بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

کاربرد الگوریتم رِمِز در نظریه بهترین تقریب

منصوره اصغری

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

دی ۱۳۹۵

با سپاس از یگانه آفریدگار جهانیان......

اگر شایسته تقدیم باشد،

به پدر بزرگوار

و

مادر دلسوزم

که با عشق و دعای بی شائبه ی خویش مرا در این امر یاری دادند.

به همسر عزیزم

که با مهر و شکیبایی، راهنمایی و حمایت خویش، پیمودن این راه را برایم آسان تر نمود.

منصوره اصغری

دی ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **منصوره اصغری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **کاربرد الگوریتم رِمِز در نظریه بهترین تقریب** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی ایرانمنش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

منصوره اصغری
دی ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، به‌بررسی یک‌سری فرآیندهای پیاپی و تکراری که منجر به رسیدن به بهترین تقریب می‌شود، می‌پردازیم. ما این فرآیند را با نام الگوریتم رِمِز معرفی می‌کنیم. با بیان قضیه‌ی تقریب، تقریب تابع $f \in C[a,b]$ را در مجموعه چندجمله‌ای‌ها که یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n می‌شود، به‌دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم بهترین تقریب موجود و یکتاست. در انتها با استفاده از الگوریتم رِمِز، بهترین تقریب تابع اسپلاین از درجه‌ی n با k گره ثابت را محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: بهترین تقریب، الگوریتم رِمِز، چبیشف ضعیف، تابع اسپلاین.

پیشگفتار

همان‌طور که می‌دانیم نظریه بهترین تقریب اهمیت و کاربرد زیادی در ریاضی دارد. به‌عنوان مثال می‌توان به مبحث بهترین تقریب در مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌ها اشاره نمود، که در معادلات دیفرانسیل و انتگرالی، مهندسی و غیره کاربرد زیادی دارد. پیدا کردن بهترین تقریب همیشه کار آسانی نبوده و همواره نمی‌توان یک روش کلی برای آن بیان کرد، اما در این پایان نامه، الگوریتمی را ارائه می‌دهیم که ما را در رسیدن به بهترین تقریب یاری می‌کند.

بیشترین کارهای انجام شده روی نظریه‌ی تقریب مربوط به تقریب تابع f روی مجموعه فشرده I در فضای حقیقی یا مختلط با استفاده از چندجمله‌ای‌هاست.

فرض کنید P_n گردایه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها از درجه‌ی حداکثر n باشد. تابع f را یک تابع پیوسته روی فاصله‌ی $I = [a, b]$ تعریف می‌کنیم، به‌دنبال یافتن چندجمله‌ای $p^* \in P_n$ با درجه کوچکتر یا مساوی n هستیم، به‌طوری که برای همه‌ی $p \in P_n$ داشته باشیم

$$\| f - p^* \| \leq \| f - p \|,$$

که در آن $\| g \|_I = \max_{x \in I} |g(x)|$.

ثابت شده است که p^* موجود و یکتاست و بهترین تقریبِ یکنواخت و چبیشف برای تابع f می‌باشد. بحث درمورد این مسئله را تقریباً در هر کتاب در این زمینه مانند کتاب‌های چِنِی [۱] [2]، داویس [۲] [4]، پاوِل [۳] [13]، رِمِز [14] و رایس [۴] [15] می‌توان مشاهده کرد. مطالعه در مورد این مسئله از اوایل قرن ۱۹ شروع و در سال ۱۹۱۵ نتایج اصلی به‌دست آمد. در این مورد کارهای زیادی انجام شد و سرانجام الگوریتم رِمِز توسط یاکولِویچ رِمِز [۵] برای یافتن بهترین تقریب تابع پیوسته روی فاصله‌ی بسته معرفی شد و در این مدت درک عمیقی از این مسئله توسعه داده شد و خواص نظری آن و همچنین تغییرات لازم برای کاربردی سازی آن در عمل صورت گرفت.

در این پایان‌نامه، در فصل اول بعد از تعاریف اولیه، بهترین تقریب را تعریف و قضیه‌ی بهترین تقریب را بیان کرده و نشان می‌دهیم بهترین تقریب موجود و یکتاست و شرایط را برای تعریف الگوریتم رِمِز برقرار می‌کنیم. در فصل دوم با بیان مقدماتی چند، الگوریتم رِمِز را معرفی کرده و به کمک این الگوریتم، بهترین تقریب تابع $f \in C[a, b]$ که یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n می‌شود را محاسبه می‌کنیم. در فصل سوم با مثال‌های متعدد الگوریتم رِمِز را توسط برنامه‌ی نوشته شده در متلب اجرا کرده و ویژگی‌های بهترین تقریب را خواهیم دید و در فصل آخر یکی از کاربردهای دیگر این الگوریتم را بیان می‌کنیم. در واقع ابتدا $S_{n,k}$ را به‌عنوان زیرفضایی از تابع اسپلاین از درجه‌ی n با k گره‌ی ثابت در نظر گرفته و با استفاده از الگوریتم رِمِز، بهترین تقریب تابع $f \in C[a, b]$ را در $S_{n,k}$ محاسبه می‌کنیم. نشان

---

[۱] Cheney
[۲] Davis
[۳] Powell
[۴] Rice
[۵] Yakovlevich Remez

می‌دهیم، اگر $k \leq n + ۱$ تقریب تابع f به کمک الگوریتم رِمِز که یک تابع اسپلاین است، بدست می‌آید و اگر $k > n + ۱$ تابع اسپلاین نزدیک به بهترین تقریب f است.

فهرست مطالب

نمایه ۶۹

فصل ۱

پیشینه و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان برخی تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز در فصل‌های آینده خواهیم پرداخت، همچنین بهترین تقریب را تعریف و برخی از قضایا، از جمله قضایایی در مورد وجود و یکتایی بهترین تقریب را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X فضای برداری باشد، تابع $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ را یک نرم روی X می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

۱. $\|x\| \geq 0$.

۲. $x = 0$ اگروتنهااگر $\|x\| = 0$.

۳. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۴. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را فضای برداری نرم‌دار می‌نامیم و آن را با $(X, \|\cdot\|)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. زوج‌مرتب (X, d) که X مجموعه‌ای از نقاط و d یک تابع حقیقی $(d\colon X \times X \to \mathbb{R})$ در آن است، یک فضای متریک می‌نامیم، هرگاه برای هر $p, q, r \in X$ داشته باشیم:

۱. $d(p, q) \geq 0$ (فاصله هیچ‌گاه منفی نباشد).

۲. $p = q$ اگروتنهااگر $d(p, q) = 0$ (فاصله صفر است اگروتنهااگر دو شئ برابر باشند).

۳. $d(p, q) = d(q, p)$ (بدون بستگی داشتن به مقادیر q و p همواره دارای خاصیت تقارنی است).

۴. $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ (نامساوی مثلث).

این خاصیت به‌طور شهودی مفهوم فاصله را بیان می‌کند.

مثلاً روی فضای توابع پیوسته روی فاصله‌ی $[0,1]$ می‌توان دو متر به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|.$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|.$$

تعریف ۳.۱.۱. اگر فضای خطی X دارای یک نرم باشد، آنگاه می‌گوییم X یک فضای خطی نرم‌دار است.

هر فضای خطی نرم‌دار را می‌توان به‌عنوان فضای متریک در نظر گرفت که در آن فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی x و y یا $d(x,y)$ همان $\|x-y\|$ است.

تعریف ۴.۱.۱. فضای خطی X را فضای ضرب داخلی می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in X$ بتوان اسکالری حقیقی مانند $\langle x,y \rangle$ را با شرایط زیر روی فضای X تعریف کرد:

۱. $\langle x,x \rangle \geq 0$.

۲. $\langle x,x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۳. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$.

۴. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$.

۵. به ازای هر $z \in X$، $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$.

عبارت $\langle x,y \rangle$ را ضرب داخلی y و x می‌گوییم.
این ضرب داخلی یک نرم به‌صورت زیر تعریف می‌کند، که آن را نرم حاصل از ضرب داخلی می‌نامیم

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}.$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید X فضای ضرب داخلی (حقیقی یا مختلط) باشد، آنگاه برای هر x, y در X داریم

۱. $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ (نامساوی کشی شوارتز [1]).

۲. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث).

۳. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (قانون متواضی الاضلاع).

[1] Cauchy − Showartz

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد، خانواده τ از زیرمجموعه‌های مجموعه X، توپولوژی روی X است، هرگاه :

۱. $\phi, X \in \tau$.

۲. τ تحت اشتراک متناهی و هر اجتماع از اعضای τ بسته باشد.

در این‌حالت (X, τ) فضای توپولوژیک نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید $S \subset X$ که X یک فضای توپولوژیک است. نقطه حدی [۲] مجموعه S، نقطه‌ای مانند x (درون X و نه لزوماً درون مجموعه S) است که هر همسایگی محذوف آن، شامل نقطه‌ای از S غیر از x باشد.

مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی پیوسته روی فاصله‌ی بسته $[a, b]$ را با $C[a, b]$ نمایش می‌دهیم و به هر $f \in C[a, b]$ نرم سوپرمم آن یعنی $\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ را مربوط می‌کنیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $f \in C[a, b]$، گوییم $x \in [a, b]$ نقطه $(+)$ برای f (متناظراً نقطه $(-)$ برای f) است هرگاه $f(x) = \|f\|$ (متناظراً هرگاه $f(x) = -\|f\|$)[به [3] رجوع شود].

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $f \in C[a, b]$، مجموعه‌ای از نقاط مجزا $a \leq x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n \leq b$ مجموعه متناوب برای f نامیده می‌شود، هرگاه x_iها به‌طور متناوب نقطه $(+)$ و نقطه $(-)$ باشند. یعنی اگر $|f(x_۰)| = \|f\|$ آنگاه برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$ داشته باشیم $f(x_i) = -f(x_{i-۱})$.

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه‌ای از نقاط مجزا $a \leq x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n \leq b$ را نقاط حدی متناوب تابع $f \in C[a, b]$ می‌نامیم، اگر در تعاریف ۷.۱.۱ و ۹.۱.۱ صدق کنند.

به‌وضوح رابطه‌ی زیر برای مجموعه‌ای از نقاط حدی متناوب برقرار است:

$$\delta(-۱)^i f(x_i) = \|f\|, \quad i = ۰, \ldots, n, \delta = \pm ۱.$$

۲.۱ بهترین تقریب

در این بخش فرض کنید X فضای ضرب داخلی باشد، بهترین تقریب را تعریف کرده و قضایای مهم آن را اثبات می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. برای زیرمجموعه ناتهی K از X و $x \in X$ تعریف می‌کنیم:

$$d(x, K) := \inf_{y \in K} \| x - y \|,$$

در این‌صورت $y_۰ \in K$ بهترین تقریب x است هرگاه

$$\| x - y_۰ \| = d(x, K).$$

تعریف فوق برای هر فضای نرم‌دار نیز برقرار است.

[۲] Extreme point

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید K زیرمجموعه ناتهی از X و $x \in X$. مجموعه همه‌ی بهترین تقریب‌های x در K را با $P_K(x)$ نمایش می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_K(x) = \{y \in K | \parallel x - y \parallel = d(x, K)\}.$$

تعریف ۳.۲.۱. زیرمجموعه K از X را چبیشف [۳] می‌نامیم، اگر برای هر $x \in X$ دقیقا یک بهترین تقریب در K موجود باشد.

تعریف ۴.۲.۱. زیرمجموعه K از X را پروکسیمینال [۴] می‌نامیم، اگر برای هر $x \in X$ حداقل یک بهترین تقریب در K موجود باشد.

قضیه ۵.۲.۱. *فرض کنید K زیرمجموعه محدب از X باشد، در این‌صورت برای هر $x \in X \setminus K$، بهترین تقریب در صورت وجود منحصربه‌فرد است.*

برهان. فرض کنید K زیرمجموعه محدب از X و $x \in X$ و $y_۱$ و $y_۲$ دو بهترین تقریب برای x باشند، کافی است نشان دهیم $y_۱ = y_۲$.
چون K محدب است پس $(y_۱ + y_۲)/۲ \in K$، داریم

$$\begin{aligned} d(x, K) &\leq \|x - \tfrac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲)\| = \|\tfrac{۱}{۲}(x - y_۱) + \tfrac{۱}{۲}(x - y_۲)\|, \\ &\leq \tfrac{۱}{۲}\|x - y_۱\| + \tfrac{۱}{۲}\|x - y_۲\| = d(x, K). \end{aligned}$$

بنابراین تمام نامساوی‌ها به تساوی تبدیل می‌شوند و

$$\|x - \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲)\| = \frac{۱}{۲}\|x - y_۱\| + \frac{۱}{۲}\|x - y_۲\|.$$

داریم

$$\|۲x - (y_۱ + y_۲)\| = \|x - y_۱\| + \|x - y_۲\|,$$

باتوجه به خاصیت نامساوی مثلث $c > ۰$ موجود است، به‌طوری که $(x - y_۱) = c(x - y_۲)$. اما چون $y_۱$ و $y_۲$ هر دو بهترین تقریب‌های x در مجموعه‌ی K هستند، پس

$$\|x - y_۱\| = \|x - y_۲\| = d(x, K),$$

پس باید $c = ۱$ و در نتیجه $y_۱ = y_۲$، یعنی بهترین تقریب منحصربه‌فرد است و حکم اثبات می‌شود. □

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید K زیرمجموعه‌ای ناتهی از X باشد، آنگاه K را تقریباً فشرده می‌نامیم اگر به ازای هر $x \in X$، دنباله‌ی $\{y_n\} \in K$ موجود باشد به‌طوری که

۱. $\|x - y_n\| \to d(x, K)$.

[۳] Chebyshev
[۴] Proximinal

۲. زیردنباله‌ای از دنباله‌ی $\{y_n\}$ موجود، که به یک عضو در K همگرا باشد.

تعریف ۱.۲.۷. اگر به ازای $x \in X$، دنباله‌ی $\{y_n\} \in K$ چنان موجود باشد که $\|x - y_n\| \to d(x, K)$ گوییم دنباله‌ی $\{y_n\}$ برای x دنباله مینیمم کننده است.

قضیه ۱.۲.۸. *هرمجموعه‌ی تقریباً فشرده، پروکسیمینال است.*

برهان. فرض کنید مجموعه‌ی K تقریباً فشرده باشد. از تعریف تقریباً فشرده به ازای هر $x \in X$ دنباله $K \ni \{y_n\}$ موجود است به‌طوری که

$$\|x - y_n\| \to d(x, K),$$

و این دنباله دارای زیردنباله‌ای است که به یک عضو مانند y در K همگراست. پس می‌توان فرض کرد

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_{nj}\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d(x, K).$$

در نتیجه

$$\|x - y\| = d(x, K) \Rightarrow y \in P_K(x).$$

پس حداقل یک بهترین تقریب مانند $y \in K$ برای x موجود است و حکم اثبات می‌شود. □

قضیه ۱.۲.۹. *اگر K زیرمجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت X و $x \in X \setminus K$ باشد، آنگاه K چبیشف است.*

برهان. فرض کنید K زیرمجموعه‌ی بسته و محدب از فضای هیلبرت X باشد. برای $x \in X$ دنباله مینیمم کننده $\{y_n\} \in K$ را در نظر می‌گیریم ($\|x - y_n\| \to d(x, K)$).
با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع داریم:

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^۲ &= \|(x - y_n) - (x - y_m)\|^۲,\\
&= ۲(\|x - y_m\|^۲ + \|x - y_n\|^۲) - \|۲x - (y_m + y_n)\|^۲,\\
&= ۲(\|x - y_m\|^۲ + \|x - y_n\|^۲) - ۴\|x - \frac{۱}{۲}(y_m + y_n)\|^۲.
\end{aligned}$$

چون K محدب است پس $y_v = (y_m + y_n)/۲ \in K$، همچنین

$$\|y_n - y_m\|^۲ \leq ۲(\|x - y_m\|^۲ + \|x - y_n\|^۲) - ۴d(x, K)^۲,$$

چون y_n دنباله مینیمم کننده برای x است اگر $m, n \to \infty$ داریم

$$\|y_n - y_m\|^۲ \leq ۰,$$

پس دنباله $\{y_n\}$ کوشی است و چون X هیلبرت است (یعنی فضای ضرب داخلی و کامل است)، دنباله $\{y_n\}$ به عنصری مانند $y \in X$ همگراست. از طرفی K بسته است پس $y \in K$. از تعریف ۱.۲.۶، K تقریباً فشرده است و از قضیه‌ی ۱.۲.۸ هرمجموعه‌ی تقریباً فشرده، پروکسیمینال است. پس K پروکسیمینال است. با توجه به قضیه‌ی ۱.۲.۵ بهترین تقریب منحصربه‌فرد بوده و درنتیجه K چبیشف است. □

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض‌کنید K زیرمجموعه محدب از فضای ضرب داخلی X باشد، $y_\circ \in K$ و $x \in X$ در این‌صورت داریم*

$$\forall y \in K \qquad \langle x - y_\circ, y - y_\circ\rangle \leq \circ \Leftrightarrow y_\circ \in P_K(x).$$

برهان. $(\Rightarrow)$ ابتدا نشان می‌دهیم اگر برای $y_\circ \in K$ و $x \in X$ داشته باشیم

$$\forall y \in K \qquad \langle x - y_\circ, y - y_\circ\rangle \leq \circ,$$

آنگاه $y_\circ \in P_K(x)$ است. داریم

$$\begin{aligned}\|x - y_\circ\|^۲ &= \langle x - y_\circ, x - y_\circ\rangle,\\ &= \langle x - y_\circ, x - y + y - y_\circ\rangle,\\ &= \langle x - y_\circ, x - y\rangle + \langle x - y_\circ, y - y_\circ\rangle,\end{aligned}$$

از فرض $\langle x - y_\circ, y - y_\circ\rangle$ منفی است پس:

$$\begin{aligned}\|x - y_\circ\|^۲ &\leq \langle x - y_\circ, x - y\rangle,\\ &\leq \|x - y_\circ\|\|x - y\|,\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\Rightarrow \|x - y_\circ\| \leq \|x - y\| \Rightarrow y_\circ \in P_K(x).$$

$(\Leftarrow)$ فرض خلف: فرض کنید $y \in K$ موجود باشد، به‌طوری که $\langle x - y_\circ, y - y_\circ\rangle > \circ$.
برای هر $\circ < \lambda < ۱$ چون K یک مجموعه محدب است یک عضو

$$y_\lambda = \lambda y + (۱ - \lambda)y_\circ = \lambda y + y_\circ - \lambda y_\circ = \lambda(y - y_\circ) + y_\circ,$$

در K موجود است پس

$$\begin{aligned}\|x - y_\lambda\|^۲ &= \langle x - y_\lambda, x - y_\lambda\rangle,\\ &= \langle x - (\lambda(y - y_\circ) + y_\circ), x - (\lambda(y - y_\circ) + y_\circ)\rangle,\\ &= \langle x - y_\circ - \lambda(y - y_\circ), x - y_\circ - \lambda(y - y_\circ)\rangle,\\ &= \|x - y_\circ\|^۲ - ۲\lambda\langle x - y_\circ, y - y_\circ\rangle + \lambda^۲\|y - y_\circ\|^۲,\\ &= \|x - y_\circ\|^۲ - \lambda[۲\langle x - y_\circ, y - y_\circ\rangle - \lambda\|y - y_\circ\|^۲].\end{aligned}$$

برای $\lambda > \circ$ داریم

$$\|x - y_\lambda\|^۲ < \|x - y_\circ\|^۲.$$

در نتیجه y_λ پیدا کردیم که فاصله آن تا x از فاصله‌ی $y_\circ$ تا x کمتر است. این متناقض است با اینکه $y_\circ$ بهترین تقریب x است، پس فرض خلف باطل و حکم صحیح است. $\square$

۱.۳ قضیه‌ی بهترین تقریب

در این بخش وجود بهترین تقریب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید F یک فضای خطی نرم‌دار و $P \subset F$ و $f \in F - P$، در این‌صورت به‌دنبال عنصری مانند $p^* \in P$ هستیم، به‌طوری که

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p\|, \qquad \forall p \in P, \tag{۱.۱}$$

p^* را بهترین تقریب f نسبت به P می‌نامیم.

یکی از مسائل مورد نیاز محاسبه‌ی اندازه خطای $f - p^*$ است. به‌عبارت دیگر ما نیاز داریم نرم را برای اندازه خطای $f - p^*$ بدست آوریم. در این راستا سوالات زیر نیز در این بخش پاسخ داده می‌شوند:

i) آیا p^* وجود دارد؟

ii) آیا p^* یکتاست؟

ابتدا با دو مثال نشان می‌دهیم در رابطه‌ی (۱.۱)، p^* لزوماً منحصربه‌فرد نیست و حتما لزوماً موجود نیست.

مثال ۱.۳.۱. (غیرمنحصربه‌فرد بودن p^*): اگر

$$F = \mathrm{R}^۲, f = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}, P = \{(x, ۰)^T, -۱ \leq x \leq ۱\}, \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty.$$

از تعریف $\|\cdot\|_\infty$ داریم

$$\|f - p\|_\infty = \max\{|۰ - x|, |۱ - ۰|\},$$

یعنی $\|f - p\|_\infty = ۱$ پس با توجه به تعریف p^*، تعداد زیادی p^* $(p^* = \{(x, ۰)^T, -۱ \leq x \leq ۱\})$ وجود دارد، به‌طوری که رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\|f - p^*\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty, \qquad \forall p \in P,$$

در نتیجه p^* منحصربه‌فرد نیست.

حال قضیه‌ی وایراشتراس را بیان می‌کنیم، با استفاده از این قضیه در مثال بعد، نشان می‌دهیم که ممکن است p^* در رابطه‌ی (۱.۱) موجود نباشد.

قضیه ۲.۳.۱. *(قضیه‌ی وایراشتراس) اگر f تابع پیوسته روی فاصله‌ی $[a, b]$ باشد، برای هر $\varepsilon > ۰$ یک چندجمله‌ای مانند $p(x)$ وجود دارد، به‌طوری که برای هر $x \in [a, b]$ خواهیم داشت*

$$\|f(x) - p(x)\| < \varepsilon.$$

برهان. به [16] رجوع شود. □

مثال ۳.۳.۱. (عدم‌وجودp^*): اگر

$$F = C[a,b], P = \{p: \text{است}\ \text{چندجمله‌ای}\ p\}, \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty,$$

آنگاه نشان می‌دهیم p^* در رابطه‌ی (۱.۱) موجود نیست. برای این منظور فرض کنید $p^* \in P$ وجود دارد، به‌طوری که عبارت (۱.۱) درست باشد. با توجه به قضیه‌ی وایراشتراس ۲.۳.۱، $p_{n_\varepsilon} \in P$ موجود است، به‌طوری که $\|f - p_{n_\varepsilon}\|_\infty$ به صفر میل می‌کند. از آنجا که p^* بهترین تقریب است، انتظار می‌رود:

$$\|f - p^*\|_\infty \leq \|f - p_{n_\varepsilon}\|_\infty \to \circ,$$

نامساوی فوق نشان می‌دهد، $\|f - p^*\|_\infty \leq \circ$. از طرفی نرم همیشه نامنفی است، بنابراین

$$\|f - p^*\|_\infty = \circ,$$

یعنی $f = p^*$. چون $p^* \in P$، پس باید $f \in P$، اما این متناقض با فرض $f \in F - P$ در عبارت (۱.۱) است، پس عضوی مانند p^* از P موجود نیست به‌طوری که عبارت (۱.۱) درست باشد.

توجه ۴.۳.۱. توجه داشته باشید در مثال قبل، P فشرده نیست چون دارای زیردنباله‌ی $p_n \in P$ است به‌طوری که p_n به‌طور یکنواخت به f همگراست $(n \to \infty)$ ، اما $f \notin P$.

برای اثبات وجود و یکتایی $p^* \in P$ در عبارت (۱.۱)، نیاز به مفروضات بیشتری داریم.

قضیه ۵.۳.۱. *فرض کنید F فضای خطی نرم‌دار و $P \subset F$ فشرده باشد و $f \in F - P$، آنگاه عضوی مانند $p^* \in P$ وجود دارد، به‌طوری که*

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p\|, \qquad \forall p \in P.$$

برهان. فرض کنید

$$e^* = \inf_{p \in P} \|f - p\|, \tag{۲.۱}$$

(بزرگترین کران پایین) باشد. نشان خواهیم داد $p^* \in P$ وجود دارد، به‌طوری که

$$\|f - p^*\| = e^*, \tag{۳.۱}$$

در این‌صورت برای اثبات اینکه بهترین تقریب $p^* \in P$ موجود است، کافی است نشان دهیم p^*ای موجود است که روابط زیر برقرار است:

i) $\|f - p^*\| \geq e^*$.

ii) $\|f - p^*\| \leq e^*$.

