

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل تقارنی معادلات برهمکنش الکترون-موج الکترومغناطیسی با اثر دوپلر غیرعادی

معصومه مهدوی

استاد راهنما

سید رضا حجازی

استاد مشاور

نیما آزادی طینت

آبان ۱۳۹۵

تقدیم بہ

محترم عزیز مریم

سپاس‌گزاری...

سپاس و ستایش پروردگار یکتا را که چراغ توفیق را فرا راهم نهاد تا این مرحله از زندگی علمی خویش را با سربلندی پشت سر گذاشته، و به من توفیق کسب مدارج علمی را داد. برخود لازم می‌دانم که از همه اساتیدی که به نحوی حق تعلیم و تربیت را برگردنم دارند، تشکر و سپاس‌گزاری نمایم.

بخصوص از اساتید ارجمند، جناب آقای دکتر سید رضا حجازی که با راهنمایی‌های خود مرا در این مراحل همراهی کردند. جناب آقای دکتر نیما آزادی طینت که زحمت مشاوره این پایان نامه را بعهده داشتند. همچنین اساتید ارجمند جناب آقای دکتر خدای و دکتر بی تقصیر فدافن، که داوری این پایان نامه را بعهده گرفتند قدردانی و سپاس ویژه دارم.

این تلاش علمی خود را تقدیم به تمام کسانی می‌کنم که در طول دوران تحصیل برایم زحمات فراوان کشیده اند و همواره مشوق و همراه بودند. پدر و مادر دلسوزم بخاطر زحمات بی دریغشان، برادرم که همواره در زندگی تکیه گاه و مایه دلگرمی من می‌باشد. به ویژه همسر من که با مهربانیش سختی‌های مسیر را برایم تسهیل نمود.

معصومه مهدوی
آبان ۱۳۹۵

تعمدنامه

اینجانب معصومه مهدوی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان تحلیل تقارنی معادلات برهمکنش الکترون- موج الکترومغناطیسی با اثر دوپلر غیرعادی، تحت راهنمایی سید رضا حجازی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

معصومه مهدوی
آبان ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه، روش تقارن لی را برای معادلات برهمکنش نوسانگر سیکلوترون الکترون با موج الکترومغناطیسی آرام تحت شرایط اثر دوپلر غیر عادی، به منظور یافتن و تحلیل ناوردهای تجانس دستگاه و جوابهای خودمتشابه مورد مطالعه قرار می‌دهیم. جوابهای خودمتشابه تقویت و فشردگی یک پالس الکترومغناطیسی را توصیف می‌کنند و نتایج بدست آمده با تحلیل تئوری و شبیه سازی عددی تصدیق می‌شوند.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی، تقارن معادلات دیفرانسیل، جوابهای گروه-ناوردا، اثر دوپلر غیرعادی، جوابهای خودمتشابه، فشردگی پالس.

فهرست مطالب

۱	پیشگفتار
۳	۱ تعاریف مقدماتی
۳	۱.۱ منیفلد
۵	۲.۱ فضای مماسی
۸	۳.۱ کلاف برداری
۹	۴.۱ میدان برداری
۱۲	۵.۱ فرم‌های دیفرانسیلی
۱۵	۶.۱ گروه لی
۱۶	۷.۱ جبر لی
۲۰	۸.۱ نگاشت نمایی
۲۰	۹.۱ مولد بی‌نهایت کوچک
۲۲	۱۰.۱ ناوردایی بی‌نهایت کوچک
۲۵	۲ ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل
۲۵	۱.۲ تبدیلات و توابع
۲۸	۲.۲ امتداد دهی و فضای جت
۲۹	۳.۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل
۳۰	۴.۲ امتداد دهی عمل گروه
۳۱	۵.۲ امتداد میدان‌های برداری و تقارن‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل
۳۷	۶.۲ تبدیلات هم‌ارز
۴۰	۷.۲ کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل جزئی
۴۷	۳ تقارنهای لی و جواب‌های معادله برهمکنش الکترون-الکترومغناطیسی تحت اثر دوپلر غیر عادی
۴۹	۱.۳ گروه تقارنی معادله
۵۴	۲.۳ جواب‌های ناوردای گروهی معادله

۳.۳	جواب‌های خود متشابه	۵۵
۴.۳	جواب‌های خود متشابه با فرکانس مدوله شده	۵۷
	مراجع	۵۹
	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۶۱
	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۶۵
	نمایه	۶۹

پیشگفتار

مطالعه روش‌های جدید برای حل معادلات دیفرانسیل موضوع مورد علاقه ریاضیدانان می‌باشد. استفاده از روش لی در حل معادلات دیفرانسیل یکی از این روش‌هاست. از دیدگاه ریاضیات این روش یک ابزار مناسب برای مطالعه مسائل مربوط به علم و تکنولوژی می‌باشد، که مستقل از نوع معادله (خطی یا غیرخطی) و متغیرهای موجود در معادلات است. ماریوس سوفوس لی^۱ سال ۱۸۷۴ را به عنوان تاریخ تولد نظریه خود از گروه‌های لی معرفی کرد. برخی از ایده‌های اولیه لی با همکاری فلیکس کلاین^۲ در پی یافتن رابطه واضح تری بین هندسه و نظریه گروه‌ها پدیدار شد.

در اواسط قرن نوزدهم لی حل معادلات دیفرانسیل را توسط گروه‌های تقارنی مورد بررسی قرار دارد. کاربرد گروه‌های لی در معادلات دیفرانسیل، برای اولین بار توسط لی و امی نوتر^۳ بنیان گذاری شد و مدت‌ها بعد توسط الی جوزف کارتان^۴ در هندسه دیفرانسیل به سبک کنونی معنا یافت. از آن پس تحقیقات گسترده‌ای در تعمیم کاربرد گروه لی انجام شد، به‌طوری‌که اووزیانیکوف^۵ در این زمینه به تاسیس موسسه‌ای در اتحاد جماهیر شوروی همت گمارد. گروه تقارن دستگاهی از معادلات دیفرانسیل، بزرگترین گروه موضعی از تبدیلات است که بر متغیرهای مستقل و وابسته دستگاه عمل می‌کند با این خاصیت که جواب‌ها را به جواب‌های دیگر منتقل می‌سازد.

همچنین گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل این امکان را به ما می‌دهد تا با کاهش مرتبه معادله جواب آن را با انتگرال‌گیری به‌دست آوریم، بدیهی است که در حالتی که معادله مرتبه یک باشد، با این روش جواب عمومی نیز حاصل می‌گردد ولی در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی نمی‌توان جواب عمومی را به واسطه گروه تقارن به‌دست آورد. در چنین شرایطی تنها برخی از جواب‌ها حاصل می‌گردند که تحت برخی از زیرگروه‌های گروه تقارن ناوردا می‌باشند. این جواب‌ها به جواب‌های ناورداي گروهی موسوم بوده و شامل تعداد متغیر مستقل کمتری نسبت به دستگاه اصلی می‌باشد.

^۱Marius Sophus Lie

^۲Felix Klein

^۳Emmy Noether

^۴Eli Joseph Cartan

^۵Ovsianikov

با کشف الکترون و هسته اتم‌ها دانشمندان در جستجوی راه‌های شناختن این ذرات جدید به فکر شتاب دادن آن‌ها و برخورد دادن آن‌ها با یکدیگر و یا هدف‌های شناخته شده افتادند. این کار ابتدا با عبور دادن ذرات باردار از اختلاف پتانسیل الکتریکی ثابت انجام می‌شد. در تلاش برای افزایش انرژی نهایی ذرات باردار، شتاب دهنده‌های دایره‌ای نخست به صورت سیکلوترون، سپس به صورت سنکروترونی و در نهایت سنکروترون به بار آمدند. ذرات باردار با اعمال میدان مغناطیسی وادار به حرکت روی مسیر دایره‌ای می‌شوند تا بارها و بارها از کاواک شتاب دهنده عبور کنند و انرژی شان در هر گذر افزایش یابد. بررسی رفتار ذرات بنیادی و نتایج آن در شتاب دهنده‌ها نیازمند تحلیلی دقیق مبتنی بر روابط ریاضی است. بنابراین با استفاده از روش توصیف شده در این پایان نامه به تحلیل ریاضی یک موج الکترونی در یک شتاب دهنده می‌پردازیم.

در این پایان نامه در فصل اول به تعریف مفاهیم اولیه هندسه از قبیل منیفلد، میدان برداری، گروه لی و ... می‌پردازیم.

در فصل دوم مفهوم فضای کامل و فضای جت و توصیف ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل بیان شده است و همچنین روش یافتن گروه تقارن و کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل جزئی به همراه چند مثال ذکر شده است.

در فصل سوم با یافتن گروه تقارن معادلات بر همکنش سیکوترون الکترون با موج الکترومغناطیسی آرام تحت شرایط اثر دوپلر غیر عادی به جواب‌های خود متشابه این معادله می‌رسیم که تقویت و فشردگی پالس‌های الکترومغناطیسی در میز^۶ سیکلوترون را نشان می‌دهد.

تولید پالس‌های خیلی کوتاه مایکروویوی با قدرت بالا یک نمونه از کاربردهای مختلف این برهمکنش است بعنوان مثال در رادارهای با کیفیت بالا و تحقیقات بیوفیزیکی و تشخیص پلاسما اهمیت بسیار زیادی دارد. نتایج بدست آمده با حل عددی دستگاه معادلات مذکور تصدیق شده است.

^۶maser: microwave amplification by stimulated emission of radiation

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ منیفلد

در این فصل به معرفی منیفلدهای هموار و مفاهیم پایه‌ای مرتبط با آن خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۱.۱. منظور از منیفلد توپولوژیک n -بعدی M فضای توپولوژیک M است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(الف) M هاسدورف باشد، یعنی هر دو نقطه $p, q \in M$ به ترتیب مشمول در زیر مجموعه‌های باز $U, V \subset M$ باشند، به طوری که $U \cap V = \emptyset$.

(ب) M شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ای شمارا داشته باشد.

(پ) M به طور موضعی اقلیدسی از بعد n باشد،

یعنی هر نقطه M دارای یک همسایگی باز مانند U و همئومورفیسمی مانند φ از U به روی زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد. به زوج (U, φ) یک چارت یا دستگاه مختصات می‌گوییم.

مثال ۲.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به وسیله تک چارت $(\mathbb{R}^n, I_{\mathbb{R}^n})$ پوشاند که در آن $I_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشت همانی است. این یک مثال مقدماتی از منیفلد توپولوژیک می‌باشد.

مثال ۳.۱.۱. هر زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ مانند U ، نیز یک منیفلد توپولوژیک، با چارت (U, I_U) می‌باشد.

مثال ۴.۱.۱. نمودار $y = x^{\frac{1}{2}}$ در $\mathbb{R}^2$ یک منیفلد توپولوژیک است زیرا هاسدورف و شمارای نوع دوم است. چون این نمودار با ضابطه‌ی $x \mapsto (x, x^{\frac{1}{2}})$ همئومورف با $\mathbb{R}$ می‌باشد، پس موضعاً اقلیدسی است.

یادآوری می‌کنیم که شرط هاسدورف و شمارای نوع دوم، خواص ارثی می‌باشند، یعنی یک زیرفضا از فضای هاسدورف خود هاسدورف بوده و هر زیرفضا از فضای شمارای نوع دوم خود شمارای نوع دوم می‌باشد. بنابراین هر زیرفضا از $\mathbb{R}^n$ ، هاسدورف و شمارای نوع دوم است.

تعریف ۵.۱.۱. نگاشت $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ را هموار (C^∞ یا دیفرانسیل پذیر) می‌گوییم هرگاه مشتقات جزئی F از هر مرتبه موجود و پیوسته باشند. اگر $F^{-1} : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ نیز هموار باشد، آنگاه F دیفئومورفیسم است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم (U, φ) و (V, ψ) دو چارت از منیفلد توپولوژیک n -بعدی M باشند، نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

را نگاشت گذر از φ به ψ می‌نامیم.

دو چارت فوق را به طور هموار سازگار می‌نامیم هرگاه نگاشت گذر آنها دیفئومورفیسم باشد.

تعریف ۷.۱.۱. یک اطلس بر منیفلد توپولوژیک n -بعدی M گردایه‌ای مانند $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ از چارت‌های سازگار است که M را می‌پوشانند، به عبارت دیگر نگاشت‌های گذر روی منیفلد دو به دو دیفئومورفیسم باشند و $M = \cup_\alpha U_\alpha$.

تعریف ۸.۱.۱. اطلس $\mathcal{A}$ روی منیفلد M را ماکسیمال نامیم، هرگاه مشمول در اطلس دیگری نباشد، به بیان دیگر اگر $\mathcal{U}$ اطلس دیگری شامل $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $\mathcal{A} = \mathcal{U}$.

تعریف ۹.۱.۱. M را یک منیفلد هموار یا C^∞ -منیفلد می‌نامیم، هرگاه دارای یک اطلس ماکسیمال باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. هر زیرمجموعه‌ی باز V از منیفلد M نیز یک منیفلد است. اگر $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ اطلسی برای M باشد، آنگاه $\{(U_\alpha \cap V, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap V})\}$ یک اطلس برای V بوده، که در آن $\phi_\alpha|_{U_\alpha \cap V} : U_\alpha \cap V \rightarrow \mathbb{R}^n$ نمایش‌دهنده‌ی تحدید ϕ_α به زیرمجموعه‌ی $U_\alpha \cap V$ است.

به بیان دیگر اگر M یک منیفلد هموار باشد و V یک زیرمجموعه‌ی باز از آن در نظر گرفته شود، آنگاه V را یک زیرمنیفلد باز M گوئیم، هرگاه V با ساختار هموار M یک منیفلد باشد.

مثال ۱۱.۱.۱. به ازای هر عدد صحیح و مثبت n فرض کنید $\mathbb{R}^{n \times n}$ متشکل از فضای همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ باشد. بنا به تعریف گروه خطی عمومی $GL(n, \mathbb{R})$ عبارتست از:

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}).$$

تابع دترمینان $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است، در نتیجه $GL(n, \mathbb{R})$ زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ بوده و بنابراین یک منیفلد است.

$GL(n, \mathbb{C})$ متشکل از کلیه ماتریس‌های $n \times n$ مختلط نامنفرد را در نظر می‌گیریم. ماتریس $n \times n$ ، A نامنفرد است، اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$ ، در نتیجه $GL(n, \mathbb{C})$ زیرمجموعه‌ی بازی از فضای برداری همه‌ی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ ، یعنی $\mathbb{C}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ می‌باشد. با استدلالی مشابه در حالت حقیقی، $GL(n, \mathbb{C})$ منیفلدی با بعد $2n^2$ است.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم M منیفلدی هموار با بعد n باشد. تابع مفروض $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه‌ی p هموار یا C^∞ نامیم هرگاه چارتی مانند (U, ϕ) حول نقطه‌ی p در M باشد که تابع $f \circ \phi^{-1}$ بر زیرمجموعه‌ی باز $\phi(U)$ از $\mathbb{R}^n$ در نقطه‌ی $\phi(p)$ هموار باشد. تابع f بر M را هموار نامیم، هرگاه در هر نقطه‌ی M هموار باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. اگر M و N منیفلدهایی به ترتیب با بعدهای m و n باشند آنگاه نگاشت پیوسته‌ی $F : N \rightarrow M$ را در نقطه‌ی $p \in N$ هموار گوئیم، هرگاه چارت‌هایی مانند (V, ψ) حول نقطه‌ی $F(p)$ در M و (U, ϕ) حول نقطه‌ی $p \in N$ باشند که $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ نگاشتی از زیرمجموعه‌ی باز $\phi(F^{-1}(V) \cap U)$ از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$ در نقطه‌ی $\phi(p)$ هموار باشد.

در تعریف بالا فرض می‌کنیم که $F : N \rightarrow M$ پیوسته بوده تا مطمئن شویم که $F^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی باز در N است. بنابراین نگاشت‌های هموار بین منیفلدها پیوسته در نظر گرفته می‌شوند.

۲.۱ فضای مماسی

تعریف ۱۰.۲.۱. نگاشت خطی $V : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$V(fg)(p) = g(p)Vf(p) + f(p)Vg(p).$$

تساوی فوق به قاعده لایبنیتز مشهور است، قرار می‌دهیم:

$$T_p\mathbb{R}^n = \{V \mid \text{است } p \in \mathbb{R}^n \text{ در } V\}.$$

به $T_p\mathbb{R}^n$ فضای مماسی $\mathbb{R}^n$ در نقطه p گفته می‌شود.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم $V \in T_p\mathbb{R}^n$ ، نگاشت خطی $D_V|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$D_V|_p f = D_V f(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tV).$$

را مشتق جهتی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار و $p \in M$ باشد. عملگر خطی $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه‌ی p می‌گوییم هرگاه در شرط زیر صدق کند.

$$X(fg)(p) = g(p)Xf(p) + f(p)Xg(p).$$

قرار می‌دهیم:

$$T_p M = \{X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{است } p \in M \text{ در نقطه } X\}.$$

در این صورت به $T_p M$ فضای مماسی منیفلد M در نقطه‌ی $p \in M$ گفته می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم $F : N \rightarrow M$ نگاشتی هموار بین دو منیفلد N و M باشد. این نگاشت، در هر نقطه‌ی $p \in N$ یک نگاشت خطی به نام دیفرانسیل F در p بین فضاهای مماس به دو طرف القا می‌کند:

$$dF_p = F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M,$$

این نگاشت چنین تعریف می‌شود که اگر $X_p \in T_p N$ ، آنگاه $F_{*,p}(X_p)$ بردار مماسی در $T_{F(p)} M$ است.

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار m -بعدی و p نقطه‌ای در آن باشد. برای هر چارت هموار (U, ϕ) شامل نقطه p که $\phi = (x^1, \dots, x^m)$ می‌باشد، $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ یک پایه برای $T_p M$ تشکیل می‌دهد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = d(\phi^{-1}) \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\phi(p)} \right)$$

□

برهان. [۱۵].

تعریف ۶.۲.۱. (دیفرانسیل یک نگاشت بین فضاهای اقلیدسی): فرض کنید $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتی هموار و p نقطه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، اگر $(x^1, \dots, x^n)$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ و $(y^1, \dots, y^m)$ مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^m$ باشد، در این صورت بردارهای مماس $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_p \mathbb{R}^n$ و $\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m}|_{F(p)}\}$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_{F(p)} \mathbb{R}^m$ تشکیل می‌دهند. در این صورت نگاشت خطی $dF : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}^m$ نسبت به این دو پایه با ماتریس $[a_j^i] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ نشان داده می‌شود که در آن

$$dF \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = \sum_{k=1}^m a_j^k \left. \frac{\partial}{\partial y^k} \right|_{F(p)}, \quad (1.1)$$

که $F^i := y^i \circ F$ را مقدار i ام نگاشت F تعریف می‌کنیم، در واقع $F = (F^1, \dots, F^m)$ در این صورت، با تأثیر دادن هر دو طرف فرمول (۱.۱) بر توابع مختصاتی y^i می‌توانیم a_j^i را محاسبه کنیم:

$$\sum_{k=1}^m a_j^k \left. \frac{\partial}{\partial y^k} \right|_{F(p)} y^i = \sum_{k=1}^m a_j^k \delta_k^i = a_j^i,$$

و

$$dF \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) y^i = \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p (y^i \circ F) = \left. \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right|_p,$$

در نتیجه

$$a_j^i = \left. \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right|_p.$$

بنابراین ماتریس نمایش نگاشت خطی dF نسبت به پایه‌های استاندارد $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ و $\frac{\partial}{\partial x^j}|_{F(p)}$ عبارتست از ماتریس ژاکوبی نگاشت F در نقطه‌ی p . به عبارت دیگر:

$$J_{F(p)} = \left(\left. \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right|_p \right)_{ij}.$$

قضیه ۷.۲.۱. (قاعده‌ی زنجیری مشتق): اگر $F : N \rightarrow M$ و $G : M \rightarrow P$ نگاشت‌های هموار بین منیفلدها و $p \in N$ ، آنگاه

$$d(G \circ F)_p = dG(F(p)) \circ dF(p).$$

قضیه ۸.۲.۱. اگر M یک منیفلد m -بعدی باشد آنگاه فضای مماسی $T_p M$ نیز m -بعدی است. برهان. [۱۵].

