر بیان می شود [۵]

$$\Phi(t) = E_\alpha(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}$$

قضیه ۱.۲.۴. سیستم کنترل پذیر است اگر و تنها اگر رتبه ماتریس کنترل پذیری

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}$$

برابر  $n$  باشد. بر همین اساس سیستم مشاهده پذیر است اگر و تنها اگر رتبه ماتریس مشاهده پذیری

$$\Omega = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

برابر  $n$  باشد [۵].

### ۳.۴ سیستم های گسسته خطی با مشتق مرتبه کسری

در این قسمت یک نمایش گسسته شده از مدل فضای حالت کسری پیوسته از معادلات (۲.۴) را ارائه می دهیم. مدل فضای حالت با مشتقات مرتبه صحیح

$$D^1 x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

را در نظر بگیرید. برای  $kh \leq t \leq (k+1)h$  تقریب مشتق اول  $D^1 x(t)$  به صورت زیر بدست می آید

$$D^1 x(t) \approx \Delta^1 x((k+1)h) = \frac{x((k+1)h) - x(kh)}{h}$$

بنابراین می توان نوشت

$$\Delta^1 x((k+1)h) = Ax(kh) + Bu(kh).$$

تقریب مشتق کسری گرانوالد - لتنیکوف بدون استفاده از حد به صورت زیر است

$${}_G D^\alpha x(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x((k-j+1)h)$$

با تعریف  $x(kh) = x_k$  و

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1}$$

و با جایگذاری این عملگر در سیستم کسری پیوسته (۲.۴)، سیستم متناظر گسسته به صورت

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} = Ax_k + Bu_k$$

تبدیل و در نتیجه سیستم گسسته زیر بدست می آید

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} = (h^\alpha A)x_k + (h^\alpha B)u_k$$

بطوریکه  $h \in \mathbb{R}^+$  دوره نمونه برداری است. اگر  $\tilde{A} = h^\alpha A$  و  $\tilde{B} = h^\alpha B$  تعریف شود داریم

$$x_{k+1} = \tilde{A}x_k - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} + \tilde{B}u_k$$

می باشد. اگر  $c_j = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$  سیستم کسری گسسته می تواند به شکل زیر بازنویسی شود

$$x_{k+1} = (\tilde{A} - c_1 I_n)x_k - \sum_{j=2}^{k+1} c_j x_{k-j+1} + \tilde{B}u_k$$

با تعریف

$$A_0 = (\tilde{A} - c_1 I_n)$$

و

$$A_j = -c_{j+1} I_n, \quad j > 0$$

نتیجه می شود

$$x_{k+1} = A_0 x_k + A_1 x_{k-1} + A_2 x_{k-2} + \dots + A_k x_0 + \tilde{B} u_k \quad (3.4)$$

مقدار  $k$  می تواند بطور ذاتی تا بینهایت ادامه یابد. اما ضرایب  $c_i$  کوچک می شود و می توان از مرحله ای به بعد از بقیه آنها صرف نظر نمود تا به یک سیستم با بعد متناهی برسیم [۱۵]. یک سیستم مرتبه کسری یک سیستم با تاخیر افزایشی در هر مرحله می باشد.

## ۴.۴ سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری

سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (4.4)$$

سیستم (۴.۴) را می توان به صورت

$$x_{k+1} = (A_k + \alpha I_n) x_k + \sum_{i=1}^k c_i x_{k-i} + B_k u_k \quad (5.4)$$

تبدیل کرد که در آن  $c_i$  به صورت

$$c_i = (-1)^i \binom{\alpha}{i+1}, \quad i \in \mathbb{N}$$

است. در نتیجه سیستم (۴.۴) یک سیستم با تاخیر زمانی افزایشی خواهد بود. سیستم مرتبه کسری فوق یک سیستم با تاخیر افزایشی در هر مرحله می باشد که در نهایت با یک سیستم با تاخیر بی پایان مواجه خواهیم شد. کنترل این رده از سیستمها در شکل اصلی آنها تا کنون انجام نشده است. برای تبدیل سیستمهای با مشتق کسری متناوب به سیستمهای تاخیری معمولی متناوب می توان با توجه به کوچک شدن ضرایب متغیرهای تاخیر  $c_i$ ، تعداد زیاد و مشخص از این تاخیرها را انتخاب و بقیه را حذف کرد [۱۵]. قضایای مورد نیاز برای حفظ پایداری سیستم با حذف ضرایب کوچک به اثبات رسیده است [۱۵، ۱۶]. به علت دلخواه بودن تاخیرها می توانیم شرایط را به گونه ای در نظر بگیریم که سیستم با مزایای مشتقات کسری تقریباً اتفاق بیافتد.

### ۱.۴.۴ پایداری عملی

دنباله  $c_i$  به صفر همگراست [۱۵]. با در نظر گرفتن  $c_i = 0$  برای  $i > L$  سیستم (۵.۴) به سیستم

$$x_{k+1} = (A_k + \alpha I_n) x_k + \sum_{i=1}^L c_i x_{k-i} + B_k u_k \quad (6.4)$$



که یک سیستم با تاخیر زمانی  $L$  متناوب با دوره تکرار  $N$  تبدیل می شود [۳]. با تغییر متغیرهای

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{k-L} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n}},$$

$$\bar{A}_k = \begin{bmatrix} A_k + \alpha I_n & c_1 I & c_2 I & \cdots & c_{L-1} I & c_L I \\ I & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \circ & I & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & I & \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}},$$

$$\bar{B}_k = \begin{bmatrix} B_k \\ \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times m}, \quad \bar{n} = (L+1)n,$$

$$\bar{C}_k = [C_k \quad \circ \quad \circ \quad \cdots \quad \circ] \in \mathbb{R}^{p \times \bar{n}}, \quad \bar{D}_k = D_k \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

سیستم (۶.۴) به سیستم متناوب استاندارد

$$X_{k+1} = \bar{A}_k X_k + \bar{B}_k u_k \quad (7.4)$$

تبدیل می شود.

تعریف ۱.۴.۴. [۳، ۱۵] سیستم کسری متناوب (۴.۴) را پایدار عملی گوئیم هرگاه سیستم (۷.۴) پایدار مجانبی باشد.

قضیه ۲.۴.۴. [۲] سیستم کسری متناوب (۴.۴) پایدار عملی است اگر فقط اگر مقادیر ویژه

$$\bar{\Psi} = \bar{A}_{N-1} \bar{A}_{N-2} \cdots \bar{A}_0$$

در داخل دایره باز به شعاع واحد باشد.

### ۲.۴.۴ پایدار سازی سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری

در این قسمت به ارائه روشی برای یافتن ماتریسهای پسخوردهای حالت سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری خواهیم پرداخت. قانون کنترل

$$u_k = \bar{F}_k X_k = \sum_{i=0}^L \bar{F}_{k,k-i} x_{k-i}$$

که  $\bar{F}_k$  ها ماتریسهای متناوب با دوره تناوب  $N$  به صورت

$$\bar{F}_k = [\bar{F}_{k,k} \quad \bar{F}_{k,k-1} \quad \cdots \quad \bar{F}_{k,k-L+1}]$$

باشند را در نظر بگیرید. با جایگذاری قانون کنترل در سیستم (۶.۴) داریم

$$x_{k+1} = (A_k + \alpha I_n) x_k + \sum_{i=1}^L c_i x_{k-i} + B_k \sum_{i=0}^L \bar{F}_{k,k-i} x_{k-i}. \quad (8.4)$$

و سیستم حلقه بسته به صورت زیر بدست می آید

$$x_{k+1} = (A_k + \alpha I_n + B_k \bar{F}_{k,k}) x_k + \sum_{i=1}^L (c_i I_n + B_k \bar{F}_{k,k-i}) x_{k-i} \quad (9.4)$$

با تعریف

$$\bar{\Gamma}_k = \begin{bmatrix} A_k + \alpha I_n + B_k \bar{F}_{k,k} & c_1 I + B_k \bar{F}_{k,k-1} & \cdots & c_L I + B_k \bar{F}_{k,k-L} \\ I & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & I & \circ & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & I & \circ \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

و یا به صورت معادل

$$\bar{\Gamma}_k = \bar{A}_k + \bar{B}_k \bar{F}_k$$

سیستم (۹.۴) تبدیل به سیستم استاندارد حلقه بسته متناوب

$$X_{k+1} = \bar{\Gamma}_k X_k = (\bar{A}_k + \bar{B}_k \bar{F}_k) X_k \quad (11.4)$$

می شود و سیستم جدید (۱۱.۴) همچنان یک سیستم متناوب است. به منظور استفاده بهتر از هدف اصلی استفاده از مشتقات کسری باید تعداد جملات سری (۸.۴) را بیشتر در نظر بگیریم که ابعاد سیستم استاندارد (۱۰.۴) زیاد خواهد شد.

### ۳.۴.۴ ماتریس یک دوره ای سیستم متناوب استاندارد شده

ماتریس یک دوره ای سیستم متناوب استاندارد شده (۱۱.۴) به صورت زیر است

$$\bar{\Psi}_c = \bar{\Gamma}_{N-1} \bar{\Gamma}_{N-2} \cdots \bar{\Gamma}_0$$

و در نتیجه  $\bar{\Psi}_c$  به صورت زیر تبدیل می شود

$$\bar{\Psi}_c = (\bar{A}_{N-1} + \bar{B}_{N-1} \bar{F}_{N-1}) \cdots (\bar{A}_0 + \bar{B}_0 \bar{F}_0). \quad (12.4)$$

برای کنترل سیستم متناوب استاندارد شده باید مقادیر ویژه ماتریس یک دوره ای  $\bar{\Psi}_c$  در داخل دایره واحد قرار گیرد. به عبارت دیگر به دنبال ماتریس های پسخورد  $\bar{F}_k, k \in 0 \dots N-1$  هستیم که سیستم (۱۱.۴) را پایدار کند. فرض کنید

$$\Lambda = \{\lambda_i | \lambda_i \in \mathbb{C}\}$$

مقادیر ویژه دلخواه ماتریس یک دوره ای  $\bar{\Psi}_c$  باشد. باید ماتریس پسخورد  $\bar{F}_k$  را بیابیم طوری که  $\lambda(\bar{\Psi}_c) = \Lambda$ .

#### ۴.۴.۴ شرط کنترل پذیری (دسترس پذیری) سیستمهای ناپایدار

قضیه ۳.۴.۴ [۲۸] سیستم متناوب (۷.۴) در  $k$  مرحله دسترس پذیر است اگر و فقط اگر

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - \bar{\Psi} & W_k \end{bmatrix} = n$$

که  $\lambda \neq 0$  ضرایب مشخصه  $\bar{\Psi}$  و

$$W_k = \begin{bmatrix} \Phi(k+N, k+1)\bar{B}_k & \Phi(k+N, k+2)\bar{B}_{k+1} & \dots & \bar{B}_{k+N-1} \end{bmatrix}$$

و

$$\Phi(i, j) = \bar{A}_{i-1} \times \bar{A}_{i-2} \dots \bar{A}_j \quad i > j$$

هستند.

اگر سیستم متناوب (۷.۴) دسترس پذیر باشد ماتریسهای پسخورد متناوب  $\bar{F}_k$  موجود است که سیستم (۷.۴) را پایدار کند.

#### ۵.۴.۴ تخصیص مقادیر ویژه ماتریس یک دوره ای

در این قسمت با بدست آوردن شکل ساده تری از ماتریس یک دوره ای، ماتریسهای پسخورد را بدست می آوریم. اگر

$$G = (\bar{A}_{N-1} + \bar{B}_{N-1}\bar{F}_{N-1}) \dots (\bar{A}_1 + \bar{B}_1\bar{F}_1)$$

آنگاه ماتریس یک دوره ای (۱۲.۴) به صورت زیر تبدیل خواهد شد

$$\bar{\Psi}_c = G(\bar{A}_0 + \bar{B}_0\bar{F}_0)$$

با انتخاب دلخواه ماتریس های  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_{N-1}$  طوری که کنترل پذیری سیستم  $(G\bar{A}_0, G\bar{B}_0)$  تضمین شود داریم

$$\bar{\Psi}_c = (G\bar{A}_0 + G\bar{B}_0\bar{F}_0) = A' + B'\bar{F}' \quad (۱۳.۴)$$

با استفاده از فرم همدم برداری، باید ماتریس پسخورد  $\bar{F}'$  را طوری بیابیم که مقادیر ویژه (۱۳.۴) طیف  $\lambda(\bar{\Psi}_c) = \Lambda$  شوند.

مثال ۴.۴.۴. در این مثال برای یک سیستم سه-متناوب ناپایدار، ماتریس های پسخورد مناسب را بدست می آوریم.

$$\Delta^{\alpha} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (14.4)$$

که

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1/55 & 0/7 \\ 2 & -1/25 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0/05 & 0/7 \\ 0/9 & 0/55 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/8 \\ 0/7 & 0/55 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 4/3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2/7 \\ 2 & 0/9 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3/2 & 0/8 \\ 4/1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{\alpha 0} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0/7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_{\alpha 1} = \begin{bmatrix} 0/3 & 0/7 \\ 0/9 & 0/8 \end{bmatrix}, A_{\alpha 2} = \begin{bmatrix} 0/75 & 0/8 \\ 0/7 & 0/8 \end{bmatrix}$$

$$A_{\alpha 2} A_{\alpha 1} A_{\alpha 0} = \begin{bmatrix} 4/031 & 0/6615 \\ 3/9340 & 0/651 \end{bmatrix}$$

با توجه به مقدار قطری بیشتر از یک در  $A_{\alpha 2} A_{\alpha 1} A_{\alpha 0}$  سیستم کسری (۱۴.۴) ناپایدار است [۲] و در نتیجه متغیرهای حالت به صفر همگرا نیستند. با تشکیل ماتریسهای افزوده، می توان ماتریسهای پسخورد حالت را بدست آورد.

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 1/8 & 0/7 & 0/094 & 0 & 0/055 & 0 & 0/038 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0/094 & 0 & 0/055 & 0 & 0/038 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0/3 & 0/7 & 0/094 & 0 & 0/06 & 0 & 0/04 & 0 \\ 0/9 & 0/8 & 0 & 0/094 & 0 & 0/055 & 0 & 0/038 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,8 & 0,094 & 0 & 0,06 & 0 & 0,04 & 0 \\ 0,7 & 0,8 & 0 & 0,094 & 0 & 0,06 & 0 & 0,04 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_0 = \begin{bmatrix} 4,3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2,7 \\ 2 & 0,9 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 3,2 & 0,8 \\ 4,1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به قضیه ۳.۴.۴ این سیستم دسترسپذیر است و ماتریسهای پسخوردهای  $F_0, F_1, F_2$  موجود است که سیستم پایدار شود یعنی مقادیر ویژه ماتریس دوره ای  $\bar{\Psi}_c$  به صورت

$$\Lambda = \text{eig}(\bar{\Psi}_c) = \{0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8\}$$

تبدیل شوند. با استفاده از روش همدم برداری، می توان ماتریسهای پسخوردهای حالت را به صورت زیر بدست آورد.

$$\bar{F}_2 = \begin{bmatrix} -47,62 & 42,0 & 76,17 & -60,94 & -49,25 & 39,4 & 13,0 & -10,4 \\ 194,56 & -169,0 & -312,32 & 243,76 & 201,92 & -157,6 & -53,3 & 41,6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_1 = \begin{bmatrix} -6,40 & 10,30 & 6,09 & -18,28 & -3,94 & 11,82 & 1,04 & -3,12 \\ 13,22 & -19,33 & -13,54 & 33,85 & 8,75 & -21,89 & -2,31 & 5,78 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_0 = \begin{bmatrix} 0,85 & -1,00 & -0,72 & 0,72 & 0,19 & -0,19 & -0,02 & 0,02 \\ -1,44 & 1,88 & 0,39 & -1,71 & -0,12 & 0,51 & 0,01 & -0,05 \end{bmatrix}$$

که داریم

$$\Lambda((\bar{A}_2 + \bar{B}_2 \bar{F}_2)(\bar{A}_1 + \bar{B}_1 \bar{F}_1)(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 \bar{F}_0)) = \{0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8\}.$$

با تجزیه به صورت

$$\bar{F}_2 = \begin{bmatrix} \bar{F}_{2,3} & \bar{F}_{2,2} & \bar{F}_{2,1} & \bar{F}_{2,0} \end{bmatrix},$$

$$\bar{F}_1 = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1,3} & \bar{F}_{1,2} & \bar{F}_{1,1} & \bar{F}_{1,0} \end{bmatrix},$$

$$\bar{F}_0 = \begin{bmatrix} \bar{F}_{0,3} & \bar{F}_{0,2} & \bar{F}_{0,1} & \bar{F}_{0,0} \end{bmatrix},$$

و جایگذاری در

$$u_k = \sum_{i=0}^3 \bar{F}_{k,k-i} x_{k-i}$$

سیستم (۱۴.۴) به ازای هر نقطه اویه دلخواه به صفر همگرا و در نتیجه پایدار می شود. شکل ۲.۴ و شکل ۴.۴ همگرایی

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$$

را با نقطه شروع (۱, ۱) در سیستم (۱۴.۴) نشان می دهند.

## ۵.۴ سیستمهای مثبت مرتبه کسری متناوب

تعریف ۱.۵.۴ [۹] سیستم دینامیکی (۲.۳) را مثبت داخلی می نامیم اگر و فقط اگر برای هر نقطه شروع مثبت متغیرحالت و متغیر نامنفی ورودی، متغیر حالت سیستم مثبت بماند. یعنی

$$x(t_0) \geq 0, u(t) \geq 0 \implies x(t) \geq 0, \forall t \geq t_0.$$

تعریف ۲.۵.۴ [۹] سیستم دینامیکی (۲.۳) را مثبت خارجی می نامیم اگر و فقط اگر برای هر نقطه شروع مثبت متغیرحالت و متغیر نامنفی ورودی، متغیر خروجی سیستم مثبت شود.

$$x(t_0) \geq 0, u(t) \geq 0 \implies y(t) \geq 0, \forall t \geq t_0.$$

نکته: واضح است که سیستم مثبت داخلی متضمن مثبت شدن خارجی می شود. به همین دلیل در این پایان نامه سیستم را مثبت داخلی فرض می کنیم. اکثر سیستمهای بوجود آمده در صنعت مثبت می باشند [۹].