(i): با استفاده از تعریف e^* در عبارت (۲.۱) چون e^* برای $p \in P$، اینفینیمم $\|f - p\|$ است، پس برای $p^* \in P$ داریم

$$\|f - p^*\| \geq e^*,$$

و حکم بدیهی است.

(ii): دنباله‌ی $\{p_k\} \in P$ را انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که

$$\lim_{k \to \infty} \|f - p_k\| = e^*,$$

(از تعریف اینفینیمم، p_k موجود است). دنباله p_k یا به p^* همگراست که در این‌صورت $p^* \in P$. یا اگر دنباله p_k به p^* همگرا نباشد، چون P فشرده است پس دارای زیردنباله‌ای همگرا به $p^* \in P$ است. حال برای هر p_k رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p_k\| + \|p_k - p^*\|.$$

اگر$(k \to \infty)$در سمت راست نامساوی بالا عبارت اول به e^* میل می‌کند و عبارت دوم به ۰ میل می‌کند، پس

$$\|f - p^*\| \leq e^*,$$

در نتیجه (ii) اثبات می‌شود.

چون (i) و (ii) برقرار است، عبارت (۳.۱) برقرار است و از تعریف e^* داریم

$$\|f - p^*\| = e^* = \inf_{p \in P} \|f - p\|,$$

پس برای P فشرده، $p^* \in P$ موجود است، به‌طوری که

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p\|, \qquad \forall p \in P.$$

p^* بهترین تقریب و حکم اثبات می‌شود. □

لم ۶.۳.۱. *فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌البعد باشد، آنگاه تمام نرم‌ها روی V معادلند. یعنی اگر $\|\cdot\|, \|\cdot\|_۱$ نرم‌هایی روی V باشند، آنگاه ثابت‌هایی مانند $۰ < A, B < \infty$ موجودند به‌طوری که برای تمام $x \in V$ داریم*

$$A\|x\|_۱ \leq \|x\| \leq B\|x\|_۱.$$

برهان. فرض کنید V فضای $n-$بعدی باشد و $\|\cdot\|$ نرم روی V باشد و $\{e_۱, e_۲, \ldots, e_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. برای هر $x = \sum_{i=۱}^{n} a_i e_i \in V$ نرم را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$\|\sum_{i=۱}^{n} a_i e_i\|_۱ := \sum_{i=۱}^{n} |a_i| = \|(a_i)_{i=۱}^{n}\|_۱.$$

اکنون نشان می‌دهیم دو نرم $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_{1}$ معادلند. نشان دادن یک طرف نامساوی ساده است. توجه داریم که

$$\|x\|=\|\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\|\leq\sum_{i=1}^{n}|a_i|\|e_i\|\leq(\max_{1\leq i\leq n}\|e_i\|)\sum_{i=1}^{n}|a_i|=B\|\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\|_{1}, \qquad (۴.۱)$$

یعنی $\|x\|\leq B\|x\|_{1}$ پس یک طرف نامساوی اثبات می‌شود. کار اصلی نشان دادن طرف دیگر نامساوی است. در آغاز یک تناظر بین V و $\mathbb{R}^n$ برقرار می‌کنیم. نگاشت $(a_i)_{i=1}^{n}\to\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$ یک‌به‌یک و پوشا است، حال تابع $x\to\|x\|$ روی فضای $(V,\|\cdot\|_{1})$ پیوسته است، زیرا نشان می‌دهیم

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta\qquad\|x-y\|_{1}<\delta\Rightarrow|\|x\|-\|y\||<\varepsilon.$$

می‌دانیم

$$|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|,$$

از طرفی از رابطه‌ی (۴.۱) برای $x,y\in V$ داریم

$$\|x-y\|\leq B\|x-y\|_{1},$$

پس از دو رابطه‌ی قبل داریم

$$|\|x\|-\|y\||\leq B\|x-y\|_{1},$$

قرار می‌دهیم $\delta=\frac{\varepsilon}{B}$، داریم

$$|\|x\|-\|y\||\leq B\|x-y\|_{1}<B\frac{\varepsilon}{B},$$

در نتیجه

$$|\|x\|-\|y\||<\varepsilon,$$

بنابراین تابع پیوسته است. مجموعه‌ی $s=\{x\in V:\|x\|_{1}=1\}$ را در نظر می‌گیریم، $\|x\|_{1}=1$ مرز گوی بسته و کراندار است و از طرفی زیرمجموعه‌ای از فضای متناهی‌البعد V می‌باشد، پس فشرده است. چون تابع پیوسته روی مجموعه فشرده مینیمم خود را اخذ می‌کند پس $A>0$ موجود است به‌طوری که $\|x\|\geq A$ هرگاه $\|x\|_{1}=1$. از خواص نرم داریم

$$\|\frac{x}{\|x\|_{1}}\|\geq A\Rightarrow\|x\|\geq A\|x\|_{1}.$$

به این ترتیب $A\|x\|_{1}\leq\|x\|\leq B\|x\|_{1}$ معادل بودن دو نرم را نشان می‌دهد. □

نتیجه ۷.۳.۱. *فرض کنید Y فضای نرم‌دار متناهی‌البعد و $M>0$ باشد. در این‌صورت هر گوی بسته $\{y\in Y:\|y\|\leq M\}$ فشرده است.*

برهان. به [1] صفحه‌ی ۴ رجوع شود. □

قضیه ۸.۳.۱. *فرض کنید P زیرفضای متناهی‌البعد از فضای خطی نرم‌دار F و $f \in F - P$، آنگاه $p^* \in P$ موجود است به‌طوری که*

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p\|, \qquad \forall p \in P.$$

یعنی بهترین تقریب برای f از اعضای P موجود است.

برهان. در ابتدا توجه می‌کنیم چون P زیرفضاست پس $\circ \in P$، برای p^*(در صورت وجود) داریم

$$\|f - p^*\| \leq \|f - \circ\| = \|f\|,$$

بنابراین کافی است p^* را در میان $p \in P$ بیابیم که در رابطه‌ی $\|f - p\| \leq \|f\|$ صدق می‌کنند. طبق نامساوی مثلث داریم

$$|\|f\| - \|p\|| \leq \|f - p\|,$$

از طرفی $\|f - p\| \leq \|f\|$، پس داریم

$$|\|f\| - \|p\|| \leq \|f - p\| \leq \|f\|,$$

لذا

$$\|p\| \leq \|f - p\| + \|f\| \leq ۲\|f\|.$$

بنابراین می‌توان pهای بدست آمده را در مجموعه‌ی فشرده‌ی زیر محدود کرد

$$K = \{p \in P \colon \|p\| \leq ۲\|f\|\}.$$

در انتها کافی است توجه کنیم که تابع $g(p) = \|f - p\|$ با فرض $\delta = \varepsilon$ پیوسته است، چون از تعریف پیوستگی اگر $\|p - z\| < \delta = \varepsilon$، داریم

$$|g(p) - g(z)| = |\|f - p\| - \|f - z\|| \leq \|p - z\| < \varepsilon.$$

حال از آنجا که تابع پیوسته روی مجموعه فشرده مینیمم خود را اخذ می‌کند، پس تابع پیوسته‌ی g روی مجموعه فشرده‌ی K، مینیمم خود را اخذ می‌کند. یعنی

$$\exists p^* \in K \colon g(p^*) = \min g(p) \Rightarrow \|f - p^*\| = \min_{p \in P} \|f - p\|,$$

در نتیجه اگر P زیرفضای متناهی‌البعد از فضای خطی نرم‌دار F باشد، آنگاه $p^* \in P$ موجود است به‌طوری که

$$\|f - p^*\| \leq \|f - p\|, \qquad \forall p \in P.$$

و حکم اثبات می‌شود. □

قضیه ۹.۳.۱. *اگر F فضای خطی نرم‌دار و P زیرفضا با بعد متناهی از F باشد و همچنین نرم اکید باشد، آنگاه بهترین تقریب منحصربه‌فرد است.*

برهان. فرض خلف: فرض کنید q^* و p^* دو بهترین تقریب، در مجموعه‌ی P برای $f \in F$ باشند. بنابراین

$$\|f - p^*\| = \|f - q^*\| = d.$$

چون نرم اکید(یعنی $\|f + g\| < \|f\| + \|g\|$) است داریم

$$\|f - p^* + f - q^*\| < \|f - p^*\| + \|f - q^*\| = ۲d,$$

پس

$$\|f - \frac{(p^* + q^*)}{۲}\| < d,$$

چون P زیرفضاست، $p = \frac{(p^*+q^*)}{۲} \in P$، اما فرض کردیم q^* و p^* هر دو بهترین تقریب هستند، پس

$$d = \|f - p^*\| = \|f - q^*\| \leq \|f - p\| \qquad \forall p \in P,$$

به تناقض رسیدیم، پس فرض خلف باطل است و $p^* = q^*$. □

فصل ۲

الگوریتم رِمِز برای یافتن بهترین تقریب

با روش‌های ریاضی هر پدیده را می‌توان برحسب توابع پایه (مانند توابع مثلثاتی یا چندجمله‌ای) تقریب زد. حال اینکه پدیده مورد نظر را با چه تابعی تقریب بزنیم به رفتار آن پدیده بستگی دارد که به کدام نوع از توابع پایه نزدیک‌تر است. بالاخص، سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که هدف از تقریب تابع به‌وسیله‌ی چندجمله‌ای‌ها چیست؟ پاسخ اینکه اینتگرال‌گیری و مشتق‌گیری توابع چندجمله‌ای از سایر توابع ساده‌تر است و همچنین کامپیوتر آنها را به‌طور دقیق‌تر ارزیابی و مقداردهی می‌کند و عملیات مورد نظر را ساده‌تر انجام می‌دهد.

در فصل قبل قضیه‌ی بهترین تقریب را بیان کردیم و وجود و یکتایی بهترین تقریب تابع f (یعنی p^*) را مورد بررسی قرار دادیم. از آنجا که بهترین تقریب منحصربه‌فرد است، ما می‌توانیم عملگری تعریف کنیم، که بهترین تقریب تابع پیوسته را محاسبه کند. این عملگر به‌خوبی شناخته شده است اگرچه پیوسته و غیرخطی است، بنابراین ما نیاز به روشی تکراری برای محاسبه‌ی p^* داریم. یکی از روشها الگوریتم رِمِز [1] است. الگوریتم دیگر، الگوریتم اصلاح دیفرانسیل است که متکی به برنامه‌ریزی خطی است. که ما فقط به روش اول اَشاره خواهیم کرد.

در این فصل به مطالعه روشی برای یافتن بهترین تقریبِ عناصر فضای توابع پیوسته می‌پردازیم. تعاریف و قضایایی که بیان می‌شوند نهایتاً ما را به این هدف نایل می‌کنند که بتوانیم بهترین تقریب تابع را با استفاده از الگوریتم، به‌دست آوریم. برای این منظور الگوریتم رِمِز را معرفی می‌کنیم.

۱.۲ تعاریف اولیه

چندجمله‌ای $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ را که در آن ضرایب $a_0, a_1, \ldots, a_n$ اعداد حقیقی هستند و x متغیر حقیقی است، در نظر می‌گیریم. اگر $a_n \neq 0$ باشد، آنگاه p یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است.

[1] Remez Algorithm

مجموعه چندجمله‌ای‌ها از درجه حداکثر n را با P_n نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_n = \{p\colon p(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i \quad \alpha_i \in R, t \in [a,b]\}.$$

$Y = P_n$ را که زیرفضایی از $C[a,b]$ است، در نظر می‌گیریم به‌وضوح P_n زیرفضایی متناهی‌البعد با بعد دقیقا $n+1$ است. در واقع $P_n = span\{1, t^1, t^2, \ldots, t^n\}$. کلید چبیشف بودن مسئله‌ی تقریب در چندجمله‌ای‌ها نیز همین حقیقت است که P_n متناهی‌البعد است.

لم ۲.۱.۱. *برای هر تابع $f \in C[0,1]$ و هر عدد مثبت n، چندجمله‌ای $p^* \in P_n$ (که لزوماً یکه نیست) موجود است به‌طوری که*

$$\|f - p^*\| \le \|f - p\|, \qquad \forall p \in P_n.$$

برهان. از آنجایی که P_n زیرفضای متناهی‌البعد با بعد دقیقا $n+1$ از فضای خطی نرم‌دار $C[0,1]$ است، طبق قضیه‌ی ۱.۳.۸ نتیجه واضح است. □

این نتیجه نمی‌گوید p^* چندجمله‌ای از درجه‌ی دقیقا n است بلکه می‌گوید چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n است.

۲.۲ مشخصه سازی بهترین تقریب

ما می‌خواهیم مسأله‌ی بهترین تقریب را برای تابع $f \in C[a,b]$ توسط عناصر P_n در نظر بگیریم. تا اینجا می‌دانیم که این مسأله حداقل یک جواب دارد. قرار می‌دهیم:

$$E_n(f) = \min_{p \in P_n} \|f - p\| = \|f - p^*\|.$$

چون برای هر n داریم $P_n \subset P_{n+1}$ پس برای هر n، $E_n(f) \ge E_{n+1}(f)$.

تعریف ۲.۲.۱. برای تمام توابع پیوسته $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ نرم یکنواخت را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\| := \max_{a \le x \le b} |f(x)|.$$

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنید $f \in C[a,b]$ و p^* بهترین تقریب f در P_n باشد، آنگاه حداقل دو نقطه متمایز $x_1, x_2 \in [a,b]$ وجود دارد به‌طوری که*

$$f(x_1) - p^*(x_1) = -(f(x_2) - p^*(x_2)) = \|f - p^*\|,$$

یعنی $f - p^*$ هر دو مقدار $\pm\|f - p^*\|$ را اخذ می‌کند.

برهان. قرار می‌دهیم

$$E = E_n(f) = \|f - p^*\| = \max_{a \le x \le b} |f(x) - p^*(x)|,$$

در این‌صورت نقطه‌ای مانند $x_۱$ موجود است به‌طوری که $E = f(x_۱) - p^*(x_۱)$. حال فرض کنید حکم قضیه غلط باشد(یعنی نقطه‌ای مانند $x_۲$ موجود نباشد به‌طوری که $E = -(f(x_۲) - p^*(x_۲))$). داریم

$$e = \min_{a \le x \le b} (f(x) - p^*(x)) > -E.$$

پس $e + E > ۰$ و در نتیجه $e + E \neq ۰$. قرار می‌دهیم $q^* = p^* + \frac{e+E}{۲}$ که $q^* \in P_n$ و چون $e + E \neq ۰$ پس $p^* \neq q^*$. ادعا می‌کنیم q^* تقریب بهتری نسبت به p^* برای f است. برای این منظور توجه کنید

$$\begin{aligned}
&E = \max_{a \le x \le b} |f(x) - p^*(x)| \geq f(x) - p^*(x) \geq \min_{a \le x \le b} (f(x) - p^*(x)) = e,\\
&E - \left(\frac{e+E}{۲}\right) \geq f(x) - p^*(x) - \left(\frac{e+E}{۲}\right) \geq e - \left(\frac{e+E}{۲}\right),\\
&\left(\frac{E-e}{۲}\right) \geq f(x) - q^*(x) \geq -\left(\frac{E-e}{۲}\right) \Rightarrow |f(x) - q^*(x)| \leq \left(\frac{E-e}{۲}\right).
\end{aligned}$$

با ماکسیمم‌گیری روی x (برای $a \le x \le b$) و طبق تعریف نرم نتیجه می‌شود

$$\|f - q^*\| \leq \left(\frac{E-e}{۲}\right) < E = \|f - p^*\|,$$

یعنی $\|f - q^*\| < \|f - p^*\|$. پس q^* تقریب بهتری است و این در تناقض با بهترین تقریب بودن p^* است، لذا فرض خلف باطل و حکم صحیح است. □

قضیه ۳.۲.۲. *فرض کنید $f \in C[a,b]$ و p^* بهترین تقریب f در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_n باشد، آنگاه مجموعه‌ای متناوب برای $f - p^*$ با حداقل $n + ۲$ نقطه موجود است.*

برهان. اگر $f \in P_n$ آنگاه $\|f - p^*\| = ۰$ در این‌صورت واضح است که $\|f - p^*\|$ را می‌توان به‌طور متناوب مثبت و منفی فرض کرد. فرض کنید $f \notin P_n$، پس $E = E_n(f) = \|f - p^*\| > ۰$. حال تابع پیوسته یکنواخت $\varphi = f - p^*$ را روی $[a,b]$ درنظر می‌گیریم. فاصله‌ی $[a,b]$ را به‌صورت $a = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_n = b$ به فاصله‌های به اندازه کافی کوچک افراز می‌کنیم به‌طوری که

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{E}{۲} \qquad \forall x, y \in [t_i, t_{i+۱}]. \tag{۱.۲}$$

اگر $[t_i, t_{i+۱}]$ شامل یک نقطه $(+)$ برای $\varphi = f - p^*$ باشد آنگاه φ روی تمام فاصله‌ی $[t_i, t_{i+۱}]$ مثبت است. زیرا اگر x نقطه $(+)$ باشد طبق تعریف نقطه $(+)$ داریم $\varphi(x) = \|\varphi\| = \|f - p^*\| = E$ پس برای $x, y \in [t_i, t_{i+۱}]$ از رابطه‌ی (۱.۲) داریم $|E - \varphi(y)| < \frac{E}{۲}$ لذا

$$-\frac{E}{۲} < E - \varphi(y) < \frac{E}{۲} \Rightarrow -۳\frac{E}{۲} < -\varphi(y) < -\frac{E}{۲} \Rightarrow \varphi(y) > \frac{E}{۲} > ۰.$$

به‌طور مشابه اگر $[t_i, t_{i+1}]$ شامل یک نقطه $(-)$ برای φ باشد آنگاه φ روی تمام $[t_i, t_{i+1}]$ منفی است. بنابراین هیچ فاصله‌ی $[t_i, t_{i+1}]$ نمی‌تواند هم شامل نقاط $(+)$ و هم نقاط $(-)$ باشد. زیرا در غیر این‌صورت اگر x نقطه‌ای $(+)$ و y نقطه‌ای $(-)$ روی فاصله‌ی $[t_i, t_{i+1}]$ باشند داریم

$$\varphi(x) = \|\varphi\| = E \qquad \text{و} \qquad \varphi(y) = \|\varphi\| = -E,$$

پس $\varphi(x) - \varphi(y) = ۲E$ و باتوجه به شرط (۱.۲) نتیجه می‌شود که $E < ۰$ و این تناقض است.

پس می‌گوییم $[t_i, t_{i+1}]$ یک فاصله‌ی $(+)$ (متناظراً یک فاصله‌ی $(-)$) است اگر شامل یک نقطه‌ی $(+)$ (متناظراً یک نقطه‌ی $(-)$) برای $\varphi = f - p^*$ باشد. توجه داریم که هیچ فاصله‌ی $(+)$ و فاصله‌ی $(-)$ نمی‌توانند تداخل داشته باشند، به‌عبارتی فاصله‌ی $(+)$ و فاصله‌ی $(-)$ باید اکیدا مجزا باشند(توسط برخی فاصله‌هایی که شامل صفرهای φ هستند). حال این فاصله‌ها را از چپ به راست برچسب می‌زنیم و بدون ایجاد خللی در فرض، فاصله‌ی علامت‌دار اولیه را $(+)$ فرض می‌کنیم. فرض کنید فاصله‌ها در برچسب گذاری مجدد ما به‌صورت زیر باشند

فاصله‌های$(+)$	$I_۱, I_۲, \dots, I_{k_۱}$
فاصله‌های$(-)$	$I_{k_۱+۱}, I_{k_۱+۲}, \dots, I_{k_۲}$
$\vdots$	$\vdots$
فاصله‌های$(-۱)^{m-۱}$	$I_{k_{m-۱}+۱}, I_{k_{m-۱}+۲}, \dots, I_{k_m}$

که $I_{k_۱}$ اخرین فاصله‌ی $(+)$ قبل از رسیدن به اولین فاصله‌ی $(-)$ $I_{k_۱+۱}$ است. همچنین فرض کنید S نشان دهنده‌ی اجتماع تمام فاصله‌های علامت‌دار $[t_i, t_{i+1}]$ و N نشان دهنده‌ی اجتماع تمام فاصله‌های بی‌علامت $[t_i, t_{i+1}]$ باشد. بنابراین S و N مجموعه‌هایی فشرده‌اند که $S \cup N = [a, b]$ است(توجه کنید که S و N کاملاً مجزا نیستند بلکه درونشان مجزا است).

تا اینجا نشان دادیم مجموعه‌ای متناوب موجود است. اینک هدف این است که نشان دهیم $m \geq n+۲$، یعنی این مجموعه‌ی متناوب حداقل $n + ۲$ نقطه دارد(با وجود اینکه طبق قضیه‌ی ۲.۲.۲ فقط می‌دانیم $m \geq ۲$). به فرض خلف، فرض کنید $m < n + ۲$، خواهیم دید به تناقض می‌رسیم.

چون هر فاصله‌ی $(+)$ اکیدا مجزا از هر فاصله‌ی $(-)$ است می‌توانیم نقاط $z_۱, z_۲, \dots, z_{m-۱} \in N$ را طوری بیابیم که

$$\begin{aligned} \max I_{k_۱} &< z_۱ < \min I_{k_۱+۱} \\ \max I_{k_۲} &< z_۲ < \min I_{k_۲+۱} \\ &\vdots \qquad \vdots \\ \max I_{k_{m-۱}} &< z_{m-۱} < \min I_{k_{m-۱}+۱} \end{aligned}$$

حال چندجمله‌ای زیر را می‌سازیم

$$q(x) = (z_۱ - x)(z_۲ - x) \dots (z_{m-۱} - x),$$

تابع q از درجه‌ی حداکثر $m - ۱$ است و چون $n \leq m - ۱$ پس $q(x) \in P_n$.

قصد داریم نشان دهیم برای اسکالر λ که به‌طور مناسب انتخاب می‌کنیم، تابع $p^* + \lambda q \in P_n$ تقریب بهتری برای تابع f نسبت به p^* است. در ابتدا ادعا می‌کنیم q و $f - p^*$ علامت‌های مشابه‌ای دارند. واضح است که q در هیچ یک از فاصله‌های $(\pm)$ صفر نمی‌شود(زیرا صفرهای q دقیقا درون فاصله‌های بی‌علامت‌اند). بنابراین روی این فاصله‌ها علامت q ثابت است. حال روی فاصله‌های $I_1, I_2, \ldots, I_{k_1}$ ، $q > 0$، زیرا روی هر یک از این فاصله‌ها $(z_j - x) > 0$ و روی $I_{k_1+1}, \ldots, I_{k_2}$ داریم $q < 0$، زیرا اینجا $(z_1 - x) < 0$ در حالی‌که برای $j > 1$ داریم $(z_j - x) > 0$. حال λ را پیدا می‌کنیم. فرض کنید $e = \max_{x\in N} |f(x) - p^*(x)|$ که N اجتماع تمام زیر فاصله‌ها مانند $[t_i, t_{i+1}]$ است که نه فاصله‌ی $(+)$ و نه فاصله‌ی $(-)$اند. چون داریم

$$E = \|f - p^*\| = \max_{a\le x\le b} |f(x) - p^*(x)| \ge \max_{x\in N} |f(x) - p^*(x)| = e,$$

بنابراین $e < E$. حال $\lambda > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\lambda\|q\| < \min\{E - e, \frac{E}{2}\}$. ادعا می‌کنیم برای این λ تابع $p^* + \lambda q$ تقریب بهتری برای f نسبت به p^* است.

(حالت اول) اگر $x \in N$، ساده است. زیرا در این‌صورت داریم

$$|f(x) - (p^*(x) + \lambda q(x))| \le |f(x) - p^*(x)| + \lambda|q(x)| \le e + \lambda\|q\| < E.$$

(حالت دوم) اگر $x \notin N$ آنگاه x در یک فاصله $(+)$ یا یک فاصله‌ی $(-)$ است.
به ویژه می‌دانیم $|f(x) - p^*(x)| > \frac{E}{2} > \lambda\|q\|$ و اینکه $f(x) - p^*(x)$ و $\lambda q(x)$ هم علامت‌اند. بنابراین

$$|f(x) - (p^*(x) + \lambda q(x))| = |f(x) - p^*(x)| - \lambda|q(x)| \le E - \lambda \min_{x\in S} |q(x)| < E.$$

چون q روی مجموعه‌ی S ناصفر است نامساوی فوق برقرار است. در این‌حالت هم به تناقض می‌رسیم لذا فرض خلف باطل و حکم صحیح است. $\square$

ملاحظه ۴.۲.۲. ۱. *باید توجه کرد که عدد $n + 2$ در اینجا دقیقا $(\dim P_n + 1)$ است.*

۲. *برای $f \in C[a, b]\backslash P_n$ همچنین توجه داریم که اگر $f - p^*$ به‌طور متناوب $n+2$ بار تغییر علامت دهد آنگاه $f - p^*$ باید حداقل $n + 1$ صفر داشته باشد. بنابراین p^* دقیقا در $n + 1$ نقطه با f متحد است.*

حال قصد داریم یکتایی بهترین تقریب تابع $f \in C[a, b]$ را ثابت کنیم.