□

تعریف ۹.۲.۱. منظور از منحنی هموار بر منیفلد مفروض M ، نگاشت هموار $c : (a, b) \rightarrow M$ از یک بازه‌ی باز $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ بتوی M است. به جای کلمه‌ی منحنی، از خم و یا قوس نیز استفاده می‌گردد. اگر فرض کنیم $\circ \in (a, b)$ می‌گوییم منحنی c از نقطه‌ی $c(\circ) = p$ آغاز شده است. بردار سرعت منحنی c در لحظه‌ی $t_\circ \in (a, b)$ به صورت

$$c'(t_\circ) := dc\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ}\right) \in T_{c(t_\circ)}M.$$

تعریف می‌گردد.

مثال ۱۰.۲.۱. فرض کنیم $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $c(t) = (t^2, t^3)$ است. در این صورت $c'(t)$ ترکیب خطی بردارهای $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ در $c(t)$ است یعنی:

$$c'(t) = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y},$$

برای محاسبه‌ی a ، دو طرف را بر تابع مختصاتی x محاسبه می‌کنیم:

$$a = \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) x = c'(t) x = dc\left(\frac{d}{dt}\right) x = \frac{d}{dt}(x \circ c) = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t,$$

و

$$b = \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) y = c'(t) y = dc\left(\frac{d}{dt}\right) y = \frac{d}{dt}(y \circ c) = \frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2,$$

$$c'(t) = 2t \frac{\partial}{\partial x} + 3t^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

حاصل را بر حسب پایه‌ی $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ برای $T_{c(t)}(\mathbb{R}^2)$ به صورت $c'(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$ می‌توان نوشت.

گزاره ۱۱.۲.۱. (وجود منحنی با بردار آغازی مفروض): به ازای هر نقطه‌ی p در منیفلد دلخواه M و هر بردار مماس $X_p \in T_p M$ عدد $\varepsilon > 0$ و یک منحنی هموار $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ چنان وجود دارند که $c(\circ) = p$ و $c'(\circ) = X_p$.

□

برهان. [۱۵].

گزاره ۱۲.۲.۱. فرض کنیم X_p یک بردار مماس دلخواه در نقطه‌ی p از منیفلد M باشد و $f \in C^\infty(M)$. اگر $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ منحنی هموار آغازی از p با سرعت اولیه $c'(\circ) = X_p$ باشد، آنگاه:

$$X_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=\circ}(f \circ c),$$

برهان. بنا به تعریف $c'(\circ)$ و dc ، داریم:

$$\begin{aligned} X_p f &= c'(\circ) f, \\ &= dc \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=\circ} \right) f, \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=\circ} (f \circ c). \end{aligned}$$

□

تعریف ۱۳.۲.۱. اگر M یک منیفلد هموار باشد، اجتماع مجزای تمام فضاهاى مماسی بر منیفلد M به ازای تمام نقاط منیفلد M را کلاف مماسی گوئیم.

$$TM := \sqcup_{p \in M} T_p M.$$

قضیه ۱۴.۲.۱. اگر M یک منیفلد هموار n -بعدی باشد، آنگاه TM یک منیفلد هموار $2n$ -بعدی است و نگاشت تصویری $\pi : TM \rightarrow M$ با ضابطه $\pi(p, X) = p$ هموار است.

□

برهان. [۱۵].

۳.۱ کلاف برداری

تعریف ۱۳.۳.۱. فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک باشد، یک کلاف برداری از رتبه k ، روی M یک فضای توپولوژیک مانند E به همراه نگاشت پیوسته و پوشای $\pi : E \rightarrow M$ است که: (الف) به ازای هر نقطه $p \in M$ پیشنگاره $E_p := \pi^{-1}(p)$ را که تار در p می‌نامیم دارای ساختار فضای برداری با بعد k باشد.

(ب) به ازای هر $p \in M$ ، همسایگی باز U از p و همئومورفیسم $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ چنان وجود دارند که به ازای هر $q \in U$ ، $\varphi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k$. چنین مجموعه‌ی بازی را مجموعه‌ی باز بدیهی‌ساز برای E و φ را بدیهی‌سازی برای E روی U می‌نامند. خانواده‌ی $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ که خانواده‌ی $\{U_\alpha\}$ پوشش باز برای M باشد، بدیهی‌سازی برای E و خانواده‌ی $\{U_\alpha\}$ پوشش باز بدیهی‌ساز E روی M نامیده می‌شود. به سه‌تایی (E, M, π) یک کلاف برداری توپولوژیکی از رتبه k گوئیم. اگر E و M دو منیفلد هموار و نگاشت بدیهی‌سازی موضعی دیفئومورفیسم باشد آنگاه E یک کلاف برداری هموار از رتبه k روی M است.

تعریف ۲۰.۳.۱. (برش هموار): منظور از یک برش برای کلاف برداری $\pi : E \rightarrow M$ ، نگاشت $s : M \rightarrow E$ است که $\pi \circ s = Id_M$. به عبارت دیگر، به هر $p \in M$ ای یک عنصر $s(p)$ در تار E_p متناظر گردد.

۴.۱ میدان برداری

مثال ۱.۴.۱. میدان برداری V بر منیفلد هموار مفروض M ، برشی از کلاف مماس $\pi : TM \rightarrow M$ است. به عبارت دیگر، نگاشتی مانند $V : M \rightarrow TM$ است که به هر نقطه‌ای $p \in M$ بردار مماس V_p در همان نقطه را نظیر می‌سازد. مجموعه میدان‌های برداری هموار بر منیفلد مفروض M را با نماد $\chi(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم $\pi : E \rightarrow M$ یک کلاف برداری هموار از رتبه‌ی k باشد و U زیرمجموعه‌ای باز از M باشد. منظور از کنج برای E روی U ، مجموعه‌ای مرتب از k برش $\{s_1, \dots, s_k\}$ از E روی U است، به گونه‌ای که به ازای هر $p \in U$ ، عناصر $s_1(p), \dots, s_k(p)$ پایه‌ای برای تار $E_p := \pi^{-1}(p)$ تشکیل می‌دهند. کنج را در صورتی هموار گوییم که برش‌های معرف آن هموار باشند.

مثال ۳.۴.۱. گردایه‌ی میدان‌های برداری $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ یک کنج هموار فراگیر بر $\mathbb{R}^3$ است.

مثال ۴.۴.۱. فرض کنیم M منیفلدی هموار و $\{e_1, \dots, e_k\}$ پایه‌ای برای فضای برداری استاندارد $\mathbb{R}^k$ باشد. به ازای هر $i = 1, \dots, k$ نگاشت $\bar{e}_i : M \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$ را با ضابطه‌ی $\bar{e}_i(p) = (p, e_i)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\{e_1, \dots, e_k\}$ برشی هموار برای کلاف حاصلضربی $M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ می‌باشد.

تعریف ۵.۴.۱. (عملگر کروسه لی) فرض کنید V و W دو میدان برداری روی منیفلد هموار M و f یک تابع هموار باشد. نگاشت

$$[V, W] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

$$[V, W]f = VWf - WVf.$$

را عملگر کروسه لی دو میدان برداری V و W می‌گوییم.

لم ۶.۴.۱. اگر V و W دو میدان برداری روی M باشند، آنگاه $[V, W]$ میدان برداری است.

برهان. برای توابع هموار و دلخواه $f, g \in C^\infty(M)$ داریم:

$$\begin{aligned} [V, W](af + bg) &= VW(af + bg) - WV(af + bg), \\ &= V(aWf + bWg) - W(aVf + bVg), \\ &= aVWf + bVWg - aWVf - bWVg, \\ &= a(VW - WV)f + b(VW - WV)g, \\ &= a[V, W]f + b[V, W]g. \end{aligned}$$

از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که کروشه لی خطی است.

$$\begin{aligned}
 [V, W](f.g) &= VW(f.g) - WV(f.g), \\
 &= V(g.W.f + f.W.g) - W(g.V.f + f.V.g), \\
 &= V(g.W.f) + v(f.W.g) - W(g.V.f) - W(f.V.g), \\
 &= WfVg + gVWf + WgVf + fVWg, \\
 &\quad - VfWg - gWVf - VgWf - fWVg, \\
 &= f(VW - WV)g + g(VW - WV)f, \\
 &= f[V, W]g + g[V, W]f.
 \end{aligned}$$

و همچنین از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که کروشه لی در قاعده‌ی لایبنیتس صدق می‌کند. بنابراین کروشه لی یک عملگر مشتق و میدان برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 [\cdot, \cdot] : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M), \\
 (V, W) &\mapsto [V, W] = VW - WV.
 \end{aligned}$$

□

گزاره ۷.۴.۱. میدان‌های برداری V, W, U روی M و ثابت‌های c و c' را در نظر می‌گیریم، کروشه لی آنها در خواص زیر صدق می‌کند.

$$\begin{aligned}
 [cV + c'V', W] &= c[V, W] + c'[V', W] \quad (\text{الف}) \\
 [V, W] &= -[W, V] \quad (\text{ب}) \\
 [U, [V, W]] + [V, [W, U]] + [W, [U, V]] &= 0 \quad (\text{ج})
 \end{aligned}$$

□

برهان. با استفاده از تعریف کروشه لی به راحتی نتیجه می‌شود.

تعریف ۸.۴.۱. نگاشت هموار $F : N \rightarrow M$ بین منیفلدها را در نظر بگیرید. رتبه‌ی F در نقطه‌ی $p \in N$ را با نماد $\text{rank} F(p)$ نشان داده و به صورت رتبه‌ی نگاشت دیفرانسیل $dF_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ تعریف می‌کنیم. رتبه نگاشت دیفرانسیل نسبت به دستگاه مختصاتی $(U, x^1, \dots, x^n)$ در p و $(V, y^1, \dots, y^m)$ در $F(p)$ با ماتریس ژاکوبی نمایش داده می‌شود. بنابراین

$$\text{rank} F(p) = \text{rank} \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p) \right).$$

تعریف ۹.۴.۱. نگاشت هموار $F : N \rightarrow M$ را ایمرژن گوئیم هرگاه به ازای هر $p \in N$ ، نگاشت $dF_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ یک به یک باشد و $\text{rank} F = \dim N$.

تعریف ۱۰.۴.۱. نگاشت هموار $F : N \rightarrow M$ را سابمرژن گوئیم هرگاه به ازای هر $p \in N$ نگاشت دیفرانسیل $dF_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ پوشا باشد و $\text{rank} F = \dim M$.

مثال ۱۱.۴.۱. اگر U زیرمجموعه‌ی باز از منیفلد مفروض M باشد، آنگاه نگاشت شمول $i : U \rightarrow M$ ایمرژن است.

مثال ۱۲.۴.۱. رتبه نگاشت $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $F(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ در تمام نقاط ثابت، برابر بعد دامنه یعنی یک است و بنابراین ایمرژن است. همچنین ژاکوبین آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_F = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

مثال ۱۳.۴.۱. رتبه نگاشت $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $F(x, y, z) = x^2 - y + z^3$ در تمام نقاط ثابت، برابر بعد برد یعنی ۱ و نگاشتی سابمرژن است. همچنین ژاکوبین آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_f = (2x \quad -1 \quad 3z^2).$$

قضیه ۱۴.۴.۱. (تابع معکوس در منیفلدها) فرض کنیم $F : N \rightarrow M$ یک نگاشت هموار بین دو منیفلد همبند N و M باشند. هرگاه به ازای هر $p \in N$ $dF_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ ایزومورفیسم باشد آنگاه یک همسایگی از p مانند U و یک همسایگی از $F(p)$ مانند V موجود است که $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ دیفیئومورفیسم است.

□

برهان. [۶].

قضیه ۱۵.۴.۱. (رتبه در منیفلدها). فرض کنید N و M به ترتیب دو منیفلد هموار n -بعدی و m -بعدی و $F : N \rightarrow M$ یک نگاشت هموار با رتبه ثابت k باشد، به ازای هر $p \in N$ یک چارت مختصاتی مانند $(x^1, \dots, x^n)$ به مرکز p و یک چارت مختصاتی مانند $(y^1, \dots, y^m)$ به مرکز $F(p)$ موجود است بطوریکه:

$$F(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k, \circ, \dots, \circ),$$

به ویژه اگر F سابمرژن باشد، آنگاه:

$$F(x^1, \dots, x^k, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n),$$

و اگر F ایمرژن باشد، آنگاه:

$$F(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, \circ, \dots, \circ).$$

□

برهان. [۶].

۵.۱ فرم‌های دیفرانسیلی

تعریف ۱.۵.۱. اگر V فضای برداری باشد، نگاشت خطی $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع خطی نام دارد. مجموعه‌ی تمام تابع‌های خطی $V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{R}\}$ دوگان فضای برداری نام دارد.

تعریف ۲.۵.۱. اگر $V_1, \dots, V_k$ و W فضاهای برداری باشند، نگاشت $F : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ را یک نگاشت k -خطی یا چندخطی می‌گوییم هرگاه:

$$F(v_1, \dots, av_i + bv'_i, \dots, v_k) = aF(v_1, \dots, v_k) + bF(v_1, \dots, v_k).$$

تعریف ۳.۵.۱. نگاشت k -خطی $F : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ یک k -تانسور کواریان روی فضای برداری V نام دارد، مجموعه تمام k -تانسورهای کواریان را با $T^k(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۵.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری و $T \in T^k(V)$ و $S \in T^l(V)$ باشند، ضرب تانسوری S و T به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$T \otimes S := V \times V \times \dots \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = T(v_1, \dots, v_k) \cdot S(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

مثال ۵.۵.۱. فرض کنیم $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه‌ی استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ باشد و $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ پایه‌ی دوگان متناظر با آن باشد. ضرب داخلی اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ تابع دو خطی $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v^i w^i$ ، $v = \sum_{i=1}^n v_j e_i$ ، $w = \sum_{i=1}^n w_j e_i$ است، $\langle \cdot, \cdot \rangle$ را به صورت حاصلضرب تانسوری می‌توان نوشت:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v^i w^i = \sum_{i=1}^n \alpha^i(v) \alpha^i(w) = \sum_{i=1}^n (\alpha^i \otimes \alpha^i)(v, w),$$

بنابراین:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha^i \otimes \alpha^i.$$

تعریف ۶.۵.۱. اگر V یک فضای برداری n -بعدی باشد، به نگاشت k -خطی $T : V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ یک k -تانسور کنتراواریان روی فضای برداری V می‌گوییم، مجموعه تمام k -تانسورهای کنتراواریان را با $T_k(V)$ نشان می‌دهیم و به شکل:

$$T_k(V) := V \otimes \dots \otimes V,$$

نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۵.۱. k -تانسور کواریان $T : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ روی فضای برداری V متقارن است هرگاه:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

فضای تمام k -تانسورهای متقارن روی فضای برداری V را با $\sum^k(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۵.۱. k -تانسور کواریان $T : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ روی فضای برداری V متناوب است هرگاه:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

فضای تمام k -تانسورهای متناوب روی فضای برداری V را با $\wedge^k(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۵.۱. هرگاه M یک منیفلد هموار باشد، مجموعه‌ی تمام k -تانسورهای کواریان روی M در نقطه‌ی p را با $T^k(T_p M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۵.۱. اگر $\pi : T^k(TM) \rightarrow M$ کلاف k -تانسورهای کواریان روی M باشد به نگاشت $\delta : M \rightarrow T^k(TM)$ یک برش از $T^k(TM)$ گوئیم هرگاه:

$$\pi \circ \delta = Id_M.$$

تعریف ۱۱.۵.۱. اجتماع مجزای $T^k(T_p M)$ را کلاف k -تانسورهای متناوب روی M می‌نامند که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\wedge^k(TM) = \sqcup_{p \in M} \wedge^k(T_p M).$$

تعریف ۱۲.۵.۱. یک برش از $\wedge^k(T(M))$ یک k -فرم دیفرانسیلی روی M نام دارد. مجموعه‌ی تمام k -فرم‌های دیفرانسیلی روی M را با:

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\wedge^k T(M)).$$

نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۵.۱. اگر $v_1, \dots, v_k$ بردار و $T \in T^k(V)$ ، نگاشت $\text{Alt} : T^k(V) \rightarrow \wedge^k(V)$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\delta} (\text{sgn } \delta) T(v_{\delta(1)}, \dots, v_{\delta(k)}),$$

که δ تمام جایگشت‌های ممکن روی k -تایی $\{v_1, \dots, v_k\}$ است.

تعریف ۱۴.۵.۱. اگر $\omega \in \wedge^k(V)$ و $\eta \in \wedge^l(V)$ آنگاه ضرب وج (گوه‌ای) بین ω و η به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

گزاره ۱۵.۵.۱. (ویژگی‌های ضرب و جمع): فرض کنید ω و ω' و η و η' و ε چند فرم دیفرانسیلی روی فضای برداری با بعد متناهی V و $a, a' \in \mathbb{R}$ باشند، آنگاه:
الف) دو خطی است:

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta),$$

و

$$\eta \wedge (a\omega + a'\omega') = a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').$$

ب) شرکت پذیر است:

$$\omega \wedge (\eta \wedge \varepsilon) = (\omega \wedge \eta) \wedge \varepsilon.$$

ج) تعویض ناپذیر است، یعنی اگر $\omega \in \wedge^k(V)$ و $\eta \in \wedge^l(V)$ آنگاه:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

□

برهان. [۱۵].

تعریف ۱۶.۵.۱. اگر $F: M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد، به ازای هر $p \in M$ نگاشت پس‌کشنده F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$$

$$(F^*(\omega))(v_1, \dots, v_k) = \omega(dF(v_1), \dots, dF(v_k)) \quad , \quad (\forall i ; v_i \in T_p M).$$

مثال ۱۷.۵.۱. اگر نگاشت $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $F(x, y) = (xy, x^2 - y^2, 3x^2y)$ باشد می‌خواهیم نگاشت پس‌کشنده F را روی $\mathbb{R}^2$ -فرم ω با ضابطه

$$\omega = (z - x^2) dx \wedge dy + (y^2 - xz) dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3),$$

اعمال کنیم.