قضیه ۳.۵.۴ [۹] سیستم متناوب خطی گسسته (۹.۳) مثبت است اگر و فقط اگر

$$A_i \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, B_i \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$$

برهان. با توجه به مثبت بودن ماتریسهای  $A_i, B_i$  و بردار حالت اولیه و بردار کنترل، مثبت شدن  $x_k$  واضح است. □

قضیه ۴.۵.۴ سیستم متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری (۴.۴) و در نتیجه (۵.۴) مثبت است اگر و فقط اگر

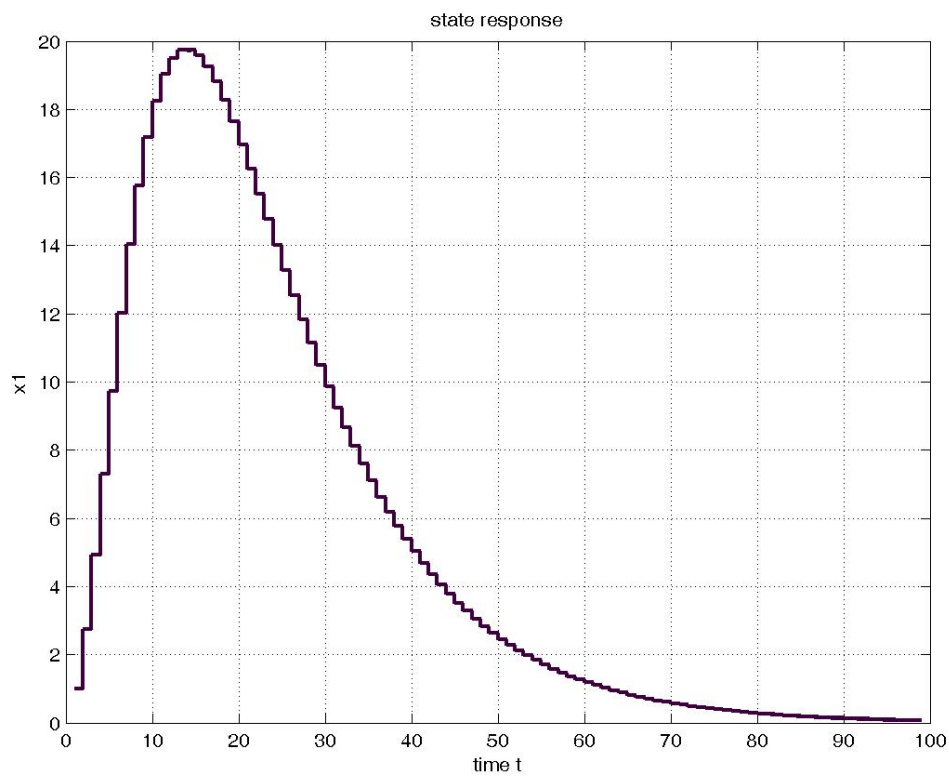
$$A_i + \alpha I_n \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, B_i \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$$

برهان. با توجه به مثبت بودن ضرایب  $c_i = (-1)^i \binom{\alpha}{i+1}$  و ماتریسهای  $A_i + \alpha I_n, B_i$  مثبت بودن سیستم نتیجه می شود. □

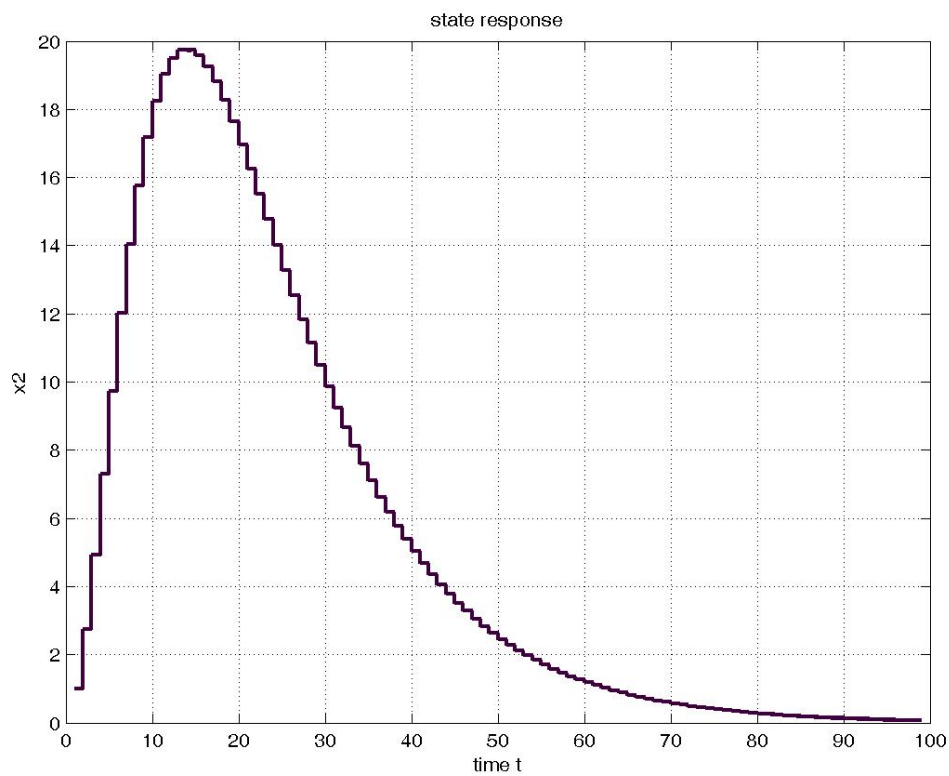
قضیه ۵.۵.۴ [۲] سیستم متناوب (۷.۴) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر سیستم

$$X_{i+1} = \bar{\Psi} X_i \quad (15.4)$$

پایدار مجانبی باشد



شکل ۱۰۴: همگرایی  $x_1(t)$  در سیستم مرتبه کسری (۱۴.۴) با استفاده از ماتریس پسخورد



شکل ۲۰۴: همگرایی  $x_2(t)$  در سیستم مرتبه کسری (۱۴.۴) با استفاده از ماتریس پسخورد

قضیه ۶.۵.۴ [۱۴]. برای سیستم مثبت متناوب با مشتق مرتبه کسری، شرایط زیر معادل هستند  
\* سیستم پایدار عملی است

\*

$$\rho(\bar{\Psi}) < 1$$

\* همه ضرایب  $\tilde{a}_i$  از چند جمله ای مشخصه

$$\tilde{p}_{\bar{\Psi}}(z) = \det[(z + 1)I_n - \bar{\Psi}]$$

مثبت هستند

\* همه مینورهای اصلی

$$\widehat{\bar{\Psi}} = I_n - \bar{\Psi}$$

مثبت هستند.

\* ماتریس اکیدا مثبت قطری  $P$  موجود است که ماتریس

$$\bar{\Psi}^T P \bar{\Psi} - P$$

معین منفی شود.

\* ماتریس اکیدا مثبت  $x > 0$  موجود است که  $(\bar{\Psi} - I_n)x < 0$ .

□

برهان. با توجه به قضیه ۵.۵.۴ و [۲] قضیه اثبات می شود.

قضیه ۷.۵.۴. اگر سیستم مشتق کسری متناوب مثبت (۴.۴) پایدار عملی باشد آنگاه سیستم

$$x_{k+1} = (A_k + \alpha I_n)x_k$$

پایدار مجانبی باشد.

برهان. با توجه به مثبت و پایدار عملی بودن سیستم مشتق کسری متناوب (۴.۴)، سیستم

$$x_{k+1} = (A_k + \alpha I_n)x_k + \sum_{i=0}^L c_i x_{k-i} \quad (16.4)$$

پایدار مجانبی است و در نتیجه به صفر میل می کند. مثبت بودن  $c_i$ ،  $x_i$  و همگرایی  $x_i$  به صفر، باعث همگرایی

$$x_{k+1} = (A_k + \alpha I_n)x_k$$

□

به صفر می شود و در نتیجه پایدار مجانبی است. [۹].

عکس قضیه فوق به صورت زیر می تواند بیان شود.

قضیه ۸.۵.۴. [۹] سیستم مرتبه کسری متناوب عملاً ناپایدار است اگر سیستم (۱۶.۴) به ازای هر  $L$  ناپایدار مجانبی است.



قضیه ۹.۵.۴. [۹] اگر سیستم کسری مثبت عملاً ناپایدار باشد حداقل یکی از درایه های قطری

$$A_{\alpha_{N-1}} \cdots A_{\alpha_1}$$

بیشتر از یک است.

مثال ۱۰.۵.۴. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\Delta^{0.25} x_{k+1} = A_i x_k$$

که

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, A_k = A_{k-2}, h = 3, \alpha = 0.25$$

$$A_{\alpha_0} = A_0 + 0.25I = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.1 \\ 0.1 & 0.35 \end{bmatrix}, A_{\alpha_1} = A_1 + 0.25I = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.2 \\ 0.3 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} = 0.0938, c_2 = 0.0547, c_3 = 0.0376$$

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.1 & 0.0938 & 0 & 0.055 & 0 & 0.038 & 0 \\ 0.1 & 0.35 & 0 & 0.0938 & 0 & 0.055 & 0 & 0.038 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.2 & 0.0938 & 0 & 0.06 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0.3 & 0.35 & 0 & 0.0938 & 0 & 0.055 & 0 & 0.038 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi} = \bar{A}_1 \bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0,28 & 0,13 & 0,1 & 0,01 & 0,06 & 0,01 & 0,02 & 0,004 \\ 0,14 & 0,24 & 0,01 & 0,09 & 0,01 & 0,06 & 0,004 & 0,01 \\ 0,35 & 0,2 & 0,09 & 0 & 0,06 & 0 & 0,04 & 0 \\ 0,3 & 0,35 & 0 & 0,09 & 0 & 0,06 & 0 & 0,04 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

سیستم عملاً پایدار است زیرا مقادیر ویژه  $\bar{\Psi}$  عبارت اند از

$$\begin{bmatrix} 0,66 \\ 0,39 \\ 0,14 \\ 0,11 \\ -0,14 + 0,02I \\ -0,14 + 0,02I \\ -0,16 - 0,02I \\ -0,16 + 0,02I \end{bmatrix}$$

و قدر مطلق همه آنها از یک کمتر است.

با توجه به قضیه ۶.۵.۴ شرایط هم ارز دیگر نیز باید برقرار باشد. یعنی

\* ضرایب چند جمله ای مشخصه

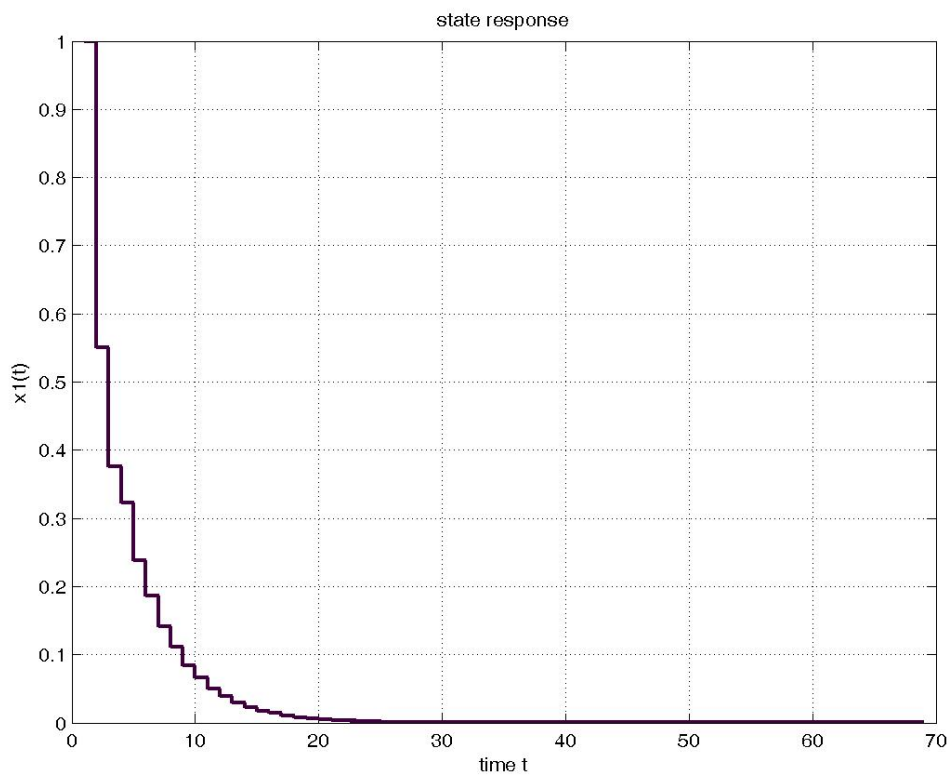
$$\det[(z+1)I - \bar{\Psi}] = z^8 + 6,7z^7 + 18,9z^6 + 29,4z^5 + 27,2z^4 + 15,1z^3 + 4,7z^2 + 0,7z + 0,03$$

همگی مثبت هستند.

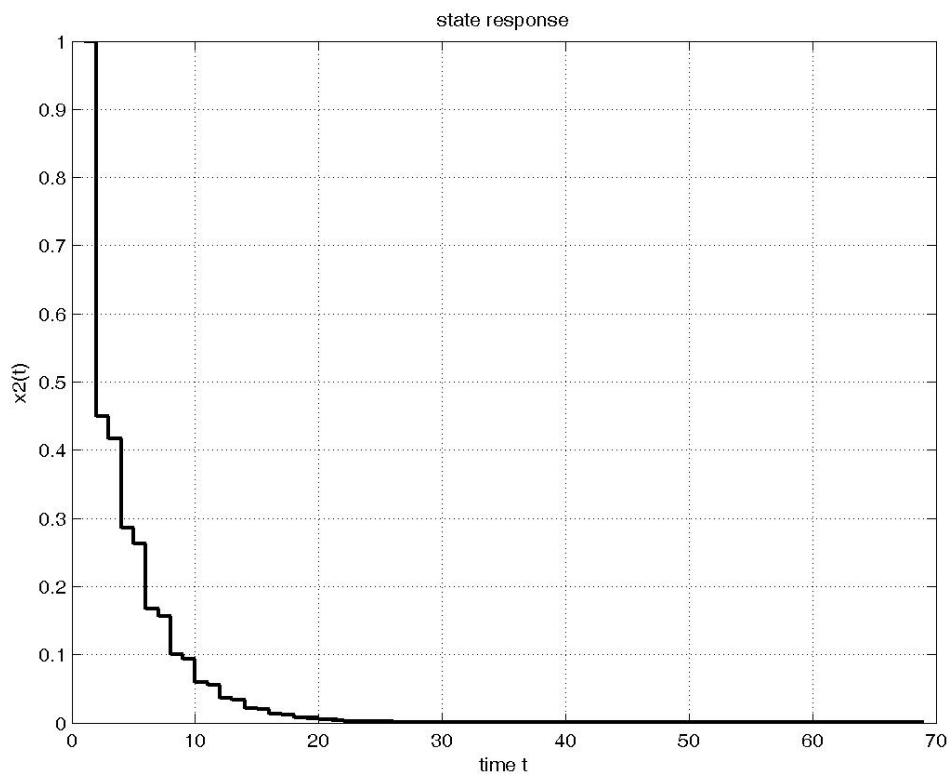
\* درمیان همه مینورهای اصلی  $\hat{\Psi} = I - \bar{\Psi}$  مثبت هستند.

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} 0,72 & -0,13 & -0,1 & -0,01 & -0,06 & -0,01 & -0,02 & -0,004 \\ -0,14 & 0,76 & -0,01 & -0,09 & -0,01 & -0,06 & -0,004 & -0,01 \\ -0,35 & -0,2 & 0,91 & 0 & -0,06 & 0 & -0,04 & 0 \\ -0,3 & -0,35 & 0 & 0,91 & 0 & -0,06 & 0 & -0,04 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det([0,72]) = 0,72, \det\left(\begin{bmatrix} 0,72 & -0,13 \\ -0,14 & 0,76 \end{bmatrix}\right) = 0,55, \dots, \det(\hat{\Psi}) = 0,27$$



شکل ۳.۴: همگرایی  $x_1$  در سیستم مثبت مثال ۱۰.۵.۴



شکل ۴.۴: همگرایی  $x_2$  در سیستم مثبت مثال ۱۰.۵.۴

مثال ۱۱.۵.۴.

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = A_k x_k \quad (17.4)$$

که

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.7 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0 \end{bmatrix}, A_k = A_{k-2}, \alpha = 0.8$$

$$A_{\alpha 1} = A_1 + 0.8I = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.9 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A_{\alpha 2} = A_2 + 0.8I = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A_{\alpha 2} A_{\alpha 1} = \begin{bmatrix} 0.945 & 1.165 \\ 0.93 & 1.13 \end{bmatrix}$$

یکی از درایه های قطر اصلی  $A_{\alpha 2} A_{\alpha 1}$  از یک بیشتر است و با توجه به قضیه ۹.۵.۴ سیستم (۱۷.۴) عملاً ناپایدار است.

## ۶.۴ تخصیص جزئی سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری

باتوجه به افزایشی بودن تعداد تاخیرها در مشتقات مرتبه کسری و استفاده از تقریب عملی آنها، هر چه تعداد تاخیر بیشتری مورد استفاده قرار گیرد شباهت سیستم استاندارد شده با سیستم کسری بیشتر خواهد شد. انتخاب زیاد تعداد تاخیرها، بعد ماتریس های سیستم متناوب استاندارد و همچنین ماتریس دوره ای را افزایش می دهد. تغییر مقادیر ویژه ماتریس با ابعاد بزرگ و یافتن ماتریس پسخورد این دسته از سیستم ها به روشهای معمول QR و یا تجزیه شور بسیار مشکل است [۶، ۲۵، ۲۸]. در میان همه مقادیر ویژه ماتریس دوره ای، تنها تعداد کمی از آنها خارج دایره واحد هستند و بقیه داخل دایره قرار دارند. سوال این است که در صورت امکان آیا تغییر تعداد محدودی از مقادیر ویژه خارج دایره و تغییر ندادن مقادیر ویژه مناسب به ما در کاهش ابعاد سیستم و کاهش حجم محاسبات و خطای احتمالی کمکی می کند یا خیر؟ پاسخ به پرسش باعث به وجود آمدن مبحث مهمی در کنترل سیستمهای خطی به نام تخصیص جزئی مقادیر ویژه شده است. در اینجا شرایط لازم و کافی برای کنترل پذیری و وجود جواب مساله تخصیص جزئی را بیان و با مثالی به بررسی این مساله می پردازیم.

### ۱.۶.۴ وجود و یکتایی

تعریف ۱.۶.۴ [۶] سیستم  $(A; B)$  نسبت به مقدار ویژه  $\lambda$  از  $A$  جزئاً کنترل پذیر است اگر برای بردار ویژه متناظر چپ ماتریس  $A$  داشته باشیم  $y^H B \neq 0$ .

تعریف ۲.۶.۴. [۶] سیستم  $(A; B)$  کاملاً کنترل پذیر است اگر نسبت به همه مقادیر ویژه  $A$  کنترل پذیر باشد.

قضیه ۳.۶.۴. [۶] مساله تخصیص جزئی مقادیر ویژه سیستم  $(A; B)$  برای مجموعه دلخواه  $S \subseteq \Lambda(A)$  قابل حل است اگر و فقط اگر سیستم  $(A; B)$  کاملاً کنترل پذیر باشد. در حالت چند ورودی بی نهایت جواب وجود دارد.

قضیه ۴.۶.۴. [۶] فرض کنید

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\} \quad (18.4)$$

که  $\lambda_i$  مقادیر ویژه  $A$  باشند و مجموعه های  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  مجزا باشند. اگر بخواهیم مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  به  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  تغییر کند و بقیه مقادیر ویژه ثابت بماند آنگاه مساله تخصیص جزئی مقادیر ویژه  $(A; B)$  برای هر انتخاب  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  قابل انجام است اگر و فقط اگر  $(A; B)$  نسبت به مجموعه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  جزئاً کنترل پذیر باشد.

## ۲.۶.۴ الگوریتم تخصیص جزئی مقادیر ویژه

[۶] فرض کنید سیستم  $(A'; B')$  کنترل پذیر باشد و  $\{\lambda_i | \lambda_i \in \mathbb{C}\}$  مقادیر ویژه ماتریس  $A'$  باشند. مقادیر ویژه خارج دایره واحد ماتریس  $A'$  را با  $\Omega(A') = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  نشان داده و می خواهیم به  $S = \{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  تغییر دهیم و بقیه را بدون تغییر می گذاریم.