قضیه ۵.۲.۲. *فرض کنید $f \in C[a, b]$ آنگاه بهترین تقریب تابع f در مجموعه چندجمله‌ای‌های P_n یکتاست.*

برهان. اگر $f \in P_n$ آنگاه $p^* = f$ و لذا به‌وضوح p^* منحصربه‌فرد است. فرض کنید $f \in C[a, b]\backslash P_n$ و p^* و q^* دو بهترین تقریب برای تابع f در P_n باشد.

$$\|f - p^*\| = \|f - q^*\| = E_n(f) = E.$$

ادعا می‌کنیم میانگین آنها $r = \frac{(p^*+q^*)}{۲} \in P_n$ تقریب بهتری برای f خواهد بود. زیرا داریم

$$f - r = f - \frac{(p^* + q^*)}{۲} = \frac{(f - p^*)}{۲} + \frac{(f - q^*)}{۲},$$

پس

$$\|f - r\| = \|\frac{(f - p^*)}{۲} + \frac{(f - q^*)}{۲}\| \leq \frac{\|(f - p^*)\|}{۲} + \frac{\|(f - q^*)\|}{۲} = \frac{E}{۲} + \frac{E}{۲},$$

یعنی $\|f - r\| \leq E$ و r تقریب بهتری برای f است. طبق قضیه‌ی ۳.۲.۲ مجموعه‌ای متناوب با $n+۲$ نقطه(مانند $(x_۰, x_۱, \ldots, x_{n+۱})$ برای $f - r$ وجود دارد. بنابراین برای هر i داریم

$$(f - r)(x_i) = (f - p^*)(x_i) + (f - q^*)(x_i) = \pm ۲E \qquad (\text{متناوب}),$$

درحالی که

$$-E \leq (f - p^*)(x_i), (f - q^*)(x_i) \leq E,$$

و این یعنی برای هر i که $۰ \leq i \leq n + ۱$ داریم

$$(f - p^*)(x_i) = (f - q^*)(x_i) = \pm E,$$

یعنی $x_۰, x_۱, \ldots, x_{n+۱}$ مجموعه‌ای متناوب برای توابع $f - p^*$ و $f - q^*$ است. وهمچنین چندجمله‌ای $q^* - p^* = (f - p^*) - (f - q^*)$ دارای $n + ۲$ صفر است. از طرفی $(p^* - q^*) \in P_n$ و چون تعداد صفرهای چندجمله‌ای از درجه چندجمله‌ای بیشتر است، پس باید خود چندجمله‌ای برابر صفر باشد یعنی $p^* - q^* = ۰$ و در نتیجه $p^* = q^*$، پس بهترین تقریب تابع f یکتاست. □

قضیه ۶.۲.۲. *فرض کنید $f \in C[a, b]$ و $p^* \in P_n$ و $f \notin P_n$. اگر $f - p^*$ شامل مجموعه‌ای متناوب با حداقل $n + ۲$ نقطه باشد، آنگاه چندجمله‌ای p^* بهترین تقریب f است.*

برهان. فرض کنید $x_۰, x_۱, \ldots, x_{n+۱}$ مجموعه‌ای متناوب برای $f - p^*$ باشد و فرض کنید $q^* \in P_n$ تقریب بهتری برای f نسبت به p^* باشد، یعنی $\|f - q^*\| < \|f - p^*\|$. پس باید داشته باشیم

$$|f(x_i) - p^*(x_i)| = \|f - p^*\| > \|f - q^*\| = |f(x_i) - q^*(x_i)| \qquad \forall i = ۰, ۱, ۲, \ldots, n + ۱.$$

می‌دانیم اگر نامساوی $|a| > |b|$ باشد آنگاه a و $a - b$ باید هم‌علامت باشند.
بنابراین $q^* - p^* = (f - p^*) - (f - q^*)$ و $f - p^*$ باید هم‌علامت باشند و چون طبق فرض $f - p^*$، $n + ۲$ بار به‌طور متناوب تغییر علامت می‌دهد پس $q^* - p^*$ نیز $n + ۲$ بار به‌طور متناوب تغییر علامت می‌دهد، لذا $q^* - p^*$ باید حداقل $n + ۱$ صفر داشته باشد. از طرفی $(q^* - p^*) \in P_n$ و چون تعداد صفرهای چندجمله‌ای از درجه چندجمله‌ای بیشتر است، پس باید خود چندجمله‌ای برابر صفر باشد یعنی $q^* - p^* = ۰$ و در نتیجه $q^* = p^*$. بنابراین چندجمله‌ای p^* بهترین تقریب f است. □

این بخش را با بیان مثالی به پایان می‌رسانیم.

مثال ۷.۲.۲. نشان می‌دهیم $p^*(x) = x - \frac{۱}{۸}$ بهترین تقریب برای $f(x) = x^۲$ روی فاصله‌ی $[۰, ۱]$ است.

برهان. تابع خطا $E(x) = f(x) - p^*(x)$ را تشکیل می‌دهیم و خواهیم داشت $E(x) = x^۲ - x + \frac{۱}{۸}$. برای این تابع داریم

$$\|f - p^*\| = \max_{۰ \leq x \leq ۱} |f(x) - p^*(x)| = \frac{۱}{۸}.$$

همچنین مقدار تابع در نقاط $۰, \frac{۱}{۲}, ۱$ عبارتست از

$$(f - p^*)(۰) = \frac{۱}{۸} = \|f - p^*\|,$$
$$(f - p^*)(\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۸} = -\|f - p^*\|,$$
$$(f - p^*)(۱) = \frac{۱}{۸} = \|f - p^*\|.$$

و این تابع خطا روی فاصله‌ی مورد نظر شامل مجموعه‌ای متناوب با ۳ نقطه است. لذا طبق قضیه‌ی قبل $p^*(x) = x - \frac{۱}{۸}$ بهترین تقریب برای تابع f است. □

۳.۲ بهترین تقریب توابع در مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌ها با روش عددی

در این بخش به بیان الگوریتمی موسوم به الگوریتم رِمِز می‌پردازیم و توسط آن به بهترین تقریب توابع در مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌ها دست می‌یابیم. قبل از بیان الگوریتم تعاریف و قضایای مورد نیاز را مطرح می‌کنیم.

با توجه به تعریف ۱.۲.۱، تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید X فضای خطی نرم‌دار روی میدان اعداد حقیقی (یا مختلط) و M زیرفضای خطی $n-$بعدی از X باشد. برای هر $f \in X$ اگر عضوی مانند $p^* \in M$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $h \in M$ داشته باشیم

$$\|f - p^*\| \leq \|f - h\|,$$

گوییم p^* بهترین تقریب تابع f است.

فرض کنید M زیرفضای خطی $n-$بعدی از فضای خطی نرم‌دار X باشد، برای تابع f قرارداد می‌کنیم

$$\varrho v(f) = \inf_{h \in M} \|f - h\|.$$

اگر تابع f در $M = P_n$ تقریب زده شود به جای علامت $\varrho v(f)$ از همان علامت $E_n(f)$ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۲. *(قضیه‌ی هان-باناخ[۲]) اگر M زیرفضایی از فضای خطی نرم‌دار X و $f_\circ$ تابعکی خطی روی M باشد به‌طوری که $\|f_\circ\| < \infty$، آنگاه تابعک خطی F روی X موجود است به‌طوری که*

$$F|_M = f_\circ \quad , \quad \|F\| = \|f_\circ\|.$$

برهان. به [7] رجوع شود. □

قضیه‌ی هان-باناخ وجود تابعک خطی F روی فضای X را تضمین می‌کند، قضیه‌ی بعدی با توجه به قضیه‌ی هان-باناخ برقرار می‌شود.

قضیه ۳.۳.۲. *فرض X فضای خطی نرم‌دار و M زیرفضایی از آن باشد و $\varrho v(f) = \inf_{h\in M} \|f-h\|$. آنگاه برای هر $f \in X$ تابعک خطی F روی X با ویژگی‌های*

$$F(h) = \circ \qquad \forall h \in M, \tag{۲.۲}$$

و

$$\|F\| = \sup_{h\in X, \|h\|=۱} |F(h)| \leq ۱, \tag{۳.۲}$$

موجود است به‌طوری که $\varrho v(f) = F(f)$.

برهان. فرض کنید $f \in X$ و M زیرفضایی از آن باشد و همچنین $d(f, M) = d > \circ$. تابعک خطی $f_\circ$ را برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر $h \in M$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_\circ(\alpha f + h) = \alpha d.$$

روشن است که $f_\circ(f) = d$ و $f_\circ(h) = \circ$.
از تعریف نرم داریم

$$\|f_\circ\| = \sup \frac{|f_\circ(\alpha f + h)|}{\|\alpha f + h\|} = \sup \frac{|\alpha d|}{\|\alpha(f + \frac{h}{\alpha})\|} = \sup \frac{|\alpha| d}{|\alpha| \|f + \frac{h}{\alpha}\|}.$$

چون M زیرفضاست پس $h' = \frac{h}{\alpha} \in M$. پس می‌توان نتیجه گرفت برای هر $h \in M$، $d \leq \|f-h\|$ از جمله برای $h' \in M$، $d \leq \|f + h'\|$. با قرار دادن در نامساوی فوق داریم

$$\|f_\circ\| = \sup \frac{d}{\|f + h'\|} \leq \sup \frac{\|f + h'\|}{\|f + h'\|} = ۱ \Rightarrow \|f_\circ\| \leq ۱.$$

شرایط قضیه‌ی هان-باناخ برقرار است، پس می‌توانیم $f_\circ$ را به یک تابعک خطی مانند F روی X توسیع دهیم، به‌طوری که

$$F|_M = f_\circ \Rightarrow \forall h \in M, F(h) = f_\circ(h) \quad \text{و} \quad \|F\| = \|f_\circ\|.$$

[۲] Hahn-Banach

داریم

$$\|F\| = \|f_\circ\| \leq ۱.$$

همچنین با فرض $\alpha = \circ$ و $h \in M$ داریم

$$F(h) = f_\circ(h) = \circ.$$

و با فرض $\alpha = ۱$ و $h \in M$ داریم

$$f_\circ(f) = d = \inf_{h \in M} \|f - h\| = \varrho v(f) \xrightarrow{f_\circ(f)=F(f)} \varrho v(f) = F(f).$$

پس شرایط قضیه برقرار است و حکم اثبات می‌شود. $\square$

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنید $\{\varphi_i\}_{i=۱}^{n}$، مجموعه‌ای مستقل خطی از توابع خطی روی فضای خطی نرم‌دار X باشند به‌طوری که هر ترکیب خطی از φ_iها مانند $\phi(x) = \sum_{i=۱}^{n} a_i\varphi_i$ که $a_i \in \mathbb{R}$ دارای حداکثر $n - ۱$ ریشه باشد. در این‌صورت فضای تولید شده توسط $\{\varphi_i\}_{i=۱}^{n}$ها را فضای هار [۳] می‌نامیم.

فرض کنید M یک زیرفضای $n-$بعدی در $C[\circ, ۱]$ باشد که درتعریف فضای هار صدق می‌کند و $\{h_i\}_{i=۱}^{n}$ پایه‌ای برای M باشد. طبق قضیه‌ی ۳.۳.۲ برای هر $f \in C[\circ, ۱]$ یک تابعک خطی روی M وجود دارد که در شرایط (۲.۲) و (۳.۲) صدق می‌کند. حال $n + ۱$ نقطه‌ی متمایز x_i را انتخاب کرده و برای $\circ \neq \lambda_i \in \mathbb{R}$ و $h \in M$، تابعک خطی F را به‌صورت

$$F(h) = \sum_{i=۱}^{n+۱} \lambda_i h(x_i),$$

می‌سازیم و برای نرم این تابعک داریم:

$$\|F\| \leq \sum_{i=۱}^{n+۱} |\lambda_i|,$$

و ضمناً باتوجه به قضیه‌ی ۳.۳.۲ داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n+۱} \lambda_i h_j(x_i) = \circ \qquad j = \circ, ۱, \ldots, n, \tag{۴.۲}$$

و

$$\sum_{i=۱}^{n+۱} |\lambda_i| = ۱, \tag{۵.۲}$$

بنابراین $\varrho v(f) = |F(f)|$. لذا به هر تابعک خطی $F(f)$ یک $h \in M$ که در خاصیت زیر صدق می‌کند، مربوط می‌شود

$$h(x_i) + \lambda \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} = f(x_i) \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n + ۱. \tag{۶.۲}$$

[۳] Haar

قضیه ۵.۳.۲. *p^* بهترین تقریب تابع f در زیرفضای $n-$بعدی M است اگروتنهااگر برای هر $h \in M$ نامساوی $\min_{x\in D}(f(x)-p^*(x))h(x) \leq ۰$ برقرار باشد. در این رابطه D مجموعه‌ی نقاط اکسترمم تابع خطای تقریب f یعنی $f(x)-p^*(x)$ است.*

برهان. به [9] رجوع شود. □

قضیه ۶.۳.۲. *فرض کنید تابع p^* وابسته به تابعک خطی $F(f)$ به‌صورت زیر تعریف شود*

$$p^*(x_i)+\lambda\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}=f(x_i) \qquad i=۱,۲,\ldots,n+۱,$$

که λ و λ_iها اعداد حقیقی‌اند که در شرط زیر صدق می‌کنند

$$\sum_{i=۱}^{n+۱}|\lambda_i|=۱,$$

آنگاه p^* دقیقا با بهترین تقریب تابع f در مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی مجموعه نقاط x_i، $(i=۱,۲,\ldots,n+۱)$ برابر است.

برهان. فرض خلف: فرض کنید تابع p^* بهترین تقریب تابع f روی مجموعه‌ی فوق نباشد. با استفاده از قضیه‌ی ۵.۳.۲ تابع $h\in M$ موجود است به‌طوری که برای هر $i=۱,۲,\ldots,n+۱$ داریم

$$(f(x_i)-p^*(x_i))h(x_i)>۰ \Rightarrow \lambda\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}h(x_i)>۰,$$

قرار می‌دهیم $\tilde{h}=\lambda h$ در این‌صورت برای هر $i=۱,۲,\ldots,n+۱$ داریم

$$\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}\tilde{h}(x_i)>۰ \Rightarrow \frac{\sum_{i=۱}^{n+۱}\lambda_i}{\sum_{i=۱}^{n+۱}|\lambda_i|}\tilde{h}(x_i)>۰,$$

چون $\sum_{i=۱}^{n+۱}|\lambda_i|=۱$ پس $\sum_{i=۱}^{n+۱}\lambda_i\tilde{h}(x_i)>۰$ که از تعریف نتیجه می‌دهد $F(\tilde{h})>۰$، این با رابطه‌ی (۴.۲) در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و p^* دقیقا با بهترین تقریب تابع f در مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی مجموعه نقاط x_i، $(i=۱,۲,\ldots,n+۱)$ برابر است. □

۱.۳.۲ الگوریتم رِمِز

الگوریتم رِمِز یک الگوریتم تکراری است که اولین تکرار در یک مجموعه شامل $n+۲$ نقطه در فاصله‌ای داده شده، آغاز می‌شود. در هر تکرار دو گام محاسبه می‌شود: در گام اول ضرایب را به‌گونه‌ای محاسبه می‌کنیم که تابع خطا در $n+۲$ نقطه داده شده مقدارهایی برابر و علامت‌هایی متناوب داشته باشد. اگر با این مجموعه از نقاط به هدف نرسیدیم به گام دوم می‌رویم و مجموعه‌ای جدید از نقاط را که شرایط را برآورده کند، جستجو می‌کنیم . در پایان این الگوریتم، مقدار تابع خطا در مجموعه‌ی نهایی که شامل $n+۲$ نقطه است، قدر مطلق ماکسیمم خطای تقریب را نشان می‌دهد. حال به توضیح الگوریتم می‌پردازیم:

کار را با مجموعه‌ی M_0 با $n+2$ نقطه‌ی دو به دو متمایز $x_i^{(0)} \in [a,b]$ شروع می‌کنیم به‌طوری که صعودی مرتب شده باشند یعنی

$$a \leq x_0^{(0)} \leq x_1^{(0)} \leq \cdots \leq x_{n+1}^{(0)} \leq b.$$

متناظر با این نقاط تابع p^* عضو M زیرفضای $n-$بعدی از $C[a,b]$ را طوری در نظر می‌گیریم که در شرط زیر صدق کند

$$p^*(x_i^{(0)}) + (-1)^i \lambda_0 = f(x_i^{(0)}) \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n+1. \tag{۷.۲}$$

که در آن $\lambda_0 = F_0(f)$ تابعکی خطی است که در روابط (۴.۲) و (۵.۲) صدق می‌کند، بنابراین

$$|f(x_i^{(0)}) - p^*(x_i^{(0)})| = |\lambda_0| = |F_0(f)| = \inf_{h\in M} \|f-h\|.$$

پس تابع p^* بهترین تقریب تابع f روی مجموعه‌ی M_0 است.

هدف از الگوریتم رمِز بدست آوردن مجموعه‌ای جدید از نقاط مانند M_1 از M_0 است به‌طوری که مجدداً شامل $n+2$ نقطه باشد و برای تابعک خطی متناظر با آن یعنی $F_1(f)$ داشته باشیم

$$|F_1(f)| > |F_0(f)|.$$

برای نیل به هدف مذبور مجموعه‌ی $M_1 = \{x_i^{(1)}\}$ را با ویژگی‌های زیر تعریف می‌کنیم.
ابتدا برای سهولت قرار می‌دهیم $\varphi_0 = f - p^*$ که تابع φ_0 در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. برای $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$ داریم $|\varphi_0(x_i^{(1)})| \leq |F_0(f)|$.

۲. برای حداقل یک عدد صحیح مانند $i = i_0$ داریم $|\varphi_0(x_i^{(1)})| > |F_0(f)|$.

۳. برای $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$ و ثابت ξ که برابر ± 1 است داریم

$$sgn\varphi_0(x_i^{(1)}) = \xi sgn\varphi_0(x_i^{(0)}).$$

قرارداد می‌کنیم زمانی که $\varphi = 0$ آنگاه $sgn\varphi = 1$. حال اگر

$$F_0(\nu) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{(0)} \nu(x_i^{(0)}),$$
$$F_1(\nu) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{(1)} \nu(x_i^{(1)}).$$

توابع خطی متناظر با مجموعه‌های $M_\circ$ و $M_۱$ باشند آنگاه

$$\begin{aligned}
F_۱(f) &= \sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} f(x_i^{(۱)}) = \sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} (p^*(x_i^{(۱)}) - \varphi_\circ(x_i^{(۱)})),\\
&= \sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} p^*(x_i^{(۱)}) - \sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} \varphi_\circ(x_i^{(۱)}) = -\sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} |\varphi_\circ(x_i^{(۱)})|.sgn\varphi_\circ(x_i^{(۱)}),\\
&= -\sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} |\varphi_\circ(x_i^{(۱)})|.\xi sgn\varphi_\circ(x_i^{(\circ)}) = -\sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} |\varphi_\circ(x_i^{(۱)})|.\xi sgn(f(x_i^{(\circ)}) - p^*(x_i^{(\circ)}),\\
&= -\sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} |\varphi_\circ(x_i^{(۱)})|.\xi sgnF_\circ(f) > -\sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} |F_\circ(f)|.\xi sgnF_\circ(f),\\
&= -\sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} \xi F_\circ(f) = -\xi F_\circ(f) \sum_{i=\circ}^{n+۱} \lambda_i^{(۱)} = -\xi F_\circ(f),\\
&\Rightarrow |F_۱(f)| > |F_\circ(f)|.
\end{aligned}$$

حال با مجموعه‌ی $M_۱$ آغاز می‌کنیم، بنابراین تابع $p_۱^* \in M$ وجود دارد به‌طوری که بهترین تقریب تابع f در مجموعه‌ی $M_۱$ است. با ادامه‌ی این روند بعد از تعداد متناهی گام، دنباله‌ای از مجموعه‌های M_n و به‌ترتیب توابع خطی متناظرشان یعنی F_m تولید می‌شود که مقادیر $|F_m(f)|$ به‌طور یکنواخت صعودی هستند و همچنین دنباله‌ی توابع $p_m^* \in M$ به بهترین تقریب f در فضای M همگراست.

حال فرض کنید فاصله‌ی $[a, b]$ داده شده باشد. قبلا دیدیم چبیشف ثابت کرد که اگر چندجمله‌ای p^* از درجه‌ی n بهترین تقریب تابع f باشد، آنگاه حداقل باید $(n + ۲)$ نقطه در این فاصله موجود باشند که تابع خطا مقدار ماکسیمم خود را اخذ کند به‌طوری که علامت‌ها متناوب باشند. حال اگر

$$a \leq x_\circ < x_۱ < \cdots < x_{n+۱} \leq b,$$

$$f(x_i) - p^*(x_i) = (-۱)^i E \qquad i = \circ, ۱, \ldots, n + ۱, \tag{۸.۲}$$

که

$$E = \pm \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p^*(x)|.$$

اکنون الگوریتم رِمِز را با $(n + ۲)$ نقطه‌ی دلخواه در فاصله‌ی داده شده آغاز می‌کنیم. هر تکرار دو گام دارد:

درگام اول ضرایب را طوری محاسبه می‌کنیم که تابع خطا در $(n + ۲)$ نقطه‌ی داده شده مقدارهایی برابر و علامت‌هایی متناوب بگیرد

$$f(x_i) - p^*(x_i) = (-۱)^i E \qquad i = \circ, ۱, \ldots, n + ۱,$$

$$f(x_i) - [c_\circ + c_۱(x_i - a) + c_۲(x_i - a)^۲ + \cdots + c_n(x_i - a)^n] = (-۱)^i E.$$

برای $i = ۰, ۱, \dots, n+۱$ قرار می‌دهیم $x_i - a = h_i$، در این‌صورت داریم

$$c_۰ + c_۱ h_i + \cdots + c_n h_i^n + (-۱)^i E = f(x_i). \qquad (۹.۲)$$

رابطه‌ی (۹.۲) دستگاهی متشکل از $(n+۲)$ معادله‌ی خطی با $(n+۲)$ مجهول $\{c_۰, c_۱, \dots, c_n, E\}$ است. این دستگاه معادلات مستقل خطی‌اند، بنابراین با کاربرد روش‌های جبرخطی می‌توان آنها را حل کرد تا مقادیر ضرایب و همچنین میزان خطا در این $(n+۲)$ نقطه‌ی داده شده را بدست آوریم.
تا وقتی که اندازه‌ی این خطا برابر با اندازه‌ی ماکسیمم مطلق در فاصله‌ی داده شده‌ی $[a,b]$ نباشد شرایط تقریب هنوز برآورده نشده است. لذا نیاز داریم مجموعه‌ی جدیدی از نقاط را بیابیم.

گام دوم از الگوریتم رِمِز مجموعه‌ای از $(n+۲)$ نقطه را پیدا می‌کند که در واقع این $(n+۲)$ نقطه شرایط تقریب را برآورده می‌کند. گام دوم، گام معاوضه نامیده می‌شود. دو تکنیک معاوضه وجود دارد.

در تکنیک اول معاوضه تنها یک نقطه از $(n+۲)$ نقطه‌ی مجموعه‌ی اول را عوض می‌کنیم تا به مجموعه‌ی جدید از نقاط برسیم در حالی‌که در دومین تکنیک معاوضه ما تمام $(n+۲)$ نقطه‌ی مجموعه‌ی اول را عوض می‌کنیم تا به مجموعه‌ی جدید از نقاط برسیم. گام دوم را باتوجه به این نکته آغاز می‌کنیم که تابع خطا در $(n+۲)$ نقطه‌ی گام اول علامتی متناوب دارد، بنابراین تابع خطا $(n+۱)$ ریشه دارد، یک ریشه در هر یک از فاصله‌های $[x_۰, x_۱], [x_۱, x_۲], \dots, [x_n, x_{n+۱}]$. این ریشه‌ها با استفاده از روش‌های عددی از قبیل روش‌های وتری یا روش نیم‌سازی قابل محاسبه‌اند. این ریشه‌ها را با $z_۰, z_۱, \dots, z_n$ نمایش می‌دهیم. حال فاصله‌ی $[a,b]$ را با $(n+۲)$ فاصله به‌صورت $[a, z_۰], [z_۰, z_۱], \dots, [z_{n-۱}, z_n], [z_n, b]$ تقسیم می‌کنیم.