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= [(z - x^2) \circ F] d(x \circ F) \wedge d(y \circ F) \\ &+ [(y^2 - xz) \circ F] d(y \circ F) \wedge d(z \circ F), \\ &= (z \circ F - x^2 \circ F) d(xy) \wedge d(x^2 - y^2), \\ &+ (y^2 \circ F - xz \circ F) d(x^2 - y^2) \wedge d(3x^2y), \\ &= (3x^2y - x^2y^2) (ydx + xdy) \wedge (2xdx - 2ydy) \\ &+ ((x^2 - y^2)^2 - 3x^2y^2) (2xdx - 2ydy) \wedge (6xydx + 3x^2dy), \\ &= [- (3x^2y - x^2y^2) (2y^2 + 2x^2) \\ &+ ((x^2 - y^2)^2 - 3x^2y^2) (6x^3 + 12xy)] (dx \wedge dy). \end{aligned}$$

۶.۱ گروه لی

تعریف ۱.۶.۱. یک گروه لی عبارتست از یک منیفلد هموار، مانند G که یک گروه نیز بوده و دو عمل گروه، یعنی نگاشت ضربی

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \quad \mu(a, b) = ab,$$

و همچنین نگاشت وارون ساز

$$i : G \rightarrow G, \quad i(a) = a^{-1}.$$

هموار باشند. برای $g \in G$ عمل ضرب از چپ و عمل ضرب از راست توسط g را به ترتیب با $(L_g : G \rightarrow G ; L_g(x) = \mu(g, x))$ ، $(R_g : G \rightarrow G ; R_g(x) = \mu(x, g))$ نمایش می‌دهیم، ضرب از چپ و راست را به ترتیب انتقال از چپ و راست نیز می‌نامند.

مثال ۲.۶.۱. گروه تبدیلات خطی وارون‌پذیر $GL(n, \mathbb{R})$ منیفلد هموار n^2 بعدی است و با عمل ضرب ماتریس‌ها یک گروه لی است. نگاشت ضربی $\mu : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ با ضابطه‌ی $(A, B) \rightarrow AB$ و نگاشت وارون ساز $i : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ با ضابطه‌ی $A \rightarrow A^{-1}$ هموار هستند.

تعریف ۳.۶.۱. یک گروه تبدیل مثل G که روی یک منیفلد هموار مانند M عمل می‌کند یک گروه لی است با این شرط که نگاشت $\phi : G \times M \rightarrow M$ با ضابطه‌ی $(g, p) \mapsto g.p$ دارای ویژگی‌های زیر است:

$$(g.h).p = g.(h.p) \quad (\text{الف})$$

$$e.p = p \quad (\text{ب})$$

در این حالت گوئیم G از چپ روی M عمل می‌کند و به همین صورت عمل از راست را تعریف می‌کنیم که g را یک تبدیل گویند و ϕ نگاشت تبدیل یا نگاشت مداری است و به شکل $\phi_g : M \rightarrow M$ نیز می‌توان بازنویسی کرد که یک دیفئومورفیسم است زیرا $\phi_{g^{-1}} = (\phi_g)^{-1}$.

تعریف ۴.۶.۱. فرض کنیم گروه لی G روی M عمل کند و $p \in M$ ، مجموعه‌ی $O_p = \{gp : g \in G\}$ را که تمام تصویرهای عضو p تحت عناصر گروه G را مدار عضو p گوئیم.

مثال ۵.۶.۱. اگر گروه لی $GL(n)$ روی منیفلد $\mathbb{R}^n$ عمل کند و $p \in \mathbb{R}^n$ به ازای $p = 0$:

$$O_0 = \{A \cdot 0 ; A \in GL(n)\} = \{0\},$$

و به ازای $p \neq 0$:

$$O_p = \{Ap ; A \in GL(n)\} = \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

در نتیجه عمل $GL(n)$ روی $\mathbb{R}^n$ دو مدار دارد.

مثال ۶.۶.۱. عمل گروه لی $SO(n)$ روی $\mathbb{R}^n$ را به ازای $p \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید:

اگر $p = 0$ آنگاه $O_0 = \{A \circ ; A \in SO(n)\} = \{0\}$.

اگر $p \neq 0$ آنگاه $O_p = \{Ap ; A \in SO(n)\} = \{\text{کره‌های متحد‌المركز}\}$.

تعریف ۷.۶.۱. عمل گروه لی G روی منیفلد M را متعددی گوئیم هرگاه عمل گروه لی روی منیفلد تنها یک مدار داشته باشد یعنی مدار آن کل M را بپوشاند.

تعریف ۸.۶.۱. اگر گروه لی G روی منیفلد M عمل کند آنگاه مجموعه $G_P = \{g \in G : gp = p\}$ را زیرگروه پایدارساز عضو p گوئیم که با عمل ضرب گروه، یک گروه است زیرا:

(الف) $G_P \neq \emptyset$, $e \in G_P$; $e.p = p \Rightarrow e \in G_P$

(ب) $g, h \in G_P$ ($(g.h).x = g.(h.x) = g.x = x \Rightarrow g.h \in G_P$)

(ج) $g \in G_P$ $g^{-1}.(g.p) = (g^{-1}.g).p = e.p = p \Rightarrow g^{-1} \in G_P$

تعریف ۹.۶.۱. عمل گروه لی G روی منیفلد M را آزاد نامیم هرگاه به ازای هر $p \in M$ $G_P = \{e\}$.

مثال ۱۰.۶.۱. عمل $GL(n)$ روی $\mathbb{R}^n$ آزاد نیست چون دو زیرگروه پایدارساز دارد.

عمل $GL(n)$ روی $\mathbb{R}^n - \{0\}$ آزاد است.

تعریف ۱۱.۶.۱. عمل گروه لی G روی منیفلد M را مؤثر گوئیم هرگاه به ازای هر $p \in M$

$$G_H = \cap_{p \in M} G_p = \{e\}$$

به G_H زیرگروه پایدارساز فراگیر گوئیم.

تعریف ۱۲.۶.۱. یک زیرگروه لی از یک گروه لی G ، یک زیرگروه مجرد مانند H است که یک زیرمنیفلد ایمرزن بوده بطوریکه عمل‌های گروه بر H نیز هموار باشند. منظور از زیرگروه مجرد، زیرگروهی جبری است.

قضیه ۱۳.۶.۱. قضیه‌ی کارتان برای گروه‌های لی: اگر H یک زیرگروه مجرد و یک زیرمنیفلد منظم (ایمبد شده) از گروه لی G باشد، آنگاه H یک زیرگروه لی بسته‌ی G است.

□

برهان. [۲۱].

۷.۱ جبر لی

در یک گروه لی G ، به دلیل آنکه هر انتقال چپ، توسط یک عنصر $g \in G$ ، دیفئومورفیزیسمی است که یک همسایگی همانی را به یک همسایگی g می‌نگارد، لذا تمام اطلاعات موضعی در یک همسایگی از عنصر همانی متمرکز شده و بر این اساس فضای مماس در نقطه‌ی همانی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

تعریف ۱.۷.۱. فرض کنیم X یک میدان برداری بر گروه لی G باشد. به ازای هر $g \in G$ به دلیل دیفیئومورف بودن عمل از چپ $L_g : G \rightarrow G$ ، $dL_g(X)$ یک میدان برداری خوش تعریف بر G است. گوییم میدان برداری X ، ناوردای چپ است، هرگاه به ازای هر $g \in G$ ،

$$dL_g X = X.$$

این بدان معناست که به ازای هر $h \in G$ داریم:

$$dL_g(X_h) = X_{gh}.$$

واضح است که هر میدان برداری ناوردای چپ X ، بطور کامل توسط مقدار آن در نقطه‌ی همانی X_e تعریف می‌شود، زیرا

$$X_g = dL_g(X_e).$$

میدان برداری ناوردای راست نیز به همین ترتیب تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۷.۱. مجموعه‌ی تمام میدان‌های برداری ناوردای چپ (راست) روی گروه لی G با عمل کروسه لی یک زیرفضای برداری از مجموعه میدان‌های برداری روی G است که به آن جبر لی چپ (راست) گروه لی G و با $\mathcal{G}_L$ ، $(\mathcal{G}_R)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۳.۷.۱. نگاشت وارون ساز گروه لی G ، ایزومورفیزیسمی بین جبر لی چپ و جبر لی راست برقرار می‌کند.

برهان. فرض کنیم که R_g و L_g به ترتیب عمل از راست و عمل از چپ گروه لی G روی خودش و $i : G \rightarrow G$ نگاشت وارون ساز G با ضابطه‌ی $g \mapsto g^{-1}$ که $g \in G$ است. ثابت می‌کنیم $di : \mathcal{G}_R \rightarrow \mathcal{G}_L$ ایزومورفیزم است. اگر $h \in G$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} (R_g \circ i)h &= R_g(i(h)), \\ &= R_g(h^{-1}), \\ &= h^{-1}g, \\ &= (g^{-1}h)^{-1}, \\ &= (i \circ L_{g^{-1}})h. \end{aligned}$$

حال فرض کنید $v \in \mathcal{G}_L$ و $f \in C^\infty(G)$ باشد، در این صورت:

$$\begin{aligned} dR_g(di(v_h))f &= (dR_g \circ di)(v_h)f, \\ &= d(R_g \circ i)(v_h)f, \\ &= d(i \circ L_{g^{-1}})(v_h)f, \\ &= (di \circ dL_{g^{-1}})(v_h)f, \\ &= di(dL_{g^{-1}}v_h)f, \\ &= di(v_{g^{-1}h})f, \\ &= vf(i(g^{-1}h)), \\ &= vf(h^{-1}g), \\ &= v_{h^{-1}g}f. \end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۷.۱. جبر لی یک گروه لی، فضای مماسی گروه لی در نقطه‌ی همانی است.

برهان. باید نشان دهیم $\mathcal{G} \cong T_e G$. ثابت می‌کنیم نگاشت $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow T_e G$ ایزومورفیسم است. فرض کنیم $X \in T_e G$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{X}_g = dL_g X,$$

ابتدا نشان می‌دهیم $\tilde{X}$ هموار است. برای این کار ثابت می‌کنیم اگر $U \subseteq G$ باز و $f \in C^\infty(U)$ باشد، آنگاه $\tilde{X}f$ هموار است. خم هموار $\alpha: (-a, a) \rightarrow G$ به گونه‌ای موجود است که $\alpha(\circ) = e$ و $\alpha'(\circ) = X$

$$\begin{aligned} (\tilde{X}f)_g &= \tilde{X}_g f = (dL_g X)f = X(f \circ L_g) = \alpha'(\circ)(f \circ L_g), \\ &= \left(d\alpha \frac{d}{dt} \Big|_{t=\circ} \right) (f \circ L_g) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=\circ} (f \circ L_g \circ \alpha)(t), \end{aligned}$$

تابع $\psi: (-a, a) \times G \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $\psi(t, g) = f \circ L_g \circ \alpha(t)$ تعریف می‌کنیم که:

$$(\tilde{X}f)_g = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\circ, g),$$

چون ψ ترکیب سه نگاشت هموار است بنابراین خود و مشتقاتش از جمله $\frac{\partial \psi}{\partial t}(\circ, g)$ هموار است و این همواری، هموار بودن $(\tilde{X}f)_g$ را نتیجه می‌دهد.

$$dL_{g'}(\tilde{X}_g) = (dL_{g'})(dL_g X) = (dL_{g'} \circ dL_g)X = (dL_{gg'})X = \tilde{X}_{gg'},$$

بنابراین $\tilde{X}$ یک میدان برداری ناوردای چپ است، پس $\tilde{X} \in \mathcal{G}$. حال نگاشت $\eta: T_e G \rightarrow \mathcal{G}$ با ضابطه‌ی $\eta(X) = \tilde{X}$ را تعریف می‌کنیم که η وارون راست φ است زیرا:

$$\varphi(\eta(X)) = \varphi(\tilde{X}) = (dL_e)X = X_e = X,$$

و η وارون چپ φ است، زیرا:

$$\eta(\varphi(X))_g = \eta(X_e)_g = \tilde{X}_e|_g = (dL_g)X_e = X_{eg} = X_g.$$

□

بنابراین φ ایزومورفیسم است.

مثال ۵.۷.۱. گروه خطی عام $GL(n)$ ، n^2 -بعدی است، جبر لی آن با فضای تمام ماتریس‌های مربعی $n \times n$ یکرخت است، مختصات در $GL(n)$ بوسیله‌ی درایه‌های ماتریس x_{ij} به ازای $i, j = 1, \dots, n$ نمایش داده می‌شود. بنابراین فضای مماسی $GL(n)$ در همانی، مجموعه‌ی تمام میدان‌های برداری به صورت

$$v_A|_I = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_I$$

است که $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ دلخواه است، حال اگر $Y = y_{ij} \in GL(n)$ را در نظر بگیریم ماتریس $R_Y(X) = XY$ با درایه‌های به شکل $\sum_{k=1}^n x_{ik}y_{kj}$ است. بنابراین اگر $f \in C^\infty(GL(n))$ را در نظر بگیریم، جبر لی راست $GL(n)$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} dR_Y(v_A|_I)f(X) &= v_A|_I f \circ R_Y(X), \\ &= v_A|_I f(R_Y(X)), \\ &= v_A|_I f(XY), \\ &= v_A|_I f\left(\sum_k x_{lk}y_{km}\right), \\ &= \sum_{i,j} \sum_{l,k,m} a_{ij}y_{km} \frac{\partial x_{lk}}{\partial x_{ij}} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}, \\ &= \sum_{i,j,k,l,m} a_{ij}y_{km} \delta_i^l \delta_j^k \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}, \\ &= \sum (a_{ij}y_{jm}) \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}, \\ &= \sum_{i,j=m} a_{ij}y_{jm} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} f, \\ &= v|_{AY} f. \end{aligned}$$

تعریف ۶.۷.۱. (زیرگروه یک پارامتری): یک زیرگروه یک-پارامتری G ، یک همئومورفیسم گروه لی مانند $F: \mathbb{R} \rightarrow G$ است که $\mathbb{R}$ به عنوان یک گروه لی در نظر گرفته می‌شود. طبق این تعریف یک زیرگروه یک-پارامتری، یک زیرگروه لی نیست بلکه همئومورفیسمی به G است.

تعریف ۷.۷.۱. اگر G یک گروه لی و $\mathcal{G}$ جبر لی آن باشد، زیرجبر $\mathfrak{h}$ از جبر لی $\mathcal{G}$ ، زیرفضای برداری باشد که تحت گروه لی بسته باشد به عبارتی:

$$\forall v, w \in \mathfrak{h}, \quad [v, w] \in \mathfrak{h}.$$

آنگاه $\mathfrak{h}$ زیرجبر لی $\mathcal{G}$ نام دارد.

۸.۱ نگاشت نمایی

تعریف ۱.۸.۱. گروه لی G با جبرلی $\mathcal{G}$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $\exp : \mathcal{G} \rightarrow G$ با ضابطه‌ی $\exp(V) = F(1)$ را نگاشت نمایی گوئیم که F یک زیرگروه یک پارامتری نظیر میدان برداری V است. اگر V یک همسایگی $\circ \in \mathcal{G}$ ، U یک همسایگی $e \in G$ باشند، آنگاه دیفرانسیل نگاشت $\exp$ ، نگاشت همانی ایزومورفیسم

$$d\exp : T\mathcal{G}|_{\circ} \simeq \mathcal{G} \rightarrow TG|_e \simeq G,$$

است که طبق قضیه تابع معکوس نگاشت $\exp$ ، یک دیفئومورفیسم موضعی از $\mathcal{G}$ به یک همسایگی از عنصر همانی G ، ایجاب می‌کند.

قضیه ۲.۸.۱. فرض کنیم G یک گروه لی همبند با جبرلی $\mathcal{G}$ باشد در این صورت برای هر $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{G}$ هر عضو G مثل g را می‌توان به صورت ترکیب نگاشت‌های نمایی بدست آورد.

$$g = \exp(V_1) \circ \dots \circ \exp(V_k).$$

□

برهان. [۱۱].

تعبیر قضیه فوق بدین معناست که با داشتن اعضای یک جبرلی می‌توان با محاسبه‌ی نگاشت‌های نمایی متناظر با هر عضو و ترکیب آنها در هم ضابطه‌ی تبدیل گروه را بدست آورد.

۹.۱ مولد بی‌نهایت کوچک

تعریف ۱.۹.۱. میدان‌های برداری که توسط مشتق نگاشت مداری عمل یک گروه روی یک منیفلد القا می‌شود مولد بی‌نهایت کوچک عمل گروه نام دارد.

قضیه ۲.۹.۱. هرگاه G یک گروه لی از جبرلی $\mathcal{G}$ باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند آنگاه به ازای هر $V \in \mathcal{G}$ مولد بی‌نهایت کوچک $\hat{V}$ متناظر با V در نقطه‌ی $p \in M$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$d\psi_p|_e : T_e G \rightarrow T_p M$$

$$d\psi_p(V|_e) = \hat{V}|_p,$$

نگاشت ψ به صورت $\psi : G \rightarrow M$ تعریف می‌شود بطوریکه $g.p \mapsto g$.

مثال ۳.۹.۱. عمل گروه ماتریس‌های بالا مثلثی مرتبه ۲ روی $\mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_x : T(2) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \alpha x + \beta,$$

جبرلی $T(2)$ ماتریس‌های 2×2 به فرم زیر هستند.

$$\mathcal{T}(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

حال مولدهای بی‌نهایت کوچک عمل $T(2)$ روی $\mathbb{R}$ را با ماتریس‌های بالا بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d\psi_x|_{I_1}(A_1) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_x(I_1 + tA_1), \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_x\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (x+t) = 1 \equiv \partial x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\psi_x|_{I_1}(A_2) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_x(I_1 + tA_2), \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_x\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (1+t)x = x \equiv x\partial x. \end{aligned}$$

بنابراین $v_2 = x\partial_x$ و $v_1 = \partial_x$ مولدهای بی‌نهایت کوچک متناظر با هر یک از ماتریس‌های A_2 و A_1 است. (نماد $\frac{\partial}{\partial x}$ را به صورت ∂_x نیز نمایش می‌دهند.)

تعریف ۴.۹.۱. فرض کنیم V میدان برداری هموار بر منیفلد مفروض M است و $p \in M$. منظور از منحنی انتگرال برای V ، منحنی هموار $c: (a, b) \rightarrow M$ است که به ازای هر $t \in (a, b)$ داریم

$$c'(t) = V_{c(t)},$$

اغلب فرض می‌شود بازه‌ی باز (a, b) صفر را دربردارد. در این حالت اگر $c(0) = p$ ، اصطلاحاً می‌گوییم c منحنی انتگرال آغازی از p است و p را نقطه‌ی آغاز c می‌نامیم.

منحنی انتگرال را در صورتی ماکسیمال می‌گوییم که آن را به بازه‌ی بزرگتر نتوان توسعه داد.

مثال ۵.۹.۱. میدان برداری $V = -y\partial_x + x\partial_y$ بر $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیریم، منحنی انتگرال $c(t)$ میدان برداری V آغازی از نقطه‌ی $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ را می‌خواهیم بیابیم: شرط اینکه $c(t) = (x(t), y(t))$ منحنی انتگرال باشد این است که $c'(t) = V_{c(t)}$ ، یا

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix},$$

در نتیجه باید دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

$$\dot{x} = -y \quad (\text{الف})$$

$$\dot{y} = x \quad (\text{ب})$$

را حل کنیم، و البته باید شرایط اولیه $(x(\circ), y(\circ)) = (1, \circ)$ را در نظر بگیریم. از معادله (الف) نتیجه می‌شود که $\ddot{x} = -x$. جواب عمومی این معادله به صورت زیر است:

$$x = A \cos t + B \sin t, \quad (2.1)$$

بنابراین

$$y = -\dot{x} = A \sin t - B \cos t, \quad (3.1)$$

اکنون، از برقراری شرایط اولیه نتیجه می‌شود که $A = 1$ و $B = \circ$. لذا منحنی انتگرال آغازی از $(1, \circ)$ عبارتست از $c(t) = (\cos t, \sin t)$.