۱- ماتریس پسخورد  $F_0$  را می یابیم که

$$\Omega(\bar{\Psi}_c) = \Omega(A' + B'F_0) = \{\mu_1, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$$

۲- قرار دهید

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$$

بردارهای ویژه ماتریس  $A'$  متناظر با مقادیر ویژه  $\Omega(A')$  باشند

۳- قرار دهید

$$A_{p \times p} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

$$B_{p \times m} = Y^H B'$$

۴- ماتریس پسخورد  $F_{m \times p}$  را می یابیم که

$$\text{eig}(A + BF) = \{\mu_1, \dots, \mu_p\}$$

۵- قرار می دهیم

$$F_0 = F \times Y^H$$

در نتیجه

$$\text{eig}(\bar{\Psi}_c) = \text{eig}(A' + B'F_0) = \{\mu_1, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$$

مثال ۵.۶.۴. ماتریس های پسخورد سیستم ناپایدار زیر را توسط الگوریتمهای تخصیص کلی و تخصیص جزئی مقادیر ویژه بیابید و نتیجه را به طور کامل با یکدیگر مقایسه کنید.

$$\Delta^{\alpha} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (19.4)$$

که داریم

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.52 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & -0.6 & 1/2 \\ 0 & 2 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.7 & 0.9 \\ 0.9 & 0 & 0.2 \\ 1/5 & 0.2 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.625 & 0.8 & 0.9 \\ 0.7 & 0 & 0.2 \\ 1 & 1/2 & -0.8 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 4/3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2/7 \\ 2 & 0.9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3/2 & 0.8 \\ 4/1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\alpha 0} = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$A_{\alpha 1} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 0.2 \\ 1/5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$A_{\alpha 2} = \begin{bmatrix} 0.175 & 0.8 & 0.9 \\ 0.7 & 0.8 & 0.2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.7 & 0.3 & 0.08 & 0 & 0 & 0.32 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 1/2 & 0 & 0.08 & 0 & 0 & 0.32 & 0 \\ 0 & 2 & 0.3 & 0 & 0 & 0.08 & 0 & 0 & 0.32 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,9 & 0,08 & 0 & 0 & 0,032 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,8 & 0,2 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0,032 & 0 \\ 1,5 & 0,2 & 0,3 & 0 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0,032 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,175 & 0,8 & 0,9 & 0,08 & 0 & 0 & 0,032 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,8 & 0,2 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0,032 & 0 \\ 1 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0,08 & 0 & 0 & 0,032 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_0 = \begin{bmatrix} 4,3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2,7 \\ 2 & 0,9 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 3,2 & 0,8 \\ 4,1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به دلیل قضیه ۳.۴.۴ سیستم فوق دسترسپذیر است و ماتریسهای  $\bar{F}_0, \bar{F}_1, \bar{F}_2$  موجود است که مقادیر ویژه ماتریس دوره ای  $\bar{\Psi}_c$  داخل دایره واحد باشد. ماتریسهای پسخورد  $\bar{F}_1, \bar{F}_2$  را طوری بدست می آوریم که مقادیر ویژه  $\Lambda(\bar{\Gamma}_2) = \lambda(\bar{A}_2 + \bar{B}_2 \bar{F}_2)$  و  $\Lambda(\bar{\Gamma}_1) = \lambda(\bar{A}_1 + \bar{B}_1 \bar{F}_1)$  کمتر از یک باشد و کنترل پذیری  $(A', B') = (\bar{\Gamma}_2 \bar{\Gamma}_1 \bar{A}_0, \bar{\Gamma}_2 \bar{\Gamma}_1 \bar{B}_0)$  تضمین شده باشد. با در نظر گرفتن

$$\bar{F}_2 = \begin{bmatrix} F_2(2) & F_2(1) & F_2(0) \end{bmatrix}$$

که

$$F_2(2) = \begin{bmatrix} -1,46 & 1,02 & -17,87 \\ 5,83 & -4,55 & 71,87 \end{bmatrix}$$

$$F_2(1) = \begin{bmatrix} 17,00 & 21,66 & 1,98 \\ -68,97 & -87,84 & -8,12 \end{bmatrix}$$

$$F_2(0) = \begin{bmatrix} -0,42 & -1,55 & 3,31 \\ 1,68 & 6,27 & -13,37 \end{bmatrix}$$

و

$$\bar{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1(2) & F_1(1) & F_1(0) \end{bmatrix}$$

که

$$F_1(2) = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,3 & -0,03 \\ -0,07 & 0,17 & -0,09 \end{bmatrix}$$

$$F_1(1) = \begin{bmatrix} -0,39 & -0,42 & 0,06 \\ -0,08 & 0,14 & -0,06 \end{bmatrix}$$

$$F_1(0) = \begin{bmatrix} 0,07 & -0,02 & 0,01 \\ -0,02 & 0,01 & -0,03 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه  $A' = \bar{F}_2 \bar{F}_1 \bar{A}$  عبارت اند از

$$\Lambda = \{5,29, -1,2, 0,078 \pm 0,168i, -0,001 \pm 0,009i, 0,008, 0, -0,001\}$$

دو حالت زیر بررسی شده است

حالت اول. در این حالت ماتریسهای پسخور  $\bar{F}_0 = [F_0(2) \ F_0(1) \ F_0(0)]$  را طوری بدست می آوریم که مقادیر ویژه  $\bar{\Psi}_c = A' + B'F_0$  به  $0,1$  تغییر یابند.

$$F_0(2) = \begin{bmatrix} -0,98 & -1,29 & 0,83 \\ 3,05 & 2,73 & -1,94 \end{bmatrix}$$

$$F_0(1) = \begin{bmatrix} 0,18 & 0,12 & 0,31 \\ -0,87 & -0,49 & -1,22 \end{bmatrix}$$

$$F_0(0) = \begin{bmatrix} -0,14 & -0,11 & -0,17 \\ 0,55 & 0,41 & 0,57 \end{bmatrix}$$

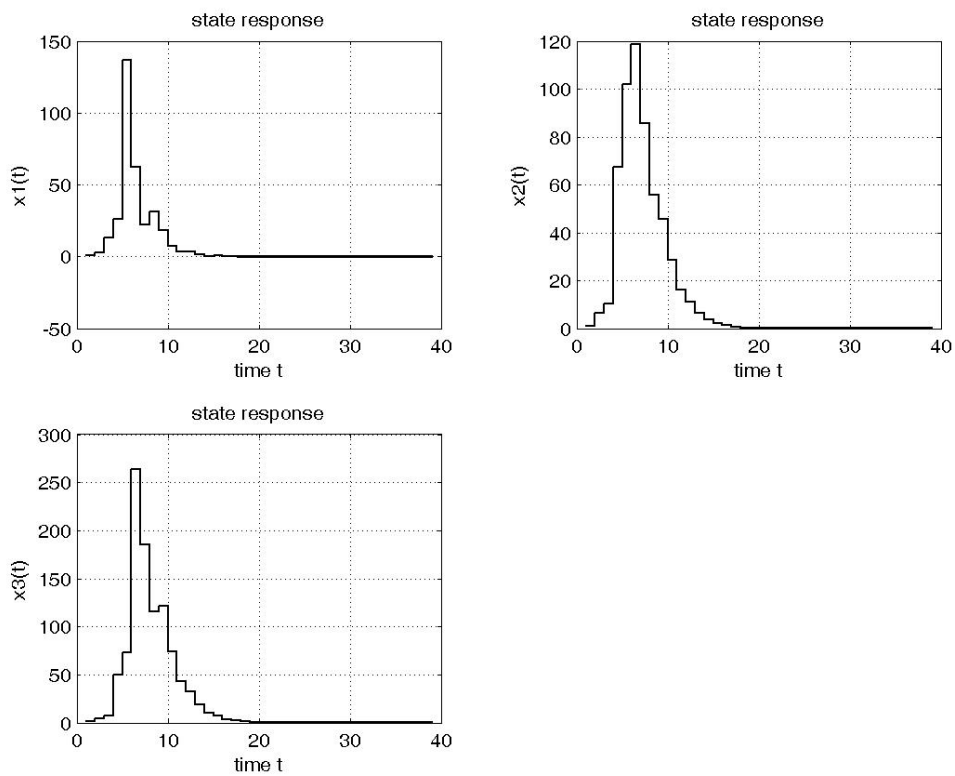
حال داریم

$$\bar{\Psi}_c = A' + B'F_0 = \{0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1\}$$

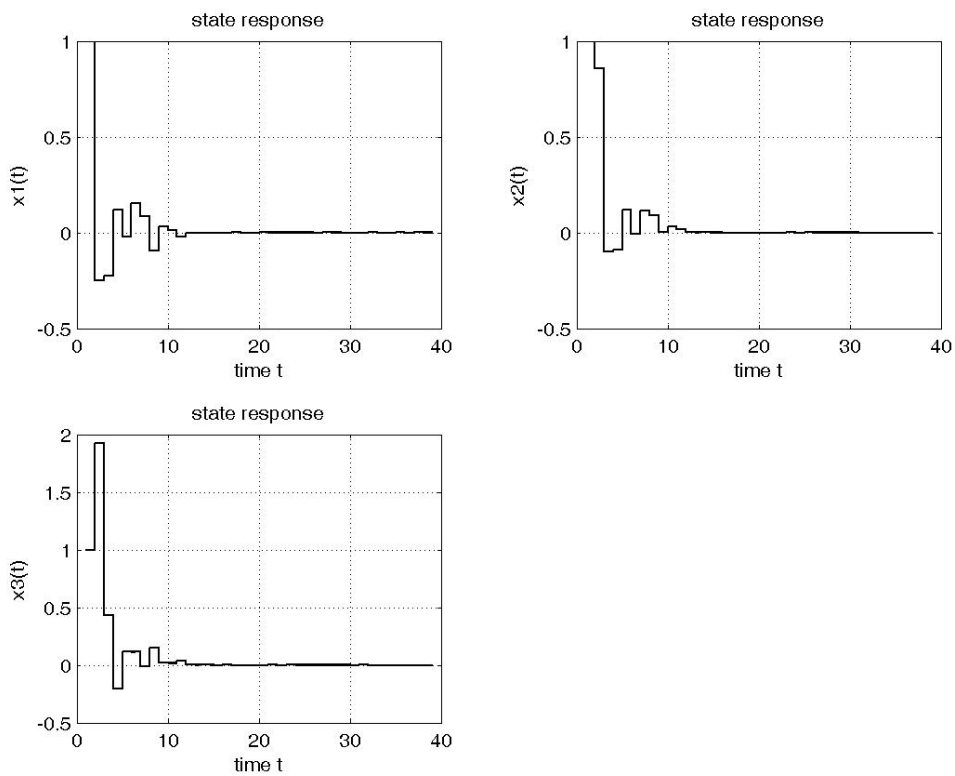
نرم فروبنیوس ماتریس های پسخور عبارتست از  $1,44/0,3$ . همانطور که در شکل ۵.۴ مشاهده می شود سیستم همگرا است.

حالت دوم. در این روش ماتریسهای پسخور را به روش تخصیص جزئی بدست می آوریم. در میان مقادیر ویژه  $A'$  تنها دو تای اول خارج دایره واحد هستند و بقیه مناسب می باشند. دو مقدار ویژه نا مناسب را به  $0,1$  تغییر می دهیم و بقیه را بدون تغییر باقی می گذاریم. با استفاده از الگوریتم تخصیص جزئی مقادیر ویژه داریم:





شکل ۵.۴: همگرایی سیستم مرتبه کسری (۵.۶.۴) بدون استفاده از تخصیص جزئی



شکل ۶.۴: همگرایی سیستم مرتبه کسری (۵.۶.۴) با استفاده از تخصیص جزئی

$$F_{\circ}(2) = \begin{bmatrix} -0.21 & -0.64 & 0.50 \\ 0.43 & 0.61 & -1.08 \end{bmatrix}$$

$$F_{\circ}(1) = \begin{bmatrix} 0.004 & 0.03 & -0.01 \\ 0.43 & 0.61 & -1.08 \end{bmatrix}$$

$$F_{\circ}(0) = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 & -0.003 \\ 0.01 & -0.03 & -0.00 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه جدید ماتریس (۱۲.۴) عبارتند از

$$\Lambda = \{0.1, 0.1, 0.078 \pm 0.168i, -0.001 \pm 0.009i, 0.008, 0, -0.001\}$$

همانطور که در شکل ۶.۴ دیده می شود همگرایی سیستم با استفاده از تخصیص جزئی خیلی سریعتر از همگرایی بدون تخصیص جزئی است.

# فصل ۵

## تخصیص پارامتری سیستم های گسسته متناوب خطی با مشتق مرتبه کسری

### ۱.۵ مقدمه

ماتریسهای پسخورد بدست آمده، در بعضی موارد نیاز سیستم دینامیکی را برآورده نمی کنند. همچنین این ماتریس های پسخورد برای یک سیستم مشتق کسری متناوب گسسته یکتا نمی باشند و در نتیجه می توانیم برخی از درایه های آن را دلخواه در نظر بگیریم تا بتوانیم در مواقع ضرورت، شرط های مناسبی را (مانند مینیم نرم ماتریس پسخورد) بر روی آن اعمال کنیم. در قسمت اول این فصل ماتریس پسخورد با پارامترهای خطی را با استفاده از روش همدم برداری و نظریه گراف [۲۱] بدست می آوریم و الگوریتمی ارائه خواهد شد که ماتریس پسخورد را با مینیم نرم بدست می آورد. در قسمت بعد ماتریس پسخورد با پارامترهای غیر خطی را با استفاده از روش همدم برداری و تخصیص مقادیر ویژه دلخواه بدست می آوریم که در این حالت تعداد انتخابها خیلی بیشتر از حالت خطی است. در پایان با استفاده از الگوریتم ژنتیک، مینیم نرم ماتریس پسخورد محاسبه می شود.

### ۲.۵ تخصیص پارامتری خطی سیستمهای مرتبه کسری متناوب

قرار دهید  $\Lambda = \{\lambda_i | \lambda_i \in \mathbb{C}\}$  طیف ماتریس دوره ای  $\bar{\Psi}_c$  باشد. ماتریس های پسخورد پارامتری  $\bar{F}_i$  که مقادیر ویژه ماتریس دوره ای را به  $\Lambda$  تبدیل کنند مورد نظر است. با انتخاب ماتریسهای  $(A', B') = (\bar{\Gamma}_2 \bar{\Gamma}_1 \bar{A}_0, \bar{\Gamma}_2 \bar{\Gamma}_1 \bar{B}_0)$  از فصل سوم و انتخاب ماتریسهای پسخورد  $F_1, \dots, F_{n-1}$  به صورت دلخواه، ماتریس پسخورد پارامتری  $\bar{F}$  که مقادیر ویژه  $\lambda(\bar{\Psi}_c)$  به صورت دلخواه تبدیل شود مورد نظر است. فرض کنید شکل همدم برداری ماتریس  $(A', B')$  به صورت

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} G_0 & & \\ I & & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}' = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و  $\tilde{T}$  ماتریس انتقال باشد که

$$\tilde{A}' = \tilde{T}^{-1} A' \tilde{T}$$

همچنین قرار دهید

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_\lambda & \\ I & \circ \end{bmatrix}$$

ماتریس دلخواهی در شکل همدم برداری باشد که  $G_\lambda$  ماتریس پارامتری است و مقادیر ویژه  $\tilde{A}_\lambda$  داخل دایره واحد باشند. سپس

$$\tilde{F}_\circ = B_\circ^{-1}(-G_\circ + G_\lambda)$$

ماتریس پسخوردی است که مقادیر ویژه مورد نظر را به  $\tilde{A}' + \tilde{B}'\tilde{F}_\circ$  تخصیص می دهد و

$$F_\circ = \tilde{F}_\circ \tilde{T}^{-1}$$

و

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{A}' + \tilde{B}'\tilde{F}_\circ = \begin{bmatrix} \circ & \\ I & \circ \end{bmatrix}$$

ماتریس  $\tilde{A}_\lambda$  مقادیر ویژه مورد نظر را داراست و متشابه با  $\tilde{A}'$  است. بنابراین ماتریس پسخورد اولیه به صورت

$$\bar{F}_\circ = F_\circ + B_\circ^{-1}\tilde{G}_\alpha$$

که داریم

$$\bar{F}_{\circ,\alpha} = B_\circ^{-1}G_\alpha T^{-1}$$

و  $G_\alpha$  ماتریس دارای پارامتر آزاد است و  $\bar{F}_{\circ,\alpha}$  نیز ماتریس پارامتری با درایه های خطی است. یک روش ساده برای تعیین پارامترها روش گراف است [۲۱].

در این روش بردارهای یکه  $\{e_1, \dots, e_n\}$  به عنوان راسهای گراف و ماتریس  $\tilde{\Gamma}$  به عنوان تابع تبدیل در نظر گرفته می شود. در این گراف راس های  $e_k$  که  $1 \leq k \leq m$  را به عنوان راس ورودی در نظر می گیریم. راس  $e_i$  به راس  $e_j$  متصل می شود هرگاه  $\tilde{\Gamma}e_i = e_j$  و  $j > i$  که در نهایت همه مسیرها به بردار صفر می رسند. حال پارامتر  $g_{ij}$  در  $G_\lambda$  قرار می گیرد هرگاه یال  $e_i \rightarrow e_j$  در هیچ مسیری وجود نداشته باشد.

به عنوان مثال در سیستم با  $m = 2, n = 3$  داریم

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

حال داریم  $\tilde{\Gamma}e_1 = e_2$  و  $\tilde{\Gamma}e_2 = \tilde{\Gamma}e_3 = \circ$  که گراف تبدیل حالت آن به صورت زیر است



حال اگر راس  $e_1$  به راس  $e_2$  متصل شود به صورت پارامتر  $g_{21}$  و اتصال  $e_2$  به  $e_3$  و  $e_1$  به  $e_2$  با  $g_{12}$  و  $g_{23}$  در  $G_\alpha$  نشان داده می شود و داریم

$$\bar{F}_\alpha = B_\alpha^{-1} G_\alpha T^{-1}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \circ & g_{12} & \circ \\ g_{21} & \circ & g_{23} \end{bmatrix}$$

در نتیجه

ماتریس پسخورد پارامتری خطی است.

### ۳.۵ الگوریتم مینیم نرم برای ماتریس پسخورد پارامتری

- [۱۹] هدف: یافتن پارامترها در  $G_\alpha$  که نرم فروبنوس آن مینیم باشد
- زوج  $(A', B')$  را در نظر بگیرید و ماتریسهای پسخورد مقدماتی  $K_p, B_\alpha^{-1}$  و  $T^{-1}$  را بدست آورید.
- ۱- سطرهای  $G_\alpha$  را که پارامترها در آنها قرار گرفته اند را با  $r$  و ستونها را با  $s$  مشخص کنید.
  - ۲- ستونهای  $B_\alpha^{-1}$  را که با سطرهای  $g_{rs}$  در  $G_\alpha$  متناظر است در  $V$  و سطرهای  $T^{-1}$  را که با ستونهای  $g_{rs}$  در  $G_\alpha$  متناظر است در  $W$  قرار می دهیم.
  - ۳- ماتریسهای

$$P = V^t V, \quad Q = W W^t, \quad C = V^t K_p W^t$$

را بدست آورید.

۴- ماتریس

$$H = -P^{-1} C Q^{-1}$$

را بدست آورده و درایه های  $H$  متناظر آن در  $G$  را که در مرحله ۱ گفته شد بدون تغییر نگه دارید.

۵- ماتریس

$$F_\alpha = B_\alpha^{-1} G T^{-1}$$

را بدست آورید.

۶- ماتریس  $K = K_p + K_\alpha$  را به عنوان خروجی بدست آورید. که دارای کمترین نرم است.