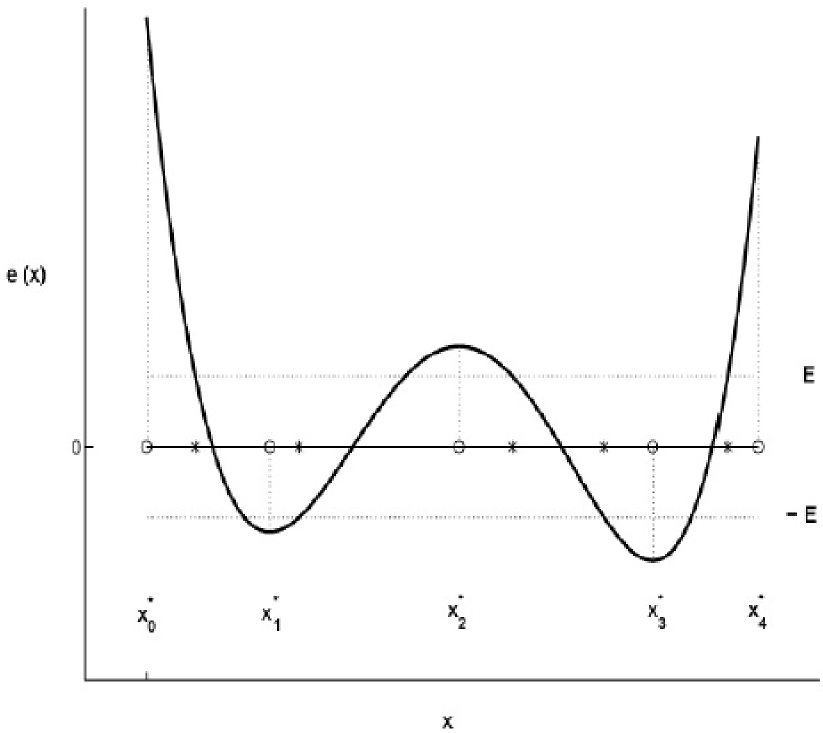
در هر یک از این فاصله‌ها نقطه‌ای را که تابع خطا مقدار ماکسیمم یا مینیمم خود را اخذ کند، محاسبه می‌کنیم و این نقاط را با $x_۰^*, x_۱^*, \dots, x_{n+۱}^*$ نمایش می‌دهیم. گام قبلی را می‌توانیم به‌طور عددی با محاسبه‌ی ریشه‌های مشتق تابع خطا انجام دهیم(البته اگر چنین ریشه‌ای موجود باشد). به‌عبارت دیگر تابع خطا را در نقاط انتهایی هر یک از فاصله‌ها محاسبه می‌کنیم و نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم که مقدار قدرمطلق آن بزرگتر باشد. k را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$k = \max_i |f(x_i^*) - p^*(x_i^*)|,$$

که در تکنیک معاوضه‌ی تک نقطه‌ای ما نقطه‌ی x_k را با نقطه‌ی x_k^* عوض می‌کنیم و در تکنیک معاوضه‌ی چند نقطه‌ای ما $(n+۲)$ نقطه‌ی $\{x_i\}$ را با $\{x_i^*\}$ تعویض می‌کنیم. حال این مجموعه از $(n+۲)$ نقطه در گام اول را برای تکرار بعدی استفاده می‌کنیم. گام اول و دوم را تا زمانی تکرار می‌کنیم که اختلاف بین $(n+۲)$ نقطه قبلی و $(n+۲)$ نقطه‌ی جدید مقداری کمتر از آستانه‌ی داده شده باشد.

در پایان الگوریتم رِمِز برایمان شرایط تقریب چبیشف را برآورده می‌کند. از این رو مقدار تابع خطا در مجموعه‌ی پایانی از $(n+۲)$ نقطه‌ی (E) معرف مقدار ماکسیمم مطلق از خطای تقریب است.

شکل صفحه‌ی بعد به‌طور هندسی گام دوم برای چندجمله‌ای درجه ۳ را نشان می‌دهد.



مثال ۷.۳.۲. برای مثال با استفاده از الگوریتم رِمِز بهترین تقریب تابع $f(x) = x^2$ روی فاصله‌ی $[0, 1]$ که یک چندجمله‌ای از درجه یک است را می‌یابیم.

تکرار اول از الگوریتم را این‌گونه آغاز می‌کنیم.

فرض کنید $p_1^*(x) = ax + b$ و $M_0 = \{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1\}$ را به‌عنوان مجموعه‌ی دلخواه آغازی از نقاط روی $[0, 1]$ درنظر می‌گیریم. برای $i = 0, 1, 2$ داریم

$$f(x_i) - p_1^*(x_i) = (-1)^i E \Rightarrow x_i^2 - ax_i - b = (-1)^i E.$$

برای $i = 0, 1, 2$ دستگاه زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{cases} x_0^2 - ax_0 - b = (-1)^0 E, \\ x_1^2 - ax_1 - b = (-1)^1 E, \\ x_2^2 - ax_2 - b = (-1)^2 E. \end{cases}$$

داریم

$$\begin{cases} -b = E, \\ \frac{1}{9} - \frac{1}{3}a - b = -E, \\ 1 - a - b = E. \end{cases}$$

با حل دستگاه $a = 1$ ، $b = -\frac{1}{9}$ و $E = \frac{1}{9}$ را بدست می‌آوریم.

لذا $p_1^*(x) = x - \frac{1}{9}$ و $E(x) = f(x) - p_1^*(x) = x^2 - x + \frac{1}{9}$. برای تابع خطا در مجموعه نقاط

$\{۰, \frac{۱}{۲}, ۱\}$ مقادیری برابر و علامتی متناوب داریم

$$E(x_۰) = \frac{۱}{۹}, E(x_۱) = -\frac{۱}{۹}, E(x_۲) = \frac{۱}{۹}.$$

لذا $E(x)$ دو ریشه در فاصله‌های $[۰, \frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ دارد. این ریشه‌ها عبارتنداز $z_۰ = \frac{۱+\sqrt{\frac{۵}{۹}}}{۲} \in [\frac{۱}{۲}, ۱]$ و $z_۱ = \frac{۱-\sqrt{\frac{۵}{۹}}}{۲} \in [۰, \frac{۱}{۲}]$. حال فاصله‌ی $[۰, ۱]$ را به‌صورت زیر تقسیم می‌کنیم

$$[۰, \frac{۱ - \sqrt{\frac{۵}{۹}}}{۲}], [\frac{۱ - \sqrt{\frac{۵}{۹}}}{۲}, \frac{۱ + \sqrt{\frac{۵}{۹}}}{۲}], [\frac{۱ + \sqrt{\frac{۵}{۹}}}{۲}, ۱].$$

روی هر یک از این فاصله‌ها مقدار مینیمم یا ماکسیمم تابع خطا به‌ترتیب عبارت است از

$$E(۰) = \frac{۱}{۹}, E(\frac{۱}{۲}) = -\frac{۵}{۳۶}, E(۱) = \frac{۱}{۹}.$$

با استفاده از تکنیک معاوضه تک نقطه‌ای قرار می‌دهیم $M_۱ = \{x_۰^* = ۰, x_۱^* = \frac{۱}{۲}, x_۲^* = ۱\}$ و با این مجموعه تکرار دوم را آغاز می‌کنیم. دستگاه سه معادله سه مجهول را برای این نقاط تشکیل می‌دهیم

$$f(x_i^*) - p_۲^*(x_i^*) = (-۱)^i E \qquad i = ۰, ۱, ۲.$$

$$\begin{cases} -b = E, \\ \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}a - b = -E, \\ ۱ - a - b = E. \end{cases}$$

با حل دستگاه $a = ۱$ ، $b = -\frac{۱}{۸}$ و $E = \frac{۱}{۸}$ را بدست می‌آوریم.
در نتیجه $p_۲^*(x) = x - \frac{۱}{۸}$ و $E(x) = f(x) - p_۲^*(x) = x^۲ - x + \frac{۱}{۸}$. تابع خطا در نقاط مذکور مقادیری برابر و علامت‌هایی متناوب می‌گیرد

$$E(x_۰^*) = \frac{۱}{۸}, E(x_۱^*) = -\frac{۱}{۸}, E(x_۲^*) = \frac{۱}{۸}.$$

تابع $E(x)$ دو ریشه در فاصله‌های $[۰, \frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ دارد. این ریشه‌ها عبارتنداز

$$z_۰^{**} = \frac{۱ + \sqrt{\frac{۱}{۲}}}{۲} \in [\frac{۱}{۲}, ۱], z_۱^{**} = \frac{۱ - \sqrt{\frac{۱}{۲}}}{۲} \in [۰, \frac{۱}{۲}].$$

و حالا در دومین گام از تکرار دوم فاصله‌ی $[۰, ۱]$ را به‌صورت زیر تقسیم می‌کنیم

$$[۰, \frac{۱ - \sqrt{\frac{۱}{۲}}}{۲}], [\frac{۱ - \sqrt{\frac{۱}{۲}}}{۲}, \frac{۱ + \sqrt{\frac{۱}{۲}}}{۲}], [\frac{۱ + \sqrt{\frac{۱}{۲}}}{۲}, ۱].$$

با محاسبه‌ی مقدار مینیمم و ماکسیمم تابع خطای فعلی روی فاصله‌ی بالا می‌بینیم مقدار $\frac{۱}{۸}$ با علامت متناوب بدست می‌آید و نقاط $\{۰, \frac{۱}{۲}, ۱\}$ مجدداً تکرار می‌شوند. لذا چندجمله‌ای $p_۲^*(x) = x - \frac{۱}{۸}$ بهترین تقریب تابع $f(x) = x^۲$ است.

فصل ۳

اجرای الگوریتم رِمِز توسط متلب و چند مثال

در این فصل با مثال‌های متعدد الگوریتم رِمِز را توسط برنامه‌ی نوشته شده در متلب اجرا کرده و ویژگی‌های بهترین تقریب را خواهیم دید.
برنامه‌ی زیر دقیقاً الگوریتم رِمِز را اجرا می‌کند. تابع، فاصله و درجه چندجمله‌ای ورودی‌های برنامه هستند و خروجی، بهترین تقریب تابع است که یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n می‌باشد. همچنین نمودار خطا، نمودار تابع و نمودار بهترین تقریب نیز خروجی‌های این برنامه می‌باشند.

```
clc;close all;clear;

%% function initialization
fun=@(x)sin(x)+exp(-x);
fun_der= @(x)cos(x) - exp(-x);
interval=[0,10];
order =8;

%% remez function
A= remez(fun, fun_der, interval, order);
A1=A(1:end-1);

%% Plot error
x=linspace(interval(1),interval(2),1000);
ApproxSig=getApproximateFunction(x, A1, interval(1));
TargetSig=feval(fun,x);
e=abs(TargetSig-ApproxSig);
e2=TargetSig-ApproxSig;
```

```
figure;
plot(x,e)
xlabel('x')
ylabel('Absolute Error')
xlim(interval);

figure;
plot(x,e2)
xlabel('x')
ylabel('Error = f - P*')
xlim(interval);

figure;
plot(x,TargetSig,'b');
hold on;
plot(x,ApproxSig,'--r');
xlabel('x')
xlim(interval);


function A=remez(fun, fun_der,interval,order)

powers=ones(order+2,1)*([0:order]);
coeff_E =(-1).^[1:order+2];
coeff_E=coeff_E(:);
t=1:order;
t=t(:);
y=linspace(interval(1),interval(2),order+2);

for i=1:10
y=y(:);
h=(y-interval(1))*ones(1,order+1);
```

```
coeff_h=h.^powers;
M=[coeff_h coeff_E];
N= feval(fun,y);
    A=M\N;
    A1=A(1:end-1);
    A_der=A(2:end-1).*t;

    z(1)=interval(1);
    z(order+3)=interval(2);
    for k=1: order+1
    z(k+1)=findzero(@err,y(k),y(k+1),fun,A1,interval(1));
    end

    for k=1:order+2
    if
     sign(err(z(k),fun_der,A_der,interval(1)
      ))~=sign(err(z(k+1),fun_der,A_der,interval(1)))
    y1(k)=findzero(@err,z(k),z(k+1),fun_der,A_der,interval(1));
    v(k)=abs(err(y1(k),fun,A1,interval(1)));
    else
    v1=abs(err(z(k),fun,A1,interval(1)));
    v2=abs(err(z(k+1),fun,A1,interval(1)));

    if v1>v2
    y1(k)=z(k);
                v(k)=v1;
                else
                y1(k)=z(k+1);
                v(k)=v2;
                end
                end
                end
                [mx ind]=max(v);
                if abs(y(ind)-y1(ind)) <2^-30
```

```
                break;
                end

                if ind<length(y) & abs(y(ind+1)-y1(ind))  < 2^-30
                break
                end

                y=y1;
                end

                function e= err(x,fun, A, first)
                A=A(:);
                x=x(:);
                order=length(A)-1;
                powers=ones(length(x),1)*[0:order];
                temp=((x-first)*ones(1,order+1)).^powers;
                temp=temp*A;
                e=feval(fun,x)-temp;
                end
function y=findzero(fun,x0,x1,varargin)

f0=feval(fun,x0,varargin{:});
f1=feval(fun,x1,varargin{:});

if sign(f0)==sign(f1)
error('the function at the two endpoints must be of opposite signs');
end

x=x0 - f0 * ((x1-x0)/(f1-f0));
f=feval(fun,x,varargin{:});
while abs(f)>1e-6
if sign(f)==sign(f0)
x0=x;
f0=f;
```

```
else
x1=x;
f1=f;
end
x=x0 - f0 * ((x1-x0)/(f1-f0));
f=feval(fun,x,varargin{:});
end
y=x;
end

function approxSig= getApproximateFunction(x, A, first)
A=A(:);
x=x(:);
order=length(A)-1;
powers=ones(length(x),1)*[0:order];
approxSig=((x-first)*ones(1,order+1)).^powers;
approxSig=(approxSig*A)';
end
```

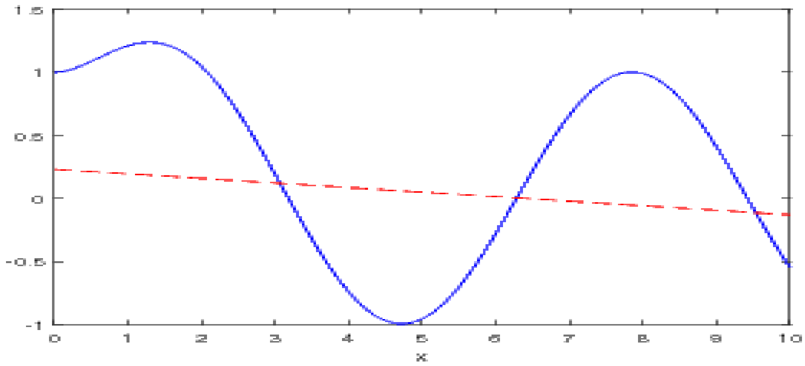
۱.۳ مثال‌ها

مثال ۱.۱.۳. تابع $f(x) = \sin x + \exp(-x)$ را روی بازه $[۰, ۱۰]$ در نظر می‌گیریم.
ابتدا به برنامه‌ی فوق تابع $f(x) = \sin x + \exp(-x)$ و فاصله‌ی $[۰, ۱۰]$ را به‌عنوان ورودی می‌دهیم.
به کمک برنامه‌ی الگوریتم رِمِز اگر برای حالتی‌که چندجمله‌ای از درجه یک است برنامه را اجرا کنیم، چندجمله‌ای

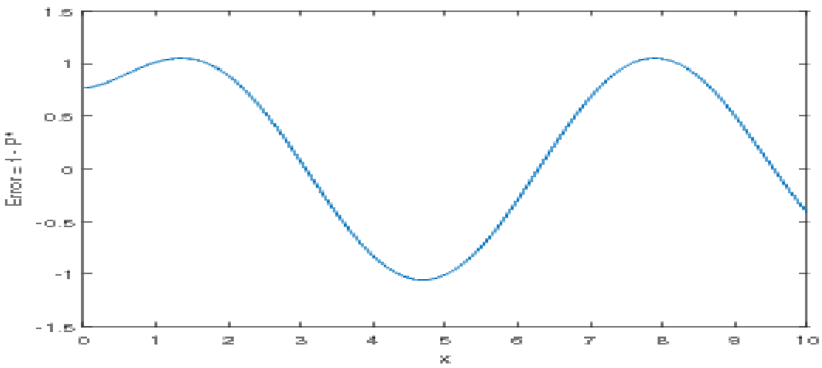
$$p_۱^* = ۰/۲۳۰۸ - ۰/۰۳۶۰x,$$

بدست می‌آید.

شکل صفحه‌ی بعد تابع و تقریب آن یعنی چندجمله‌ای $p_۱^*$ را نشان می‌دهد، روشن است که این تقریبِ مناسبی نیست.



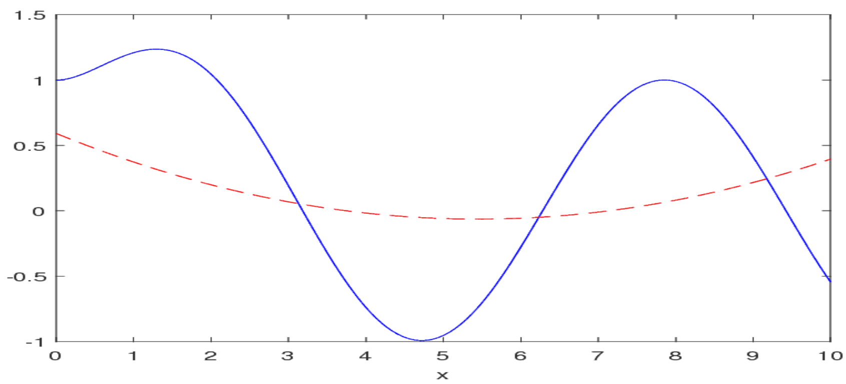
شکل زیر تابع خطا یعنی $E = f - p_{۱}^*$ را نشان می‌دهد.



حال برنامه را برای چندجمله‌ای از درجه دو اجرا می‌کنیم، چندجمله‌ای

$$p_{۲}^* = ۰٫۵۹۱۹ - ۰٫۲۴۰۶x + ۰٫۰۲۲۱x^{۲},$$

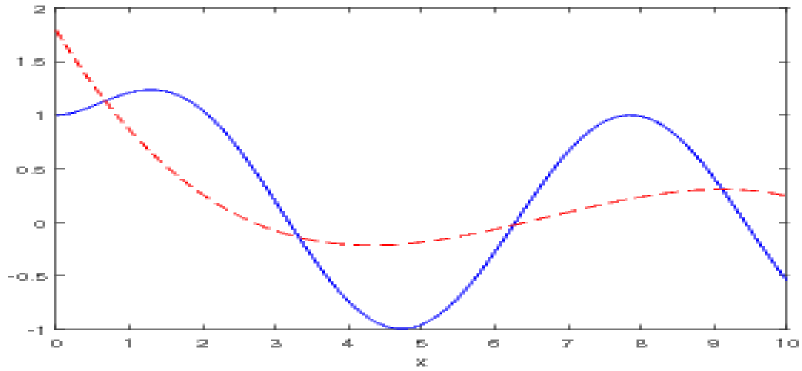
بدست می‌آید. با توجه به شکل زیر که تابع و تقریب آن یعنی چندجمله‌ای $p_{۲}^*$ را نشان می‌دهد، هنوز شرایط تقریب برآورده نشده است.



برنامه را برای چندجمله‌ای از درجه سه نیز اجرا می‌کنیم، چندجمله‌ای

$$p_{۳}^* = ۱٫۷۸۹۳ - ۱٫۱۰۶۲x + ۰٫۱۸۹۴x^{۲} - ۰٫۰۰۹۴x^{۳},$$

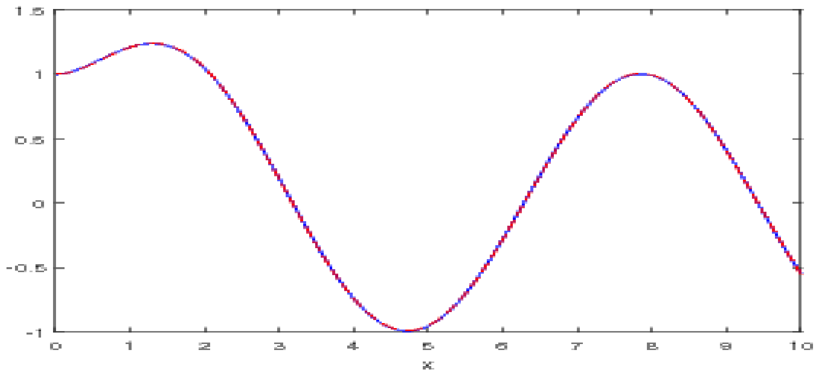
بدست می‌آید. با توجه به شکل زیر که تابع و تقریب آن یعنی چندجمله‌ای $p_۴^*$ را نشان می‌دهد، باز هم می‌بینیم شرایط تقریب برآورده نشده است.



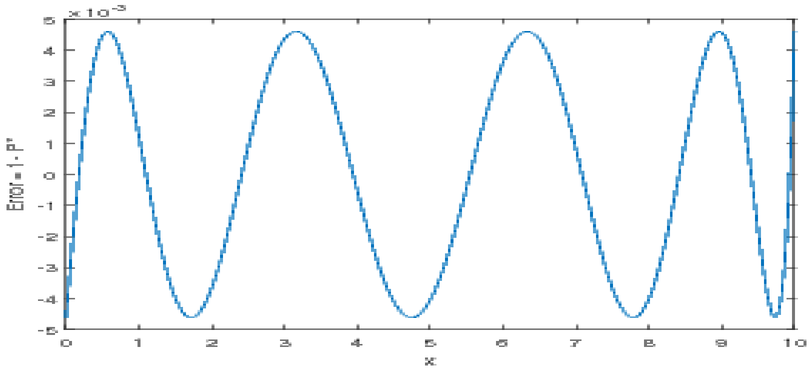
برای بدست آوردن چندجمله‌ای مناسب، برنامه را برای چندجمله‌ای از درجه‌های چهار، پنج، شش، هفت و هشت اجرا می‌کنیم، در پایان می‌بینیم جواب مسئله با چندجمله‌ای از درجه هشت بدست می‌آید و چندجمله‌ای $p_۸^*$ بهترین تقریب تابع $f(x) = \sin x + \exp(-x)$ روی بازه $[۰, ۱۰]$ است.

$$p_۸^* = ۱٫۰۰۴۶ - ۰٫۰۲۸۵x + ۰٫۵۰۲۱x^۲ - ۰٫۲۶۹۷x^۳ - ۰٫۰۲۵۲x^۴ + ۰٫۰۲۹۷x^۵ - ۰٫۰۰۵۴x^۶ + ۴٫۰۰۷۹ \times ۱۰^{-۴}x^۷ - ۱٫۰۷۳۵ \times ۱۰^{-۵}x^۸.$$

شکل زیر تابع و بهترین تقریب آن یعنی چندجمله‌ای $p_۸^*$ را نشان می‌دهد، می‌بینیم هر دو نمودار تقریباً برهم منطبق هستند.



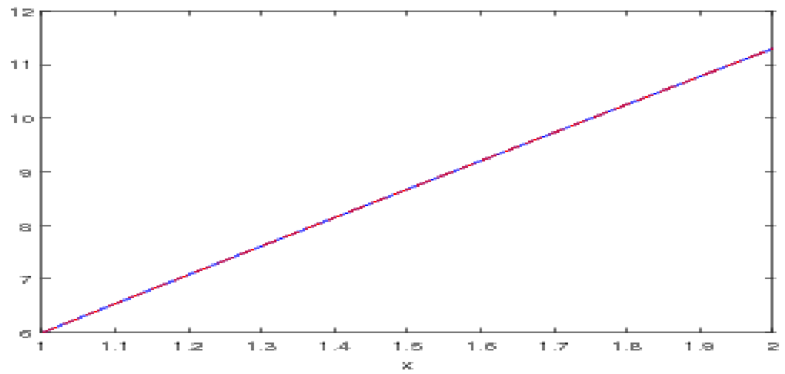
شکل زیر تابع خطا یعنی $E = f - p_۸^*$ را برای تابع $f(x) = \sin x + \exp(-x)$ و چندجمله‌ای بدست آمده نشان می‌دهد (توجه کنید اعداد در محور خطا در $۱۰^{-۳}$ ضرب شده‌اند)، روشن است خطای $E = f - p^*$ وقتی $p^* = p_۸^*$ کمتر از زمانی است که $p^* = p_۱^*$.