با در نظر گرفتن نقطه‌ی آغازی $t = \circ$ و معادلات (2.1) و (3.1) جواب عمومی عبارتست از

$$x = x_\circ \cos t - y_\circ \sin t, \quad y = x_\circ \sin t + y_\circ \cos t. \quad t \in \mathbb{R}$$

۱۰.۱ ناوردایی بی‌نهایت کوچک

تعریف ۱۰.۱۰.۱. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات همبند باشد که روی M عمل می‌کند. تابع حقیقی $I : M \rightarrow \mathbb{R}$ تحت عمل گروه G ناورداست اگر و تنها اگر برای هر $V \in \mathcal{G}$ و $p \in M$:

$$V_p(I) = \circ,$$

هرگاه $u = I(x)$ یک تابع یک پارامتری و $V = \sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ یک مولد بی‌نهایت کوچک باشد. برای آنکه I یک ناوردا تحت G باشد باید $V(I) = \circ$ و بنابراین

$$\sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial I}{\partial x^i} = \circ,$$

حال برای یافتن I دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \dots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)},$$

مثال ۲.۱۰.۱. عمل گروه $\text{SO}(2)$ روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر است:

$$\text{SO}(2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t),$$

مولد بی‌نهایت کوچک حاصل از این عمل به فرم $V = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ است و دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}.$$

که یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر است و جواب عمومی آن $x^2 + y^2 = c$ است. بنابراین $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ناورداست.

تعریف ۳.۱۰.۱. مجموعه $\{f_1, \dots, f_k\}$ از توابع هموار حقیقی مقدار روی منیفلد M وابسته‌ی تابعی نامیده می‌شوند، اگر برای هر نقطه‌ی $x \in M$ همسایگی U و تابع هموار $H(x_1, \dots, x_k)$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x \in U$ داشته باشیم:

$$H(f_1(x), \dots, f_k(x)) = 0,$$

این توابع مستقل خطی نامیده می‌شوند اگر این شرط برقرار نباشد.

گزاره ۴.۱۰.۱. اگر $f_1, \dots, f_k$ در شرط $df_1 \wedge \dots \wedge df_k \neq 0$ صدق کنند آنگاه مستقل تابعی هستند در غیر این صورت وابسته‌ی تابعی می‌باشند.

برهان. [۸]. □

قضیه ۵.۱۰.۱. فرض کنیم G یک گروه لی از تبدیلات موضعاً همبند باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. فرض کنید $F: M \rightarrow \mathbb{R}^l$ ، $l \leq m$ ، یک دستگاه معادلات جبری است که:

$$F_\nu(x) = 0 \quad \nu = 1, \dots, l,$$

و در شرایط رتبه‌ی ماکسیمال صدق می‌کند (به این معنی که ژاکوبین ماتریس $(\frac{\partial F_\nu}{\partial x^k})$ در تمامی نقاط این تابع برابر l باشد) بنابراین به G گروه تقارن دستگاه می‌گویند، اگر و تنها اگر $F(x) = 0$. هرگاه $v(F_\nu(x)) = 0$ ، $\nu = 1, \dots, l$ که v مولد بی‌نهایت کوچک است.

برهان. [۸]. □

فصل ۲

ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل

هدف ما در این فصل تعریف دستگاه معادلات دیفرانسیل در فضای کامل و همچنین فضای جت و کاربرد نظریه‌ی لی برای محاسبه گروه تقارن معادلات دیفرانسیل به روش بی‌نهایت کوچک و در نهایت حل معادلات دیفرانسیل به کمک گروه تقارن آن‌ها است.

۱.۲ تبدیلات و توابع

تعریف ۱.۱.۲. یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل مانند $\Delta = \circ$ با p متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^q)$ را در نظر می‌گیریم. جواب چنین دستگاهی تابعی به فرم $u = f(x)$ می‌باشد که در آن:

$$u^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^p), \quad \alpha = 1, \dots, q,$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ است که می‌توان آن‌ها را به عنوان مختصات موضعی روی فضای اقلیدسی $X \simeq \mathbb{R}^p$ در نظر گرفت و q متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^q)$ را مختصات روی $U \simeq \mathbb{R}^q$ در نظر بگیریم.

تعریف ۲.۱.۲. فضای اقلیدسی $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ که از متغیرهای مستقل و وابسته تشکیل شده است فضای کامل نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۲. تبدیل $g : E \rightarrow E$ با ضابطه $g.(x, u) = (\chi(x, u), \psi(x, u))$ را تبدیل نقطه‌ای می‌گوییم، هرگاه روی فضای کامل E به صورت نقطه‌ای عمل کند.

تعریف ۴.۱.۲. تبدیل $g : E \rightarrow E$ را تبدیل پایه‌ای گوئیم، هرگاه فقط روی متغیرهای مستقل عمل کند، به عبارتی:

$$g(x, u) = (\bar{x}, \bar{u}),$$

به طوریکه:

$$\bar{x} = \chi(x), \quad \bar{u} = u.$$

تعریف ۵.۱.۲. تبدیل $g : E \rightarrow E$ را تبدیل حافظ تار گوئیم، هرگاه متغیر مستقل را بدون تأثیر متغیر وابسته تغییر دهد، به عبارتی دیگر:

$$g(x, u) = (\bar{x}, \bar{u}),$$

به طوریکه:

$$x = \chi(x), \quad u = \psi(x, u).$$

رایج‌ترین تبدیل که بیشتر مورد واکاوی خواهد بود تبدیل نقطه‌ای است.

تعریف ۶.۱.۲. یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = \circ$ ، گروهی موضعی از تبدیلات مانند G است، که روی یک زیرمجموعه باز از E مانند M عمل کرده بطوریکه هر جواب از دستگاه $\Delta = \circ$ را به جواب دیگری تبدیل می‌کند.

از این پس گروه تبدیلات G یک گروه لی فرض می‌شود. تابع $u = f(x)$ را با گراف

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) ; x \in \Omega\} \subset E$$

در نظر می‌گیریم که در آن مجموعه Ω درون دامنه تعریف تابع f قرار می‌گیرد. حال تبدیل g روی گراف تابع f را به شکل

$$g.\Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) : (x, u) \in \Gamma_f\},$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۷.۱.۲. اگر $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$ گراف یک تابع هموار باشد، یک روش کلی برای یافتن گراف تبدیل یافته تابع f موجود است که در زیر به طور اجمالی به آن اشاره می‌کنیم. تبدیل g از گروه لی G را به شکل:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g.(x, u) = (\varphi_g(x, u), \psi_g(x, u)),$$

در نظر می‌گیریم که در آن φ_g و ψ_g دو تابع هموار می‌باشند. آنگاه مختصات گراف تابع $\bar{f}$ به صورت

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \varphi_g(x, f(x)) = \varphi_g \circ (\text{Id} \times f)(x), \\ \tilde{u} &= \psi_g(x, f(x)) = \psi_g \circ (\text{Id} \times f)(x) \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.2)$$

تعریف می‌شود که Id تابع همانی روی X است. برای یافتن $\bar{f}$ باید x را از (۱.۲) حذف کرد به ازای $g = e$ واضح است که:

$$\varphi_e \circ (\text{Id} \times f) = \text{Id}.$$

به ازای یک g نزدیک عضو همانی e ، ژاکوبین $\varphi \circ (\text{Id} \times f)$ غیر تکین است و بنابراین با استفاده از قضیه تابع ضمنی

$$x = [\varphi_g (\text{Id} \times f)]^{-1} (\bar{x}), \quad (2.2)$$

حال با جایگزینی (۲.۲) در $\bar{f}$ داریم:

$$\bar{f} = g.f = [\psi_g \circ (\text{Id} \times f)] \circ [\varphi_g \circ (\text{Id} \times f)]^{-1},$$

لذا با حذف x و وارون کردن φ_g ضابطه $\bar{f}$ به شکل:

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) = f(\varphi_g^{-1}(\bar{x})) = f(\varphi_{g^{-1}}(\bar{x})),$$

ساخته می‌شود.

تبدیل g از گروه لی G یک تقارن برای دستگاه معادلات $\Delta = \circ$ است، هرگاه $u = f(x)$ یک جواب برای دستگاه باشد آنگاه $g.u$ خود یک جواب است.

مثال ۸.۱.۲. فرض کنیم $p = q = 1$ و بنابراین $X \simeq U \simeq \mathbb{R}$ اگر $G = \text{SO}(2)$ گروه دوران‌های روی $E \simeq \mathbb{R}^2$ باشد، آنگاه اگر θ عضوی از G باشد داریم:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta.(x, u) = (x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta),$$

اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$ تابع روی $\mathbb{R}^2$ با گراف Γ_f باشد واضح است که عمل $\text{SO}(2)$ روی تابع چیزی نیست جز دوران گراف آن به اندازه‌ی زاویه θ . حال گراف تبدیل یافته تابع f را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = (x \cos \theta - (ax + b) \sin \theta, x \sin \theta + (ax + b) \cos \theta), \quad (3.2)$$

حال با حذف x از دستگاه (۳.۲) خواهیم داشت:

$$x = \frac{\tilde{x} + b \sin \theta}{\cos \theta - a \sin \theta}, \quad (4.2)$$

برای یافتن تبدیل یافته تابع f تحت زاویه θ ، x را از (۴.۲) در $\tilde{f}$ جایگذاری کرده و بنابراین $\tilde{f}$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = \frac{\sin \theta + a \cos \theta}{\cos \theta - a \sin \theta} \tilde{x} + \frac{b}{\cos \theta - a \sin \theta},$$

مثال ۹.۱.۲. حال فرض کنیم G گروهی باشد که تنها روی متغیرهای مستقل تبدیل را انجام می‌دهد یعنی:

$$(x, u) \mapsto (x + \varepsilon a, u) \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

برای هر $a \in X$ ، آنگاه تبدیل تابع $u = f(x)$ به صورت زیر است:

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = f(\tilde{x} - \varepsilon a).$$

۲.۲ امتداد دهی و فضای جت

قبل از حل معادلات دیفرانسیل و یافتن گروه تقارن به کمک محک ناوردایی، نیاز داریم تا فضای کامل را که متغیرهای مستقل و وابسته را نشان می‌دهد را به فضایی که در آن مشتقات جزئی دستگاه موجود باشد امتداد دهیم. یک تابع حقیقی هموار مانند $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$ دارای تعداد:

$$p_k = \binom{p+k-1}{k},$$

مشتق جزئی متمایز از مرتبه‌ی k -ام نسبت به متغیرهای $J = (j_1, \dots, j_k)$ اگر J یک اندیس چندگانه از متغیرهای تابع f باشد مشتق جزئی تابع f نسبت به J را به صورت

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}},$$

نمایش داده می‌شود. مرتبه‌ی اندیس چندگانه‌ی J را که با $\#J \equiv k$ نشان می‌دهیم دلالت بر آن دارد که چند بار از تابع مشتق گرفته‌ایم. حال فرض کنیم $f: X \rightarrow U$ یک تابع p متغیره‌ی q مقداری با ضابطه‌ی $u = f(x) = (f^1(x), \dots, f^q(x))$ باشد. فضای تمام مشتقات جزئی این تابع تا مرتبه‌ی n -ام را با

$$U^{(n)} := U \times U_1 \times \dots \times U_n, \quad (5.2)$$

نشان می‌دهیم بطوریکه U_i ها به ازای $i = 1, \dots, n$ نماینده‌ی فضای مشتقات جزئی از مرتبه‌ی i -ام می‌باشند. می‌توان دید که بعد فضای (۵.۲) برابر است با:

$$q + qp_1 + qp_2 + \dots + qp_k = q \binom{p+n}{n} := qp^{(n)}.$$

از این پس هر نقطه در $U^{(n)}$ را به صورت $u^{(n)}$ نشان می‌دهیم، بنابراین $U^{(n)}$ دارای $qp^{(n)}$ متغیر متمایز به شکل u_J^α می‌باشد که $\alpha = 1, \dots, q$ و $J = (j_1, \dots, j_k)$ یک اندیس چندگانه با شرایط $1 \leq j_k \leq p$ و $0 \leq k \leq p$ است.

حال با اضافه کردن فضای متغیرهای مستقل به $U^{(n)}$ فضای

$$J^n = X \times U^{(n)}, \quad (۶.۲)$$

می‌رسیم که به آن فضای جت مرتبه‌ی n -ام گوییم و با نماد J^n نشان می‌دهیم. واضح است که بعد فضای (۶.۲) برابر با $p + qp^{(n)}$ است. J^n یک ساختار هندسی دارد و این ساختار چیزی نیست جز یک کلاف برداری روی منیفلد X که بعد تارهای آن $qp^{(n)}$ است.

مثال ۱.۲.۲. فرض کنیم $p = q = ۲$ باشد. برای یافتن $J^۲$ کافیهست که مشتقات جزئی تابع را تا مرتبه‌ی ۲ بنویسیم. بنابراین داریم:

$$J^۲ = \{(x, y; u, v; u_x, u_y; v_x, v_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy})\} \simeq \mathbb{R}^{۱۴},$$

تعریف ۲.۲.۲. به فضای جت مرتبه‌ی n -ام یک تابع منهای متغیرهای مستقل امتداد تابع تا مرتبه‌ی n -ام می‌نامیم و آن را با $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳.۲.۲. امتداد تابع $f(x, y) = x^۳ - ۳xy^۲$ تا مرتبه‌ی دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$f^{(۲)}(x, y) = (x^۳ - ۳xy^۲; ۳x^۲ - ۳y^۲; -۶xy; ۶x, -۶y, -۶x).$$

۳.۲ دستگاه معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۳.۲. یک دستگاه m معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی n -ام مانند Δ با فضای کامل E تابعی به صورت:

$$\Delta : J^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (۷.۲)$$

با ضابطه‌ی

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = ۰, \quad \nu = ۱, \dots, m. \quad (۸.۲)$$

است.

با بازنویسی دستگاه (۸.۲) به صورت $\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_۱(x, u^{(n)}), \dots, \Delta_m(x, u^{(n)}))$ به ازای هر تابع هموار $\Delta_\nu(x, u^{(n)})$ در می‌یابیم که تابع (۷.۲) یک دستگاه m -معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) با p -متغیر مستقل و q -متغیر وابسته است. بدیهی‌ست که به ازای $p = ۱$ دستگاه (۸.۲) دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد.

تعریف ۲.۳.۲. یک جواب هموار از دستگاه معادلات (۸.۲) تابعی هموار مانند $u = f(x)$ است بطوریکه:

$$\Delta_\nu(x, f^{(n)}(x)) = ۰, \quad \nu = ۱, \dots, m.$$

۴.۲ امتداد دهی عمل گروه

فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات باشد که روی یک زیرمجموعه‌ی باز از فضای کامل E مانند $\mathcal{O}$ عمل می‌کند. این عمل را می‌توان به فضای جت مرتبه‌ی n -ام $\mathcal{O}$ یعنی $J^n(\mathcal{O})$ ترفیع داد، که به آن امتداد مرتبه‌ی n -ام عمل گروه G روی $\mathcal{O}$ نامیده و با $G^{(n)}$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر منظور از امتداد عمل یک گروه، تعمیم عمل آن به روی مشتقات جزئی تا مرتبه‌ی n -ام تابع $u = f(x)$ می‌باشد. این فرایند اینگونه است که اگر g یک تبدیل از گروه G باشد آنگاه با در نظر گرفتن g به عنوان یک تابع به صورت $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ امتداد آن را روی $\mathcal{O}$ به صورت:

$$g^{(n)} : J^n(\mathcal{O}) \rightarrow J^n(\mathcal{O}),$$

با ضابطه‌ی $g^{(n)} \cdot (x^\circ, u^\circ) = (\bar{x}^\circ, \bar{u}^\circ)$ به ازای نقطه‌ی دلخواه $(x^\circ, u^\circ) \in J^n(\mathcal{O})$ تعریف می‌شود.

مثال ۱۰.۴.۲. فرض کنیم $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ باشد. عمل گروه $SO(2)$ روی E را همانند مثال (۸.۱.۲) در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم این عمل را تا مرتبه‌ی یک امتداد دهیم. در این حالت $J^1(E) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(1)} \simeq \mathbb{R}^3$ می‌دانیم اگر $u = f(x)$ یک تابع روی E باشد آنگاه طبق تعریف (۲.۲.۲):

$$f^{(1)}(x) = (f(x), f'(x)),$$

امتداد مرتبه‌ی اول f است. فرض کنیم $(x^\circ, u^\circ, u_x^\circ)$ نقطه‌ای از $J^1(E)$ و θ تبدیلی از $SO(2)$ باشد، هدف یافتن تبدیل

$$\theta^{(1)} \cdot (x^\circ, u^\circ, u_x^\circ) = (\bar{x}^\circ, \bar{u}^\circ, \bar{u}_x^\circ),$$

است.

چندجمله‌ای

$$f(x) = u^\circ + u_x^\circ(x - x^\circ) = u_x^\circ x + (u^\circ - u_x^\circ x^\circ), \quad (9.2)$$

را که در آن $f(x^\circ) = u^\circ$ و $f'(x^\circ) = u_x^\circ$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به تابع (۹.۲)، تبدیل یافته‌ی f تحت زاویه‌ی θ تابع خطی

$$\bar{f}(\bar{x}) = \theta \cdot f(\bar{x}) = \frac{\sin \theta + u_x^\circ \cos \theta}{\cos \theta - u_x^\circ \sin \theta} \bar{x} + \frac{u^\circ - x^\circ u_x^\circ}{\cos \theta - u_x^\circ \sin \theta}, \quad u_x^\circ \neq \cot \theta, \quad (10.2)$$

می‌باشد. بنابراین:

$$\bar{x}^\circ = x^\circ \cos \theta - u^\circ \sin \theta,$$

و در نتیجه:

$$\bar{u}^\circ = \bar{f}(\bar{x}^\circ) = x^\circ \sin \theta + u^\circ \cos \theta.$$

حال با یک بار مشتق‌گیری از $\bar{u}^\circ$ داریم:

$$\bar{u}_x^\circ = \bar{f}'(\bar{x}^\circ) = \frac{\sin \theta + u_x^\circ \cos \theta}{\cos \theta - u_x^\circ \sin \theta}.$$

بنابراین ضابطه‌ی امتداد مرتبه‌ی اول عمل گروه $SO(2)^{(1)}$ روی $J^{(1)}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\theta^{(1)}.(x, u, u_x) = \left(x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta, \frac{\sin \theta + u_x \cos \theta}{\cos \theta - u_x \sin \theta} \right), \quad |\theta| \leq |\cot^{-1} u_x|$$

در مثال فوق همانگونه که مشاهده می‌شود $SO(2)^{(1)}$ روی متغیرهای (x, u) همانطوری عمل می‌کند که $SO(2)$ عمل می‌کند و $SO(2)^{(1)}$ تنها روی u_x به صورتی متفاوت عمل می‌کند. به طور کلی اگر $G^{(n)}$ روی $(x, u^{(n)})$ عمل کند، با تقلیل این عمل به مرتبه‌ی $k \leq n$ عمل $G^{(n)}$ معادل عمل $G^{(k)}$ خواهد بود. به ویژه برای $k = 0$ عمل $G^{(0)}$ با عمل G یکی است. بدین معنا که اگر $\pi_k^n : J^n(\mathcal{O}) \rightarrow J^n(\mathcal{O})$ نگاشت تصویر طبیعی با ضابطه‌ی $(x, u^{(k)}) = \pi_k^n(x, u^{(n)})$ باشد، $u^{(k)}$ شامل آن دسته از مؤلفه‌های u^α است که در آن $\#J \leq k$.
به عنوان مثال:

$$\pi_1^2(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = (x, y; u; u_x, u_y).$$

۵.۲ امتداد میدان‌های برداری و تقارن‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنیم M یک زیرمجموعه باز از $E = X \times U$ و V یک میدان برداری روی M با گروه یک پارامتری $\exp(\varepsilon V)$ باشد. امتداد مرتبه n -ام V را که با $V^{(n)}$ نشان می‌دهیم، یک میدان برداری روی $J^n(M)$ بوده که به آن مولد بی‌نهایت کوچک گروه یک پارامتری $[\exp(\varepsilon V)]^{(n)}$ نیز می‌گویند. بدین معنا که

$$V^{(n)}|_{(x, u^{(n)})} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} [\exp(\varepsilon V)]^{(n)}(x, u^{(n)}) \quad , \quad (x, u^{(n)}) \in J^n(M). \quad (11.2)$$

تعریف ۲.۵.۲. اگر

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0 \quad , \quad \nu = 1, \dots, l,$$

یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل باشد، این دستگاه از رتبه ماکسیمال است، هرگاه ماتریس ژاکوبین آن

$$J_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_j^\alpha} \right)_{m \times (p+qp^{(n)})},$$

از رتبه m باشد.