مثال ۱.۳.۵. ماتریسهای پسخورد سیستم فصل قبل را توسط الگوریتمهای تخصیص پارامتری خطی مقادر ویژه و مینیم نرم بیابید و نتایج را به طور کامل با یکدیگر مقایسه کنید. ماتریسهای پسخورد  $\bar{F}_1, \bar{F}_2$  را طوری بدست می آوریم که مقادیر ویژه

$$\Lambda(\bar{\Gamma}_2) = \lambda(\bar{A}_2 + \bar{B}_2 \bar{F}_2)$$

و

$$\Lambda(\bar{\Gamma}_1) = \lambda(\bar{A}_1 + \bar{B}_1 \bar{F}_1)$$

کمتر از یک باشند و کنترل پذیری

$$(A', B') = (\bar{\Gamma}_2 \bar{\Gamma}_1 \bar{A}_\alpha, \bar{\Gamma}_2 \bar{\Gamma}_1 \bar{B}_\alpha)$$

تضمین شده باشد. با توجه به مثال قبل داریم

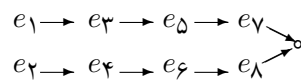
$$\bar{F}_2 = \begin{bmatrix} 7/5 & -5/8 & 317/2 & -326/1 & -373/1 & -75/5 & 60/3 & 89/8 & -15/3 \\ -30/0 & 23/5 & -1279 & 1314/6 & 1503/5 & 304/1 & -243/3 & -362/7 & 61/6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_1 = \begin{bmatrix} -3/23 & 8/26 & 1/12 & -7/64 & -6/07 & 0/17 & 2/35 & -0/01 & 0/004 \\ 1/43 & -3/57 & -0/26 & 2/91 & 2/6 & 0/55 & -2/33 & -0/03 & -0/3871 \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش تخصیص پارامتری گفته شده برای ماتریسهای  $A', B'$  داریم

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال داریم  $\tilde{\Gamma}e_1 = e_2$  و  $\tilde{\Gamma}e_2 = e_3$  و  $\tilde{\Gamma}e_3 = e_4$  و  $\tilde{\Gamma}e_4 = e_5$  و  $\tilde{\Gamma}e_5 = e_6$  و  $\tilde{\Gamma}e_6 = e_7$  و  $\tilde{\Gamma}e_7 = e_8$  و  $\tilde{\Gamma}e_8 = 0$  است که گراف تبدیل حالت آن به صورت زیر است



یالهای  $g_{12}, g_{14}, g_{16}, g_{18}, g_{21}, g_{23}, g_{25}, g_{27}$  را می توان به گراف اضافه کرد و در نتیجه

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} & 0 & g_{14} & 0 & g_{16} & 0 & g_{18} \\ g_{21} & 0 & g_{23} & 0 & g_{25} & 0 & g_{27} & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\bar{F}_{\cdot\alpha} = B_{\cdot}^{-1} G_\alpha T^{-1} = \begin{bmatrix} -3/41 - 0/17g_{12} - 0/26g_{14} - 1/68g_{16} - 106/85g_{18} & 1/17 \\ 3/15 - 0/03g_{12} - 0/05g_{14} - 0/51g_{16} - 47/40g_{18} & -0/11 \\ 2/48 + 0/1g_{12} + 1/14g_{14} - 2/75g_{16} - 1035/48g_{18} & -1/29 \\ -5/12 + 0/07g_{12} - 1/47g_{14} + 3/18g_{16} + 1037/79g_{18} & 0/63 \\ 0/35 + 0/03g_{12} + 0/03g_{14} + 6/667g_{16} + 1554/1g_{18} & -0/15 \\ -1/42 - 0/01g_{12} - 0/51g_{14} + 0/29g_{16} + 295/09g_{18} & 0/22 \\ & -0/18 - 344/01g_{18} & 0/05 \\ -0/19 + 0/002g_{12} + 0/01g_{14} + 0/55g_{16} - 342/17g_{18} & 0/01 \\ 0/08 - 0/004g_{12} - 0/03g_{14} - 1/11g_{16} + 0/53g_{18} & -0/02 \end{bmatrix}^T$$

سیستم به ازای هر مقدار  $g_{ij}$  در ماتریس پسخورد فوق همگراست.

حالت اول: در این حالت قرار می دهیم  $g_{ij} = 0$  و ماتریس پسخورد با نرم  $۷/۶۵$  عبارت است از

$$\bar{F}_0 = \begin{bmatrix} -۳/۴۱ & ۳/۱۵ & ۲/۴۸ & -۵/۱۲ & ۰/۳۵ & -۱/۴۲ & -۰/۱۸ & -۰/۱۹ & ۰/۰۸ \\ ۱/۱۷ & -۰/۱۱ & -۱/۲۹ & ۰/۶۳ & -۰/۱۵ & ۰/۲۲ & ۰/۰۵ & ۰/۰۱ & -۰/۰۲ \end{bmatrix}$$

حالت دوم: در این حالت ماتریس تخصیص پارامتری خطی را با استفاده از الگوریتم مینیم نرم بدست می آوریم که نتیجه به صورت زیر بدست می آید:  $W = \begin{bmatrix} -۰/۱۷۶۷ & -۰/۴۲۶۰ \end{bmatrix}$  و

$$V = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \text{ و } P = ۱ \text{ و } Q = ۰/۲۱۲۷ \text{ و } C = -۰/۲۵۱۶ \text{ و } G = \begin{bmatrix} ۰ & ۱/۱۸۲۸ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_0 = \begin{bmatrix} -۰/۱۹ & -۰/۲۲ & ۰/۴۸ & ۰/۰۳ & ۰/۰۲ & -۰/۰۱ & -۰/۰۱ & ۰/۰۱ & ۰/۰۰۱ \\ ۰/۴۳ & ۰/۶۱ & -۱/۰۸ & -۰/۰۵ & -۰/۰۵ & ۰/۰۱ & ۰/۰۱ & -۰/۰۳ & -۰/۰۰۱ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه در این حالت نیز  $۰/۱$  هستند که نرم ماتریس پسخورد  $۴/۲۹$  می باشد و نمودار آن توسط شکل ۲.۵ مشخص کننده سرعت بیشتر همگرایی نسبت به حالت دلخواه  $g_{ij} = 0$  و شکل ۱.۵ است.

## ۴.۵ محاسبه ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی

در این فصل ماتریس پسخورد با درایه های پارامتری غیر خطی را بدست می آوریم. ماتریس

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} & \dots & g_{۱n} \\ g_{۲۱} & g_{۲۲} & \dots & g_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m۱} & g_{m۲} & \dots & g_{mn} \end{bmatrix}$$

را با ابعاد  $m \times n$  که درایه های آن پارامتری است را در نظر می گیریم. با توجه به اینکه مقادیر ویژه ماتریس

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} & G_\lambda & \\ I & & 0 \end{bmatrix} \quad (۱.۵)$$

باید در طیف  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  قرار گیرد قرار می دهیم

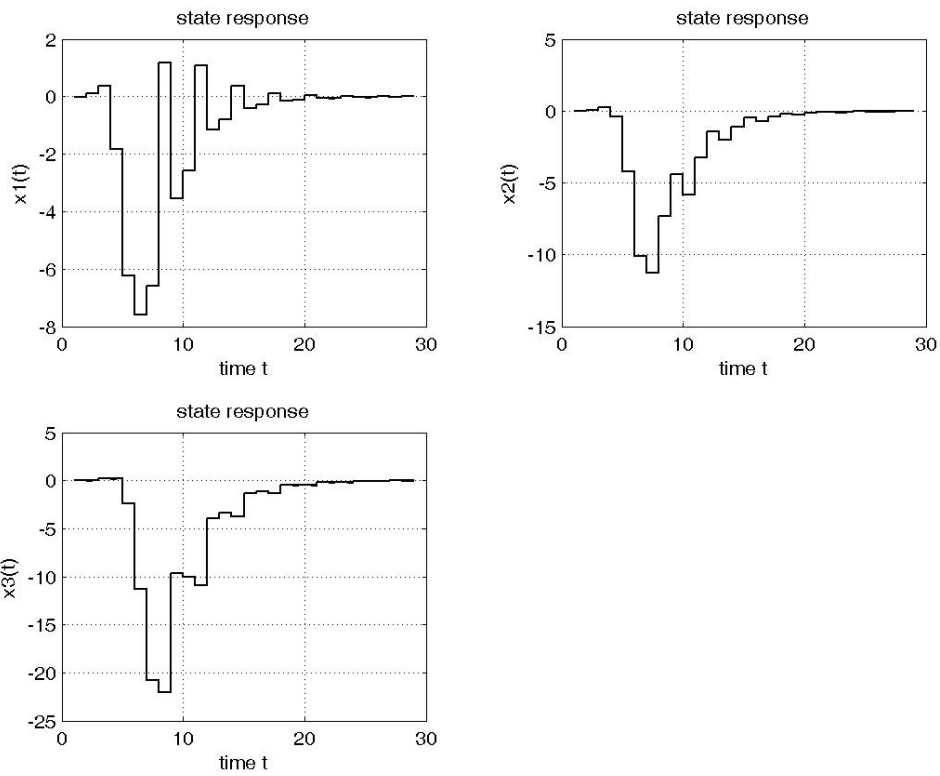
$$\det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = P_n(\lambda) = 0$$

که چند جمله ای مشخصه به صورت زیر به دست می آید

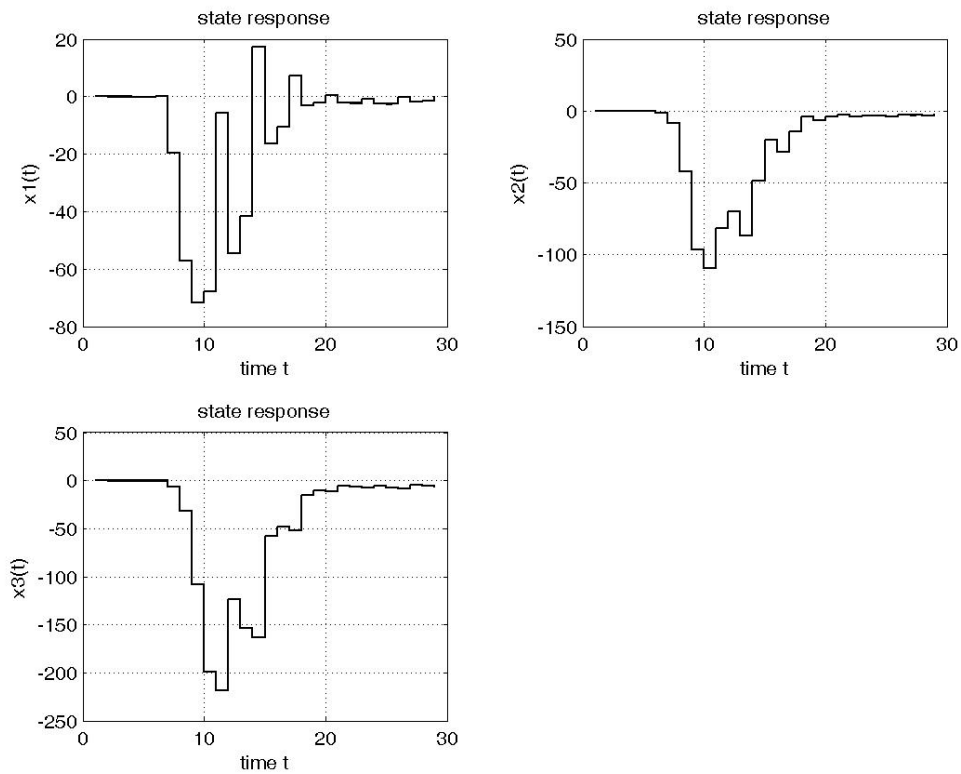
$$P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + C_2 \lambda^{n-2} + \dots + C_{n-1} \lambda + C_n)$$

با توجه به اینکه مقادیر ویژه مشخص هستند می توانیم مقدار ضرایب  $C_i$  را که پارامتری هستند به صورت زیر محاسبه کنیم [۷]

$$\begin{cases} C_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \\ C_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_i \lambda_j + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n = \sum_{i=j}^n \lambda_i \lambda_j \\ \vdots \\ C_n = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \end{cases}$$



شکل ۱.۵: همگرایی سیستم تخصیص پارامتری خطی با استفاده از  $g_{ij} = 0$



شکل ۲.۵: همگرایی سیستم تخصیص پارامتری خطی با استفاده از الگوریتم مینیمم نرم



با توجه به پارامتری بودن ضرایب چند جمله ای مشخصه  $P_n(\lambda) = \det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = P_n(\lambda)$  و اینکه مقدار ضرایب  $C_i$  می‌تواند با استفاده از مقادیر ویژه بدست آید، دستگاه زیر برای یافتن پارامترها بدست می‌آید

$$\begin{cases} f_1(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{mn}) = C_1 \\ f_2(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{mn}) = C_2 \\ \vdots \\ f_n(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{mn}) = C_n \end{cases}$$

در این روش، یک سیستم غیرخطی از  $n$  معادله با  $nm$  مجهول به دست می‌آید. با انتخاب  $N = n(m-1)$  مجهول به صورت دلخواه حل سیستم امکان پذیر خواهد بود. بنابراین انتخاب های مختلف جواب های متفاوتی به دست می‌دهند. در پی آن هستیم ماتریس پس خورد حالتی را به دست آوریم که نزدیکترین جواب به پاسخ مورد نظر باشد. می‌توانیم سیستم را با استفاده از نرم افزار میپل حل کنیم. انتخابهای متفاوت باعث جوابهای متفاوت می‌شود. تعداد انتخابهای ممکن این پارامترها عبارت است از

$$P = \binom{(nm-n)!}{n!(nm-2n)!}$$

برخی از انتخابها ما را به حالت خطی هدایت می‌کنند و این یعنی مساله پارامتری خطی زیر مجموعه ای از مساله غیر خطی است. باید توجه کرد از آنجا که  $\tilde{A}_\lambda$  تنها به ثابتهای کرونکر  $(B', A')$  وابسته است و یکتا است آنگاه برای مجموعه مشخص مقادیر ویژه، ضرایب چند جمله ای مشخصه یعنی  $c_i, (i = 1, \dots, n)$  یکتا است.

با داشتن شکل ساده تری از ماتریس یک دوره ای، ماتریسهای پس‌خورد پارامتری غیر خطی را بدست می‌آوریم.

$$\bar{\Psi}_c = G(\bar{A}_\circ + \bar{B}_\circ \bar{F}_\circ)$$

با انتخاب ماتریس های  $F_1, \dots, F_{N-1}$  طوری که کنترل پذیری سیستم  $(GA(\circ), GB(\circ))$  تضمین شود داریم

$$\bar{\Psi}_c = (G\bar{A}_\circ + G\bar{B}_\circ \bar{F}_\circ) = A' + B'\bar{F}_\circ$$

با استفاده از الگوریتم ارائه شده باید ماتریس پس‌خورد پارامتری غیر خطی  $\bar{F}_\circ$  را طوری بیابیم که طیف  $\lambda(\bar{\Psi}_c) = \Lambda$  بدست آید. در نظر می‌گیریم

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} G_\circ & \\ I & \circ \end{bmatrix}, \tilde{B}' = \begin{bmatrix} B_\circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

و  $\tilde{T}$  ماتریس تبدیل به شکل

$$\tilde{A}' = \tilde{T}^{-1} A' \tilde{T}$$

باشد.

قضیه ۱.۴.۵ [۱۷] اگر  $\tilde{A}_\lambda$  ماتریس همدم برداری با مجموعه مقادیر ویژه  $\Lambda$  باشد آنگاه  $\tilde{F}_0 = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)$  ماتریس پسخورده است که مقادیر ویژه  $\Lambda$  را به ماتریس حلقه بسته  $\tilde{A}' + \tilde{B}'\tilde{F}_p$  تخصیص می دهد و  $\bar{F}_0 = \tilde{F}_0 \tilde{T}^{-1}$

### ۱.۴.۵ مقایسه با روش دیگر تخصیص غیر پارامتری

روش تخصیص غیر پارامتری دیگری توسط لینگ<sup>۱</sup> و همکارانش [۲۵] برای سیستمهای متناوب ارائه شده است که معایب زیادی دارد که در زیر به برخی از آنها اشاره می کنیم.

۱- روش ارائه شده توسط لینگ می تواند برای سیستم های متناوب با ابعاد بسیار کوچک مناسب باشد و برای ابعاد متوسط و بزرگ اصلا کارایی ندارد.

۲- برای بسیاری از سیستمهای متناوب حتی با ابعاد کوچک کارایی لازم را ندارد. زیرا شرایط اولیه بسیار پیچیده ای بر آن حاکم است. برای مثال یافتن ماتریس معکوس ماتریس پارامتری  $(zI - A^L)$  و حل معادله پارامتری  $(zI - A^L)^{-1}B^L = N(z)D^{-1}(z)$  برای یافتن  $N(z), D(z)$  تقریبا برای اکثر سیستمها غیر ممکن است. شرط  $\det(\sum_{i=0}^{\infty} N_i Z F_i) \neq 0$  احتیاج به مربعی بودن ماتریس های  $(N_i Z F_i)$  دارد که برای بسیاری از سیستمها برقرار ناست. همچنین در  $K(i) = X_{i+1} \Pi_{j=0}^{i-1} A_c^{-1}(j)$  احتیاج به  $\det(A_c(j)) \neq 0, \forall j = 0 \dots T-2$  است

مثال ۲.۴.۵. سیستم مثال قبل را در نظر بگیرید از آنجا که  $\bar{F}_2, \bar{F}_1$  دلخواه هستند که  $(A', B') = (\bar{\Gamma}_2 \bar{\Gamma}_1 \bar{A}_0, \bar{\Gamma}_2 \bar{\Gamma}_1 \bar{B}_0)$  دسترس پذیر باشند داریم

$$\bar{F}_2 = \begin{bmatrix} -2/6 & 2/2 & -26/5 & 25/1 & 32/1 & 3/9 & -1/2 & -2/8 & 4 \\ 10/9 & -8/5 & 105/4 & -100/7 & -128/9 & -15/8 & 5 & 11/3 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_1 = \begin{bmatrix} -0/1 & 0/25 & -0/05 & -0/35 & -0/41 & 0/05 & 0/07 & 0 & 0/01 \\ -0/07 & 0/17 & -0/09 & -0/08 & 0/14 & -0/06 & -0/02 & 0/01 & -0/03 \end{bmatrix}$$

در نتیجه مقادیر ویژه  $A'$  عبارت است از

$$\{5/2893, -1/2035, 0/0783 \pm 0/1677i, -0/0012 \pm 0/0092i, 0/0078, 0, -0/0011\}$$

دو حالت پارامتری غیر خطی برای سیستم استاندارد شده فوق و پارامتری غیر خطی برای حالت تخصیص جزئی بررسی می شود.

حالت اول: در این حالت ماتریسهای پسخورده غیر خطی را طوری می یابیم که مقادیر ویژه

$$\bar{\Psi}_c = (\bar{A}_2 + \bar{B}_2 \bar{F}_2)(\bar{A}_1 + \bar{B}_1 \bar{F}_1)(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 \bar{F}_0)$$

به

$$\{-0/1, -0/1, -0/1, -0/1, -0/1, -0/1, -0/1, -0/1, -0/1\}$$

تغییر کند. ماتریس پسخورده پارامتری غیر خطی  $\bar{F}_0$  عبارت است از

$$\bar{F}_0 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} & f_{18} & f_{19} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & f_{27} & f_{28} & f_{29} \end{bmatrix}$$

<sup>۱</sup> Ling. Lv. et al.