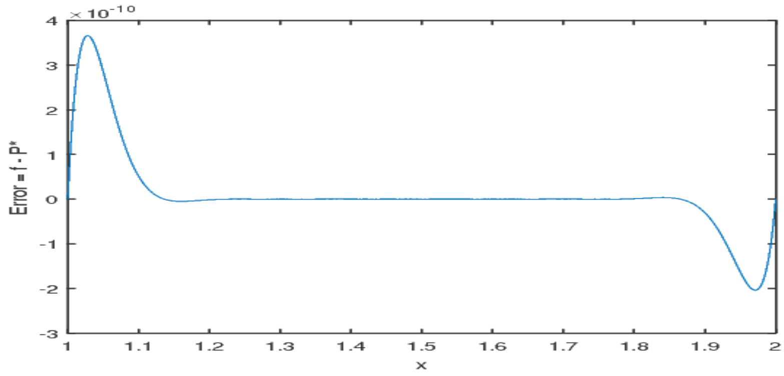
مثال ۲.۱.۳. تابع $f(x) = \log x + ۵x + ۱$ را روی بازه $[۱, ۲]$ در نظر می‌گیریم.
فرض کنید به برنامه‌ی الگوریتم رِمِز تابع $f(x) = \log x + ۵x + ۱$ و فاصله‌ی $[۱, ۲]$ به‌عنوان ورودی داده شود. در این‌صورت به کمک این برنامه، چندجمله‌ای

$$
\begin{aligned}
p^*_{۱۲} = {} & ۶/۰۰۰ + ۵/۴۳۴۳x - ۰/۲۱۷۱x^{۲} + ۰/۱۴۴۷x^{۳} - ۰/۱۰۸۴x^{۴} + ۰/۰۸۶۲x^{۵} \\
& - ۰/۰۶۹۷x^{۶} + ۰/۰۵۴۵x^{۷} - ۰/۰۳۸۴x^{۸} + ۰/۰۲۲۲x^{۹} - ۰/۰۰۹۶x^{۱۰} \\
& + ۰/۰۰۲۶x^{۱۱} - ۳/۴۷۳۴ \times ۱۰^{-۴}x^{۱۲},
\end{aligned}
$$

به‌عنوان بهترین تقریب تابع f بدست می‌آید.
شکل زیر تابع و بهترین تقریب آن یعنی چندجمله‌ای $p^*_{۱۲}$ را نشان می‌دهد که هر دو نمودار تقریباً برهم منطبق هستند.



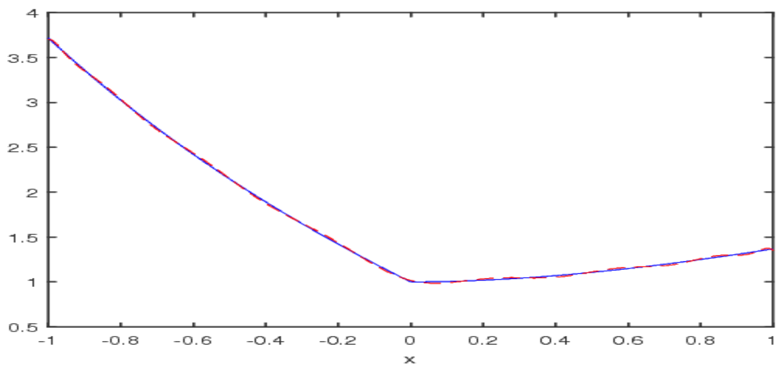
شکل زیر تابع خطا یعنی $E = f - p^*_{۱۲}$ را برای تابع $f(x) = \log x + ۵x + ۱$ و چندجمله‌ای بدست آمده نشان می‌دهد(توجه کنید اعداد در محور خطا در $۱۰^{-۱۰}$ ضرب شده‌اند).



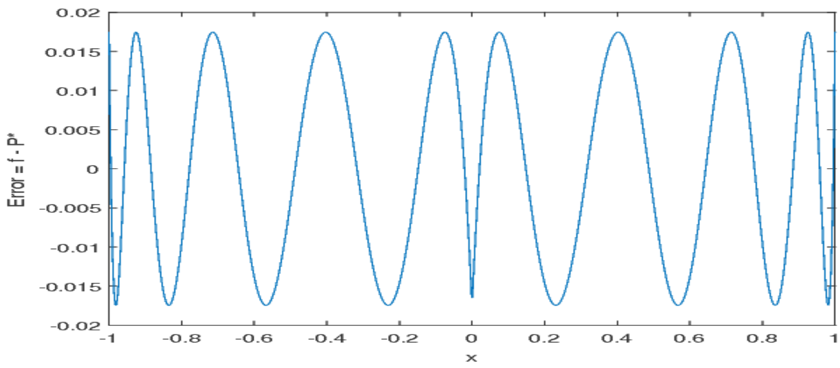
مثال ۳.۱.۳. تابع $f(x) = |x| + \exp(-x)$ را روی بازه $[-۱, ۱]$ در نظر می‌گیریم.
فرض کنید به برنامه‌ی الگوریتم رِمِز تابع $f(x) = |x| + \exp(-x)$ و فاصله‌ی $[-۱, ۱]$ به‌عنوان ورودی داده شود. در این‌صورت به کمک این برنامه، چندجمله‌ای

$$\begin{aligned} p^*_{۱۷} = {} & ۳٫۷۰۰۸ + ۰٫۸۴۷۳x - ۱۹۶٫۷۰۲۹x^{۲} + ۳٫۳۹۳۸ \times ۱۰^{۳}x^{۳} - ۳٫۰۵۰۹ \times ۱۰^{۴}x^{۴} \\ & + ۱٫۶۵۵۶ \times ۱۰^{۵}x^{۵} - ۵٫۸۸۵۴ \times ۱۰^{۵}x^{۶} + ۱٫۴۴۲۳ \times ۱۰^{۶}x^{۷} - ۲٫۵۱۶۷ \times ۱۰^{۶}x^{۸} \\ & + ۳٫۱۸۸۲ \times ۱۰^{۶}x^{۹} - ۲٫۹۵۸۶ \times ۱۰^{۶}x^{۱۰} + ۲٫۰۰۹۵ \times ۱۰^{۶}x^{۱۱} - ۹٫۸۷۰۱ \times ۱۰^{۵}x^{۱۲} \\ & + ۳٫۴۱۱۰ \times ۱۰^{۵}x^{۱۳} - ۷٫۸۶۴۱ \times ۱۰^{۴}x^{۱۴} + ۱٫۰۸۵۵ \times ۱۰^{۴}x^{۱۵} - ۶۷۸٫۴۶۱۵x^{۱۶} \\ & + ۳٫۲۹۱۸ \times ۱۰^{-۴}x^{۱۷}, \end{aligned}$$

به‌عنوان بهترین تقریب تابع f بدست می‌آید.
شکل زیر تابع و بهترین تقریب آن یعنی چندجمله‌ای $p^*_{۱۷}$ را نشان می‌دهد که هر دو نمودار تقریباً برهم منطبق هستند.



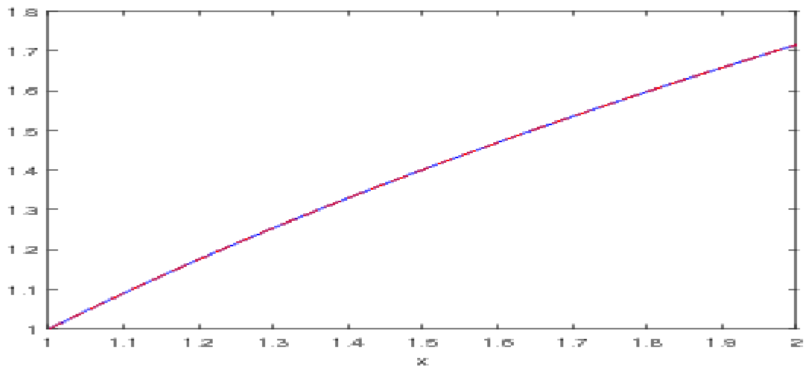
شکل زیر تابع خطا یعنی $E = f - p^*_{۱۷}$ را برای تابع $f(x) = |x| + \exp(-x)$ و چندجمله‌ای بدست آمده نشان می‌دهد.



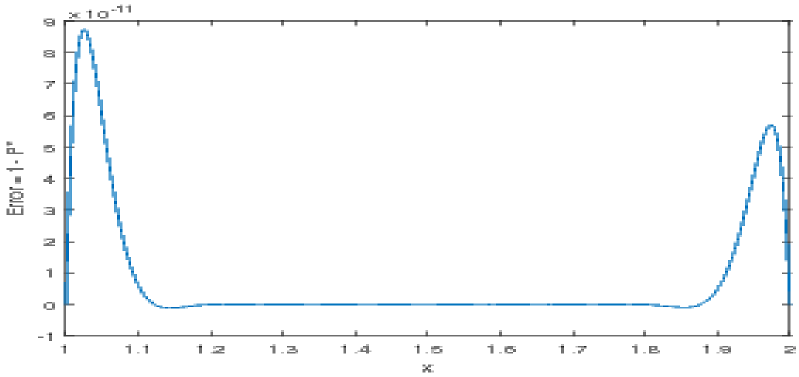
مثال ۴.۱.۳. تابع $f(x) = \sqrt{x} + \log x$ را روی بازه $[1,2]$ در نظر می‌گیریم.
فرض کنید به برنامه‌ی الگوریتم رِمِز تابع $f(x) = \sqrt{x} + \log x$ و فاصله‌ی $[1,2]$ به‌عنوان ورودی داده شود. در این‌صورت به کمک این برنامه، چندجمله‌ای

$$\begin{aligned} p_{13}^* = {} & 1.000 + 0.9343x - 0.3421x^2 + 0.2073x^3 - 0.1476x^4 + 0.1139x^5 \\ & - 0.0915x^6 + 0.0737x^7 - 0.0563x^8 + 0.0380x^9 - 0.0209x^{10} \\ & + 0.0085x^{11} - 0.0022x^{12} + 2.7234 \times 10^{-4}x^{13}, \end{aligned}$$

به‌عنوان بهترین تقریب تابع f بدست می‌آید.
شکل زیر تابع و بهترین تقریب آن یعنی چندجمله‌ای p_{13}^* را نشان می‌دهد که هر دو نمودار تقریباً برهم منطبق هستند.



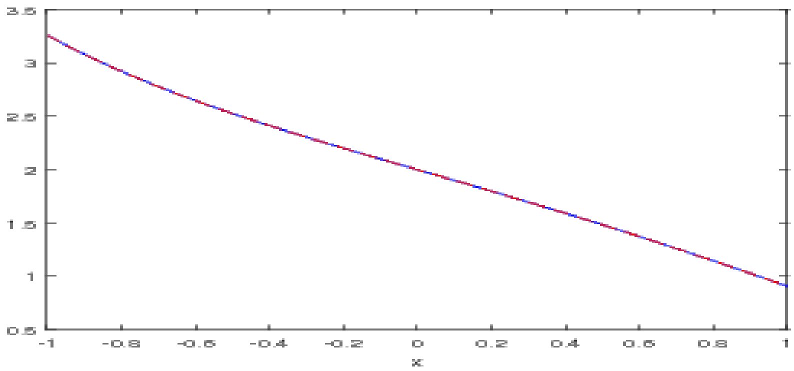
شکل زیر خطای $E = f - p_{13}^*$ را برای تابع $f(x) = \sqrt{x} + \log x$ و چندجمله‌ای بدست آمده نشان می‌دهد(توجه کنید اعداد در محور خطا در 10^{-11} ضرب شده‌اند).



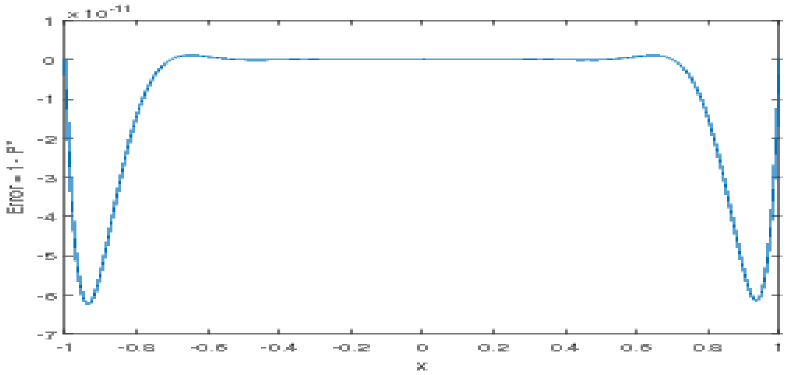
مثال ۵.۱.۳. تابع $f(x) = \cos x + \exp(-x)$ را روی بازه $[-1, 1]$ در نظر می‌گیریم.
فرض کنید به برنامه‌ی الگوریتم رِمِز تابع $f(x) = \cos x + \exp(-x)$ و فاصله‌ی $[-1, 1]$ به‌عنوان ورودی داده شود. در این‌صورت به کمک این برنامه، چندجمله‌ای

$$\begin{aligned} p^*_{11} &= 3.2586 - 1.8768x + 1.0890x^2 - 0.5933x^3 + 0.1358x^4 - 0.0156x^5 \\ &+ 0.0030x^6 - 7.0378 \times 10^{-4}x^7 + 7.8969 \times 10^{-5}x^8 - 4.2383 \times 10^{-6}x^9 \\ &+ 2.8832 \times 10^{-7}x^{10} - 2.5459 \times 10^{-8}x^{11}, \end{aligned}$$

به‌عنوان بهترین تقریب تابع f بدست می‌آید.
شکل زیر تابع و بهترین تقریب آن یعنی چندجمله‌ای p^*_{11} را نشان می‌دهد که هر دو نمودار تقریباً برهم منطبق هستند.



شکل زیر تابع خطا $E = f - p^*_{11}$ را برای تابع $f(x) = \cos x + \exp(-x)$ و چندجمله‌ای بدست آمده نشان می‌دهد(توجه کنید اعداد در محور خطا در 10^{-11} ضرب شده‌اند).


x 10^-11
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
Error = 1 - P*
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

فصل ۴

الگوریتم رِمِز برای توابع اسپلاین

در فصل دوم الگوریتم رِمِز را معرفی و با استفاده از این الگوریتم بهترین تقریب تابع $f \in C[a,b]$ که یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n می‌شود را محاسبه کردیم . در این فصل $S_{n,k}$ را به‌عنوان زیرفضایی از تابع اسپلاین [۱] از درجه‌ی n با k گره‌ی ثابت در نظر گرفته و با استفاده از الگوریتم رِمِز، بهترین تقریب تابع $f \in C[a,b]$ را در $S_{n,k}$ محاسبه می‌کنیم. به‌طور کلی در گام mام مجموعه‌ی M_m متشکل از $n+k+۲$ نقطه با شرط $a \leq t_{۱,m} < \cdots < t_{n+k+۲,m} \leq b$ را انتخاب می‌کنیم، که برای آن تابع اسپلاین یکتای $s_m \in S_{n,k}$ و عدد حقیقی یکتای γ_m موجود است به‌طوری که $f - s_m$ روی M_m متناوب است و $|(f - s_m)(t_{r,m})| = |\gamma_m|$ که $r = ۱, \ldots, n+k+۲$. سپس با قانون تعویض نقطه می‌توانیم یک نقطه از M_m را با نقطه حدی $f - s_m$ عوض کنیم و مجموعه جدید $M_{m+۱}$ را بدست آوریم که برای آن تابع اسپلاین یکتای $s_{m+۱} \in S_{n,k}$ و عدد حقیقی یکتای $\gamma_{m+۱}$ با خاصیت فوق موجود است. نشان خواهیم داد اگر $k \leq n+۱$ دنباله‌ی s_m همگرا به بهترین تقریب f و اگر $k > n+۱$، دنباله‌ی s_m نزدیک به بهترین تقریب است.

۱.۴ تعاریف اولیه

در این بخش فرض کنید M زیرفضای $N-$بعدی از $C[a,b]$ و $f \in C[a,b]$ باشد، مانند تعریف ۲.۲.۱ مجموعه‌ی بهترین تقریب‌های f در M را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_M(f) = \{p^* \in M \colon \|f - p^*\| = \inf_{p \in M} \|f - p\|\}.$$

تعریف ۱.۱.۴. تابع $p^* \in M$ را بهترین تقریب قویاً یکتای تابع $f \in C[a,b]$ می‌نامیم، اگر ثابت $K_f > ۰$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $p \in M$ داشته باشیم

$$\|f - p^*\| + K_f \|p - p^*\| \leq \|f - p\|.$$

[۱] Spline

هر بهترین تقریب قویاً یکتا، یک بهترین تقریب یکتاست.

تعریف ۲.۱.۴. M را چبیشف ضعیف [۲] می‌نامیم، اگر برای هر پایه $\{m_1, \ldots, m_N\}$ از M عدد صحیح $\delta = \pm 1$ موجود باشد به‌طوری که برای نقاط $t_1 < \cdots < t_N$ در $[a,b]$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\delta \det(m_i(t_j))_{i,j=1}^N \geq 0.$$

قضیه ۳.۱.۴. M *چبیشف ضعیف است، اگروتنها اگر برای هر* $f \in C[a,b]$ *حداقل یک* $p^* \in P_M(f)$ *موجود باشد به‌طوری که* $f - p^*$ *دارای حداقل* $N+1$ *نقطه حدی متناوب باشد.*

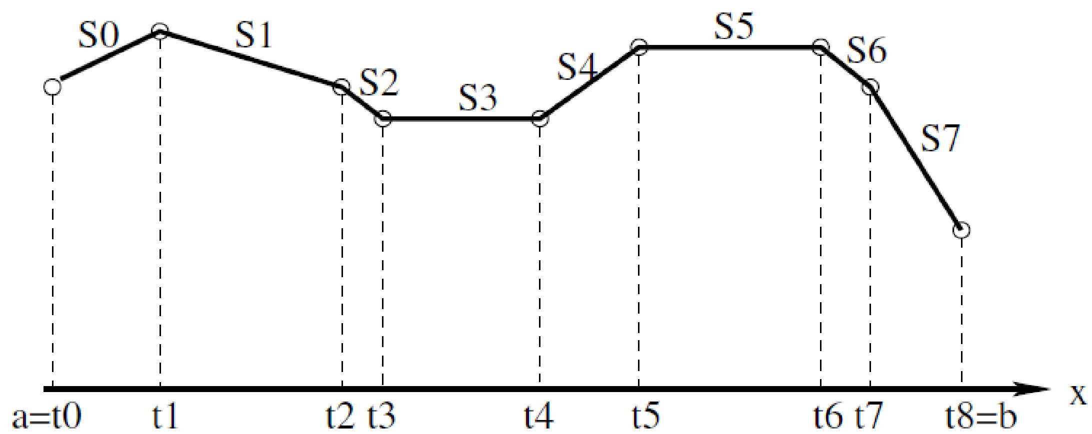
برهان. به [10] رجوع شود. □

تعریف ۴.۱.۴. تابع چندجمله‌ای اسپلاین با درجه‌ی n و k گره‌ی ثابت روی $[a,b]$ تابعی است که شامل قطعه‌هایی از چندجمله‌ای‌های به هم پیوسته است.

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ s_1(x), & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \vdots \\ s_{n-1}(x), & x \in [x_{k-1}, x_k]. \end{cases}$$

هر قطعه از $S(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است و با $s_i(x)$ نمایش داده می‌شود و نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_k$ گره نامیده می‌شوند.

$[a,b]$ دامنه‌ی S و S روی $[a,b]$ پیوسته است. یک تقسیم فاصله $a = x_0 < \cdots < x_k = b$ موجود است به‌طوری که S یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n روی هر فاصله‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ است.
شکل زیر نمونه‌ای از یک تابع اسپلاین از درجه‌ی یک با ۹ گره$(x_i = t_i)$ است.



[۲] Weak chebyshev

به‌طور مثال تابع

$$S(x)=\begin{cases} x & ,x\in[-1,0],\\ 1-x & ,x\in(0,1],\\ 2x-2 & ,x\in[1,2].\end{cases}$$

تابع اسپلاین نیست، چون در $x=0$ پیوسته نیست.

$S_{n,k}$ را به‌عنوان زیرفضای چبیشف ضعیف از توابع چندجمله‌ای اسپلاین با درجه‌ی n و k گره‌ی ثابت به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم، که در آن $k\in\mathbb{N}$ و $a=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}=b$، k گره ثابت در بازه‌ی $[a,b]$ باشد.

$$\begin{aligned} S_{n,k}=S_{n,k}(x_1,\dots,x_k) &= \{s\in C^{n-1}[a,b]:\ s|_{[x_i,x_{i+1}]}\text{چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر } n \text{ باشد}\}\\ &= span\{1,t,\dots,t^n,(t-x_1)_+^n,\dots,(t-x_k)_+^n\},\end{aligned}$$

جایی‌که

$$(t-x_i)_+^n=\begin{cases} 0, & t\le x_i,\\ (t-x_i)^n, & t>x_i.\end{cases}$$

زیرفضای $S_{n,k}$، $N=(n+1+k)-$بعدی است و sها توابعی پیوسته هستند که $n-1$بار روی بازه بسته‌ی $[a,b]$ مشتق پذیرند و این توابع روی بازه‌های $[x_i,x_{i+1}]$ ($i=0,\dots,k$)، چندجمله‌ای‌هایی از درجه حداکثر n هستند. در حالت کلی بهترین تقریب در مجموعه‌ی $S_{n,k}$ یکتا نیست. در واقع برای هر $f\in C[a,b]$ قرار می‌دهیم:

$$P(f)=P_{S_{n,k}}(f).$$

فرض کنید $\{s_1,\dots,s_N\}$ پایه‌ای برای $S_{n,k}$ باشد ($S_{n,k}=span\{s_1,\dots,s_N\}$) و همچنین زیرمجموعه‌ی دلخواه $M_0=\{t_1,\dots,t_{N+1}\}\subset[a,b]$ از $\{\tilde{t_1},\dots,\tilde{t_N}\}$ را درنظر می‌گیریم که برای آن رابطه‌ی $\det(s_i(\tilde{t_j}))_{i,j=1}^N\neq 0$ برقرار باشد. قرار می‌دهیم:

$$D(M_0)=\begin{vmatrix} s_1(t_1) & \dots & s_N(t_1) & -1\\ s_1(t_2) & \dots & s_N(t_2) & (-1)^2\\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ s_1(t_{N+1}) & \dots & s_N(t_{N+1}) & (-1)^{N+1}\end{vmatrix}$$

همچنین برای هر نقطه‌ی $t_r\in M_0$ قرار می‌دهیم:

$$D(t_r)=\begin{vmatrix} s_1(t_1) & \dots & s_N(t_1)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ s_1(t_{r-1}) & \dots & s_N(t_{r-1})\\ s_1(t_{r+1}) & \dots & s_N(t_{r+1})\\ \vdots & \dots & \vdots\\ s_1(t_{N+1}) & \dots & s_N(t_{N+1})\end{vmatrix}$$

تعریف ۵.۱.۴. $M_\circ = \{t_1, \dots, t_{N+1}\} \subset [a,b]$ را مجموعه‌ی قابل قبول می‌نامیم، اگر $D(M_\circ) \neq \circ$، یعنی

$$D(M_\circ) = (-1)^{N+1} \sum_{r=1}^{N+1} D(t_r) \neq \circ.$$

لم ۶.۱.۴. *فرض‌کنید $M_\circ = \{t_1, \dots, t_{N+1}\} \subset [a,b]$، شرایط زیر معادلند:*

i) $D(M_\circ) \neq \circ$.

ii) *برای یک* $l \in \{1, \dots, N+1\}$،

$$D(t_l) \neq \circ \Leftrightarrow \tilde{t}_r < x_r < \tilde{t}_{r+n+1}, \quad r = 1, \dots, k,$$

که $\tilde{t}_r = t_r$ *اگر* $r = 1, \dots, l-1$ *و* $\tilde{t}_r = t_{r+1}$ *اگر* $r = l, \dots, N$. x_r*ها نقاطی در* $[a,b]$ *هستند.*

iii) *برای* $r = 1, \dots, N$، $D(t_r)D(t_{r+1}) \geq \circ$ *است.*

برهان. به [8] رجوع شود. □

حال باتوجه به تعریف ۱.۱.۴ قضایای زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۷.۱.۴. *برای توابع* $f \in C[a,b] \backslash S_{n,k}$ *و* $s_\circ \in S_{n,k}$ *شرایط زیر معادلند:*

i) $s_\circ$ *بهترین تقریب قویاً یکتای* f *است.*

ii) $f - s_\circ$ *دارای حداقل* $N+1$ *نقطه حدی متناوب در* $[a,b]$ *و دارای حداقل* $r+1$ *نقطه حدی متناوب در هر یک از فواصل زیر است*

$$[x_\circ, x_r), (x_{k+1-r}, x_{k+1}], \quad r = 1, \dots, k+1,$$
$$(x_q, x_{q+r+n}), \quad r \geq 1, q = 1, \dots, k (k > n+1 \text{ اگر}).$$

برهان. به [10] رجوع شود. □

لم ۸.۱.۴. *زیرفضای* $S_{n,k}$ *را در نظر می‌گیریم. فرض‌کنید نقاط* $a \leq t_1 < \dots < t_p \leq b$ *و اعداد صحیح* $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \{-1, 1\}$ *که* $p \geq N+1$ *داده شده باشند. گزاره‌های زیر معادلند:*

i) *تابع ناصفری مانند* $s \in S_{n,k}$ *موجود نیست‌که در شرط* $\sigma_r s(t_r) \geq \circ$ $(r = 1, \dots, p)$ *صدق کند.*

ii) *فاصله‌ی* $[a,b]$ *دارای حداقل* $N+1$ *نقطه* $t_{q_1} < \cdots < t_{q_{N+1}}$ *است، به‌طوری که* $\sigma_{q_i}\sigma_{q_{i+1}} < 0$ $(i = 1, \ldots, N)$ *و هر یک از فواصل*

$$[x_0, x_r), (x_{k+1-r}, x_{k+1}], \quad r = 1, \ldots, k+1,$$
$$(x_q, x_{q+r+n}), \quad r \geq 1, q = 1, \ldots, k (k > n+1 \text{ اگر}).$$

دارای حداقل $r+1$ *نقطه* $t_{l_1} < \cdots < t_{l_{r+1}}$ *است به‌طوری که* $\sigma_{l_i}\sigma_{l_{i+1}} < 0$ $(i = 1, \ldots, r)$.