مثال ۳.۵.۲. معادله لاپلاس به صورت

$$\Delta = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

از رتبه ماکسیمال است، زیرا ماتریس ژاکوبین متغیرهای $(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ در $X \times U^{(2)}$ به صورت:

$$J_\Delta = (0, 0; 0; 0, 0; 1, 0, 1),$$

می‌باشد که به وضوح از رتبه ۱ است.

مثال ۴.۵.۲. معادله دیفرانسیل $\tilde{\Delta} = (u_{xx} + u_{yy})^2 = 0$ از رتبه ماکسیمال نیست، زیرا:

$$J_{\tilde{\Delta}} = (0, 0; 0, 0; 2(u_{xx} + u_{yy}), 0, 2(u_{xx} + u_{yy})),$$

در حالیکه $(u_{xx} + u_{yy})^2 = 0$ صفر می‌شود.

قضیه ۵.۵.۲. فرض کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل از رتبه ماکسیمال، تعریف شده در یک زیرمجموعه باز از $E = X \times U$ مانند M باشد. اگر G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل کرده و V یک مولد بی‌نهایت کوچک آن باشد، آنگاه G یک گروه تقارن از دستگاه $\Delta = 0$ می‌باشد اگر

$$V^{(n)}(\Delta) = 0 \pmod{\Delta}, \quad (12.2)$$

برهان. [۲۰]. □

مثال ۶.۵.۲. اگر $G = \text{SO}(2)$ روی $X \times U = \mathbb{R}^2$ عمل کند مولد بی‌نهایت کوچک

$$V = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u},$$

نظیر عمل گروه یک پارامتری

$$\exp(\varepsilon V)(x, u) = (x \cos \varepsilon - u \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + u \cos \varepsilon),$$

می‌باشد، داریم:

$$[\exp(\varepsilon V)]^{(1)}(x, u, u_x) = \left(x \cos \varepsilon - u \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + u \cos \varepsilon, \frac{\sin \varepsilon + u_x \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon - u_x \sin \varepsilon} \right),$$

به کمک فرمول (۱۱.۲) می‌توان دید که مولد بی‌نهایت کوچک این تبدیل برابر است با:

$$V^{(1)} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2) \frac{\partial}{\partial u_x},$$

حال معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$\Delta(x, u, u_x) = (u - x)u_x + u + x = 0, \quad (13.2)$$

ماتریس ژاکوبین آن به شکل

$$J_{\Delta} = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial u}, \frac{\partial \Delta}{\partial u_x} \right) = (1 - u_x, 1 + u_x, u - x),$$

می‌باشد، که با توجه به ماتریس ژاکوبین که باید $u - x \neq 0$ باشد رتبه در همه جا یک می‌باشد. حال برای نشان دادن اینکه (۲) SO گروه تقارن معادله (۱۳.۲) است داریم:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\Delta) &= -u \frac{\partial \Delta}{\partial x} + x \frac{\partial \Delta}{\partial u} + (1 + u_x^2) \frac{\partial \Delta}{\partial u_x}, \\ &= -u(1 - u_x) + x(1 + u_x) + (1 + u_x^2)(u - x), \\ &= u_x[(u - x)u_x + u + x], \\ &= u_x \Delta \pmod{\Delta}. \end{aligned}$$

تعریف ۷.۵.۲. فرض کنیم $M \subset E$ باز و $F(x, u^{(n)})$ یک تابع هموار روی $J^n(M)$ باشد. مشتق کامل F نسبت به x^i را که با $D_i F(x, u^{(n+1)})$ نشان می‌دهیم تابع همواری است که روی $J^{n+1}(M)$ تعریف شده و دارای این ویژگی است که اگر $u = f(x)$ تابعی هموار باشد آنگاه:

$$D_i F(x, f^{n+1}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i} [F(x, u^{(n)})].$$

لم بعدی که مستقیماً از قاعده زنجیره‌ای مشتق حاصل می‌شود فرمول صریحی برای محاسبه‌ی مشتق کامل در غالب یک عملگر مشتق به‌دست می‌دهد.

لم ۸.۵.۲. تابع $F(x, u^{(n)})$ روی فضای جت $J^n(M)$ مفروض است. اگر $J = (j_1, \dots, j_k)$ یک اندیس چندگانه و $u_{j,i}^\alpha = \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x^i}$ باشد آنگاه:

$$D_i F = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial F}{\partial u_J^\alpha}. \quad (14.2)$$

مثلاً اگر $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ با مختصات (x, y, u) باشد، در این صورت:

$$\begin{aligned} D_x F &= \frac{\partial F}{\partial x} + u_x \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxx} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots, \\ D_y F &= \frac{\partial F}{\partial y} + u_y \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xyy} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots, \end{aligned}$$

به ترتیب مشتق کامل F نسبت به x و y می‌باشند. به همین شکل مشتق کامل مراتب بالاتر را می‌توان نسبت به اندیس چندگانه‌ی $J = (j_1, \dots, j_k)$ به صورت:

$$D_J = D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_k}$$

بیان کرد.

قضیه ۹.۵.۲. فرض کنیم

$$V = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \varphi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

یک میدان برداری روی زیرمجموعه باز $M \subset E$ باشد. امتداد مرتبه n -ام میدان برداری V یک میدان برداری به شکل:

$$V^{(n)} = V + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \varphi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad (15.2)$$

روی $J^n(M)$ می‌باشد که ضرایب φ_α^J در (۹.۵.۲) با فرمول:

$$\varphi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J \left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha, \quad (16.2)$$

ساخته می‌شوند. شایان ذکر است عبارت $Q_\alpha = \varphi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha$ در (۱۶.۲) را مشخصه میدان برداری V می‌نامیم.

برهان. [۲۱].

□

مثال ۱۰.۵.۲. فرض کنید $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. میدان برداری کلی

$$V = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x, u) \frac{\partial}{\partial u},$$

بر $M = \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. مشخصه میدان برداری V تابع:

$$Q(x, u, u_x) = \varphi(x, u) - \xi(x, u) u_x,$$

می‌باشد و تابع $u = f(x)$ تحت گروه یک پارامتری تولید شده توسط V ناورداست اگر و تنها اگر در معادله دیفرانسیل معمولی $\xi(x, u) u_x = \varphi(x, u)$ صدق کند. امتداد مرتبه دوم V یک میدان برداری بر J^2 به صورت:

$$V^{(2)} = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{xx}(x, u^{(2)}) \frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

می‌باشد که ضرایب φ^x و φ^{xx} به صورت:

$$\begin{aligned} \varphi^x &= D_x Q + \xi u_{xx}, \\ &= \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x) u_x - \xi_u u_x^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{xx} &= D_x^2 Q + \xi u_{xxx}, \\ &= \varphi_{xx} + (2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) u_x + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2. \end{aligned}$$

محاسبه می‌شود. برای مثال امتداد دوم از مولد بی‌نهایت کوچک

$$V = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u},$$

به صورت زیر است :

$$V^{(2)} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + u_x^2) \frac{\partial}{\partial u_x} + 2u_x u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

که ضرایب به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\begin{aligned} \varphi^x &= D_x Q + \xi u_{xx}, \\ &= D_x (x + u u_x) - u u_{xx}, \\ &= 1 + u_x^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{xx} &= D_x^2 Q + \xi u_{xxx}, \\ &= D_x^2 (x + u u_x) - u u_{xxx}, \\ &= 2u_x u_{xxx}. \end{aligned}$$

در این صورت گروه تبدیلات را با انتگرال‌گیری از دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = -u, \quad \frac{du}{dt} = x, \quad \frac{dp}{dt} = 1 + p^2, \quad \frac{dq}{dt} = 2pq.$$

می‌توان بدست آورد. برای راحتی قرار می‌دهیم $u_x = p$ و $u_{xx} = q$ در نتیجه امتداد دوم گروه دورانی به صورت زیر است:

$$\left(x \cos t - u \sin t, x \sin t + u \cos t, \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - p \sin t}, \frac{q^2}{(\cos t - p \sin t)} \right).$$

تعریف ۱۱.۵.۲. تابع هموار $F : J^n \rightarrow \mathbb{R}$ که روی یک زیرمجموعه باز J^n تعریف می‌شود یک تابع دیفرانسیلی از مرتبه n نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۵.۲. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات نقطه‌ای باشد. یک ناوردای دیفرانسیلی، تابعی دیفرانسیلی مثل $I : J^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ است بطوریکه:

$$I(g^{(n)}.(x, u^{(n)})) = I(x, u^{(n)}),$$

مثال ۱۳.۵.۲. به مثال ۶.۵.۲ بازمی‌گردیم با توجه به تعریف قبلی، ناوردای دیفرانسیلی مرتبه صفر تابعی چون $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ است که در شرط $I(g.(x, u)) = I(x, u)$ صدق کند، می‌توان بررسی کرد

که شعاع $r = \sqrt{x^2 + u^2}$ تابع مورد نظر است بنابراین یک ناوردای دیفرانسیلی مرتبه صفر یا یک ناوردای معمولی است.

به همین ترتیب می‌توان دید که

$$\kappa = \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad w = \frac{xu_x - u}{x + uu_x},$$

به ترتیب ناوردهای دیفرانسیلی مرتبه اول و دوم می‌باشند.

تعریف ۱۴.۵.۲. ناوردهای دیفرانسیلی $I_1, \dots, I_k$ را مستقل تابعی گوئیم، هرگاه:

$$dI_1 \wedge \dots \wedge dI_k \neq 0,$$

و اکیداً مستقل تابعی گوئیم اگر:

$$dx \wedge du^{(n-1)} \wedge dI_1 \wedge \dots \wedge dI_k \neq 0.$$

مثال ۱۵.۵.۲. معادله مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - e^u = 0, \quad (17.2)$$

برای یافتن تقارن‌های این معادله، میدان برداری V متناظر با معادله (۱۷.۲)، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V = \zeta(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (18.2)$$

که امتداد مرتبه دوم آن به صورت زیر است:

$$V^{(2)} = V + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

ضرایب η^x و η^{xx} را طبق فرمول (۱۶.۲)، به دست خواهیم آورد.

$$\eta^x = \eta_x + (\eta_u - \zeta_x)u_x - \zeta_u u_x^2,$$

$$\begin{aligned} \eta^{xx} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \zeta_{xx})u_x + (\eta_{uu} - 2\zeta_{xu})u_x^2 \\ &+ \zeta_{uu}u_x^2 + (\eta_u - 2\zeta_x)u_{xx} - 3\zeta_u u_x u_{xx}, \end{aligned}$$

حال با تاثیر دادن امتداد مرتبه دوم V روی معادله (۱۷.۲)، خواهیم داشت:

$$\eta^{xx} - \frac{\zeta}{x^2}u_x + \frac{\eta^x}{x} - \eta e^u = 0, \quad (19.2)$$

اکنون ضرایب η^x و η^{xx} را در (۱۹.۲)، جایگذاری می‌نماییم و به پیمانه معادله، $u_{xx} = e^u - \frac{u_x}{x}$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \circ &= \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \zeta_{xx})u_x + (\eta_{uu} - 2\zeta_{xu})u_x^2 \\ &- \zeta_{uu}u_x^3 + (\eta_u - 2\zeta_x - 3\zeta_u u_x)\left(e^u - \frac{u_x}{x}\right) \\ &+ \frac{1}{x}\left[\eta_x + (\eta_u - \zeta_x)u_x - u_x^2\zeta_u\right] - \zeta\frac{u_x}{x^2} - \eta e^u. \end{aligned}$$

بنابراین در جدول مشخصه زیر داریم:

ضرایب	تک جمله‌ای
u_x^3	$\zeta_{uu} = \circ$
u_x^2	$\eta_{uu} - 2\zeta_{xu} + \frac{2}{x}\zeta_u = \circ$
u_x	$2\eta_{xu} - \zeta_{xx} + \left(\frac{\zeta}{x}\right)_x - 3\zeta_u e^u = \circ$
1	$\eta_{xx} + \frac{1}{x}\eta_x + (\eta_u - 2\zeta_x - \eta)e^u = \circ$

(۲۰.۲)

باانتگرال‌گیری از ضرایب جدول مشخصه، ضرایب η و ζ را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\zeta = c_1 x \ln x + c_2 x,$$

$$\eta = -2[c_1(1 + \ln x) + c_2 x],$$

به‌طوری‌که c_1 و c_2 ضرایب ثابت هستند.

در نتیجه مولدهای تقارن V_1 و V_2 به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} V_1 &= x \ln x \frac{\partial}{\partial x} - 2(1 + \ln x) \frac{\partial}{\partial u}, \\ V_2 &= x \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

۶.۲ تبدیلات هم ارز

برای بررسی و محاسبه گروه‌های تقارن دستگاه‌هایی که در آن توابع دلخواه وجود دارند، از روش تبدیلات هم ارز استفاده می‌کنیم. تبدیلات هم ارز ساختار دیفرانسیلی دستگاه معادلات را حفظ می‌کنند. بدون از دست دادن کلیت تعریف دستگاه معادلات دیفرانسیل، خانواده‌ی $\mathcal{F}_k$ از دستگاه‌های PDE را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}, F) = \circ, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (21.2)$$

که شامل L تابع و یا پارامتر $F = (F_1, \dots, F_L)$ باشد. ممکن است این توابع وابسته به متغیرهای مستقل و وابسته‌ی خاصی از دستگاه باشد. مولد بی نهایت کوچک دستگاه (۲۱.۲) به صورت:

$$V = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^q \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{\alpha=1}^l \varphi^\alpha(x, u, F) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (22.2)$$

است. که در آن

$$\xi^i = \xi(x, u), \quad \eta^j = \eta^j(x, u), \quad \varphi^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, F), \quad (23.2)$$

ضرایب هستند. در این روش، امتداد میدان برداری (۲۲.۲) امتداد توسعه یافته نامیده شده و با $\tilde{V}$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱.۶.۲. دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی

$$\begin{cases} v_x - u = 0 \\ v_t - k(u)u_x = 0 \end{cases} \quad (24.2)$$

مفروض است، به طوری که $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار از u می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، یک تابع دلخواه در صورت دستگاه معادلات وجود دارد، که در الگوریتم یافتن تقارن‌ها نیازمند برخی ملاحظات است.

باتوجه به آنکه فضای کامل نظیر این معادله $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ است، میدان برداری نظیر (۲۴.۲)، برای یافتن گروه تقارن به صورت زیر است:

$$V = \zeta(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \psi(x, t, u, v) \frac{\partial}{\partial v} + Q(x, t, u, v, k) \frac{\partial}{\partial k},$$

امتداد مرتبه اول V عبارتست از:

$$V^{(1)} = V + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \psi^x \frac{\partial}{\partial v_x} + \psi^t \frac{\partial}{\partial v_t} + Q^x \frac{\partial}{\partial k_x} + Q^t \frac{\partial}{\partial k_t},$$

حال با اثر دادن $V^{(1)}$ روی دستگاه معادلات (۲۴.۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \psi^x - \eta = 0 \\ \psi^t - Qu_x - k\eta^x = 0 \end{cases} \quad (25.2)$$

در نتیجه ضرایب ψ^x و ψ^t و η^x را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$\begin{aligned}\psi^x &= \psi_x + (\psi_v - \zeta_x)v_x - \zeta_v v_x^2 - \zeta_u u_x v_x \\ &\quad - \tau_x v_t + \psi_u u_x - \tau_u u_x v_t - \tau_v v_x v_t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi^t &= \psi_t + \psi_u u_t + (\psi_v - \tau_t)v_t - \zeta_t v_x \\ &\quad - \zeta_u v_x u_t - \zeta_v v_t v_x - \tau_u u_t v_t - \tau_v v_t^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta^x &= \eta_x + (\eta_u - \zeta_x)u_x + \eta_v v_x - \zeta_u u_x^2 \\ &\quad - \zeta_v v_x u_x - \tau_x u_t - \tau_u u_t u_x - \tau_v v_x u_t.\end{aligned}$$

اکنون ضرایب را در دستگاه معادلات (۲۵.۲)، جایگذاری می نماییم. در معادله اول خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\circ &= (\psi_x - \eta) + (\psi_v - \zeta_x)v_x - \zeta_v v_x^2 \\ &\quad - \zeta_u u_x v_x - \tau_x v_t + \psi_u u_x - \tau_u u_x v_t - \tau_v v_x v_t,\end{aligned}$$

جدول ضرایب آن به صورت زیر است:

تک جمله ای	ضرایب
$\backslash$	$\psi_x - \eta = \circ$
v_x	$\psi_v - \zeta_x = \circ$
v_t	$\tau_x = \circ$
u_x	$\psi_u = \circ$
v_x^2	$-\zeta_v = \circ$
$v_x u_x$	$\zeta_u = \circ$
$u_x v_t$	$\tau_u = \circ$
$v_x v_t$	$\tau_v = \circ$

(۲۶.۲)

همچنین در دومین معادله دستگاه داریم:

$$\begin{aligned}\circ &= (\psi_t - k\eta_x) + (\psi_u + k\tau_x)u_t + (\psi_v - \tau_t)v_t + (-\zeta_t - k\eta_v)v_x + (k\tau_v - \zeta_u)u_t v_x \\ &\quad - \zeta_v v_x v_t + (-k\eta_u + k\zeta_x - Q)u_x - \tau_v v_t^2 + k\zeta_u u_x^2 + k\zeta_v v_x u_x + k\tau_u u_t u_x - \tau_u u_t v_t,\end{aligned}$$

جدول مشخصه به صورت زیر است:

ضرایب	تک جمله ای
$-\zeta_t - k\eta_v = 0$	v_x
$-\tau_t + \psi_v = 0$	v_t
$\psi_u + k\tau_x = 0$	u_t
$-k\eta_u + k\zeta_x - Q = 0$	u_x
$k\zeta_u = 0$	$u_x^\vee$
$-\tau_v = 0$	$v_t^\vee$
$\vdots$	$\vdots$
$\psi_t - k\eta_x = 0$	$\backslash$

(۲۷.۲)

باجل توام معادلات جداول مشخصه به مولدهای تقارنی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & V_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
 V_3 &= \frac{\partial}{\partial v}, & V_4 &= \frac{\partial}{\partial u} + x \frac{\partial}{\partial v}, \\
 V_5 &= x \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial v} + \vee t \frac{\partial}{\partial t}, & V_6 &= u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}, \\
 V_7 &= F(t) \frac{\partial}{\partial t} - kF'(t) \frac{\partial}{\partial k}, & V_8 &= v \frac{\partial}{\partial x} - u^\vee \frac{\partial}{\partial u} + \vee k u \frac{\partial}{\partial k}, \\
 V_9 &= x^\vee \frac{\partial}{\partial x} + (v - xu) \frac{\partial}{\partial u} + xv \frac{\partial}{\partial v} + \vee x k \frac{\partial}{\partial k}, \\
 V_{10} &= xv \frac{\partial}{\partial x} + u(v - xu) \frac{\partial}{\partial u} + v^\vee \frac{\partial}{\partial v} + \vee (xu + v) k \frac{\partial}{\partial k}.
 \end{aligned}$$

۷.۲ کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل جزئی

در این بخش روشی برای کاهش مرتبه دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه می‌شود. با استفاده از این روش می‌توان دسته‌ی وسیعی از جواب‌ها را پیدا کرد. این جواب‌ها توسط برخی ناوردهای خاص دستگاه معادلات دیفرانسیل مشخص می‌گردند. آن دسته از جواب‌های دستگاه مورد مطالعه که تحت یک گروه تقارنی r -پارامتری ناوردا می‌باشد را می‌توان با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل که مرتبه‌ی آن r واحد از مرتبه‌ی دستگاه اصلی کمتر است به دست آورد.

دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0,$$

را روی زیرمجموعه باز $O \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ از فضای متغیرهای مستقل و وابسته را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات موضعی باشد که روی O عمل می‌کند. جواب $u = f(x)$

از دستگاه بالا را G -ناوردا می‌گوییم اگر تحت تبدیلات گروه، ناوردا باشد. برای مثال، معادله‌ی لاپلاس دوبعدی

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

را در نظر می‌گیریم. تابع $u = \ln(x^2 + y^2)$ یک جواب بنیادی برای معادله لاپلاس است. این جواب تحت گروه یک پارامتری

$$\text{SO}(2) : (x, y, u) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, u),$$

ناوردا است. به عبارت دیگر، جواب $u = f(x)$ رایک جواب G -ناوردا از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی می‌گوییم اگر گراف آن $\Gamma(f) = (x, f(x))$ موضعا یک زیر مجموعه G -ناوردا از O باشد.

اگر G گروه تقارنی از دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی $\Delta = 0$ باشد، آنگاه می‌توان هریک از جواب‌های G -ناوردای $\Delta = 0$ را با حل دستگاه کاهش یافته‌ی معادلات دیفرانسیل به دست آورد. این دستگاه کاهش یافته را با Δ/G نشان می‌دهیم، که دارای متغیرهای کمتری نسبت به دستگاه اصلی است. فرض کنیم G یک گروه موضعی از تبدیلات تصویری روی O باشد، یعنی اگر $g \in G$ و $(x, u) \in E$ باشد در این صورت

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x, u) = (\phi_g(x), \psi_g(x, u)).$$

این عمل را به صورت $\bar{x} = g.x = \phi_g(x)$ نمایش می‌دهیم، که روی زیر مجموعه‌ی باز $X \subset E$ تعریف می‌شود. فرض کنیم s بعد مدارات این عمل باشد، به طوریکه $p > s$ (در حالت $p = s$ نتیجه بدیهی است، در حالی که اگر $s > p$ هیچ تابع G -ناوردایی وجود ندارد). در این صورت $p - s$ ناوردای مستقل تابعی مانند $y^1 = \eta^1(x), \dots, y^{p-s} = \eta^{p-s}$ از گروه تبدیلات تصویری روی زیرمجموعه‌ی باز $\Omega \subset X$ وجود دارد. هریک از این توابع روی O ناوردا هستند. به علاوه، می‌توان q ناوردای دیگر از عمل G روی O به شکل $v^1 = \zeta^1(x, u), \dots, v^q = \zeta^q(x, u)$ را پیدا کرد، که به همراه ناوردهای η^i یک مجموعه‌ی کامل از $p + q - s$ ناوردای مستقل تابعی برای G روی O می‌سازد. مجموعه‌ی این ناوردها را به صورت

$$y = \eta(x), \quad v = \zeta(x, u), \quad (28.2)$$

نشان می‌دهیم. از این به بعد در دستگاه کاهش یافته y -ها را به عنوان متغیرهای مستقل جدید و v -ها را به عنوان متغیرهای وابسته جدید در نظر می‌گیریم. توجه کنید که تعداد متغیرهای مستقل به $p - s$ متغیر $y^1, \dots, y^{p-s}$ کاهش می‌یابد.

حال یک تناظر یک به یک بین توابع G -ناوردای $u = f(x)$ و توابع دلخواه $v = h(x)$ ، شامل متغیرهای جدید پیدا می‌کنیم. برای یافتن این تناظر قضیه‌ی تابع ضمنی را برای دستگاه $y = \eta(x)$ با $p - s$ متغیر بکار می‌بریم. این متغیرهای جدید را به جای $y^1, \dots, y^{p-s}$ با $\tilde{x} = x^{i_1}, \dots, x^{i_{p-s}}$ نشان می‌دهیم، و

s متغیر باقی مانده را با $\hat{x} = (x^j, \dots, x^{j_s})$ نشان می‌دهیم. بنابراین جواب دستگاه را می‌توان با

$$\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y), \quad (29.2)$$

نشان داد، به‌طوری‌که γ یک تابع خوش تعریف است. $p - s$ متغیر نخست، $\tilde{x}$ ، را متغیرهای اصلی و s متغیر باقی مانده دیگر، $\hat{x}$ ، را به‌عنوان متغیرهای پارامتری در نظر می‌گیریم. بنابراین یک زیر ماتریس وارون پذیر $(p - s) \times (p - s)$ - بعدی از دستگاه ژاکوبین مانند

$$\left(\frac{\partial \eta^j}{\partial \tilde{x}^i} \right)_{ij},$$

وجود دارد. با بکارگیری قضیه تابع ضمنی برای حل دستگاه ناورداهای $\zeta(x, u) = v$ برحسب متغیرهای (y, u) به جای متغیرهای (x, u) و متغیرهای پارامتری $\hat{x}$ می‌توان نوشت:

$$u = \tilde{\delta}(x, v) = \tilde{\delta}(\hat{x}, \gamma(\hat{x}, y), v) \equiv \delta(\hat{x}, y, v). \quad (30.2)$$

اگر $v = h(y)$ یک تابع هموار باشد، آنگاه (۲۸.۲) و (۳۰.۲) توابع G -ناوردا را روی O به‌شکل

$$u = f(x) = \delta(\hat{x}, \eta(x), h(\eta(x))), \quad (31.2)$$

تولید می‌کنند. برعکس اگر $u = f(x)$ تابعی هموار روی O باشد، آنگاه به‌سادگی می‌توان دید که تابعی مانند $v = h(x)$ وجود دارد به‌طوری‌که f و تابع متناظر با (۳۱.۲) موضعا معادلند. دیدیم که چگونه توابع G -ناوردا می‌توانند مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل را کاهش دهند. این روش به تبدیلات تصویری اختصاص دارند اما می‌توان آن را به تبدیلات نقطه ای نیز تعمیم داد.

مثال ۱.۷.۲. معادله ۳-بعدی ZKB^۱، را در نظر بگیرید:

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} + cu_{xyy} - du_{xx} - eu_{yy} = 0, \quad (32.2)$$

به‌طوری‌که a, b, c, d, e ، مقادیر ثابت مثبت هستند که شامل کمیت‌های فیزیکی از قبیل جرم، چگالی، میدان مغناطیسی، فرکانس پلاسما، حرکت فرکانسی یون و... است. در حالیکه x, y و t متغیرهای مستقل هستند که به‌ترتیب متغیرهای فاصله‌ای و زمان را نشان می‌دهند، و $u(x, y, t)$ متغیر وابسته است که موج را نشان می‌دهد. مولدهای تقارن معادله (۳۲.۲)، را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & V_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ V_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, & V_4 &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

^۱Zakharov-Kuznetso-Burgers

دستگاه معادلات مشخصه متناظر با V_1 به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\circ} = \frac{dt}{\circ} = \frac{du}{\circ},$$

در نتیجه با حل معادله مشخصه فوق، ناوردهای حاصل شده عبارتند از:

$$z = y, \quad w = t, \quad r = f(z, w).$$

بنابراین معادله کاهش یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$f_w - e f_{zz} = \circ.$$

حال به ازای V_2 داریم:

$$h = x, \quad w = t, \quad r = f(h, w).$$

معادله کاهش یافته به صورت:

$$f_w - a f f_h + b f_{hhh} - d f_{hh} = \circ,$$

همچنین برای V_3 بطور مشابه معادله کاهش یافته زیر را خواهیم داشت:

$$a f f_h + b f_{hhh} + c f_{hzz} - d f_{hh} - e f_{zz} = \circ.$$

به ازای مولد V_4 دستگاه معادلات مشخصه به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{t} = \frac{dy}{\circ} = \frac{dt}{\circ} = a du,$$

در نتیجه ناوردهای حاصل شده عبارتند از:

$$z = y, \quad w = t, \quad r = f(w, z) + \frac{x}{at}.$$

معادله کاهش یافته (۳۲.۲)، متناظر با مولد V_4 به صورت زیر است:

$$w f_w - e w f_{zz} + f = \circ.$$

مثال ۲.۷.۲. معادله DKS^۲، توصیف کننده یک دستگاه دینامیکی غیرخطی می باشد. در این مدل غیرخطی، متغیر وابسته $h = h(x, y, t)$ در معادله دیفرانسیل جزئی از مرتبه چهار زیر صدق می کند:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla^2 h - \nabla^4 h + |\nabla h|^2 - \alpha h \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (33.2)$$

^۲Damped Kuramoto-Sivashinsky

این معادله در دستگاه مختصات (x, y, t, h) تعریف شده است، که دارای یک گروه تقارنی ۷-بعدی به شرح زیر است:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$V_4 = e^{-\alpha t} \frac{\partial}{\partial h}, \quad V_5 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y},$$

$$V_6 = e^{-\alpha t} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\alpha}{2}\right) x e^{-\alpha t} \frac{\partial}{\partial h},$$

$$V_7 = e^{-\alpha t} \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\alpha}{2}\right) y e^{-\alpha t} \frac{\partial}{\partial h}$$

به ازای مولد تقارنی V_6 دستگاه معادلات مشخصه عبارت است از:

$$\frac{dx}{e^{-\alpha t}} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{0} = \frac{2dh}{\alpha x e^{-\alpha t}}. \quad (34.2)$$

در نتیجه، با حل معادله فوق ناوردهای حاصل شده عبارتند از:

$$z = y, \quad w = t, \quad r = h - \frac{1}{4} \alpha x^2. \quad (35.2)$$

با توجه به آخرین ناوردا، معادله (33.2) دارای جوابی به فرم کلی زیر می‌باشد:

$$h = f(z, w) + \frac{1}{4} \alpha x^2, \quad (36.2)$$

اکنون با جایگزین کردن جواب ناوردای فوق در معادله (33.2) می‌توان $f(z, w)$ را به دست آورد. ملاحظه می‌گردد که این تابع، جوابی از معادله دیفرانسیل زیر می‌باشد:

$$f_w + f_{zz} + f_{4z} - f_z^2 + \alpha f + \frac{1}{4} \alpha = 0.$$

همچنین به ازای مولد تقارنی V_3 ناوردهای حاصل شده عبارتند از:

$$z = x, \quad w = y, \quad r = h, \quad h = f(z, w),$$

در نتیجه معادله کاهش یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$f_{zz} + f_{ww} + f_{4z} + 2f_{zzww} + f_{4w} - (f_z^2) + f_w^2 + \alpha f = 0.$$

همچنین در ترکیب $V_1 + V_3$ ناورداها به صورت زیر خواهد بود:

$$z = x, \quad w = t - x, \quad r = h, \quad h = f(z, w),$$

معادله کاهش یافته را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$f_w + f_{ww} + f_{zz} + f_{\epsilon w} + 2f_{zzww} + f_{\epsilon z} - (f_w^2 + f_z^2) + \alpha f = 0.$$

فصل ۳

تقارنهای لی و جوابهای معادله برهمکنش الکترون-الکترومغناطیسی تحت اثر دوپلر غیر عادی

سیکلوترون یک شتابدهنده ذرات اتمی است که در آن ذرات باردار به وسیله میدان الکتریکی یا میدان مغناطیسی تا سرعت های بسیار زیادی شتاب داده میشوند. فرض می کنیم یک پرتوالکترون در میان میدان مغناطیسی ثابت B_0 با سرعت $v_{||}$ شناور است و با موج الکترومغناطیسی سیار تحت شرایط رزونانس سیکلوترون الکترون دوپلر غیر عادی

$$\omega - kv_{||} = -\omega_H, \quad (1.3)$$

برهمکنش می کند.

که در آن $\omega = eB_0/m\gamma$ فرکانس سیکلوترون الکترون، m, e, γ بار الکترون، جرم و فاکتور لورنتز هستند.

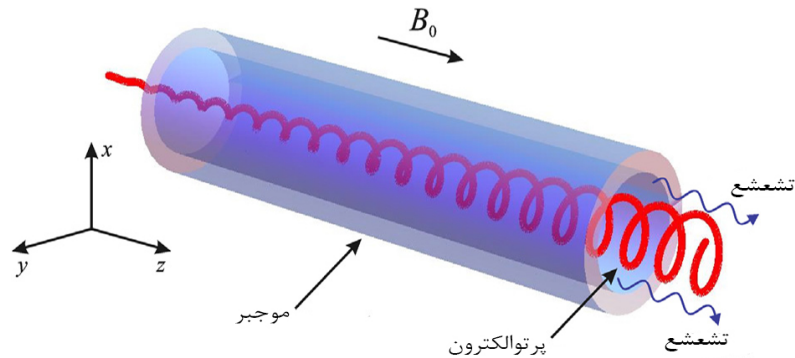
رزونانس یا تشدید عبارتست از تمایل سیستم به نوسان با بیشینه دامنه در فرکانس هایی خاص که به آن فرکانس رزونانس یا فرکانس تشدید می گویند.

در معادله (۱.۳) کاملاً مشهود است که شرط رزونانس زمانی حفظ می شود که سرعت $v_{||}$ از سرعت فازی $v_{ph} = \omega/k$ موج الکترومغناطیسی بیشتر باشد.

اثر دوپلر غیر عادی زمانی رخ می دهد که یک نوسانگر الکترومغناطیسی با سرعت نور حرکت کند.

در تصویر (۱)، طرح کلی میز رزونانس سیکلوترون دوپلر غیر عادی کشیده شده است.

میزر تقویت کننده ریز موجی است که با تحریک اتم ها یا مولکول ها به سطح انرژی بالاتر، عمل تقویت را انجام می دهد.



تصویر (۱): طرح میز رزونانس سیکلوترون دوپلر غیرعادی

الکترونهایی که در موجبر تزریق می‌شوند، حرکت محوری دارند. در طول برهمکنش با موج الکترومغناطیسی الکترون ها انرژی انتقالی خود را از دست داده و انرژی دورانی بدست می آورند در چنین شرایطی، انرژی منفی موج آرام سیکلوترون در پرتو الکترون القا می شود. برهمکنش موج الکترون در میز رزونانس سیکلوترون الکترون با دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی زیر توصیف می شود که $a(z, t) = a_x + ia_y$ بیانگر موج مایکروویو با پولاریزاسیون مدور و $p(z, t) = p_x + ip_y$ نشان دهنده تکانه انتقالی نرمالیزه شده الکترون و دستگاه

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial a}{\partial t} = p, \\ \frac{\partial p}{\partial z} + ip|p|^2 = a. \end{cases} \quad (2.3)$$

توصیف کننده ماهیت فیزیکی سیستم می باشد. در ادامه خواهیم دید که این برهمکنش باعث تقویت موج ماکروویوی خواهد شد.

برای یافتن گروه تقارن دستگاه (۲.۳) ابتدا مولد بی نهایت کوچک را به عنوان کاندیدای جبر لی گروه تقارن در نظر می گیریم، سپس این مولد را تا مرتبه معادله ادامه می دهیم و با استفاده از قضیه محک ناوردای امتداد میدان برداری را روی معادله اثر داده و به پیمانه آن مساوی صفر قرار می دهیم. در این مرحله به یک دستگاه PDE خطی بنام معادله مشخصه می رسم و با حل این دستگاه ضرایب مولد به دست می آید. چهار مولد تقارن برای این دستگاه معادله دیفرانسیل جزئی می یابیم که تقارن های نقطه ای معادله (۲.۳) را نشان می دهد، آنگاه با ترکیب مولد ها به جواب های خود متشابه خواهیم رسید. با ترکیب خطی مولد های V_2 و V_3 به جواب خود متشابه ای خواهیم رسید که توصیف کننده فرکانس مدوله شده پالس است.

با استفاده از مولد تقارن V_3 به جواب خود متشابه ای می رسم که دستگاهی ODE را نتیجه می دهد که توصیف کننده تقویت و فشردگی پالس های الکترومغناطیسی در میز سیکلوترون است.