ک

$$\left. \begin{aligned}
 f_{11} &= 0/12m_1 - 0/01m_2 + 0/16m_3 - 0/5m_4 - 33/3m_5 + 22/4m_6 + 111/46m_7 \\
 &\quad + 69/5m_8 - 1661/76m_9 - 0/13 \\
 f_{12} &= -0/16m_1 + 0/2m_2 + 0/1m_3 - 0/11m_4 - 10/14m_5 + 5/92m_6 + 95/92m_7 \\
 &\quad + 42/41m_8 - 323/15m_9 - 0/5 \\
 f_{13} &= 0/5m_1 - 0/04m_2 - 0/3m_3 + 0/4m_4 + 61/95m_5 - 25/66m_6 - 308/1m_7 \\
 &\quad - 3995/6m_8 + 1913/2m_9 + 0/46 \\
 f_{14} &= -0/01m_1 - 0/01m_2 - 0/05m_3 + 0/1m_4 - 33/29m_5 + 6/24m_6 + 581/93m_7 \\
 &\quad + 3003/91m_8 - 500/44m_9 \\
 f_{15} &= 0/01m_1 - 0/01m_2 + 0/3m_3 - 0/1m_4 - 22/77m_5 + 0/54m_6 - 1039/07m_7 \\
 &\quad + 390/136m_8 - 381/3m_9 + 0/03 \\
 f_{16} &= 0/01m_2 + 0/01m_3 + 0/01m_4 - 16/2m_5 + 7/59m_6 + 1771/6m_7 + 393/22m_8 \\
 &\quad - 286/48m_9 \\
 f_{17} &= 0/01m_6 - 1403/03m_7 + 86/57m_8 + 42/39m_9 - 0/01 \\
 f_{18} &= 0/01m_3 - 0/01m_4 + 1/61m_5 - 0/93m_6 - 23/49m_7 - 556/96m_8 \\
 &\quad - 156/65m_9 + 0/01 \\
 f_{19} &= -0/01m_3 + 0/01m_4 - 3/24m_5 + 1/74m_6 - 578/69m_7 + 450/93m_8 \\
 &\quad - 151/91m_9 \\
 f_{21} &= 0/1m_{10} - 0/2m_{11} - 0/5m_{12} - 33/3m_{13} + 22/4m_{14} + 111/5m_{15} \\
 &\quad + 69/5m_{16} - 1661/8m_{17} + 0/3 \\
 f_{22} &= -0/2m_{10} + 0/2m_{11} + 0/1m_{12} - 0/1m_{13} - 10/1m_{14} + 5/9m_{15} \\
 &\quad + 95/9m_{16} + 42/4m_{17} - 323/15m_{18} + 0/6 \\
 f_{23} &= 0/5m_{10} - 0/04m_{11} - 0/3m_{12} + 0/4m_{13} + 61/9m_{14} - 25/7m_{15} - 308m_{16} \\
 &\quad - 3996m_{17} + 1913m_{18} - 1/1 \\
 f_{24} &= -0/01m_{10} - 0/05 + 0/1m_{13} - 33/29m_{14} + 6/24m_{15} + 581/93m_{16} \\
 &\quad + 3003/91m_{17} - 500/44m_{18} - 0/05 \\
 f_{25} &= 0/01m_{10} - 0/01m_{11} + 0/31m_{12} - 0/11m_{13} - 22/8m_{14} + 0/55m_{15} \\
 &\quad - 1039m_{16} + 390/1m_{17} - 381m_{18} - 0/08 \\
 f_{26} &= -0/01m_{10} + 0/01m_{11} + 0/01m_{12} + 0/01m_{13} - 16/2m_{14} + 7/6m_{15} \\
 &\quad + 1772m_{16} + 393/2m_{17} - 286/5m_{18} \\
 f_{27} &= 0/1m_{15} - 1403/03m_{16} + 86/57m_{17} + 42/39m_{18} + 0/01 \\
 f_{28} &= 0/01m_{12} - 0/01m_{13} + 1/61m_{14} - 0/93m_{15} - 23/49m_{16} - 556/96m_{17} \\
 &\quad - 156/65m_{18} - 0/03 \\
 f_{29} &= -0/02m_{12} + 0/01m_{13} - 3/24m_{14} + 1/74m_{15} - 578/69m_{16} + 450/93m_{17} \\
 &\quad - 151/91m_{18}
 \end{aligned} \right\}$$

با شرایط

$$\left\{ \begin{array}{l} -m_{11} - m_1 = 0.9 \\ m_9 m_{17} - m_8 m_{18} = 0.1e - 8 \\ -m_{13} - m_3 - m_{10} m_2 + m_{11} m_1 = 0.36 \\ -m_{16} m_8 + m_{17} m_7 - m_6 m_{18} + m_9 m_{15} = 0.9e - 7 \\ -m_{15} - m_5 - m_{10} m_4 + m_{13} m_1 - m_2 m_{12} + m_3 m_{11} = 0.84 \\ -m_4 m_{18} + m_9 m_{13} - m_6 m_{16} + m_{17} m_{15} - m_{14} m_8 + m_{17} m_5 = 0.36e - 5 \\ -m_{17} - m_7 - m_{10} m_6 + m_{15} m_1 - m_2 m_{14} + m_5 m_{11} - m_{12} m_4 + m_{13} m_3 \\ \quad \quad \quad = 0.126 \\ -m_2 m_{18} + m_9 m_{11} - m_{12} m_8 + m_{17} m_3 - m_4 m_{16} + m_{17} m_{13} - m_{14} m_6 + \\ \quad \quad \quad m_{15} m_5 = 0.84e - 4 \\ -m_9 - m_{10} m_8 + m_{17} m_1 - m_2 m_{16} + m_{17} m_{11} - m_{12} m_6 + m_{15} m_3 - m_4 m_{14} \\ \quad \quad \quad + m_5 m_{13} = 0.00126 \end{array} \right.$$

با شرایط فوق مقادیر ویژه  $\bar{\Psi}_c$  به  $0.1 -$  تغییر می یابند و سیستم پایدار خواهد شد. برای مثال

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0.1, m_2 = 0.1, m_3 = 0.1, m_4 = 0.1, m_5 = 0.1, m_6 = 0.1, m_7 = 0.1 \\ m_8 = 0.1, m_9 = 0.1, m_{10} = -1/0, m_{11} = -1, m_{12} = -1, m_{13} = -0.4 \\ m_{14} = -0.4, m_{15} = -0.1, m_{16} = -0.1, m_{17} = -0.02, m_{18} = -0.02 \end{array} \right.$$

شرایط برقرار است و داریم

$$F_0 = \begin{bmatrix} -87/3 & 18/5 & -235 & 305/8 & 246 & 187 & -127/4 & -73/6 & -28/1 \\ 133/9 & 4/1 & 177/9 & -204/6 & -509/4 & 197/6 & -176/3 & 76/9 & -99/3 \end{bmatrix}$$

حال مقادیر ویژه جدید  $\bar{\Psi}_c$  به  $0.1 -$  تغییر یافته است و سیستم پایدار خواهد شد. برای مثال

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0.1, m_2 = 0.1, m_3 = 0.1, m_4 = 0.1, m_5 = 0.1, m_6 = 0.1, m_7 = 0.1, m_8 = 0.1 \\ , m_9 = 0.1, m_{10} = -1/0, m_{11} = -1, m_{12} = -1, m_{13} = -0.4, m_{14} = -0.4, m_{15} = -0.1 \\ , m_{16} = -0.1, m_{17} = -0.02, m_{18} = -0.02 \end{array} \right.$$

شرایط را دارند و داریم

$$F_0 = \begin{bmatrix} -87/3 & 18/5 & -235 & 305/8 & 246 & 187 & -127/4 & -73/6 & -28/1 \\ 133/9 & 4/1 & 178 & -204/6 & -509/4 & 197/6 & -176/3 & 76/9 & -99/3 \end{bmatrix}$$

حالت دوم: در این حالت ابتدا بعد سیستم استاندارد شده را که به خاطر مشتقات کسری زیاد است توسط روش تخصیص جزئی مقادیر ویژه کاهش می دهیم و سپس روش پارامتری غیر خطی را بر روی آن اعمال می کنیم. دو مقدار ویژه اول  $A'$  خارج دایره و بقیه داخل هستند.

$$\left\{ \begin{array}{l} -m_4 - m_1 = 0.2 \\ m_1 m_4 - m_2 m_3 = 0.01 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{11} = -0.07m_1 + 0.01m_2 - 0.2 \\ f_{12} = -0.46m_1 + 0.36m_2 - 0.59 \\ f_{13} = 0.18m_1 - 0.02m_2 + 0.48 \\ f_{14} = -0.01m_1 + 0.02m_2 + 0.01 \\ f_{15} = 0.01m_1 + 0.03 \\ f_{16} = -0.01m_1 + 0.01m_2 - 0.01 \\ f_{17} = -0.01m_1 + 0.01m_2 - 0.01 \\ f_{18} = 0.01m_1 + 0.02 \\ f_{19} = 0 \\ f_{21} = -0.08m_3 + 0.01m_4 + 0.43 \\ f_{22} = -0.46m_3 + 0.36m_4 + 0.57 \\ f_{23} = 0.18m_3 - 0.02m_4 - 1.07 \\ f_{24} = -0.01m_3 + 0.02m_4 - 0.05 \\ f_{25} = 0.11m_3 - 0.05 \\ f_{26} = -0.01m_3 + 0.01m_4 + 0.01 \\ f_{27} = -0.01m_3 + 0.01m_4 + 0.01 \\ f_{28} = 0.01m_3 - 0.03 \\ f_{29} = 0 \end{array} \right.$$

انتخاب دلخواه پارامترها با شرایط فوق سیستم پایدار با تنها دو مقدار ویژه تغییر یافته را ارائه می دهد. برای مثال با انتخاب

$$m_1 = 0.1, m_2 = 0.1, m_3 = -0.4, m_4 = -0.3$$

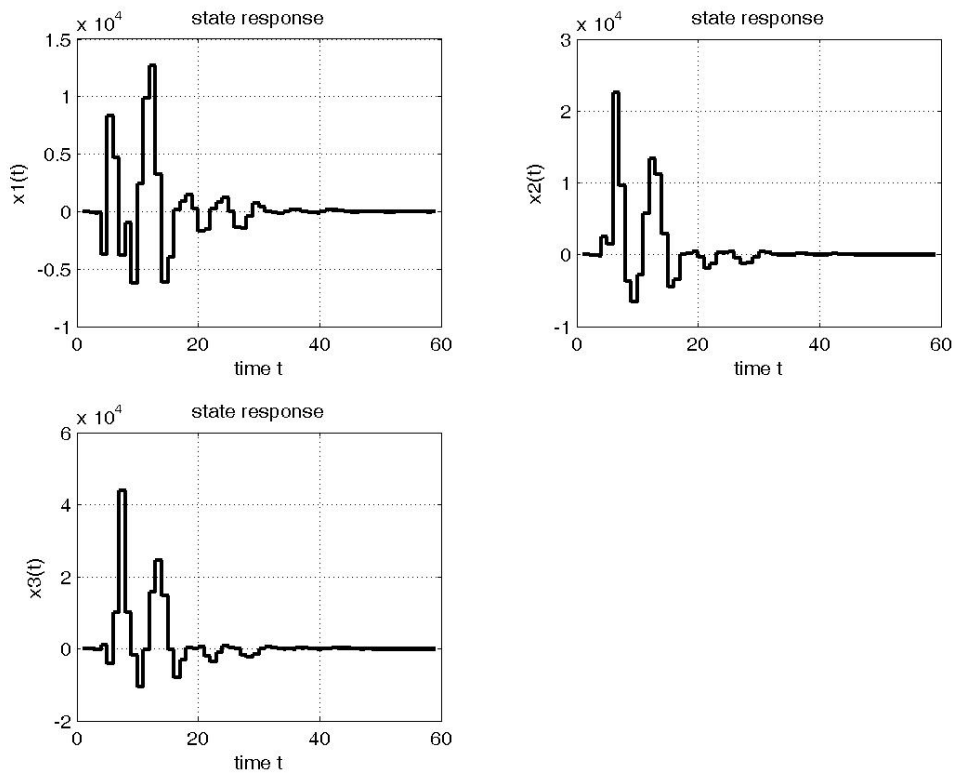
داریم

$$\bar{F}_0 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.6 & 0.5 & 0.01 & 0.03 & -0.01 & -0.01 & 0.02 & 0 \\ 0.46 & 0.65 & -1.14 & -0.05 & -0.06 & 0.01 & 0.02 & -0.03 & 0 \end{bmatrix}$$

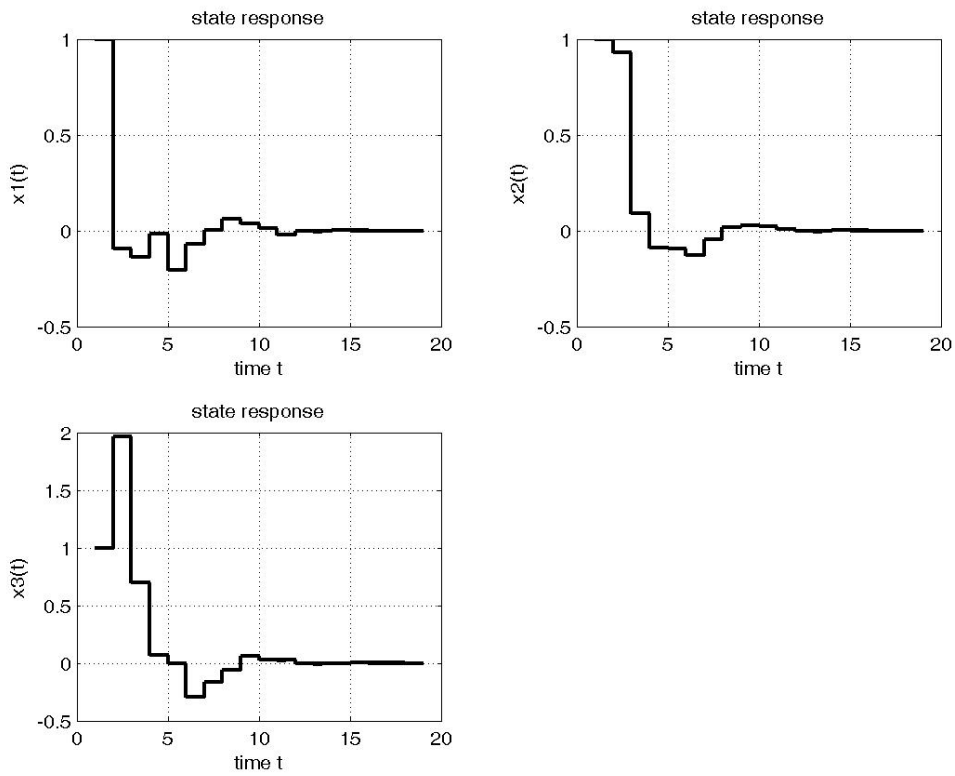
مقادیر ویژه همانطور که انتظار داشتیم عبارت است از

$$eig(\bar{\Psi}_c) = \{-0.1, -0.1, 0.783 \pm 0.1677i, -0.0012 \pm 0.0092i, 0.0078, 0, -0.001\}$$

همانطور که از نمودارهای ۶.۵، ۵.۵ مشخص می شود همگرایی سیستم در حالت دوم خیلی سریعتر از حالت اول است.



شکل ۳.۵: همگرایی سیستم با استفاده از پسخورد پارامتری غیر خطی



شکل ۴.۵: همگرایی سیستم با استفاده از ترکیب پسخورد غیر خطی و تخصیص جزئی

## ۵.۵ مینیم نرم ماتریس پس خورد حالت پارامتری غیرخطی با الگوریتم ژنتیک

همانطور که در قسمت تخصیص مقادیر ویژه توسط ماتریسهای پسخورد پارامتری غیر خطی مشاهده کردیم تعداد انتخابهای پارامترها خیلی زیاد است. این دامنه انتخاب می تواند ما را در قرار دادن شرایط مناسب آزاد بگذارد. یکی از شرایطی که در بسیاری از سیستمها مورد توجه است، کم بودن نرم ماتریس پسخورد حالت است. به دلیل بزرگ بودن ابعاد ماتریس پسخورد حالت و پارامتری غیر خطی بودن آن، وجود شرایط نامساوی غیر خطی شرایط را خیلی پیچیده می کند. انتخاب الگوریتمهای معمول مینیم سازی نمی تواند کارایی زیادی در این گونه مسائل داشته باشد. الگوریتم ژنتیک یکی از پر کاربرد ترین روشهای بهینه سازی در سالهای اخیر است. اما حجم عملیات در این الگوریتم به دلیل انتخاب نقاط زیاد والد و شرایط بهینه کردن تابع هدف و برقراری محدودیتهای غیر خطی و انتخاب فرزندان، زیاد است. به دلیل وجود نرم افزارهای بسیار سریع و کارآمدی همچون متلب این مشکل نیز می تواند توسط برنامه نویسی حل شود [۲۶].

مثال ۱.۵.۵. در اینجا توسط الگوریتم ژنتیک، ماتریس پسخورد پارامتری غیر خطی با کمترین نرم مثال قبل را بدست می آوریم. تنظیمات الگوریتم ژنتیک بکار گرفته شده در نرم افزار متلب عبارتند از

- روش بکار گرفته شده: روش تورنومنت

- تعداد تکرار: صد تکرار

- تعداد کاندیدا برای تغییر در هر مرحله: ۴ کاندیدا

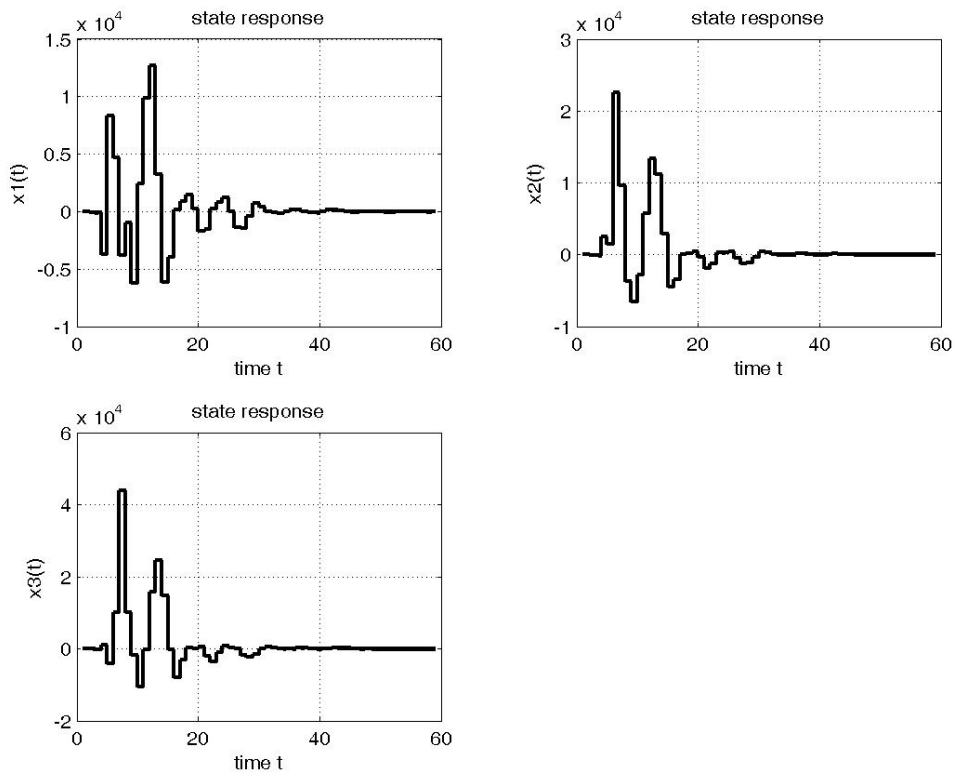
- تعداد متغیرها: ۱۸ متغیر

تابع هدف ما که می نیمم نرم  $\bar{F}$  است به صورت زیر بدست می آید.