برهان. به [10] رجوع شود. □

لم ۹.۱.۴. *برای مجموعه* $M_0 = \{t_1, \ldots, t_{N+1}\} \subset [a,b]$ *که* $a \leq t_1 < \cdots < t_{N+1} \leq b$*، شرایط زیر معادلند:*

i) $D(M_0) \neq 0$.

ii) *زیرفاصله یکتایی از* $[a,b]$ *مانند* $[x_u, x_{u+v}]$ *موجود است به‌طوری که*

$$x_u \leq t_{u+1}, t_{u+v+n+1} \leq x_{u+v},$$

و هر یک از فواصل

$$[x_0, x_r) \quad r = 1, \ldots, u, \quad (x_{k+1-r}, x_{k+1}], \quad r = 1, \ldots, k+1-(u+v),$$
$$(x_q, x_{q+r+n}) \subset [x_0, x_u], \quad r \geq 1,$$
$$(x_q, x_{q+r+n}) \subset [x_{u+v}, x_{k+1}], \quad r \geq 1,$$

دارای حداقل r *نقطه از* M_0 *است و هر یک از فواصل*

$$[x_u, x_{u+r}), \quad (x_{u+v-r}, x_{u+v}], \quad r = 1, \ldots, v,$$
$$(x_q, x_{q+r+n}) \subset [x_u, x_{u+v}], \quad r \geq 1,$$

دارای حداقل $r+1$ *نقطه از* M_0 *است.*

iii) $[x_u, x_{u+v}]$ *زیرفاصله یکتای* $[a,b]$ *موجود است به‌طوری که*

$$x_{r-n-1} < t_r < x_r, \quad r = 1, \ldots, u,$$
$$x_u \leq t_{u+1} < t_{r+1} < x_r < t_{r+n+1} < t_{u+v+n+1} \leq x_{u+v}, \quad r = u+1, \ldots, u+v-1,$$
$$t_{r+1} < x_r < t_{r+n+2}, \quad r = u+v, \ldots, k.$$

برهان. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ را همزمان اثبات می‌کنیم.

فرض کنید $M_\circ = \{t_1, \dots, t_{N+1}\} \subset [a,b]$ که $a \le t_1 < \dots < t_{N+1} \le b$ موجود باشد و $D(M_\circ) \neq \circ$. از تعریف $D(M_\circ)$ داریم

$$D(M_\circ) = (-1)^{N+1} \sum_{r=1}^{N+1} D(t_r) \neq \circ.$$

یعنی برای یک $l \in \{1, \dots, N+1\}$، $D(t_l) \neq \circ$. از لم ۶.۱.۴ داریم

$$D(t_l) \neq \circ \Leftrightarrow \tilde{t}_r < x_r < \tilde{t}_{r+n+1}, \quad r = 1, \dots, k,$$

$\tilde{t}_r = t_r$ اگر $r = 1, \dots, l-1$ و $\tilde{t}_r = t_{r+1}$ اگر $r = l, \dots, N$.

پس هر فاصله‌ی $[x_\circ, x_r)$ که $r = l, \dots, k+1$ و هر فاصله‌ی $(x_{k+1-r}, x_{k+1}]$ که $r = k+3+n-1, \dots, k+1$، چون $l < r < N$، $\tilde{t}_r = t_{r+1}$ یعنی دارای حداقل $r+1$ نقطه از مجموعه‌ی $M_\circ$ می‌باشد. می‌توانیم u را طوری انتخاب کنیم که $1 < u < l-1$ و فاصله‌ی $[x_\circ, x_u)$، دارای دقیقا u نقطه از مجموعه‌ی $M_\circ$ باشد، اما هر فاصله‌ی $[x_\circ, x_r)$ که $u < r$ دارای حداقل $r+1$ نقطه از مجموعه‌ی $M_\circ$ باشد.

به‌طور مشابه، می‌توانیم v را طوری انتخاب کنیم که $(x_{u+v}, x_{k+1}]$ دارای دقیقا $k+1-u-v$ نقطه از مجموعه‌ی $M_\circ$ باشد، اما هر فاصله‌ی $(x_{k+1-r}, x_{k+1}]$ که $k+1-u-v < r$ دارای حداقل $r+1$ نقطه از مجموعه‌ی $M_\circ$ باشد.

با این استدلال‌ها، $u < l$. با انتخاب u و v مناسب داریم

$$x_u \le t_{u+1} < t_{r+1} < x_r < t_{r+n+1} < t_{u+v+n+1} \le x_{u+v}, \quad r = u+1, \dots, u+v-1,$$
$$\Rightarrow x_u \le t_{u+1}, t_{u+v+n+1} \le x_{u+v}.$$

همچنین $\tilde{t}_r < x_r < \tilde{t}_{r+n+1}$، $r = 1, \dots, k$ که $t_l \in [x_u, x_{u+v}]$، یعنی $\tilde{t}_r = t_r$ اگر $r = 1, \dots, u$ و $\tilde{t}_r = t_{r+1}$ اگر $r = u+v+n+1, \dots, N$. بدست می‌آوریم

$$x_{r-n-1} < t_r < x_r, \quad r = 1, \dots, u,$$
$$t_{r+1} < x_r < t_{r+n+2}, \quad r = u+v, \dots, k.$$

نشان دادیم از (i)، (ii) و(iii) نتیجه می‌شود، کافی است نشان دهیم از (iii)، (i) نتیجه می‌شود.

$iii \Rightarrow i$ نقطه دلخواه $t_l \in M_\circ \cap [x_u, x_{u+v}]$ را انتخاب می‌کنیم. از شرط (iii) داریم

$$\tilde{t}_r < x_r < \tilde{t}_{r+n+1}, \quad r = 1, \dots, k,$$

$\tilde{t}_r = t_r$ اگر $r = 1, \dots, l-1$ و $\tilde{t}_r = t_{r+1}$ اگر $r = l, \dots, N$. در نتیجه از شرط (ii) لم ۶.۱.۴ $D(t_r) \neq \circ$ و $D(t_{r+1})D(t_r) \ge \circ$، در نتیجه $D(M_\circ) \neq \circ$. پس (iii)، (i) را نتیجه می‌دهد و حکم اثبات می‌شود. □

از این به بعد، فاصله یکتای $[x_u, x_{u+v}]$، که دارای خواص (ii) و (iii) در لم ۹.۱.۴ است را با I_M تعریف می‌کنیم. حال نشان می‌دهیم برای هر تابع $f \in C[a,b]$ زیرفاصله‌ای از $[a,b]$ موجود است که دارای بهترین تقریب قویاً یکتاست.

لم ۱۰.۱.۴. *تابع $f \in C[a,b]$ و زیرفضای $S_{n,k}$ را در نظر می‌گیریم.*

i) زیر فاصله‌ای مانند $[x_i, x_{i+j}]$ از $[a,b]$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $s_\circ \in P(f)$، $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f در $[x_i, x_{i+j}]$ است.

ii) اگر $k \leq n+1$، آنگاه فاصله یکتای $[x_i, x_{i+j}]$ موجود است به‌طوری‌که (i) برقرار است.

برهان. فرض کنید $f \in C[a,b]$ باشد.
(i) چون زیرفضای اسپلاین $S_{n,k}$، زیرفضای چبیشف ضعیف و متناهی البعد است، از قضیه‌ی ۳.۱.۴ برای هر تابع $f \in C[a,b]$ حداقل یک $s_\circ \in P(f)$ موجود است به‌طوری که $f - s_\circ$ دارای حداقل $N + ۱ = (n + k + ۱) + ۱$ نقطه حدی متناوب(مانند $a \leq t_۱ < \cdots < t_{N+۱} \leq b$) است. از تعریف نقطه حدی متناوب رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\delta(-۱)^r (f - s_\circ)(t_r) = \|f - s_\circ\|, \quad r = ۱, ۲, \ldots, N+۱, \delta = \pm ۱.$$

از تعریف زیرفضای چبیشف ضعیف، $D(M_\circ) \neq \circ$، پس از لم ۹.۱.۴ هر فاصله‌ی $[x_i, x_{i+r})$ $(r = ۱, \ldots, j)$، دارای حداقل $r + ۱$ نقطه از $M_\circ$ است، پس زیرفاصله‌ی یکتای $[x_i, x_{i+j}]$ از $[a,b]$ دارای حداقل $n + j + ۱$ نقطه از $M_\circ$ است. همچنین از لم ۹.۱.۴ هر یک از فواصل

$$(x_{i+j-r}, x_{i+j}](r = ۱, \ldots, j) \quad (x_q, x_{q+r+n}) \subset [x_i, x_{i+j}](r \geq ۱)$$

دارای حداقل $r + ۱$ نقطه در $M_\circ$ هستند. از قضیه‌ی ۷.۱.۴، چون $f - s_\circ$ دارای حداقل $N + ۱$ نقطه حدی متناوب در $[a,b]$ و دارای حداقل $r + ۱$ نقطه حدی متناوب در هر فاصله‌ی فوق می‌شود. در نتیجه $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f در زیرفاصله‌ی $[x_i, x_{i+j}]$ است و حکم برقرار می‌شود.
(ii) فرض کنید $k \leq n + ۱$ و $[x_u, x_{u+v}]$، $[x_p, x_{p+q}]$ ($u + v \leq p + q$ ، $u \leq p$) دو زیرفاصله از $[a,b]$، بیان شده در (i) باشند و $s_\circ \in P(f)$. نشان می‌دهیم $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f روی فاصله‌ی $[x_u, x_{p+q}]$ است.

چون $k \leq n + ۱$ از قضیه‌ی ۷.۱.۴، $f - s_\circ$ دارای حداقل $n + v + ۱$ نقطه حدی متناوب در $[x_u, x_{u+v}]$ و حداقل $n + q + ۱$ نقطه حدی متناوب در $[x_p, x_{p+q}]$ است. همچنین $f - s_\circ$ دارای حداقل $p + q - u - v + ۱$ نقطه حدی متناوب در $(x_{u+v}, x_{p+q}]$ است$(r = p + q - u - v)$. چون $f - s_\circ$ در فاصله‌ی $[x_u, x_{u+v}]$ دارای حداقل $n + v + ۱$ نقطه حدی متناوب و در فاصله‌ی $(x_{u+v}, x_{p+q}]$ دارای حداقل $p + q - u - v + ۱$ نقطه حدی متناوب است، لذا $f - s_\circ$ دارای حداقل $n + ۱ + p + q - u$ نقطه حدی متناوب در $[x_u, x_{p+q}]$ است. همچنین، چون $k \leq n + ۱$، $f - s_\circ$ دارای حداقل $r + ۱$ نقطه حدی متناوب در هر یک از فواصل زیر است

$$[x_u, x_{u+r}), (x_{p+q-r}, x_{p+q}], \quad r = ۱, \ldots, p + q - u - r,$$

پس شرط دوم قضیه‌ی ۷.۱.۴ برقرار است، در نتیجه $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f روی $[x_u, x_{p+q}]$ است.

حال فرض کنید $[x_i, x_{i+j}]$ زیرفاصله‌ی کوچکی از $[a,b]$ شامل تمام فاصله‌هایی که $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f در آن‌هاست باشد. استدلال فوق نشان می دهد $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتا روی $[x_i, x_{i+j}]$ است و لم اثبات می‌شود. □

توجه کنید اگر $k \leq n+۱$، از لم ۱۰.۱.۴ زیر فاصله یکتای $[x_i, x_{i+j}]$ از $[a,b]$ موجود است به‌طوری که دارای بهترین تقریب قویاً یکتاست و از قضیه‌ی ۷.۱.۴ خطای $f-s_\circ$ دارای حداقل $n+j+۱$ نقطه حدی متناوب در $[x_i, x_{i+j}]$ برای هر $s_\circ \in P(f)$ است. حال برای هر $f \in C[a.b]$ زیرمجموعه خاصی از بهترین تقریب‌ها را با فرض $p \in \{۱,۲\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_p(f) =&\{s \in P(f) \colon \exists \tilde{M}_\circ(s) = \{t_۱, \dots, t_{N+۱}\},\\ &a \leq t_۱ < \cdots < t_{N+۱} \leq b, D(\tilde{M}_\circ(s)) \neq \circ,\\ &(-۱)^{r+p}(f-s)(t_r) = \|f-s\|, r = ۱,۲,\dots,N+۱\}.\end{aligned}$$

برای $k \leq n+۱$ و هر $f \in C[a,b]$ و $p \in \{۱,\dots,۴\}$، $A_p(f)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}A_p(f) =&\{s \in P(f) \colon \exists M_\circ(s) = \{t_۱, \dots, t_{N+۱}\},\\ &a \leq t_۱ < \cdots < t_{N+۱} \leq b, D(M_\circ(s)) \neq \circ,\\ &\delta(-۱)^{r}(f-s)(t_r) = \|f-s\|, r = i+۱, i+۲, \dots, n+i+j+۱, \delta = \pm ۱,\\ &(-۱)^{r+p}(f-s)(t_r) = \|f-s\|, r = ۱,\dots,i,\\ &\delta_p(-۱)^{r}(f-s)(t_r) = \|f-s\|, r = n+i+j+۲,\dots,N+۱\}.\end{aligned}$$

که در آن اگر $p = ۱,۲$ آنگاه $\delta_p = ۱$ و اگر $p = ۳,۴$ آنگاه $\delta_p = -۱$.

در قضیه‌ی بعد تحت شرایطی یکتایی بهترین تقریب را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۱۱.۱.۴. *اگر $f \in C[a,b]$، $p \in \{۱,۲\}$، $s_۱, s_۲ \in \tilde{A}_p(f)$ و $I_{M_\circ(s_۱)} = I_{M_\circ(s_۲)}$ باشد، آنگاه* $s_۱ = s_۲$.

برهان. فرض کنید $\tilde{A}_p(f)$، شامل دو تابع $s_۱$ و $s_۲$ با $I_{M_\circ(s_۱)} = I_{M_\circ(s_۲)} = [x_u, x_{u+v}]$ برای هر $p \in \{۱,۲\}$ باشد، کافی است نشان دهیم $s_۱ = s_۲$.

فرض کنید $p = ۲$ (حالت دیگر مانند همین حالت اثبات می‌شود). از تعریف $\tilde{A}_p(f)$ مجموعه‌ی $M_\circ(s_۱) = \{t_۱ \dots, t_{N+۱}\}$ موجود است به‌طوری که

$$a \leq t_۱ < \cdots < t_{N+۱} \leq b, \quad D(M_\circ(s_۱)) \neq \circ,$$

$$(-۱)^{r}(f-s_۱)(t_r) = \|f-s_۱\|, \quad r = ۱,\dots,N+۱.$$

و به‌طور مشابه مجموعه‌ی $M_\circ(s_۲) = \{\tilde{t}_۱, \dots, \tilde{t}_{N+۱}\}$ موجود است به‌طوری که

$$a \le \tilde{t}_۱ < \cdots < \tilde{t}_{N+۱} \le b, \quad D(M_\circ(s_۲)) \ne \circ,$$

$$(-۱)^r (f - s_۲)(\tilde{t}_r) = \|f - s_۲\|, \quad r = ۱, \dots, N + ۱.$$

پس برای $r = ۱, ۲, \dots, N + ۱$ داریم

$$(-۱)^r (f - s_۱)(t_r) = \|f - s_۱\| = \|f - s_۲\| \ge (-۱)^r (f - s_۲)(t_r).$$

برای $\tilde{t}_r$ نیز همین رابطه برقرار است. از این تساوی می‌توان گفت

$$(-۱)^r (f - s_۱)(t_r) \ge (-۱)^r (f - s_۲)(t_r).$$

و برای $\tilde{t}_r$

$$(-۱)^r (f - s_۱)(\tilde{t}_r) \le (-۱)^r (f - s_۲)(\tilde{t}_r).$$

داریم

$$(-۱)^r (s_۲ - s_۱)(t_r) \ge \circ, \quad r = ۱, ۲, \dots, N + ۱. \tag{۱.۴}$$

به‌طور مشابه

$$(-۱)^r (s_۲ - s_۱)(\tilde{t}_r) \le \circ, \quad r = ۱, ۲, \dots, N + ۱. \tag{۲.۴}$$

قرار می‌دهیم $s = s_۲ - s_۱$، نشان می‌دهیم $s = \circ$.

چون $D(M_\circ(s_۱)) \ne \circ$ از لم ۹.۱.۴ هر یک از فواصل زیر دارای حداقل $r + ۱$ نقطه از $M_\circ(s_۱)$ است

$$[x_u, x_{u+r}), \quad (x_{u+v-r}, x_{u+v}], \quad r = ۱, \dots, v,$$
$$(x_q, x_{q+r+n}) \subset [x_u, x_{u+v}], \quad q = ۱, \dots, v, r \ge ۱.$$

همچنین از لم ۹.۱.۴ $\{t_{u+۱}, \dots, t_{n+u+v+۱}\} \subset [x_u, x_{u+v}]$.

چون $n + v + ۱ = \dim\{s|_{[x_u, x_{u+v}]} : s \in S_{n,k}\} + ۱ \ge n + u + v + ۱$، شرایط لم ۸.۱.۴ برقرار است در نتیجه، تابع ناصفری مانند $s \in S_{n,k}$ موجود نیست که در شرط $(-۱)^r s(t_r) \ge \circ$ $(r = ۱, \dots, N + ۱)$ صدق کند، پس از رابطه‌ی (۱.۴) $s = \circ$ روی $[x_u, x_{u+v}]$ و در نتیجه $s_۱ = s_۲$ روی $[x_u, x_{u+v}]$ است.

حال نشان می‌دهیم، $s = \circ$ روی فاصله‌ی $[x_\circ, x_u]$ است (به همین روش می‌توانیم نشان دهیم، $s = \circ$ روی فاصله‌ی $[x_{u+v}, x_{k+۱}]$ است).

از آنجا که در فاصله‌ی $[x_u, x_{u+v}]$ داریم $I_{M_\circ(s_۱)} = I_{M_\circ(s_۲)} = [x_u, x_{u+v}]$ از لم ۹.۱.۴، نتیجه می‌شود

$$x_{r-n-۱} < t_r < x_r, \quad x_{r-n-۱} < \tilde{t}_r < x_r, \quad r = ۱, \dots, u.$$

دو حالت داریم:

(i) برای $u, \ldots, ۱ = r$، $t_r = \tilde{t}_r$. چون در روابط (۱.۴) و (۲.۴) $t_r = \tilde{t}_r$ می‌شود، پس $s(t_r) = ۰$ که $r = ۱, \ldots, u$، در نتیجه $s = ۰$ روی $[x_۰, x_u]$ است.

(ii) برای یک $r = ۱, \ldots, u$، $t_r \neq \tilde{t}_r$. فرض $\tilde{t}_l < t_l$ که $l = \min\{r\colon t_r \neq \tilde{t}_r, r = ۱, \ldots, u\}$. قرار می‌دهیم

$$\{w_۱, \ldots, w_{u+۱}\} = \{\tilde{t}_۱, \ldots, \tilde{t}_l, t_l, \ldots, t_u\},$$

که صعودی مرتب شده است، از روابط (۱.۴) و(۲.۴) داریم

$$(-۱)^r s(w_r) \leq ۰, \quad r = ۱, \ldots, u+۱.$$

$\tilde{W} = \{w_{u+۲}, \ldots, w_{p+u+۱}\}$ که شامل p نقطه ($p \geq n+v+۱$) در $[x_u, x_{u+v}]$ است، را طوری انتخاب می‌کنیم که هر یک از فواصل

$$[x_u, x_{u+r}), \quad r = ۱, \ldots, v, \quad (x_{u+v-r}, x_{u+v}], \quad r = ۱, \ldots, u+v,$$
$$(x_q, x_{q+r+n}), \quad (x_q, x_{q+r+n}) \cap [x_u, x_{u+v}] \neq ۰, \quad q = ۱, \ldots, v, r \geq ۱,$$

دارای حداقل $r+۱$ نقطه از $\tilde{W}$ است.

مجموعه‌ی $W = \{w_۱, \ldots, w_{p+u+۱}\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر هر یک از فواصل

$$[x_۰, x_r), r = ۱, \ldots, u+v, \quad (x_q, x_{q+r+n}) \subset [x_۰, x_u], q = ۱, \ldots, v, r \geq ۱, \quad (۳.۴)$$

دارای حداقل $r+۱$ نقطه از W باشد، پس با در نظرگرفتن فاصله‌ی $[x_۰, x_{u+v}]$ به‌جای فاصله‌ی $[a, b]$، لم ۸.۱.۴ برقرار است و $s = ۰$ روی فاصله‌ی $[x_۰, x_{u+v}]$ می‌شود، از طرفی $s = ۰$ روی $[x_u, x_{u+v}]$ بود، پس $s = ۰$ روی $[x_۰, x_u]$ است.
اگر رابطه‌ی (۳.۴) برقرار نباشد، دوحالت زیر اتفاق می‌افتد:

(آ) اگر برای یک $r \in \{۱, \ldots, u+v\}$ فاصله‌ی $[x_۰, x_r)$ دارای حداکثر r نقطه از W باشد، چون $W \cap [x_۰, x_u) = \{w_۱, \ldots, w_{u+۱}\}$ پس $x_r < x_u$ و فاصله‌ی $[x_r, x_{u+v}]$ دارای حداقل $p+u+۱-r$ نقطه از W است.

(ب) اگر زیرفاصله‌ی

$$(x_q, x_{q+r+n}) \subset [x_۰, x_u], \quad r \geq ۱,$$

دارای حداکثر r نقطه از W موجود باشد، پس یا

(a) فاصله‌ی $[x_۰, x_q]$ دارای حداقل $n+q+۱$ نقطه از W است. یا

(b) فاصله‌ی $[x_۰, x_{q+r+n})$ دارای حداکثر $n+q+r$ نقطه از W است.

همچنین چون $W \cap [x_۰, x_u) = \{w_۱, \ldots, w_{u+۱}\}$ پس $x_{q+r+n} < x_u$ و فاصله‌ی $[x_{q+r+n}, x_{u+v}]$ دارای حداقل $p+u+۱-n-q-r$ نقطه از W است.