۱.۳ گروه تقارنی معادله

دستگاه معادله دیفرانسیل جزئی (۲.۳) دستگاهی است غیر خطی که روی فضای کامل $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$ تعریف شده است. با جایگذاری $z \rightarrow z - t$ معادله (۲.۳) را به صورت زیر می نویسیم.

$$\begin{cases} a_t = p, \\ p_z + ip|p|^2 = a. \end{cases} \quad (۳.۳)$$

با توجه به اینکه $|p|^2 = pp^*$ داریم:

$$\begin{cases} a_t = p, \\ p_z + ip^2 p^* = a. \end{cases} \quad (۴.۳)$$

این دستگاه معادلات دیفرانسیل شامل دو متغیر مستقل z و t و چهار متغیر وابسته a, p, a^* و p^* می باشد. چون معادله مرتبه اول است، امتداد مرتبه اول میدان برداری

$$\begin{aligned} V = & \xi_t(z, t, a, p, a^*, p^*) \frac{\partial}{\partial t} + \xi_z(z, t, a, p, a^*, p^*) \frac{\partial}{\partial z} + \varphi_a(z, t, a, p, a^*, p^*) \frac{\partial}{\partial a} \\ & + \varphi_p(z, t, a, p, a^*, p^*) \frac{\partial}{\partial p} + \varphi_{a^*}(z, t, a, p, a^*, p^*) \frac{\partial}{\partial a^*} + \varphi_{p^*}(z, t, a, p, a^*, p^*) \frac{\partial}{\partial p^*}, \end{aligned}$$

را با توجه به قضیه ۹.۵.۲ به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} V^{(1)} = & V + \varphi_a^t \frac{\partial}{\partial a_t} + \varphi_a^z \frac{\partial}{\partial a_z} + \varphi_p^t \frac{\partial}{\partial p_t} + \varphi_p^z \frac{\partial}{\partial p_z} \\ & + \varphi_{a^*}^t \frac{\partial}{\partial a_t^*} + \varphi_{a^*}^z \frac{\partial}{\partial a_z^*} + \varphi_{p^*}^t \frac{\partial}{\partial p_t^*} + \varphi_{p^*}^z \frac{\partial}{\partial p_z^*}, \end{aligned} \quad (۵.۳)$$

با توجه به قضیه ۵.۵.۲، $V^{(1)}$ را روی معادله (۴.۳) اثر داده و داریم:

$$\begin{cases} \varphi_a^t = \varphi_p, \\ \varphi_p^z + 2ipp^* \varphi_p + ip^2 \varphi_{p^*} = \varphi_a. \end{cases} \quad (۶.۳)$$

طبق رابطه (۱۶.۲) مشخصه های میدان برداری V ، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} Q_a = & \varphi_a - \xi_t a_t - \xi_z a_z - \xi_t p_t - \xi_z p_z \\ & - \xi_t a_t^* - \xi_z a_z^* - \xi_t p_t^* - \xi_z p_z^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_p = & \varphi_p - \xi_t a_t - \xi_z a_z - \xi_t p_t - \xi_z p_z \\ & - \xi_t a_t^* - \xi_z a_z^* - \xi_t p_t^* - \xi_z p_z^*. \end{aligned}$$

حال عملگرهای مشتق D_t و D_z را طبق رابطه (۱۴.۲) به صورت زیر خواهیم داشت:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + a_t \frac{\partial}{\partial a} + p_t \frac{\partial}{\partial p} + a_t^* \frac{\partial}{\partial a^*} + p_t^* \frac{\partial}{\partial p^*} + a_{tt} \frac{\partial}{\partial a_t} + a_{zt} \frac{\partial}{\partial a_z} + p_{tt} \frac{\partial}{\partial p_t} + p_{tz} \frac{\partial}{\partial p_z} + a_{tt}^* \frac{\partial}{\partial a_t^*} + a_{zt}^* \frac{\partial}{\partial a_z^*} + p_{tt}^* \frac{\partial}{\partial p_t^*} + p_{tz}^* \frac{\partial}{\partial p_z^*},$$

$$D_z = \frac{\partial}{\partial z} + a_z \frac{\partial}{\partial a} + p_z \frac{\partial}{\partial p} + a_z^* \frac{\partial}{\partial a^*} + p_z^* \frac{\partial}{\partial p^*} + a_{tz} \frac{\partial}{\partial a_t} + a_{zz} \frac{\partial}{\partial a_z} + p_{tz} \frac{\partial}{\partial p_t} + p_{zz} \frac{\partial}{\partial p_z} + a_{tz}^* \frac{\partial}{\partial a_t^*} + a_{zz}^* \frac{\partial}{\partial a_z^*} + p_{tz}^* \frac{\partial}{\partial p_t^*} + p_{zz}^* \frac{\partial}{\partial p_z^*}.$$

حال به محاسبه ضرایب φ_a^t و φ_p^z طبق رابطه (۱۶.۲) می پردازیم:

$$\begin{aligned} \varphi_a^t &= D_t Q_a + \xi_t a_{tt} + \xi_z a_{zt} + \xi_t p_{tt} + \xi_z p_{zt} + \xi_t a_{tt}^* + \xi_z a_{zt}^* + \xi_t p_{tt}^* + \xi_z p_{zt}^*, \\ &= \varphi_{at} + a_t \varphi_{aa} + p_t \varphi_{ap} + a_t^* \varphi_{aa^*} + p_t^* \varphi_{ap^*} - \xi_{tt} a_t - \xi_{ta} a_t^* - \xi_{tp} a_t p_t \\ &\quad - \xi_{ta^*} a_t a_t^* - \xi_{tp^*} a_t p_t^* - \xi_{zt} a_z - \xi_{za} a_t a_z - \xi_{zp} a_z p_t - \xi_{za^*} a_z a_t^* - \xi_{zp^*} a_z p_t^* \\ &\quad - \xi_{tt} p_t - \xi_{ta} a_t p_t - \xi_{tp} p_t^* - \xi_{ta^*} p_t a_t^* - \xi_{tp^*} p_t p_t^* - \xi_{zt} p_z - \xi_{za} p_z a_t \\ &\quad - \xi_{zp} p_z p_t - \xi_{za^*} p_z a_t^* - \xi_{zp^*} p_z p_t^* - \xi_{tt} a_t^* - \xi_{ta} a_t^* a_t - \xi_{tp} p_t a_t^* - \xi_{ta^*} a_t^* a_t^* \\ &\quad - \xi_{tp^*} a_t^* p_t^* - \xi_{zt} a_z^* - \xi_{za} a_z^* a_t - \xi_{zp} a_z^* p_t - \xi_{za^*} a_z^* a_z^* - \xi_{zp^*} p_z^* a_z^* \\ &\quad - \xi_{tt} p_t^* - \xi_{ta} p_t^* a_t - \xi_{tp} p_t^* p_t - \xi_{ta^*} p_t^* a_t^* - \xi_{tp^*} a_t^* p_t^* - \xi_{zt} p_z^* \\ &\quad - \xi_{za} p_z^* - \xi_{za^*} p_z^* a_t - \xi_{zp} p_z^* p_t - \xi_{za^*} a_t^* p_z^* - \xi_{zp^*} p_z^* p_z^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_p^z &= D_z Q_p + \xi_t a_{tz} + \xi_z a_{zz} + \xi_t p_{tz} + \xi_z p_{zz} + \xi_t a_{tz}^* + \xi_z a_{zz}^* + \xi_t p_{tz}^* + \xi_z p_{zz}^*, \\ &= \varphi_{pz} + a_z \varphi_{pa} + p_z \varphi_{pp} + a_z^* \varphi_{pa^*} + p_z^* \varphi_{pp^*} - \xi_{tz} a_t - \xi_{ta} a_t a_z - \xi_{tp} a_t p_z \\ &\quad - \xi_{ta^*} a_t a_z^* - \xi_{tp^*} a_t p_z^* - \xi_{zz} a_z - \xi_{za} a_z^* - \xi_{zp} a_z p_z - \xi_{za^*} a_z a_z^* - \xi_{zp^*} a_z p_z^* \\ &\quad - \xi_{tz} p_t - \xi_{ta} a_z p_t - \xi_{tp} p_t p_z - \xi_{ta^*} p_t a_z^* - \xi_{tp^*} p_t p_z^* - \xi_{zz} p_z - \xi_{za} p_z a_z \\ &\quad - \xi_{zp} p_z^* - \xi_{za^*} p_z a_z^* - \xi_{zp^*} p_z p_z^* - \xi_{tz} a_t^* - \xi_{ta} a_t^* a_z - \xi_{tp} p_z a_t^* - \xi_{ta^*} a_t^* a_z^* \\ &\quad - \xi_{tp^*} p_z^* p_t^* - \xi_{zz} p_z^* - \xi_{za} p_z^* a_z - \xi_{zp} p_z^* p_z - \xi_{za^*} a_z^* p_z^* - \xi_{zp^*} p_z^* p_z^*. \end{aligned}$$

باجایگذاری φ_p^z و φ_a^t در (۶.۳) و مساوی قرار دادن ضرایب مشتقات a ، p ، a^* و p^* در دو طرف تساوی‌ها به جداول زیر خواهیم رسید:

ضرایب	تک جمله ای
$\varphi_{aa} - \zeta_{tt} = 0$	a_t
$\varphi_{ap} + \zeta_{tt} = 0$	p_t
$\varphi_{aa^*} - \zeta_{tt} = 0$	a_t^*
$\varphi_{ap^*} - \zeta_{tt} = 0$	p_t^*
$-\zeta_{ta} = 0$	a_t^2
$-\zeta_{tp} - \zeta_{ta} = 0$	$a_t p_t$
$\vdots$	$\vdots$
$-\zeta_{zt} = 0$	a_z

(۷.۳)

ضرایب	تک جمله ای
$\varphi_{ap} - \zeta_{zz} = 0$	a_z
$\varphi_{pp} + \zeta_{zz} = 0$	p_z
$\varphi_{pa^*} - \zeta_{zz} = 0$	a_z^*
$\varphi_{pp^*} - \zeta_{zz} = 0$	p_z^*
$-\zeta_{tz} = 0$	a_t
$-\zeta_{ta} = 0$	$a_t a_z$
$\vdots$	$\vdots$
$-\zeta_{zp^*} = 0$	p_z^{*2}

(۸.۳)

با حل توام دستگاه معادلات مشخصه خواهیم داشت:

$$\xi_t = c_3 t + c_1,$$

$$\xi_z = -c_3 z + c_2,$$

$$\varphi_a = \left(\frac{3}{4} c_3 + i c_4 \right) a,$$

$$\varphi_p = \left(\frac{1}{4} c_3 + i c_4 \right) p.$$

به طوریکه $c_k \in \mathbb{R}$ به ازای $k = 1, \dots, 4$ ، ثابتهای دلخواه هستند. بنابراین جبرلی تقارنهای نقطه‌ای معادله (۳.۳) توسط میدانهای برداری زیر تولید می‌شود.

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$V_2 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$V_3 = t \frac{\partial}{\partial t} - z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{3}{4} \left(a \frac{\partial}{\partial a} + a^* \frac{\partial}{\partial a^*} \right) + \frac{1}{4} \left(p \frac{\partial}{\partial p} + p^* \frac{\partial}{\partial p^*} \right),$$

$$V_4 = i \left(a \frac{\partial}{\partial a} - a^* \frac{\partial}{\partial a^*} \right) + i \left(p \frac{\partial}{\partial p} - p^* \frac{\partial}{\partial p^*} \right).$$

جدول جابجاگرهای زیر نشان می‌دهد که میدانهای برداری فوق تشکیل یک جبرلی می‌دهند.

$[,]$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	$\circ$	$\circ$	V_1	$\circ$
V_2	$\circ$	$\circ$	$-V_2$	$\circ$
V_3	$-V_1$	V_2	$\circ$	$\circ$
V_4	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$

(۹.۳)

برای محاسبه گروه تبدیلات تقارن معادلات زیر را با شرایط اولیه $t'|_{\varepsilon=0} = t$ ، $z'|_{\varepsilon=0} = z$ ، $a'|_{\varepsilon=0} = a$ و $p'|_{\varepsilon=0} = p$ حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{dt'}{d\varepsilon} &= \xi_t(t', z', a', p'), & \frac{dz'}{d\varepsilon} &= \xi_z(t', z', a', p'), \\ \frac{da'}{d\varepsilon} &= \varphi_a(t', z', a', p'), & \frac{dp'}{d\varepsilon} &= \varphi_p(t', z', a', p'), \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

بنابراین به ازای هر V_i ، $i = ۱, \dots, ۴$ گروه‌های یک پارامتری G_i تولیدشده توسط V_i به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} G_1 &: (t + \varepsilon, z, a, p), \\ G_2 &: (t, z + \varepsilon, a, p), \\ G_3 &: \left(e^\varepsilon t, \frac{z}{e^\varepsilon}, e^{\frac{\varepsilon}{\gamma}} a, e^{\frac{\varepsilon}{\gamma}} p \right), \\ G_4 &: (t, z, ae^{i\varepsilon}, pe^{i\varepsilon}). \end{aligned}$$

گروه G_1 و G_2 به ترتیب گروه تبدیلات انتقال نسبت به زمان t و مکان z هستند، همچنین G_3 و G_4 گروه تبدیلات تجانس هستند.

اگر $a = a(t, z)$ و $p = p(t, z)$ جواب های معادلات (۲.۳) باشند، آنگاه:

$$G_1 : a = a(t - \varepsilon, z), \quad p = p(t - \varepsilon, z),$$

$$G_2 : a = a(t, z - \varepsilon), \quad p = p(t, z - \varepsilon),$$

$$G_3 : a = e^{-\varepsilon/\gamma} a(e^{-\varepsilon} t, e^\varepsilon z), \quad p = e^{\frac{-\varepsilon}{\gamma}} p(e^{-\varepsilon} t, e^\varepsilon z),$$

$$G_4 : a = e^{-i\varepsilon} a(t, z), \quad p = e^{-i\varepsilon} p(t, z),$$

جواب‌های دیگر این معادلات می‌باشند.

۲.۳ جوابهای ناوردای گروهی معادله

ترکیب خطی مولدهای V_1 و V_2 به صورت:

$$V_1 + cV_2 = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z},$$

جوابهای موج سیار معادله (۳.۳) را به صورت زیر نتیجه خواهد داد:

$$a = a(z - ct),$$

$$p = p(z - ct).$$

همچنین در ترکیب خطی $V_1 - V_2 - \Delta V_2$ ، که به صورت:

$$V = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} - \Delta i \left(a \frac{\partial}{\partial a} - a^* \frac{\partial}{\partial a^*} \right) - \Delta i \left(p \frac{\partial}{\partial p} - p^* \frac{\partial}{\partial p^*} \right),$$

است، داریم:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{-1} = \frac{da}{-\Delta ia} = \frac{da^*}{\Delta ia^*} = \frac{dp}{-\Delta ip} = \frac{dp^*}{\Delta ip^*}. \quad (11.3)$$

باجل معادلات مشخصه (۱۱.۳) ناوردهای زیر را خواهیم داشت:

$$a(z, t) = A(z') e^{\Delta i t},$$

$$p(z, t) = P(z') e^{\Delta i t}, \quad (12.3)$$

به طوری که $z' = z + t$ است.

جوابهای (۱۲.۳) تقویت سیگنال ورودی تک فرکانس هارمونیک را توصیف می کند، به طوری که Δ ، عدم تطابق بین فرکانس سیگنال ورودی و فرکانس رزونانس اثر دوپلر غیر عادی (۱.۳) را نشان می دهد. برای به دست آوردن دامنه A و P در جواب (۱۲.۳) به حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی زیر می پردازیم که با جایگذاری رابطه (۱۲.۳) در دستگاه معادلات (۳.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dz'} + i\Delta A = P, \\ \frac{dP}{dz'} + iP|P|^2 e^{i\Delta} = A. \end{cases} \quad (13.3)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (۱۳.۳) تنها با شرایط اولیه $A(\circ) = A_0$ و $P(\circ) = \circ$ حل می شود، که $A(\circ)$ دامنه سیگنال ورودی می باشد.

۳.۳ جواب‌های خود متشابه

ناوردای تبدیلات تجانس گروه یک پارامتری G_3 جواب‌های خودمتشابه از معادله (۳.۳) را به ما می‌دهد. با حل معادلات مشخصه:

$$\frac{dt}{t} = \frac{dz}{-z} = \frac{\gamma da}{\gamma a} = \frac{\gamma dp}{p},$$

داریم:

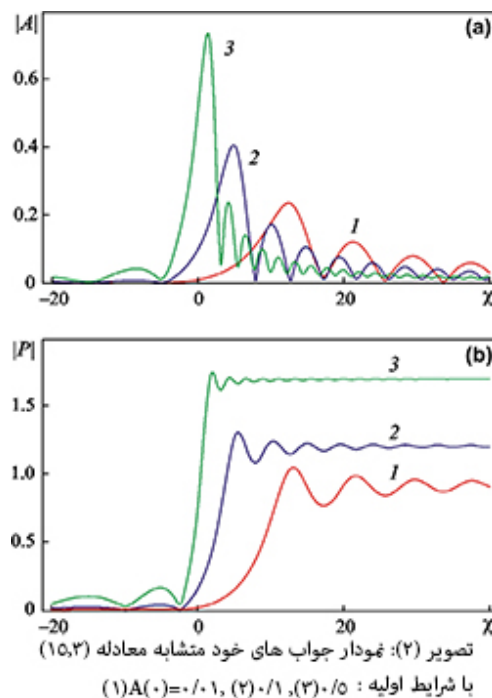
$$\begin{aligned} a &= t^{\frac{1}{\gamma}} A(\chi), \\ p &= t^{\frac{1}{\gamma}} P(\chi), \end{aligned} \quad (14.3)$$

به‌طوری‌که $\chi = tz$ متغیر خودمتشابه است.

حال با جانشانی رابطه (۱۴.۳) در دستگاه (۳.۳) به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر می‌رسیم.

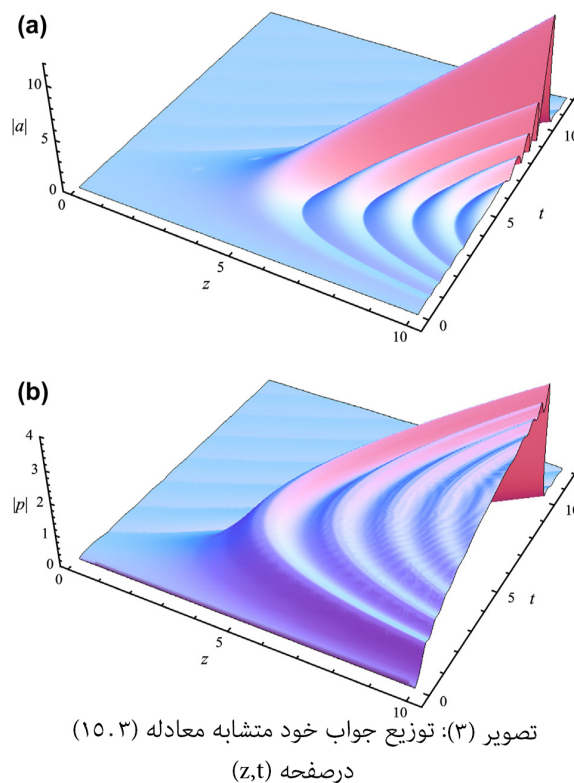
$$\begin{cases} \chi \frac{dA}{d\chi} + \frac{\gamma}{\gamma} A(\chi) = P(\chi), \\ \frac{dP}{d\chi} + iP|P|^{\gamma} = A(\chi). \end{cases} \quad (15.3)$$

معادله (۱۵.۳) با حذف نقاط تکینگی $\chi = 0$ و شرط اولیه $P(0) = \frac{\gamma}{\gamma} A(0)$ به‌صورت عددی حل شده است، در تصویر (۲) جواب‌های خودمتشابه به‌ازای مقادیر مختلف $A(0)$ نشان داده شده است.



در تصویر (۲)، (a) یک دنباله نوسانی از پالسهای الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد. تصویر (۲)، (b) نشان می‌دهد که الکترون‌ها در طول برهمکنش با پالس الکترومغناطیسی حرکت دورانی به دست می‌آورند. در پی افزایش سرعت و دامنه پالس با افزایش $A(^\circ)$ ، مقدار کیفی جواب‌ها بدون تغییر باقی خواهد ماند.