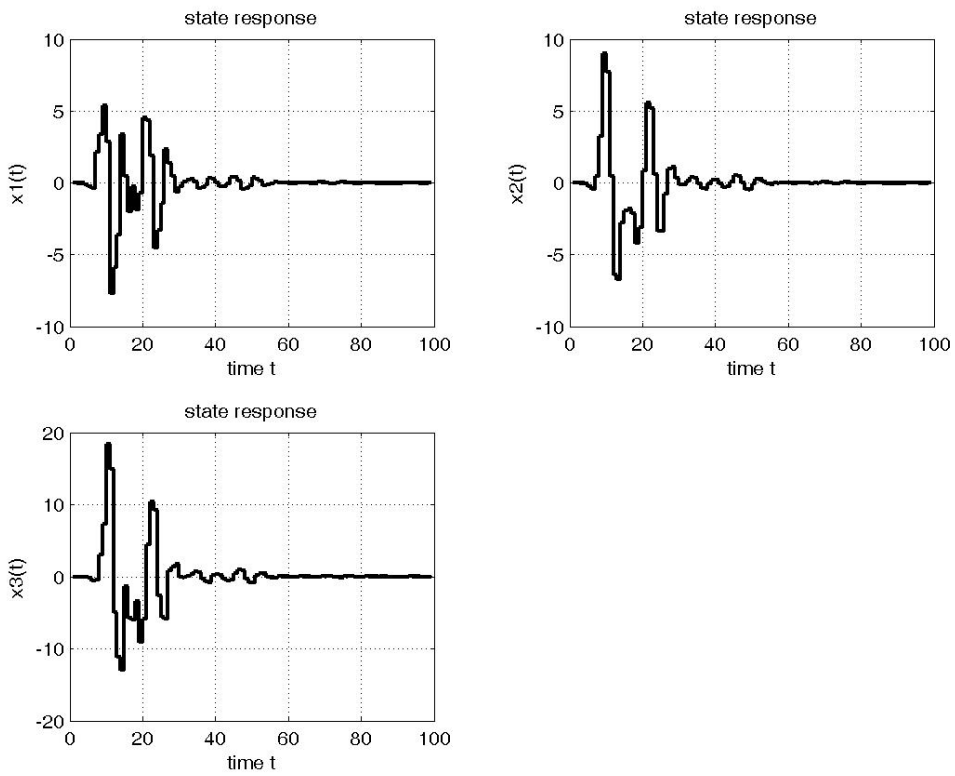
$$\begin{cases} m_1 = -0.58, m_2 = 0.58, m_3 = -0.14, m_4 = 1.17 \\ m_5 = -0.4, m_6 = 0.71, m_7 = -0.1, m_8 = -0.1, m_9 = -0.1 \\ m_{10} = -0.59, m_{11} = -0.32, m_{12} = 0.21, m_{13} = 0.29, m_{14} = -0.2 \\ m_{15} = 0.8, m_{16} = -0.13, m_{17} = 0.01, m_{18} = -0.05 \end{cases}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} -26.8 & 5.9 & 48.6 & -3.6 & -39.6 & 0.1 & 1.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & -1.5 & 24.6 & 4.3 & 52.5 & -0.2 & -2.1 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

نرم ماتریس پسخورد حالت ۲۸۲ است در صورتیکه نرم ماتریس پسخورد حالت بدون استفاده از الگوریتم ژنتیک و در در حالت غیر پارامتری ۱۲۸۱ است. همگرایی سیستم با استفاده از ماتریس پسخورد بدست آمده از الگوریتم ژنتیک با توجه به نمودار؟؟ بهتر از حالت عادی است.



شکل ۵.۵: همگرایی سیستم بدون استفاده از الگوریتم ژنتیک



شکل ۶.۵: همگرایی سیستم با استفاده از الگوریتم ژنتیک



## نتیجه گیری و پیشنهادات:

در این رساله سیستمهای متناوب گسسته خطی با مشتق مرتبه کسری مورد بررسی قرار گرفت که پس از چندین مرحله تقریب، به یک سیستم متناوب با ابعاد ماتریسی بزرگ تبدیل می شود. سپس برای سیستمهای متناوب با ماتریسهای بزرگ روش جدیدی ارائه داده شده است. ماتریسهای پسخورد پارامتری خطی و غیر خطی برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت در سیستم های مختلف آورده شده، به گونه ای که نرم آن کمترین مقدار ممکن شود و در بخشی از آن از الگوریتم ژنتیک برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت پارامتری غیر خطی با مینیم نرم استفاده شده است. پژوهشگران می توانند تحقیقات زیر را مورد بررسی قرار دهند.

- کنترل این رده از سیستمها را بدون تقریب مشتق گرانش-لتنیکف و یا بدون برش سری تاخیر افزایشی بررسی کنند.
- از مشتق کاپوتو استفاده کنند و نتایج را با گرانش-لتنیکف مقایسه کنند.
- نتایج را برای مرتبه های متفاوت مشتقات بررسی و با هم مقایسه نمایند و مرتبه بهینه را محاسبه نمایند.
- سیستمهای متناوب مرتبه کسری پیوسته تا کنون بررسی نشده است.
- بررسی اغتشاش در این رده از سیستمها می تواند موضوع جدیدی باشد.
- سیستمهای دو بعدی متناوب با مشتق مرتبه کسری، تقریباً شبیه حالت یک بعدی بررسی می شود.
- تخصیص مقادیر ویژه سیستم بررسی شده در داخل دایره واحد بدون مشخص کردن مقادیر ویژه، می تواند موجب پارامتری سازی ماتریسهای تخصیص شود.
- کنترل این رده از سیستمها با ماتریسهای پسخورد خروجی می تواند موضوع تحقیق باشد.

- تخصیص مقادیر ویژه سیستم بررسی شده در ناحیه مشخص از صفحه مختلط می تواند موضوع تحقیق باشد.

# پیوست آ

## برنامه‌های کامپیوتری

### آ.۱ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه صفر

```
% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
t0=cputime;
    %disp('          This is the given plant matrix A') ;           %line 1
    %disp('          *****') ;                                   %line 2
          A ;                                                       %line 3
    % disp('          This is the given input matrix B');         %line 4
    % disp('          *****') ;                                   %line 5
          B ;                                                       %line 6
    [n,m]=size(B);                                                 %line 7
    r=n+m;
    Q=[B,A];
    T1=eye(n);                                                     %line 10
    % The Echelon form of Q
    % -----
    i=1;j=1; tol=1e-6;
```

```

while ( i<=n ) & ( j<=r )
    [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ;
    k=k+i-1;
    if (q<=tol)
        Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
        j=j+1;
    else
        % perform the similarity operations
        % swap i-th row with k-th row:
        o1;
        % divide the pivot row
        o2;
        % subtract multiples of the pivot row
        o3;
        i=i+1 ;
        j=j+1;
    end
end
% Now compute the Standard echelon form      !
s=1;
while s < n
    i=s+1 ;
    for j=i:r
        if Q(i,j)~=0
            for k=1:s
                if Q(k,j)~=0
                    t=Q(k,j);
                    Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                    T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                    Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                end
            end
        end
        break
    end
end

```

```

        end
        s=s+1;
    end
% choice=input(' do you want the kronecker invariants displayed,y/n %','s')
%   if choice=='y'
        kronk3
%   end
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=i:r
        if Q(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Q(i,j);
                Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
                Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
                T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
            end
            break
        end
    end
end
end
% choice=input('do you want the prim. vec comp form displayed,y/n%','s')
%   if choice=='y'
%   disp('   The standard Vector Companion form ')
%   disp('   ***** ')
        Q;
%   end
%   disp('           This is the transformation matrix,T1');
%disp('           *****');

        T1;

%           disp(' press any key to continue')
% pause
% The Feed-back matrix , F

```

```

B1=Q(:, [1:m]); A1=Q(:, [m+1:r]);
B0=Q(1:m, 1:m); bo=inv(B0);
G=Q(1:m, m+1:r); F1=-bo*G; G0=G;
Fp=F1*T1;
% disp('          This is the primdry feedback law ');
% disp('          ***** ');

Fp
%disp('          The closed loop matrix A+B*F ')
%disp('          ***** ')
eiggama=eig(A+B*Fp)
% *****
%choice=input(' do you want to check the resultfeed,y/n ', 's')
%if choice=='y'
%   g=gama^p(1);
%   for i=1:n
%       for j=1:n
%           if abs(g(i,j))<tol
%               g(i,j)=0;
%           end
%       end
%   end
%end
%fprintf('          This is g=(A+B*F)^%g', p(1))
%disp('          *****')
%g
% generating parametric feed-back laws
%   q=fix(n/m);
%   if p(1)==q
%       disp('          The feed-back law is unique ! ')
%       disp('          ***** ')
%       disp('          The kronecker invariants are all equal ')
%       %disp('          ***** ')
%   else

```

```

                %          allfeeds
                %  end
t1=cputime-t0

```

## ۲.آ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه دلخواه

```

% program for assigning eigenvalues,eigen.m
% *****
D=[];
for j=1:n
    landa(j)=input (['Enter landa(',int2str(j),')=']);
    end
for i=1:n
    D(i,i)= landa(i);
end
% D
%if c==0
    Acap=A1;
    Bcap=B1;
    newF=Fp ;
%end
ac=Acap+Bcap*F1;
ac1=ac+D;
bc1=Bcap*bo;

Qc=[bc1 ac1];
%A=[0.95 0.49 0.46;0.23 0.89 0.02;0.61 0.76 0.82]
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=1:r
        if Qc(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Qc(i,j);
                Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
            end
        end
    end
end

```





```

clear all
A2=[.35 0.2 0.094 0 0.06 0 0.04 0
     0.3 0.35 0 0.094 0 0.06 0 0.04
     1 0 0 0 0 0 0 0
     0 1 0 0 0 0 0 0
     0 0 1 0 0 0 0 0
     0 0 0 1 0 0 0 0
     0 0 0 0 1 0 0 0
     0 0 0 0 0 1 0 0];
A1=[0.45 0.1 0.094 0 0.06 0 0.04 0
     0.1 .35 0 0.094 0 0.06 0 0.04
     1 0 0 0 0 0 0 0
     0 1 0 0 0 0 0 0
     0 0 1 0 0 0 0 0
     0 0 0 1 0 0 0 0
     0 0 0 0 1 0 0 0
     0 0 0 0 0 1 0 0];

xp=[];
x0=ones(2,1);
%up(:,1)=Kp*xp(:,1);
%Gama=A+B*Kp;
G1=A1(1:2,1:2);
G2=A2(1:2,1:2);
c1=.094;c2=.06;c3=.04;
cc1=c1*eye(2);
cc2=c2*eye(2);
cc3=c3*eye(2);
xp(:,1)=x0;
xp(:,2)=G1*xp(:,1);
xp(:,3)=G2*xp(:,2)+cc1*xp(:,1);
xp(:,4)=G1*xp(:,3)+(cc1)*xp(:,2)+(cc2)*xp(:,1);
xp(:,5)=G2*xp(:,4)+(cc1)*xp(:,3)+(cc2)*xp(:,2)+(cc3)*xp(:,1);
i=6;

```

```

while i<30
    xp(:,i)=G1*xp(:,i-1)+(cc1)*xp(:,i-2)+(cc2)*xp(:,i-3)+(cc3)*xp(:,i-4);
    xp(:,i+1)=G2*xp(:,i)+(cc1)*xp(:,i-1)+(cc2)*xp(:,i-2)+(cc3)*xp(:,i-3);
    i=i+2;
end
clf
%subplot(2,1,1),bar(up)
%title('input response')
%ylabel('inputs up')
%xlabel('time t')
%grid
%
%subplot(2,1,2),
i=1;
while i<30
    xx(i)=xp(2,i);
    i=i+1;
end
stairs(xx)
title('state response')
ylabel('x2')
xlabel('time t')
grid
xp

```

## آ.۴ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله اول مثال دوم

```

clc
A3=[.75 0.8 0.094 0 0.06 0 0.04 0
     0.7 0.8 0 0.094 0 0.06 0 0.04
     1 0 0 0 0 0 0 0
     0 1 0 0 0 0 0 0
     0 0 1 0 0 0 0 0

```

```

0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0];
A2=[.3 0.7 0.094 0 0.06 0 0.04 0
0.9 0.8 0 0.094 0 0.06 0 0.04
1 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0];
A1=[1.8 0.7 0.094 0 0.06 0 0.04 0
2 0 0 0.094 0 0.06 0 0.04
1 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0];
B1=[4.3 2;1 2 ;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ]
B2=[5 2.7 ;2 0.9;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ]
B3=[3.2 0.8 ;4.1 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ]
%B1=[.3 ; 2 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ]
%B2=[0.4 ; 1 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ]
% B3=[.2 ; 2 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ]
AA=A1;BB=B1;
A=A3;
B=B3;
reg1;
p1=p;
eigen111;
K3=Kp;
Gama3=A3+B3*K3;
A=A2;B=B2;

```

```

reg1;p2=p;
eigen111;
K2=Kp;
Gama2=A2+B2*K2;
A=(A3+B3*K3)*(A2+B2*K2)*AA;
B=(A3+B3*K3)*(A2+B2*K2)*BB;
reg1;p3=p;
eigen111;
K1=Kp;
Gama1= AA+BB*Kp;
A1=AA;
B1=BB;
sai=A+B*K1;
EIGSAI=eig(sai)
xp=[];up=[];xx=[];
x0=ones(8,1);
xp(:,1)=x0;
%up(:,1)=Kp*xp(:,1);
%Gama=A+B*Kp;
    i=2;
    while i<100
        xp(:,i)=Gama1*xp(:,i-1);
        xp(:,i+1)=Gama2*xp(:,i);
        xp(:,i+2)=Gama3*xp(:,i+1);
        i=i+3;
    end
    clf
%subplot(2,1,1),bar(up)
%title('input response')
%ylabel('inputs up')
%xlabel('time t')
%grid
%
%subplot(2,1,2),

```

```

i=1;
while i<100
    xx1(i)=xp(1,i);
    xx2(i)=xp(3,i);
    i=i+1;

end
stairs(xx2)
title('state response')
ylabel('x1')
xlabel('time t')
grid

```

## ۵.آ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله دوم مثال دوم

```

clear
A3=[.175  0.8  .9   0.08  0      0      0.032  0  0
     0.7  0.8  .2    0     0.08  0      0      0.032  0
     1    1.2  0     0     0      0.08  0      0      0.032
     1  0 0 0 0 0 0 0 0
     0  1 0 0 0 0 0 0
     0  0 1 0 0 0 0 0
     0  0 0 1 0 0 0 0
     0  0 0 0 1 0 0 0
     0  0 0 0 0 1 0 0 0];
A2=[.3    0.7  .9   0.08  0      0      0.032  0  0
     0.9   .8  .2    0     0.08  0      0      0.032  0
     1.5   .2  .3    0     0      0.08  0      0      0.032
     1  0 0 0 0 0 0 0
     0  1 0 0 0 0 0 0
     0  0 1 0 0 0 0 0
     0  0 0 1 0 0 0 0
     0  0 0 0 1 0 0 0

```

```

    0 0 0 0 0 1 0 0 0];
A0=[.28    0.7    .3    0.08    0        0        0.032    0    0
    0.2    .2    1.2        0    0.08    0        0    0.032    0
    0    2.    .3        0    0        0.08    0    0    0.032
    1 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 1 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 1 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 1 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 1 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 1 0 0 0];
B0=[4.3 2;2 2 ;1 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ];
B2=[5 2.7 ;2 0.9;0 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ] ;
B3=[3.2 0.8 ;4.1 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ] ;
AA0=A0;BB0=B0;
A=A3;
B=B3;
reg1;
p1=p;
landa(1)=.1;landa(2)=.1;landa(3)=.1; landa(4)=.2 ;landa(5)=.3;
landa(6)=-.5;landa(7)=.5;landa(8)=.3; landa(9)=-.5;
eigen22;
K3=Kp;
A=A2;B=B2;
reg1;p2=p;
landa(1)=.6 ;landa(2)=.2;landa(3)=-.7;landa(4)=-.1;landa(5)=.3;
landa(6)=.3;landa(7)=.5;landa(8)=.3;landa(9)=-.5;
eigen22;
K2=Kp;
A=(A3+B3*K3)*(A2+B2*K2)*AA0;
B=(A3+B3*K3)*(A2+B2*K2)*BB0;
jjjjparmot1
%jjjjparmin1
%reg1;eigeni
K1=Kp;

```

```

A0=AA0;
B0=BB0;
xp=[];up=[];
%up(:,1)=Kp*xp(:,1);
%Gama=A+B*Kp;
G1=A0(1:3,1:3)+B0(1:3,1:2)*K1(:,1:3);
G2=A2(1:3,1:3)+B2(1:3,1:2)*K2(:,1:3);
G3=A3(1:3,1:3)+B3(1:3,1:2)*K3(:,1:3);
c1=.08;c2=.032;
cc11=c1*eye(3)+B0(1:3,1:2)*K1(:,4:6);
cc12=c2*eye(3)+B0(1:3,1:2)*K1(:,7:9);
cc21=c1*eye(3)+B2(1:3,1:2)*K2(:,4:6);
cc22=c2*eye(3)+B2(1:3,1:2)*K2(:,7:9);
cc31=c1*eye(3)+B3(1:3,1:2)*K3(:,4:6);
cc32=c2*eye(3)+B3(1:3,1:2)*K3(:,7:9);
xp(:,1)=[1;1;1]
xp(:,2)=G1*xp(:,1);
xp(:,3)=G2*xp(:,2)+cc21*xp(:,1);
i=4;
num=40
while i<num
    xp(:,i)=G1*xp(:,i-1)+(cc11)*xp(:,i-2)+(cc12)*xp(:,i-3);
    xp(:,i+1)=G2*xp(:,i)+(cc21)*xp(:,i-1)+(cc22)*xp(:,i-2);
    xp(:,i+2)=G3*xp(:,i+1)+(cc31)*xp(:,i)+(cc32)*xp(:,i-1);
    i=i+3;
end
clf
%subplot(2,1,1),bar(up)
%title('input response')
%ylabel('inputs up')
%xlabel('time t')
%grid
%
%subplot(2,1,2),

```

```
i=1;
xx2=[];xx3=[];
while i<num
    xx1(i)=xp(1,i);
    i=i+1;

end

i=1;
while i<num
    xx2(i)=xp(2,i);
    i=i+1;

end

i=1;
while i<num
    xx3(i)=xp(3,i);
    i=i+1;

end

subplot(2,2,1)
stairs(xx1)
title('state response')
ylabel('x1(t)')
xlabel('time t')
grid
hold on
subplot(2,2,2)
stairs(xx2)
title('state response')
ylabel('x2(t)')
xlabel('time t')
grid
hold on
subplot(2,2,3)
```



```
stairs(xx3)
title('state response')
ylabel('x3(t)')
xlabel('time t')
grid
norm=norm(K1)
```

### ۱.۵.آ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله دوم زیر برنامه

```
AA=A
BB=B
n=rank(AA)
[uu,vv]=eig(AA')
nu=[];jj=0
for i=1:n
    if abs(vv(i,i))>=1
        jj=jj+1
        nu(jj)=i
    end
end
for i=1:jj
    Y1(:,i)=uu(:,nu(i))
end
end
GA1=zeros(jj,jj)
for i=1:jj
    GA1(i,i)=vv(nu(i),nu(i))
end
A=GA1;
B=Y1'*BB;
reg1;
eigeni;
Kp=Kp*Y1';
A=AA;
B=BB;
```

## آ.۲.۵ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله دوم زیر برنامه مینیمم نرم

```

AA=A
BB=B
n=rank(AA)
[uu,vv]=eig(AA')
nu=[];jj=0
for i=1:n
    if abs(vv(i,i))>=1
        jj=jj+1
        nu(jj)=i
    end
end
for i=1:jj
    Y1(:,i)=uu(:,nu(i))
end
end
GA1=zeros(jj,jj)
for i=1:jj
    GA1(i,i)=vv(nu(i),nu(i))
end
A=GA1;
B=Y1'*BB;
reg1
eigeni
V=bo(:,1)
W=T1(2,:)
C=V'*Kp*W'
P=V'*V
Q=W*W'
m=-C/Q
Galp=[0 m;0 0]
Kalp=bo*Galp*T1;
K=(Kp+Kalp)