اگر (آ) اتفاق بیفتد، چون $p+u+1-r > \dim\{s|_{[x_r,x_{u+v}]}\colon s\in S_{n,k}\} = n+u+v-r$، ما از فاصله‌ی $[x_r, x_{u+v}]$ به‌جای $[x_0, x_{u+v}]$ استفاده می‌کنیم.
اگر (ب)(a) اتفاق بیفتد، چون $n+q+1 > \dim\{s|_{[x_0,x_q]}\colon s\in S_{n,k}\} = n+q$، ما از فاصله‌ی $[x_0, x_q]$ به‌جای $[x_0, x_{u+v}]$ استفاده می‌کنیم.
در پایان اگر (ب)(b) اتفاق بیفتد چون

$$p+u+1-n-q-r > \dim\{s|_{[x_{q+r+n},x_{u+v}]}\colon s\in S_{n,k}\} = u+v-q-r,$$

ما از فاصله‌ی $[x_{q+r+n}, x_{u+v}]$ به‌جای $[x_0, x_{u+v}]$ استفاده می‌کنیم.
با استفاده‌ی مکرر از این روش در پایان فاصله‌ی $[x_h, x_{h+m}]$ را داریم به‌طوری که

$$[x_h, x_{h+m}] \cap [x_0, x_u] \neq \phi,$$

و هر یک از فواصل

$$[x_h, x_{h+r}), \quad (x_{h+m-r}, x_{h+m}], \quad r=1,\dots,m,$$
$$(x_q, x_{q+r+n}) \cap [x_h, x_{h+m}] \neq 0, \quad r\geq 1,$$

دارای حداقل $r+1$ نقطه از W است.
شرایط لم ۸.۱.۴ برقرار است، پس $s=0$ در فاصله‌ی $[x_h, x_{h+m}]$ است. بنابراین $s=0$ روی $[x_h, x_{h+m}] \cup [x_u, x_{u+v}]$ است.
حال باید نشان دهیم اگر $h+m<u$ روی $[a, x_h]$ و $[x_{h+m}, x_u]$، $s=0$ است. برای فاصله‌ی $[x_{h+m}, x_u]$ نشان می‌دهیم(حالت دیگر مانند همین حالت اثبات می‌شود).
از آنجا که در فاصله‌ی $[x_u, x_{u+v}]$ داریم $I_{M_0(s_1)} = I_{M_0(s_2)} = [x_u, x_{u+v}]$ از لم ۹.۱.۴، نتیجه می‌شود

$$x_{h+m} < t_{h+m+n+1} < \cdots < t_u < x_u, \quad x_{h+m} < \tilde{t}_{h+m+n+1} < \cdots < \tilde{t}_u < x_u.$$

اگر $t_u = \tilde{t}_u$، پس روی فاصله‌ی $[x_{h+m}, x_u]$، $s=0$.
اگر $t_u \neq \tilde{t}_u$، فرض کنید $l_0 = \max\{t_u \neq \tilde{t}_u\}$ و $\tilde{t}_{u-l_0} < t_{u-l_0}$، $\tilde{W} = \{\tilde{t}_u, \dots, \tilde{t}_{u-l_0}, t_{u-l_0}, \dots, t_u\}$.
$p \geq n+m+1$ نقطه از $[x_h, x_{h+m}]$ را طوری انتخاب می‌کنیم که از فرض لم ۸.۱.۴ $[x_h, x_{h+m}]$ را به‌جای $[x_0, x_{k+1}]$ در نظر بگیریم، به‌طور مشابه $\tilde{p} \geq n+v+1$ نقطه از $[x_u, x_{u+v}]$ را انتخاب می‌کنیم.
با استدلال قبل می‌توان نشان داد زیرفاصله‌ی $[x_p, x_q]$ از $[x_h, x_{u+v}]$ که $[x_p, x_q] \cap (x_{h+m}, x_u) \neq 0$ موجود است و شرایط لم ۸.۱.۴ برقرار است، در نتیجه تابع ناصفری مانند $s\in S_{n,k}$ موجود نیست که در شرط $(-1)^r s(t_r) \geq 0$ $(r=1,\dots,N+1)$ صدق کند. بنابراین $s=0$ روی $[x_p, x_q]$ است. با ادامه دادن این روش در پایان $s=0$ روی $[a,b]$ است و قضیه اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۱۲.۱.۴. *برای* $p\in\{1,2\}$ *شرایط زیر معادلند:*

i) $k \leq n + 1$.

ii) *برای هر* $f \in C[a, b]$ *مجموعه‌ی* $\tilde{A}_p(f)$ *تهی یا تک عضوی است.*

برهان. $(i) \Rightarrow (ii)$: فرض کنید $k \leq n + 1$ و برای $p \in \{1, 2\}$، $\tilde{A}_p(f)$ شامل دو تابع s_1 و s_2 باشد، کافی است نشان دهیم $s_1 = s_2$. دو حالت داریم $p = 1$ و $p = 2$، فرض کنید $p = 2$ (حالت دیگر مانند همین حالت اثبات می‌شود).

از تعریف $\tilde{A}_p(f)$ مجموعه‌ی $M_0(s_1) = \{t_1 \ldots, t_{N+1}\}$ موجود است به‌طوری که

$$a \leq t_1 < \cdots < t_{N+1} \leq b, \quad D(M_0(s_1)) \neq 0,$$

$$(-1)^r (f - s_1)(t_r) = \|f - s_1\|, \quad r = 1, 2, \ldots, N + 1.$$

و به‌طور مشابه مجموعه‌ی $M_0(s_2) = \{t_1, \ldots, t_{N+1}\}$ با همین خواص موجود است. مانند اثبات قضیه‌ی ۱۱.۱.۴ قرار می‌دهیم $(-1)^r s(t_r) \geq 0$ و $(-1)^r s(\tilde{t}_r) \leq 0$ که $r = 1, \ldots, N + 1$ و $s = s_2 - s_1$. حال قرار می‌دهیم $I_{M_0(s_1)} = [x_u, x_{u+v}]$، با استفاده از استدلال قضیه‌ی ۱۱.۱.۴ می‌توان دید روی فاصله‌ی $[x_u, x_{u+v}]$ چون شرایط لم ۸.۱.۴ برقرار است $s = 0$ می‌شود، پس $s_1 = s_2$. حال فاصله‌ی $[x_0, x_u]$ را در نظر می‌گیریم، از لم ۹.۱.۴ داریم $t_r < x_r$ و $\tilde{t}_r < x_r$ $(r = 1, \ldots, u)$، اگر $t_r = \tilde{t}_r$ پس روی فاصله‌ی $[x_0, x_u]$ هم $s = 0$ می‌شود.

در غیر این‌صورت با استفاده از اثبات ۱۱.۱.۴ فاصله‌ی $[x_p, x_{u+v}]$ که $p < u$ موجود است و چون شرایط لم ۸.۱.۴ برای آن برقرار است، پس روی $[x_p, x_{u+v}]$، $s = 0$ می‌شود. در پایان روی $[x_0, x_{u+v}]$، $s = 0$ می‌شود. با همین استدلال روی $[x_{u+v}, x_{k+1}]$ هم $s = 0$، پس در تمام فاصله‌ها $s_1 = s_2$ و در نتیجه حکم اثبات می‌شود.

$(ii) \Rightarrow (i)$: فرض خلف: فرض کنید $k > n+1$. تابع $f \in C[a, b]$ را طوری می‌سازیم که $\tilde{A}_p(f)$ دارای حداقل دو تابع برای $p \in \{1, 2\}$ باشد. [از [10] (صفحه‌ی ۵۲۴)] تابع اسپلاین $s_0 \in S_{n,k}$ موجود است به‌طوری که

$$s_0(t) = 0, \quad t \in [a, x_1] \cup [x_{n+2}, b],$$
$$s_0(t) > 0, \quad t \in (x_1, x_{n+2}).$$

و $\|s_0\| = 1$. تابع s_0 دارای نقطه حدی یکتایی مانند $\tilde{t} \in (x_1, x_{n+2})$ است. با استفاده از قضیه‌ی ۷.۱.۴ تابع $f \in C[a, b]$ را با خواص زیر در نظر می‌گیریم

a) $\|f\| = 1$.

b) $f(x_1) = 0$ اگر $f((x_1 + \tilde{t})/2) = 1$.

c) $f(t) = 0$ اگر $t \in [t, x_{n+2}]$.

d) 0 بهترین تقریب قویاً یکتای تابع f روی $[a, x_1] \cup [x_{n+2}, b]$ است.

با استفاده از قضیه‌ی ۷.۱.۴ و لم ۹.۱.۴ $\tilde{A}_p(f) \ni s_\circ ,\circ$ برای $p \in \{۱,۲\}$ است. پس فرض خلف باطل و حکم صحیح است یعنی اگر $k \leq n+۱$، $\tilde{A}_p(f)$ تک عضوی است. پس (ii) به (i) اشاره دارد و حکم اثبات می‌شود. □

لم ۱۳.۱.۴. *برای $k \leq n+۱$، $f \in C[a,b]$ و $\delta \in \{-۱,۱\}$، روابط زیر برقرار است:*

i) اگر $s_\circ \in P(f)$ و مجموعه نقاط $a \leq t_۱ < \cdots < t_i < x_i$ موجود باشد به‌طوری‌که $\delta(-۱)^r(f-s_\circ)(t_r) = \|f-s_\circ\|$، $r = ۱,\ldots,i$ آنگاه

$$t_r < x_r, \quad r = ۱,\ldots,i.$$

ii) اگر $s_\circ \in p(f)$ و مجموعه نقاط $x_{i+j} < t_{n+i+j+۲} < \cdots < t_{N+۱} \leq b$ موجود باشد به‌طوری که $\delta(-۱)^r(f-s_\circ)(t_r) = \|f-s_\circ\|$، $r = n+i+j+۲,\ldots,N+۱$ آنگاه

$$x_r < t_{n+r+۲}, \quad r = i+j,\ldots,k.$$

برهان. بدون ایجاد خلل در حکم، فرض کنید $\delta = ۱$ و (i) را اثبات می‌کنیم.
از لم ۱۰.۱.۴ اگر $k \leq n+۱$، آنگاه فاصله یکتای $[x_i, x_{i+j}]$ موجود است به‌طوری‌که برای $s_\circ \in P(f)$، $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f روی $[x_i, x_{i+j}]$ است.
(i) فرض خلف: فرض کنید برای هر $p \in \{۱,\ldots,i\}$، $x_p \leq t_p$ و q عددصحیح ماکسیمال با این خاصیت و هر فاصله‌ی $[x_q, x_{q+r})$ که $r = ۱,\ldots,i-q$ دارای حداقل $r+۱$ نقطه از $\{t_۱,\ldots,t_i\}$ باشد.
چون $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتا f روی $[x_i, x_{i+j}]$ است، از شرط دوم قضیه‌ی ۷.۱.۴، این خاصیت برای $[x_q, x_{i+j}]$ به‌جای $[a,b]$ برقرار است. پس $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f روی $[x_q, x_{i+j}]$ است.
چون $q < i$، این متناقض با تعریف فاصله یکتای $[x_i, x_{i+j}]$ است، پس فرض خلف باطل و حکم صحیح است.
(ii) فرض خلف: فرض کنید برای هر $p \in \{i+j,\ldots,k\}$، $t_{n+r+۲} \leq x_p$ و q عدد صحیح مینیمال با این خاصیت و هر فاصله‌ی $(x_{q-r}, x_q]$ که $r = i+j,\ldots,k-q$ دارای حداقل $r+۱$ نقطه از $\{t_{n+i+j+۲},\ldots,t_{N+۱}\}$ باشد. چون $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتا f روی $[x_i, x_{i+j}]$ است، از شرط دوم قضیه‌ی ۷.۱.۴، این خاصیت برای $[x_i, x_q]$ به‌جای $[a,b]$ برقرار است. پس $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f روی $[x_i, x_q]$ است. چون $i+j < q$، این متناقض با تعریف فاصله یکتای $[x_i, x_{i+j}]$ است، پس فرض خلف باطل و حکم صحیح است. □

برای $s_\circ \in P(f)$ تابع $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f روی $[x_i, x_{i+j}]$ است، ملاحضه زیر از لم‌های ۱۳.۱.۴، ۹.۱.۴ ، ۷.۱.۴ نتیجه می‌شود.

ملاحظه ۱۴.۱.۴. *برای* $p \in \{۱, \dots, ۴\}$ *مجموعه‌ی* $A_p(f)$ *را می‌توان به‌صورت زیر هم تعریف کرد:*

$$\begin{aligned} A_p(f) = \{ & s \in P(f) : \exists (a \le t_۱ < \cdots < t_i \le x_i) \text{و} \\ & (x_{i+j} < t_{n+i+j+۲} < \cdots < t_{N+۱} \le b) \text{به‌طوری که}, \\ & (-۱)^{r+p}(f-s)(t_r) = \|f-s\|, r = ۱, ۲, \dots, i, \\ & \delta_p(-۱)^r(f-s)(t_r) = \|f-s\|, r = n+i+j+۲, \dots, N+۱\}. \end{aligned}$$

که در آن اگر $p = ۱, ۲$ آنگاه $\delta_p = ۱$ و اگر $p = ۳, ۴$ آنگاه $\delta_p = -۱$.

لم ۱۵.۱.۴. *اگر* $k \le n + ۱$ *و* $f \in C[a, b]$*، آنگاه برای هر* $s_\circ \in P(f)$ *تابع* $f - s_\circ$ *دارای حداکثر* i *نقطه حدی متناوب در* $[a, x_i)$ *و حداکثر* $k + ۱ - i - j$ *نقطه حدی متناوب در* $(x_{i+j}, b]$ *است.*

برهان. فرض خلف: فرض کنید تابع $s_\circ \in P(f)$ موجود باشد به‌طوری که $f - s_\circ$ دارای حداقل $i + ۱$ نقطه حدی متناوب در $[a, x_i)$ باشد. از لم ۱۰.۱.۴ اگر $k \le n + ۱$، فاصله یکتای $[x_i, x_{i+j}]$ موجود است به‌طوری که برای $s_\circ \in P(f)$، $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f روی $[x_i, x_{i+j}]$ است. از اثبات لم ۱۳.۱.۴ می‌توان گفت، عدد صحیح $q < i$ موجود است به‌طوری که $s_\circ$ بهترین تقریب قویاً یکتای f روی $[x_q, x_{i+j}]$ است، که این متناقض با تعریف فاصله یکتای $[x_i, x_{i+j}]$ است، پس فرض خلف باطل و $f - s_\circ$ دارای حداکثر i نقطه حدی متناوب در $[a, x_i)$ است. همچنین این اثبات برای $(x_{i+j}, b]$ با در نظر گرفتن این فاصله به‌جای فاصله‌ی $[a, x_i)$ برقرار است. □

قضیه ۱۶.۱.۴. *برای* $k \le n + ۱$ *و* $f \in C[a, b]$*، روابط زیر برقرارند:*

۱. *برای* $p \in \{۱, \dots, ۴\}$ *مجموعه‌ی* $A_p(f)$ *تهی و یا تک عضوی است.*

۲. *عدد صحیح* $p \in \{۱, \dots, ۴\}$ *موجود است به‌طوری که* $A_p(f)$ *ناتهی است.*

برهان. به [12] رجوع شود. □

لم ۱۷.۱.۴. *اگر* $k \le n + ۱$ *و* $f \in C[a, b]$*، آنگاه* $\tilde{A}_۱(f) \subset A_۳(f)$.

برهان. فرض کنید $s \in \tilde{A}_۱(f)$ نشان می‌دهیم $s \in A_۳(f)$.
از تعریف مجموعه $\tilde{A}_p(f)$ مجموعه $\tilde{M}(s) = \{t_۱, \dots, t_{N+۱}\}$ موجود است به‌طوری که

$$a \le t_۱ < \cdots < t_{N+۱} \le b, \quad D(\tilde{M}(s)) \neq \circ,$$

و

$$(-۱)^{r+۱}(f-s)(t_r) = \|f-s\|, \quad r = ۱, ۲, \dots, N+۱.$$

چون $D(\tilde{M}(s)) \neq \circ$ از لم ۹.۱.۴، $t_i < x_i$ و $x_{i+j} < t_{n+i+j+۲}$. از ملاحظه‌ی ۱۴.۱.۴ $s \in A_۳(f)$ و حکم اثبات می‌شود. □

ملاحظه ۱۸.۱.۴. *قضیه‌ی ۱۶.۱.۴ نشان می‌دهد اگر $k \leq n+۱$، برای هر $f \in C[a,b]$ مجموعه‌ی $A_p(f)$ تهی یا تک عضوی و مجموعه نقاط حدی $M_۰$ با $D(M_۰) \neq ۰$ موجود است، بنابراین ما قادر به توصیف الگوریتم رِمِز هستیم. اما برای $k > n+۱$ تابع $f \in C[a,b]$ موجود است به‌طوری که، برای هر بهترین تقریب تابع f مانند $s_۰ \in S_{n,k}$، مجموعه نقاط حدی $M_۰$، با $D(M_۰) \neq ۰$ موجود نیست(مثال بعدی این موضوع را بیان می‌کند). برای $k > n+۱$ تابع اسپلاین نزدیک به بهترین تقریب $f \in C[a,b]$ است[به [11] رجوع شود].*

مثال ۱۹.۱.۴. فرض کنید $x_۰ = -۳$، $x_۱ = -۱$، $x_۲ = ۰$، $x_۳ = ۱$، $x_۴ = ۳$ و تابع $f \in C[-۳,۳]$ به‌صورت زیر تعریف شود

$$f(t) = \begin{cases} ۱ - ۲|t+۲|, & t \in [-۳,-۱], \\ \sin \frac{\pi}{۲} t, & t \in [-۱,۱], \\ -۱ + ۲|t-۲|, & t \in [۱,۳]. \end{cases}$$

$S_{n,k} = S_{۱,۳}$ که $s_{۱,۳}(x_۱,x_۲,x_۳)$ را در نظر می‌گیریم، پس $k > n+۱$. $s_۰ = ۰$ بهترین تقریب یکتای f است و خطای $f - s_۰$ دارای شش نقطه حدی زیر است

$$-۳, -۲, -۱, ۱, ۲, ۳.$$

اما برای مجموعه نقاط حدی $M_۰ = \{-۳,-۲,-۱,۱,۲,۳\}$، چون $D(M_۰) = ۰$. در نتیجه مجموعه نقاط حدی $M_۰$، با $D(M_۰) \neq ۰$ موجود نیست.

۲.۴ بهترین تقریب تابع $f \in C[a,b]$ در مجموعه توابع اسپلاین

در این بخش به توصیف الگوریتم رِمِز برای یافتن بهترین تقریب تابع اسپلاین از درجه n با k گره ثابت می‌پردازیم. قبل از توصیف الگوریتم مقدمات مورد نیاز را بیان می‌کنیم.

اگر $S_{n,k}$ زیرفضایی از توابع اسپلاین و $f \in C[a,b]$ در این‌صورت با توجه به تعریف ۱.۲.۱، تابع اسپلاین $s_۰ \in S_{n,k}$ بهترین تقریب f است هرگاه

$$\|f - s_۰\| = d(f, S_{n,k}).$$

همان‌طور که در فصل قبل توضیح دادیم الگوریتم رِمِز یک روش تکراری است. به‌طور کلی در گام mام مجموعه‌ی $M_m = \{t_{۱,m}, \dots, t_{N+۱,m}\}$ شامل $N+۱$ نقطه در فاصله‌ی داده شده را با خواص زیر در نظر می‌گیریم

$$a \leq t_{۱,m} < \cdots < t_{N+۱,m} \leq b, \quad D(M_m) \neq ۰.$$

چون $D(M_m) \neq ۰$، تابع اسپلاین یکتای $s_m \in S_{n,k}$ و عدد حقیقی یکتای γ_m موجود است به‌طوری که

$$(f - s_m)(t_{r,m}) = (-۱)^r \gamma_m, \quad r = ۱, \dots, N+۱,$$

و

$$|(f - s_m)(t_{r,m})| = |\gamma_m|, \quad r = ۱, \dots, N + ۱. \tag{۴.۴}$$

که $|\gamma_m| \le d(f, S_{n,k})$. اگر

$$\|f - s_m\| = |\gamma_m|,$$

s_m بهترین تقریب است و الگوریتم متوقف می‌شود در غیر این‌صورت از قانون تعویض نقطه استفاده می‌کنیم و به مجموعه جدید $M_{m+۱}$ با $D(M_{m+۱}) \neq ۰$ می‌رسیم. چون $D(M_{m+۱}) \neq ۰$، تابع اسپلاین یکتای $s_{m+۱} \in S_{n,k}$ و عدد حقیقی یکتای $\gamma_{m+۱}$ با خواص فوق موجود است(این خواص برای $\tilde{M}_{m+۱}$ هم برقرار است)، همان‌طور که توضیح خواهیم داد بهترین تقریب را بدست می‌آوریم.

برای سهولت برای هر $t_{r,m+۱} \in I_{M_{m+۱}}$، قرار می‌دهیم

$$sgn(f - s_m)(t_{r,m+۱}) = \delta \cdot sgn(f - s_m)(t_{r,m}), \quad \delta = \pm ۱. \tag{۵.۴}$$

لم بعدی نشان می‌دهد دنباله‌ی $(|\gamma_m|)$ به‌طور یکنواخت صعودی است(این خاصیت برای دنباله‌ی $(|\tilde{\gamma}_m|)$ هم برقرار است).

لم ۱.۲.۴. *روابط زیر برقرارند:*

i) *برای هر* m، $|\gamma_m| \le |\gamma_{m+۱}|$.

ii) $|\gamma_m| < |\gamma_{m+۱}|$ *اگروتنها اگر درگام* mام t_m با $t_{l,m+۱}$ عوض شود و $D(t_{l,m+۱}) \neq ۰$.

برهان. (i) فرض کنید مجموعه M_m شامل $N + ۱$ نقطه با خواص زیر موجود باشد

$$a \le t_{۱,m} < \cdots < t_{N+۱,m} \le b, \quad D(M_m) \neq ۰.$$

پس رابطه‌ی (۴.۴) برقرار است و فرض کنید از روش تعویض نقطه به مجموعه جدید $M_{m+۱}$ با $D(M_{m+۱}) \neq ۰$ رسیدیم، چون $D(M_{m+۱}) \neq ۰$، می‌توانیم قرار دهیم

$$\gamma_{m+۱} = F_{m+۱}(f) = \frac{۱}{D(M_{m+۱})} \sum_{r=۱}^{N+۱} (-۱)^{N+r+۱} D(t_{r,m+۱})(f - s_m)(t_{r,m+۱}),$$

$F_{m+۱}$ تابع خطی روی $C[a, b]$ است و برای $s \in S_{n,k}$، $F_{m+۱}(s) = ۰$ و $|F_{m+۱}(f)| \le d(f, S_{n,k})$، است[به [9] صفحه‌ی ۱۰۵ رجوع شود]. فرض کنید $I_{M_{m+۱}} = [x_u, x_{u+v}]$ فاصله یکتا در لم ۹.۱.۴ باشد، قرار می‌دهیم

$$|F_{m+۱}(f)| = |F_m(f)| + \frac{۱}{|D(M_{m+۱})|} \sum_{r=۱}^{N+۱} |D(t_{r,m+۱})|.(|(f - s_m)(t_{r,m+۱})| - |F_m(f)|).$$

چون برای $r = ۱, \dots, N + ۱$، $|\gamma_m| = |(f - s_m)(t_{r,m})|$ پس برای هر m، $|\gamma_m| \le |\gamma_{m+۱}|$ و (i) اثبات می‌شود.

(ii) فرض کنید نقطه‌ی $t_{l,m+1}$ با نقطه‌ی t_m عوض شده باشد، داریم

$$|F_{m+1}(f)| = |F_m(f)| + \frac{1}{|D(M_{m+1})|}|D(t_{l,m+1})|.(|(f - s_m)(t_{l,m+1})| - |F_m(f)|),$$

اگر $D(t_{l,m+1}) = 0$ پس $|F_{m+1}(f)| = |F_m(f)|$ می‌شود.
واگر $D(t_{l,m+1}) \neq 0$ چون $|(f - s_m)(t_{l.m+1})| > |F_m(f)|$ داریم

$$|F_{m+1}(f)| > |F_m(f)|.$$

در نتیجه $|\gamma_m| < |\gamma_{m+1}|$ و اثبات کامل می‌شود(این لم برای همه‌ی $|\tilde{\gamma}_m|$)نیز برقرارهستند). □

لم ۲.۲.۴. *اگر برای هر m $|\gamma_m| < d_\varepsilon(f, S_{n,k})$، آنگاه زیردنباله‌ی (s_{m_p}) از (s_m) موجود است به‌طوری که برای هر p، $|\gamma_m| < |\gamma_{m_{p+1}}|$.*

برهان. باتوجه به لم قبل کافی است در گام mام، t_m با t_{l,m_p+1} عوض شود و $D(t_{l,m_p+1}) \neq 0$.
فرض کنید عدد صحیح $\tilde{m}$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $m \geq \tilde{m}$، داشته باشیم

$$|\gamma_{\tilde{m}}| < d_\varepsilon(f, S_{n,k}), \quad |\gamma_m| = |\gamma_{\tilde{m}}| = \gamma,$$

فرض خلف: فرض کنید در گام mام، برای $m \geq \tilde{m}$، t_m با t_{l,m_p+1} عوض شود و $D(t_{l,m_p+1}) = 0$.
برای تمام $m \in \{p, p+1, \dots, q\}$، $I_{M_{m+1}} = I_{M_m} = [x_u, x_{u+v}]$ درنظر می‌گیریم. t_m با t_{l,m_p+1} عوض می‌شود پس $t_m \notin I_{M_m}$، چون در غیر این‌صورت مطابق قانون تعویض نقطه که در توصیف الگوریتم بیان خواهیم کرد، یک نقطه از I_{M_m} باید با نقطه‌ی t_m عوض شود، این یعنی $D(t_{l,m_p+1}) \neq 0$ پس از لم ۹.۱.۴ $t_m \notin I_{M_m}$. قرار می‌دهیم $s_m = s_{1,m} + s_{2,m} + s_{3,m}$ جاییکه

$$s_{1,m}(t) = \sum_{r=0}^{n} a_{r,m}t^r + \sum_{r=u+1}^{u+v-1} b_{r,m}(t - x_r)_+^n,$$
$$s_{2,m}(t) = \sum_{r=1}^{u} c_{r,m}(t - x_r)_+^n,$$
$$s_{3,m}(t) = \sum_{r=u+v}^{k} d_{r,m}(t - x_r)_+^n.$$

چون $I_{M_m} = I_{M_{m+1}} = [x_u, x_{u+v}]$، $s_m, s_{m+1} \in I_{M_m}$ از قضیه‌ی ۱۱.۱.۴ $s_m = s_{m+1}$.
فرض کنید تابع $\tilde{s} \in S_{n,k}$ موجود است، به‌طوری که $\lim_{m\to\infty} \|s_m - \tilde{s}\|_{B_\varepsilon} = 0$. با عوض کردن نقطه‌ی t_m با توجه به آنچه در توصیف الگوریتم برای نقطه t_m خواهیم گفت، داریم

$$|(f - s_m)(t_m)| \geq c\|f - s_m\|_{B_\varepsilon} + (1 - c)\gamma \geq c.d_\varepsilon(f, S_{n,k}) + (1 - c)\gamma > \gamma,$$

چون $\gamma < d_\varepsilon(f, S_{n,k})$ و $0 < c \leq 1$. همچنین داریم

$$|(f - s_{m+1})(t_m)| = |\gamma_m| = \gamma.$$

فرض کنید (t_{m_p}) دنباله‌ای از (t_m) همگرا به نقطه‌ی $\tilde{t} \in B_\varepsilon$ باشد. از این همگرایی داریم

$$|(f-\tilde{s})(\tilde{t})| > \gamma, \quad |(f-\tilde{s})(\tilde{t})| = \gamma.$$

به تناقض رسیدیم، پس فرض خلف باطل و در گام mام، t_m با t_{l,m_p+1} عوض می‌شود و $D(t_{l,m_p+1}) \neq 0$.