برای درک بهتر تصاویر تکامل پالسهای الکترومغناطیسی، از جواب خودمتشابه $A(\chi)$ و $P(\chi)$ توزیع میدان $a = t^{\frac{1}{2}} A((z-t)t)$ و حرکت دورانی $p = t^{\frac{1}{2}} P((z-t)t)$ در صفحه (z, t) در تصویر (۳)، کشیده شده است. تصویر (۳)، به وضوح فرآیند افزایش و فشردگی پالس را نشان می‌دهد. باتوجه به اینکه متغیر خودمتشابه به صورت $\chi = (z-t)t$ است، در صورتی که $t \rightarrow \infty$ آن‌گاه ماکسیمم



مسیر مجانبی پالس به خط $z = t$ میل می‌کند. بنابراین راس دامنه پالس تا زمانی که طول موج به طور خطی با z کاهش یابد، متناسب با $z^{\frac{1}{2}}$ افزایش خواهد یافت. این بحث در مایکروویوهای الکترونیکی از اهمیت بالایی برخوردار است، زیرا نیازی اساسی در تولید پالس‌های مایکروویوی خیلی کوتاه با قدرت بالا است. البته این جواب خودمتشابه نیاز به تحقیقات بیشتری دارد، زیرا طبق رابطه (۱۴.۳)، زمانی که $t \rightarrow \infty$ دامنه و عرض پالس به صفر میل می‌کند. حال سوالی که مطرح می‌شود این است که چگونه می‌توان شرطی مرزی برای این جواب خودمتشابه یافت؟

در آزمایشات، با تقویت پالس‌های مایکروویوی خیلی کوچک، یک پالس الکترومغناطیسی کوچک در ورودی موجبر تزریق می‌شود. در نتیجه یک پرتو غیر آشفته در مسیر مستقیم با سرعت ثابت $v_{||}$ در

سیستم تزریق می‌شود. بنابراین یک شرایط مرزی مناسب برای معادله (۳.۳) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} a(z = \circ, t) &= a_{in}(t) \\ p(z = \circ, t) &= \circ \end{aligned} \quad (۱۶.۳)$$

به طوریکه a_{in} باید به صورت پالس متمرکز شده با دامنه کوچک باشد. شرط دوم بدین معناست که الکترون‌ها تنها سرعت طولی دارند. حال این شرایط با جواب‌های ناوردای تجانس (۱۵.۳) مطابقت دارد.

۴.۳ جواب‌های خودمتشابه بافرکانس مدوله شده

مدولاسیون فرآیند گنجاندن سیگنال حاوی اطلاعات در سیگنالی دیگر است. مدولاسیون فرکانس بدین معناست که فرکانس سیگنال حامل بر اساس تغییرات سیگنال اعمال شده تغییر داده شود. در این بخش به حل معادلاتی که تکامل پالس خودمتشابه با فرکانس مدوله شده را توصیف می‌کنند، می‌پردازیم.

این معادلات از ترکیب خطی $V_3 + \Delta V_4$ ، $\Delta \in \mathbb{R}$ ، به صورت:

$$\begin{aligned} V = & t \frac{\partial}{\partial t} - z \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{3}{4}a + \Delta ia \right) \frac{\partial}{\partial a} + \left(\frac{3}{4}a^* - \Delta ia^* \right) \frac{\partial}{\partial a^*} \\ & + \left(\frac{1}{4}p + \Delta ip \right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{1}{4}p^* - \Delta ip^* \right) \frac{\partial}{\partial p^*}, \end{aligned}$$

به دست خواهد آمد. با حل معادلات دیفرانسیل:

$$\frac{dt}{t} = \frac{dz}{-z} = \frac{da}{\frac{3}{4}a + \Delta ia} = \frac{da^*}{\frac{3}{4}a^* - \Delta ia^*} = \frac{dp}{\frac{1}{4}p + \Delta ip} = \frac{dp^*}{\frac{1}{4}p^* - \Delta ip^*}, \quad (۱۷.۳)$$

خواهیم داشت:

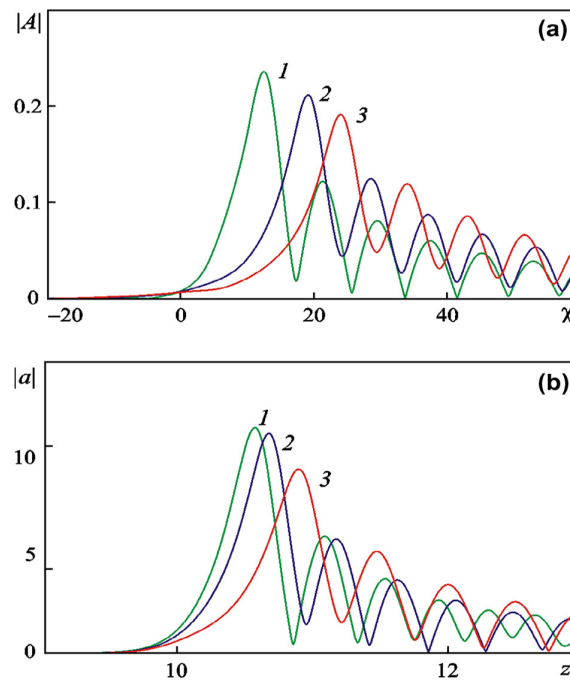
$$\begin{aligned} a &= t^{\frac{3}{4}} A(\chi) e^{i\Delta \ln t}, \\ p &= t^{\frac{1}{4}} P(\chi) e^{i\Delta \ln t}, \end{aligned} \quad (۱۸.۳)$$

به طوریکه $\chi = -\frac{t}{z}$ متغیر خودمتشابه است.

حال با جانشانی رابطه (۱۸.۳) در معادله (۳.۳) به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \chi \frac{dA}{d\chi} + \left(\frac{3}{4} + i\Delta \right) A = P, \\ \frac{dP}{d\chi} + iP|P|^2 = A. \end{cases} \quad (۱۹.۳)$$

باتوجه بهاینکه $a = a_x + ia_y$ بیانگر موج مایکروویوی با پولاریزاسیون مدور است و $p = p_x + ip_y$ بیانگر تکانه انتقالی نرمالیزه شده الکترون است. بنابراین طبق (۱۸.۳) a_x و p_x مدولاسیون $\cos(\Delta \ln t)$ خواهند شد تا زمانی که a_y و p_y با $\sin(\Delta \ln t)$ مدوله شده باشند. جوابهای معادلات (۱۹.۳) در تصویر (۴)، (a) به صورت عددی نشان داده شده است که مشابه



تصویر (۴): (a) نمودار جواب خود متشابه معادله (۱۹.۳)

با شرایط مرزی $A(0) = 0.01$.

(b) نمودار حل عددی معادله (۲.۳) در $t=0$

برای $\Delta = 0$ ، (۱)، (۲) $3/0$ ، (۳) $5/0$.

معادلات (۱۵.۳) تقویت و فشردگی پالس را تا زمانی که در موجبر انتشار می یابد، توصیف می کند. همانطور که در تصویر (۴)، (a) می بینیم با افزایش Δ ، مقدار و راس دامنه کاهش می یابد. شبیه سازی های عددی تقویت یک پالس کوچک حامل فرکانس رزونانس (۱۰.۳)، رفتاری مشابه را نشان می دهد. حل عددی معادلات (۲.۳)، با شرایط :

$$a(z=0, t) = 0.2 e^{-(2t)^2} e^{i\Delta t},$$

$$p(z=0, t) = 0. \quad (20.3)$$

در تصویر (۴)، (b) مقادیر $|a|$ را به ازای $t=0$ و مقادیر مختلف Δ نشان می دهد. همانطور که مشاهده می کنیم با افزایش Δ ، راس و مقدار تقویت پالس کاهش می یابد.

مراجع

- [1] Boothby W., *An introduction to differentiable manifolds and differential geometry*, Academic Press, New York, (1975).
- [2] Einat M., and Jerby E., *Normal and anomalous Doppler effects in a dielectric-loaded stripline cyclotron-resonance maser oscillator*, phys. Rev. E (1997) ,Aps., vol. **56**, no. 5, 5996.
- [3] Ginzburg N.S., *Nonlinear theory of electromagnetic wave generation and amplification based on the anomalous Doppler effect*, Springer. Radiophys. Quantum Electron, (1979), vol. **22**, no. 4, 323-330.
- [4] Ginzburg N.S., Zotova IV., Cross AW., Phelps ADR., Yalandin MI., Rostov VV., *Generation, amplification, and nonlinear self-compression of powerful superradiance pulses*, IEEE Trans. Plasma Sci. (2013), vol.**41**, no. 4, 646-660.
- [5] Ginzburg N.S., Zotova IV., Sergeev AS., *Self-induced transparency and electromagnetic pulse compression in a plasma or an electron beam under cyclotron resonance conditions*, APS. Phys. Rev. Lett. (2010), vol. **105**.
- [6] George W.B., Alexei F., Cheviakov and Stephen C. Anco., *Applications of symmetry methods to partial differential equations*, Springer, (2010), vol. **168**.
- [7] Ginzburg V.L., Frank IM., *On Doppler effect at superluminal velocity* [in Russian]. Dokl. Acad. Nauk USSR, (1947), vol.**56**, 58.
- [8] Hejazi S.R., *Contact geometry and symmetry analysis of differential equations*, Ph.D. dissertation, Iran University of Science and Technology, Tehran, (2011).
- [9] Hydon P.E., *Symmetry method for differential equations*, Cambridge University press, Cambridge , UK. (2000).
- [10] Ibragimov N.H., *Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics*, (for the 150th anniversary of Sophus Lie), Russ, Math, Surveys. IOP Publishing, (1992), vol.**47**, 4, 89.

- [11] Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A., *Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$* , Journal of mathematical physics, AIP Publishing, (1998), vol. **32**, 11, 2988–2995.
- [12] Ibragimov N.H., *Transformation groups applied to mathematical physics*, Springer Science & Business Media, (2001), vol. **3**.
- [13] Kong L-B Hou Z-L., Xie C-R., *The self-consistent nonlinear theory of electron cyclotron maser based on anomalous Doppler effect*, Appl. Phys. Lett. AIP Publishing, (2011), vol. **98**.
- [14] Kong L-B., Liu P-K., Xiao L., *Nonlinear analysis of electron cyclotron maser based on anomalous Doppler effect*, Phys. Plasma. (2007), vol. **14**.
- [15] Lee J.M., *Introduction to smooth manifolds*, GTM. New York. Springer, (2013).
- [16] Mesyats G.A., Yalandin M.I., *High-power picosecond electronics*, Phys. Usp. (2005), pp: 211-229.
- [17] Nezlin M.V., *Negative-energy waves and the anomalous Doppler effect*, Phys. Usp. (1976), 946-954.
- [18] Ogura K., Amin M.R., Minami K., Zheng X.D., Suzuki Y., Kim W.S., *Experimental demonstration of a high-power slow-wave electron cyclotron maser based on a combined resonance of Cherenkov and anomalous Doppler interaction*, APS. Phys. Rev. E. (1996), vol. **53**.
- [19] Oliveri F., *Lie symmetries of differential equations, classical results and recent contributions*, symmetry. Molecular Diversity Preservation International, (2010), 658-706.
- [20] Olver P.J., *Equivalence, invariants and symmetry*. Cambridge University Press, (1995).
- [21] Olver P.J., *Applications of Lie groups to differential equations*, GTM. New York, Springer Science & Business Media, (2000).
- [22] Ryskin N.M., Ginsburg N.S., Zotova I.V., *Self-similar modes of amplification and compression of electromagnetic pulses in their interaction with electron flows*, Springer, Tech. Phys. Lett. (2013), vol. **39**, 5, 446-449.
- [23] Ryskin N.M., *Lie symmetry analysis of electron–electromagnetic wave interaction under condition of the anomalous Doppler effect*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Elsevier, (2014), vol. **19**, 9, 2942-2950.
- [24] Warner Frank W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer Science & Business Media, 94, (2013).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

experiment	آزمایش
electron	الکترون
electromagnetic	الکترومغناطیس
prolongation	امتداد
transitive	انتقالی
electron charge	بار الکترون
tangent vector	بردار مماس
section	برش
interaction	برهمکنش
dimension	بعد
pulse	پالس
basis	پایه
beam	پرتو
polarization	قطبی شدن
function	تابع
fiber	تار
point transformation	تبدیل نقطه ای
fiber preserving transformation	تبدیل حافظ تار
basis transformation	تبدیل پایه ای
inject	تزریق
single-frequency	تک فرکانس
momentum	تکانه
amplification	تقویت
mass	جرم
coordinate chart	چارت مختصاتی

external	خارجی
self-similar	خودمتشابه
amplitude	دامنه
anomalous Doppler	دوپلر غیرعادی
rotational	دورانی
diffeomorphism	دیفئومورفیسم
peak	راس
maximal rank	رتبه ماکسیمال
resonance	تشدید
velocity	سرعت
phase velocity	سرعت فازی
input signal	سیگنال ورودی
cyclotron	شتاب دهنده
multiplier	ضریب
homeomorphism	همئومورفیسم
action	عمل
infinitesimal group action	عمل گروه بی نهایت کوچک
mismatch	عدم تطابق
nonlinear	غیرخطی
Lorentz-factor	فاکتور لورنتز
compression	فشرده‌گی
topological space	فضای توپولوژیک
total space	فضای کامل
jet space	فضای جت
tangent space	فضای مماس
Hausdorff space	فضای هاسدورف
Leibniz' rule	قاعده لایبنیتز
bundle	کلاف
vector bundle	کلاف برداری
tangent bundle	کلاف مماسی
transformation group	گروه تبدیلات
Lie symmetry group	گروه تقارن لی

rotation group	گروه دوران
Lie group	گروه لی
one-parameter group	گروه یک پارامتری
lemma	لم
microwave	مایکروویو
dependent variable	متغیر وابسته
independent variable	متغیر مستقل
level set	مجموعه تراز
axial	محوری
circularly	مدور
modulation	مدولاسیون
boundary	مرزی
equation	معادله
ordinary differential equation	معادله دیفرانسیل معمولی
partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی
determining equation	معادله مشخصه
wave	موج
traveling wave	موج سیار
slow wave	موج آرام
waveguide	موجبر
locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
infinitesimal generator	مولد بی نهایت کوچک
manifold	منیفلد
vector field	میدان برداری
magnetic wave	موج مغناطیسی
maser	میزر
differential invariant	ناوردای دیفرانسیلی
oscillator	نوسانگر
harmonic	همساز
identity	همانی
connected	همبند
smooth	هموار

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

action	عمل
amplification	تقویت
amplitude	دامنه
anomalous Doppler	دوپلر غیرعادی
axial	محوری
basis	پایه
basis transformation	تبدیل پایه ای
beam	پرتو
boundary	مرزی
bundle	کلاف
circularly	مدور
compression	فشردگی
connected	همبند
coordinate chart	چارت مختصاتی
cyclotron	شتاب دهنده
dependent variable	متغیر وابسته
determining equation	معادله مشخصه
diffeomorphism	دیفئومورفیسم
differential invariant	ناوردای دیفرانسیلی
dimension	بعد
electron	الکترون
electromagnetic	الکترومغناطیس
electron charge	بار الکترون
equation	معادله
experiment	آزمایش

external.....	خارجی
fiber.....	تار
fiber preserving transformation.....	تبدیل حافظ تار
function.....	تابع
harmonic.....	همساز
Hausdorff space.....	فضای هاسدورف
homeomorphism.....	همئومورفیسم
independent variable.....	متغیر مستقل
infinitesimal generator.....	مولد بی نهایت کوچک
infinitesimal group action.....	عمل گروه بی نهایت کوچک
identity.....	همانی
inject.....	تزریق
input signal.....	سیگنال ورودی
interaction.....	برهمکنش
jet space.....	فضای جت
Leibniz' rule.....	قاعده لایبنیتز
lemma.....	لم
level set.....	مجموعه تراز
Lorentz-factor.....	فاکتور لورنتز
Lie group.....	گروه لی
Lie symmetry group.....	گروه تقارن لی
locally Euclidean.....	موضعا اقلیدسی
manifold.....	منیفلد
momentum.....	تکانه
magnetic wave.....	موج مغناطیسی
maser.....	میزر
mass.....	جرم
maximal rank.....	رتبه ماکسیمال
microwave.....	مایکروویو
mismatch.....	عدم تطابق
modulation.....	مدولاسیون
multiplier.....	ضریب

nonlinear	غیرخطی
one-parameter group	گروه یک پارامتری
ordinary differential equation	معادله دیفرانسیل معمولی
oscillator	نوسانگر
partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی
peak	راس
phase velocity	سرعت فازی
polarization	قطبی کردن
point transformation	تبدیل نقطه ای
prolongation	امتداد
pulse	پالس
resonance	تشدید
rotational	دورانی
rotation group	گروه دوران
section	برش
self-similar	خودمتشابه
slow wave	موج آرام
single-frequency	تک فرکانس
smooth	هموار
tangent bundle	کلاف مماسی
tangent space	فضای مماس
tangent vector	بردار مماس
topological space	فضای توپولوژیک
total space	فضای کامل
transformation group	گروه تبدیلات
transitive	انتقالی
traveling wave	موج سیار
vector bundle	کلاف برداری
vector field	میدان برداری
velocity	سرعت
wave	موج
waveguide	موجبر

نمایه

- اثر دوپلر غیر عادی، ۴۷
 اطلس، ۴
 امتداد عمل گروه، ۳۰
 امتداد میدان برداری، ۳۳
 ایمرژن، ۱۱
 برش هموار، ۹
 تانسور کواریان، ۱۲
 تبدیل حافظ تار، ۲۶
 تبدیل نقطه ای، ۲۵
 تبدیل پایه ای، ۲۶
 تقارن، ۲۷
 تک فرکانس هارمونیک، ۵۴
 تکانه انتقالی، ۴۸
 جبر لی، ۱۷
 جواب خودمشتابه، ۴۱
 جواب‌های خودمشتابه، ۵۵
 جواب‌های سیار، ۵۴
 دیفئوموفیسم، ۴
 رتبه ماکسیمال، ۳۱
 زیر گروه یک پارامتری، ۱۹
 زیرجبرلی، ۱۹
 سابمرژن، ۱۱
 سرعت فازی، ۴۷
 سیکلوترون، ۴۷
 فاکتور لورنتز، ۴۷
 فرم دیفرانسیلی، ۱۳
 فرکانس رزونانس، ۴۷
 فرکانس مدوله شده، ۵۷
 فشردگی پالس، ۵۸
 فضای جت، ۲۹
 فضای مماسی، ۵
 فضای کامل، ۲۵
 ماکسیمال، ۴
 مدولاسیون، ۵۷
 مشتق جهتی، ۵
 مشخصه میدان برداری، ۳۴
 معادلات دیفرانسیل، ۲۵
 معادله ZKB، ۴۳
 معادله دیفرانسیل معمولی، ۲۹
 معادله لاپلاس، ۳۱
 منحنی هموار، ۷
 موجبر، ۴۸
 مولد بی نهایت کوچک، ۲۰، ۳۱
 میزر، ۴۷
 پالس‌های الکترومغناطیسی، ۵۶
 پولاریزاسیون مدور، ۴۸، ۵۸
 کرشه لی، ۹
 کلاف برداری، ۸
 کلاف مماسی، ۸
 کنج هموار، ۹
 گروه تبدیلات انتقال، ۵۳
 گروه تبدیلات تجانس، ۵۳

گروه تقارن، ۲۶

گروه دوران، ۲۷

گروه لی، ۱۵

Abstract

In this thesis, we study Lie symmetry method for interaction equation of electron cyclotron oscillator with an electromagnetic wave under condition of the anomalous Doppler effect, for finding and analysis scaling invariance of the system and self-similar solutions. This solutions describe amplification and compression of an electromagnetic pulse. This results of theoretical analysis are confirmed by numerical simulations.

keywords: Partial differential equations, Differential equations symmetry, Invariant-group solutions, Anomalous Doppler effect, self-similar solution, Pulse compression.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

**Symmetry analysis of
electron-electromagnetic wave
interaction under condition of the anomalous
Doppler effect**

Masoumeh Mahdavi

Supervisor

Seyed Reza Hejazi

Advisor

Nima Azadi Tinat

November 2016