```

$Kp=K*Y1'$  ;

## ۶.آ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله سوم

```
clear
A3=[.175  0.8  .9   0.08  0      0      0.032  0  0
     0.7  0.8  .2    0     0.08  0      0     0.032  0
     1    1.2  0     0     0     0.08  0     0     0.032
     1  0 0 0 0 0 0 0 0
     0  1 0 0 0 0 0 0
     0  0 1 0 0 0 0 0
     0  0 0 1 0 0 0 0
     0  0 0 0 1 0 0 0
     0  0 0 0 0 1 0 0 0];
A2=[.3    0.7  .9   0.08  0      0      0.032  0  0
     0.9   .8  .2    0     0.08  0      0     0.032  0
     1.5   .2  .3    0     0     0.08  0     0     0.032
     1  0 0 0 0 0 0 0
     0  1 0 0 0 0 0 0
     0  0 1 0 0 0 0 0
     0  0 0 1 0 0 0 0
     0  0 0 0 1 0 0 0
     0  0 0 0 0 1 0 0 0];
A0=[.28   0.7  .3   0.08  0      0      0.032  0  0
     0.2   .2  1.2    0     0.08  0      0     0.032  0
     0    2.   .3    0     0     0.08  0     0     0.032
     1  0 0 0 0 0 0 0
     0  1 0 0 0 0 0 0
     0  0 1 0 0 0 0 0
     0  0 0 1 0 0 0 0
     0  0 0 0 1 0 0 0
     0  0 0 0 0 1 0 0 0];
B0=[4.3 2;2 2 ;1 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ];
```

```

B2=[5 2.7 ;2 0.9;0 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ] ;
B3=[3.2 0.8 ;4.1 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ] ;
AA0=A0;BB0=B0;
A=A3;
B=B3;
reg1;
p1=p;
landa(1)=.9;landa(2)=-.9;landa(3)=.9; landa(4)=.9 ;landa(5)=-.9;
landa(6)=-.9;landa(7)=.3;landa(8)=.9; landa(9)=-.5;
eigen22;
K3=Kp;
A=A2;B=B2;
reg1;p2=p;
landa(1)=.9 ;landa(2)=.9;landa(3)=-.9;landa(4)=-.9;landa(5)=.3;
landa(6)=.9;landa(7)=.95;landa(8)=.9;landa(9)=-.9
eigen22;
K2=Kp;
A=(A3+B3*K3)*(A2+B2*K2)*AA0;
B=(A3+B3*K3)*(A2+B2*K2)*BB0;
reg1;p3=p;
eigeni;
par
%par1
%jjjjjjmin
K1=VPA(K);
A0=AA0;
B0=BB0;
xp=[];up=[];
%up(:,1)=Kp*xp(:,1);
%Gama=A+B*Kp;
G1=A0(1:3,1:3)+BB0(1:3,1:2)*K1(:,1:3);
G2=A2(1:3,1:3)+B2(1:3,1:2)*K2(:,1:3);
G3=A3(1:3,1:3)+B3(1:3,1:2)*K3(:,1:3);
c1=.08;c2=.032;

```

```

cc11=c1*eye(3)+BB0(1:3,1:2)*K1(:,4:6);
cc12=c2*eye(3)+BB0(1:3,1:2)*K1(:,7:9);
cc21=c1*eye(3)+B2(1:3,1:2)*K2(:,4:6);
cc22=c2*eye(3)+B2(1:3,1:2)*K2(:,7:9);
cc31=c1*eye(3)+B3(1:3,1:2)*K3(:,4:6);
cc32=c2*eye(3)+B3(1:3,1:2)*K3(:,7:9);
xp(:,1)=[-.01;0;0]
xp(:,2)=G1*xp(:,1);
xp(:,3)=G2*xp(:,2)+cc21*xp(:,1);
    i=4;
    num=30
while i<num
    xp(:,i)=G1*xp(:,i-1)+(cc11)*xp(:,i-2)+(cc12)*xp(:,i-3);
    xp(:,i+1)=G2*xp(:,i)+(cc21)*xp(:,i-1)+(cc22)*xp(:,i-2);
    xp(:,i+2)=G3*xp(:,i+1)+(cc31)*xp(:,i)+(cc32)*xp(:,i-1);
    i=i+3;
end
clf
%subplot(2,1,1),bar(up)
%title('input response')
%ylabel('inputs up')
%xlabel('time t')
%grid
%
%subplot(2,1,2),
    i=1;
    xx2=[];xx3=[];
while i<num
    xx1(i)=xp(1,i);
    i=i+1;

end
i=1;
while i<num

```

```
        xx2(i)=xp(2,i);
        i=i+1;

    end
    i=1;
    while i<num
        xx3(i)=xp(3,i);
        i=i+1;

    end
    subplot(2,2,1)
    stairs(xx1)
    title('state response')
    ylabel('x1(t)')
    xlabel('time t')
    grid
    hold on
    subplot(2,2,2)
    stairs(xx2)
    title('state response')
    ylabel('x2(t)')
    xlabel('time t')
    grid
    hold on
    subplot(2,2,3)
    stairs(xx3)
    title('state response')
    ylabel('x3(t)')
    xlabel('time t')
    grid
    norm(K1)
```

آ.۱.۶ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله سوم

AA=A

```

BB=B
n=rank(AA)
[uu,vv]=eig(AA')
nu=[];jj=0
for i=1:n
    if abs(vv(i,i))>1
        jj=jj+1
        nu(jj)=i
    end
end
for i=1:jj
Y1(:,i)=uu(:,nu(i))
    end
end
GA1=zeros(jj,jj)
for i=1:jj
GA1(i,i)=vv(nu(i),nu(i))
    end
A=GA1;
B=Y1'*BB;
reg1
eigen66
V=bo(:,1)
W=T1(2,:)
C=V'*Kp*W'
P=V'*V
Q=W*W'
m=-C/Q
Galp=[0 m 0;0 0 0]
Kalp=bo*Galp*T1;
K=(Kp+Kalp)
F2=K*Y1';

```

### آ.۲.۶ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله سوم

```
\par
syms m1 m2 m3 m4
Gal=[0 m1 0 m2 0 m3 0 m4 0
      0 0 0 0 0 0 0 0 0];
Kal=bo*Gal*(T1)
K=Kp+Kal;
```

### آ.۳.۶ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله سوم مینیمم نرم

```
%zzzzzzmin
AA=A
BB=B
n=rank(AA)
reg1;eigeni;
V=bo(:,1)
W=[T1(2,:);T1(4,:);T1(6,:);T1(8,:)]
C=V'*Kp*W'
P=V'*V
Q=W*W'
H=-inv(P)*C*inv(Q)
Galp=[0 H(1,1) 0 H(1,2) 0 H(1,3) 0 H(1,4) 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0]
Kalp=bo*Galp*T1;
K=(Kp+Kalp)
```

### آ.۴.۶ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر خطی

```
syms m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9 m10 m11
      m12 m13 m14 m15 m16 m17 m18
Galp1=[m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9;
        m10 m11 m12 m13 m14 m15 m16 m17 m18];
mij
```



```

Galph2=[m1 m2 m3 m4 m5 m6 m7 m8 m9;
        m10 m11 m12 m13 m14 m15 m16 m17 m18]
I7=eye(7);Z=zeros(7,2); GG=[Galph2;I7 Z];
reg1
Fg=bo*Galph2*T1;
F=Fg+Fp;
%P1=A+B*(F);
%poly(P1)
%format long
%P2=diag([- .1,- .1,- .1,- .1,- .1,- .1,- .1,- .1,- .1]);
%poly(P2)
%eig(P1)
%eig(P2)
%eig(A+B*Fg*T1)
%format long g
%A+B*Fg*T1
poly(GG)
%eig(P1)
%AA1=A1;BB1=B1;FF1=F1

```

آ.۶.۵ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر خطی

```

syms m1 m2 m3 m4
%jm4
Galph1=[m1 m2; m3 m4];
%I=eye(1);Z=zeros(1,2);
GG=Galph1;
reg1
Fg=bo*Galph1*T1;
F=Fg+Fp;

```

## آ.۶.۶ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر خطی میل

```

> m1 := .1; m2 := .1; m3 := .1; m4 := .1; m5 := .1; m6 := .1;
  m7 := .1; m8 := .1; m9 := .1;
> fsolve({-m11-m1 = .9, m9*m17-m8*m18 = 0.1e-8,
-m13-m3-m10*m2+m11*m1 = .36,
-m16*m8+m17*m7-m6*m18+m9*m15 = 0.9e-7,
-m15-m5-m10*m4+m13*m1-m2*m12+m3*m11 = 0.84e-1,
-m4*m18+m9*m13-m6*m16+m7*m15-m14*m8+m17*m5=0.3e-5,
-m17-m7-m10*m6+m15*m1-m2*m14+m5*m11-m12*m4
  +m13*m3 = 0.126e-1,
-m2*m18+m9*m11-m12*m8+m17*m3-m4*m16
+m7*m13-m14*m6+m15*m5 = 0.84e-4,
-m9-m10*m8+m17*m1-m2*m16+m7*m11
-m12*m6+m15*m3-m4*m14+m5*m13 = 0.126e-2});
print(`output redirected...`); # input placeholder
{m10 = -1.033544608, m11 = -1.0, m12 = -1.00080400,
m13= -0.4566455392, m14 = -0.4566806392,
m15 = -0.1262296931, m16 = -0.1262305831,
m17 = -0.0217845985, m18 = -0.0217846085}

```

## آ.۷ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر خطی

```

clear
A3=[.175  0.8  .9   0.08  0     0     0.032  0   0
     0.7  0.8  .2   0     0.08  0     0     0.032  0
     1    1.2  0    0     0     0.08  0     0     0.032
     1    0  0  0  0  0  0  0  0
     0    1  0  0  0  0  0  0  0
     0    0  1  0  0  0  0  0  0
     0    0  0  1  0  0  0  0  0
     0    0  0  0  1  0  0  0  0

```

```

0 0 0 0 0 1 0 0 0];
A2=[.3    0.7  .9   0.08  0      0      0.032  0    0
0.9    .8  .2    0      0.08  0      0      0.032  0
1.5    .2  .3    0      0      0.08  0      0      0.032
1  0  0  0  0  0  0  0  0
0  1  0  0  0  0  0  0  0
0  0  1  0  0  0  0  0  0
0  0  0  1  0  0  0  0  0
0  0  0  0  1  0  0  0  0
0  0  0  0  0  1  0  0  0];
A0=[.28    0.7  .3   0.08  0      0      0.032  0    0
0.2    .2  1.2    0      0.08  0      0      0.032  0
0    2.   .3    0      0      0.08  0      0      0.032
1  0  0  0  0  0  0  0  0
0  1  0  0  0  0  0  0  0
0  0  1  0  0  0  0  0  0
0  0  0  1  0  0  0  0  0
0  0  0  0  1  0  0  0  0
0  0  0  0  0  1  0  0  0];
B0=[4.3 2;2 2 ;1 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ];
B2=[5 2.7 ;2 0.9;0 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ] ;
B3=[3.2 0.8 ;4.1 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0 ] ;
AA0=A0;BB0=B0;
A=A3;
B=B3;
reg1;
p1=p;
landa(1)=.1;landa(2)=.1;landa(3)=.1; landa(4)=.2 ;landa(5)=.3;
landa(6)=-.5;landa(7)=.5;landa(8)=.3; landa(9)=-.5;
eigen22;
K3=Kp;
A=A2;B=B2;
reg1;p2=p;
landa(1)=.6 ;landa(2)=.2;landa(3)=-.7;landa(4)=-.1;landa(5)=.3;

```

```

landa(6)=.3;landa(7)=.5;landa(8)=.3;landa(9)=-.5;
eigen22;
K2=Kp;
A=(A3+B3*K3)*(A2+B2*K2)*AA0;
B=(A3+B3*K3)*(A2+B2*K2)*BB0;
jjjnonlipara
K1=F;
A0=AA0;
B0=BB0;
xp=[];up=[];
%up(:,1)=Kp*xp(:,1);
%Gama=A+B*Kp;
G1=A0(1:3,1:3)+BB0(1:3,1:2)*K1(:,1:3);
G2=A2(1:3,1:3)+B2(1:3,1:2)*K2(:,1:3);
G3=A3(1:3,1:3)+B3(1:3,1:2)*K3(:,1:3);
c1=.08;c2=.032;
cc11=c1*eye(3)+BB0(1:3,1:2)*K1(:,4:6);
cc12=c2*eye(3)+BB0(1:3,1:2)*K1(:,7:9);
cc21=c1*eye(3)+B2(1:3,1:2)*K2(:,4:6);
cc22=c2*eye(3)+B2(1:3,1:2)*K2(:,7:9);
cc31=c1*eye(3)+B3(1:3,1:2)*K3(:,4:6);
cc32=c2*eye(3)+B3(1:3,1:2)*K3(:,7:9);
xp(:,1)=[1;1;1]
xp(:,2)=G1*xp(:,1);
xp(:,3)=G2*xp(:,2)+cc21*xp(:,1);
    i=4;
    num=60
while i<num
    xp(:,i)=G1*xp(:,i-1)+(cc11)*xp(:,i-2)+(cc12)*xp(:,i-3);
    xp(:,i+1)=G2*xp(:,i)+(cc21)*xp(:,i-1)+(cc22)*xp(:,i-2);
    xp(:,i+2)=G3*xp(:,i+1)+(cc31)*xp(:,i)+(cc32)*xp(:,i-1);
    i=i+3;
end
clf

```

```
%subplot(2,1,1),bar(up)
%title('input response')
%ylabel('inputs up')
%xlabel('time t')
%grid
%
%subplot(2,1,2),
    i=1;
    xx2=[];xx3=[];
    while i<num
        xx1(i)=10(-6)*xp(1,i);
        i=i+1;
    end
    i=1;
    while i<num
        xx2(i)=10(-6)*xp(2,i);
        i=i+1;
    end
    i=1;
    while i<num
        xx3(i)=10(-6)*xp(3,i);
        i=i+1;
    end
    subplot(2,2,1)
    stairs(xx1)
    title('state response')
    ylabel('x1(t)')
    xlabel('time t')
    grid
    hold on
    subplot(2,2,2)
    stairs(xx2)
    title('state response')
    ylabel('x2(t)')
```

```

xlabel('time t')
grid
hold on
subplot(2,2,3)
stairs(xx3)
title('state response')
ylabel('x3(t)')
xlabel('time t')
grid
eig(A+B*F)

```

## ۸.آ کد متلب مساله تخصیص مقادیر ویژه سیستم متناوب مقاله چهارم غیر خطی

```

% program to obtain parametric feedback laws
R1=eye(n);
A1=Q(:, [m+1:r]);
B1=Q(:, [1:m]);
sort(p);
np=p(1)-p(m);
if np==1
    ar=n-q*m;s=m-ar;N=ar*s;
else
    N=n*m;
    for k=1:m
        N=N-(2*k-1)*p(k);
    end
end
alpha=[];
disp('          No. of parameters you can have =')
disp('          *****')
N
c=input('          How many feed-back laws do you want? ')
if np==1

```



```

% without axis x 2:complex center wiyh axis x 3:real center
% *****
AAA=[5 1 4 5 7 6 7 9 7 1;8 3 5 3 4 8 9 9 0 4;
2 5 8 9 4 8 3 1 7 0;4 9 4 7 4 6 7 8 7 7;9 3 9 6 9 1 1 2 3 4;
6 3 8 4 3 7 9 4 8 0;0 1 4 7 4 8 6 3 0 1;0 0 3 6 0 8 4 2 6 8;
6 4 4 8 1 0 6 7 3 3;5 2 5 6 9 4 3 4 5 5]
BBB=[6 9 3 8 0 0;3 2 7 4 9 5;7 2 6 6 3 5;9 3 3 5 2 8;
5 9 3 9 8 5;9 2 2 3 8 5;5 0 7 2 3 7;
1 3 7 4 6 2;6 9 6 4 5 0;0 1 6 3 9 9]
A=AAA;
B=BBB;
REG1
c1=input('enter complex center=');
radius1=input ('enter r withot ghate x=');
z1=input('inter z, z is even and z<=n :');
for i=1:n
    for j=1:n
        D(i,j)=0;
    end
end
i=1;
k=1;
    for i=1:2:z1
        D(i,i)=k*radius1*rand(1)+real(c1);
        while D(i,i)==real(c1)+radius1 || D(i,i)==real(c1)-radius1
            || D(i,i)==0
                D(i,i)=k*radius1*rand+real(c1);
            end
        D(i,i+1)=k*sqrt((radius1^2)-((abs(D(i,i))
        -abs(real(c1)))^2))*rand(1)+imag(c1);
        D(i+1,i)=-D(i,i+1);
        D(i+1,i+1)=D(i,i);
        % i=i+2
        k=-k;
    end

```



```

end
D
pause
s=z1+1;
c2=input('enter complex center=');
radius2=input ('enter r with ghate x=');
z2=input('inter z, z is even and z<=n for complex eigenvalue:');
z3=input('inter z, z is even and z<=n for real eigenvalue:');
for i=s:2:z2+s-1
    D(i,i)=k*sqrt((radius2^2)-(imag(c2)^2))*rand(1)+real(c2);
    while D(i,i)==real(c2)+radius2 || D(i,i)==real(c2)-radius2
        || D(i,i)==0
        D(i,i)=k*radius2*rand+real(c2);
    end
    D(i,i+1)=(sqrt((radius2^2)-((abs(D(i,i))-abs(real(c2)))^2))
        -abs(imag(c2)))*rand(1);
    D(i+1,i)=-D(i,i+1);
    D(i+1,i+1)=D(i,i);
    % i=i+2
    k=-k;
end
s=z1+z2+1;
k=1;
for i=s:z3+s-1
    D(i,i)=k*sqrt(radius2^2-imag(c2)^2)*rand(1)+real(c2);
    while D(i,i)==real(c2)+sqrt(radius2^2-imag(c2)^2) ||
    D(i,i)==real(c2)-sqrt(radius2^2-imag(c2)^2) || D(i,i)==0
        D(i,i)=k*sqrt(radius2^2-imag(c2)^2)*rand(1)+real(c2);
    end
    k=-k;
end
D
pause
c3=input('enter real center=');

```

```

radius3=input ('enter r =');
z4=input('inter z, z is even and z<=n for complex eigenvalue:');
z5=input('inter z, z is even and z<=n for real eigenvalue:');
s=z1+z2+z3+1;
    for i=s:2:z4+s-1
        D(i,i)=k*radius3*rand(1)+c3;
        while D(i,i)==c3+radius3 || D(i,i)==c3-radius3 || D(i,i)==0
            D(i,i)=k*radius3*rand(1)+c;
        end
        D(i,i+1)=sqrt((radius3^2)-((abs(D(i,i))-abs(c3))^2))*rand(1);
        D(i+1,i)=-D(i,i+1);
        D(i+1,i+1)=D(i,i);
        k=-k;
    end
s=z1+z2+z3+z4+1;
k=1;
for i=s:z5+s-1
    D(i,i)=k*radius3*rand(1)+c3;
    while D(i,i)==c3+radius3 || D(i,i)==c3-radius3 || D(i,i)==0
        D(i,i)=k*radius3*rand(1)+c3;
    end
    k=-k;
end
    pause
    %if c==0
        Acap=A1;
        Bcap=B1;
        newF=Fp ;
    %end
ac=Acap+Bcap*F1;
ac1=ac+D;
bc1=Bcap*bo;

Qc=[bc1 ac1];