از لم قبل $|\gamma_{m_p+1}| > |\gamma_m|$ و حکم برقرار است(این لم برای همه‌ی $|\tilde{\gamma}_m|$)نیز برقراراست). □

۱.۲.۴ توصیف الگوریتم

حال به توصیف الگوریتم می‌پردازیم. باتوجه به ملاحضه‌ی ۱۸.۱.۴ دو حالت داریم:

حالت اول، فرض کنید $k \le n+1$.

بخش اول: $\varepsilon > 0$ (که ε به اندازه کافی کوچک است) را انتخاب می‌کنیم، قرار می‌دهیم

$$B_\varepsilon = [a,b] \setminus \{(x_r-\varepsilon, x_r) \cup (x_r, x_r+\varepsilon) \colon r = 1,\dots,k\}.$$

در ابتدا مجموعه‌ی $M_1 = \{t_{1,1},\dots,t_{N+1,1}\}$ را با خواص زیر در نظر می‌گیریم

$$a \le t_{1,1} < \cdots < t_{N+1,1} \le b, \quad D(M_1) \neq 0.$$

چون $D(M_1) \neq 0$، تابع اسپلاین یکتای $s_1 \in S_{n,k}$ و عدد حقیقی یکتای γ_1 موجوداند به‌طوری که

$$(f-s_1)(t_{r,1}) = (-1)^r \gamma_1, \quad r = 1,\dots,N+1,$$

و برای $d_\varepsilon(f,S_{n,k}) = \inf\{\|f-s\|_{B_\varepsilon} \colon s \in S_{n,k}\}$، $|\gamma_1| \le d_\varepsilon(f,S_{n,k})$.

گام mام $(m \ge 1)$ را به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم:

اگر $\|f-s_m\|_{B_\varepsilon} \le |\gamma_m|$، می‌دانیم $|\gamma_m| \le d_\varepsilon(f,S_{n,k})$، چون $B_\varepsilon \subset [a,b]$ پس

$$d_\varepsilon(f,S_{n,k}) \le d(f,S_{n,k}),$$

در نتیجه

$$\|f-s_m\|_{B_\varepsilon} \le d(f,S_{n,k}),$$

s_m بهترین تقریب f است و الگوریتم متوقف می‌شود.

اما اگر $\|f-s_m\|_{B_\varepsilon} > |\gamma_m|$، نقطه

$$t_m \in \{t \in B_\varepsilon \colon |(f-s_m)(t)| \ge c\|f-s_m\|_{B_\varepsilon} + (1-c)|\gamma_m|\}, \quad (0 < c \le 1),$$

را انتخاب می‌کنیم. ($|(f-s_m)(t_m)|$ مناسب، نزدیک به $\|f-s_m\|_{B_\varepsilon}$ انتخاب شده است) نقطه t_m را با یک نقطه از مجموعه‌ی M_m طوری عوض می‌کنیم، که به مجموعه جدید $M_{m+1} = \{t_{1,m+1},\dots,t_{N+1,m+1}\}$ با خواص زیر برسیم:

$$a \le t_{1,m+1} < \cdots < t_{N+1,m+1} \le b, \quad D(M_{m+1}) \neq 0.$$

حال نشان می‌دهیم کدام نقطه از مجموعه‌ی M_m را با نقطه‌ی t_m عوض می‌کنیم:

فرض کنید $I_{M_m} = [x_{i_m}, x_{i_m+j_m}]$ فاصله یکتا در لم ۹.۱.۴ باشد و نقطه‌ی $t_{p,m}$ اولین نقطه از مجموعه‌ی $M_m \cap I_{M_m}$ و نقطه‌ی $t_{q,m}$ آخرین نقطه از مجموعه‌ی $M_m \cap I_{M_m}$ باشد. همچنین برای سهولت قرار می‌دهیم $h_m = f - s_m$.

قانون تعویض نقطه

اگر $t_m < t_{1,m}$ و $h_m(t_m)h_m(t_{1,m}) > 0$، آنگاه نقطه‌ی $t_{1,m}$ را با نقطه‌ی t_m عوض می‌کنیم و اگر $h_m(t_m)h_m(t_{1,m}) < 0$ آنگاه نقطه‌ی $t_{q,m}$ را با نقطه‌ی t_m عوض می‌کنیم.

اگر $t_m > t_{N+1,m}$ و $h_m(t_m)h_m(t_{N+1,m}) > 0$، آنگاه نقطه‌ی $t_{N+1,m}$ را با نقطه‌ی t_m و اگر $h_m(t_m)h_m(t_{N+1,m}) < 0$، آنگاه نقطه‌ی $t_{p,m}$ را با نقطه‌ی t_m عوض می‌کنیم.

اگر $t_{r,m} < t_m < t_{r+1,m}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

اگر $t_{l,m}$ نقطه‌ای در $\{t_{r,m}, t_{r+1,m}\}$ با $h_m(t_m)h_m(t_{l,m}) > 0$، نقطه‌ی $t_{l,m}$ را با نقطه‌ی t_m عوض می‌کنیم، به‌طوری که برای مجموعه جدید M_{m+1}، $D(M_{m+1}) \neq 0$. در غیر این‌صورت اگر $t_m \in (t_{q,m}, b]$، نقطه‌ی $t_{p,m}$ را با نقطه‌ی t_m و اگر $t_m \in [a, t_{p,m})$، نقطه‌ی $t_{q,m}$ را با نقطه‌ی t_m عوض می‌کنیم.

حال به مجموعه جدید $M_{m+1} = \{t_{1,m+1}, \dots, t_{N+1,m+1}\}$ با خواص زیر می‌رسیم

$$a \le t_{1,m+1} < \cdots < t_{N+1,m+1} \le b, \quad D(M_{m+1}) \neq 0,$$

چون $D(M_{m+1}) \neq 0$، تابع اسپلاین یکتای $s_{m+1} \in S_{n,k}$ و عدد حقیقی یکتای γ_{m+1} موجوداند به‌طوری که

$$(f - s_{m+1})(t_{r,m+1}) = (-1)^r \gamma_{m+1}, \quad r = 1, \dots, N+1.$$

می‌دانیم $|\gamma_{m+1}| > |\gamma_m|$ اگروتنها‌اگر یک نقطه از M_m با نقطه‌ی $t_m \in I_{M_m}$ عوض شود. از لم ۱.۲.۴ داریم

$$\begin{aligned}
|\gamma_{m_p+1}| &\ge |\gamma_{m_p}| + \frac{1}{|D(M_{m_p+1})|}|D(t_{l,m_p+1})|.(|(f - s_{m_p})(t_{l,m_p+1})| - |\gamma_{m_p}|) \\
&\ge |\gamma_{m_p}| + \frac{1}{|D(M_{m_p+1})|}|D(t_{l,m_p+1})|.(c\|f - s_{m_p}\|_{B_\varepsilon} \\
&\quad + (1-c)|\gamma_{m_p}| - |\gamma_{m_p}|),
\end{aligned}$$

جایی‌که $0 < c \le 1$، چون $(|\gamma_{m_p}|)$ به‌طور یکنواخت صعودی است، اگر $p \to \infty$ داریم

$$c\|f - s_{m_p}\|_{B_\varepsilon} - c|\gamma_{m_p}| \le |D(M_{m_p+1})| \frac{|\gamma_{m_p+1}| - |\gamma_{m_p}|}{|D(t_{l,m_p+1})|} \to 0,$$

پس

$$\lim_{p\to\infty} (\|f - s_{m_p}\|_{B_\varepsilon} - |\gamma_{m_p}|) \to 0,$$

در نتیجه، اگر زیردنباله‌ی s_{m_p} از s_m با شرط $|\gamma_{m_p+1}| \le |\gamma_{m_p}|$ برای هر p موجود باشد، داریم

$$\lim_{p\to\infty} \|f - s_{m_p}\|_{B_\varepsilon} = |\gamma_{m_p}|, \tag{۶.۴}$$

درغیر این‌صورت(یعنی چنین زیردنباله‌ای نباشد)

$$\lim_{m\to\infty} \|f - s_m\|_{B_\varepsilon} = |\gamma_m|, \tag{۷.۴}$$

در هر دو حالت q به اندازه کافی بزرگ موجود است به‌طوری که

$$\frac{\|f - s_q\|_{B_\varepsilon}}{|\gamma_q|},$$

نزدیک به ۱ است.

اگر $\|f - s_q\|_{[a,b]} \leq |\gamma_q| \leq d(f, S_{n,k})$، s_q بهترین تقریب f است و الگوریتم متوقف می‌شود.
درغیر این‌صورت به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم:

بخش دوم: فرض کنید $I_{M_q} = [x_{i_q}, x_{i_q+j_q}]$ فاصله یکتا در لم ۹.۱.۴ باشد. قرار می‌دهیم

$$R_۱ = \{r\colon r \leq i_q, t_{r,q} \in (x_r - ۲\varepsilon, x_r - \varepsilon]\},$$

و

$$R_۲ = \{r\colon r \geq i_q + j_q, t_{n+r+۲,q} \in [x_r + \varepsilon, x_r + ۲\varepsilon)\},$$

اگر $R_۱ \cup R_۲ = \phi$، مانند بخش اول ادامه می‌دهیم، $\tilde{s}_m$ بهترین تقریب f را می‌یابیم و الگوریتم متوقف می‌شود. اما اگر $R_۱ \cup R_۲ \neq \phi$، به‌دلیل زیر باید از شیوه‌ای اصلاح شده استفاده کنیم.

در محاسبه‌ی s_m عبارت $۱/D(M_m)$ ظاهر می‌شود. چون $R_۱ \cup R_۲ \neq \phi$ از لم ۹.۱.۴ مقدار $|D(M_q)|$ کوچک است و انتظار می‌رود مقدار $|D(M_m)|$ که $m > q$، هم اگر به‌صورت بخش اول ادامه دهیم کوچک شود، بنابراین محاسبه‌ی s_m عددی نمی‌شود.

پس به شیوه‌ی زیر عمل می‌کنیم:

فرض کنید $R_۱ \cup R_۲ = \phi$، مانند بخش اول عمل می‌کنیم و قرار می‌دهیم $\tilde{s}_q = s_q$، $\tilde{M}_q = M_q$ و $\tilde{\gamma}_q = \gamma_q$.

گام mام $(m \geq q)$ را به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم:

اگر $\|f - \tilde{s}_m\|_{B_{۲\varepsilon}} \leq |\tilde{\gamma}_m|$ چون $|\tilde{\gamma}_m| \leq d(f, S_{n,k})_\varepsilon \leq d(f, S_{n,k})$ پس $\tilde{s}_m$ بهترین تقریب f است و الگوریتم متوقف می‌شود.

اما اگر $\|f - \tilde{s}_m\|_{B_{۲\varepsilon}} > |\tilde{\gamma}_m|$ آنگاه نقطه‌ی $\tilde{t}_{l,m} \in \tilde{M}_m$ را با نقطه‌ی

$$\tilde{t}_m \in \{t \in B_{۲\varepsilon}\colon |(f - \tilde{s}_m)(t)| \geq c\|f - \tilde{s}_m\|_{B_{۲\varepsilon}} + (۱ - c)|\tilde{\gamma}_m|\}, \quad (\circ < c \leq ۱),$$

عوض می‌کنیم. که $\tilde{t}_{l,m}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر $\tilde{t}_m < \tilde{t}_{۱,m}$ آنگاه نقطه‌ی $\tilde{t}_{۱,m}$ را با نقطه‌ی $\tilde{t}_m$ و اگر $\tilde{t}_m > \tilde{t}_{N+۱,m}$ آنگاه نقطه‌ی $\tilde{t}_{N+۱,m}$ را با نقطه‌ی $\tilde{t}_m$ عوض می‌کنیم. اگر $\tilde{t}_{r,m} < \tilde{t}_m < \tilde{t}_{r+۱,m}$ آنگاه نقطه‌ی $\tilde{t}_{l,m} \in \{\tilde{t}_{r,m}, \tilde{t}_{r+۱,m}\}$ را با نقطه‌ی $\tilde{t}_m$ که $\tilde{h}_m(\tilde{t}_m)\tilde{h}_m(\tilde{t}_{l,m}) > \circ$ عوض می‌کنیم، به‌طوری که برای مجموعه جدید $\tilde{M}_{m+۱}$، $I_{\tilde{M}_{m+۱}} = I_{\tilde{M}_m}$ و $D(\tilde{M}_{m+۱}) \neq \circ$. چون $D(\tilde{M}_{m+۱}) \neq \circ$، تابع اسپلاین یکتای $\tilde{s}_{m+۱} \in S_{n,k}$ و عدد حقیقی $\tilde{\gamma}_{m+۱}$ موجوداند، به‌طوری که

$$(f - \tilde{s}_{m+۱})(\tilde{t}_{r,m+۱}) = (-۱)^r \tilde{\gamma}_{m+۱}, \quad r = ۱, \ldots, N + ۱.$$

مانند بخش اول ادامه می‌دهیم $\tilde{s}_q$ بهترین تقریب f است و الگوریتم متوقف می‌شود.

حال فرض کنید $R_۱ \cup R_۲ \neq \phi$ (این حالت فقط در موارد استثنایی رخ می‌دهد).

ابتدا مجموعه جدید $\tilde{M}_{q+۱}$ را با تغییر مجموعه M_q می‌سازیم. قرار می‌دهیم

$$u = \begin{cases} \max\{r : r \in R_۱\} & , R_۱ \neq \phi, \\ ۰ & , R_۱ = \phi. \end{cases}$$

و

$$v = \begin{cases} \min\{r : r \in R_۲\} & , R_۲ \neq \phi, \\ k+۱ & , R_۲ = \phi. \end{cases}$$

حال تمام نقاط $[a,b]\backslash[x_u, x_v]$ را از مجموعه‌ی M_q حذف می‌کنیم و نقاط دلخواه $([a,b]\backslash[x_u,x_v])\cap B_{۲\varepsilon}$ را طوری اضافه می‌کنیم، که مجموعه جدید $\tilde{M}_{q+۱}$ شامل $N+۱$ نقطه با $D(\tilde{M}_{q+۱}) \neq ۰$ به‌دست بیاید.

چون $D(\tilde{M}_{q+۱}) \neq ۰$، تابع اسپلاین یکتای $\tilde{s}_{q+۱} \in S_{n,k}$ و عدد حقیقی یکتای $\tilde{\gamma}_{q+۱}$ موجوداند به‌طوری که

$$(f - \tilde{s}_{q+۱})(\tilde{t}_{r,q+۱}) = \delta_r(-۱)^r \tilde{\gamma}_{q+۱}, \quad r = ۱, \ldots, N+۱,$$

برای هر $r \in \{u+۱, \ldots, n+v+۱\}$، $\delta_r = ۱$ و

برای هر $r \in \{۱, \ldots, u, n+v+۲, \ldots, N+۱\}$، $\delta_r = -۱$.

گام mام $(m > q)$ را به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم:

اگر $\|f - \tilde{s}_m\|_{B_{۲\varepsilon}} \leq |\tilde{\gamma}_m|$، پس $\tilde{s}_m$ بهترین تقریب f است و الگوریتم متوقف می‌شود.

اگر $\|f - \tilde{s}_m\|_{B_{۲\varepsilon}} > |\tilde{\gamma}_m|$، نقطه‌ی $\tilde{t}_{l,m} \in \tilde{M}_m$ را با نقطه‌ی

$$\tilde{t}_m \in \{t \in B_{۲\varepsilon} : |(f - \tilde{s}_m)(t)| \geq c\|f - \tilde{s}_m\|_{B_{۲\varepsilon}} + (۱-c)|\tilde{\gamma}_m|\}, \quad (۰ < c \leq ۱),$$

عوض می‌کنیم. که $\tilde{t}_{l,m}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر $\tilde{t}_m < \tilde{t}_{۱,m}$ آنگاه نقطه‌ی $\tilde{t}_{۱,m}$ را با نقطه‌ی $\tilde{t}_m$ و اگر $\tilde{t}_m > \tilde{t}_{N+۱,m}$، آنگاه نقطه‌ی $\tilde{t}_{N+۱,m}$ را با نقطه‌ی $\tilde{t}_m$ عوض می‌کنیم. اگر $\tilde{t}_{r,m} < \tilde{t}_m < \tilde{t}_{r+۱,m}$، آنگاه نقطه‌ی $\tilde{t}_{l,m} \in \{\tilde{t}_{r,m}, \tilde{t}_{r+۱,m}\}$ را با نقطه‌ی $\tilde{t}_m$ که $\tilde{h}_m(\tilde{t}_m)\tilde{h}_m(\tilde{t}_{l,m}) > ۰$ عوض می‌کنیم، به‌طوری که برای مجموعه جدید $\tilde{M}_{m+۱}$، $I_{\tilde{M}_{m+۱}} = I_{\tilde{M}_m}$ و $D(\tilde{M}_{m+۱}) \neq ۰$. چون $D(\tilde{M}_{m+۱}) \neq ۰$، تابع اسپلاین یکتای $\tilde{s}_{m+۱} \in S_{n,k}$ و عدد حقیقی یکتای $\tilde{\gamma}_{m+۱}$ موجوداند، به‌طوری که

$$(f - \tilde{s}_{m+۱})(\tilde{t}_{r,m+۱}) = \delta_r(-۱)^r \tilde{\gamma}_{m+۱}, \quad r = ۱, \ldots, N+۱.$$

برای هر $r \in \{u+۱, \ldots, n+v+۱\}$، $\delta_r = ۱$ و

برای هر $r \in \{۱, \ldots, u, n+v+۲, \ldots, N+۱\}$، $\delta_r = -۱$.

مانند بخش اول $\tilde{s}_q$ بهترین تقریب f است و الگوریتم متوقف می‌شود.

حالت دوم، فرض کنید $k > n+۱$.

دقیقا مانند بخش اول الگوریتم، برای $k \leq n + ۱$ عمل می‌کنیم و تابع s_q را می‌یابیم. قرار می‌دهیم $\tilde{s}_q = s_q$ و مانند بخش دوم الگوریتم، برای $k \leq n + ۱$ زمانی‌که $R_۱ \cup R_۲ = \phi$ الگوریتم را ادامه می‌دهیم. فقط $B_{۲\varepsilon}$ را با B_ε عوض می‌کنیم و دنباله‌ی $\tilde{s}_m$ همگرا به تابع $s_۰^{(\varepsilon)} \in S_{n,k}$ به‌طوری که $\|f - s_۰^{(\varepsilon)}\|_{B_\varepsilon} = d(f, S_{n,k})$ را می‌یابیم. در واقع تابع اسپلاین $s_۰^{(\varepsilon)}$ نزدیک به بهترین تقریب f است [به [11] رجوع شود].

توجه ۳.۲.۴. لازم به‌ذکر است همان‌طور که گفتیم برای روابط (۷.۴) و (۶.۴)، q به اندازه‌ی کافی بزرگ موجود است به‌طوری که در بخش اول s_q و دربخش دوم $\tilde{s}_q$ بهترین تقریب f می‌باشد. توجه می‌کنیم در هر دو حالت دنباله $s_m(\tilde{s}_m)$، دقیقا همگرا به بهترین تقریب f است.

مراجع

[1] Carothers N.L. (1988),”A Short Course on Approximation Theory” **Bowling Green state University**.

[2] Cheney E.W. (1966), ”Introduction to Approximation Theory” **McGraw-Hill**.

[3] Daili N. and Guesmia A. (2013), ”Remez Algorithm Applied to the Best Uniform Polynomial Approximations” **General mathematics Notes**, Vol. 17,1, pp 16-31.

[4] Davis P.J. (1975), ”Interpolation and Approximation-Dover Publications”**NewYork**.

[5] De la Vallee Poussin C. J. (1910), ”Sur les polynomes approximation et la representation approchee dun angle” **Academie Royale de belgique, Bulletins de la Classe des Sciences**.

[6] Deutsch F. (2001), ”Best Approximation in Inner Product Spaces” **Universite Laval,Springer-verlag Newyork**.

[7] Folland G. B. (1999), ”Real Analysis Modern Techniques and Their Applications 2nd Edition” **Wiley**.

[8] Karlin S. (1968), ”Total Positivity” **Stanford University Press**.

[9] Meinardus G. (1967),”Approximation of functions, Theory and numerical methods” **newyork**.

[10] Nürnberger G. (1980),”Strong uniqueness of best approximations and weak Chebyshev systems”.

[11] Nürnberger G. and Sommer M. (1983),”A Remez type algorithm for spline functions” **Numer. Mathematic** Vol. 41, pp. 207-221.

[12] Nürnberger G. and Sommer M. (1983), ”Alternation for best spline approximations” **Numer. Mathematic** Vol. 41, pp 117-146.

[13] Powell M.J.D. (1981), ”Approximation Theory and Methods” **Cambridge University Press, Cambridge, UK**.

[14] Remez E.Y. (1969), ”Fundamentals of Numerical Methods for Chebyshev Approximations” **Naukova Dumka, Kiev**.

[15] Rice J.R. (1964), ”The Approximation of Functions” **Addison-Wesley**, Vol.1.

[16] Rivlin T.J. (1981),”An Introduction to the approximation of function” **Dover Bookson mathematics, newyork**.

[17] Wasowicz S. (2003), ”Haar spaces and polynomial selections” **Mathematica pannonica** Vol. 14,1, pp 63-77.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الگوریتم	Algorithm
الگوریتم رِمِز	Remez Algorithm
بهترین تقریب	Best Approximation
پروکسیمینال	Proximinal
تکنیک معاوضه	Exchange techniques
توپولوژی	Topology
تابع اسپلاین	Spline function
تابع خطا	Error function
تقریبا فشرده	Approximation Compact
چبیشف ضعیف	Weak chebyshev
چندجمله‌ای	Polynomial
خطای تقریب	Approximation error
دنباله همگرا	Convergent sequence
عملگر	Operator
فاصله (+)	(+) interval
فاصله (−)	(-) interval
فضای هیلبرت	Hilbert Space
فضای متریک	Metric space
فضای ضرب داخلی	Inner product space
قانون متوازی‌الاضلاع	Parallelogram law
قویاً یکتا	Strongly Unique
کامل	Complete
کراندار	Bounded
متناهی البعد	Finite Dimensional
مجموعه قابل قبول	Set admissible

مجموعه متناوب .... Alternating set

محدب .... Convex

نقطه حدی .... Extreme point

نامساوی کشی شوارتز .... Cauchy − Showartz inequality

نامساوی مثلث .... Triangle inequality

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

الگوریتم .... Algorithm
مجموعه متناوب .... Alternating set
خطای تقریب .... Approximation error
کراندار .... Bounded
بهترین تقریب .... Best Approximation
دنباله همگرا .... Convergent sequence
نامساوی کشی شوارتز .... Cauchy − Showartz inequality
کامل .... Complete
دنباله همگرا .... Convergent sequence
محدب .... Convex
نقطه حدی .... Extreme point
تکنیک معاوضه .... Exchange techniques
تابع خطا .... Error function
متناهی البعد .... Finite Dimensional
فضای هیلبرت .... Hilbert Space
فضای ضرب داخلی .... Inner product Space
فاصله (+) .... (+) interval
فاصله (−) .... (-) interval
فضای متریک .... Metric space
عملگر .... Operator
قانون متوازی‌الاضلاع .... Parallelogram law
چندجمله‌ای .... Polynomial
پروکسیمینال .... Proximinal
الگوریتم رِمِز .... Remez Algorithm
مجموعه قابل قبول .... Set admissible

نمایه

Aabstract

In This paper, we investigate a series of successive and repetitive processes that lead to the best approximation. We introduce this process remez algorithm. Expressing approximation theorem, obtains approximation of a function $f \in C[a, b]$ in set of polynomials is a polynomial of degree most n and show existence and uniqueness of the best approximation. Finally by remez algorithm computing best spline function approximation of degree n with k fixed knots.

Keywords: best approximation, Remez algorithm, Weak chebyshev, Spline function.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

The application of Remez algorithm in Best Approximation theory

Mansooreh Asghari

Supervisor

Dr Mahdi Iranmanesh

December 2016