```

```

% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=1:r
        if Qc(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Qc(i,j);
                Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
                Qc(k-m,:)=Qc(k-m,:)+t*Qc(j-m,:);
            end
            break
        end
    end
end

end

G2=Qc(1:m,m+1:r);
Fc=bo*G2*T1;

disp(' The feedback matrix which gives the desired eigenvalues')
disp('          *****')
Kp=newF+Fc
%   disp('          with the closed-loop matrix ')
%   disp('          ***** ')
gamac=A+B*Kp;
disp('          checking the eigen values ')
disp('          ***** ')
v=eig(gamac)'
[u1,v1]=eig(gamac);
w2=cond(u1)
disp('          Frobenius norm of feedback matrix ')
disp('          ***** ')
Normkp=norm(Kp,'fro')
%   disp('          frobenious norm of closed-loop matrix ')
%   disp('          ***** ')
%   Normgama=norm(gamac,'fro')

```

```

%      End of program for eigen
ezplot('(x-.2)^2+(y-0.2)^2-0.01', [-1 1])
hold on
ezplot('(x+.6)^2+(y+0.2)^2-0.09', [-1 1])
ezplot('(x)^2+(y)^2-0.01', [-1 1])
x=[-1 1];
y=[0 0]
plot(x,y)
y=[-1 1];
x=[0 0];
plot(x,y)
plot(v, 'k*');
ezplot('(x-.2)^2+(y+0.2)^2-0.01', [-1 1])
hold off

```

## آ.۱۰ کد متلب ژنتیک

```

ceq(1)=-x(11)-x(1)-0.9;
ceq(2)=x(9)*x(17)-x(8)*x(18);
ceq(3)=-x(13)-x(3)-x(10)*x(2)+x(11)*x(1)-0.36;
ceq(4)=-x(16)*x(8)+x(7)*x(17)-x(6)*x(18)+x(9)*x(15);
ceq(5)=-x(15)-x(5)-x(10)*x(4)+x(1)*x(13)-x(2)*x(12)
      +x(3)*x(11)-0.084;
ceq(6)=-x(18)*x(4)+x(9)*x(13)-x(6)*x(16)+x(7)*x(15)
      -x(14)*x(8)+x(5)*x(17)-0.0000036;
ceq(7)=-x(17)-x(7)-x(6)*x(10)+x(1)*x(15)-x(2)*x(14)+
      x(5)*x(11)-x(4)*x(12)+x(3)*x(13)-0.0126;
ceq(8)=-x(18)*x(2)+x(9)*x(11)-x(8)*x(12)+x(3)*x(17)
      -x(4)*x(16)+x(7)*x(13)-x(14)*x(6)+x(5)*x(15)-0.000084;
ceq(9)=-x(9)-x(10)*x(8)+x(17)*x(1)-x(2)*x(16)+x(7)*x(11)
      -x(6)*x(12)+x(15)*x(3)-x(14)*x(4)+x(5)*x(13)-0.00126;

function [c ceq] = constr(m)
ceq(:,1)=-m(:,11)-m(:,1)-0.9;
ceq(:,2)=m(:,9)*m(:,17)-m(:,8)*m(:,18)-10^{-8};

```

```

ceq(:,3)=-m(:,13)-m(:,3)-m(:,10)*m(:,2)+m(:,11)*m(:,1)-0.36;
ceq(:,4)=-m(:,16)*m(:,8)+m(:,7)*m(:,17)-m(:,6)*m(:,18)
+m(:,9)*m(:,15)-m(:,1)-0.9*10^{-7};
ceq(:,5)=-m(:,15)-m(:,5)-m(:,10)*m(:,4)+m(:,1)*m(:,13)
-m(:,2)*m(:,12)+m(:,3)*m(:,11)-0.0.084;
ceq(:,6)=-m(:,18)*m(:,4)+m(:,9)*m(:,13)-m(:,6)*m(:,16)
+m(:,7)*m(:,15)-m(:,14)*m(:,8)+m(:,5)*m(:,17)-0.36*10^{-5};
ceq(:,7)=-m(:,17)-m(:,7)-m(:,6)*m(:,10)+m(:,1)*m(:,15)
-m(:,2)*m(:,14)+m(:,5)*m(:,11)-m(:,4)*m(:,12)
+m(:,3)*m(:,13)-0.0126;
ceq(:,8)=-m(:,18)*m(:,2)+m(:,9)*m(:,11)-m(:,8)*m(:,12)
+m(:,3)*m(:,17)-m(:,4)*m(:,16)+m(:,7)*m(:,13)
-m(:,14)*m(:,6)+m(:,5)*m(:,15)-0.84*10^{-4};
ceq(:,9)=-m(:,9)-m(:,10)*m(:,8)+m(:,17)*m(:,1)
-m(:,2)*m(:,16)+m(:,7)*m(:,11)-m(:,6)*m(:,12)
+m(:,15)*m(:,3)-m(:,14)*m(:,4)+m(:,5)*m(:,13)-0.00126;
c=[];

a=zeros(1,18);
b=ones(1,18);
gaoptions = gaoptimset('Generations',100,'SelectionFcn',
    {@selectiontournament,4});
[x fval] = ga(@my_fun,18,[],[],[],[],[],[],@constra,gaoptions)
ceq

function z = my_fun(m)
f(1,1)=.12*m(:,1)-.01*m(:,2)+.16*m(:,3)-.5*m(:,4)-33.3*m(:,5)
+22.4*m(:,6)+111.46*m(:,7)+690.5*m(:,8)-1661.76*m(:,9)-.13;
f(1,2)= -.16*m(:,1)+.2*m(:,2)+.1*m(:,3)-.11*m(:,4)-10.14*m(:,5)
+5.92*m(:,6)+95.92*m(:,7)+420.41*m(:,8)-323.15*m(:,9)-.5;
f(1,3)= .05*m(:,1)-.04*m(:,2)-.3*m(:,3)+.4*m(:,4)+61.95*m(:,5)
-25.66*m(:,6)-308.1*m(:,7)-3995.6*m(:,8)+1913.2*m(:,9)+.46;
f(1,4)= -.01*m(:,1)-.01*m(:,2)-.05*m(:,3)+.1*m(:,4)-33.29*m(:,5)
+6.24*m(:,6)+581.93*m(:,7)+3003.91*m(:,8)-500.44*m(:,9);
f(1,5)= .01*m(:,1)-.01*m(:,2)+.3*m(:,3)-.1*m(:,4)-22.77*m(:,5)
+.54*m(:,6)-1039.07*m(:,7)+3901.36*m(:,8)-381.3*m(:,9)+.03;

```

```
f(1,6)=.01*m(:,2)+.01*m(:,3)+.01*m(:,4)-16.2*m(:,5)
+7.59*m(:,6)+1771.6*m(:,7)+393.22*m(:,8)-286.48*m(:,9);
f(1,7)=.01*m(:,6)-1403.03*m(:,7)+86.57*m(:,8)+42.39*m(:,9)-.01;
f(1,8)=.01*m(:,3)-.01*m(:,4)+1.61*m(:,5)-.93*m(:,6)-23.49*m(:,7)
-556.96*m(:,8)-156.65*m(:,9)+.01;
f(1,9)= -.01*m(:,3)+.01*m(:,4)-3.24*m(:,5)+1.74*m(:,6)
-578.69*m(:,7)+450.93*m(:,8)-151.91*m(:,9);
f(2,1)=.1*m(:,10)-.2*m(:,12)-.5*m(:,13)-33.3*m(:,14)
+22.4*m(:,15)+111.5*m(:,16)+690.5*m(:,17)-1661.8*m(:,18)+.3;
f(2,2)=-.2*m(:,10)+.2*m(:,11)+.1*m(:,12)-.1*m(:,13)-10.1*m(:,14)
+5.9*m(:,15)+95.9*m(:,16)+420.4*m(:,17)-323.15*m(:,18)+.6;
f(2,3)=.05*m(:,10)-.04*m(:,11)-.3*m(:,12)+.4*m(:,13)+61.9*m(:,14)
-25.7*m(:,15)-308*m(:,16)-3996*m(:,17)+1913*m(:,18)-1.1;
f(2,4)=-.01*m(:,10)+.1*m(:,13)-33.29*m(:,14)+6.24*m(:,15)+
581.93*m(:,16)+3003.91*m(:,17)-500.44*m(:,18)-.05;
f(2,5)=.01*m(:,10)-.01*m(:,11)+.31*m(:,12)-.11*m(:,13)
-22.8*m(:,14)+.55*m(:,15)-1039*m(:,16)+3901*m(:,17)
-381*m(:,18)-.08;
f(2,6)= -.01*m(:,10)+.01*m(:,11)+.01*m(:,12)+.01*m(:,13)
-16.2*m(:,14)+7.6*m(:,15)+1772*m(:,16)
+393.2*m(:,17)-286.5*m(:,18);
f(2,7)=.1*m(:,15)-1403.03*m(:,16)+86.57*m(:,17)
+42.39*m(:,18)+.01;
f(2,8)=.01*m(:,12)-.01*m(:,13)+1.61*m(:,14)-.93*m(:,15)
-23.49*m(:,16)-556.96*m(:,17)-156.65*m(:,18)-.03;
f(2,9)= -.02*m(:,12)+.01*m(:,13)-3.24*m(:,14)+1.74*m(:,15)
-578.69*m(:,16)+450.93*m(:,17)-151.91*m(:,18);
z=norm(f);
```

# مراجع

- [1] AL-RAHMANI, H. M., FRANKLIN, G. F. (1989) "Linear periodic systems: eigenvalues assignment using discrete periodic feedback", *IEEE Trans. Automatic Control* **34** (1), 99-103.
- [2] S. BITTANI AND P. COLANERI(2009)" Periodic Systems ; Filtering and Control", Italy, Springer.
- [3] BUSŁOWICZ, M., RUSZEWSKI, A. (2013). Necessary and sufficient conditions for stability of fractional discrete-time linear state-space systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, **61**(4).
- [4] CHEN, C. T. (1999) " Linear System Theory and Design", Oxford University Press: New York.
- [5] CHEN, Y. Q. , JARA, B. M. V., XUE, D. & BATLLE, V. F. (2010) " Fractional-order Systems and Controls; Fundamentals and Applications", London: Springer-Verlag.
- [6] DATTA. B. N. , FELLOW. I. , SARKISSIAN. D. R. (2002) "Partial eigenvalue assignment in linear systems: existence, uniqueness and numerical solution" , Proceedings of the Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Notre Dame.
- [7] B. N. DATTA(2010) "Numerical Linear Algebra and Applications", SIAM, .
- [8] A. DZIELI ŃSKI AND D. SIEROCIUK(2007) "Controllability and observability of fractional order discrete state-space systems", 13th IEEE/IFAC International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Szczecin, Poland.
- [9] FARINA AND S. RINALDI , " Positive Linear Systems, Theory and Applications", J. Wiley, New York, NY,2000.
- [10] FARKAS, M. (1994) " Periodic Motion", New York, USA , Springer-Verlag.
- [11] GORENFLO, R., MAINARDI, F. (1997) " Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order", New York, Fractals and fractional calculus.

- 
- [12] GUO G., QIAO J. F, HAN C. Z.(2004) "Controllability of periodic systems: continuous and discrete". Control Theory and Applications IEE Pro, **151** 488-490.
- [13] HILFER, R. (2000) " Applications of Fractional Calculus in Physics", New Jersey, World Scientific.
- [14] T. KACZOREK(2002), "Positive 1D and 2D Systems", Springer-Verlag, London.
- [15] T. KACZOREK(2008), " Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems", Bulletin of the polish academy of sciences, technical sciences, Vol. 56, No. 4.
- [16] T. KACZOREK(2009), " Stabilization of fractional discrete-time linear systems using state-feedback", Proc. Conf. LOGITRANS, April 15-17, Szczyrk.
- [17] KARBASSI SM, BELL D. J.(1993), " Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-Part 1: Regular Kronecker invariants". Int. J. Control. **57** , 817-830.
- [18] KARBASSI, S. M, BELL, D. J. (1994), "New method of parametric eigenvalues assignment in state feedback control", IEE Pross Contr Theor App, **141** (1), 223-226.
- [19] S. M. KARBASSI (2001), "An algorithm for minimizing the norm of state feedback controllers in eigenvalue assignment". Computers and Mathematics with Applications. **41** 1317-1326.
- [20] S. M. KARBASSI, H. A. TEHRANI(2002), " Non-linear state feedback Controller for linear multi-variable systems ", Comput. Math. Appl.41, 1057-1065.
- [21] KATAYAMA. H, ICHIKAWA A.(1992) "Pole assignment by state transition graph". *IEEE Trans.* **37** 1196-1201.
- [22] KILBAS, A., SRIVASTAVA, H. M., TRUJILLO, J. J. (2006), "Theory and applications of fractional differential equations", Amsterdam, Elsevier.
- [23] R. W. KOEPCKE(1965), " On the control of linear systems with pure time-delay", Trans. Asme j. Of Basic En, .
- [24] KONO, M. (1980), "Eighenvalue assignment in linear periodic discrete-time system", int. j. control. **32** (1), 149-158.
- [25] LV, L., DUAN, G. , ZHOU, B. (2010) "Parametric pole assignment and robust pole assignment for discrete-time linear periodic system", Siam j. control optim.**48** (6), 3975–3996.



- 
- [26] M. MICHELL(1999), An introduction to genetic algorithms, Cambridge, Massachusetts , London, England.
- [27] M. D. ORTIGUEIRA(1997) ,"Fractional discrete-time linear systems", Proc. Of the IEE-ICASSP 97, Munich, Germany. IEEE, New York, pp.2241-2244.
- [28] SREEDHAR, J. & VAN DOOREN, P. (1993) "Pole placement via the periodic Schur decomposition", Amer. Contr. Conf. , 1563–1567.
- [29] SREEDHAR J, VAN DOOREN P.(1994) "On finding stabilizing state feedback gains for a Discrete-time periodic system". Proceeding of American Control Conference. Baltimore, USA , 1167-1168.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Algorithm	الگوریتم
Euclidean	اقلیدسی
Block	بلوکی
Eigenvector	بردار ویژه
Right eigenvector	بردار ویژه راست
Left eigenvector	بردار ویژه چپ
Base	پایه
Continous-time	پیوسته زمانی
Parameterization	پارامتری کردن
Primary state feedback	پس‌خورد حالت اولیه
Assignment	تخصیص
Linear decomposition	ترکیب خطی
Similarity transaction	تبدیل تشابهی
Transpese	ترانهاده
Transformation	تبدیل
Charactristic Polynomial	چندجمله‌ای مشخصه
Reject	حذف
Solvable	حل پذیر
Determinant	دترمینان
Reachability	دسترس پذیری
Sub-space	زیرفضا
Close-loop System	سیستم حلقه-بسته
Open-loop System	سیستم حلقه-باز
Delay system	سیستم تاخیری
Generalized System	سیستم تعمیم یافته

Linear System	سیستم خطی
Nonlinear System	سیستم غیر خطی
Index	شاخص
Spectrum	طیف
Null space	فضای پوچ
Standard echolen form	فرم استاندارد اشلون
Vector companian form	فرم همدم برداری
Low control	قانون کنترل
Pole	قطب
Controllability	کنترل پذیر
Controller	کنترل‌گر
Total stability	کاملاً پایدار
Lyapunov	لیاپانوف
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Identity matrix	ماتریس همانی
Square matrix	ماتریس مربعی
Similarity matrix	ماتریس تشابهی
Observable	مشاهده پذیر
Computation	محاسبه
Control variable	متغیر کنترل
Conjugated complex	مزدوج مختلط
Dynamic equation	معادله دینامیکی
Linear inepended	مستقل خطی
Field	میدان
Norm or matrix	نرم ماتریس
Kronocker invariant	ناورداهای کرونکر
Existence	وجود
Linear depended	وابسته خطی
Uniqueness	یکتایی

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Algorithm	الگوریتم
Assignment	تخصیص
Asymptotically	مجانبی
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Bases	پایه
Block	بلوکی
Characteristic-equation	معادله مشخصه
Closed-Loop	حلقه بسته
Control Variable	متغیر کنترل
Conjugated Complex	مزدوج مختلط
Companion form	فرم همدم
Continous-time	پیوسته زمانی
Control low	قانون کنترل
Controllable	کنترل پذیر
Controller	کنترل‌گر
Column	ستون
Computation	محاسبه
Cayley-Hamilton theorem	قضیه کیلی هامیلتون
Constant matrix	ماتریس ثابت
Delay system	سیستم تاخیری
Discrete-time	گسسته زمانی
Description system	توصیف سیستم
determinant	دترمینان
Differential	دیفرانسیل
Dynamical equation	معادله دینامیکی

Elementary	مقدماتی
Eigen vector	بردار ویژه
Eigen value	مقدار ویژه
Euelidean	اقلیدسی
Existence	وجود
Feedback	پس‌خورد
Field	میدان
Generalized	تعمیم یافته
Horizontal	افقی
Index	شاخص
Inverse	معکوس
Kronocker invariant	ناوردای کرونکر
Left eigen vector	بردار ویژه چپ
Linear composition	ترکیب خطی
Linear depended	وابسته خطی
Linear inepended	مستقل خطی
Lyapunov	لیاپانوف
Nonlinear system	سیستم غیر خطی
Norm of matrix	نرم ماتریس
Null space	فضای پوچ
Observable	مشاهده پذیر
Operations	عملیات
Open-Loop	حلقه باز
Output-vector	بردار خروجی
Orthogonal	متعامد
Parameterization	پارامتری سازی
Physical system	سیستم فیزیکی
Primary state feedback	پس‌خورد حالت اولیه
Pole	قطب
Polynomial	چند جمله‌ای
Reachability	دسترس پذیری
Rejection	حذف

Right eigenvector	بردار ویژه راست
Sub-Space	زیر فضا
Spectrum	طیف
Similarity transaction	تبدیلات تشابهی
Schur decomposition	تجزیه شور
Squire	میدان
Transpese	ترانهاده
Transformation	تبدیل
Triangler matrix	ماتریس مثلثی
Total stability	پایدار کلی
Vector	بردار
Vertial	عمودی

## **Aabstract**

In this thesis stability of fractional-order periodic discrete-time linear systems is explained. Fractional systems provide an excellent instrument to describe memory and hereditary properties of various materials and processes. The advantages of the real objects of the fractional-order systems are that we have more degrees of freedom in the model and that a 'memory' is included in the model (fractional-order systems have an unlimited memory). To modify the dynamic response of linear system we should change the poles of state feedback matrices. Control of periodic fractional linear discrete-time system isn't possible in original form. But it can be changed to a periodic linear discrete-time with arbitrary delays in time and having practical stability conditions. Because of arbitrary delays we can make the conditions similar to fractional system that provides an excellent instrument to describe memory and hereditary properties of processes. We proposed a special form of state feedback matrix to assign suitable eigenvalues to closed-loop monodromy matrix of system. But it makes large monodromy matrix and changing all of eigenvalues make some problems. Reassigning a part of bad spectrums, leaving the rest of the spectrums invariant, we have lower ordered matrix to modify the dynamic response of linear system and we can make non-linear parametric for this new lower-ordered matrix by less expenses and better stability conditions. Stabilization of fractional-order periodic discrete-time linear system by a complete non-linear parametric approach for pole assignment with respect to stability and reachability of system via state feedback is proposed. Non-linear parametric feedback matrix make some freedoms in conditions such as minimum norm of feedback matrix. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed approaches.

**Abstract:** control, discrete-time, fractional derivative, linear, periodic systems, pole assignment, stability.



Shahrood University of Technology  
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Doctoral Thesis Submitted in  
Applied Mathematics

# **Control of fractional-order periodic discrete-time linear systems**

Supervisor

**Doctor Hojjat Ahsani Tehrani**

Advisor

**Doctor Mohammad Mehdi Fateh**

by

**Javad Esmaeeli**

2016